ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Математика и механика № 62

УДК 517.956.22 MSC 35A08,35J25, 35J70, 35J75
DOI 10.17223/19988621/62/5

Т.Г. Эргашев, Н.М. Сафарбаева

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ОДНИМ СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Фундаментальные решения многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом в полупространстве построены недавно. Для вышеназванного эллиптического уравнения в конечной односвязной области изучается задача Дирихле. Используя свойства одного из фундаментальных решений, построена функция Грина, с помощью которой единственное решение поставленной задачи в конечной области, ограниченной многомерной полусферой, найдено в явном виде.

Ключевые слова: *многомерное уравнение Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом, задача Дирихле, фундаментальное решение, формула Гаусса – Остроградского, функция Грина.*

Известно, что теория краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами является одним из центральных разделов современной теории уравнений в частных производных, которые встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера [1, 2]. Подробную библиографию и изложений исследований основных краевых задач для вырождающихся уравнений различного типа, в частности для двумерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, можно найти в монографиях [3–5].

При исследовании краевых задач для эллиптических уравнений всех (двух или более) размерностей с сингулярными коэффициентами важную роль играют фундаментальные решения данного уравнения. Фундаментальные решения двумерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом (уравнения Трикоми) были известны еще в первой половине прошлого столетия, и они успешно использованы при решении основных краевых задач и построении теории потенциала для этого уравнения. Для такого же уравнения с двумя сингулярными коэффициентами фундаментальные решения, которые выражаются через гипергеометрические функции Аппеля двух переменных, построены в [6] и, используя известные формулы разложения функций Аппеля двух переменных по гипергеометрическим функциям Гаусса, решения краевых задач найдены в явном виде.

Настоящая работа посвящается исследованию задачи Дирихле для одного сингулярного уравнения Гельмгольца. Фундаментальные решения двумерных и трехмерных уравнений Гельмгольца с двумя и тремя сингулярными коэффициентами соответственно построены в работах [7, 8], и эти фундаментальные решения применены к нахождению явных решений основных краевых задач для уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами [9–13]. К такому направлению исследований примыкают также работы [14, 15].

В недавно опубликованных работах [16–18] представлены фундаментальные решения для многомерных (более трехмерных) уравнений Гельмгольца с одним, двумя и тремя сингулярными коэффициентами соответственно. Как известно, фундаментальные решения уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами выражаются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию, число переменных которой зависит от числа сингулярных коэффициентов уравнения. Для исследования свойств любой гипергеометрической функции многих переменных необходимы формулы разложения, позволяющие представить эту функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций с одной переменной, а это, в свою очередь облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных. В [19] введен в рассмотрение новый класс конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных, через которые выписываются фундаментальные решения для одного многомерного уравнения Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами. Доказана формула разложения для нововведенных конфлюэнтных функций, дающая возможность определить порядок особенности найденных фундаментальных решений.

Настоящая работа посвящена к исследованию задачи Дирихле для уравнения

$$H_\beta^{(m,\lambda)}(u) := \sum_{k=1}^{m-1} u_{x_k x_k} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y - \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области, ограниченной в полупространстве $y > 0$, где $m \geq 2$ – размерность пространства, β – действительное число, причем $0 < 2\beta < 1$, а λ – действительное или чисто мнимое постоянное.

При исследовании поставленной задачи важную роль играют фундаментальные решения уравнения (1), которые выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию Горна от двух переменных [20]:

$$\mathrm{H}_3(a,b;c;z,t) = \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{(a)_{n-l}(b)_n}{(c)_n n! l!} z^n t^l, \ |z| < 1, \tag{2}$$

где a, b и c – постоянные, причем $c \neq 0,1,2,...$, а $(\alpha)_\kappa$ – известный символ Похгаммера: $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_\kappa := \alpha(\alpha+1)\cdot...\cdot(\alpha+\kappa-1)$, $\kappa = 1,2,...$.

Кроме того, имеет место следующая формула разложения [19] для конфлюэнтной гипергеометрической функции Горна от двух переменных, определенной формулой (2):

$$\mathrm{H}_3(a,b;c;z,-t) = F(a,b;c;z)\, i_{1-a}\left(2\sqrt{t}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{k+l}(k-1)!(b)_k}{l!(l-1)!(k-l)!(c)_k(1-a)_l} z^k t^l F(a+k,b+k;c+k;z)\, i_{1-a+l}\left(2\sqrt{t}\right), \tag{3}$$

где $F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n$, $|z| < 1$ – гипергеометрическая функция Гаусса [20], а $i_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(\nu+1)_n} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ – нормированная модифицированная функция Бесселя (i -функция Бесселя) [21].

