

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2013

№ 1(21)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербаков Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики); Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бадяева З.П., Бухтык М.С. Полуинвариантные полиномы второго порядка на многообразии лучей пространства A_3	5
Пестов Г.Г., Фомина Е.А. Конструкция семейства бесконечно узких полей	13
Сопуев А., Аркабаев Н.К. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка	16
Теймуров Р.А. О задаче управления подвижными источниками для систем с распределенными параметрами	24
Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота	34

МЕХАНИКА

Белов Н.Н., Югов Н.Т., Афанасьева С.А., Федосов О.Ю., Югов А.А., Мамцев Р.С. Анализ прочности конструкций из пространственно-разнесённых сталебетонных плит при высокоскоростном ударе составным металлическим ударником	41
Ложкова Ю.Н. Вейвлет-технология обработки результатов исследования энергетических установок	52
Макаров П.В., Еремин М.О. Моделирование разрушения керамических композиционных материалов при одноосном сжатии	61
Миньков Л.Л., Дик И.Г., Пикущак Е.В. Моделирование турбулентного течения полидисперсной суспензии в гидроциклоне с инжектором	75
Платонов Д.В., Минаков А.В., Дектерев А.А., Харламов Е.Б. Сравнительный анализ CFD-пакетов SigmaFlow и Ansys Fluent на примере решения ламинарных тестовых задач	84
Попов И.П. Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний	95
Томилин А.К., Прокопенко Е.В. Продольные колебания упругого электропроводного стержня в неоднородном магнитном поле	104

МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ БЕРЦУН (к 70-летию со дня рождения)	112
КРЫЛОВ ПЕТР АНДРЕЕВИЧ (к 65-летию со дня рождения)	116
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	123

CONTENTS

MATHEMATICS

Badyaeva Z. P., Bukhtyak M. S. Semi-stable second-order polynomials on the varifold of rays of the A_3 space	5
Pestov G.G., Fomina E.A. A construction of a family of infinitely narrow fields	13
Sopuev A., Arkabaev N. K. Interface problems for linear pseudo-parabolic equations of the third order.	16
Teimurov R.A. The problem of optimal control for moving sources for systems with distributed parameters.	24
Tursunov D. A. Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed ordinary second-order differential equation with two turning points.	34

MECHANICS

Belov N.N., Yugov N. T. , Afanas'eva S. A., Fedosov O.Yu. , Yugov A.A. , Mamtsev R.S. Durability analysis for designs of spatially-carried steel-concrete plates at high-speed blow by the compound metal drummer	41
Lozhkova Yu. N. Wavelet-technology of processing the studies of power plants.	52
Makarov P. V., Eremin M. O. Simulation of ceramic compositional materials fracture upon uniaxial compression	61
Min'kov L.L., Dueck J.H., Pikushchak E.V. Simulation of turbulent polydisperse suspension flow in the hydrocyclone with an injector.	75
Platonov D.V., Minakov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A., Kharlamov E.B. Comparative analysis of CFD SIGMAFLOW and FLUENT packages by the example of solving laminar test problems.	84
Popov I.P. Vibration systems consisting only of inert or only elastic elements and the appearance of free harmonic vibrations in them.	95
Tomilin A.K., Prokopenko E.V. Longitudinal oscillations of a resilient electroconductive core in an inhomogeneous magnetic field.	104

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

V.N. Bertsun. To the 70 th anniversary	112
P.A. Krylov. To the 65 th anniversary	116

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	123
---	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 514.654.7

З.П. Бадяева, М.С. Бухтык

ПОЛУИНВАРИАНТНЫЕ ПОЛИНОМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА МНОГООБРАЗИИ ЛУЧЕЙ ПРОСТРАНСТВА A_3

Найдены минимальные оснащения, позволяющие задавать на многообразии лучей трехмерного аффинного пространства относительно инвариантные квадратичные формы с постоянными коэффициентами. Доказано, что таких оснащений имеется два и каждое из них порождает свою структуру в кокасательном расслоении указанного многообразия. Доказано, что в любом из этих случаев относительно инвариантная квадратичная дифференциальная форма на линейчатом пространстве пропорциональна той, что задает полуриманову метрику на многообразии приложенных векторов. Найдены группы стационарности найденных оснащений, и для этих групп указаны одномерные подгруппы. Данная работа имеет очевидную связь с работами [4–6] второго автора.

Ключевые слова: инвариантная квадратичная форма, подвижной репер, многообразии лучей.

1. Оператор, подобный ковариантному дифференциалу

Деривационные формулы подвижного репера $\{M, e_1, e_2, e_3\}$ трехмерного аффинного пространства A_3 имеют вид

$$\begin{aligned} dM &= \omega^i e_i, \\ de_i &= \omega_i^j e_j, \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где формы Пфаффа [1] ω^i, ω_j^i подчинены уравнениям структуры аффинного пространства

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим многообразие всех прямых в пространстве A_3 . Будем считать, что на каждой прямой задана ориентация таким образом, что полученное 4-мерное дифференцируемое многообразие лучей есть гладкое многообразие. Это многообразие обозначим L . Текущий элемент многообразия – луч l . Локальные координаты луча l – как точки многообразия – пусть обозначаются t^i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Помещаем вершину подвижного репера на текущий луч l , а вектор e_3 репера пусть сонаправлен с текущим лучом. Тогда пфаффовы формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$ являются линейными комбинациями величин dt^i и не содержат дифференциалов

параметров, ответственных за изменение репера при фиксированном луче. Такие формы называются главными [1]. Эти формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$ (базовые формы) управляют смещением луча, и

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0.$$

Хорошо известна роль квадратичной дифференциальной формы $2(\omega^1 \omega_3^2 - \omega^2 \omega_3^1) = 2(dM, de_3, e_3)$ в геометрии линейчатого пространства (в частности, обращение её в нуль для луча регулуса делает этот луч торсовым). Поставим следующий вопрос: насколько особое положение занимает эта квадратичная форма среди тех однородных квадратичных многочленов от базовых форм линейчатого пространства, и обладающих свойством относительной инвариантности по отношению к некоторым преобразованиям, на наш взгляд естественным.

Обозначая, как в [1],

$$\omega^i \Big|_{dt^k=0} = \pi^i, \quad \omega_j^i \Big|_{dt^k=0} = \pi_j^i, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

закключаем, что $\pi^1 = \pi^2 = \pi_3^1 = \pi_3^2 = 0.$ (1)

Данные соотношения сужают полную аффинную группу, действующую в касательном пространстве многообразия L , до некоторой подгруппы. Оставшиеся формы

$$\pi_1^1, \pi_1^2, \pi_2^1, \pi_2^2, \pi_2^3, \pi_3^1, \pi_3^3, \pi^3$$
 (2)

управляют смещением репера при фиксированном луче.

Введём матричнозначную форму [2]

$$\left(\frac{\theta}{\Omega} \right) = \left\| \begin{array}{cccc} \omega^1 & \omega^2 & \omega_3^1 & \omega_3^2 \\ \omega_1^1 & \omega_1^2 & 0 & 0 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1^1 & \omega_1^2 \\ 0 & 0 & \omega_2^1 & \omega_2^2 \end{array} \right\|.$$

Тогда справедливы соотношения

$$d\theta - \theta \wedge \Omega = \left(\omega^3 \wedge \omega_3^1, \omega^3 \wedge \omega_3^2, \omega_3^3 \wedge \omega_3^1, \omega_3^3 \wedge \omega_3^2 \right),$$

$$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = \left\| \begin{array}{cccc} \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 & & \\ \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} & \omega_1^3 \wedge \omega_3^1, \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \\ & & & \omega_2^3 \wedge \omega_3^1, \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 \end{array} \right\|.$$

Ясно, что последние соотношения являются структурными уравнениями линейной связности в том и только в том случае, когда внешние квадратичные формы

$$\omega^3 \wedge \omega_3^\alpha, \omega_i^3 \wedge \omega_3^\alpha, \quad i = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2,$$

разложимы по внешним квадратичным формам

$$\omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \omega^\alpha \wedge \omega_3^\beta, \omega_3^\alpha \wedge \omega_3^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Мы не предполагаем данное условие выполненным. Определим, однако, оператор Ψ , указав его действие на матрицу $H = (h_{ij})$ следующим образом:

$$\Psi(H) = dH - \Omega H - (\Omega H)^T.$$

Если матричнозначная форма Ω определяет аффинную связность, то оператор Ψ есть оператор ковариантного дифференцирования. Обозначим

$$\Pi = \begin{vmatrix} \pi_1^1 & \pi_1^2 & 0 & 0 \\ \pi_2^1 & \pi_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_1^1 & \pi_1^2 \\ 0 & 0 & \pi_2^1 & \pi_2^2 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Оператор $\Psi_{\delta}(H) = \delta H - \Pi H - (\Pi H)^T$

имеет очевидный смысл (δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам).

Пусть на многообразии L задан однородный многочлен второй степени Φ от дифференциалов базовых форм

$$\Phi = a_{\alpha\beta} \omega^{\alpha} \omega^{\beta} + 2b_{\alpha\beta} \omega^{\alpha} \omega_3^{\beta} + c_{\alpha\beta} \omega_3^{\alpha} \omega_3^{\beta} \quad (4)$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Матрица полинома $L = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{21} & c_{11} & c_{12} \\ b_{12} & b_{22} & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}. \quad (5)$

Требование полуинвариантности полинома (4) относительно оператора Ψ при фиксированных базовых параметрах приводит к уравнению

$$\Psi_{\delta}(L) \equiv \delta L - \Pi L - (\Pi L)^T = \Xi L, \quad (6)$$

где Ξ – пфафдова 1-форма. Поставим следующую задачу. Отыскать условия на ненулевой полином (4) с постоянными коэффициентами и на пфаффову форму Ξ , чтобы при отсутствии связей на формы (2) выполнялось требование (6). Пфаффову форму Ξ будем искать в виде

$$\Xi = x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_1^2 + x_3 \pi_2^1 + x_4 \pi_2^2 + x_5 \pi_2^3 + x_6 \pi_3^1 + x_7 \pi_3^2 + x_8 \pi_3^3. \quad (7)$$

Предъявленное нами требование (с учётом (3), (5) – (7)) приводит к системе уравнений, матричная запись которой имеет вид

$$A \times \begin{pmatrix} \pi_1^1 \\ \pi_1^2 \\ \pi_2^1 \\ \pi_2^2 \\ \pi_2^3 \\ \pi_3^1 \\ \pi_3^2 \\ \pi_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11}(2+x_1) & 2a_{12}+x_2a_{11} & x_3a_{11} & x_4a_{11} & x_5a_{11} & x_6a_{11} & x_7a_{11} & x_8a_{11} \\ a_{12}(1+x_1) & a_{22}+x_2a_{12} & a_{11}+x_3a_{12} & a_{12}(1+x_4) & x_5a_{12} & x_6a_{12} & x_7a_{12} & x_8a_{12} \\ x_1a_{22} & x_2a_{22} & 2a_{12}+x_3a_{22} & 2a_{22}+x_4a_{22} & x_5a_{22} & x_6a_{22} & x_7a_{22} & x_8a_{22} \\ b_{11}(2+x_1) & b_{21}+b_{12}+x_2b_{11} & x_3b_{11} & x_4b_{11} & x_5b_{11} & x_6b_{11} & x_7b_{11} & x_8b_{11} \\ b_{12}(1+x_1) & b_{22}+x_2b_{12} & b_{11}+x_3b_{12} & b_{12}(1+x_4) & x_5b_{12} & x_6b_{12} & x_7b_{12} & x_8b_{12} \\ b_{21}(1+x_1) & b_{22}+x_2b_{21} & b_{11}+x_3b_{21} & b_{21}(1+x_4) & x_5b_{21} & x_6b_{21} & x_7b_{21} & x_8b_{21} \\ x_1b_{22} & x_2b_{22} & b_{21}+b_{12}+x_3b_{22} & b_{22}(2+x_4) & x_5b_{22} & x_6b_{22} & x_7b_{22} & x_8b_{22} \\ c_{11}(2+x_1) & 2c_{12}+x_2c_{11} & x_3c_{11} & x_4c_{11} & x_5c_{11} & x_6c_{11} & x_7c_{11} & x_8c_{11} \\ c_{12}(1+x_1) & c_{22}+x_2c_{12} & c_{11}+x_3c_{12} & c_{12}(1+x_4) & x_5c_{12} & x_6c_{12} & x_7c_{12} & x_8c_{12} \\ x_1a_{22} & x_2a_{22} & 2c_{12}+x_3c_{22} & 2c_{22}+x_4c_{22} & x_5c_{22} & x_6c_{22} & x_7c_{22} & x_8c_{22} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Поскольку данное уравнение не должно налагать ограничений на пфаффовы формы (2), то матрица A – нулевая. В то же время матрица L (см. (5)) отлична от нулевой. Указанная совокупность условий выполнена, если и только если

$$\begin{aligned} x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -1, \\ a_{11} = a_{12} = a_{22} = b_{11} = b_{12} + b_{21} = b_{22} = c_{11} = c_{22} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до числового множителя,

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Phi = 2(\omega^1 \omega_3^2 - \omega^2 \omega_3^1) = 2(dM, de_3, e_3).$$

Соответственно $\Xi = -\pi_1^1 - \pi_2^2$.

Отметим, что полином Φ инвариантен, если и только если

$$\pi_1^1 + \pi_2^2 = 0. \quad (9)$$

Вследствие (1) внешнее дифференцирование последнего уравнения приводит к тождеству. При выполнении (9) получаем подгруппу преобразований репера, определяемую деривационными формулами

$$\begin{aligned} \delta M &= \pi_3^3 e_3, \\ \delta e_1 &= \pi_1^1 e_1 + \pi_1^2 e_2 + \pi_1^3 e_3, \\ \delta e_2 &= \pi_2^1 e_1 + \pi_2^2 e_2 + \pi_2^3 e_3, \\ \delta e_3 &= \pi_3^3 e_3, \\ \pi_1^1 + \pi_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Геометрический смысл условия (9), дополненного (1), таков:

$$\delta(e_1 e_2 e_3) e_3 = (e_1 e_2 e_3) \delta e_3,$$

где символ (abc) обозначает косое произведение векторов a, b, c .

2. Вариация однородного полинома от базовых форм

Для дальнейшего нам потребуются связи на вторичные параметры. Действуя как в [3], получаем в обозначениях [1,3] вариации главных форм в виде

$$\begin{aligned} \delta \omega^\alpha &= -\omega^\beta \pi_\beta^\alpha + \pi_3^\alpha \omega_3^\alpha, \\ \delta \omega_3^\alpha &= -\omega_3^\beta \pi_\beta^\alpha + \pi_3^\alpha \omega_3^\alpha, \\ \alpha, \beta &= 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Применив (10) к (4), получаем, что

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= (\delta a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta} \pi_\alpha^\gamma - a_{\alpha\gamma} \pi_\beta^\gamma) \omega^\alpha \omega^\beta + \\ &+ 2(\delta b_{\alpha\beta} - b_{\gamma\beta} \pi_\alpha^\gamma - b_{\alpha\gamma} \pi_\beta^\gamma + a_{\alpha\beta} \pi_3^3 + b_{\alpha\beta} \pi_3^3) \omega^\alpha \omega_3^\beta + \\ &+ (\delta c_{\alpha\beta} - c_{\gamma\beta} \pi_\alpha^\gamma - c_{\alpha\gamma} \pi_\beta^\gamma + 2b_{\alpha\beta} \pi_3^3 + 2c_{\alpha\beta} \pi_3^3) \omega_3^\alpha \omega_3^\beta. \end{aligned} \quad (11)$$

В этих формулах δ – символ дифференцирования по вторичным (слоевым) параметрам.

Квадратичный полином Φ окажется относительно инвариантным, если

$$\delta\Phi = \Theta\Phi,$$

где Θ – некоторая пфаффова форма. Итак, условие относительной инвариантности имеет, с учетом (11), вид

$$\begin{aligned}\delta a_{\alpha\beta} &= a_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma + a_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma + \Theta a_{\alpha\beta}, \\ \delta b_{\alpha\beta} &= b_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma + b_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma - a_{\alpha\beta}\pi^3 - b_{\alpha\beta}\pi_3^3 + \Theta b_{\alpha\beta}, \\ \delta c_{\alpha\beta} &= c_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma + c_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma - 2b_{\alpha\beta}\pi^3 - 2c_{\alpha\beta}\pi_3^3 + \Theta c_{\alpha\beta}, \\ \alpha, \beta, \gamma &= 1, 2.\end{aligned}$$

Приведем подробную запись последних соотношений для полинома с постоянными коэффициентами. Именно,

$$\begin{aligned}a_{11}(\Theta + 2\pi_1^1) + 2a_{12}\pi_1^2 &= \\ a_{12}(\Theta + \pi_1^1 + \pi_2^2) + a_{11}\pi_2^1 + a_{22}\pi_1^2 &= 0, \\ a_{22}(\Theta + 2\pi_2^2) + 2a_{12}\pi_2^1 &= 0, \\ b_{11}(\Theta + 2\pi_1^1 - \pi_3^3) + (b_{12} + b_{21})\pi_1^2 - a_{11}\pi^3 &= 0, \\ b_{12}(\Theta + \pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3) + b_{11}\pi_2^1 + b_{22}\pi_1^2 - a_{12}\pi^3 &= 0, \\ b_{21}(\Theta + \pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3) + b_{11}\pi_2^1 + b_{22}\pi_1^2 - a_{12}\pi^3 &= 0, \\ b_{22}(\Theta + 2\pi_2^2 - \pi_3^3) + (b_{12} + b_{21})\pi_2^1 - a_{22}\pi^3 &= 0, \\ c_{11}(\Theta + 2\pi_1^1 - 2\pi_3^3) + 2c_{12}\pi_1^2 - 2b_{11}\pi^3 &= 0, \\ c_{12}(\Theta + \pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3) + c_{11}\pi_2^1 + c_{22}\pi_1^2 - (b_{12} + b_{21})\pi^3 &= 0, \\ c_{22}(\Theta + 2\pi_2^2 - 2\pi_3^3) + 2c_{12}\pi_2^1 - 2b_{22}\pi^3 &= 0.\end{aligned}$$

Полагаем

$$\Theta = x_1\pi_1^1 + x_2\pi_1^2 + x_3\pi_2^1 + x_4\pi_2^2 + x_5\pi_2^3 + x_6\pi_1^3 + x_7\pi_3^3 + x_8\pi^3.$$

Аналогично (8) получаем матричное уравнение

$$B \times \begin{pmatrix} \pi_1^1 \\ \pi_2^2 \\ \pi_1^2 \\ \pi_2^1 \\ \pi_2^3 \\ \pi_1^3 \\ \pi_3^3 \\ \pi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{vmatrix} a_{11}(2+x_1) & 2a_{12}+x_2a_{11} & x_3a_{11} & x_4a_{11} & x_5a_{11} & x_6a_{11} & x_7a_{11} & x_8a_{11} \\ a_{12}(1+x_1) & a_{22}+x_2a_{12} & a_{11}+x_3a_{12} & a_{12}(1+x_4) & x_5a_{12} & x_6a_{12} & x_7a_{12} & x_8a_{12} \\ x_1a_{22} & x_2a_{22} & 2a_{12}+x_3a_{22} & 2a_{22}+x_4a_{22} & x_5a_{22} & x_6a_{22} & x_7a_{22} & x_8a_{22} \\ b_{11}(2+x_1) & b_{21}+b_{12}+x_2b_{11} & x_3b_{11} & x_4b_{11} & x_5b_{11} & x_6b_{11} & b_{11}(x_7-1) & x_8b_{11}-a_{11} \\ b_{12}(1+x_1) & b_{22}+x_2b_{12} & b_{11}+x_3b_{12} & b_{12}(1+x_4) & x_5b_{12} & x_6b_{12} & x_7b_{12} & x_8b_{12} \\ b_{21}(1+x_1) & b_{22}+x_2b_{21} & b_{11}+x_3b_{21} & b_{21}(1+x_4) & x_5b_{21} & x_6b_{21} & x_7b_{21} & x_8b_{21} \\ x_1b_{22} & x_2b_{22} & b_{21}+b_{12}+x_3b_{22} & b_{22}(2+x_4) & x_5b_{22} & x_6b_{22} & x_7b_{22} & x_8b_{22} \\ c_{11}(2+x_1) & 2c_{12}+x_2c_{11} & x_3c_{11} & x_4c_{11} & x_5c_{11} & x_6c_{11} & x_7c_{11} & x_8c_{11} \\ c_{12}(1+x_1) & c_{22}+x_2c_{12} & c_{11}+x_3c_{12} & c_{12}(1+x_4) & x_5c_{12} & x_6c_{12} & x_7c_{12} & x_8c_{12} \\ x_1a_{22} & x_2a_{22} & 2c_{12}+x_3c_{22} & 2c_{22}+x_4c_{22} & x_5c_{22} & x_6c_{22} & x_7c_{22} & x_8c_{22} \end{vmatrix}.$$

Условия, налагаемые на матрицу B , – те же, что и для матрицы A . В данном случае они приводят к единственному (с точностью до ненулевого числового множителя) решению

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{12} = a_{22} = b_{11} = b_{12} - 1 = b_{21} + 1 = b_{22} = c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0, \\ x_1 + 1 = x_2 = x_3 = x_4 + 1 = x_5 = x_6 = x_7 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до ненулевого числового множителя, как и раньше, имеем

$$\Phi = 2(\omega^1 \omega_3^2 - \omega^2 \omega_3^1) = 2(dM, de_3, e_3).$$

Однако форма Θ отличается от формы Ξ . Именно,

$$\Theta = \pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_2^2. \quad (12)$$

Согласно приведенным выше результатам, запишем вариацию найденной квадратичной формы

$$\delta\Phi = (\pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_2^2)\Phi.$$

Таким образом, форма Φ лишь относительно инвариантна на линейчатом пространстве, а инвариантной она окажется при выполнении следующего набора условий:

$$\pi^1 = \pi^2 = \pi_3^1 = \pi_2^2 = 0, \quad \pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 = 2\pi_3^3. \quad (13)$$

Последнему равенству в системе (13) можно придать более геометрическую форму, а именно:

$$\delta(e_1 e_2 e_3) e_3 = 2(e_1 e_2 e_3) \delta e_3.$$

Очевидно, что уравнения (13) выполнены для многообразия скользящих векторов в эквиаффинном пространстве A_3' , и подавно – для многообразия приложенных векторов в A_3' .

