

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/25/5

УДК 519.1

АТТРАКТОРЫ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ
С ОРИЕНТАЦИЯМИ ПАЛЬМ

А. В. Жаркова

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия***E-mail:** VAnastasiyaV@gmail.com

Описываются аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм; определяется свойство принадлежности состояния аттрактору. Состояниями динамической системы являются все возможные ориентации данной пальмы, а эволюционная функция переориентирует все дуги, входящие в стоки.

Ключевые слова: аттрактор, двоичный вектор, конечная динамическая система, пальма, сверхстройное (звездообразное) дерево.

Введение

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. Здесь можно выделить следующие три основные конструкции, получившие и самостоятельное значение в теории графов: минимальное расширение графа [1, 2], T-неприводимое расширение графа [3], бесконтурный граф с заданной структурой источников и стоков [4]. В модели [4] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связанных ориентированных графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем, и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [5, 6]) — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса. В указанных работах по отказоустойчивости графовых систем основные результаты получены для систем, в основе которых лежат цепи, циклы и частные типы деревьев. К числу деревьев, для которых найдено описание как минимальных, так и T-неприводимых расширений, относятся пальмы [2, 3]. Дерево называется *пальмой*, если оно является объединением цепей, имеющих общую концевую вершину, причём все эти цепи, за исключением, быть может, одной, имеют длину 1. Пальма является частным случаем *сверхстройного (звездообразного) дерева* (дерево, в котором в точности одна вершина имеет степень больше 2). В настоящей работе пальмы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*; $\delta : S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной*

функцией системы. Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур, в свою очередь, называется предельным циклом, или *аттрактором*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров без проведения динамики. К их числу относятся *ветвление* (количество непосредственных предшественников данного состояния), свойство *недостижимости* состояния (состояние имеет нулевое ветвление), свойство принадлежности состояния аттрактору и описание аттракторов системы (их количество, вид и длина). Автором составлены программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с некоторыми типами графов, в частности [7], и описаны аттракторы конечных динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями таких типов графов, как цепи и циклы [8–10].

В данной работе описываются аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм; определяется свойство принадлежности состояния аттрактору в таких системах.

1. Описание динамической системы

Пусть пальма p образована объединением цепей p_0, p_1, \dots, p_c , имеющих общую концевую вершину. Будем считать, что p_0 имеет среди этих цепей максимальную длину $s \geq 1$. Назовём p_0 *стволом пальмы* p , цепи p_1, p_2, \dots, p_c , имеющие длину 1, — её *листьями*, а их совокупность — *кроной*. Будем говорить, что p является пальмой типа (s, c) . Пальма с точностью до изоморфизма определяется своим типом. При $c = 1$ пальма вырождается в цепь (см., например, [6, 8]), поэтому далее не будем рассматривать этот случай, считая $c > 1$.

Пусть имеется пальма p типа (s, c) , $s + c = n$. Перенумеруем рёбра пальмы p , как показано на рис. 1.

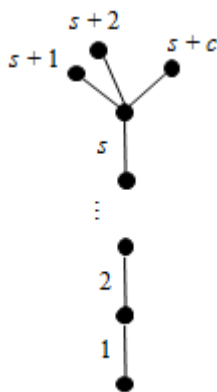


Рис. 1. Нумерация рёбер пальмы

Придадим каждому ребру пальмы p произвольную ориентацию и сопоставим полученному ориентированному графу n -мерный двоичный вектор $v(p)$, полагая его i -ю компоненту равной 1, если i -е ребро пальмы p ориентировано от корня (начальной вершины ствола), и 0 — в противном случае. Теперь можно последовательно выписать

