

УДК: 532.135 + 532.517.4 + 678.053.3

**А.В. Шваб, А.А.Марценко, М.С. Марценко****МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ  
ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ  
В СМЕСИТЕЛЬНОМ БУНКЕРЕ<sup>1</sup>**

Проводится исследование динамики высококонцентрированной гранулированной хорошо сыпучей среды в вертикальном смесительном бункере. Для описания такого течения авторами предложена дифференциальная модель, основой которой являются положения механики сплошной среды с учетом реологических свойств зернистого материала и дополнительное уравнение переноса хаотической энергии пульсационного движения гранул. Достоверность предложенной модели устанавливается сопоставлением рассчитанного распределения осредненной скорости среды с опытными данными.

**Ключевые слова:** гидродинамика, скорость, гранулированная среда, условия скольжения, инерционный режим, напряжение, вихрь, функция тока.

В настоящее время в порошковой технологии нашли широкое применение аппараты дозирования, сушки, смешения и усреднения гранулированных сред, а также их транспортирование плотным слоем [1, 2]. Перспективным направлением дальнейшего совершенствования этих устройств является создание математических моделей, способных, адекватно опытным данным, объяснить и предсказать происходящие в них процессы [3, 4].

Анализ научной литературы по экспериментальным и теоретическим исследованиям показывает, что движение плотного слоя гранулированной среды условно разделяют на два режима: квазистатический, соответствующий малым скоростям сдвига, который описывается в рамках теории предельного равновесия, и инерционный, отвечающий большим скоростям сдвига [5]. При инерционном режиме движения внутренние напряжения в среде возникают вследствие переноса импульса гранулами аналогично тому, как это происходит при хаотическом движении молекул в жидкости или газе. Такое течение гранулированного материала отличает его от квазистатического режима и приводит к существенной зависимости внутренних напряжений от скорости сдвига. Описание этого режима течения основывается, как правило, на законах сохранения массы и импульса. Такой режим течения высококонцентрированной среды получил название «теории быстрых движений гранулированных сред».

**Физическая и математическая постановка задачи**

Рассматривается установившееся гравитационное течение высококонцентрированной гранулированной среды в вертикальном бункере с расположенными в нем горизонтальными тарелками для интенсивного перемешивания основного и ключевого компонентов смеси. Схема такого бункера изображена на рис. 1. На входе в канал сверху с постоянной скоростью подается несмешанная однородная

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ 13-08-00372 а.

по физическим свойствам гранулированная среда. В процессе ее движения по каналу происходит процесс ее усреднения за счет явлений конвекции и диффузии, которая появляется за счет хаотического пульсационного движения гранул в инерционном режиме течения.

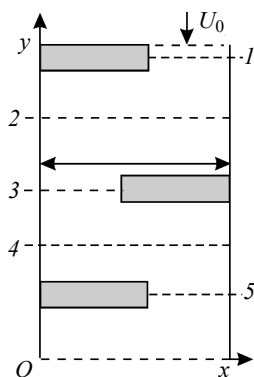


Рис. 1. Схема движения высококонцентрированной гранулированной среды в бункере

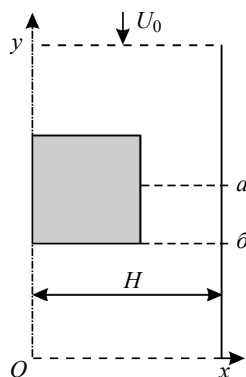


Рис. 2. Схема движения высококонцентрированной зернистой среды при сопоставлении расчетных и опытных данных [10]

Для описания динамики высококонцентрированной гранулированной среды в инерционном режиме течения воспользуемся системой уравнений, состоящей из уравнений переноса импульса и уравнения непрерывности. Путем осреднения этих уравнений по времени и с учетом представления корреляций пульсационных скоростей с помощью градиентной модели Буссинеска получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (B_0 + B) \frac{\partial U_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (B_0 + B) \frac{\partial U_x}{\partial y} \right] + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial U_y}{\partial x}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (B_0 + B) \frac{\partial U_y}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (B_0 + B) \frac{\partial U_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial U_y}{\partial y}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $B$  — модельный коэффициент кинематической вязкости, учитывающий дополнительный перенос импульса за счет пульсационного движения гранулированной среды и  $B_0$  — постоянное значение вязкости для хорошо сыпучей зернистой среды, которое в общем случае может зависеть от напряжений в гранулированной среде.