3. Одномерные подгруппы

Для базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеем деривационные формулы

$$\delta e_1 = \pi_1^1 e_1 + \pi_1^2 e_2 + \pi_1^3 e_3,$$

$$\delta e_2 = \pi_2^1 e_1 + \pi_2^2 e_2 + \pi_2^3 e_3,$$

$$\delta e_3 = \pi_3^1 e_1 + \pi_3^2 e_2 + \pi_3^3 e_3,$$

причем формы Пфаффа π_i^j связаны в случае (9) соотношениями

$$\pi_3^1 = \pi_3^2 = \pi_1^1 + \pi_1^1 = 0,$$

а в случае (12) – соотношениями

$$\pi_3^1 = \pi_3^2 = \pi_1^1 + \pi_1^1 - \pi_3^3 = 0.$$

Каждая из двух последних систем уравнений вполне интегрируема и определяет (каждая свою) подгруппу полной линейной группы. Обозначим их G_1 и G_2 . Найдем одномерные подгруппы групп G_1 и G_2 .

Пусть $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ – неподвижный базис, причем вектор \mathbf{p}_3 параллелен неподвижному направлению вектора \mathbf{e}_3 . Пусть каждый вектор базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ зависит от одного параметра t . Тогда связь двух базисов можно выразить уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= x_1(t)\mathbf{p}_1 + x_2(t)\mathbf{p}_2 + x_3(t)\mathbf{p}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= y_1(t)\mathbf{p}_1 + y_2(t)\mathbf{p}_2 + y_3(t)\mathbf{p}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= z(t)\mathbf{p}_3. \end{aligned} \quad (14)$$

причём
$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} z(t) \neq 0.$$

Заметим, что соотношения $\pi_3^1 = \pi_3^2 = 0$ нами уже учтены. Дифференцируем (14), а результат записываем, применяя выражение векторов неподвижного базиса через векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда оказывается, что

$$\pi_1^1 = \frac{dx_{[1]y_2}}{x_{[1]y_2}}, \quad \pi_1^2 = -\frac{dx_{[1]x_2}}{x_{[1]y_2}}, \quad \pi_2^1 = \frac{dy_{[1]y_2}}{x_{[1]y_2}}, \quad \pi_2^2 = -\frac{dy_{[1]x_2}}{x_{[1]y_2}}, \quad \pi_3^3 = \frac{dz}{z}.$$

Теперь уравнение $\pi_1^1 + \pi_1^1 = 0$ принимает вид

$$dx_{[1]y_2} - dy_{[1]x_2} \equiv d \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

и его очевидное решение

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = const \neq 0, \quad (15)$$

а уравнение $\pi_1^1 + \pi_1^1 - \pi_3^3 = 0$ приводится к виду

$$\frac{d(x_{[1]y_2})}{x_{[1]y_2}} = \frac{dz}{z},$$

общее решение которого

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = Cz, \quad C = const \neq 0. \quad (16)$$

Надлежащим выбором базиса $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ приводим решение (15) к виду

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Аналогичным действием приводим решение (16) к виду

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = z.$$

Группа G_1 изоморфна группе матриц

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = 1,$$

А группа G_2 соответственно изоморфна группе матриц

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_3^3.$$

Полином, от которого требовали полуинвариантности по отношению к некоторой подгруппе группы (1), оказался вполне ожидаемым. Однако подгрупп стационарности оказалось две, поскольку полуинвариантность имела в виду изначально в разных смыслах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.
2. *Аквис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1977. – 83 с.
3. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций. М.: ГИТТЛ, 1950. 528 с.
4. *Бухтяк М.С.* Об одном шестимерном пространстве // Геом. сб. Вып. 22. Томск: Изд-во ТГУ, 1982. С. 51–61.
5. *Бухтяк М.С.* Связность Вейля и связность Леви – Чивита на четырехпараметрическом векторном поле. Томск, 1986. 34 с. Деп. в ВИНТИ. 29.09.1986 г. № 6857 – В86.
6. *Бухтяк М.С.* Замечательные связности на четырехпараметрическом векторном поле // Геом. сб. Вып. 29. Томск: Изд-во ТГУ, 1988. С. 84–90.

Статья поступила 23.11.2012 г.

Badyaeva Z.P., Bukhtyak M.S. SEMI-STABLE SECOND-ORDER POLYNOMIALS ON THE VARIFOLD OF RAYS OF THE A_3 SPACE. Minimal riggings making it possible to impose relatively semi-stable quadratic forms with constant coefficients on the varifold of trivariate affine ray space. It has been proved that there are two such riggings, and each of them generates its own structure in cotangent bundle of the specified varifold. It is proved that in any of these cases relative semi-stable quadratic differential form on the ruled space is proportional to the form that imposes a semi-Riemannian metric on the varifold of added vectors. Stationery state groups are identified for the discovered additional structures, and one-dimensional sub-groups are specified for these groups. This work is apparently related to the works [4, 5, 6] of the second author.

Keywords: semi-stable quadratic form, moving frame, varifold of rays.

BADYAEVA Zinaida Petrovna (Kuzbass State Technical University)

E-mail: leemouse@mail.ru

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Tomsk State University)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

УДК 512.623.5

Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

КОНСТРУКЦИЯ СЕМЕЙСТВА БЕСКОНЕЧНО УЗКИХ ПОЛЕЙ

В статье изложена новая конструкция семейства бесконечно узких полей.

Ключевые слова: базис трансцендентности, двумерное упорядочивание, верхний конус, бесконечно узкое поле.

Исследования по теории линейно упорядоченных полей начались с пионерских работ Артина и Шрайера [1]. Бесконечно узкие поля относятся к тому классу полей, которые одновременно допускают и линейное, и двумерное упорядочивание. В работе [5] показано, что поле $\mathbf{Q}(\pi)$ можно снабдить двумерным порядком, при котором оно является бесконечно узким полем. В настоящей статье описан новый способ построения семейств бесконечно узких полей. Эти семейства существенно шире семейств, описанных в [6].

1. Основная конструкция

Пусть P_0 – линейно упорядоченное поле. Обозначим через \tilde{P}_0 топологическое замыкание поля P_0 . В топологическом замыкании линейно упорядоченного поля нет собственных фундаментальных сечений [4]. Как известно, линейный порядок с поля P_0 единственным образом продолжается на поле \tilde{P}_0 [4]. Пусть B есть базис трансцендентности [2] поля \tilde{P}_0 над полем P_0 , т.е. максимальная алгебраически независимая система элементов \tilde{P}_0 над P_0 . Поле $K = P_0(B)$ как подполе \tilde{P}_0 линейно упорядочено.

Зададим произвольное отображение $d: B \rightarrow K$. Таким образом, для каждого $x \in B$ задано значение $dx \in K$. Далее, каждому $x \in K$ сопоставим значение $dx \in K$ следующим образом. Если $x \in K$, то $x = f(a_1, \dots, a_n)$. Убедимся, что представление $x = f(a_1, \dots, a_n)$ единственно. В самом деле, пусть ещё $x = g(b_1, \dots, b_m)$, где $b_1, \dots, b_m \in B$ и $f \neq g$. Тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) = g(b_1, \dots, b_m).$$

Значит,

$$f(a_1, \dots, a_n) - g(b_1, \dots, b_m) = 0.$$

Следовательно, элементы

$$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \text{ из } B$$

связаны нетривиальным алгебраическим соотношением, что противоречит определению базиса трансцендентности. Итак, доказано, что представление $x = g(b_1, \dots, b_m)$ единственно.

Теперь полагаем

$$dx = df(a_1, \dots, a_n),$$

где

$$df(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n.$$

Поскольку представление $x = g(b_1, \dots, b_m)$ единственно, то dx для каждого x также определено единственным образом. Заметим, что ранее [6] авторы в конструкции верхнего конуса бесконечно узкого поля полагали всюду $dx_i = 1$. Таким образом, описываемая здесь конструкция является существенным обобщением конструкции из [6].

2. Двумерный порядок в поле K

Зададим двумерный порядок в поле K . Известно, что двумерный порядок однозначно задаётся верхним конусом K^u [3]. Построим верхний конус следующим образом. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ пробегает поле $P_0(x_1, \dots, x_n)$; кортеж (a_1, \dots, a_n) пробегает множество кортежей элементов из B . Имеет место следующая

Теорема. Множество

$$K^u = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \in P_0(x_1, \dots, x_n), df(a_1, \dots, a_n) \geq 0\}$$

есть верхний конус некоторого двумерного порядка в поле K , при котором K является бесконечно узким полем.

Доказательство. Убедимся, что K^u есть верхний конус 2-порядка в поле K .

Проверим выполнение условий (а) – (d) критерия верхнего конуса [3]:

(а) $K^u + K^u = K^u$;

(b) $K^u \cup -K^u = K$;

(с) $(K^u \setminus \{0\})^{-1} = -K^u \setminus \{0\}$;

(d) если $x, z \in K^u, y \in K^u$; $zy^{-1}, yx^{-1} \in K^u$, то $zx^{-1} \in K^u$.

(а) Убедимся, что множество K^u замкнуто относительно сложения.

Пусть $f(a_1, \dots, a_n), g(a_1, \dots, a_n) \in K^u$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} da_n \geq 0,$$

где $f(a_1, \dots, a_n), g(a_1, \dots, a_n) \in K$.

Но тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n + \frac{\partial g}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} da_n \geq 0$$

или
$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial(f+g)}{\partial x_n} da_n \geq 0$$

Значит, $(f+g) \in K^u$.

(b) Условие: $K^u \cup (-K^u) = K$ выполнено.

Действительно, пусть $f(a_1, \dots, a_n) \in K$. Возможны два случая.

Либо

$$df(a_1, \dots, a_n) \geq 0,$$

и тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) \in K^u.$$

Либо

$$df(a_1, \dots, a_n) \leq 0,$$

и тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) \in -K^u.$$

Доказательство пунктов (с) и (d) формально аналогично доказательству, приведённому в [6].

Таким образом, в поле $K = P_0(B)$ эффективно задан нетривиальный двумерный порядок.

Покажем, что K – бесконечно узкое поле [5].

Пусть $x = f(a_1, \dots, a_n) \in K^u$. Так как $x \in K^u$, то, по определению верхнего конуса K^u , имеем $dx > 0$. Докажем, что

$$\forall n \forall r \in K_0 (r < x \Rightarrow (x - r)^n \in K^u).$$

Заметим, что для того чтобы элемент $(x - r)^n$ принадлежал открытому верхнему конусу, необходимо и достаточно, чтобы

$$d((x - r)^n) > 0.$$

Пусть $r \in K_0, x \in K$, и $r < x$. Так как $(x - r) > 0$, то $(x - r)^{n-1} > 0$ в силу того, что $K = P_0(B)$ является линейно упорядоченным полем. Имеем

$$\forall n \in \mathbb{N} d((x - r)^n) = n(x - r)^{n-1} dx > 0.$$

Значит, $(x - r)^n \in K^u$, следовательно, $x = f(a_1, \dots, a_n)$ – бесконечно близкий к базе K элемент, и поле K является бесконечно узким.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artin E. Algebraische Konstruktion Reeller Körper / E. Artin, O. Schreier // Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 5. 1925. S. 85–99.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. М.: Наука, 1965. 300 с.
3. Пестов Г.Г. Двумерно упорядоченные поля. Томск: Томский госуниверситет, 2003. 127 с.
4. Пестов Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 6. С. 1350–1360.
5. Пестов Г.Г. Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля / Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 50–53.
6. Фомина Е.А. Об одном классе двумерно упорядоченных полей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. №3(4). С. 32–34.

Статья поступила 22.11.2012 г.

Pestov G.G., Fomina E.A. A CONSTRUCTION OF A FAMILY OF INFINITELY NARROW FIELDS. A new construction of a family of infinitely narrow fields is presented.

Keywords: transcendence basis, 2-ordering, upper cone, infinitely narrow field.

PESTOV German Gavrilovich (Tomsk State University)

E-mail: gpestov@mail.ru

FOMINA Elena Anatolyevna (Tomsk State Pedagogic University)

E-mail: ef254@mail.ru

УДК 517.956.6

А. Сопуев, Н.К. Аркабаев

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доказано существование единственного решения задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

Ключевые слова: сопряжения, псевдопараболические уравнения, краевые условия, функции Римана, интегральные уравнения.

1. Постановка задачи

В области D , ограниченной отрезками прямых

$$x = 0, y = -h_1, x = \ell, y = h, x = -\ell_1, y = 0 \quad (\ell, \ell_1, h, h_1 > 0),$$

рассмотрим задачи сопряжения для уравнений

$$L_1(u) \equiv u_{xxx} - u_{xy} + a_1 u_x + d_1 u = 0, (x, y) \in D_1; \quad (1)$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxy} + a_2 u_{xx} + b_2 u_{xy} + c_2 u_x + d_2 u_y + e_2 u = 0, (x, y) \in D_2; \quad (2)$$

$$L_3(u) \equiv u_{xyy} + a_3 u_{xy} + b_3 u_{yy} + c_3 u_x + d_3 u_y + e_3 u = 0, (x, y) \in D_3, \quad (3)$$

где $a_i, d_i, b_j, c_j, e_j, i = \overline{1,3}, j = 2,3$, – заданные функции, а $D_1 = D \cap (x > 0, y > 0)$, $D_2 = D \cap (x > 0, y < 0)$, $D_3 = D \cap (x < 0, y > 0)$.

Уравнения (1) – (3) представляют собой канонические виды линейных уравнений третьего порядка по классификации работы [1]. Такие уравнения часто называются псевдопараболическими по характеру свойств решений [2, 3]. Частные случаи рассматриваемых уравнений встречаются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [4].

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ ($r = 0, 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, m$).

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{aligned} a_1, d_1 &\in C(\overline{D}_1), a_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2), b_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \\ a_3 &\in C(\overline{D}_3) \cap C^{1+1}(D_3), b_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{0+2}(D_3), \\ c_j &\in C(\overline{D}_j) \cap C^{1+0}(D_j), d_j \in C(\overline{D}_j) \cap C^{0+1}(D_j), e_j \in C(\overline{D}_j), j = 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Задача 1. Найти функцию

$$u(x, y) \in C(\overline{D}_j) \cap [C^{1+1}(D_1) \cup C^{2+1}(D_2) \cup C^{1+2}(D_3)] \cap C^{3+0}, i = 1, 2, 3,$$

удовлетворяющую уравнениям (1), (2) и (3) в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно, краевым условиям

$$u(-\ell_1, y) = \varphi_1(y), u(\ell, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h; \quad (5)$$

$$u(0, y) = \chi_1(y), u_x(0, y) = \chi_2(y), -h_1 \leq y \leq 0; \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), u_y(x, 0) = \psi_2(x), -\ell_1 \leq x \leq 0 \quad (7)$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0), u_y(x, -0) = u_y(x, +0), 0 \leq x \leq \ell; \quad (8)$$

$$u(-0, y) = u(+0, y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y), 0 \leq y \leq h, \quad (9)$$

где $\varphi_i(y), \chi_i(y), \psi_i(x) (i = 1, 2)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) \in C^2[0, h], \varphi_2(y) \in C^1[0, h], \\ \chi_i(y) \in C^1[-h_1, 0], \psi_i(x) \in C^1[-\ell_1, 0] (i = 1, 2); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) = \psi_1(-\ell_1), \psi_1(0) = \chi_1(0), \psi_2(0) = \chi_1'(0), \\ \psi_1'(0) = \chi_2(0), \psi_2'(0) = \chi_2'(0). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (1) – (3) в совокупности с условиями сопряжения (8) и (9) являются уравнениями смешанного типа с двумя линиями изменения типа в области D [5]. Задачи сопряжений для уравнений второго порядка с двумя линиями изменения типа рассмотрены в работах [6–8]. Методом функции Римана изучены краевые задачи для уравнения вида (2) в работах [9, 10]. Построение функции Римана и корректные краевые задачи для дифференциальных уравнений со старшими частными производными рассмотрены в работах [11–15].

Введем следующие обозначения:

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \tau_1(x), u_y(x, -0) = u_y(x, +0) = \nu_1(x), 0 \leq x \leq \ell; \quad (12)$$

$$u(-0, y) = u(+0, y) = \tau_2(y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y) = \nu_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (13)$$

где $\tau_1(x), \tau_2(y), \nu_1(x), \nu_2(y)$ – пока неизвестные функции.

2. Представление решения задачи 1 в области D_2

Рассмотрим в области D_2 задачу Гурса для уравнения (2) с условиями (6) и

$$u(x, 0) = \tau_1(x), 0 \leq x \leq \ell. \quad (14)$$

Решение этой задачи представим через функции Римана [9, 10]. С этой целью рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \upsilon L_2(u) - u L_2^*(\upsilon) = [\upsilon u_{\xi\eta} + \upsilon_{\xi\eta} u + a_2 \upsilon u_{\xi} - (a_2 \upsilon)_{\xi} u + \\ + b_2 \upsilon u_{\eta} + c_2 \upsilon u]_{\xi} - [\upsilon_{\xi} u_{\xi} + (b_2 \upsilon)_{\xi} u - d_2 \upsilon u]_{\eta}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $L^*(\upsilon) \equiv -\upsilon_{\xi\xi\eta} + (a_2 \upsilon)_{\xi\xi} + (b_2 \upsilon)_{\xi\eta} - (c_2 \upsilon)_{\xi} - (d_2 \upsilon)_{\eta} + e_2 \upsilon$.