получившуюся последовательность из нулей и единиц: $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$, где v_i , $0 < i \leq s+c$, принимает значение 0 или 1 в зависимости от ориентации i -го ребра пальмы. Таким образом, каждой ориентации пальмы сопоставляется n -мерный двоичный вектор, причём $n = s+c$. В свою очередь, каждый такой вектор $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$ однозначно определяет некоторую ориентацию пальмы $p(v)$ типа (s, c) . Таким образом, между множеством P_{s+c} , $s > 0$, $c > 1$, всевозможных ориентированных пальм типа (s, c) и множеством B^{s+c} , $s > 0$, $c > 1$, всех двоичных векторов размерности $n = s+c$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем ориентации пальмы для простоты также будем называть пальмами, часть $v_1 \dots v_s$ вектора v — *стволом вектора* v , а $v_{s+1} \dots v_{s+c}$ — его *кроной*.

Опишем конечную динамическую систему ориентаций (s, c) -пальмы p на языке двоичных векторов. Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v = v_1 \dots v_s v_{s+1} \dots v_{s+c} \in B^{s+c}$. Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\gamma(v) = v'$, полученном путём одновременного применения следующих правил:

- I. Если $v_1 = 0$, то $v'_1 = 1$.
- II. Если $v_i = 1$ и $v_{i+1} = 0$ для некоторого $0 < i < s$, то $v'_i = 0$ и $v'_{i+1} = 1$.
- III. Если $v_i = 1$ для некоторого $s < i \leq s+c$, то $v'_i = 0$.
- IV. Если $v_s = 1$ и $v_i = 0$ для всех $s < i \leq s+c$, то $v'_s = 0$ и $v'_i = 1$ для всех $s < i \leq s+c$.
- V. Других отличий между v и $\gamma(v)$ нет.

Например, на рис. 2 показана эволюция вектора 011.11 в динамической системе (B^{3+2}, γ) .

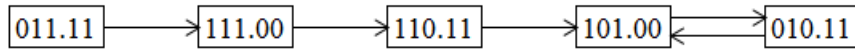


Рис. 2. Эволюция состояния 011.11 в динамической системе (B^{3+2}, γ)

Пусть теперь имеется n -рёберная (s, c) -пальма. На языке ориентаций пальм эволюция динамической системы вводится следующим образом: если дана некоторая ориентированная пальма $p \in P_{s+c}$, то её динамическим образом $\gamma(p)$ является пальма, получаемая из p одновременным превращением всех стоков в источники. Напомним, что *стоком* в ориентированном графе называется вершина с нулевой степенью исхода, а *источником* — вершина с нулевой степенью захода. Это частный случай динамики бесконтурных связных графов, введённой в [4]. Преобразования ориентаций пальм в динамической системе (P_{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, соответствуют эволюционным преобразованиям соотносимых им двоичных векторов в динамической системе (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, и обратно, а именно $v(\gamma(p)) = \gamma(v(p))$ [11]. Таким образом, динамические системы (B^{s+c}, γ) и (P_{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, изоморфны. На рис. 3 и 4 изображены карты изоморфных динамических систем (B^{1+2}, γ) и (P_{1+2}, γ) .

2. Недостижимые состояния динамической системы (B^{s+c}, γ)

В работе [12] рассмотрена динамическая система (Γ_G, α) , где через Γ_G обозначено множество всех возможных ориентаций данного графа G , а эволюционная функция α задаётся следующим образом: если дан некоторый орграф $G \in \Gamma_G$, то его динамическим образом $\alpha(G)$ является орграф, полученный из G одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки; других отличий между G и $\alpha(G)$ нет.

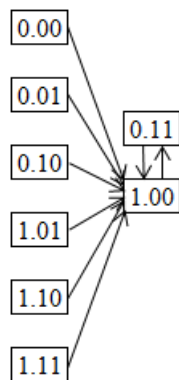


Рис. 3. Карта динамической системы (B^{1+2}, γ)

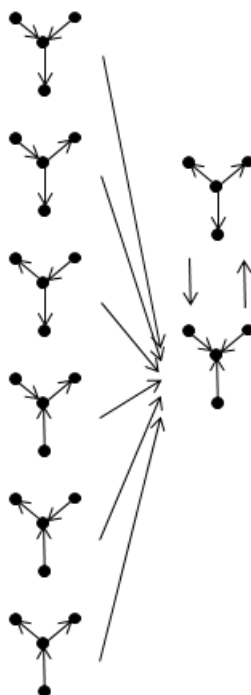


Рис. 4. Карта динамической системы (P_{1+2}, γ)

Множество источников ориентированного графа назовем *допустимым*, если из него в каждый сток этого графа есть дуга.

