корректирующие способности в среднем не должны быть слишком высокими, чтобы в большинстве случаев при декодировании не допустить исправления больше чем $t+s$ ошибок. Рассмотрены теоретические возможности создания таких кодов. В частности, сделан первый шаг к выделению более сложной оценки мощности кода, учитывающей не только кодовое расстояние $d = 2t + 1$, но и ненулевую вероятность исправления кодом $t + 1$ ошибки.

Пусть C — двоичный (n, d)-код; $A(x) = \{y \in \mathbb{F}_2^n : \mathrm{d}(x, y) \leqslant \min\limits_{z \in C, z \neq x} \mathrm{d}(z, y)\}$ — множество векторов булева куба, для которых x является ближайшим кодовым вектором; при каждом x определены множества $B(x) \subseteq A(x)$ таким образом, что для любых различных x, x' множества $B(x)$ и $B(x')$ не пересекаются и выполняется $\bigcup\limits_{x \in C} B(x) = \mathbb{F}_2^n$.

Теорема 1. Пусть для любого кодового слова x двоичного (n, d)-кода C выполняется $|B(x)| \leqslant \ell$. Тогда $|C| \leqslant 2^n/\ell$.

Теорема 2. Если $n = 2^m - 1$, $\ell = n + 1$, то оценка теоремы 1 достигается на совершенных кодах. Если $n = 2^m - 1$, m чётно, $\ell = 1 + n + \mathrm{C}_n^2 + n(n + 3)/2$, то оценка теоремы 1 достигается на кодах Препараты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hao F., Anderson R., and Daugman J.* Combining Crypto with biometrics effectively // IEEE Trans. Comput. 2006. V. 55. No. 9. P. 1081–1088.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/11/33

О КОЛИЧЕСТВЕ АТТРАКТОРОВ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОРИЕНТАЦИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

А. В. Жаркова

Рассматриваются конечные динамические системы ориентаций полных графов. Состояниями системы являются все возможные ориентации полного графа, а эволюционная функция задаётся так: динамическим образом орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Подсчитывается количество аттракторов в системе, приводятся соответствующие таблицы для конечных динамических систем ориентаций полных графов с количеством вершин от двух до десяти включительно.

Ключевые слова: *аттрактор, граф, конечная динамическая система, ориентация графа, полный граф, турнир, эволюционная функция.*

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем, в частности динамических систем двоичных векторов [1, 2], — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса. В модели [3] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. В настоящей работе полные графы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

Под *ориентированным графом* (*орграфом*) понимается пара $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, где V — конечное непустое множество (*вершины* орграфа); $\beta \subseteq V \times V$ — отношение на множестве V (пара $(u, v) \in \beta$ называется *дугой* орграфа с *началом* u и *концом* v). Отношение β называют *отношением смежности.* Отсутствие петель (дуг с совпадающими началом и концом) в орграфе $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ означает антирефлексивность его отношения смежности β. *Неориентированным графом* (*графом*) называется пара $G = (V, \beta)$, где β — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Дуги неориентированного графа называют *рёбрами.* Орграф $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ называется *направленным графом* (*диграфом*), если отношение β антисимметрично. Пусть $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ — некоторый орграф, $v \in V$ — одна из его вершин. *Степенью исхода* вершины $v \in V$ называется число $d^+(v)$ дуг орграфа $\overrightarrow{G}$, имеющих своим началом v; *степень захода* вершины v — это количество $d^-(v)$ дуг, имеющих v своим концом. Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается K_n. Маршрут, в котором никакая дуга не встречается более одного раза, называется *путём.* Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его дугам, по определению является *простым.* Простой циклический путь в орграфе называется *контуром. Турниром* называется полный направленный граф [4].

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ), где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*; $\delta\colon S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы.* Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами.* Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры, в свою очередь, называются предельными циклами, или *аттракторами.* Под *длиной* аттрактора понимается количество образующих его (принадлежащих ему) состояний.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без проведения динамики. К их числу относится описание аттракторов системы, определение их количества. Автором написаны программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры конечных динамических систем, ассоциированных с некоторыми типами графов [5]. Описаны аттракторы конечных динамических систем ориентаций некоторых типов графов [6, 7]). В данной работе подсчитывается количество аттракторов в конечных динамических системах ориентаций полных графов.

Пусть дан полный граф $G = (V, \beta)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n > 1$, $m = n(n-1)/2$ — число рёбер. Придадим рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф (турнир) $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, где отношение смежности β антирефлексивно и антисимметрично. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α, которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в *стоки* (вершины с нулевой степенью исхода), а остальные дуги оставляет без изменения, в результате получим орграф $\alpha(\overrightarrow{G})$. Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту данной динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

Таким образом, будем рассматривать конечную динамическую систему (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, где Γ_{K_n} — множество всех возможных ориентаций полного графа K_n, $|\Gamma_{K_n}| = 2^m$. На рис. 1 изображена карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α).