Пусть $B_1^*(x, y)$ – произвольная точка области D_2 . Интегрируя равенство (15) по области $D_2^* = \{(x, y) : 0 < \xi < x, y < \eta < 0\}$, имеем

$$\begin{aligned} \iint_{D_2^*} [(\upsilon L_2(u) - u L_2^*(\upsilon))] d\xi d\eta = \int_{\partial D_2^*} [\upsilon_{\xi} u_{\xi} + (b_2 \upsilon)_{\xi} u - d_2 \upsilon u] d\xi + \\ + [\upsilon u_{\xi\eta} + \upsilon_{\xi\eta} u + a_2 \upsilon u_{\xi} - (a_2 \upsilon)_{\xi} u + b_2 \upsilon u_{\eta} + c_2 \upsilon u] d\eta. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $\upsilon(x, y, \xi, \eta)$ – является решением задачи Гурса

$$L_2^*(\upsilon) = 0, (\xi, \eta) \in D_2^*, \quad (17)$$

$$v(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\xi=x} = 0, \quad v_\xi(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\xi=x} = \exp \left(\int_y^\eta a_2(x, t) dt \right), \quad y \leq \eta \leq 0; \quad (18)$$

$$v(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\eta=y} = \theta_1(x, y; \xi), \quad 0 \leq \xi \leq x, \quad (19)$$

где $\theta_1(x, y; \xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$v_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) - [b_2(\xi, y)v(x, y; \xi, y)]_\xi + d_2(\xi, y)v(x, y; \xi, y) = 0, \quad 0 < \xi < x, \quad (20)$$

$$v(x, y; \xi, y) \Big|_{\xi=x} = 0, \quad v_\xi(x, y; \xi, y) \Big|_{\xi=x} = 1.$$

Задача (17) – (19) решается эквивалентным сведением к интегральному уравнению Вольтерра вида

$$v(x, y; \xi, \eta) = \xi - x + \int_x^\xi B(\xi, \eta, s)v(x, y; s, \eta) ds + \int_y^\eta a_2(\xi, t)v(x, y; \xi, t) dt + \int_x^\xi \int_y^\eta C(\xi, s, t)v(x, y; s, t) dt, \quad (21)$$

где $B(\xi, \eta, s) = b_2(s, \eta) - (\xi - s)d_2(s, \eta)$, $C(\xi, s, t) = -c_2(s, t) + (\xi - s)e_2(s, t)$, которое допускает единственное решение из класса $C^{2+1}(D_2^*)$.

Тогда из (16) получим представление решения задачи 1 в области D_2 :

$$u(x, y) = v_\xi(x, y; x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x A_1(x, y; \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \int_0^y [B_1(x, y; \eta)\chi_1'(\eta) - v(x, y; 0, \eta)\chi_2'(\eta) + C_1(x, y; \eta)\chi_2(\eta) + E_1(x, y; \eta)\chi_1(\eta)]d\eta, \quad (22)$$

где $A_1(x, y; \xi) = -v_{\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + [b_2(\xi, 0)v(x, y; \xi, 0)]_\xi - d_2(\xi, 0)v(x, y; \xi, 0)$,

$$B_1(x, y; \eta) = v_\xi(x, y; 0, \eta) - b_2(0, \eta)v(x, y; 0, \eta),$$

$$C_1(x, y; \eta) = -a_2(0, y)v(x, y; 0, \eta),$$

$$E_1(x, y; \eta) = [a_{2\xi}(0, \eta) - c_2(0, \eta)v(x, y; 0, \eta) + a_2(0, \eta)v_\xi(x, y; 0, \eta)].$$

Из (22) нетрудно получить соотношение между $\tau_1(x)$, и $v_1(x)$, полученное с помощью области D_2 :

$$v_1(x) = v_{\xi y}(x, 0; x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x A_{1y}(x, 0; \xi)\tau_1(\xi)d\xi + g_1(x), \quad (23)$$

где $g_1(x) = B_1(x, 0, 0)\chi_1'(0) - v(x, 0; 0, 0)\chi_2'(0) + C_1(x, 0, 0)\chi_2(0) + E_1(x, 0, 0)\chi_1(0)$.

3. Соотношение между $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$, полученное с помощью области D_1

Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до x имеем

$$u_{xx} - u_y = \omega(y) - a_1(x, y)u + \int_0^x \tilde{d}_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi + T_0(x, y), \quad (24)$$

$$\tilde{d}_1(\xi, y) = a_{1\xi}(\xi, y) - d_1(\xi, y), \quad T_0(x, y) = a_1(0, y)\tau_2(y) - \tau_2'(y).$$

Отсюда переходя к пределу при $y \rightarrow +0$, получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$:

$$\tau_1'(x) - v_1(x) = \omega(0) - a_1(x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x \tilde{d}_1(\xi, 0)\tau_1(\xi)d\xi + T_0(x, 0). \quad (25)$$

4. Определение $\tau_1(x)$

Исключая $v_1(x)$ из соотношений (23) и (25), приходим к уравнению

$$\tau_1''(x) = \omega(0) - \tilde{a}_1(x)\tau_1(x) + \int_0^x \tilde{A}_1(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \tilde{g}_1(x), \quad (26)$$

где
$$\tilde{g}_1(x) = g_1(x) + T_0(x, 0), \quad \tilde{a}_1(x) = -a_1(x, 0) + v_{\xi y}(x, 0; x, 0),$$

$$\tilde{A}_1(x, \xi) = \tilde{d}_1(\xi, 0) - A_{1y}(x, 0; \xi).$$

Отметим, что для $\tau_1(x)$ выполняются еще следующие краевые условия:

$$\tau_1(0) = \chi_1(0), \tau_1'(0) = \chi_2(0), \tau_1(\ell) = \varphi_2(0). \quad (27)$$

Интегрируя дважды уравнение (26) и используя при этом первые два условия из (27), имеем

$$\tau_1(x) = \frac{1}{2}\omega(0)x^2 + \int_0^x A_2(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + g_2(x), \quad (28)$$

$$A_2(x, \xi) = \tilde{a}_1(\xi)(x - \xi) + \int_{\xi}^x (x - t)\tilde{A}_1(t, \xi)dt, \quad g_2(x) = \chi_1(0) + \chi_2(0)x + \int_0^x (x - t)\tilde{g}_1(t)dt.$$

Отсюда, воспользовавшись третьим условием (27), находим

$$\omega(0) = \frac{2}{\ell^2}[\varphi_2(0) - g_2(\ell)] - \frac{2}{\ell^2} \int_0^{\ell} A_2(\ell, \xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Подставляя это в значение (28), имеем

$$\tau_1(x) = g_3(x) + \int_0^x A_2(x, \xi)\tau_2(\xi)d\xi - \frac{x^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} A_2(\ell, \xi)\tau_1(\xi)d\xi, \quad (29)$$

где
$$g_3(x) = g_2(x) + \frac{1}{\ell^2}[\varphi_2(0) - g_2(\ell)]x^2.$$

Обращая вольтеровскую часть уравнения (29), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau_1(x) = g(x) + \int_0^{\ell} H_1(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi, \quad (30)$$

где
$$H_1(x, \xi) = -\frac{1}{\ell^2} \left(x^2 + \int_0^x R_1(x, t)t^2 dt \right) A_2(\ell, \xi),$$

$$g(x) = g_3(x) + \int_0^x R_1(x, \xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Если $\ell L < 1$, (31)

то уравнение (30) имеет единственное решение, здесь $L = \max_{0 \leq x, \xi \leq \ell} |H_1(x, \xi)|$.

5. Представление решение задачи 1 в области D_3

В области D_3 рассмотрим задачу Гурса для уравнения (3) с условиями (7) и $u(0, y) = \tau_2(y), 0 \leq y \leq h$, решение которого с помощью функции Римана представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & w_{\eta}(x, y; 0, y)\tau_2(y) + \int_0^y A_2(x, y; \eta)\tau_2(\eta)d\eta + \\ & + \int_0^x [B_2(x, y; \xi)\psi'_1(\xi) - w(x, y; \xi, 0)\psi'_2(\xi) + \\ & + C_2(x, y; \xi)\psi_2(\xi) + E_2(x, y; \xi)\psi_1(\xi)]d\xi, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$A_2(x, y; \xi) = -w_{\eta\eta}(x, y; 0, \eta) + [a_3(0, \eta)w(x, y; 0, \eta)]_{\eta} - c_3(0, \eta)w(x, y; 0, \eta),$$

$$B_2(x, y; \xi) = w_{\eta}(x, y; \xi, 0) - a_3(\xi, 0)w(x, y; \xi),$$

$$C_3(x, y; \xi) = -b_3(\xi, 0)w(x, y; \xi),$$

$$E_2(x, y; \xi) = [b_{3\eta}(\xi, 0) - d_3(\xi, 0)]w(x, y; \xi, 0) + b_3(\xi, 0)w_{\eta}(x, y; \xi, 0).$$

Здесь $w(x, y; \xi, \eta)$ – функция Римана, определяемая как решение следующей задачи:

$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\eta\eta} + (a_3 w)_{\xi\eta} + (b_3 w)_{\eta\eta} - (c_3 w)_{\xi} - (d_3 w)_{\eta} + e_3 w = 0,$$

$$(\xi, \eta) \in D_3^* = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\},$$

$$w(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = 0, w_{\eta}(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = \exp\left(\int_x^{\xi} b_3(s, y)ds\right), x \leq \xi \leq 0, \quad (33)$$

$$w(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \theta_2(x, y; \eta),$$

где $\theta_2(x, y; \eta)$ – решение задачи Коши:

$$w_{\eta\eta}(x, y; x, \eta) - [a_3(x, \eta)w(x, y; x, \eta)]_{\eta} + c_3(x, \eta)w(x, y; x, \eta) = 0, 0 < \eta < y,$$

$$w(x, y; x, \eta)|_{\eta=0} = 0, w_{\eta}(x, y; x, \eta)|_{\eta=0} = 1.$$

При выполнении условий (4) решение задачи (33) существует и единственно.

Используя первое условие (5) и учитывая, что $w_{\eta}(-\ell_1, y; 0, y) > 0$, из (32) получим

$$\tau_2(y) = \gamma(x) + \int_0^y H_2(y, \eta)\tau_2(\eta)d\eta, \quad (34)$$

где
$$H_2(y, \eta) = -\frac{A_2(-\ell_1, y; \eta)}{w_\eta(-\ell_1, y; 0, y)}, \quad \gamma(x) = \frac{1}{w_\eta(-\ell_1, y; 0, y)} \{ \varphi_1(y) + \int_{-\ell_1}^0 [B_2(-\ell_1, y; \xi) \psi_1'(\xi) - w(-\ell_1, y; \xi, 0) \psi_2'(\xi) + C_2(-\ell_1, y; \xi) \psi_2(\xi) + E_2(-\ell_1, y; \xi) \psi_1(\xi)] d\xi \}.$$

Определив $\tau_2(y)$ из (34), однозначно находим решение задачи 1 в области D_3 по формуле (32). Тогда из (32) можно определить $v_2(y) = u_x(0, y)$.

6. Решение задачи 1 в области D_1

Выписывая решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условиям

$$u_x(0, y) = v_2(y), u(\ell, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h, u(x, 0) = \tau_1(x), 0 \leq x \leq \ell,$$

из (24) имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\int_0^y G(x, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y; \ell, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^\ell \int_0^y G(x, y; \xi, \eta) [\omega(\eta) - a_1(\xi, \eta) u(\xi, \eta) + \\ & + \int_0^\xi \tilde{d}_1(t, \eta) u(t, \eta) dt + T_0(\xi, \eta)] d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] + \right. \\ & \left. + \exp\left[-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Представим полученное решение в виде

$$u(x, y) = -\int_0^y M(x, y, \eta) \omega(\eta) d\eta + \int_0^\ell \int_0^y K_1(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta + T_1(x, y), \quad (35)$$

где
$$\begin{aligned} M(x, y, \eta) = & \int_0^\ell G(x, y; \xi, \eta) d\xi, \quad K_1(x, y; \xi, \eta) = \\ = & a_1(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) - \tilde{d}_1(\xi, \eta) \int_0^\ell G(x, y; t, \eta) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1(x, y) = & \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y G_\xi(x, y; \ell, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \int_0^\ell \int_0^y T_0(\xi, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Используя условие $u(0, y) = \tau_2(y)$, из (35) имеем

$$\int_0^y M(0, y, \eta) \omega(\eta) d\eta = r_0(y) + \int_0^\ell d\xi \int_0^\ell K_1(0, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \quad (36)$$

где $r_0(y) = -\tau_2(y) + T_1(0, y)$.

Представим $M(0, y, \eta)$ в виде

$$M(0, y, \eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\ell}{2\sqrt{y-\eta}}} e^{-s^2} ds + \int_0^\ell q(y, \xi, \eta) d\xi,$$

$$\text{где } q(y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] + \exp\left[-\frac{(\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi+2\ell-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] + \exp\left[-\frac{(\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\}.$$

Здесь ' – означает отсутствие члена суммы при $n = 0$.

Нетрудно заметить, что $\lim_{\eta \rightarrow y} M(0, y, \eta) = 1$. Поэтому, дифференцируя уравнения

(36), получим

$$\omega(y) + \int_0^y M_y(0, y, \eta) \omega(\eta) d\eta = r_0'(y) + \int_0^\ell d\xi \int_0^\ell K_{1y}(0, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta.$$

Обращая это уравнение, найдем $\omega(y)$:

$$\omega(y) = r(y) + \int_0^\ell d\xi \int_0^y K_2(y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \quad (37)$$

где

$$K_2(y, \xi, \eta) = K_{1y}(0, y; \xi, \eta) + \int_\eta^y R(y, t) K_{1t}(0, t; \xi, \eta) dt, \quad r(y) = r_0'(y) + \int_0^y R(y, \eta) r_0'(\eta) d\eta,$$

$R(y, \eta)$ – резольвента ядра – $M_y(0, y, \eta)$. Исключая $\omega(y)$ из (35) и (37), получим интегральное уравнение типа Вольтерра

$$u(x, y) = T(x, y) + \int_0^\ell d\xi \int_0^y K(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \quad (38)$$

$$\text{где } K(x, y; \xi, \eta) = K_1(x, y; \xi, \eta) - \int_0^y M(x, y, t) K_2(t, \xi, \eta) dt, \quad T(x, y) = \\ = T_1(x, y) - \int_0^y M(x, y, \eta) r(\eta) d\eta.$$

В силу свойств функций $K(x, y; \xi, \eta)$ и $T(x, y)$ уравнение (38) допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Таким образом, доказана

Теорема. Если выполняются условия (4), (10), (11) и (31), то задача имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джурбаев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1734–1745.
2. Colton D. Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. 1972. № 12. P. 559–565.
3. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 63. № 1. P. 77–81.
4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.
6. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного парабола-гиперболического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1984. № 3. С. 29–34.
7. Сопуев А. Краевые задачи для парабола-гиперболического уравнений с двумя линиями изменения типа // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 4. С. 31–37.
8. Исломов Б. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями и плоскостями вырождения: автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.: 01.01.02. Ташкент, 1995. 32 с.
9. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Нальчик, 1985. 225 с.
10. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1999. № 10. С. 73–76.
11. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. матем. об-во, 2001. 226 с.
12. Жегалов В.И. О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадратурах // Изв. вузов. Математика. 2004. № 7. С. 47–52.
13. Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2006. № 9. С. 70–67.
14. Миронов А.Н. К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 2(15). С. 27–32.
15. Тихонова О.А. Понижение порядка и решение в квадратурах дифференциальных уравнений со старшими частными производными: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань, 2010. 17 с.

Статья поступила 21.12.2011 г.

Sopuev A., Arkabaev N.K. INTERFACE PROBLEMS FOR LINEAR PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER. Existence of the unique solution of the interface problem for linear pseudo-parabolic equations of the third order with two lines of type change is proved.

Keywords: interface problems, linear pseudo-parabolic equations, boundary conditions, Riemann functions, integral equations.

SOPUEV Adahimjan (Osh State University)

E-mail: sopuev@rambler.ru

ARKABAEV Nurkasym Kylychbekovich (Osh State University)

E-mail: nurkasym@gmail.com

УДК 517.977

Р.А.Теймуров

**О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ
ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

В работе исследуется задача оптимального управления процессами, описываемыми совокупностью уравнений параболического типа и обыкновенным дифференциальным уравнением, с управлениями подвижных источников. Для рассмотренной ниже задачи оптимального управления доказана теорема существования и единственности решения, получены необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума, найдены достаточные условия дифференцируемости по Фреше критерия качества и получено выражение для его градиента.

Ключевые слова: *подвижные источники, редуцированная задача, необходимые условия оптимальности, принцип максимума, интегральное тождество.*

Несмотря на прикладную важность задач с управлениями подвижных источников, они в настоящее время наиболее мало изучены [1, 5]. Для некоторых классов линейных и нелинейных краевых задач, в которых участвуют импульсные функции, исследованы вопросы существования и единственности обобщенного решения. В частности в [5] эти вопросы исследованы при условии, что управление возможно только интенсивностью неподвижных источников.

В указанных практических примерах нельзя ограничиться только рассмотрением систем с распределенными параметрами. Приходится учитывать вспомогательные элементы, без которых невозможно управлять процессом. Эти элементы обычно имеют сосредоточенные параметры. Поведение таких систем описывается совокупностью дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных при начальных и граничных условиях. В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления подвижными источниками, заданная параболическим уравнением и обыкновенным дифференциальным уравнением при начальных и граничных условиях. Для этой задачи будет доказана теорема существования и единственности решения, затем получены необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума.

1. Постановка задачи

Пусть $l > 0, T > 0$ – заданные числа, $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, \Omega_t = (0, l) \times (0, t), \Omega = \Omega_T$. В дальнейшем понадобятся функциональные пространства $W_2^{1,0}(\Omega_T), W_2^{1,1}(\Omega_T), V_2(\Omega_T), V_2^{1,0}(\Omega_T), H_1(0, T)$, которые введены, например, в [4].

Пусть состояние управляемого процесса описывается функциями $u(x, t)$ и $s(t)$. Будем предполагать, что внутри области Ω_T функция $u(x, t)$ удовлетворяет следующему параболическому уравнению:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_{k=1}^n p_k(t) \delta(x - s_k(t)), \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l; \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0, 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $a > 0$ – заданное число, $\varphi(x) \in L_2(0, l)$ – заданная функция; $\delta(\cdot)$ – функция Дирака; $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)) \in L_2^n(0, T)$ – управляющая функция.

Также будем предполагать, что функции $s_k(t) \in H_1(0, T), k = \overline{1, n}$ являются решением следующей задачи Коши:

$$\dot{s}_k(t) = f_k(s_k(t), \vartheta(t), t), 0 < t \leq T, s_k(0) = s_{k0}, k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где $s_{k0} \in R^n$; $\vartheta = \vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \dots, \vartheta_r(t)) \in L_2^r(0, T)$ – управляющая функция; функция $f(s, \vartheta, t) = (f_1(s, \vartheta, t), f_2(s, \vartheta, t), \dots, f_n(s, \vartheta, t))$ является непрерывной и имеет непрерывные ограниченные производные по s и ϑ при $(s, \vartheta, t) \in E^n \times E^r \times [0, T] : |f_{\vartheta}(s, \vartheta, t)| \leq M_{\vartheta}, |f_s(s, \vartheta, t)| \leq M_s, M_{\vartheta} > 0, M_s > 0$.

Пару функций $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ будем называть управлением. Для краткости обозначим $H = L_2^n(0, T) \times L_2^r(0, T)$ – гильбертово пространство пар $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ со скалярным произведением

$$\langle \bar{\vartheta}^1, \bar{\vartheta}^2 \rangle_H = \int_0^T [p^1(t)p^2(t) + \vartheta^1(t)\vartheta^2(t)] dt$$

и нормой
$$\|\bar{\vartheta}\|_H = \sqrt{\langle \bar{\vartheta}, \bar{\vartheta} \rangle_H} = \sqrt{(\|p\|_{L_2}^2 + \|\vartheta\|_{L_2}^2)}.$$

Положим

$$V = \{(p, \vartheta) \in H : 0 \leq p_i \leq A_i, 0 \leq \vartheta_j \leq B_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, r}\}, \quad (5)$$

где $A_i > 0, i = \overline{1, n}, B_j > 0, j = \overline{1, r}$ – заданные числа и

$$J(\bar{\vartheta}) = \int_0^l [u(x, T) - y(x)]^2 dx + \alpha_1 \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)]^2 dt + \alpha_2 \sum_{m=1}^r \int_0^T [\vartheta_m(t) - \tilde{\vartheta}_m(t)]^2 dt, \quad (6)$$

где $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t)) \in H$; $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0$ – заданные параметры;

$$y(x) \in L_2(0, l), \omega = (\tilde{p}(t), \tilde{\vartheta}(t)) \in H, \tilde{p}(t) = (\tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t), \dots, \tilde{p}_n(t)) \in L_2^n(0, T),$$

$$\tilde{\vartheta}(t) = (\tilde{\vartheta}_1(t), \tilde{\vartheta}_2(t), \dots, \tilde{\vartheta}_r(t)) \in L_2^r(0, T)$$

– заданные функции.

