

УДК: 532.135+678.053.3

А.В. Шваб, М.С. Марценко**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛОТНОГО СЛОЯ
ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ И ПРОЦЕССА СМЕШЕНИЯ
В СУЖАЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ**

В работе проводится исследование гидродинамики и процесса усреднения высококонцентрированной гранулированной хорошо сыпучей среды в вертикальном сужающемся канале на основе модели степенной жидкости. В модели вводится независимый эмпирический коэффициент, учитывающий скольжение частиц на твердой поверхности. Достоверность предложенной модели проверяется сопоставлением рассчитанного распределения скорости среды с опытными данными. Представлено моделирование процесса усреднения гранулированной среды на основе рассчитанного поля скоростей.

Ключевые слова: *неньютоновская жидкость, скорость, концентрация, гранулированная среда, условия скольжения, усреднение смеси, коэффициент неоднородности.*

В порошковой технологии широко применяются аппараты дозирования, измельчения, сушки, смешения и усреднения гранулированных сред [1]. Актуальным направлением дальнейшего совершенствования этих устройств является создание математических моделей, позволяющих объяснить и предсказать, адекватно опытным данным, происходящие в них процессы [2].

Анализ научной литературы по теоретическим и экспериментальным исследованиям таких течений показывает отсутствие законченной теории. Это объясняется многообразием существующих различных полуэмпирических моделей, что подтверждает, например, обзор, выполненный в работе [3]. Сложность рассматриваемых физических явлений и многообразие физических особенностей гранулированного материала существенно затрудняют создание единой теоретической модели движения сыпучей среды. Движение плотного слоя зернистой среды в аппаратах порошковой технологии осуществляется в режиме, получившем название «теории быстрых движений гранулированных сред». В этом режиме внутренние напряжения в среде возникают вследствие переноса импульса частицами аналогично тому, как это происходит при хаотическом движении молекул в жидкости или газе. Такое поведение гранулированного материала в режиме быстрого движения отличает его от поведения при пластическом течении и приводит к существенной зависимости внутренних напряжений от скорости сдвига. Поэтому для описания динамики высококонцентрированной среды воспользуемся моделью степенной жидкости [4].

Физическая и математическая постановка задачи

Рассматривается установившееся гравитационное течение высококонцентрированной гранулированной среды между двумя плоскими пластинами, расположенными относительно друг друга под углом 2α . Схема такого канала изображена на рис. 1, а. На входе в канал с постоянной скоростью подается несмешанная гра-

нулированная среда. В процессе её движения по каналу происходит процесс усреднения за счёт явлений конвекции и диффузии.

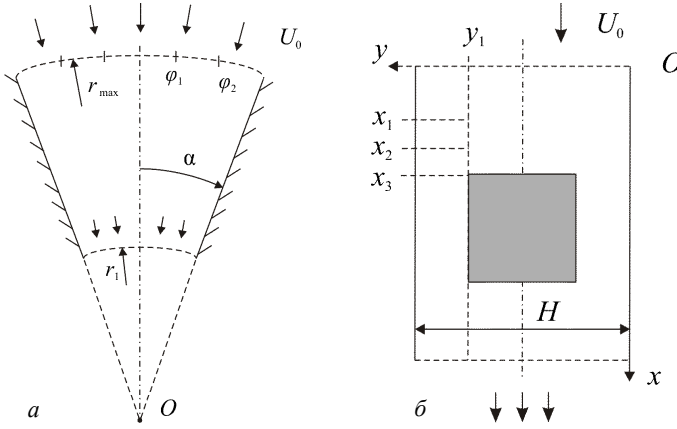


Рис. 1. Схема исследуемой области

При описании динамики плотного слоя гранулированной среды будем использовать систему уравнений переноса импульса с реологическим степенным законом, связывающим тензор внутренних напряжений с тензором скоростей деформаций, который можно представить в виде

$$\tau_{ij} = 2\mu^m J^{m-1} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (1)$$

где μ – постоянное значение кажущейся вязкости, m – реологический параметр (при $m = 1$ получаем ньютоновскую модель вязкой жидкости) и J – интенсивность скоростей деформаций.