Из опытных данных известно, также, что движение гранулированной среды в инерционном режиме напоминает турбулентное течение, обладающее пульсация-

ми скорости. Энергию этого стохастического движения [6] можно моделировать аналогично, как это осуществляется в теории турбулентности. Тогда уравнение для кинетической энергии стохастического движения  $E$  можно представить в виде уравнения переноса, которое имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + U_x \frac{\partial E}{\partial x} + U_y \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (B_0 + B) \frac{\partial E}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (B_0 + B) \frac{\partial E}{\partial y} \right] + G - c_2 \frac{E^{3/2}}{L}; \quad (4)$$

$$B = c_1 \sqrt{E} L; \quad G = B \left[ 2 \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial U_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Здесь диссипация энергии стохастического движения гранулированной среды и определение модельного коэффициента вязкости  $B$  записываются с помощью формул Колмогорова – Прандтля. Перемещение гранул в пульсационном движении ограничено ввиду высокой концентрации гранулированной среды, что позволяет в первом приближении определить масштаб длины хаотического движения как величину постоянную ( $L = \text{const}$ ).

В дальнейшем будем использовать безразмерную форму уравнений. Безразмерные переменные получим с использованием в качестве масштаба длины и скорости: соответственно расстояние  $H$  между стенками вертикального канала и среднюю вертикальную скорость  $U_0$  на входе в бункер.

Систему уравнений (1) – (5) удобно преобразовать к эквивалентной системе уравнений в переменных вихрь – функция тока. Для этого введем определение вихря и функции тока по формулам

$$\Omega = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Подставляя в определение вихря значение скоростей  $u_x$  и  $u_y$  и учитывая, что рассматриваемая стационарная задача решается методом установления по времени, получим нестационарное уравнение Пуассона для определения функции тока в виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \Omega. \quad (6)$$

После перекрестного дифференцирования уравнений (1) – (2), получим уравнение переноса вихря

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x \Omega}{\partial x} + \frac{\partial u_y \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1+b) \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1+b) \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + 4 \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение переноса кинетической энергии пульсационного движения гранул представим в дивергентном и безразмерном виде:

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x e}{\partial x} + \frac{\partial u_y e}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1+b) \frac{\partial e}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1+b) \frac{\partial e}{\partial y} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{b}{\text{Re}} \left[ 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] - c_2 \frac{e^{3/2}}{l}. \quad (8)$$

Безразмерное значение модельной вязкости определяется формулой

$$b = \frac{c_1}{\text{Re}} \sqrt{el}. \quad (9)$$

Здесь  $\text{Re} = HU_0/B_0$  – число Рейнольдса,  $e = E/U_0^2$ ,  $b = B/B_0$ ,  $u_x = U_x/U_0$ ,  $u_y = U_y/U_0$ ,  $l = L/H$ ,  $\tau = tU_0/H$  и безразмерная форма координат  $x, y$  получена с помощью масштаба длины  $H$ ,  $c_1$  и  $c_2$  – постоянные.

Для получения единственного решения используются следующие граничные условия. Во входном сечении для безразмерных значений вертикальной и горизонтальной составляющих вектора скорости используются условия:  $u_y = -1$ ,  $\partial u_x / \partial y = 0$ . На выходной границе используются мягкие условия установления  $\partial / \partial y = 0$  для всех искомых функций. На стенках канала нормальная компонента скорости равна нулю, а для тангенциальной составляющей скорости применяется условие скольжения. В работе [7] использование условия скольжения, которое было получено из определения тензора внутренних напряжений вблизи стенки, не привело к лучшей согласованности расчетов с опытными данными. В настоящей работе полагается, что на стенке скорость среды определяется не только величиной тензора напряжений, но и величиной сухого, кулоновского трения пары стенка – частица, и поэтому для определения условия скольжения вводится независимый эмпирический параметр, величина которого определяется из сопоставления численных и опытных данных. В безразмерном виде условие частичного скольжения на стенке для гранулированной среды можно представить в виде

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = \beta u_s, \quad (10)$$

где  $n$  – нормаль к стенке;  $u_s$  – тангенциальная составляющая вектора скорости;  $\beta = \beta^0/H$  – безразмерное значение независимого эмпирического коэффициента ( $\beta^0$  – размерный коэффициент скольжения), величина которого находится в диапазоне  $0 \leq \beta \leq \infty$ , причем значение  $\beta = 0$  соответствует условиям полного скольжения среды на стенке, а  $\beta \rightarrow \infty$  отвечает условию прилипания. Значение кинетической энергии на стенке равно нулю, на входе задается постоянное значение и на выходе используется условие Неймана. Следует отметить, что для лучшего согласования с опытом на передней части тарелки по направлению потока для скоростей используются условия прилипания, а на остальных границах – условие частичного скольжения (10).