Теорема 1 [12]. Состояние s динамической системы (Γ_G, α) недостижимо тогда и только тогда, когда в орграфе G , представляющем состояние s , есть по крайней мере один сток и при этом нет ни одного допустимого множества источников, или, другими словами, когда существует хотя бы один сток в G , не смежный с источниками.

Рассматриваемая в данной работе динамическая система (P_{s+c}, γ) является частным случаем системы (Γ_G, α) , поэтому теорема 1 применима и к ней. Из теоремы 1 можно выразить свойство недостижимости состояний динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, на языке двоичных векторов.

Следствие 1. Состояние $v = v_1 \dots v_s.v_{s+1} \dots v_{s+c}$ динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, недостижимо тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $v_1 v_2 = 00$;
- 2) $v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} = 1100$ для некоторого $0 < i < s - 1$;
- 3) среди последних c компонент имеются различные;
- 4) $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть состояние $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$ динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, является недостижимым. Покажем, что для него выполняется хотя бы одно из условий 1–4.

Так как состояние v является недостижимым, то по теореме 1 в соответствующей ему ориентации пальмы $p(v)$ существует хотя бы один сток, не смежный с источниками. Вершины пальмы обозначим за $p_v^1, p_v^2, \dots, p_v^{s+c+1}$ (нумерация от корня). Пусть, не теряя общности, в $p(v)$ существует единственный сток, не смежный с источниками; рассмотрим ситуации в зависимости от расположения данного стока в пальме.

I. Данный сток находится в вершине p_v^1 пальмы $p(v)$, тогда $v_1 v_2 = 00$. Обратим внимание, что при $s = 1$ данное условие также выполняется, так как за счёт $v_2 = 0$ вершина p_v^2 не является источником.

II. Данный сток находится в вершине p_v^2 пальмы $p(v)$. Такая ситуация невозможна, так как p_v^1 в таком случае является источником, а значит, сток в вершине p_v^2 смежен с источником.

III. Данный сток находится в одной из вершин p_v^j , $2 < j < s$, тогда $v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} = 1100$ для $i = j - 2$.

IV. Данный сток находится в вершине p_v^s , тогда $v_{s-2} v_{s-1} v_s = 110$ и среди компонент $v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_{s+c}$ обязательно есть нуль.

V. Данный сток находится в вершине p_v^{s+1} . Такая ситуация невозможна, так как в таком случае $v_{s+1} = v_{s+2} = \dots = v_{s+c} = 0$, а значит, сток в вершине p_v^{s+1} смежен с источниками.

VI. Данный сток находится в вершине p_v^j для некоторого j , $s + 1 < j \leq s + c + 1$.

а) При $v_s = 0$ среди компонент v_k , $k \neq j$, $s + 1 < k \leq s + c + 1$, обязательно есть нуль.

б) При $v_s = 1$ дополнительных условий не требуется, так как p_v^{s+1} не является источником.

Таким образом, для недостижимого состояния $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$ динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, выполняется одно из следующих условий:

- 1) $v_1 v_2 = 00$ (за счёт пункта I);
- 2) $v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} = 1100$ для некоторого i , $0 < i < s - 1$ (за счёт пунктов III и IV; для пункта IV заметим, что если $v_{s+1} = 1$, то среди компонент $v_{s+2}, v_{s+3}, \dots, v_{s+c}$ обязательно есть нуль, то есть имеем ситуацию, когда среди последних c компонент имеются различные);
- 3) среди последних c компонент имеются различные (за счёт пункта VI; заметим, что в данном случае не учтена ситуация, когда $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$);
- 4) $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$ (за счёт пункта VI, б).