Для уравнения (1) при $\lambda = 0$ в работах [22–25] исследованы некоторые пространственные краевые задачи в конечных и бесконечных областях.

Формула Грина и фундаментальные решения уравнения (1)

Полупространство $y>0$ обозначим через $R_m^+ = \{(x,y): y>0\}$, где $x=(x_1,...,x_{m-1})$.

Рассмотрим тождество

$$y^{2\beta}\left[uH_\beta^{(m,\lambda)}(w)-wH_\beta^{(m,\lambda)}(u)\right]=$$

$$=y^{2\beta}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u\frac{\partial w}{\partial x_k}-w\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{2\beta}\left(u\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Интегрируем обе части последнего тождества по области Ω, расположенной в полупространстве $y>0$, и, пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, получим

$$\int_\Omega y^{2\beta}\left[uH_\beta^{(m,\lambda)}(w)-wH_\beta^{(m,\lambda)}(u)\right]dxdy=$$

$$=\int_\Gamma\left[y^{2\beta}\sum_{k=1}^{m-1}\left(u\frac{\partial w}{\partial x_k}-w\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\cos(n,x_k)+y^{2\beta}\left(u\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y)\right]d\Gamma, \qquad (4)$$

где $dx:=dx_1dx_2...dx_{m-1}$, Γ – граничная поверхность области Ω, n – внешняя нормаль к поверхности Γ.

Формула Грина (4) выводится при следующих предположениях: функции $u(x,y)$, $w(x,y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$, частные производные второго порядка непрерывны внутри Ω и интегралы по Ω, содержащие $H_\beta^{(m,\lambda)}(u)$ и $H_\beta^{(m,\lambda)}(w)$, имеют смысл. Если $H_\beta^{(m,\lambda)}(u)$ и $H_\beta^{(m,\lambda)}(w)$ не обладают непрерывностью вплоть до Γ, то это – многомерные несобственные интегралы, которые получаются как пределы по любой последовательности областей Ω_k, которые содержатся внутри Ω, когда эти области Ω_k стремятся к Ω, так что всякая точка, находящаяся внутри Ω, попадает внутрь областей Ω_k, начиная с некоторого номера k.

Если u и w суть решения уравнения (1), то из формулы (4) имеем

$$\int_\Gamma y^{2\beta}\left(u\frac{\partial w}{\partial n}-w\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma=0, \qquad (5)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает нормальную производную:

$$\frac{\partial}{\partial n}=\sum_{k=1}^{m-1}\cos(n,x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}+\cos(n,y)\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (6)$$

Полагая в формуле (4) $w\equiv 1$ и заменяя u на u^2, получим

$$\int_\Omega y^{2\beta}\left[\sum_{k=1}^{m-1}u_{x_k}^2+u_y^2+\lambda^2u^2\right]dxdy=\int_\Gamma y^{2\beta}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma, \qquad (7)$$

где $u(x,y)$ – решения уравнения (1). Равенство (7) играет важную роль при доказательстве единственности решения краевых задач.

Наконец, из формулы (5), полагая $w \equiv 1$, будем иметь

$$\int_{\Gamma} y^{2\beta} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0 . \qquad (8)$$

Формула (8) утверждает, что интеграл от нормальной производной решения уравнения (1) по граничной поверхности равен нулю.

Фундаментальные решения уравнения (1) найдены в [16]:

$$q_0(x, y;\xi,\eta) = \gamma_0 r^{-2\beta_0} \mathrm{H}_3(\beta_0, \beta; 2\beta; \theta, \mu) ; \qquad (9)$$

$$q_1(x, y;\xi,\eta) = \gamma_1 r^{-2\beta_1} y^{1-2\beta} \eta^{1-2\beta} \mathrm{H}_3(\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; \theta, \mu), \qquad (10)$$