### Численный метод решения

Система дифференциальных уравнений (6) – (9) решается численно методом установления по времени. Каждое уравнение системы (6) – (9) может быть представлено в виде уравнения переноса транспортабельной скалярной субстанции  $\Phi$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x \Phi}{\partial x} + \frac{\partial u_y \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S. \quad (11)$$

Решение уравнений переноса проводится в «дельта»-форме ( $\Delta\Phi = \Phi^{n+1} - \Phi^n$ ) на основе обобщенной неявной схемы переменных направлений, которая безусловно устойчива для линейного уравнения, имеет второй порядок точности по времени и для данной задачи представляет собой двухэтапный алгоритм [8]:

$$\frac{\Delta\Phi^*}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_x(\Delta\Phi^*) = \Lambda_x(\Phi^n) + \Lambda_y(\Phi^n) + S,$$

$$\frac{\Delta\Phi^{**}}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_y(\Delta\Phi^{**}) = \frac{\Delta\Phi^*}{\Delta\tau}, \quad \Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi^{**}.$$

Здесь  $\Phi$  – представляет искомые функции  $\Phi = \psi$ ,  $\Phi = \Omega$ ,  $\Phi = e$ , а  $S$  – источник или сток. Значение операторов  $\Lambda_i$  содержит конвективные и диффузионные слагаемые в проекциях на ось  $x_i$ , разностная форма которых расписывается с помощью экспоненциальной схемы [9], которая снимает ограничение с сеточного числа Рейнольдса и имеет второй порядок точности по координатам.

### Результаты расчетов

Достоверность численных исследований проверялась тестовыми расчетами на сеточную сходимость и сравнением с известными экспериментальными данными при обтекании высококонцентрированным потоком зернистой среды квадрата в плоском канале [10]. На рис. 2 показана схема этого течения с отмеченными на нем сечениями (а, б), в которых проводилось сравнение опытных [10] и расчетных данных для вертикальной составляющей вектора скорости  $u_y$ . Это сравнение представлено на рис. 3.

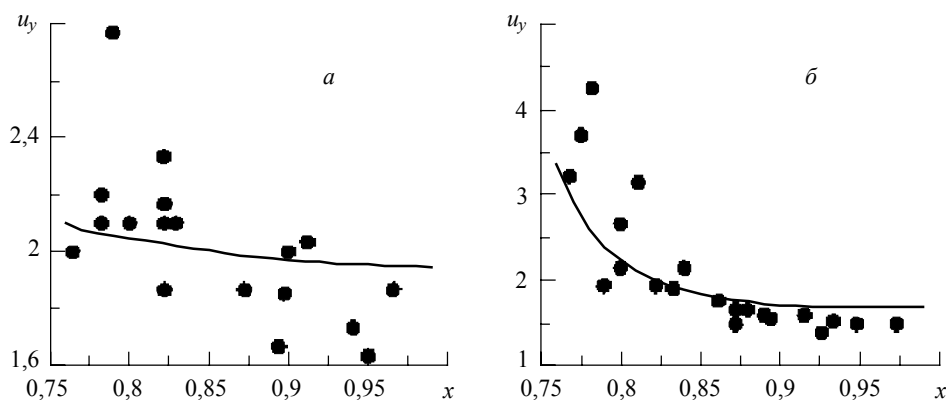


Рис. 3. Сопоставление расчетных и опытных данных [10] для вертикальной скорости  $u_y$  в зависимости от координаты  $x$  в сечениях а, б (см. рис. 2) при параметрах потока  $Re = 10$ ,  $c_1 \cdot l = 1.5$ ,  $c_2 \cdot l = 10.5$ ,  $\beta = 0$

На рис. 4 показано распределение осредненных линий тока в бункере. Из этого графика хорошо видны траектории движения гранулированной среды, а также застойные области, расположенные на горизонтальных тарелках в смесительном аппарате. Распределение изолиний осредненной кинетической энергии стохастического пульсационного движения в бункере показано на рис. 5.