Достаточность. Пусть для состояния $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$ динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, выполняется хотя бы одно из условий 1–4. Для такого состояния v очевидно наличие в $p(v)$ стока, не смежного с источниками; тогда по теореме 1 данное состояние является недостижимым. ■

3. Аттракторы динамической системы (B^{s+c}, γ)

Через $p_{st}(v)$ обозначим количество пар совпадающих соседних компонент в стволе вектора v ; назовём данную величину *плотностью ствола вектора v* . По анало-

гии через $p_{cr}(v)$ обозначим *плотность кроны вектора* v . Под *блоком* будем понимать максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве > 1 . *Длина блока* — число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через $p_{st}^0(v)$ ($p_{cr}^0(v)$), $p_{st}^1(v)$ ($p_{cr}^1(v)$) суммы длин 0-блоков и 1-блоков соответственно в стволе (кроне) вектора v .

Введём необходимые обозначения:

- x^k — в состоянии компонента x повторяется $k \geq 0$ раз;
- $(x)^k$ — в состоянии совокупность компонент x повторяется $k \geq 0$ раз;
- $\{01\}^k$ — произвольный набор из 0 и 1 размера $k \geq 0$;
- $\{0[x]1\}^k$ — произвольный набор из 0 и 1 размера $k > 0$, содержащий в себе обязательный элемент x ;
- $v \rightarrow \gamma(v)$ — один шаг выполнения динамики системы.

Теорема 2. Динамическая система (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, имеет единственный бассейн и аттрактор, представляющий собой двухэлементный контур, образуемый состояниями $(01)^{(s-1)/2}0.1^c$ и $(10)^{(s-1)/2}1.0^c$ при нечётном s и состояниями $(01)^{s/2}.0^c$ и $(10)^{s/2}.1^c$ при чётном s .

Доказательство. Рассмотрим состояния динамической системы (B^{s+c}, γ) , $n = s + c$, $s > 0$, $c > 1$, в зависимости от наличия и количества 0- и 1-блоков в стволе соответствующего вектора v .

I. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет ни 0-, ни 1-блоков, то есть $p_{st}(v) = 0$.

1) Пусть s — нечётное. Тогда имеем

а) $(01)^{(s-1)/2}0.1^c \rightarrow (10)^{(s-1)/2}1.0^c$, при этом $(10)^{(s-1)/2}1.0^c \rightarrow (01)^{(s-1)/2}0.1^c$. Таким образом, данные состояния образуют аттрактор длины 2;

б) $(01)^{(s-1)/2}0.\{0[0]1\}^c \rightarrow (10)^{(s-1)/2}1.0^c$, то есть приходит в состояние из п. I (1, а), которое принадлежит аттрактору;

в) $(10)^{(s-1)/2}1.\{0[1]1\}^c \xrightarrow{1} (01)^{(s-1)/2}1.0^c \xrightarrow{2} (10)^{(s-3)/2}110.1^c \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{s-2} 011(01)^{(s-3)/2}.0^c \xrightarrow{s-1} 110(10)^{(s-3)/2}.1^c \xrightarrow{s} (10)^{(s-1)/2}1.0^c$, то есть в итоге приходит в состояние из п. I (1, а), которое принадлежит аттрактору.