где

$$\beta_0 = \frac{m}{2} - 1 + \beta, \ \ \gamma_0 = 2^{2\beta_0 - m} \frac{\Gamma(\beta_0)\Gamma(\beta)}{\pi^{m/2}\Gamma(2\beta)},$$

$$\beta_1 = \frac{m}{2} - \beta, \ \ \gamma_1 = 2^{2\beta_1 - m} \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(1-\beta)}{\pi^{m/2}\Gamma(2-2\beta)}, \ \ m \geq 2; \qquad (11)$$

$$\xi := (\xi_1, ..., \xi_{m-1}); \ \ \theta = 1 - \frac{r_1^2}{r^2} = -\frac{4y\eta}{r^2}, \ \ \mu = -\frac{\lambda^2}{4} r^2, \qquad (12)$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - \xi_k)^2 + (y-\eta)^2, \ r_1^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - \xi_k)^2 + (y+\eta)^2 . \qquad (13)$$

Здесь $\mathrm{H}_3(a,b;c;z,t)$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция Горна, определенная формулой (2).

Функции, определенные формулами (9) и (10), по переменным (x, y) являются решениями уравнения (1), причем они имеют особенность порядка $1/r^{m-2}$ при $r \to 0$ [16] и, следовательно, являются фундаментальными решениями уравнения (1).

Нетрудно видеть, что

$$\left(y^{2\beta} \frac{\partial q_0(x, y;\xi,\eta)}{\partial y} \right)\Bigg|_{y=0} = 0, \ \ q_1(x, 0;\xi,\eta) = 0$$

для всех x.

Постановка и единственность решения задачи

Пусть $\Omega \subset R_m^+$ – область, ограниченная плоскостью $D = \{(x, y):\ y = 0,\ -a_k < x_k < b_k,\ \ k = \overline{1,\ m-1}\}$ и поверхностью S, которая пересекается с областью D. Линию пересечения обозначим через $L = S \cap D$. $a_k, b_k = const > 0$, $k = \overline{1,\ m-1}$. Поверхность S пересекает ось Oy при $y = a,\ a > 0$.

Задача Дирихле. Найти в области Ω регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in \overline{D},\ \ u|_S = \varphi(x, y),\ \ (x, y) \in \overline{S},$$

где $\tau(x)$ и $\varphi(x, y)$ – заданные непрерывные функции, причем $\varphi(x, y)|_L = \tau(x)|_L$.

Докажем единственность решения поставленной задачи. Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\int_{\Omega} y^{2\beta} u H_{\beta}^{(m)}(u)\,dxdy = -\int_{\Omega} y^{2\beta}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \lambda^2 u^2\right]dxdy +$$

$$+\int_{\Omega}\left[y^{2\beta}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{2\beta}u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy\,.$$

Пусть u – решение уравнения (1). Тогда воспользовавшись формулой Гаусса – Остроградского, получим

$$\int_{\Omega} y^{2\beta}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \lambda^2 u^2\right]dxdy =$$

$$= -\int_{D}\tau(x)\left(y^{2\beta}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}dx + \int_{S} y^{2\beta}\varphi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}dS.$$

Если теперь рассмотреть однородный случай задачи Дирихле (т.е. $\varphi(x,y)\equiv 0,\ \tau(x)\equiv 0$), то

$$\int_{\Omega} y^{2\beta}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \lambda^2 u^2\right]dxdy = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x,y)=0$ в $\overline{\Omega}$. Тем самым доказана единственность решения задачи Дирихле.

Существование решения задачи Дирихле

Существование решения задачи Дирихле докажем методом функции Грина. Для этого положим, что $a_k = b_k = R,\ \ k=\overline{1,m-1},$ и S является полусферой с центром в начале системы координат, радиусом R , т.е. $S=\left\{(x,y):\sum_{k=1}^{m-1}x_k^2 + y^2 = R^2\right\}.$

Определение. Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения (1) называется функция $G_1(x,y;\xi,\eta)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) внутри области Ω , кроме точки (ξ,η), эта функция есть регулярное решение уравнения (1);

2) удовлетворяет граничному условию

$$G_1(x,y;\xi,\eta)\big|_{S\cup\bar{D}} = 0, \tag{14}$$

3) может быть представлена в виде

$$G_1(x,y;\xi,\eta) = q_1(x,y;\xi,\eta) + w_1(x,y;\xi,\eta), \tag{15}$$

где $q_1(x,y;\xi,\eta) = \gamma_1 r^{-2\beta_1} y^{1-2\beta}\eta^{1-2\beta}\mathrm{H}_3(\beta_1,1-\beta;2-2\beta;\theta,\mu)$ – фундаментальное решение уравнения (1), определенное формулой (10), а γ_1, r, θ и μ определяются формулами (11) – (13). Здесь $w_1(x,y;\xi,\eta)$ – регулярное решение уравнения (1) везде внутри Ω.

