УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/9/40

О КОЛИЧЕСТВЕ ОПТИМАЛЬНЫХ 1-ГАМИЛЬТОНОВЫХ ГРАФОВ С ЧИСЛОМ ВЕРШИН ДО 26 И 28

М. Б. Абросимов, С. А. Сухов

Граф называется 1-вершинно(рёберно)-гамильтоновым, если после удаления любой его вершины (ребра) получившийся граф является гамильтоновым; 1-вершинно(рёберно)-гамильтонов граф называется оптимальным, если он имеет минимально возможное число рёбер среди всех 1-вершинно(рёберно)-гамильтоновых графов с тем же числом вершин. В работе перепроверены полученные ранее данные для оптимальных 1-вершинно- и 1-рёберно-гамильтоновых графов, а также удалось вычислить новые значения для 28 вершин.

Ключевые слова: *оптимальный 1-гамильтонов граф, минимальное 1-расширение цикла, отказоустойчивость.*

J. P. Hayes в работе [1], а затем совместно с F. Harary в работах [2, 3] предложил графовую модель для исследования отказоустойчивости дискретных систем. Особое внимание было уделено системам, представимым циклами. В [1 – 3] предложены схемы построения одной оптимальной 1-отказоустойчивой реализации (минимального 1-расширения) цикла. Предложены и другие схемы [4 – 8].

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (k — натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, т. е. граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, т. е. $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* (МР-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением G, т. е. граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер;
2) граф G^* содержит n вершин, т. е. $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Для минимальных вершинных и рёберных k-расширений циклов можно встретить эквивалентные определения.

Граф называется *k-вершинно-гамильтоновым*, если после удаления любых его k вершин и инцидентных им рёбер получившийся граф является гамильтоновым. Граф называется *k-рёберно-гамильтоновым*, если после удаления любых k рёбер получившийся граф является гамильтоновым; k-вершинно(рёберно)-гамильтонов граф называется *оптимальным*, если он имеет минимально возможное число рёбер среди всех k-вершинно(рёберно)-гамильтоновых графов с тем же числом вершин.

Известно, что задачи проверки вершинных (рёберных) k-расширений произвольных графов, так же как и задачи проверки k-вершинно(рёберно)-гамильтоновых графов, являются NP-полными [9]. Интересной представляется задача вычисления числа неизоморфных минимальных вершинных и рёберных k-расширений для различных графов. Рассмотрим случай $k = 1$.

Минимальные вершинные и рёберные 1-расширения циклов — это либо кубические графы, если число вершин чётно, либо графы с вектором степеней $(4, 3, \ldots, 3)$, если число вершин нечётно [1–3]. Это позволяет использовать более эффективные способы для поиска всех расширений циклов. В 2000 г. проведён вычислительный эксперимент [6, 7, 10], в рамках которого удалось построить все минимальные вершинные и рёберные 1-расширения циклов с числом вершин до 14. В 2011 г. удалось дойти до 17 вершин [11]. В 2013 г. проведены следующие вычислительные эксперименты [12] с использованием наиболее эффективных из известных на сегодня способов генерации кубических графов [13, 14] и графов с вектором степеней $(4, 3, \ldots, 3)$ [15]. Удалось построить все минимальные вершинные и рёберные 1-расширения циклов с числом вершин до 26. Вычисления проводились на кластере Гентского университета.

В рамках данной работы удалось перепроверить полученные ранее результаты, а также получить новые значения для 28-вершинных графов. Для проведения вычислений разработана программа на языке C++ [16], в основе которой лежит параллельный алгоритм генерации всех неизоморфных реализаций вектора степеней [15]. Расчёты проводились на кластере высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ. Полученные результаты представлены в таблице. В первом столбце приводится вектор степеней графа, во втором и третьем столбцах указывается число реализаций этого вектора степеней, являющихся оптимальными 1-рёберно-гамильтоновыми (O1-РГ) и 1-вершинно-гамильтоновыми (O1-ВГ) графами соответственно, в последнем столбце — число реализаций вектора степеней, являющихся O1-РГ- и O1-ВГ-графами.