2) Пусть s — чётное. Тогда имеем

а) $(01)^{s/2}.0^c \rightarrow (10)^{s/2}.1^c$, при этом $(10)^{s/2}.1^c \rightarrow (01)^{s/2}.0^c$. Таким образом, данные состояния образуют аттрактор длины 2;

б) $(01)^{s/2}.\{0[1]1\}^c \xrightarrow{1} 1(01)^{(s-2)/2}1.0^c \xrightarrow{2} (01)^{(s-2)/2}10.1^c \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{s-2} 01(10)^{(s-2)/2}.1^c \xrightarrow{s-1} 11(01)^{(s-2)/2}.0^c \xrightarrow{s} (10)^{s/2}.1^c$, то есть в итоге приходит в состояние из п. I (2, а), которое принадлежит аттрактору;

в) $(10)^{s/2}.\{0[0]1\}^c \rightarrow (01)^{s/2}.0^c$, то есть приходит в состояние из п. I (2, а), которое принадлежит аттрактору.

Теперь рассмотрим состояния, в стволе которых присутствуют 0- или 1-блоки. Исключим пока из рассмотрения состояния вида $01^{s-1}.\{0[1]1\}^c$ и $\{01\}^t 101^{s-t-2}.\{0[1]1\}^c$, где $s > 2$, $c > 1$, $t \geq 0$, и рассмотрим их в самом конце доказательства (п. VII). Согласно следствию 1, данные состояния являются недостижимыми, значит, не могут получиться из какого-либо другого состояния в процессе эволюции, поэтому данное ограничение не повлияет на дальнейшее рассмотрение пп. II–VI.

II. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет 0-блоков и есть хотя бы один 1-блок, т. е. $p_{st}^0(v) = 0$, $p_{st}^1(v) > 0$. Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от количества 1-блоков.

1) Вектор имеет единственный 1-блок. Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от расположения 1-блока:

а) $p_{\text{st}}^1(v) = s - 1$;

а') $p_{\text{cr}}^0(v) = c - 1$. Тогда эволюция состояния выглядит следующим образом: $1^s \cdot 0^c \xrightarrow{1} 1^{s-1} 0 \cdot 1^c \xrightarrow{2} 1^{s-2} 0 1 \cdot 0^c \xrightarrow{3} \dots$;

а'1) s — нечётное: $\dots \xrightarrow{s-2} 11(01)^{(s-3)/2} 0 \cdot 1^c \xrightarrow{s-1} (10)^{(s-1)/2} 1 \cdot 0^c$, то есть в итоге приходит в состояние из п. I (1, a), которое принадлежит аттрактору;

а'2) s — чётное: $\dots \xrightarrow{s-2} 11(01)^{(s-2)/2} \cdot 0^c \xrightarrow{s-1} (10)^{s/2} \cdot 1^c$, то есть в итоге приходит в состояние из п. I (2, a), которое принадлежит аттрактору.

Заметим, что длина 1-блока в стволе на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты, и за ним следуют чередующиеся нули и единицы (самая левая компонента 1-блока на каждом очередном шаге переходит в нуль по правилу II или IV, тем самым длина блока уменьшается на единицу), что продолжается до тех пор, пока все компоненты блока, кроме последней, не поглотятся. Тем самым состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, то есть в состояние из п. I;

а'') $p_{\text{cr}}^0(v) < c - 1$. Тогда имеем $1^s \cdot \{0[1]1\}^c \rightarrow 1^s \cdot 0^c$, то есть данное состояние переходит в состояние из п. II (1, a, a');

б) вектор v содержит единственный 1-блок в стволе и при этом $p_{\text{st}}^1(v) < s - 1$.

При эволюции в стволе 1-блок на каждом очередном шаге смещается влево на одну компоненту (с каждым очередным шагом эволюции нуль, стоящий перед 1-блоком, переходит в единицу по правилу I или II, а последняя единица 1-блока переходит в нуль по правилу II или IV, тем самым длина 1-блока сохраняется), пока не встанет в начало состояния, затем длина 1-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты, и за ним следуют чередующиеся нули и единицы, что продолжается до тех пор, пока все его компоненты, кроме последней, не поглотятся (см. п. I (1, a)). Тем самым состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, то есть в состояние из п. I.

2) Вектор имеет несколько 1-блоков в стволе.