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $w_1(x,y;\xi,\eta)$, которая в силу (14) и (15) должна удовлетворять граничным условиям

$$w_1(x,y;\xi,\eta)\big|_S=-q_1(x,y;\xi,\eta)\big|_S, \quad w_1(x,0;\xi,\eta)=0.$$

Для области Ω, ограниченной плоскостью $y=0$ и полусферой S, функция Грина задачи Дирихле имеет вид

$$G_1(x,y;\xi,\eta)=q_1(x,y;\xi,\eta)-\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\beta_1} q_1\left(x,y;\overline{\xi},\overline{\eta}\right),$$

где $\rho^2=\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2+\eta^2, \quad \overline{\xi}=\left(\overline{\xi}_1,...\overline{\xi}_{m-1}\right), \quad \overline{\xi}_k=\dfrac{R^2}{\rho^2}\xi_k, \quad \overline{\eta}=\dfrac{R^2}{\rho^2}\eta.$

Пусть $(\xi,\eta)\in\Omega$. Вырежем из области Ω m-мерный шар малого радиуса ε с центром в точке (ξ,η), оставшуюся часть Ω обозначим через Ω_ε, а через C_ε – m-мерную сферу вырезанного шара. Используя формулу (4), получим

$$\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}\left[u\frac{\partial G_1}{\partial n}-G_1\frac{\partial u}{\partial n}\right]dC_\varepsilon=$$

$$=\int\limits_D \tau(x)\left\{y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y}G_1(x,y;\xi,\eta)\right\}\Bigg|_{y=0}dx-\int\limits_S y^{2\beta}\varphi(S)\frac{\partial G_1(x,\xi)}{\partial n}dS. \tag{16}$$

Используя формулы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{H}_3(a,b;c;z,t)=\frac{ab}{c}\mathrm{H}_3(a+1,b+1;c+1;z,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{H}_3(a,b;c;z,t)=\frac{1}{a-1}\mathrm{H}_3(a-1,b;c;z,t),$$

и смежное соотношение

$$\frac{ab}{c}z\mathrm{H}_3(a+1,b+1;c+1;z,t)-\frac{1}{a-1}t\,\mathrm{H}_3(a-1,b;c;z,t)=$$

$$=a\,\mathrm{H}_3(a+1,b;c;z,t)-a\,\mathrm{H}_3(a,b;c;z,t),$$

нетрудно вычислить частные производные фундаментального решения $q_1(x,y;\xi,\eta)$:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_k}=-2\beta_1\gamma_1(x_k-\xi_k)y^{1-2\beta}\eta^{1-2\beta}r^{-2\beta_1-2}\mathrm{H}_3(1+\beta_1,1-\beta;2-2\beta;\theta,\mu), \quad k=\overline{1,m-1},$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial y}=(1-2\beta)\gamma_1 y^{-2\beta}\eta^{1-2\beta}r^{-2\beta_1}\mathrm{H}_3(\beta_1,1-\beta;2-2\beta;\theta,\mu)-$$

$$-2\beta_1\gamma_1 y^{1-2\beta}\eta^{2-2\beta}r^{-2\beta_1-2}\mathrm{H}_3(1+\beta_1,2-\beta;3-2\beta;\theta,\mu)-$$

$$-2\beta_1\gamma_1(y-\eta)y^{1-2\beta}\eta^{1-2\beta}r^{-2\beta_1-2}\mathrm{H}_3(1+\beta_1,1-\beta;2-2\beta;\theta,\mu).$$

Теперь, воспользовавшись определением нормальной производной (см. формулу (6)), окончательно находим

$$\frac{\partial q_1}{\partial n}=2\beta_1\gamma_1 y^{1-2\beta}\eta^{1-2\beta}r^{-2\beta_1}\mathrm{H}_3\left(1+\beta_1,1-\beta;2-2\beta;\theta,\mu\right)\frac{\partial}{\partial n}\left[\ln\frac{1}{r}\right]+$$

$$+\,2\beta_1\gamma_1 y^{1-2\beta}\eta^{2-2\beta}\,r^{-2\beta_1-2}\mathrm{H}_3\left(1+\beta_1,2-\beta;3-2\beta;\theta,\mu\right)-$$

$$-\left(1-2\beta\right)\gamma_1 y^{-2\beta}\eta^{1-2\beta}r^{-2\beta_1}\mathrm{H}_3\left(\beta_1,1-\beta;2-2\beta;\theta,\mu\right). \qquad (17)$$