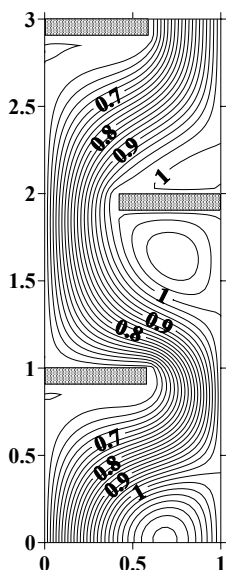


Рис. 4. Распределение линий тока гранулированной высококонцентрированной среды в бункере при параметрах, указанных на рис. 3

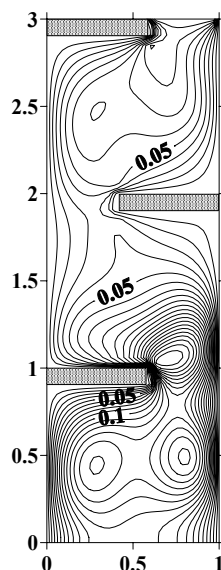


Рис. 5. Распределение изолиний кинетической энергии пульсационного движения зернистой среды в бункере при тех же параметрах

На рис. 6 показаны характерные распределения вертикальной составляющей скорости в зависимости от горизонтальной координаты  $x$  в сечениях, представленных пунктиром на рис. 1.

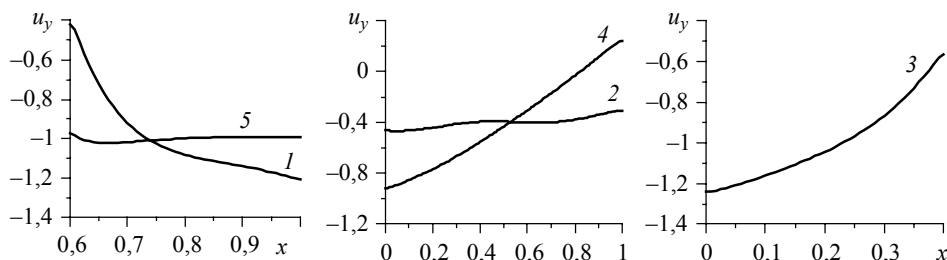


Рис. 6. Распределение вертикальной составляющей скорости в зависимости от горизонтальной координаты  $x$  в сечениях 1–5, показанных на рис. 1

### Заключение

Предложенная модель, как показывает сравнение теоретических и экспериментальных данных, может быть использована для описания динамики высококонцентрированных потоков гранулированных и зернистых сред в инерционном режиме движения, а также при моделировании процессов смешения или усреднения гранулированных сред в аппаратах порошковой технологии. Разработанная модель движения плотного слоя может быть также полезна при оптимизации смесительного оборудования, использующего принцип движения среды с высокой концентрацией зернистых материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров Ю. И. Аппараты для смешения сыпучих материалов. М.: Машиностроение, 1973. 216 с.
2. Росляк А.Т., Бирюков Ю.А., Пачин В.Н. Пневматические методы и аппараты порошковой технологии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. 272 с.
3. Shvab A. V., Martsenko M.S., Ryzhikh Yu.N. Modeling the hydrodynamics and the process of averaging a highly concentrated granulated medium in powder technology apparatuses // J. Engineering Physics and Thermophysics. 2011. V. 84. No. 4. P. 730–735.
4. Шваб А.В., Марценко М.С. Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3 (15). С. 108–116.
5. Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений: сб. ст.: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 280 с.
6. Ahmadi G., Shahinpoor M. Towards a turbulent modeling of rapid flow of granular materials // Powder Technology, 1983. V. 35. No. 2. P. 241–248.
7. Hutter K., Sheiwiler T. Rapid Plane Flow of Granular Materials down a Chute // Mechanics of Granular Materials. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1983. P. 283–293.
8. Peyret R., Taylor T. Computational Methods for Fluid Flow. Springer-Verlag, 1983.
9. Patankar S. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. N.Y.: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
10. Nedderman R., Davies S., Horton D. The flow of granular materials round obstacles // Powder Technology. 1980. V. 25. No. 2. P. 215–223.

Статья поступила 08.04.2013 г.

*Shvab A.V., Martsenko A.A., Martsenko M.S. MODELING OF HYDRODYNAMICS OF HIGHLY CONCENTRATED GRANULATED MEDIA IN THE BLENDING SILO.* In this paper we study the dynamics of highly concentrated granulated well granular medium in the vertical mixing hopper. To describe such a flow, a differential model proposed by the authors based on the provision of continuum mechanics with allowance for rheological properties of the granular material and the additional transport equation for the chaotic energy of the pulsation of the granules. The reliability of the proposed model is established by comparing the calculated average velocity distribution environment with the experimental data.

Keywords: hydrodynamics, velocity, granular medium, slip condition, fast motion regime, stress tensor, vorticity, stream function.

*SHVAB Alexander Veniaminovich* (Tomsk State University)

E-mail: avshvab@inbox.ru

*MARTSENKO Anatsia Aleksandrovna* (Tomsk State University)

E-mail: newerowa@sibmail.com

*MARTSENKO Maksim Sergeevich* (Tomsk State University)

E-mail: martsenko@sibmail.com