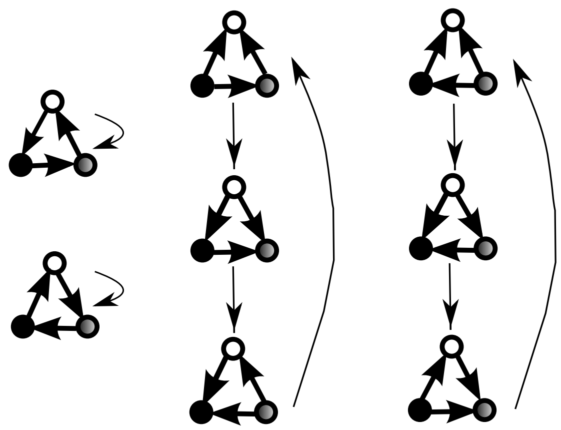

Рис. 1. Карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α)

В [3] рассматривается конечная динамическая система (Ω, α), где Ω — множество всех бесконтурных ориентаций данного графа, и замечается, что для полного графа существует $n!$ бесконтурных ориентаций, где $n!$ — количество перестановок его вершин, при этом система имеет $(n-1)!$ бассейнов, каждый из которых состоит исключительно из аттрактора длины n.

Теорема 1. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, количество аттракторов длины 1 равно
$$2^{(n-1)(n-2)/2}(2^{n-1} - n).$$

Теорема 2. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, количество аттракторов длины n равно $(n-1)!$.

Теорема 3. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, количество аттракторов (бассейнов) равно
$$2^{(n-1)(n-2)/2}(2^{n-1} - n) + (n-1)!.$$

Например, в конечной динамической системе (Γ_{K_3}, α) (рис. 1) 4 аттрактора (бассейна): два аттрактора длины 1 и два аттрактора длины 3.

В таблице приведены данные по количеству аттракторов в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 < n < 11$, полученные с помощью вычислительных экспериментов.

n	**Количество аттракторов (бассейнов)**	**Длины** 1	**Длины** n
2	1	0	1
3	4	2	2
4	38	32	6
5	728	704	24
6	26744	26624	120
7	1868496	1867776	720
8	251663280	251658240	5040
9	66303597952	66303557632	40320
10	34497177684352	34497177321472	362880

Можно заметить, что при увеличении n количество аттракторов длины 1 в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) начинает составлять абсолютное большинство по сравнению с аттракторами длины n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425–439.
2. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государствetherенного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
3. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001.
4. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Заявка № 2009613140. Дата поступления 22 июня 2009 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
6. *Жаркова А. В.* Аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3(25). С. 58–67.
7. *Жаркова А. В.* Об аттракторах в конечных динамических системах ориентаций полных графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 112–114.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/11/34

О МИНИМАЛЬНОМ РЁБЕРНОМ 1-РАСШИРЕНИИ ГИПЕРКУБА

А. А. Лобов, М. Б. Абросимов

Граф G^* с n вершинами называется минимальным рёберным k-расширением n-вершинного графа G, если G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер, и G^* имеет при этом минимально возможное число рёбер. Гиперкуб Q_n — это регулярный 2^n-вершинный граф порядка n, представляющий собой декартово произведение n полных 2-вершинных графов K_2. Предлагается семейство графов Q_n^*, представители которого при $n > 1$ являются минимальными рёберными 1-расширениями соответствующих гиперкубов. Вычислительный эксперимент показывает, что при $n \leqslant 4$ эти расширения являются единственными с точностью до изоморфизма.

Ключевые слова: *граф, гиперкуб, рёберная отказоустойчивость, минимальное рёберное 1-расширение.*

Введение

Определение 1. Декартовым произведением $G_1 \times G_2$ двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется граф $G = (V, \alpha)$, такой, что $V = V_1 \times V_2$, вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в G тогда и только тогда, когда либо $u_1 = v_1$ и u_2, v_2 смежны в G_2, либо $u_2 = v_2$ и u_1, v_1 смежны в G_1.

Определение 2. Гиперкубом Q_n (n-кубом) называется граф, являющийся декартовым произведением n полных 2-вершинных графов K_2.

Можно дать рекурсивное определение: одномерным гиперкубом Q_1 назовём граф K_2; n-мерным гиперкубом при $n > 1$ будем называть граф $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$, $n > 1$.

Гиперкуб Q_n — это регулярный 2^n-вершинный граф порядка n. Семейство гиперкубов достаточно хорошо изучено [1].