Требуется найти такое управление $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ из множества V и функции $u(x, t)$ и $s(t)$, чтобы функционал (6) принимал наименьшее возможное значение при ограничениях (1) – (4).

2. Существование и единственность решения

Определение. Задачу о нахождении функции $(u(x, t), s(t)) = (u(x, t; \bar{\vartheta}), s(t; \vartheta))$ из условий (1) – (4) при заданном управлении $\bar{\vartheta} \in V$ назовем редуцированной задачей. Под решением редуцированной задачи (1) – (4), соответствующей управле-

нию $\bar{\mathfrak{S}} = (p(t), \mathfrak{S}(t)) \in V$, понимается функция $(u(x, t), s(t))$ из $(V_2^{1,0}(\Omega), H_1^n(0, T))$, где функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [-u \eta_t + a^2 u_x \eta_x] dx dt = \int_0^l \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \sum_{k=1}^n \int_0^T p_k(t) \eta(s_k(t), t) dt, \quad (7)$$

для $\forall \eta = \eta(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta(x, T) = 0$, а функция $s_k(t) = s_k(t; \mathfrak{S})$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$s_k(t) = \int_0^t f_k(s_k(\tau), \mathfrak{S}(\tau), \tau) d\tau + s_{k0}, \quad 0 \leq t \leq T, k = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Из результатов работ [2, 4] следует, что при каждом фиксированном $\bar{\mathfrak{S}} \in V$ редуцированная задача (1) – (4) имеет единственное решение из $(V_2^{1,0}(\Omega), H_1^n(0, T))$. Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи (1) – (6). Тогда задача (1) – (6) имеет хотя бы одно решение. Следует отметить, что задача (1) – (6) при $\alpha_j = 0, j = \overline{1, 2}$, некорректна в классическом смысле [8]. Однако имеет место

Теорема 1. Существует плотное подмножество K пространства H , такое, что для любого $\omega \in K$ при $\alpha_i > 0, i = \overline{1, 2}$, задача (1) – (6) имеет единственное решение.

Доказательство. Докажем непрерывность функционала

$$J_0(\bar{\mathfrak{S}}) = \|u(x, T) - y(x)\|_{L_2[0, l]}^2.$$

Пусть $\Delta \bar{\mathfrak{S}} = (\Delta p, \Delta \mathfrak{S}) \in V$ – приращение управления на элементе $\bar{\mathfrak{S}} = (p, \mathfrak{S}) \in V$, такое, что $\bar{\mathfrak{S}} + \Delta \bar{\mathfrak{S}} \in V$. Обозначим

$$\Delta u \equiv \Delta u(x, t) = u(x, t; \bar{\mathfrak{S}} + \Delta \bar{\mathfrak{S}}) - u(x, t; \bar{\mathfrak{S}}),$$

$$\Delta s_k \equiv \Delta s_k(t) = s_k(t; \bar{\mathfrak{S}} + \Delta \bar{\mathfrak{S}}) - s_k(t; \bar{\mathfrak{S}}).$$

Из (1) – (4) следует, что функция Δu является обобщенным решением краевой задачи:

$$\Delta u_t = a^2 \Delta u_{xx} + \sum_{k=1}^n [(p_k + \Delta p_k) \delta(x - (s_k + \Delta s_k)) - p_k \delta(x - s_k)], \quad (x, t) \in \Omega_T; \quad (9)$$

$$\Delta u_x|_{x=0} = \Delta u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, T]; \quad (10)$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l], \quad (11)$$

а функции $\Delta s_k, k = \overline{1, n}$, являются решением задачи Коши:

$$\Delta \dot{s}_k(t) = \Delta f_k(s_k(t), \mathfrak{S}(t), t), \quad \Delta s_k(0) = 0, k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где $\Delta f_k(s_k(t), \mathfrak{S}(t), t) = f_k(s_k + \Delta s, \mathfrak{S} + \Delta \mathfrak{S}, t) - f_k(s_k, \mathfrak{S}, t)$.

Докажем, что для функции $\Delta u(x, t)$ имеет место оценка

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \leq c_1 \|\Delta \bar{\mathfrak{S}}\|_{L_2(0, T)}, \quad (13)$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная.

Умножая обе части уравнения (9) на $\eta = \eta(x, t)$ и интегрируя по частям полученное равенство, имеем соотношение

$$\int_0^l \int_0^T [\Delta u_t \eta + a^2 \Delta u_x \eta_x] dx dt = \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k + \Delta p_k] \eta(s_k + \Delta s_k, t) - p_k \eta(s_k, t) dt. \quad (14)$$

Пусть $t_1, t_2 \in [0, T]$ такие, что $t_1 \leq t_2$. В тождестве (14) положим

$$\eta(x, t) = \begin{cases} \Delta u(x, t), & t \in (t_1, t_2], \\ 0, & t \in [0, t_1] \cup (t_2, T], \end{cases}$$

и применяя формулы конечных приращений для функции $\Delta u(s_k(t) + \Delta s_k, t)$ в виде

$$\Delta u(s_k + \Delta s_k, t) = \Delta u(s_k, t) + \Delta u_x(\bar{s}_k, t) \cdot \Delta s_k, \quad \bar{s}_k = s_k + \theta \Delta s_k, \quad \theta \in [0, 1],$$

получим уравнение энергетического баланса для задачи (9) – (12):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \\ & = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} [(p_k + \Delta p_k) \Delta s_k \Delta u_x(\bar{s}_k, t) + \Delta p_k \Delta u(s_k, t)] dt, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\bar{s}_k = s_k + \theta \Delta s_k$, $\theta \in [0, 1]$.

Применяя неравенство Коши – Буняковского к правой части уравнения (15), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \left[\left(\|p_k\|_{L_2(t_1, t_2)} + \|\Delta p_k\|_{L_2(t_1, t_2)} \right) \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\Delta s_k(t)| \|\Delta u_x(\bar{s}_k, t)\|_{L_2(t_1, t_2)} + \right. \\ & \quad \left. + \|\Delta p_k\|_{L_2(t_1, t_2)} \|\Delta u(s_k, t)\|_{L_2(t_1, t_2)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $\Delta s(t)$ является решением задачи Коши (12), то из свойств функции $f(s, \vartheta, t)$ при достаточно малом $\varepsilon = t_2 - t_1$ имеем

$$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\Delta s_k(t)| = O\left(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(t_1, t_2)}\right), \quad \forall k, 1 \leq k \leq n.$$

Кроме того, несложно показать, что верны неравенства:

$$\|\Delta u(s_k, t)\|_{L_2(t_1, t_2)} \leq c_2 \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

$$\|\Delta u_x(\bar{s}_k, t)\|_{L_2(t_1, t_2)} \leq c_3 \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

где $c_2 > 0, c_3 > 0$ – некоторые постоянные.

Но тогда правую часть неравенства (16) можно ограничить сверху следующим образом:

$$\frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} \leq c_4 \|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(t_1, t_2)} \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)}, \quad (17)$$

при $\|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(t_1, t_2)} \rightarrow 0$, где $c_4 > 0$ – некоторая константа. Как и в работе [2, с. 166–168], для произвольного $t \in [0, T]$ разобьем отрезок $[0, t]$ на конечное чис-

ло подотрезков, на каждом из которых выполняется неравенство (17). Затем, сложив полученные неравенства для каждого подотрезка, получим

$$\frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq C_4 \|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(0, T)} \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

откуда вытекает неравенство (13). Тогда $\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$. Отсюда и из теоремы о следах [8] получим, что $\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$.

Приращение функционала $I(\bar{\vartheta})$ представимо в виде

$$J_0(\bar{\vartheta} + \Delta \bar{\vartheta}) - J_0(\bar{\vartheta}) = 2 \int_0^T [u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx + \|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)}^2.$$

Отсюда и из того, что $\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$, следует непрерывность функционала $J_0(\bar{\vartheta})$.

Функционал $J_0(\bar{\vartheta})$ снизу ограничен и в силу доказанного является непрерывным в V . Кроме того, H – равномерно выпуклое и рефлексивно банахово пространство [7]. Тогда из теоремы Бидо, приведенной в работе [9], следует существование плотного подмножества K пространства H , такого, что для любого $\omega = (\tilde{p}(t), \tilde{\vartheta}(t)) \in H$ при $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$, задача (1) – (6) имеет единственное решение. Теорема доказана.

3. Необходимое условие оптимальности

Пусть $\psi = \psi(x, t)$ – решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$ сопряженной задачи

$$\psi_t + a^2 \psi_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T; \quad (18)$$

$$\psi_x|_{x=0} = \psi_x|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T; \quad (19)$$

$$\psi(x, T) = 2[u(x, T) - y(x)], \quad 0 \leq x \leq l, \quad (20)$$

где $u(x, T)$ – значение при $t = T$ решения редуцированной задачи (1) – (6), и пусть $q_k(t)$ – решение из $H_1(0, T)$ сопряженной задачи

$$\dot{q}_k(t) = -\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(t) + p_k(t) \psi_x(s_k(t), t), \quad 0 \leq t < T, q_k(T) = 0, k = \overline{1, n}. \quad (21)$$

Интегрируя по частям тождество

$$\int_{\Omega_T} (\psi_t + a^2 \psi_{xx}) \eta_1(x, t) d\Omega_T = 0,$$

получим, что функция $\psi = \psi(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [\psi \eta_{1t} + a^2 \psi_x \eta_{1x}] dx dt = 2 \int_0^l [u(x, T) - y(x)] \eta_1(x, T) dx \quad (22)$$

для $\forall \eta_1 = \eta_1(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta_1(x, 0) = 0$, а функция $q_k(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$q_k(t) = \int_t^T \left[\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(\tau) - p_k(\tau) \psi_x(s_k(\tau), \tau) \right] d\tau, 0 \leq t \leq T, k = \overline{1, n}. \quad (23)$$

Сопряженная задача (9) – (12) является смешанной задачей для линейного параболического уравнения. Если в соотношениях (9) – (12) вместо переменной t взять новую независимую переменную $\tau = T - t$, то получим краевую задачу того же типа, что и (1) – (4). Поэтому из фактов, установленных для задачи (1) – (4), следует, что для каждого заданного $\bar{\mathfrak{G}} = (p(t), \mathfrak{G}(t)) \in V$ задача (9) – (12) имеет единственное решение из $(V_2^{1,0}(\Omega), H_1^n(0, T))$.

Функцию

$$H(t, s, \psi, q, \bar{\mathfrak{G}}) = - \left\{ \sum_{k=1}^n [-f_k(s_k(t), \mathfrak{G}(t), t) q_k(t) + \psi(s_k(t), t) p_k(t) + \alpha_1 (p_k(t) - \tilde{p}_k(t))^2] + \alpha_2 \sum_{m=1}^r (\mathfrak{G}_m(t) - \tilde{\mathfrak{G}}_m(t))^2 \right\} \quad (24)$$

назовем функцией Гамильтона – Понтрягина задачи (1) – (6).

Теорема 2. Пусть функции $f_k(s_k, \mathfrak{G}, t)$, $k = \overline{1, n}$, непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные ограниченные частные производные по переменным s, \mathfrak{G} при $(s, \mathfrak{G}, t) \in R^n \times R^r \times [0, T]$ и, кроме того, выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} |f_k(s_k + \Delta s, \mathfrak{G} + \Delta \mathfrak{G}, t) - f_k(s_k, \mathfrak{G}, t)| &\leq L(|\Delta s| + |\Delta \mathfrak{G}|), \\ |f_{ks}(s_k + \Delta s, \mathfrak{G} + \Delta \mathfrak{G}, t) - f_{ks}(s_k, \mathfrak{G}, t)| &\leq L(|\Delta s| + |\Delta \mathfrak{G}|), \\ |f_{k\mathfrak{G}}(s_k + \Delta s, \mathfrak{G} + \Delta \mathfrak{G}, t) - f_{k\mathfrak{G}}(s_k, \mathfrak{G}, t)| &\leq L(|\Delta s| + |\Delta \mathfrak{G}|), \end{aligned}$$

при всех $(s + \Delta s, \mathfrak{G} + \Delta \mathfrak{G}, t)$, $(s, \mathfrak{G}, t) \in E^n \times E^r \times [0, T]$, где $L = \text{const} \geq 0$.

Тогда, если $(\psi(x, t), q(t))$ – решение сопряженной задачи (9) – (12), то функционал (6) дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента справедливо соотношение

$$J'(\bar{\mathfrak{G}}) = \left(\frac{\partial J(\bar{\mathfrak{G}})}{\partial p}, \frac{\partial J(\bar{\mathfrak{G}})}{\partial \mathfrak{G}} \right) = \left(-\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}} \right), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}_1}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}_r} \right), \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} &= -\psi(s_k(t), t) - 2\alpha_1 (p_k(t) - \tilde{p}_k(t)), k = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}_m} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(s_k(t), \mathfrak{G}(t), t)}{\partial \mathfrak{G}_m} q_k(t) - 2\alpha_2 (\mathfrak{G}_m(t) - \tilde{\mathfrak{G}}_m(t)), m = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала

$$\Delta J \equiv J(\bar{\mathfrak{G}} + \Delta \bar{\mathfrak{G}}) - J(\bar{\mathfrak{G}}) = 2 \int_0^T [u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx + \int_0^T |\Delta u(x, T)|^2 dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \left\{ 2\alpha_1 \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)] \Delta p_k(t) dt + \alpha_1 \int_0^T |\Delta p_k(t)|^2 dt \right\} + \\
& + \sum_{m=1}^r \left\{ 2\alpha_2 \int_0^T [\vartheta_m(t) - \tilde{\vartheta}_m(t)] \cdot \Delta \vartheta_m(t) dt + \alpha_2 \int_0^T |\Delta \vartheta_m(t)|^2 dt \right\}, \quad (26)
\end{aligned}$$

где $\bar{\vartheta} = (p, \vartheta) \in V$, $\bar{\vartheta} + \Delta \bar{\vartheta} \in V$, $\Delta u(x, T) \equiv u(x, T; \bar{\vartheta} + \Delta \bar{\vartheta}) - u(x, T; \bar{\vartheta})$, $u \equiv u(x, T; \bar{\vartheta})$.

Если в (22) положим $\eta_1 = \Delta u(x, t)$, в (14) положим $\eta = \psi(x, t)$ и вычтем полученные соотношения, то имеем

$$\int_0^{\ell} 2[u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx = \sum_{k=1}^n \int_0^T [(p_k + \Delta p_k) \psi(s_k + \Delta s_k, t) - p_k \psi(s_k, t)] dt. \quad (27)$$

Из (12) следует, что функция $\Delta s_k(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^T [\Delta s_k(t) \dot{\theta}_k(t) + \Delta f_k(s_k(t), \vartheta(t), t) \theta_k(t)] dt = 0, \quad (28)$$

для $\forall \theta_k(t) \in L_2(0, T)$, $\theta_k(T) = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Из (21) следует, что функция $q_k(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^T \left[q_k(t) \dot{\theta}_{1k}(t) - \left(\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(t) - p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \right) \theta_{1k}(t) \right] dt = 0, \quad (29)$$

для $\forall \theta_{1k}(t) \in L_2(0, T)$, $\theta_{1k}(0) = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Если в (29) положим $\theta_{1k}(t) = \Delta s_k(t)$, в (28) $\theta_k(t) = q_k(t)$ и сложим полученные соотношения, то получим

$$[\Delta s_k(t) q_k(t)]_0^T = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(t) - p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \right) \Delta s_k(t) - \Delta f_k q_k(t) \right] dt.$$

По условию теоремы функцию $\Delta f_k = \Delta f_k(s_k(t), \vartheta(t), t)$ можно представить в виде

$$\Delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial s_k} \Delta s_k + \sum_{m=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_m} \Delta \vartheta_m + R_1,$$

где $R_1 = o\left(\sqrt{\|\Delta s\|_{L_2(0, T)}^2 + \|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}^2}\right)$. Тогда из последнего равенства имеем

$$\begin{aligned}
[\Delta s_k(t) q_k(t)]_0^T &= \int_0^T \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(t) - p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \right) \Delta s_k(t) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_m} \Delta \vartheta_m(t) q_k(t) - \frac{\partial f_k}{\partial s_k} \Delta s_k(t) q_k(t) \right] dt + R_1,
\end{aligned}$$

что с учетом (12) и (21) равносильно

$$\int_0^T p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \Delta s_k(t) dt = - \sum_{m=1}^r \int_0^T \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_m} \Delta \vartheta_m(t) q_k(t) dt + R_1. \quad (30)$$

Ясно, что при сделанных выше предположениях по формуле Тейлора справедливо разложение

$$\psi(s_k + \Delta s_k, t) = \psi(s_k, t) + \psi_x(s_k, t)\Delta s_k + o(\|\Delta s_k\|).$$

Учитывая это, из (27) получим

$$\int_0^\ell 2[u(x, T) - y(x)]\Delta u(x, T)dx = \sum_{k=1}^n \int_0^T [(p_k(t)\psi_x(s_k(t), t)\Delta s_k(t) + \psi(s_k(t), t)\Delta p_k(t) + \psi_x(s_k(t), t)\Delta p_k(t)\Delta s_k(t) + o(\|\Delta s_k\|)]dt.$$

Тогда из последнего равенства и из соотношения (30) имеем

$$\int_0^\ell 2[u(x, T) - y(x)]\Delta u(x, T)dx = \sum_{k=1}^n \int_0^T \left[-\sum_{m=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_m} q_k(t)\Delta \vartheta_m(t) + \psi(s_k, t)\Delta p_k \right] dt + R_2, \quad (31)$$

где $R_2 = \sum_{k=1}^n \int_0^T [\psi_x(s_k(t), t)\Delta p_k(t)\Delta s_k(t) + o(\|\Delta s_k\|)]dt + R_1$.

По обычной схеме (см., например, [2]) можно доказать справедливость оценки

$$\|\Delta s\|_{L_2(0, T)} \leq c_5 \|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}, \quad (32)$$

где $c_5 > 0$ – некоторая постоянная.

Отсюда имеем $R_2 = o(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)})$. С другой стороны, из оценки (13) следует, что

$$\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)} = O(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}).$$

Подставляя полученные соотношения в (26) имеем

$$\Delta J = \sum_{k=1}^n \left(J_1(k) + \sum_{m=1}^r J_2(k, m) \right) + o(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}),$$

где $J_1(k) = \int_0^T [\psi(s_k(t), t) + 2\alpha_1(p_k(t) - \tilde{p}_k(t))]\Delta p_k(t)dt,$

$$J_2(k, m) = \int_0^T \left[-\frac{\partial f_k(s_k(t), \vartheta(t), t)}{\partial \vartheta_m} q_k(t) + 2\alpha_2(\vartheta_m(t) - \tilde{\vartheta}_m(t)) \right] \Delta q_m(t)dt.$$

Отсюда с учетом выражения для функции Гамильтона – Понтрягина получим

$$\Delta J = \int_0^T \left(-\frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \Delta \vartheta \right)_H dt + o(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}),$$

что показывает дифференцируемость по Фреше функционала (1) и справедливость формулы (25). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и $(u^*(x, t), s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t))$ – соответственно решения задачи (1) – (4) и (9) – (12) при $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}^* \in V$.