Левую часть равенства (16) разделим на три интеграла:

$$\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}\left[u\frac{\partial G_1}{\partial n}-G_1\frac{\partial u}{\partial n}\right]dC_\varepsilon=J_1+J_2+J_3, \qquad (18)$$

где

$$J_1=\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}u\left(x,y\right)\frac{\partial q_1\left(x,y;\xi,\eta\right)}{\partial n}dC_\varepsilon, \qquad (19)$$

$$J_2=-\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\beta_1}\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}u\left(x,y\right)\frac{\partial q_1\left(x,y;\overline{\xi},\overline{\eta}\right)}{\partial n}dC_\varepsilon,$$

$$J_3=-\int\limits_{C_\varepsilon} y^{2\beta}G_1\left(x,y;\xi,\eta\right)\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial n}dC_\varepsilon.$$

Сначала выражение нормальной производной (17) подставим в (19), затем в правой части полученного равенства (19) переходим в обобщенную сферическую систему координат вида

$$x_1=\xi_1+\varepsilon\Phi_1,\ ...,\ x_{m-1}=\xi_{m-1}+\varepsilon\Phi_{m-1},\quad y=\eta+\varepsilon\Phi_m,$$

где

$$\Phi_1=\cos\varphi_1,\quad \Phi_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ \Phi_3=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\ ...,$$

$$\Phi_{m-1}=\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},\ \ \Phi_m=\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}$$

$$\left[\varepsilon\geq 0,\ 0\leq\varphi_1\leq\pi,...,0\leq\varphi_{m-2}\leq\pi,0\leq\varphi_{m-1}\leq 2\pi\right].$$

После несложных преобразований первое слагаемое J_1 принимает вид

$$J_1=J_{11}+J_{12}+J_{13},$$

где

$$J_{11}=2\beta_1\gamma_1\eta^{1-2\beta}\varepsilon^{-2\beta_1-2+m}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{m-1}\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}...$$

$$...\int\limits_0^{\pi}\left(\eta+\varepsilon\Phi_m\right)u\left(\xi_1+\varepsilon\Phi_1,...,\xi_{m-1}+\varepsilon\Phi_{m-1},\eta+\varepsilon\Phi_m\right)\mathrm{H}_{31}\left(\varepsilon\right)\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1,$$

$$J_{12}=2\beta_1\gamma_1\eta^{2-2\beta}\varepsilon^{-2\beta_1-3+m}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{m-1}\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}...,$$

$$\ldots\int_0^{\pi}(\eta+\varepsilon\Phi_m)u(\xi_1+\varepsilon\Phi_1,\ldots,\xi_{m-1}+\varepsilon\Phi_{m-1},\eta+\varepsilon\Phi_m)\mathrm{H}_{32}(\varepsilon)\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1,$$

$$J_{13}=-(1-2\beta)\gamma_1\eta^{1-2\beta}\varepsilon^{-2\beta_1-1+m}\int_0^{2\pi}d\varphi_{m-1}\int_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}\ldots$$

$$\ldots\int_0^{\pi}u(\xi_1+\varepsilon\Phi_1,\ldots,\xi_{m-1}+\varepsilon\Phi_{m-1},\eta+\varepsilon\Phi_m)\mathrm{H}_{33}(\varepsilon)\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1,$$

$$\mathrm{H}_{31}(\varepsilon)=\mathrm{H}_3\left(1+\beta_1,1-\beta;2-2\beta;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2},-\frac{\lambda^2}{4}\varepsilon^2\right),$$

$$\mathrm{H}_{32}(\varepsilon)=\mathrm{H}_3\left(1+\beta_1,2-\beta;3-2\beta;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2},-\frac{\lambda^2}{4}\varepsilon^2\right),$$

$$\mathrm{H}_{33}(\varepsilon):=\mathrm{H}_3\left(\beta_1,1-\beta;2-2\beta;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2},-\frac{\lambda^2}{4}\varepsilon^2\right),\;\; r_{1\varepsilon}^2=\varepsilon^2\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2+(2\eta+\varepsilon\Phi_m)^2.$$