Систему дифференциальных уравнений динамики жидкости в дивергентном виде с учётом реологического степенного закона (1) для случая полярной системы координат можно привести к виду

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(r u_r)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r u_r^2 - \frac{r B}{\text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[u_r u_\phi - \frac{B}{r \text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right] = \\ & = -r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[r \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial \phi} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) - \frac{B}{r} \left(2 \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_r \right) \right] + u_\phi^2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(r u_\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r u_r u_\phi - \frac{r B}{\text{Re}} \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[u_\phi^2 - \frac{B}{r \text{Re}} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial B}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \phi} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + 2 u_r \right) + \frac{B}{r} \left(2 \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \right) \right] - u_r u_\phi. \end{aligned} \quad (4)$$

Для получения безразмерной формы этих уравнений в качестве масштабов использовались постоянные значения параметров: $H = r_2 - r_1$ – высота канала, ρ –

плотность жидкости, U_0 – среднее значение скорости на входе в канал. В уравнениях (2) – (4) также введены обозначения: $Re = \rho H^m U_0^{2-m} / \mu^m$ – обобщённое число Рейнольдса и B – безразмерное значение интенсивности скоростей деформаций, которое определяется следующей формулой:

$$B = \left[2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right)^2 \right]^{(m-1)/2}.$$

Исследование поля концентрации ключевого C и основного C_0 компонентов гранулированной среды проводится на основе конвективно-диффузионного уравнения, которое в безразмерной форме можно привести к виду

$$\frac{\partial(rC)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r u_r C - \frac{r}{Pe_d} \frac{\partial C}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[u_\varphi C - \frac{1}{r Pe_d} \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right] = 0. \quad (5)$$

$$C + C_0 = 1. \quad (6)$$

Здесь $Pe_d = U_0 H / D$ – диффузионное число Пекле и D – коэффициент диффузии компонентов смеси.

Для получения единственного решения используются следующие граничные условия. Во входном сечении для безразмерных значений продольной и поперечной составляющих вектора скорости используются условия $u_r = -1$, $\partial u_\varphi / \partial r = 0$, а для концентрации ключевого компонента – $C = 0$, за исключением диапазонов $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, в которых $C = 1$. На выходной границе используются мягкие условия установления $\partial / \partial r = 0$ для всех искомым переменных, за исключением радиальной составляющей скорости, для которой ставится условие $\partial r u_r / \partial r = 0$. На стенках канала нормальная компонента скорости равна нулю, а для концентрации используется условие $\partial C / \partial n = 0$. Для радиальной составляющей скорости на стенке применяется условие скольжения. Однако в работе [5] использование этого условия скольжения, которое было получено из определения тензора внутренних напряжений вблизи стенки, не привело к лучшей согласованности расчётов с опытными данными. В настоящей работе полагается, что на стенке скорость среды определяется не только величиной тензора напряжений, но и величиной сухого, кулоновского трения пары стенка – частица, и поэтому для определения условия скольжения вводится независимый эмпирический параметр, величина которого определяется из сопоставления численных и опытных данных. В безразмерном виде условие частичного скольжения на стенке для хорошо сыпучей гранулированной среды можно представить в виде

$$(1 - \beta) \frac{\partial u_r}{\partial r} = \beta u_r. \quad (7)$$

В формуле (7) β – безразмерное значение независимого эмпирического коэффициента, величина которого находится в диапазоне $0 \leq \beta \leq 1$, причём значение $\beta = 0$ соответствует условиям полного скольжения среды на стенке, а $\beta = 1$ – отвечает условию прилипания.

Таким образом, решение задачи о нахождении полей скорости и концентрации гранулированной среды, движущейся плотным слоем, будет зависеть от эмпирического обобщенного числа Рейнольдса Re , угла α , коэффициента скольжения β , реологической постоянной m и диффузионного числа Пекле Pe_d .

Рассчитанное поле концентрации ключевого компонента позволяет теоретически оценивать качество процесса усреднения сыпучих материалов. Большинство

методик расчета этой величины основано на аппарате математической статистики [6]. Для данной задачи наиболее актуальным является определение коэффициента неоднородности E по длине аппарата. Коэффициент неоднородности для каждого сечения $r = \text{const}$ исследуемой области примет вид

$$E = \left[\frac{\sum_{j=1}^l (C_j - C_{\text{ср}})^2}{l C_{\text{ср}} (1 - C_{\text{ср}})} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Здесь l – число элементарных ячеек по ширине канала и $C_{\text{ср}}$ – среднее значение концентрации ключевого компонента в данном ($r = \text{const}$) сечении канала, рассчитываемое по формуле

$$C_{\text{ср}} = \frac{\int_0^\alpha r C u_r d\phi}{\int_0^\alpha r u_r d\phi}. \quad (10)$$

Значение E может изменяться в диапазоне от нуля до единицы, причём $E = 0$ соответствует идеальному смешению компонент смеси, а $E = 1$ – абсолютно не-смешанному состоянию.