Тогда для оптимальности управления $\bar{\vartheta}^*$ необходимо выполнение условия

$$H(t, s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t), \bar{\vartheta}^*(t)) = \max_{\vartheta \in V} H(t, s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t), \vartheta), \forall (x, t) \in \Omega. \quad (33)$$

Доказательство. Предположим, что $\bar{\mathfrak{G}}^* = (p^*, \mathfrak{G}^*)$ – оптимальное управление. Допустим противное, то есть найдется такое управление $\tilde{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}^* + h\Delta\bar{\mathfrak{G}} \in V$ и число $\beta > 0$, для которых

$$H(t, s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t), \tilde{\mathfrak{G}}) - H(t, s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t), \bar{\mathfrak{G}}^*) \geq \beta > 0, \quad (34)$$

где $h > 0$ – некоторое число, $\tilde{\mathfrak{G}} \equiv (p^* + h\Delta p, \mathfrak{G}^* + h\Delta\mathfrak{G}), \Delta\bar{\mathfrak{G}} = (\Delta p, \Delta\mathfrak{G})$.

Если в (34) учесть формулу (24), то получим

$$h(J'(\tilde{\mathfrak{G}}), \Delta\bar{\mathfrak{G}})_H \leq -\beta < 0,$$

где $\tilde{\mathfrak{G}} = h\theta_1\Delta\bar{\mathfrak{G}} \equiv h\theta_1(\Delta p, \Delta\mathfrak{G}) \in V$, $\theta_1 \in (0, 1)$, – некоторое число. Отсюда и из формулы конечного приращения имеем

$$\begin{aligned} J(\tilde{\mathfrak{G}}) - J(\bar{\mathfrak{G}}^*) &= h(J'(\tilde{\mathfrak{G}}), \Delta\bar{\mathfrak{G}})_H = \\ &= h(J'(\tilde{\mathfrak{G}}), \Delta\bar{\mathfrak{G}})_H + h(J'(\hat{\mathfrak{G}}) - J'(\tilde{\mathfrak{G}}), \Delta\bar{\mathfrak{G}})_H \leq -\beta + h \cdot 0(\|\Delta\bar{\mathfrak{G}}\|_H), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\hat{\mathfrak{G}} = h\theta_2\Delta\bar{\mathfrak{G}} \equiv h\theta_2(\Delta p, \Delta\mathfrak{G}) \in V$, $\theta_2 \in (0, 1)$, – некоторое число.

Пусть $0 < h_1 < h$ такое число, что $-\beta + h_1 \cdot 0(\|\Delta\bar{\mathfrak{G}}\|_H) < 0$. Положим $\tilde{\tilde{\mathfrak{G}}} = \bar{\mathfrak{G}}^* + h_1\Delta\bar{\mathfrak{G}}$. Рассуждая аналогично доказательству неравенства (35), получим

$$J(\tilde{\tilde{\mathfrak{G}}}) - J(\bar{\mathfrak{G}}^*) \leq -\beta + h_1 \cdot 0(\|\Delta\bar{\mathfrak{G}}\|_H) < 0$$

Это противоречит оптимальности управления $\bar{\mathfrak{G}}^*$. Отсюда получим справедливость соотношения (33). Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда для оптимальности управления $\bar{\mathfrak{G}}^* = (p^*(t), \mathfrak{G}^*(t))$ необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{k=1}^n [(\psi^*(s_k^*(t), t) + 2\alpha_1(p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t)), p_k(t) - p_k^*(t)) + \\ &+ \sum_{m=1}^r \left(-\frac{\partial f_k(s^*(t), \mathfrak{G}^*(t), t)}{\partial \mathfrak{G}_m} q_k^*(t) + 2\alpha_2(\mathfrak{G}_m^*(t) - \tilde{\mathfrak{G}}_m(t)), \mathfrak{G}_m(t) - \mathfrak{G}_m^*(t) \right)] dt \geq 0, \end{aligned} \quad (36)$$

для $\forall \bar{\mathfrak{G}} = (p(t), \mathfrak{G}(t)) \in V$. Здесь $\psi^*(s_k^*(t), t), q_k^*(t)$ – соответственно решения задач (18) – (20) и (21) при $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}^*(p^*(t), \mathfrak{G}^*(t))$.

Доказательство. В силу известной теоремы [2, с. 28] для оптимальности управления $\bar{\mathfrak{G}}^* = (p^*, \mathfrak{G}^*) \in V$ необходимо выполнение неравенства

$$(J'(\bar{\mathfrak{G}}^*), \bar{\mathfrak{G}} - \bar{\mathfrak{G}}^*)_{L_2(0, T)} \geq 0, \forall \bar{\mathfrak{G}} \in V. \quad (37)$$

Используя формулу (25) и учитывая выражения функции Гамильтона – Пон-тригина, вычислим градиент функционала (6) и, подставив его в (37), получим справедливость неравенства (36). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1976. 736 с.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
5. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 392 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 406 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 286 с.
9. Goebel M. On existence of optimal control // Math. Nachr. 1979. V. 93. P. 67–93.

Статья поступила 12.04.2012 г.

Teimurov R.A. THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL FOR MOVING SOURCES FOR SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS. A problem on optimal control of processes described by a set of equations of the parabolic type and an ordinary differential equation, with moving sources is investigated in the paper. For the considered problem of optimum control, the theorem of existence and uniqueness of the solution is proved, necessary conditions of optimality in the form of pointwise and integrated maximum principles are obtained, and sufficient conditions of Frechet differentiability of the criterion of quality are found and an expression for its gradient is obtained.

Keywords: moving sources, reduced problem, necessary conditions of optimality, maximum principle, integral identity.

TEYMUROV Rafiq Agacan (Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan)

E-mail: rafiq@mail.ru

УДК 517.928

Д.А. Турсунов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА¹

Обобщенным методом погранфункций строится равномерное асимптотическое разложение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота.

Ключевые слова: *асимптотическое разложение, точка поворота, сингулярное возмущение, дифференциальное уравнение второго порядка, бисингулярное уравнение Эйри.*

При исследовании процессов, происходящих в гидродинамике, в теории колебаний, в квантовой механике, при изучении явлений дифракции получаются математические модели, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка с точками поворота.

Задачи с двумя точками поворота представляют интерес по двум причинам. Одна из них – это связь с уравнением Вебера, решениями которого являются так называемые функции параболического цилиндра. Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра представляет интерес во многих физических задачах. Вторая причина, по которой уравнение (1) заслуживает внимания, состоит в том, что это простейшее уравнение, имеющее две точки поворота. Следовательно, если бы асимптотические свойства (1) были основательно изучены, можно было бы свести асимптотическое исследование других уравнений с двумя точками поворота к этому уравнению [3].

Дифференциальные уравнения с точками поворота изучались различными методами. Метод ВБК (Вентцеля – Бриллюэна – Крамера) изучения асимптотического поведения решений задач с точками поворота состоит в том, что производится замена уравнения в окрестности точки поворота уравнением, решение которого находится с помощью специальных функций. Затем это решение «склеивается» с решением в остальной части промежутка. Асимптотические методы являются мощным средством исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Особенно важным этот подход становится при изучении задач сингулярной теории возмущений. В данной статье мы используем обобщенный метод погранфункций [1, 2].

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\varepsilon y''(x) - x(1-x)q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $\alpha, \beta - \text{const}$, $q(x) > 0, x \in [0,1]$.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-07-90910 мол_снг_нр).

В работах [4, 5] методом согласования рассмотрена задача

$$\begin{aligned} \varepsilon y''(x) - xq(x)y(x) &= f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) &= 0, \end{aligned}$$

где $q(x) > 0, x \in [0, 1]$, т.е. с одной точкой поворота. Решения состоит из четырех функций т.е.

$$y = V^{\text{внеш}} + L^{\text{внут}} - (V^{\text{внеш}})^{\text{внут}} + \Pi,$$

где $V^{\text{внеш}}$ – внешнее решение [4,5], т.е. регулярная часть решения (1), $L^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки $x = 0$, Π – обыкновенная погранфункция около точки $x = 1$.

Если асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) построить методом согласования [4, 5], то разложение решения состоит из пяти функций:

$$y = V^{\text{внеш}} + R^{\text{внут}} + L^{\text{внут}} - (R^{\text{внут}})^{\text{внеш}} - (L^{\text{внут}})^{\text{внеш}},$$

где $V^{\text{внеш}}$ – внешнее решение, т.е. регулярная часть решения (1), $R^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки $x=1$ (правый конец отрезка), $L^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки $x=0$ (левый конец отрезка).

Для оптимальности мы используем обобщенный метод погранфункций [1, 2], в итоге мы получим разложение решения, состоящее из трех функций.

Условие U_1 : $q(x), f(x) \in C^{(\infty)} [0, 1]$. Для простоты предположим $q(x) \equiv 1$.

Если внешнее разложение решения задачи (1), (2) искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \tag{3}$$

где U – это пока формальный ряд, то получим рекуррентную систему уравнений:

$$-x(1-x) u_0(x) = f(x), \quad x(1-x) u_k(x) = u''_{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

Отсюда однозначно определяются все $u_k(x)$:

$$u_0(x) = -\frac{f(x)}{x(1-x)}, \quad u_k(x) = \frac{u''_{k-1}(x)}{x(1-x)}, \quad k \geq 1.$$

Однако на обоих концах рассматриваемого отрезка т.е. при $x=0, x=1$ все эти функции, вообще говоря, имеют особенности:

$$u_k(x) = x^{-3k-1} (1-x)^{-3k-1} C_k(x), \quad C_k(x) \in C_{[0,1]}^{\infty}. \tag{4}$$

Таким образом, задача (1), (2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности при $x = 0, x = 1$, иногда эти точки называют **точками поворота** [5]. В окрестности этих точек ряд (3) не только не приближает решение $y(x, \varepsilon)$, но даже теряет асимптотический характер.

Таким образом, внешнее решение задачи (1), (2) представляется в виде

$$U = \frac{1}{x(1-x)} \left(C_0(x) + \frac{\varepsilon}{(x(1-x))^3} C_1(x) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{(x(1-x))^{3n}} C_n(x) + \dots \right), \tag{5}$$

где $C_k(x) \in C_{[0,1]}^{\infty}$.

Из (5) вытекает, что оно является асимптотическим на отрезке

$$J(\varepsilon) = [\varepsilon^\gamma, 1 - \varepsilon^\gamma], \quad 0 < \gamma < 1/3.$$

Равномерно пригодное решение задачи (1), (2) на всем отрезке, включая границы, строим методом [1, 2].

Решение ищем в виде

$$y(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) + P(\tau, \mu) + Q(\xi, \mu) + R_{n+1}(x, \varepsilon), \quad (6)$$

$$\text{где} \quad V_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k(x), \quad P(\tau, \mu) = \sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^k P_k(\tau), \quad Q(\xi, \mu) = \sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^k Q_k(\xi),$$

$\tau = x/\mu$, $\xi = (1-x)/\mu$, $\varepsilon = \mu^3$, $R_{n+1}(x, \varepsilon)$ – остаточный член.

Здесь пограничные функции строятся в виде обобщенных асимптотических рядов в смысле Эрдейи.

Подставляя (6) в (1) получим

$$\varepsilon \left(V_n''(x, \varepsilon) + \frac{1}{\mu^2} P''(\tau, \mu) + \frac{1}{\mu^2} Q''(\xi, \mu) + R_{n+1}''(x, \varepsilon) \right) - \\ - x(1-x)(V_n(x, \varepsilon) + P(\tau, \mu) + Q(\xi, \mu) + R_{n+1}(x, \varepsilon)) = f(x) - H(x, \varepsilon) + H(x, \varepsilon), \quad (7)$$

или

$$\varepsilon \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k''(x) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^k P_k''(\tau) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^k Q_k''(\xi) + R_{n+1}''(x, \varepsilon) \right) - \\ - x(1-x) \sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k(x) - \mu\tau(1-\mu\tau) \sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^k P_k(\tau) - \mu\xi(1-\mu\xi) \sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^k Q_k(\xi) - x(1-x)R_{n+1}(x, \varepsilon) = \\ = f(x) - H(x, \varepsilon) + H_0(x, \varepsilon) + H_1(x, \varepsilon), \quad H(x, \varepsilon) = H_0(x, \varepsilon) + H_1(x, \varepsilon),$$

где $H(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k h_k(x)$ – пока неизвестная функция.

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k+1} (v_k''(x) - x(1-x)v_{k+1}(x) + h_{k+1}(x)) - x(1-x)v_0 = f(x) - h_0(x); \quad (7.1)$$

$$\sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^{k+1} (P_k''(\tau) - \tau(1-\mu\tau)P_k(\tau)) = H_0(\tau, \mu); \quad (7.2)$$

$$\sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^{k+1} (Q_k''(\xi) - \xi(1-\mu\xi)Q_k(\xi)) = H_1(\xi, \mu); \quad (7.3)$$

$$\varepsilon^{n+1} v_n'' + \varepsilon R_{n+1}''(x, \varepsilon) - x(1-x)R(x, \varepsilon) = 0. \quad (7.4)$$

Неизвестную функцию $H(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k h_k(x)$ определим так, чтобы

$v_k(x) \in C_{[0,1]}^\infty$, $k = \overline{0, n}$. Из (7.1) имеем

$$v_0(x) = -\frac{f(x) - h_0(x)}{x(1-x)}, \quad v_k(x) = \frac{v_{k-1}''(x) + h_k(x)}{x(1-x)}.$$

Следовательно, условие $v_k(x) \in C_{[0,1]}^\infty$, $k = \overline{0, n}$, выполняется при $h_0(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, $h_k(x) = -v_{k-1}''(0)(1-x) - v_{k-1}''(1)x$, $k = \overline{1, n}$.

Значит,

$$H_0(x, \varepsilon) = f(0)(1-x) - (1-x) \sum_{k=1}^n \varepsilon^k v_{k-1}''(0),$$

$$H_1(x, \varepsilon) = f(1)x - x \sum_{k=1}^n \varepsilon^k v_{k-1}''(1)$$

или
$$H_0(\tau, \mu) = f(0) - \mu \tau f(0) - \sum_{k=1}^n \mu^{3k} v_{k-1}''(0) + \tau \sum_{k=1}^n \mu^{3k+1} v_{k-1}''(0),$$

$$H_1(\xi, \mu) = f(1) - \mu \xi f(1) - \sum_{k=1}^n \mu^{3k} v_{k-1}''(1) + \xi \sum_{k=1}^n \mu^{3k+1} v_{k-1}''(1).$$

Регулярная часть асимптотики решения уже построена:

$$V_n(x, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots + \varepsilon^n v_n(x), \quad v_k(x) \in C_{[0,1]}^\infty, \quad k = \overline{0, n}.$$

Теперь приступим к построению пограничных функций $P(\tau, \mu)$ и $Q(\xi, \mu)$.

Из (7.2) для $P_k(\tau)$ получим

$$P_{-1}'' - \tau P_{-1} = h_{00}, \quad P_{-1}(0) = \mu(\alpha - v_0(0)); \tag{8.1}$$

$$P_0'' - \tau P_0 = -\tau P_{-1}'', \quad P_0(0) = 0; \tag{8.2}$$

$$P_{3k-1}'' - \tau P_{3k-1} = h_{0k}, \quad P_{3k-1}(0) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \tag{8.3}$$

$$P_{3k}'' - \tau P_{3k} = -\tau P_{3k-1}'', \quad P_{3k}(0) = -v_k(0), \quad k = \overline{1, n}; \tag{8.4}$$

$$P_{3k+1}'' - \tau P_{3k+1} = -\tau^2 P_{3k}, \quad P_{3k+1}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n}; \tag{8.5}$$

$$P_m(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad m = \overline{-1, 3n+1}, \tag{8.6}$$

где $h_{00} = f(0)$, $h_{0k} = v_{k-1}''(0)$, $k = \overline{1, n}$.

Как нам известно, уравнение Эйри $z'' - \tau z = 0$ имеет два независимых решения $Ai(\tau)$ и $Bi(\tau)$, которые называются функциями Эйри:

$$Ai(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad Bi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(w_1(x) + w_2(x)),$$

где $v(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xt+t^3/3)} dt$, $w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{xt-t^3/3} dt + \int_0^{\infty} e^{xt-t^3/3} dt \right)$, $w_1(x) = \overline{w_2(x)}$.

$Ai(\tau)$ – экспоненциально быстро стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$, и с его помощью можно удовлетворить краевым условиям (8.6), $Bi(\tau)$ – экспоненциально растет при $\tau \rightarrow +\infty$.

Для $P_k(\tau)$ получим

$$P_{-1}(\tau) = -\pi h_{00} \left[Ai(\tau) \int_0^\tau Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty Ai(s) ds \right] + c_1 Ai(\tau), \quad c_1 = \frac{\mu(\alpha - v(0))}{Ai(0)},$$

$$P_0(\tau) = \pi \left[Ai(\tau) \int_0^\tau s P_{-1}''(s) Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty s P_{-1}''(s) Ai(s) ds \right],$$

$$P_{3k-1}(\tau) = -\pi h_{0k} \left[Ai(\tau) \int_0^\tau Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty Ai(s) ds \right], \quad k = \overline{1, n},$$

$$P_{3k}(\tau) = \pi \left[Ai(\tau) \int_0^\tau s P_{3k-1}''(s) Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty s P_{3k-1}''(s) Ai(s) ds \right] + c_{3k} Ai(\tau),$$

$$c_{3k} = \frac{-v_k(0)}{Ai(0)}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$P_{3k+1}(\tau) = \pi \left[Ai(\tau) \int_0^\tau s^2 P_{3k}(s) Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty s^2 P_{3k}(s) Ai(s) ds \right], \quad k = \overline{0, n}.$$

При $\tau \rightarrow +\infty$ имеем

$$P_{-1}(\tau) = -\frac{h_{00}}{\tau} \left(1 + \frac{2}{\tau^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\tau^6} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3k-2)(3k-1)}{\tau^{3k}} + \dots \right) = O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$P_0(\tau) = -\frac{h_{00}}{\tau^3} \left(2 + \frac{48}{\tau^3} + \frac{3696}{\tau^6} + \dots \right) = O\left(\frac{1}{\tau^3}\right), \quad P_1(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right).$$

$$P_{3k-1}(\tau) = -\frac{h_{0k}}{\tau} \left(1 + \frac{2}{\tau^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\tau^6} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3k-2)(3k-1)}{\tau^{3k}} + \dots \right) = O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$P_{3k}(\tau) = -\frac{h_{0k}}{\tau^3} \left(2 + \frac{48}{\tau^3} + \frac{3696}{\tau^6} + \dots \right) = O\left(\frac{1}{\tau^3}\right), \quad P_{3k+1}(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \quad k = \overline{1, n}.$$

То есть все $P_k(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$, $k = \overline{-1, 3n+1}$.

Аналогично из (7.3) для $Q(\xi)$ получим

$$Q_{-1}'' - \xi Q_{-1} = h_{10}, \quad Q_{-1}(0) = \mu(\beta - v_0(1)); \quad (9.1)$$

$$Q_0'' - \xi Q_0 = -\xi Q_{-1}, \quad Q_0(0) = 0; \quad (9.2)$$

$$Q_{3k-1}'' - \xi Q_{3k-1} = h_{1k}, \quad Q_{3k-1}(0) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (9.3)$$

$$Q_{3k}'' - \xi Q_{3k} = -\xi Q_{3k-1}, \quad Q_{3k}(0) = -v_k(1), \quad k = \overline{1, n}; \quad (9.4)$$

$$Q_{3k+1}'' - \xi Q_{3k+1} = -\xi^2 Q_{3k}, \quad Q_{3k+1}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n}; \quad (9.5)$$

$$Q_m(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad m = \overline{-1, 3n+1}, \quad (9.6)$$

где $h_{10} = f(1)$, $h_{1k} = v_{k-1}''(1)$, $k = \overline{1, n}$.

Для остаточной функций $R_{n+1}(\varepsilon, x)$ имеем следующую задачу:

$$\varepsilon R_{n+1}''(x, \varepsilon) - x(1-x) R_{n+1}(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad R_{n+1}(0, \varepsilon) = R_{n+1}(1, \varepsilon) = 0. \quad (10)$$

Для решения задачи (10) справедлива оценка

$$|R_{n+1}(x, \varepsilon)| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [0, 1].$$

Теорема. Пусть $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0$ и выполняется условие U_1 . Тогда (6) является равномерно асимптотическим разложением функции $y(x, \varepsilon)$ – решение задачи (1), (2) на отрезке $[0, 1]$ – и справедлива оценка:

$$|y(x, \varepsilon) - V_n(x, \varepsilon) - P(\tau, \mu) - Q(\xi, \mu)| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad c > 0 - \text{const.}$$

Отметим, что для простоты рассмотрен случай $q(x) \equiv 1$, аналогично исследуется случай $q(x) > 0, x \in [0, 1]$.