Для полного вычисления J_1 сначала вычислим J_{11}. Воспользовавшись формулой разложения (3), получим

$$\mathrm{H}_{31}(\varepsilon)=F\left(1+\beta_1,1-\beta;2-2\beta;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right)i_{1-a}(\lambda\varepsilon)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{k+l}(k-1)!(1-\beta)_k}{(k-l)!l!(l-1)!(2-2\beta)_k(-\beta_1)_l}\times$$

$$\times x^k y^l F\left(1+\beta_1+k,1-\beta+k;2-2\beta+k;1-\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right)i_{1-a+l}(\lambda\varepsilon). \tag{20}$$

Теперь применяем к каждой гипергеометрической функции Гаусса, входящей в формулу (20), известную формулу Больца [20]:

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right).$$

В результате получим

$$\mathrm{H}_{31}(\varepsilon)=\left(\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right)^{\beta-1}F\left(1-2\beta-\beta_1,1-\beta;2-2\beta;1-\frac{\varepsilon^2}{r_{1\varepsilon}^2}\right)i_{1-a}(\lambda\varepsilon)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{k+l}(k-1)!(1-\beta)_k}{(k-l)!l!(l-1)!(2-2\beta)_k(-\beta_1)_l}\times$$

$$\times x^k y^l\left(\frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right)^{\beta-1-k}F\left(1-2\beta-\beta_1,1-\beta+k;2-2\beta+k;1-\frac{\varepsilon^2}{r_{1\varepsilon}^2}\right)i_{1-a+l}(\lambda\varepsilon).$$

Теперь функцию $\mathrm{H}_{31}(\varepsilon)$ подставим в интеграл J_{11} и после этого в правой части J_{11} переходим к пределу при $\varepsilon\to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{11} = \beta_1\gamma_1 2^{2\beta-1} u(\xi,\eta) F(1-2\beta-\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; 1)\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1}\int_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}\ldots\ldots\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1.$$

В силу известной формулы суммирования [20]

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\ c-a-b>0$$

будем иметь

$$F(1-2\beta-\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta; 1)=\frac{\Gamma(\beta_1+\beta)\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta_1)}. \tag{21}$$

Нетрудно вычислить, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1}\int_0^{\pi}\sin\varphi_{m-2}d\varphi_{m-2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_{m-3}d\varphi_{m-3}\ldots\ldots\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}. \tag{22}$$

Принимая во внимание (21) и (22), а также имея в виду значения β_1 и γ_1 (см. (11)), получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{11} = u(\xi,\eta). \tag{23}$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{12} = \lim_{\varepsilon\to 0} J_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} J_3 = 0. \tag{24}$$

Теперь вычислим предел $\lim\limits_{y\to 0} y^{2\beta}\dfrac{\partial G_1}{\partial y}$ и нормальную производную $\dfrac{\partial G_1(x,\xi)}{\partial n}$ на полусфере S. После этих вычислений, с учетом (18), (23) и (24), из (16) имеем

$$u(\xi,\eta)=(1-2\beta)\gamma_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\beta_1}\Gamma(1-\beta_1)\eta^{1-2\beta}\int_D \tau(x)\left[X^{-\beta_1}I_{-\beta_1}(\lambda X)-Y^{-\beta_1}I_{-\beta_1}(\lambda Y)\right]dx+$$

$$+\,2\beta_1\gamma_1\eta^{1-2\beta}\int_S y\varphi(S)\mathrm{H}_3(1+\beta_1, 1-\beta; 2-2\beta;\theta,\mu)\frac{R^2-\rho^2}{Rr^{2+2\beta_1}}dS, \tag{25}$$

где
$$X^2 := \sum_{k=1}^{m-1}(x_k-\xi_k)^2+\eta^2,$$

$$Y^2 := \sum_{k=1}^{m-1}\left(R-\frac{x_k\xi_k}{R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1, j\neq k}^{m-1}x_k^2\xi_j^2+\frac{\eta^2}{R^2}\sum_{k=1}^{m-1}x_k^2-(m-2)R^2;$$