Численный метод решения

Система дифференциальных уравнений (2) – (4) решается численно на основе метода физического расщепления полей скорости и давления [7]. В соответствии с этим методом уравнение переноса импульса разбивается на два векторных уравнения

$$\frac{\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^n}{\Delta t} = -\nabla p^n + F(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^n); \quad (11)$$

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^+}{\Delta t} = -\nabla(\Delta p). \quad (12)$$

В выражении (12) Δp – поправка к давлению, равная разности давлений между $n+1$ и n слоями по времени, т.е

$$p^{n+1} = p^n + \Delta p. \quad (13)$$

Уравнения (11), (12) представляют символическую векторную форму системы (2) – (4), в которой индекс «+» обозначает промежуточную сеточную функцию вектора скорости, n – известный слой по времени и ∇ – оператор градиента. После умножения уравнения (12) скалярно на градиент и учета соленоидальности вектора скорости на $n + 1$ слое по времени получим уравнение Пуассона для определения поправки к давлению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial \phi^2} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{V}^+}{\Delta t}. \quad (14)$$

Для получения стационарного решения задачи используется эволюционный метод установления по времени, поэтому уравнение Пуассона (14) можно запи-

сать в виде нестационарного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial \varphi} = - \frac{\nabla \cdot \mathbf{V}^+}{\Delta t}. \quad (15)$$

Здесь τ – итерационный параметр, определяемый соотношением $\tau = A \cdot t$, в котором значение A является положительной постоянной.

Численное решение системы уравнений (11), (15) проводится эволюционным методом в следующей последовательности. Вначале на известном временном слое n проводится решение системы уравнений (11), результатом которого является определение сеточной функции $\mathbf{V}^+$. Затем по найденному полю $\mathbf{V}^+$ проводится несколько итераций для решения уравнения (15), причём константа A и количество итераций выбирается из условия наиболее быстрой численной сходимости решения системы уравнений. Далее из уравнения (12) и (13) вычисляется поле скорости и давление на новом $n + 1$ слое по времени, затем по известному полю скорости проводится решение уравнения (5) для определения концентрации ключевого компонента смеси. После этого процесс численного решения повторяется по вышеописанной схеме. Для поправки к давлению в качестве граничных условий применяется условие Неймана [8]. При записи конечно-разностного аналога конвективных и диффузионных членов уравнений переноса импульса (3), (4) и концентрации (5) используется экспоненциальная схема [8]. Численное решение уравнений осуществляется обобщенным неявным методом переменных направлений на разнесенной шахматной разностной сетке. Сходимость и точность решения контролируется выполнением уравнения (2).

Результаты расчётов

Достоверность численных исследований проверялась тестовыми расчётами на сеточную сходимость и сравнением с известными результатами ламинарного течения вязкой жидкости ($m = 1$). Также проводилось сопоставление расчетов с опытными данными для движения в плоском вертикальном канале гранулированной среды, при обтекании квадрата со стороны $H/2$. Так, на рис. 1, б показана схема этого течения, а на рис. 2 представлено сравнение опытных [9] и расчетных данных для продольной составляющей скорости u_x в сечениях, показанных на рис. 1, б.