Пример. Пусть $f(x) = \cos(x), \alpha = \beta = 0$. Тогда справедлива оценка

$$\left| y(x, \varepsilon) - v_0(x) - \frac{P_{-1}}{\mu} - P_0 - \mu P_1 - \frac{Q_{-1}}{\mu} - Q_0 - \mu Q_1 \right| \leq c\varepsilon,$$

где $c - \text{const}, v_0(x) = -\frac{\cos(x) - \cos(0)(1-x) - \cos(1)x}{x(1-x)},$

$$P_{-1}(\tau) = -\pi \cos(0) \left[Ai(\tau) \int_0^\tau Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty Ai(s) ds \right] + c_1 Ai(\tau),$$

$$c_1 = \frac{\mu(\cos(1) - \cos(0))}{Ai(0)},$$

$$P_0(\tau) = \pi \left[Ai(\tau) \int_0^\tau s P_{-1}''(s) Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty s P_{-1}''(s) Ai(s) ds \right],$$

$$P_1(\tau) = \pi \left[Ai(\tau) \int_0^\tau s^2 P_0(s) Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty s^2 P_0(s) Ai(s) ds \right],$$

$$Q_{-1}(\xi) = -\pi \cos(1) \left[Ai(\xi) \int_0^\xi Bi(s) ds + Bi(\xi) \int_\xi^\infty Ai(s) ds \right] + c Ai(\xi),$$

$$c = \frac{\mu(\cos(1) - \cos(0) + \sin(1))}{Ai(0)},$$

$$Q_0(\xi) = \pi \left[Ai(\xi) \int_0^\xi s Q_{-1}''(s) Bi(s) ds + Bi(\xi) \int_\xi^\infty s Q_{-1}''(s) Ai(s) ds \right],$$

$$Q_1(\xi) = \pi \left[Ai(\xi) \int_0^\xi s^2 Q_0(s) Bi(s) ds + Bi(\xi) \int_\xi^\infty s^2 Q_0(s) Ai(s) ds \right].$$

Заметим, что если асимптотическое разложение решения задачи

$$\varepsilon y''(x) - xq(x)y(x) = f(x),$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0,$$

рассмотренное в работах [3, 4], построить обобщенным методом погранфункций, то разложение решения состоит из трех функций:

$$y = V^{\text{внеш}} + P + \Pi,$$

где P – обобщенная погранфункция, вблизи точки $x = 0$, Π – обыкновенная погранфункция вблизи точки $x = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алымкулов К.* Аналог метода погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке // Сб. тезисов конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвящ. 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. М., 2012. С. 12–14.
2. *Alymkulov K.* Extension of boundary layer function method for singularly perturbed differential equation of Prandtle – Tichonov and Lighthill types // Reports of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries, Almaty, June July, 2009. P. 256–259.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
4. *Ильин А.М., Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
5. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.

Статья поступила 01.11.2012 г.

Tursunov D. A. ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH TWO TURNING POINTS. Using the generalized method of boundary functions, a uniform asymptotic expansion of the solution of the boundary value problem for singularly perturbed ordinary second order differential equations with two turning points is constructed.

Keywords: asymptotic expansion, turning point, singular perturbation, second order differential equation, bisingular, Airy equation.

TURSUNOV Dilmurat Abdillajanovich (Osh State University)

E-mail: dosh2012@mail.ru

МЕХАНИКА

УДК 539.3

**Н.Н. Белов, Н.Т. Югов, С.А. Афанасьева, О.Ю. Федосов,
А.А. Югов, Р.С. Мамцев**

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗНЕСЁННЫХ СТАЛЕБЕТОННЫХ ПЛИТ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ УДАРЕ СОСТАВНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ УДАРНИКОМ¹

Представлена математическая модель поведения бетона в условиях ударно-волнового нагружения. В рамках данной модели методом конечных элементов, модифицированным на решение динамических задач, в полной трёхмерной постановке проведено решение задачи о высокоскоростном ударе стального стержня в дюралюминиевой оболочке по конструкции, представляющей набор пространственно-разнесённых сталебетонных плит при различных скоростях и углах встречи.

Ключевые слова: *математическое моделирование, высокоскоростное соударение, бетон, сталебетонные плиты, составной ударник, разрушение, динамическая прочность.*

При проектировании железобетонных конструкций многих промышленных объектов возникает необходимость оценки их способности противостоять динамическим нагрузкам [1, 2]. Исследование их прочности экспериментальными методами без глубокого теоретического анализа не даёт необходимого результата, несмотря на огромные материальные затраты.

В [2, 3–11] предложена математическая модель, описывающая поведение конструкционных материалов, в том числе бетона, в условиях ударно-волнового нагружения. Разрушение материалов в рамках данной модели описывается как процесс роста и слияния микродефектов под действием образующихся в процессе нагружения напряжений. Модель реализована в программном комплексе «РАНЕТ-3» [12], предназначенном для решения задач удара и взрыва в полной трёхмерной постановке модифицированным на решение динамических задач методом конечных элементов [1, 2]. В программном комплексе имеется специальный блок подпрограмм для расчёта элементов железобетонного каркаса на взрывные и ударные нагрузки. В частности, данный комплекс использовался для исследований прочности бетонных, железобетонных и стальных трубобетонных моделей колонн на неоднократные торцевые и поперечные удары падающего груза на копровой установке [2, 13], а также бетонных и железобетонных плит на высокоскоростной удар стальными цилиндрическими ударниками [2, 14]. В [1, 15] представлены результаты математического моделирования динамики соударения модельного сна-

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00573а.

ряда с конструкциями из прямоугольных бетонных плит и песчаного грунта и результаты математического моделирования процессов ударного взаимодействия стального цилиндрического ударника с железобетонной стеной обстройки реакторного отделения АЭС.

В данной работе комплекс программ «РАНЕТ-3» используется для анализа прочности конструкций, представляющих собой набор пространственно-разнесённых сталебетонных плит, на высокоскоростной удар стального стержня в дюралюминиевой оболочке.

1. Математическая модель поведения бетона при ударно-волновом нагружении

Бетон содержит большое число концентраторов напряжений-пор, границ зерен, трещин, зарождение разрушения на которых происходит в области упругого деформирования. Микроразрушения в бетоне могут появиться при сжатии под действием девиаторных напряжений, что приводит к падению сопротивления разрушению.

Удельный объем пористой среды ν представляется в виде суммы удельного объема материала матрицы ν_m , удельного объема пор ν_p и удельного объема ν_t , образующегося при раскрытии трещин: $\nu = \nu_m + \nu_p + \nu_t$. Пористость материала характеризуется относительным объемом пустот $\xi = \xi_p + \xi_t$, либо параметром $\alpha = \nu / \nu_m$, которые связаны зависимостью $\alpha = 1 / (1 - \xi)$. Здесь $\xi_p = \nu_p / \nu$, $\xi_t = \nu_t / \nu$ – относительные объемы пор и трещин соответственно [2, 7–8].

Система уравнений, описывающих движение пористой упругопластической среды, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV &= \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho E dV &= \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS, \\ \mathbf{e} &= \frac{\mathbf{s}^{CR}}{2\mu} + \lambda \mathbf{s}, \\ \mathbf{s} : \mathbf{s} &= \frac{2}{3} \sigma_T^2, \\ p &= \frac{\rho_0}{\alpha} \left[\gamma_0 \varepsilon + \frac{c_0^2 (1 - \gamma_0 \eta / 2) \eta}{(1 - S_0 \eta)^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где t – время; V – объем интегрирования; S – поверхность объема интегрирования; \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали; ρ – плотность; $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{g} + \mathbf{s}$ – тензор напряжений; \mathbf{s} – девиатор тензора напряжений; p – давление; \mathbf{g} – метрический тензор; \mathbf{u} – вектор скорости; $E = \varepsilon + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2$ – удельная полная энергия; ε – удельная внутренняя энергия; $\mathbf{e} = \mathbf{d} - (\mathbf{d} : \mathbf{g})\mathbf{g} / 3$ – девиатор тензора скоростей деформаций;

$\mathbf{d} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$ – тензор скоростей деформаций; $\mathbf{s}^{CR} = \dot{\mathbf{s}} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{u}^T$ – корротационная производная Коттер и Равлина; $\mu = \mu_0(1 - \xi) \left[\frac{1 - (6\rho_0 c_0^2 + 12\mu_0)\xi}{(9\rho_0 c_0^2 + 8\mu_0)} \right]$ – модуль сдвига; $\sigma_T = \left[\sigma_{\min} + \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})kp}{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + kp} \right] / \alpha$ – предел текучести; $\rho_0, c_0, \mu_0, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}, k, S_0, \gamma_0$ – константы материала матрицы; $\eta = 1 - \rho_0 \nu / \alpha$. Параметр λ исключается с помощью условия текучести.

Для замыкания системы (1) необходимы уравнения, описывающие изменение параметра α при растяжении и сжатии.

Разрушение хрупких материалов происходит главным образом в связи с возникновением и ростом микротрещин. Максимальное упругое полуоткрытие монетообразной трещины под действием растягивающего напряжения, перпендикулярного плоскости трещины, определяется из соотношения [16, 17]

$$\delta = -\frac{2(1-\nu)}{\pi\mu_0} R p_m,$$

где ν – коэффициент Пуассона; R – радиус трещины; $p_m = \alpha p$ – давление в материале матрицы.

Предполагая, что при раскрытии трещины ее берега образуют эллипсоид вращения с полуосями δ, R, R , найдем объем трещины:

$$V_T = -\frac{8(1-\nu)}{3\mu_0} R^3 \alpha p. \tag{2}$$

Пусть в процессе нагружения не происходит образования новых трещин, а деформирование материала сопровождается ростом изначально существующих с характерным размером R . Тогда из (2) следует

$$\xi_t = -\frac{8(1-\nu)}{3\mu_0} N_0 R^3 \alpha p, \tag{3}$$

где N_0 – число трещин в единице объема.

Считая, что до начала фрагментирования поврежденного трещинами материала объем пор остается неизменным и равен ξ_0 , получим

$$\xi_t = \xi - \xi_0 = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0 \alpha}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), окончательно имеем

$$p = -\frac{3\mu_0(\alpha - \alpha_0)}{8(1-\nu)N_0\alpha_0R^3\alpha^2}. \tag{5}$$

Рост трещин определяется уравнением

$$\dot{R} / R = F_1 + F_2,$$

где $F_1 = (\alpha s_i - s_*) / \eta_1$ при $\alpha s_i > s_*$; $F_1 = 0$ при $\alpha s_i \leq s_*$; $F_2 = (|\alpha p| - p_*) / \eta_2$ при $p < 0 \wedge |\alpha p| > p_*$; $F_2 = 0$ при $p \geq 0 \vee |\alpha p| \leq p_*$; $s_i = \sqrt{\frac{3}{2} s : s}$; $s_* = s_{01}(1 - R / R_*)$; $p_* = (1 - R / R_*)$; $R_* = \beta / \sqrt[3]{N_0}$; $s_{01}, p_0, \eta_1, \eta_2, \beta$ – константы материала.

Из последнего уравнения системы (1) и (5) получаем уравнение для определения параметра α при упругом деформировании бетона

$$\gamma_0 \varepsilon \rho_0 + \frac{\rho_0 c_0^2 (1 - \gamma_0 \eta / 2) \eta}{(1 - S_0 \eta)^2} + \frac{3 \mu_0 (\alpha - \alpha_0)}{8(1 - \nu) N_0 \alpha_0 R^3 \alpha} = 0. \quad (6)$$

Предполагается, что слияние микротрещин начинается, когда их характерный размер R при постоянном числе трещин в единице объема N_0 достигает критической величины $R_* = \beta / \sqrt[3]{N_0}$. Процесс фрагментирования поврежденного трещинами материала и поведение разрушенного материала описывается в рамках модели пористой упругопластической среды. Система (1) замыкается уравнениями, связывающими давление p и пористость α при сжатии:

$$\gamma_0 \varepsilon \rho_0 + \frac{\rho_0 c_0^2 (1 - \gamma_0 \eta / 2) \eta}{(1 - S_0 \eta)^2} - \frac{2}{3} \alpha \sigma_T \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right) = 0 \quad \text{при } p \geq \frac{2}{3} \sigma_T \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right), \quad (7)$$

и при разгрузке:

$$\gamma_0 \varepsilon \rho_0 + \frac{\rho_0 c_0^2 (1 - \gamma_0 \eta / 2) \eta}{(1 - S_0 \eta)^2} + a_s \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right) = 0 \quad \text{при } p \leq -\frac{a_s}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right). \quad (8)$$

Фрагментация поврежденного трещинами материала, подвергнутого воздействию растягивающих напряжений, происходит, когда относительный объем пустот достигает критической величины

$$\xi_* = \frac{\alpha_* - 1}{\alpha_*}.$$

Если поврежденный трещинами материал подвергнут воздействию сжимающих напряжений, то критерием фрагментирования является предельная величина интенсивности пластических деформаций

$$e_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3T_2 - T_1^2},$$

где T_1, T_2 – первый и второй инварианты тензора деформаций соответственно.

При растяжении фрагментированный материал описывается как порошок, движение которого происходит в соответствии с уравнениями среды, лишенной напряжений.

2. Результаты математического моделирования

Методом компьютерного моделирования в диапазоне скоростей 700–1500 м/с исследованы процессы ударного взаимодействия составных металлических ударников массой 125 г с двумя типами защитных конструкций, представляющих собой наборы из пространственно-разнесенных сталебетонных плит. Сталебетонная плита состоит из двух слоев бетона толщиной h_6 , разделенных стальным листом толщиной $h_{ст}$. Расстояние между плитами 200 мм. Ударник представляет собой стальной стержень диаметром 14 мм и длиной 52 мм, помещенный в оболочку из дюралюминиевого сплава. Длина составного ударника $L_0 = 81$ мм, его диаметр $d_0 = 23$ мм ($L_0/d_0 = 3,52$). В первом варианте защитных конструкций толщина бетонных слоев $h_6 = 15$ мм, стального листа – $h_{ст} = 1$ мм, общая толщина сталебетонной плиты $h = 31$ мм. Во втором варианте – $h_6 = 30$ мм, $h_{ст} = 2,5$ мм, общая

толщина сталебетонной плиты $h = 62,5$ мм. Считалось, что стальной лист выполнен из стали марки ЭИ 712, имеющей высокие прочностные характеристики.

В расчете на границе раздела материалов в ударнике ставилось условие жесткого сцепления, т.е. отсутствия проскальзывания материалов друг относительно друга и отделения дюралюминиевой оболочки от стального стержня в процессе внедрения в мишень.

В табл. 1 приведены результаты расчета ударного взаимодействия ударника с пространственно-разнесёнными мишенями, состоящими из сталебетонных преград первого типа ($h_6 = 15$ мм, $h_{ст} = 1$ мм, $h = 31$ мм), при взаимодействии по нормали ($\beta_0 = 0^\circ$, β_0 – угол, образованный осью симметрии ударника с нормалью к лицевой поверхности мишени) со скоростями $u_0 = 700$ м/с и $u_0 = 1500$ м/с, где обозначено: $d_{л}$ – диаметр лицевого откола, $d_{т}$ – диаметр тыльного откола в сталебетонных плитах, d_c – диаметр отверстия в стальном листе, L – длина и m – масса остатка ударника после пробития преграды, h_{Σ} – суммарная глубина проникания в мишень без учёта прогиба стального листа последней мишени. После пробития преграды остаток ударника обладает скоростью центра масс u .

Таблица 1

**Результаты соударения ударника
с набором пространственно-разнесенных преград первого типа**

u_0 , м/с	β_0 , град.	№ прег.	$d_{л}/d_0$	d_c/d_0	$d_{т}/d_0$	L/d_0	m , г	u , м/с
700	0	1	2,56	1,60	4,48	2,72	113,0	444
		2	3,52	1,60	5,20	2,64	109,3	297
		3	5,60	1,44	5,92	2,64	109,2	181
		4	-	-	-	2,45	109,1	
1500	0	1	2,56	1,92	3,52	2,24	101,6	1160
		2	2,72	1,92	3,60	2,0	84,4	816
		3	3,6	1,6	3,20	1,84	75,6	572
		4	3,52	1,28	3,36	1,68	72,7	383
		5	4,24	1,28	4,08	1,65	69,8	258
		6	-	-	-	-	55,3	

На рис. 1 приведена картина последовательного взаимодействия ударника со сталебетонными плитами (a – начальная конфигурация, b – побитие первой, $в$ – второй, $г$ – третьей преград, $д$ – взаимодействие с четвертой преградой) при скорости $u_0 = 700$ м/с и $\beta_0 = 0$.

При взаимодействии с первой преградой дюралюминиевая оболочка ударника в области головной части полностью срабатывается, в то же время стальной стержень остаётся практически недеформированным. С тыльной стороны в слое бетона образуется откол диаметром $d_{т} = 4,48 d_0$. После пробития первой преграды деформированный остаток ударника массой $m = 113$ г и удлинением $L/d_0 = 2,78$ имеет скорость $u = 444$ м/с. Этой скорости достаточно для пробития ещё двух сталебетонных плит. За третьей преградой остаток ударника ($L/d_0 = 2,64$, $m = 109,2$ г) имеет скорость $u = 181$ м/с, которой недостаточно для пробития последующей преграды. Он останавливается в четвертой преграде при взаимодействии со стальным листом. Суммарная глубина проникания ударника в мишень h_{Σ} составила 108 мм.

На рис. 2 приведена картина последовательного взаимодействия ударника со сталебетонными плитами (*a* – начальная конфигурация, *б* – побитие первой, *в* – второй, *г* – третьей, *д* – четвертой, *е* – пятой преград) при скорости $u_0 = 1500$ м/с и $\beta_0 = 0^\circ$.

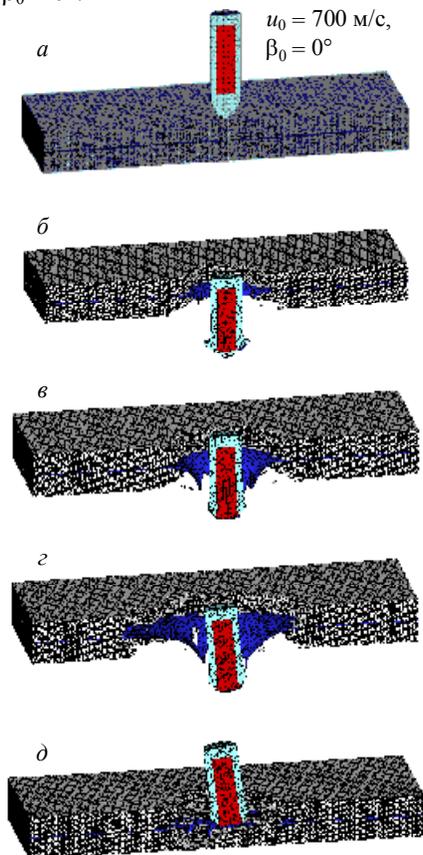


Рис. 1. Конфигурации ударника и сталебетонных плит первого типа при ударном взаимодействии с четырьмя преградами

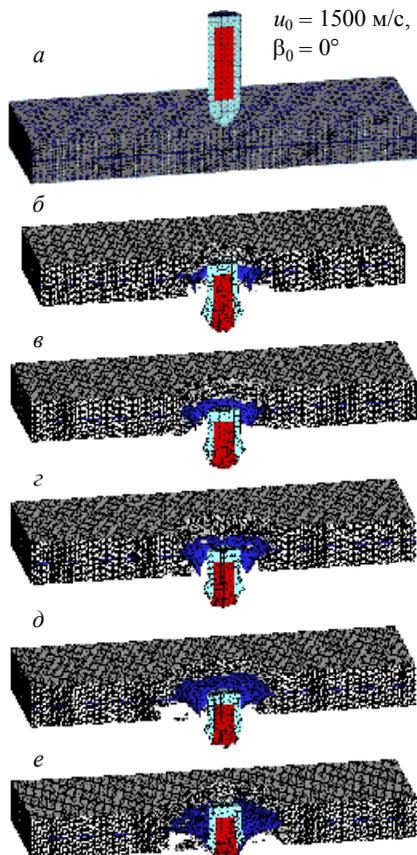


Рис. 2. Конфигурации ударника и сталебетонных плит первого типа при ударном взаимодействии с пятью преградами

В данном случае ударник пробивает пять преград и застревает в шестой. За пятой преградой остаток ударника массой $m = 69,8$ г и удлинением $L/d_0 = 1,65$ имеет скорость $u = 258$ м/с. В момент остановки его в шестой преграде $m = 55,3$ г. Суммарная глубина проникания ударника в мишень h_Σ составляет 170 мм.