Вектор степеней	Число O1-РГ	Число O1-ВГ	Общее число
(3^4)	1	1	1
$(4, 3^4)$	1	1	1
(3^6)	2	1	1
$(4, 3^6)$	2	2	2
(3^8)	4	2	2
$(4, 3^8)$	13	10	10
(3^{10})	13	7	6
$(4, 3^{10})$	87	63	63
(3^{12})	53	27	26
$(4, 3^{12})$	885	602	598
(3^{14})	320	158	154
$(4, 3^{14})$	10933	7203	7129
(3^{16})	2641	1396	1370
$(4, 3^{16})$	160145	104212	102786
(3^{18})	28643	16069	15843
$(4, 3^{18})$	2636205	1739987	1717103
(3^{20})	375906	227734	225312
$(4, 3^{20})$	47500069	32545889	32214688
(3^{22})	5672841	3740297	3713170
$(4, 3^{22})$	921357310	664225667	659673074
(3^{24})	95206332	68237411	67921892
$(4, 3^{24})$	19072278349	14515830380	14454468790
(3^{26})	1745426880	1346345125	1342594673
$(4, 3^{26})$	—	—	—
(3^{28})	34590425317	28311172759	28265410940

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.

3. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
4. *Mukhopadhyaya K. and Sinha B. P.* Hamiltonian graphs with minimum number of edges for fault-tolerant topologies // Inform. Process. Lett. 1992. V. 44. P. 95–99.
5. *Hsu L. H. and Lin C. K.* Graph Theory and Interconnection Networks. CRC Press, 2009.
6. *Абросимов М. Б.* О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: СГУ, 2000. Вып. 3. С. 3–10.
7. *Абросимов М. Б.* О неизоморфных минимальных реберных 1-расширениях графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: СГУ, 2004. Вып. 6. С. 3–9.
8. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012.
9. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
10. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения циклов с числом вершин не более одиннадцати. Саратов: СГУ, 2001. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 14.08.2001, № 1869-В2001.
11. *Абросимов М. Б., Кузнецов Н. А.* О количестве минимальных вершинных и рёберных 1-расширений циклов с числом вершин до 17 // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2012. № 5. С. 84–86.
12. *Бринкман Г., Абросимов М. Б.* О количестве минимальных расширений циклов с числом вершин до 26 и 28 // Дискретная математика, теория графов и их приложения: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 11–14 ноября 2013 г. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2013. С. 7–9.
13. *Brinkmann G.* Fast generation of cubic graphs // J. Graph Theory. 1996. V. 23. P. 139–140.
14. *Brinkmann G., Goedgebeur J., and McKay B. D.* Generation of cubic graphs // Discr. Math. Theor. Comp. Sci. 2011. V. 13(2). P. 69–80.
15. *Grund R.* Konstruktion schlichter Graphen mit gegebener Gradpartition // Bayreuther Mathematische Schriften. 1993. B. 44. S. 73–104.
16. *Сухов С. А.* DSR Generator. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016610073. Зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 11 января 2016 г.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/9/41

ОБ ОДНОМ НАСЛЕДСТВЕННОМ ПРИЗНАКЕ В ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ ГРАФОВ

Я. Э. Авезова, В. М. Фомичев

В циклической полугруппе орграфов исследован признак наличия петель в вершинах из заданного множества. Для показателя этого признака через длины контуров орграфа (образующего элемента циклической полугруппы) получены достижимые оценки и формулы для подсчёта точного значения. Применение формул показано на примере. Результаты позволяют оценить экспоненты широкого класса примитивных систем орграфов.

Ключевые слова: *признак, показатель признака, экспонент системы графов.*

Введение

Важной задачей в криптографических приложениях является определение экспонента системы орграфов $\hat{\Gamma} = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$, обозначаемого $\exp \hat{\Gamma}$ (равносильное определение экспонента системы матриц дано в [1, с. 202]). Один из способов получения