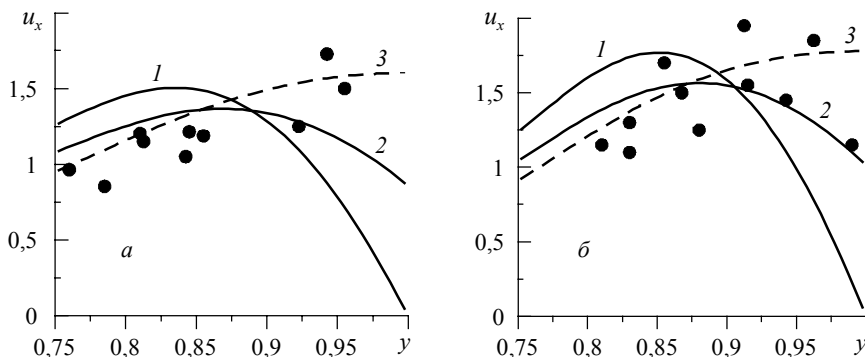


Рис. 2. Распределение продольной составляющей скорости u_x в зависимости от координаты y (графики а, б соответствуют сечениям $x_1 = x_3 = 0,2 H$, $x_2 = x_3 = 0,15 H$) при параметрах потока $Re = 10$, $m = 1,2$; 1 – $\beta = 1$, 2 – $\beta = 0,9$, 3 – $\beta = 0,05$, ● – опытные данные [9]

Из анализа этих графиков видно, что коэффициент скольжения β оказывает значительное влияние на распределение продольной составляющей скорости. Коэффициент скольжения $\beta = 0,05$ (кривая 3) позволяет получить распределение скорости, адекватное опытным данным.

Распределение продольной составляющей скорости и концентрации ключевого компонента смеси представлены на рис. 3 и 4. Из последнего графика видно, что по мере продвижения вниз по каналу наблюдается выравнивание концентрации, которое свидетельствует об усреднении смеси.

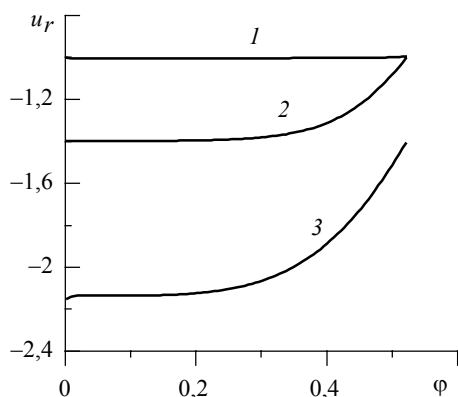


Рис. 3. Распределение составляющей скорости u_r при параметрах потока $Re = 10$, $m = 1,2$, $\alpha = \pi/6$, $\beta = 0,8$. Кр. 1 соответствует $r = 2$; 2 – 1,5; 3 – 1.

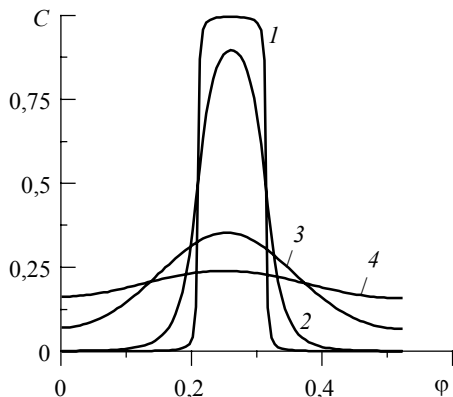


Рис. 4. Распределение концентрации C в различных сечениях при параметрах потока $Re = 10$, $m = 1,2$, $\alpha = \pi/6$, $\beta = 0,8$. Кр. 1 соответствует сечению $r = 2$; 2 – 1,75; 3 – 1,5; 4 – 1.

На рис. 5 представлены кривые распределения локального коэффициента неоднородности $E(r)$, рассчитанного по формуле (10), при различном диффузионном числе Пекле. Видно, что существенное влияние на процесс усреднения смеси оказывает число Пекле и, как показывают численные исследования, выбор этого параметра позволяет правильно оценивать коэффициент неоднородности смеси в выходной части канала [10].

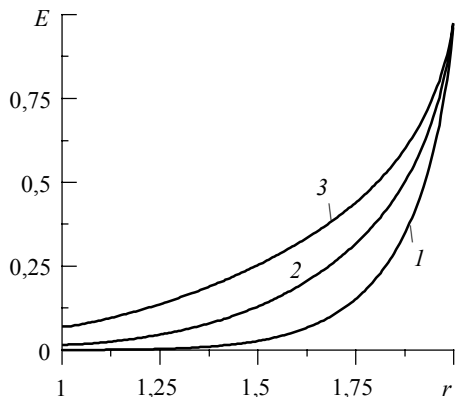


Рис. 5. Распределение коэффициента неоднородности E по длине канала при параметрах потока: $Re = 10$, $m = 1,2$, $\alpha = \pi/6$, $\beta = 0,8$. Кр. 1 соответствует $Pe_d = 1$, 2 – 10, 3 – 20