В табл. 2 приведены результаты расчёта ударного взаимодействия ударника с пространственно-разнесёнными мишенями, состоящими из сталебетонных преград второго типа ($h_6 = 30$ мм, $h_{ст} = 2,5$ мм, $h = 62,5$ мм), при $u_0 = 700$ м/с и $u_0 = 1500$ м/с и $\beta_0: 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

При $u_0 = 700$ м/с и $\beta_0 = 0^\circ$ ударник пробивает первую преграду и застревает во второй. На момент остановки деформированного остатка ударника ($L/d_0 = 2,38$, $m = 106,7$ г) в преграде образовались отколы с лицевой стороны диаметром $d_{л} = 3,08d_0$ и тыльной стороны диаметром $d_{т} = 2,5d_0$. Пробитие второй преграды

определяется прочностными характеристиками стального листа, так как под ним бетонный слой в области действия остатка ударника разрушен. Таким образом, вторая преграда находится на пределе пробития. Суммарная глубина проникания h_{Σ} составила 92,5 мм, что на 15,5 мм меньше, чем при взаимодействии с защитной конструкцией первого типа. Суммарная глубина проникания в разнесённые мишени с учётом изгиба стального листа в непробитой мишени $h_{\Sigma}^1 = 112,2$ мм. Увеличение скорости удара до 1500 м/с при $\beta_0 = 0^\circ$ приводит к тому, что снаряд пробивает две преграды. Как и в предыдущем случае, третья преграда находится на пределе пробития. С тыльной стороны третьей преграды произошёл откол во втором бетонном слое диаметром $d_t = 2,69 d_0$. Суммарная глубина проникания h_{Σ} составила 155 мм, что на 15 мм меньше, чем при взаимодействии с защитной конструкцией первого типа. Суммарная глубина проникания в мишени с учётом прогиба стального листа третьей мишени $h_{\Sigma}^1 = 173,6$ мм.

Таблица 2

**Результаты расчетов соударения ударника
с набором пространственно-разнесённых преград второго типа**

u_0 , м/с	β_0 , град.	№ прег.	d_n/d_0	d_c/d_0	d_t/d_0	L/d_0	m , г	u , м/с
700	0	1	2,31	2,54	3,08	2,54	109,2	215
		2	3,08	-	2,5	2,38	106,7	-
1500	0	1	3,08	1,92	4,46	1,77	70,6	780
		2	3,53	1,69	3,08	1,46	58,0	338
		3	3,69	-	2,69	1,33	54,5	-
700	45	1	3,86	-	3,86	2,46	107,1	-
1500	45	1	4,42	2,57	4,86	1,57	65,6	530
		2	6,42	-	3,57	1,47	61,1	-
1500	60	1	8,57	3,42	7,14	2,0	69,6	231
		2	7,14	-	-	1,5	65,7	-

В табл. 3 представлены результаты расчёта ударного взаимодействия ударника с пространственно-разнесёнными мишенями, состоящими из сталебетонных преград первого типа, при $u_0 = 700$ м/с и $u_0 = 1500$ м/с и $\beta_0 = 45^\circ$ и $\beta_0 = 60^\circ$.

Таблица 3

**Результаты соударения ударника
с набором пространственно-разнесённых преград первого типа**

u_0 , м/с	β_0 , град.	№ прег.	d_n/d_0	d_c/d_0	d_t/d_0	L/d_0	m , г	u , м/с
700	45	1	3,57	2,86	4,28	2,57	111,4	375
		2	4,57	2,86	4,00	2,50	110,6	146
		3	-	-	-	-	-	-
700	60	1	6,42	5,00	8,00	2,64	114,1	211
		2	-	-	-	-	-	-
1500	45	1	3,57	2,86	4,57	2,14	94,3	976
		2	3,71	2,57	3,71	1,86	78,8	576
		3	4,71	2,28	5,28	1,78	73,4	260
		4	-	-	-	1,74	72,5	-
1500	60	1	5,56	4,44	6,67	1,89	85	741
		2	4,21	1,20	3,01	1,81	76,1	277

На рис. 3 приведена картина последовательного взаимодействия ударника со сталебетонными плитами (*а* – начальная конфигурация, *б* – побитие первой, *в* – второй преграды) при скорости $u_0 = 700$ м/с и $\beta_0 = 45^\circ$. В данном случае ударник пробивает две преграды и застревает в третьей. За второй преградой деформированный остаток ударника ($L/d_0 = 2,62$, $m = 110,6$ г) имеет вертикальную составляющую составляющую скорости $u = 146$ м/с. Удар по следующей преграде наносится боковой поверхностью остатка ударника, поэтому данной скорости недостаточно для пробития третьей преграды. Суммарная глубина проникания в мишени h_Σ не превышает 77 мм.

На рис. 4 приведена картина последовательного взаимодействия ударника со сталебетонными плитами (*а* – начальная конфигурация, *б* – побитие первой, *в* – второй, *г* – третьей преграды и *д* – взаимодействие с четвертой преградой) при скорости $u_0 = 1500$ м/с и $\beta_0 = 45^\circ$. В данном случае происходит пробитие трёх преград. За третьей преградой деформированный ударник ($L/d_0 = 1,78$, $m = 73,4$ г) имеет вертикальную составляющую скорости $u = 260$ м/с. На момент прекращения расчёта деформированный ударник имел вертикальную составляющую скорости $u = 184$ м/с. Этой скорости недостаточно для пробития стального листа четвертой преграды при ударе боковой поверхностью. Таким образом, суммарная глубина проникания h_Σ не превышает 108 мм.

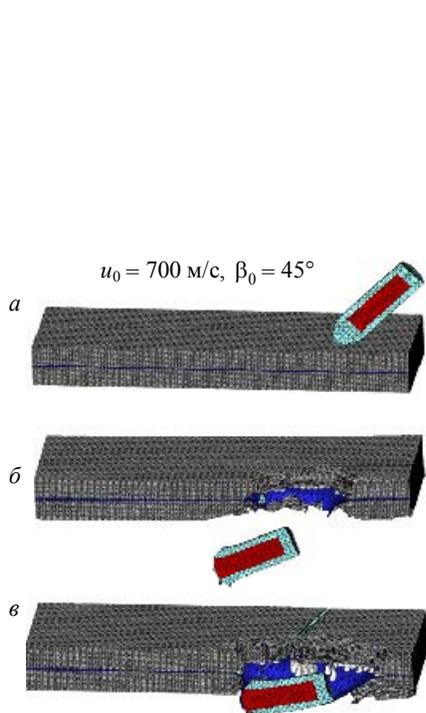


Рис. 3. Конфигурации ударника и сталебетонных плит первого типа при ударном взаимодействии с двумя преградами

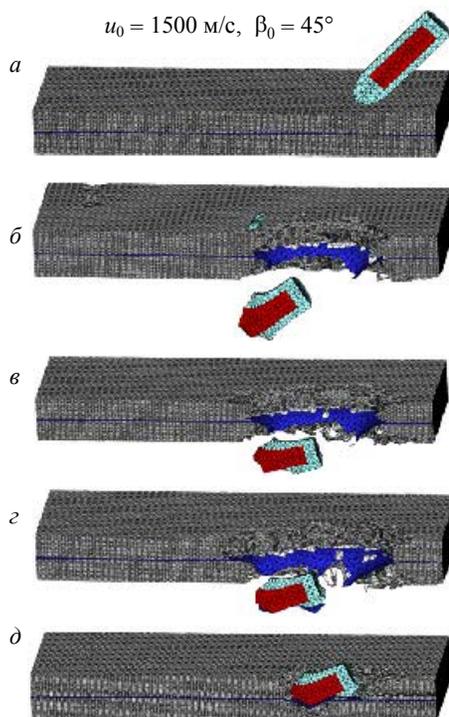


Рис. 4. Конфигурации ударника и сталебетонных плит первого типа при ударном взаимодействии с четырьмя преградами

На рис. 5 и рис. 6 приведена картина последовательного взаимодействия ударника со сталебетонными плитами со скоростями u_0 : 700 м/с и 1500 м/с при $\beta_0 = 60^\circ$. Увеличение угла встречи приводит к снижению суммарной глубины проникания ударника. Так при скорости удара 700 м/с и угле подхода 60° ударник пробивает лишь первую преграду и застревает во второй (на рис. 5 представлено: *a* – начальная конфигурация, *б* – пробитие первой преграды). Суммарная глубина проникания $h_\Sigma \leq 46$ мм. Следует отметить, что при данной скорости удара и угле подхода к мишеням второго типа глубина проникания в мишень $h_\Sigma = 30$ мм. Ударник пробил первый слой бетона и остановился при взаимодействии со стальным листом.

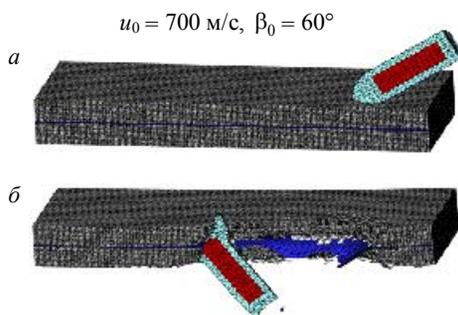


Рис. 5. Конфигурации ударника и сталебетонной плиты первого типа при ударном взаимодействии

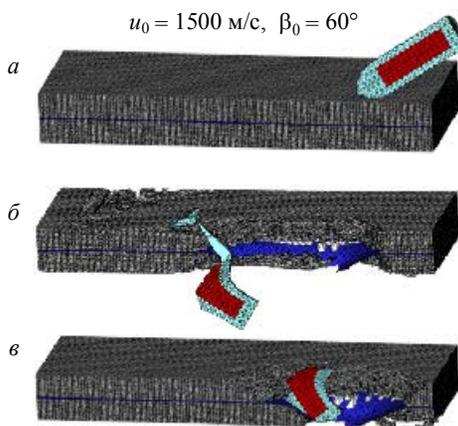


Рис. 6. Конфигурации ударника и сталебетонных плит первого типа при ударном взаимодействии с двумя преградами

Увеличение скорости до 1500 м/с приводит к тому, что ударник пробивает обе преграды. После пробития второй преграды (рис. 6, *б*) он имеет вертикальную составляющую скорости $u = 277$ м/с. С этой скоростью он взаимодействует боковой поверхностью со второй преградой (рис. 6, *в*), двигаясь вдоль неё до полной остановки, не выходя за тыльную поверхность. При этом $h_\Sigma = 62$ мм. При таких же параметрах ударного взаимодействия ударника с системой пространственно-разнесённых мишеней второго типа $h_\Sigma = 92,5$ мм.

Представленные результаты математического моделирования демонстрируют возможность использования вычислительного комплекса «РАНЕТ-3» при исследовании прочности конструкций, в том числе представляющих набор пространственно-разнесённых сталебетонных плит, на высокоскоростной удар тел произвольной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Н.Н., Копаница Д.Г., Кумяк О.Г., Югов Н.Т. Расчёт железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. Northampton: STT; Томск: STT, 2004. 466 с.
2. Белов Н.Н., Кабанцев О.В., Копаница Д.Г., Югов Н.Т. Расчётно-экспериментальный метод анализа динамической прочности элементов железобетонных конструкций. Томск: STT, 2008. 292 с.
3. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г., Югов А.А. Динамика высокоскоростного удара и сопутствующие физические явления. Northampton: STT; Томск: STT, 2005. 360 с.
4. Белов Н.Н., Корнеев А.И., Николаев А.П. Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсных нагрузок // ПМТФ. 1985. № 3. С. 132–136.
5. Белов Н.Н., Демидов В.Н., Ефремова Л.В. и др. Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений // Изв. вузов. Физика. 1982. № 8. С. 5–48.
6. Афанасьева С.А., Белов Н.Н., Толкачев В.Ф. и др. Особенности ударно-волнового деформирования пористой керамики Al_2O_3 // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 477–479.
7. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Афанасьева С.А. и др. Исследование процессов деформирования и разрушения хрупких материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2001. Т. 7. № 2. С. 131–142.
8. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г., Югов А.А. Модель динамического разрушения мелкозернистого бетона // Вестник ТГАСУ. 2005. № 1. С. 14–22.
9. Белов Н.Н., Дзюба П.В., Кабанцев О.В., и др. Математическое моделирование процессов динамического разрушения бетона // Механика твердого тела. 2008. № 2. С. 124–133.
10. Белов Н.Н., Кабанцев О.В., Коняев А.А. и др. Расчёт прочности железобетона на ударные нагрузки // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 6. С. 165–173.
11. Афанасьева С.А., Белов Н.Н., Югов Н.Т. Проникание цилиндрических ударников в преграды из бетона и песчаного грунта // ДАН. 2002. Т. 387. № 5. С. 1–4.
12. Югов Н.Т., Белов Н.Н., Югов А.А. Расчёт адиабатических нестационарных течений в трёхмерной постановке (РАНЕТ-3) // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 201 061 104 2. Москва, 2010.
13. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г. и др. Исследование прочности моделей стальных трубобетонных и железобетонных колонн на неоднократный торцевой удар падающего груза расчётно-экспериментальным методом // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 2. С. 181–190.
14. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г., Югов А.А. Расчет прочности конструкций из бетонных и железобетонных плит при высокоскоростном ударе // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 3. С. 165–173.
15. Афанасьева С.А., Белов Н.Н., Копаница Д.Г. и др. Разрушение бетонных и железобетонных плит при высокоскоростном ударе и взрыве // ДАН. 2005. Т. 401. № 2. С. 185–188.
16. Seaman L., Gurran D., Shockey D.A. Computational models for ductile and brittle fracture // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. No. 11. P. 4814–4826.
17. Хелан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.

Belov N.N., Yugov N.T., Afanas'eva S.A., Fedosov O.Yu., Yugov A.A., Mamtsev R.S. DURABILITY ANALYSIS FOR DESIGNS OF SPATIALLY-CARRIED STEEL-CONCRETE PLATES AT HIGH-SPEED BLOW BY THE COMPOUND METAL DRUMMER. The mathematical model of the behavior of concrete in the conditions of great dispatch-wave loading is presented. In the context of this model, using the finite elements method modified to solving dynamic problems, in the full three-dimensional statement, the problem about high-speed blow of a steel core in a dural cover on the design in the form of a set of spatially-carried steel-concrete plates is solved for different speeds and striking angles.

Keywords: mathematical modeling, high-speed impact, concrete, steel-concrete plates, compound striker, destruction, dynamic durability.

BELOV Nikolay Nikolaevich (Tomsk State University)

E-mail: n.n.belov@mail.ru

YUGOV Nikolay Tikhonovich (Tomsk State University)

E-mail: n.t.yugov@mail.ru

AFANASYEVA Svetlana Ahmed-Ryzovna (Tomsk State University)

E-mail: s.a.afanasyeva@mail.ru

FEDOSOV Oleg Yurievich (MP 21055)

E-mail: olefed78@mail.ru

YUGOV Aleksey Aleksandrovich (Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering)

E-mail: yugalex@sibmail.com

MAMTSEV Roman Sergeevich (Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering)

E-mail: rmamcev@mail.ru

УДК 620.179 (045)

Ю.Н. Ложкова

**ВЕЙВЛЕТ-ТЕХНОЛОГИЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ
ИССЛЕДОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК¹**

Энергетические установки (ЭУ) с зарядом твердого ракетного топлива находят широкое применение в системах спасения, нефтедобычи, управления ракетно-космическими системами. Наиболее развитым методом исследования таких установок является ультразвуковой метод (УЗ). Существующая методическая база, основанная на корреляционных процедурах и Фурье-анализе, не позволяет проводить эффективную обработку и представление результатов испытаний. Это обуславливает создание специализированных программных комплексов моделирования и цифровой обработки результатов, основанных на использовании и развитии теории вейвлет-преобразования.

Ключевые слова: *неразрушающий контроль, отношение сигнал/шум, фурье-анализ, вейвлет-преобразование, ультразвуковой метод.*

Испытания – важнейшая часть разработки и исследования физических объектов. Одними из самых сложных из них являются энергетические установки на твердом топливе. На этом этапе возникает широкий круг задач по изучению внутрикамерных процессов, которые проявляются, в том числе, через изменение конфигурации элементов ЭУ. Разработка новых составов топлив, непрерывное усложнение конструкции ЭУ и геометрических форм топливных элементов зачастую снижает эффективность применения расчетных методов при анализе и требует привлечения экспериментальных методов исследования, направленных на получение информации о характере внутрикамерных процессов.

Среди задач, требующих применения высокоинформативных систем исследования, можно отметить:

- исследование изменений формы и перемещений заряда и корпуса ЭУ при воздействии комплекса предстартовых нагрузок;
- определение скорости перемещения фронта горения;
- исследование поведения конструктивных элементов.

Важным элементом обработки ЭУ является выявление причин аномалий, которые сопровождаются разрушением конструкции или проявляются в виде недопустимого отклонения внутрикамерного давления. Появление таких аномалий может быть связано с подключением дополнительной поверхности горения, увеличением скорости горения. Традиционные методы малоинформативны и ограничены в применении при обработке натурных ЭУ.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Приказ № 154 от 28 февраля 2012 г. «О назначении стипендий Правительства РФ для лиц, обучающихся в образовательных учреждениях начального профессионального образования, среднего профессионального образования и высшего профессионального образования по очной форме обучения по основным профессиональным образовательным программам начального профессионального и среднего профессионального образования, имеющим государственную аккредитацию, соответствующим приоритетным направлениям модернизации и технологического развития экономики Российской Федерации, на 2011/2012 учебный год»); Российского фонда фундаментальных исследований по конкурсу «Инициативные научно-исследовательские проекты» – проект № 12-07-00164.

Одним из наиболее применяемых в настоящее время методов ликвидации крупногабаритных ЭУ является их сжигание в бесплопвой конфигурации со снятыми передней или задней крышками. В обоих случаях наиболее актуальной является проблема защиты окружающей среды. Эффективность методов и средств защиты зависит от того, насколько точны прогнозы по параметрам ЭУ, оказывающим негативное влияние на экологическую обстановку в зоне проведения сжигания, и соответственно по принятым мерам эффективного противодействия этому негативному влиянию.

Наиболее приемлемым методом определения расхода продуктов сгорания, является метод, основанный на использовании текущих значений скорости горения топливного элемента на характерных участках поверхности горения или на использовании интегральной скорости горения, осредненной по всей поверхности газоприхода [1].

Наиболее острая необходимость решения данной проблемы возникла при бесплопвом сжигании, когда реализуется режим неустойчивого горения. В этих условиях нужна более детальная информация о закономерностях поведения топливного элемента сложной формы, в частности о динамике изменения поверхности и скорости перемещения фронта горения, с последующим расчетом скорости горения.

Актуальность вопроса определяется тем, что твердотопливные ЭУ должны иметь высокую гарантию качества на всех стадиях их жизненного цикла. Обеспечить надежную эксплуатацию указанных объектов и решить проблему увеличения срока их эксплуатации возможно только при использовании методов неразрушающего контроля, среди которых волновые методы наиболее полно отвечают требованиям обеспечения высокой точности, дистанционности, безопасности, дешевизны, автоматизации обработки результатов испытаний. Развитие УЗ-метода в работе ориентировано на совершенствование алгоритмов выделения зашумленной временной координаты импульса, отраженного от горячей поверхности топлива.

Особенности энергетических установок как объектов исследования

Основным источником информации о качестве энергетической установки и характере протекающих в ней процессов являются экспериментальные исследования на образцах и натуральных изделиях.

