Теорема 1. Пусть G — граф диаметра $\mathrm{d}(G) \geqslant 3$ с полным разнообразием шаров. Тогда в графе G либо нет мостов, либо имеется единственный мост, один из концов которого является висячей вершиной.

Теорема 2. В классе n-вершинных графов диаметра d существует граф с полным разнообразием шаров тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2d > 0$ или $n = d + 1 = 3$.

Как следствие из найденных свойств получено описание графов с полным разнообразием шаров для *кактусов* — связных графов, в которых нет рёбер, принадлежащих более чем одному простому циклу.

Теорема 3. Цикл и звезда — все с точностью до изоморфизма кактусы с полным разнообразием шаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евдокимов А. А., Федоряева Т. И.* О проблеме характеризации векторов разнообразия шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21. № 1. С. 44–52.
2. *Евдокимов А. А.* Кодирование структурированной информации и вложения дискретных пространств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7. № 4. С. 48–58.
3. *Евдокимов А. А.* Вложения графов в n-мерный булев куб и интервальное кодирование табло // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 17. С. 15–19.
4. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.
5. *Федоряева Т. И.* Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2. № 3. С. 49–67.
6. *Федоряева Т. И.* Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12. № 3. С. 74–84.
7. *Евдокимов А. А.* Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1. № 1. С. 5–12.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/9/44

ОБ АТТРАКТОРАХ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОРИЕНТАЦИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

А. В. Жаркова

Рассматриваются конечные динамические системы ориентаций полных графов. Состояниями системы являются все возможные ориентации данного полного графа, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данного орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Приводится критерий принадлежности состояний системы аттракторам, описывается формирование аттракторов системы, их вид, длина.

Ключевые слова: *аттрактор, граф, конечная динамическая система, ориентация графа, полный граф, эволюционная функция.*

Под *ориентированным графом* (или, для краткости, *орграфом*) понимается пара $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, где V — конечное непустое множество (*вершины* орграфа), а $\beta \subseteq V \times V$ — отношение на множестве V (пара $(u, v) \in \beta$ называется *дугой* орграфа с *началом* u и *концом* v). Отношение β называют *отношением смежности*. *Неориентированным графом* (или, для краткости, *графом*) называется пара $G = (V, \beta)$, где β — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Дуги неориентированного графа называют *рёбрами*. Орграф $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ называется *направленным графом* (или *диграфом*), если отношение α антисимметрично. Пусть $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ — некоторый орграф, $v \in V$ — одна из его вершин. *Степенью исхода* вершины $v \in V$ называется число $d^+(v)$ дуг орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, имеющих своим началом v; *степень захода* вершины v — это количество $d^-(v)$ дуг, имеющих v своим концом. Граф $G = (V, \beta)$ называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается K_n. Простой циклический путь в орграфе называется *контуром* [1].

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ), где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры, в свою очередь, называются предельными циклами или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без проведения динамики. К их числу относятся свойства принадлежности состояния аттрактору, описание самих аттракторов системы. Написаны программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры конечных динамических систем, ассоциированных с некоторыми типами графов [2]. Описаны аттракторы конечных динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями таких графов, как цепи, циклы, пальмы [3–5]. В данной работе приводится критерий принадлежности состояний аттракторам в конечных динамических системах ориентаций полных графов, описывается формирование аттракторов в данных системах, их вид, длина.

Пусть дан полный граф $G = (V, \beta)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n > 1$, $m = n(n-1)/2$, где m — число рёбер. Придадим его рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, где отношение смежности β антирефлексивно и антисимметрично. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α, которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в *стоки* (вершины с нулевой степенью исхода), а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получаем орграф $\alpha(\overrightarrow{G})$. Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту данной динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

Таким образом, будем рассматривать конечную динамическую систему (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, где через Γ_{K_n} обозначим множество всех возможных ориентаций полного графа K_n, $|\Gamma_{K_n}| = 2^m$, а эволюционная функция α задаётся следующим образом: если дан некоторый орграф $\overrightarrow{G} \in \Gamma_{K_n}$, то его динамическим образом $\alpha(\overrightarrow{G})$ является орграф, полученный из $\overrightarrow{G}$ одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между $\overrightarrow{G}$ и $\alpha(\overrightarrow{G})$ нет.

В [6] рассматривается конечная динамическая система (Ω, α), где Ω — множество всех бесконтурных ориентаций данного графа, и замечается, что для полного графа существует $n!$ бесконтурных ориентаций, где $n!$ — количество перестановок его вершин, при этом система имеет $(n-1)!$ бассейнов, каждый из которых состоит исключительно из аттрактора длины n.

Определение 1. Под *вектором степеней захода* ориентированного графа $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ будем понимать вектор, компонентами которого являются степени захода всех его вершин, то есть $(d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n))$.

Очевидно, что в полном графе может быть не более одного стока.

Теорема 1 (критерий принадлежности состояния аттрактору). В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, состояние $\overrightarrow{G} \in \Gamma_{K_n}$ тогда и только тогда принадлежит аттрактору, когда в орграфе $\overrightarrow{G}$

1) нет стока
   или
2) вектор степеней захода представляет собой некоторую перестановку чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Теорема 2. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, существуют аттракторы

1) длины 1, каждый из которых образован таким состоянием $\overrightarrow{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которого нет стока;
2) длины n, каждый из которых состоит из состояний $\overrightarrow{G} \in \Gamma_{K_n}$, вектор степеней захода которых представляет собой некоторую перестановку чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, при этом каждый такой аттрактор представляет собой контур, в котором следующее состояние получается из предыдущего так: если $\overrightarrow{G}$ имеет вектор степеней захода $(d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n))$, то $\alpha(\overrightarrow{G}) \in \Gamma_{K_n}$ имеет вектор степеней захода $(d^-(v_1)+1, d^-(v_2)+1, \ldots, d^-(v_n)+1)$, где сложение осуществляется по модулю n,

и только они.

Заметим, что в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, количество аттракторов длины n равно $(n-1)!$, при этом количество состояний, принадлежащих данным аттракторам, равно $n!$. Например, карта конечной динамической системы (Γ_{K_6}, α), $|\Gamma_{K_6}| = 32768$, состоит из 26 744 бассейнов, при этом 27 344 состояния принадлежат аттракторам (что составляет $\approx 83\,\%$ от общего числа состояний); всего 26 624 аттрактора длины 1 и 120 аттракторов длины 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997.
2. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Заявка № 2009613140. Дата поступления 22 июня 2009 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
3. *Власова А. В.* Аттракторы конечных динамических систем, ассоциированных с цепями и циклами // Сб. тез. докл. конф. молодых ученых. Вып. 1. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. С. 70–71.
4. *Жаркова А. В.* Количество аттракторов в динамических системах, ассоциированных с циклами // Матем. заметки. 2014. Т. 95. Вып. 4. С. 529–537.
5. *Жаркова А. В.* Аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3(25). С. 58–67.
6. *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. London: Chapman & Hall/CRC, 2001.