Из п. II (1) имеем: при эволюции в стволе каждый 1-блок на очередном шаге смещается влево на одну компоненту, пока не встанет в начало вектора, затем длина 1-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты, и за ним следуют чередующиеся нули и единицы, что продолжается до тех пор, пока все компоненты 1-блока не поглотятся. Таким образом, в данном случае последними поглотятся все компоненты, кроме последней, самого правого 1-блока, то есть такое состояние при эволюции в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, то есть в состояние из п. I.

III. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет 1-блоков и есть хотя бы один 0-блок, то есть $p_{\text{st}}^0(v) > 0$, $p_{\text{st}}^1(v) = 0$. Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от количества 0-блоков в стволе.

1) Вектор имеет единственный 0-блок в стволе. Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от расположения 0-блока в стволе.

а) $p_{\text{st}}^0(v) = s - 1$. Тогда эволюция состояния выглядит следующим образом: $0^s \cdot \{01\}^c \xrightarrow{1} 10^{s-1} \cdot 0^c \xrightarrow{2} 010^{s-2} \cdot 0^c \xrightarrow{3} \dots$;

а1) s — нечётное: $\dots \xrightarrow{s-2} (10)^{(s-1)/2} 0 \cdot 0^c \xrightarrow{s-1} (01)^{(s-1)/2} 0 \cdot 0^c$, то есть приходит в состояние из п. I;

а2) s — чётное: $\dots \xrightarrow{s-2} (01)^{(s-2)/2} 00 \cdot 0^c \xrightarrow{s-1} (10)^{s/2} \cdot 0^c$, то есть приходит в состояние из п. I.

Заметим, что в стволе длина 0-блока на каждом очередном шаге эволюции уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты, и перед ним идут чередующиеся нули и единицы (на каждом очередном шаге эволюции самая первая компонента 0-блока переходит в единицу по правилу I или II, тем самым длина 0-блока уменьшается на единицу), что продолжается до тех пор, пока все его компоненты, кроме первой, не поглотятся. Тем самым состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, то есть в состояние из п. I;

б) вектор содержит единственный 0-блок в стволе и при этом $p_{st}^0(v) < s - 1$.

При эволюции в стволе 0-блок на каждом очередном шаге смещается вправо на одну компоненту (с каждым очередным шагом эволюции первый ноль 0-блока переходит в единицу по правилу I или II; единица, стоящая после 0-блока, переходит в ноль по правилу II или IV, тем самым длина 0-блока сохраняется), пока не встанет в конец состояния, затем длина 0-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты, и перед ним идут чередующиеся нули и единицы, что продолжается до тех пор, пока все его компоненты, кроме первой, не поглотятся (см. п. III (1, a)). Тем самым состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, то есть в состояние из п. I.

2) Вектор имеет несколько 0-блоков в стволе.

Из п. III (1) имеем: при эволюции в стволе каждый 0-блок на очередном шаге смещается вправо на одну компоненту, пока не достигает конца ствола вектора, затем длина 0-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты, и перед ним следуют чередующиеся нули и единицы, что продолжается до тех пор, пока все компоненты 0-блока не поглотятся. Таким образом, в данном случае последними поглотятся все компоненты, кроме первой, самого левого 0-блока, то есть такое состояние при эволюции в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, то есть в состояние из п. I.

IV. Вектор содержит в себе 1-блоки, после которых идут 0-блоки.

Из предыдущих пунктов имеем, что в данном случае на каждом шаге эволюции одновременно 0- и 1-блоки начнут движение вправо и влево соответственно, пока не достигнут своих концов вектора и не начнут поглощаться, в результате чего останется вектор, не содержащий в своём стволе ни 0-, ни 1-блоков, то есть данное состояние на очередном шаге эволюции приходит в состояние из п. I.