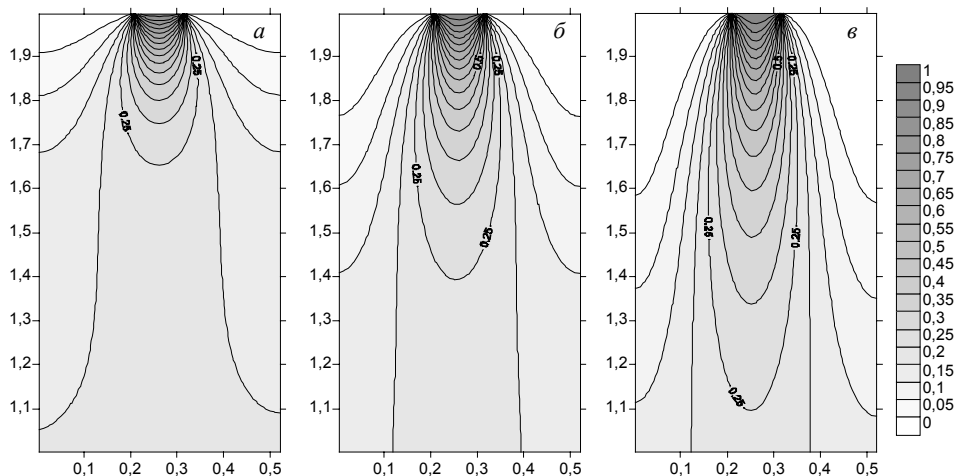


Рис. 6. Поле концентрации ключевого компонента C при параметрах потока: $Re = 10$, $m = 1,2$, $\alpha = \pi/6$, $\beta = 0,8$. График (а) соответствует значению $Re_d = 1$, (б) – 10, (в) – 20

Заключение

Разработанный подход, как показывает сравнение численных и экспериментальных данных, можно применять для описания динамики и процессов смешения гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии. Методика расчета может быть использована при оптимизации аппаратов, использующих принцип гравитационного движения плотного слоя гранулированных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Росляк А.Т., Бирюков Ю.А., Пачин В.Н. Пневматические методы и аппараты порошковой технологии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990.
2. Шваб А.В., Асадчая Е.В. Моделирование трёхмерного движения плотного слоя гранулированных материалов на основе кинематической модели // Сибирский физико-технический журнал. 1991. Вып. 3. С. 82–87.
3. Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений: сб. ст.: пер. с англ. М.: Мир, 1985.
4. Шульман З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975.
5. Hutter K., Sheiwiller T. Rapid plane flow of granular materials down a chute // Mechanics of Granular Materials. Amsterdam: Elsevier Science Publishers. 1983. P. 283–293.
6. Макаров Ю.И. Аппараты для смешения сыпучих материалов. М.: Машиностроение, 1973.
7. Chorin A.J. Numerical solution of Navier – Stokes equation // Math. Comput. 1968. V. 22. P. 745–762.
8. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
9. Неддерман Р., Дэвис С., Хортон Д. Течение гранулированных материалов вокруг препятствий // Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений: сб. ст.: пер. с англ. М.: Мир, 1985. С. 228–241.
10. Рыжик Ю.Н., Шваб А.В. Исследование процесса усреднения гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии // Изв. вузов. Физика. 2006. № 6. Приложение. С. 119–123.

Статья принята в печать 18.06.2010 г.

Shvab A.V., Martsenko M. S. RESEARCH OF MOTION OF A DENSE BED OF A GRANULAR MEDIUM AND MIXING PROCESS IN A TAPERED CHANNEL. Hydrodynamics and homogenization process of a mixture of high-concentrated granular medium in a vertical tapered channel using rheological model of fluid are investigated. The model invokes a specific independent empirical coefficient taking into account the slip of particles on a solid surface. The resulting velocity profile based on the model is compared with experimental data. Modeling of the process of granular medium homogenization on the base of the computed velocity field is presented.

Keywords: non-Newtonian fluid, velocity, concentration, granular medium, slip conditions, homogenization of mixture, coefficient of nonuniformity.

SHVAB Aleksandr Veniaminovich (Tomsk State University). E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru
MARTSENKO Maksim Sergeevich (Tomsk State University). E-mail: martsenko@sibmail.com