$I_\alpha(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha+n)k!}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{\alpha+2n}$ – известная модифицированная функция Бесселя.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема. Существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения (1) и оно представляется формулой (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961.
2. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
3. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
4. *Gilbert R.P.* Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. New York, London: Academic Press, 1969.
5. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
6. *Hasanov A.* Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration // Int. J. Applied Mathematics and Statistics. 2008. V. 13 (8). P. 41–49.
7. *Hasanov A.* Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007. 52(8). P. 673–683. DOI: 10.1080/ 17476930701300375.
8. *Urinov A.K.*, *Karimov E.T.* On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // Applied Mathematical Letters. 2011. V. 24. P. 314–319. DOI: 10.1016/ j.aml.2010.10.013.
9. *Salakhitdinov M.S.*, *Hasanov A.* A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. V. 53(4). P. 355–364. DOI: 10.1080 /17476930701769041.
10. *Salakhitdinov M.S.*, *Hasanov A.* The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Eurasian Mathematical Journal. 2012. V. 3(4). P. 99–110.
11. *Салахитдинов М.С.*, *Хасанов А.* Краевая задача ND_1 для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13(1). С.109–116.
12. *Лернер М.Е.*, *Репин О.А.* Нелокальные краевые задачи на вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37(11). С. 1562–1564.
13. *Репин О.А.*, *Лернер М.Е.* О задаче Дирихле для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 1998. № 6. С. 5–8. DOI: 10.14498/vsgtu1.
14. *Эргашев Т.Г.* Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 41–49. DOI: 10.17223/19988621/46/6.
15. *Эргашев Т.Г.* Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 45–56. DOI: 10.17223 /19988621/50/4.
16. *Mavlyaviev R.M.*, *Garipov I.B.* Fundamental solutions of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2017. V. 62(3). P. 284–296. DOI:10.1080/17476933.2016.1218853.
17. *Ergashev T.G.*, *Hasanov A.* Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No. 1. P. 55–64.
18. *Ergashev T.G.* On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients // Computers and Mathematics with Applications. 2019. № 77. P. 69–76. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.09.014.
19. *Уринов А.К.*, *Эргашев Т.Г.* Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С.45–56. DOI 10.17223/19988621/55/5.
20. *Бейтман Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.

21. *Ситник С.М., Шишкина Э.Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. 224 с.
22. *Agostinelli C.* Integrazione dell'equazione differenziale $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+x^{-1}u_x=f$ e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. 1937. V. 6(26). P. 7–8.
23. *Олевский М.Н.* Решения задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u+\ px_n^{-1}u_{x_n}\ =\rho$ для полусферической области // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 767–770.
24. *Назипов И.Т.* Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 69–85. DOI: 10.3103/S1066369X1103008X.
25. *Салахитдинов М.С.*, *Хасанов А.* К теории многомерного уравнения Геллерстедта // Узбекский математический журнал. 2007. № 3. С. 95–109.

Статья поступила 23.09.2019 г.

Ergashev T.G., Safarbayeva N.M. (2019) DIRICHLET PROBLEM FOR THE MULTUDIMENSIONAL HELMHOLTZ EQUATION WITH ONE SINGULAR COEFFICIENT. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 55–67

DOI 10.17223/19988621/62/5

Keywords: multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient, Dirichlet problem, fundamental solution, Gauss–Ostrogradsky formula, Green function.

In the study of boundary value problems for elliptic equations with singular coefficients, fundamental solutions play an important role, which is expressed by hypergeometric functions of one, two, or more variables depending on the number of the singularity. An interesting case is the Helmholtz equation with one or two singularities, and many authors solved various boundary value problems for a two-dimensional Helmholtz equation. However, relatively few works are devoted to the study of an equation with one singular coefficient, when the dimension of the equation exceeds three. The main obstacle in this direction is the lack of explicit fundamental solutions for the multidimensional Helmholtz equation with at least one singular coefficient. Fundamental solutions for the multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient in the half-space were found recently. In this paper, the Dirichlet problem for the above-mentioned elliptic equation in a finite simply connected domain is studied. Using the properties of one of the fundamental solutions, the Green function was constructed. With the help of the function, the solution of the problem in a finite region bounded by the multidimensional hemisphere is found in an explicit form.

Tuhtasin G. ERGASHEV (V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Nigora M. SAFARBAYEVA (Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: akmal09.07.85@mail.ru

REFERENCES

1. Bers L. (1958) Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. New York; London.
2. Frankl F.I. (1973) *Izbrannye trudy po gazovoy dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics]. Moscow: Nauka.
3. Smirnov M.M. (1966) *Vyrozhdayushchiesya ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniya* [Degenerate elliptic and hyperbolic equations]. Moscow: Nauka.
4. Gilbert R. (1969) *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations*. New York; London: Academic Press.