V. В стволе вектора присутствуют 0-блоки, после которых идут 1-блоки.

1. Рассмотрим сначала эволюцию данных состояний, имеющих в своем стволе по одному 0- и 1-блоку, в зависимости от их значений $p_{st}^0(v)$ и $p_{st}^1(v)$.

Если между 0- и 1-блоком стоят чередующиеся нули и единицы, то на каждом шаге эволюции в стволе одновременно 0-блок начнёт движение вправо на одну компоненту, 1-блок — влево за счёт поглощения компонент между блоками (первая компонента 0-блока при эволюции заменится на единицу по правилу I или IV; единица, следующая за 0-блоком, при эволюции заменится на ноль по правилу II, таким образом длина 0-блока сохранится, аналогичное происходит и с 1-блоком), пока они не окажутся стоящими рядом. Рассмотрим эволюцию уже с этого шага в зависимости от сумм длин 0- и 1-блоков в стволе.

а) Состояния, для которых $p_{st}^0(v) < p_{st}^1(v)$.

Когда в стволе 0-блок и 1-блок оказываются стоящими рядом, то с каждым следующим шагом эволюции их длины начинают уменьшаться у каждого на единицу за счёт поглощения компонент друг друга (у 0-блока первая компонента перейдёт в единицу по правилу эволюции I или II, а у 1-блока последняя компонента перейдёт в ноль по

правилу эволюции II или IV, тем самым длины 0- и 1-блоков уменьшаются на единицу), пока 0-блок полностью не поглотится. В результате в стволе будет присутствовать 1-блок и чередующиеся нули и единицы, дальнейшая эволюция такого состояния описана в п. II (1).

б) Состояния, для которых $p_{st}^0 = p_{st}^1$.

Из рассуждений п. V (1, a) получаем, что блоки будут поглощать друг друга с каждым следующим шагом эволюции, пока от них не останется по одной компоненте, причем это уже будет вектор, ствол которого не содержит ни 0-, ни 1-блоков, а про его эволюцию сказано в п. I.

в) Состояния, для которых $p_{st}^0(v) > p_{st}^1(v)$.

Ситуация аналогична п. V (1, a), только в итоге в стволе состояния остаётся один 0-блок и чередующиеся нули и единицы, дальнейшая эволюция описана в п. III (1).

2) Рассмотрим теперь состояния, включающие в себя несколько 0-блоков, после которых идут 1-блоки, также в зависимости от значений $p_{st}^0(v)$ и $p_{st}^1(v)$.

а) Состояния, для которых $p_{st}^0(v) < p_{st}^1(v)$.

Из п. V (1) получаем, что в стволе таких состояний на каждом шаге эволюции 0-блоки начинают двигаться вправо, 1-блоки — влево за счёт поглощения компонент, стоящих между блоками; когда они оказываются стоящими рядом, то блоки начинают уменьшаться на единицу каждый за счёт поглощения компонент друг друга, пока один из блоков полностью не поглотится, после чего опять продолжаются сдвиги блоков навстречу друг другу, пока не поглотится самый последний 0-блок (кроме его первой компоненты). Таким образом, в состоянии останутся только 1-блоки и чередующиеся нули и единицы, дальнейшая эволюция описана в п. II.

б) Состояния, для которых $p_{st}^0(v) = p_{st}^1(v)$.

Из рассуждений пп. V (1) и V (2, a) получаем, что при эволюции 0-блоки и 1-блоки начнут движение навстречу друг другу, пока не окажутся рядом, а затем их длины начнут уменьшаться на единицу с каждым следующим шагом эволюции, пока не поглотится один из блоков, после чего продолжится аналогичное движение, пока рядом не окажутся последние оставшиеся 0-блок и 1-блок, длины которых начнут уменьшаться на единицу с каждым следующим шагом эволюции, пока от них не останется по одной компоненте, причём это уже будет вектор, ствол которого не содержит ни 0-, ни 1-блоков, эволюция которого описана в п. I.

в) Состояния, для которых $p_{st}^0(v) > p_{st}^1(v)$.

Ситуация аналогична п. V (2, a), только в состоянии в итоге остаются одни 0-блоки и чередующиеся нули и единицы, дальнейшая эволюция состояния описана в п. III.

VI. Ствол вектора содержит 0-блоки и 1-блоки в произвольном порядке.

Из рассуждений предыдущих пунктов получаем, что при эволюции такого состояния в его стволе 0-блоки будут сдвигаться вправо, при этом если 0-блок встречается с 1-блоком, то его длина уменьшается с очередным шагом эволюции, то есть если есть подряд стоящие 0-блоки, то они или все поглотятся, если следующие за ними подряд стоящие 1-блоки в сумме имеют равную или большую длину, или поглотят сами следующие за ними подряд стоящие 1-блоки и продолжат сдвиг вправо, встречая очередные 1-блоки, если сумма длин 0-блоков больше суммы длин 1-блоков. Для рассмотрения 1-блоков ситуация получается аналогичная. В итоге получим состояние, имеющее только 0-блоки, только 1-блоки, или состояние, не имеющее ни 0-, ни 1-блоков, чьи эволюции описаны в пп. I–III.

VII. Теперь рассмотрим состояния вида $01^{s-1} \cdot \{0[1]1\}^c$ и $\{01\}^t 101^{s-t-2} \cdot \{0[1]1\}^c$, где $s > 2$, $c > 1$, $t \geq 0$.

1) $01^{s-1} \cdot \{0[1]1\}^c \rightarrow 1^s \cdot 0^c$; таким образом, данное состояние при эволюции переходит в состояние из п. II (1, a).

2) $\{01\}^t 101^{s-t-2} \cdot \{0[1]1\}^c \rightarrow \{01\}^t 01^{s-t-1} \cdot 0^c$; таким образом, далее нужно рассмотреть получившееся состояние, эволюция которого описана в пп. II, V или VI.

Рассмотрев все возможные ситуации, заключаем, что динамическая система (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, имеет единственный бассейн и аттрактор, представляющий собой двухэлементный контур, образуемый состояниями $(01)^{(s-1)/2} 0 \cdot 1^c$ и $(10)^{(s-1)/2} 1 \cdot 0^c$ при нечётном s и состояниями $(01)^{s/2} \cdot 0^c$ и $(10)^{s/2} \cdot 1^c$ при чётном s . ■

Следствие 2. В динамической системе (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, состояния $(01)^{(s-1)/2} 0 \cdot 1^c$ и $(10)^{(s-1)/2} 1 \cdot 0^c$ при нечётном s и состояния $(01)^{s/2} \cdot 0^c$ и $(10)^{s/2} \cdot 1^c$ при чётном s , и только они принадлежат аттрактору.

Заключение

В работе рассмотрены конечные динамические системы двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм; показано свойство недостижимости состояния данной системы на языке двоичных векторов; описаны аттракторы систем, их количество, вид и длина; определено свойство принадлежности состояния аттрактору.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. Абрисимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. 192 с.
3. Курносова С. Г. Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. 2004. Вып. 6. С. 113–125.
4. Barbosa V. C. An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
5. Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B. Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinator. 2004. V. 8. P. 425–439.
6. Салий В. Н. Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
7. Власова А. В. Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
8. Власова А. В. Аттракторы в динамической системе (B, δ) двоичных векторов // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы науч. конф. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. С. 35–41.
9. Власова А. В. Аттракторы динамических систем, ассоциированных с циклами // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2 (12). С. 90–95.
10. Жаркова А. В. Количество аттракторов в динамических системах, ассоциированных с циклами // Матем. заметки. 2014. Т. 95. Вып. 4. С. 529–537.
11. Власова А. В. Динамические системы, определяемые пальмами // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. С. 57–60.
12. Жаркова А. В. О ветвлении и непосредственных предшественниках состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций графа // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 76–78.