5. Bitsadze A.V. (1981) *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Nauka.
6. Hasanov A. (2008) Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 13(8). pp. 41–49.
7. Hasanov A. (2007) Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 52(8). pp. 673–683. DOI: 10.1080/17476930701300375.
8. Urinov A.K., Karimov E.T. (2011) On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter. *Applied Mathematical Letters*. 24. pp. 314–319. DOI: 10.1016/j.aml.2010.10.013.
9. Salakhitdinov M.S., Hasanov A. (2008) A solution of the Neumann–Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 53(4). pp. 355–364. DOI: 10.1080 /17476930701769041.
10. Salakhitdinov M.S., Hasanov A. (2012) The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Eurasian Mathematical Journal*. 3(4). pp. 99–110.
11. Salakhitdinov M.S., Hasanov A. (2011) Krayevaya zadacha ND_1 dlya obobshchennogo osesimmetricheskogo uravneniya Gel'mgoltsa [The boundary problem ND_1 for the generalized axially symmetric Helmholtz equation]. *Doklady Adygskoy* (*Cherkesskoy*) *Mezhdunarodnoy akademii nauk -Reports of International Academy of Sciences of Adygey*. 13(1). pp.109–116.
12. Lerner M.E., Repin O.F. (2001) Nonlocal boundary value problems in a vertical half-strip for a generalized axisymmetric Helmholtz equation. *Differential equations*. 37(11). pp. 1640–1642.
13. Repin O.F., Lerner M.E. (1998) O zadache Dirikhle dlya obobshchennogo dvuosesimmetricheskogo uravneniya Gel'mgoltsa v pervom kvadrante [On the Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation in the first quadrant]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskiye nauki – Journal of Samara State Technical University*, *Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 6. pp. 5–8. DOI: 10.14498/vsgtu1.
14. Ergashev T.G. (2017) Obobshchennye resheniya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya vtorogo roda so spektralnym parametrom [Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 41–49. DOI: 10.17223/19988621/46/6.
15. Ergashev T.G. (2017) Chetvertyi potentsial dvoynogo sloya dlya obobshchennogo dvuosesimmetricheskogo uravneniya Gel'mgoltsa [The fourth double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 45–56. DOI: 10.17223/19988621 /50/4.
16. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. (2017) Fundamental solutions of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 62(3). pp. 284–296. DOI:10.1080/17476933.2016.1218853.
17. Ergashev T.G., Hasanov A. (2018) Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 55–64.
18. Ergashev T.G. (2019) On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*. 77. pp. 69–76. DOI:10.1016/j.camwa.2018.09.014.
19. Urinov A.K., Ergashev T.G. (2018) Konflyuentnye gipergeometricheskie funktsii mnogikh peremennykh i ikh primenenye k nakhozhdeniyu fundamental'nykh resheniy obobshchennogo uravneniya Gel'mgoltsa s singulyarnymi koeffitsientami [Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to finding fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with singular coefficients]. *Vestnik Tomskogo*

gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 55. pp. 45–56. DOI 10.17223/19988621/55/5.
20. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. (1953) Higher Transcendental Functions. 1. New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company.
21. Sitnik S.M., Shishkina E.L. (2019) Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsialnykh uravneniy s operatorami Besselya [Method of transformation operators for differential equations with Bessel operators]. Moscow: FIZMATLIT.
22. Agostinelli C. (1937) Integrazione dell'equazione differenziale $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + x^{-1}u_x = f$ e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*. 6(26). pp. 7–8.
23. Olevskii M.N. (1949) Resheniya zadachi Dirikhle, otnosyashchiesya k uravneniyu $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = \rho$ dlya polusfericheskoy oblasti [Solution of the Dirichlet problem regarding to the equation $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = \rho$ for a hemispherical domain]. *Doklady Akademii Nauk SSSR – Reports of the Sciences Academy of USSR*. 64(6). pp. 767–770.
24. Nazipov I.T. (2011) Solution of the spatial Tricomi problem for a singular mixed-type equation by the method of integral equations. *Russian Mathematics*. 55(3). pp. 61–76. DOI: 10.3103/S1066369X1103008X.
25. Salakhiddinov M.S., Hasanov A. (2007) K teorii mnogomernogo uravneniya Gellershtedta. [On the theory of the multidimensional Gellerstedt equation]. *Uzbekskiy matematicheskiy zhurnal – Uzbek Mathematical Journal*. 3. pp. 95–109.

Received: September 23, 2019