Процессы в ЭУ протекают за массивными непрозрачными оболочками, что обуславливает применение методов, где в качестве носителя информации используются проникающие излучения. Эти методы являются наиболее перспективными в смысле удовлетворения принятого критерия оптимальности, позволяют определять как локальные, так и интегральные значения скорости процессов, отвечают требованиям неразрушающих испытаний, перспективны при дальнейшем усовершенствовании применительно к ЭУ различных габаритов.

В настоящее время наиболее развитым волновым методом является ультразвуковой. Отражением этого факта является значительный объем публикаций по применению этого метода при исследовании горения образцов наполнителя и в модельных малогабаритных ЭУ с толщиной свода ТЭ до 100–150 мм. Многолетняя целенаправленная работа позволила достигнуть погрешности определения скорости горения в УЗ-методе около 2 % (в перспективе до 1 %) [2–5].

Фактором, объединяющим методы исследования внутрикамерных процессов, является необходимость получения не только качественных (наличие или отсутствие явления), но и количественных данных с погрешностью, достаточной для решения практически важных задач обработки ЭУ. Сложный характер исследуемых сигналов, вызванный в том числе наличием интерференционных явлений, приводит к тому, что существующая методическая база, основанная на корреляционных процедурах и фурье-анализе, не позволяет проводить эффективную обработку и представление результатов огневых стендовых испытаний. Это обуславливает создание специализированных программных комплексов моделирования и обработки результатов испытаний, основанных на использовании и развитии теории вейвлет-преобразования.

В задачах эхо-импульсной толщинометрии полимерных композитных материалов определение толщины проводится по положению первого нуля после главного максимума сигнала [6]. Фирмой ONERA проанализированы различные алгоритмы – по максимуму амплитуды, по выбранному порогу, по точке пересечения нуля огибающей, но в качестве рабочего принят алгоритм выделения отсчетного времени, как времени пересечения нуля между главным отрицательным и положительным пиком сигнала, так как эта точка наименее чувствительна к вариациям амплитуды [2]. Естественно отметить, что указанный алгоритм эффективен при достаточном отношении сигнал/шум (рис. 1).

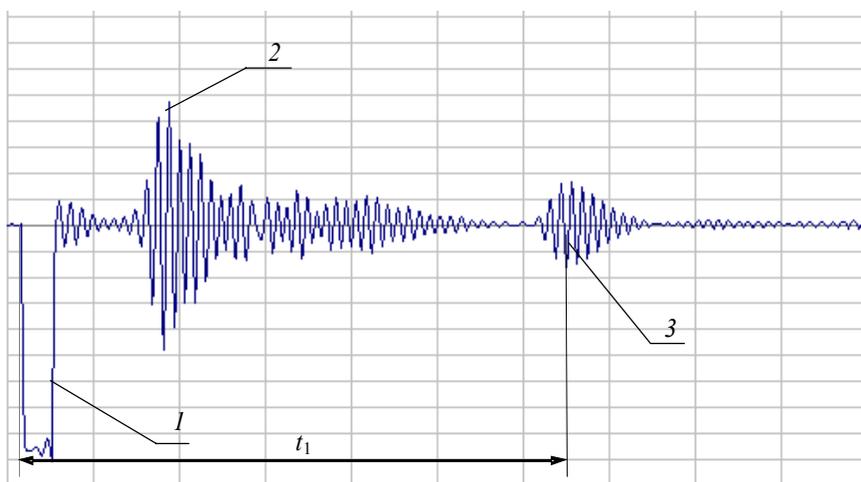


Рис. 1. Осциллограмма УЗ-сигнала по одному каналу до пуска ЭУ: 1 – синхроимпульс; 2 – импульс, распространяющийся по поверхности корпуса; 3 – импульс, отраженный от поверхности канала; t_1 – время измерения

Регистрация фронта горения ЭУ больших габаритов сопровождается сложным, флуктуирующим характером УЗ-сигнала, многообразием его форм и отражений, изменением геометрии прозвучивания, а также необходимостью выбора и отслеживания информативных участков сигнала. Маскирующее действие шумов различной природы приводит к погрешности определения временной информации. Многообразие форм и отражений эхо-сигналов, отсутствие общепринятого алгоритма выделения информативного участка эхо-сигнала для дальнейшей обработки в еще большей мере усложняет поставленную задачу.

Типичная трехканальная осциллограмма регистрируемых сигналов при работе ЭУ представлена на рис. 2.

Наиболее полная публикация по данному вопросу [2] описывает применение УЗ-метода для исследования характера поведения теплозащитного покрытия и топлива в крупногабаритном двигателе на последних 100–150 мм толщины свода.

Для перехода на измерение текущей толщины не менее 600 мм необходимо использование комплекса как новых технических средств, так и специальных методов обработки.

В большинстве практических случаев временные серии являются существенно нестационарными в широком диапазоне масштабов, т.е. содержат участки, в которых сигналы могут изменяться одновременно и во временной, и в частотной областях. В этом случае интерпретация результатов, полученных с помощью традиционной методической базы, основанной на корреляционных процедурах и фурье-анализе, затруднена [7–10].

Часть трудностей снимается при использовании оконного преобразования Фурье, которое позволяет локализовать частоту, но привносит с собой проблему выбора окна и его характеристик. Главной проблемой здесь является появление гармонических составляющих, которых не было в исходном сигнале, так называемый «звон». На практике ширина окна выбирается интуитивно или на основе накопленного опыта. Оконное преобразование так же, как и интегральное, не учитывает, что частота может изменяться со временем.

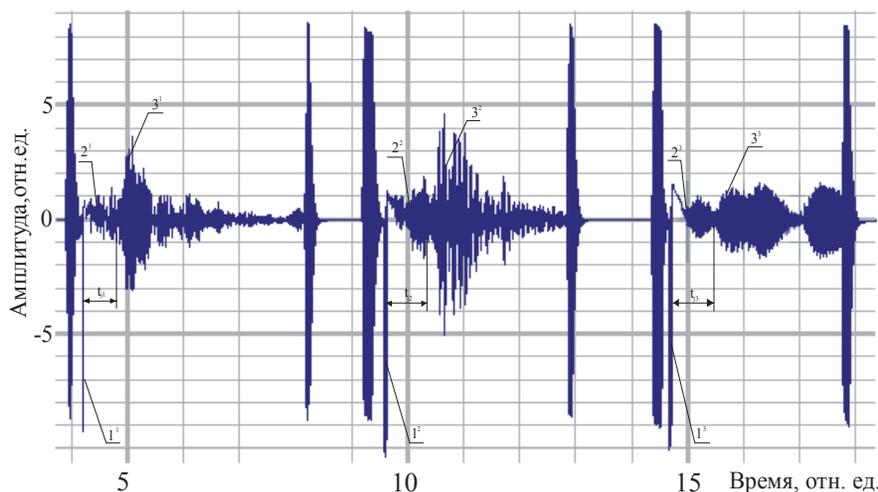


Рис. 2. Осциллограмма сигналов при работе ЭУ: $1^1, 1^2, 1^3$ – синхронимпульсы 1, 2 и 3 каналов соответственно; $2^1, 2^2, 2^3$ – УЗ-импульс, распространяющийся по поверхности корпуса; $3^1, 3^2, 3^3$ – УЗ-импульс, отраженный от фронта наполнителя; t_{j1}, t_{j2}, t_{j3} – время распространения импульсов $3^1, 3^2, 3^3$ соответственно

Для преодоления проблемы время-частотного разрешения в последние годы в мире активно развивается новый математический аппарат вейвлет-анализа [11].

Применение вейвлет-анализа позволяет:

- исследовать сложные нестационарные процессы в широком диапазоне масштабов;

- проводить фильтрацию и восстановление сигнала, выявлять его особенности и тренды;
 - локализовывать разрывы непрерывности, скачки, выявлять сбои аппаратуры;
- В работе принят теоретический подход, основанный:
- на исследованиях по закономерностям изменения зондирующих импульсов при прохождении через многослойную среду;
 - синтезе новых вейвлетных базисных функций;
 - обосновании устойчивости вейвлетного базиса к шумовым воздействиям;
 - применении новых базисов для обработки реальных ультразвуковых сигналов, полученных при исследовании модельных и натуральных ЭУ.

Главная цель работы состоит в разработке теоретических и прикладных подходов, которые позволяют синтезировать вычислительные алгоритмы оценки полезного сигнала, направленные на максимальное повышение чувствительности и разрешающей способности анализа, а также создании методической базы визуализации и информативной обработки результатов испытаний и контроля структурной целостности натуральных изделий на базе вейвлетных технологий.

Метод построения базиса вейлет-преобразования

В работах [12, 13] показана эффективность применения теории вейвлет-анализа к обработке результатов исследования внутрикамерных процессов при огневых испытаниях ЭУ. Имитационное сравнение точности определения временного положения эхо-импульса с использованием в качестве базисной функции самого сигнала и его приближенных представлений показало меньшее значение среднеквадратичного отклонения (СКО) определения временного положения эхо-импульса по сравнению с известными вейвлетами [14]. Дальнейший анализ структуры погрешности определения временного положения показал, что распределение вероятности этой погрешности не является унимодальным. Это распределение может иметь несколько побочных максимумов, отстоящих на значительном расстоянии от главного. В этом случае, несмотря на незначительное значение среднеквадратического отклонения (СКО), существует значительная вероятность появления больших ошибок.

При непрогнозируемом (в т.ч. скачкообразном) изменении толщины свода заряда применение временного стробирования становится неприемлемым, так как в этом случае невозможно разделить сбойные значения погрешности и скачкообразные изменения толщины. Все это указывает на необходимость применения других, чем СКО, критериев эффективности свойств предложенного метода.

В качестве простого и хорошо характеризующего эффективность метода определения временного положения сигнала предлагается использовать величину, которая названа устойчивостью. Под устойчивостью метода будем понимать вероятность того, что погрешность определения временного положения сигнала не превысит некоторого значения

$$k_E = P\left(|t - t^*| < E\right),$$

где t – временное положение сигнала, полученное с использованием какого-либо метода; t^* – истинное значение временного положения сигнала; E – временной интервал.

В дальнейшем временной интервал E везде принимается равным половине длины периода колебания исследуемого сигнала.

Поскольку при реальной обработке сигнала значение параметра t^* неизвестно, то данный критерий используется исключительно для целей оценки результатов численного моделирования применения того или иного метода. С использованием введенного критерия устойчивости k несложно установить, насколько эффективен тот или иной базис для используемого нами метода.

Пусть имеется некоторая функция $f(t)$, описывающая сигнал, положение которого нужно определить, и базис $\psi(a, b)$. Необходимо установить зависимость устойчивости выделения от соотношения сигнал/шум. Шум считается некоррелированным с сигналом, имеющим нормальное распределение.

Осуществим вейвлет-преобразование $f(t)$ с использованием выбранного базиса и выделим масштаб a . Пусть сдвиг, при котором значение энергетического спектра максимально, равен m .

Известно, что энергия белого шума равномерно распределена по всем масштабам разложения, и можно считать, что если значения отсчетов данных распределены нормально, то и значения отсчетов спектра энергии $|W_\psi(a, b)|$ также распределены нормально. При этом СКО распределения составит

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{\beta}},$$

где σ – СКО шума, присутствующего в сигнале; β – степень свободы базиса $\psi(a, b)$, которая для комплексных вейвлетов равна 2, а для вейвлетов, содержащих только действительную часть, $\beta = 1$ [15].

Найдем вероятность того, что произвольное значение спектра $|W_\psi(a, i)|$ превысит значение максимума $|W_\psi(a, m)|$ на данном масштабе, что приведет к ошибке определения временного положения сигнала

$$P_i = 1 - F_{\sigma_a}(|W_\psi(a, m)|).$$

Здесь F_{σ_a} – функция нормального распределения с нулевым средним.

Значение устойчивости в этом случае

$$k_E = \prod_{|i-m| \in E} (1 - P_i).$$

Для оценки эффективности использования предложенного метода в совокупности с использованием оптимального базиса далее проведено сравнение с существующими методами – по положению максимума амплитуды сигнала; корреляционным; вейвлет-преобразованием с использованием базиса Морле.

При расчете устойчивости для метода определения по максимуму сигнала аналогом значений спектра $W_\psi(a, b)$ вейвлет-преобразования являются абсолютные значения исходного сигнала $|f(t)|$. Очевидно, что в этом случае $\sigma_a = \sigma$.

Для расчета устойчивости при использовании корреляционного метода вместо значений $W_\psi(a, b)$ использовались абсолютные значения корреляционной функ-

ции $M(\tau)$. Значение СКО распределения каждого из дискретных отсчетов $|M(\tau)|$

$$\sigma_M = \sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt.$$

В качестве опорных функций использованы УЗ-сигнал по ГОСТ 23702-90 и функция Берлаге $f(t) = t^a \cdot e^{-bt} \cdot \sin(c \cdot t)$.

Рис. 3 иллюстрирует результаты моделирования при совпадении опорной функции и сигнала. В качестве опорного сигнала используется УЗ-сигнал по ГОСТ 23702-90.

При отношении сигнал/шум, большем 4, результаты применения вейвлет-преобразования с неоптимальным базисом имеют большую вероятность ошибки, чем простая процедура выделения максимума амплитуды сигнала. Этот вывод является неожиданным и несколько противоречит сложившемуся в публикациях мнению о заведомом преимуществе вейвлет-анализа по сравнению с другими методами. Впрочем, это говорит лишь о том, что необходимо разграничить области применения вейвлет-анализа и традиционных методов. Устойчивости корреляционного метода и вейвлет-анализа с использованием оптимального базиса примерно совпадают. Этот результат является ожидаемым, поскольку в обоих методах используется интегральная свертка и подставляемые в нее функции в обоих случаях совпадают. Значения $W_{\psi}(a, b)$ и $|M(\tau)|$ отличаются лишь на постоянный множитель.

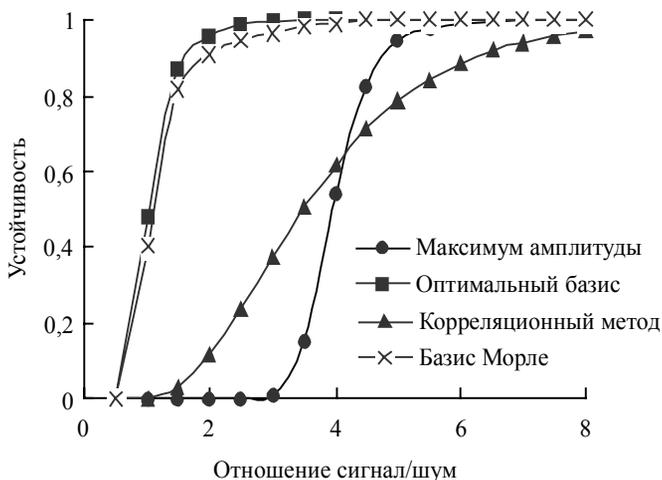


Рис. 3. Зависимость устойчивости различных методов от отношения сигнал/шум

Для исследования чувствительности корреляционного метода и метода на основе вейвлет-преобразования к изменению принимаемого сигнала проведено моделирование, когда сигнал имеет отличную от опорной функции частоту и форму огибающей.

Выделяемым сигналом является функция Берлаге с параметрами $a = 2,7$; $b = 1$, $c = 3,5$, для функции опорного сигнала используются параметры $a = 2,3$; $b = 1,2$;

$c = 3$. На рис. 4 видно преимущество предлагаемого метода по сравнению с корреляционным в случае отличия выделяемого и опорного сигналов при соотношениях сигнал/шум 1–3.

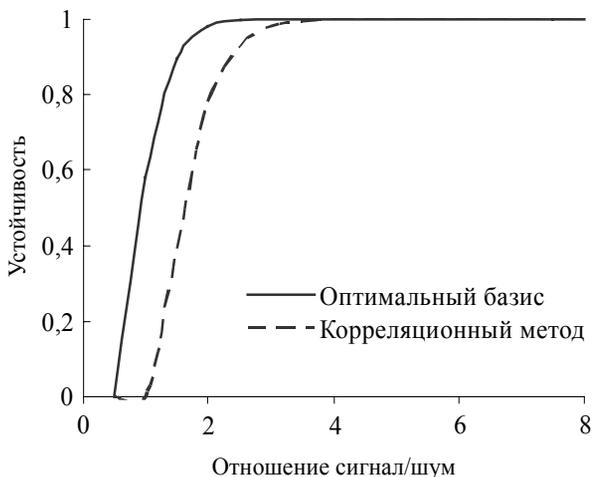


Рис. 4. Сравнение методов при отличии опорного и выделяемого сигналов от отношения сигнал/шум

Таким образом, предложенный метод позволяет снизить погрешность определения временного положения эхо-импульса при низких соотношениях сигнал/шум (менее 3) и наличии искажений сигнала при прохождении через объект исследования по сравнению с ранее использовавшимися методами.

Кроме того, следует отметить, что применение процедур вейвлет-анализа без адаптации их под данную конкретную задачу не приводит к значимому снижению погрешности определения времени, за которое УЗ сигнал проходит через объект [3].

Заключение

В области исследования внутрикамерных процессов с использованием проникающих излучений целью вейвлет-анализа является извлечение более детальной информации о характере и особенностях протекающих процессов. К сожалению, в настоящее время основная масса исследований ограничена использованием стандартных процедур, например, в составе пакета компьютерной математики MATLAB. Истинная ценность вейвлет-анализа заключается в возможности для исследователя создавать базисы, наиболее приспособленные к решению собственных задач.

По сравнению с алгоритмами обработки с жестко фиксированной логикой (например, корреляционным методом) вейвлет-анализ как «математический микроскоп» позволяет сфокусировать свое внимание на выделении нужного информативного параметра регистрируемого сигнала. В данном случае временная локализация максимума вейвлетного спектра более устойчива к влиянию шумов, чем принятая в [13] процедура выделения по точке перехода сигнала через ноль между главным максимумом и минимумом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефимов В.Г., Дерябин Ю.А., Митин А.Г.* Экспериментальное использование ультразвукового метода для определения скорости горения по своду заряда в процессе огневой утилизации РДТТ // Изв. вузов. Физика. 2004. № 10. С. 64–67.
2. *Коти Ф., Ерейдес Ч.* Ультразвуковой метод измерения скорости горения: ошибки, шум и чувствительность // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36. № 1. С. 59–67.
3. *Трено Ж., Кюнцман П.* Измерение скорости горения ТРТ с помощью ультразвука в бесопловых ракетных двигателях // Аэрокосмическая техника. 1987. № 4. С. 76–87.
4. *Traineau J.* Experimental Low and Medium frequency determination of Solid Propellant Pressure-Coupling Response Function // AIAA Paper. 1994. № 94. P. 30–43.
5. *Методы неразрушающих испытаний* / под. ред. Р. Шарпа. М.: Мир, 1972. 494 с.
6. *Вопросы повышения точности ультразвуковой толщинометрии материалов с высоким затуханием* / В.К. Качанов, В.Г. Карташов И.Л. Закутаев, Е.В. Налимова // Материалы 14 научно-технической конференции «Неразрушающий контроль и диагностика». М., 1996. С. 120.
7. *Перов Д.В., Ринкевич А.Б., Смородинский Я.Г.* Вейвлетная фильтрация сигналов ультразвукового дефектоскопа // Дефектоскопия. 2002. № 12. С. 3–21.
8. *Angrisani L.* The Detection of Echoes from Multilayered Structures Using the Wavelet Transform. // IEEE Trans. Instrum. and Meas. 2000. V. 49. No. 4. P. 727–731.
9. *Rosiene J., Sholl H.* Application of wavelets to ultrasonic evaluation of thickness // Wavelet Application. SPIE. 1994. V. 2242. P.487–505. www.wavelet.org
10. *Новиков Л.В.* Адаптивный вейвлет-анализ сигналов // Научное приборостроение. 1999. Т. 9. № 2.
11. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений (основы теории и примеры применения) // Прикладная нелинейная динамика. 1996. № 2. С. 2–40.
12. *Ланге Ю.В., Нефедов С.В.* Корреляционная обработка сигналов импедансных дефектоскопов // Контроль. Диагностика. 1998. № 1. С. 26–32.
13. *Алексеев К.А.* Модели и алгоритмы вейвлет-обработки сигналов с применением лифтинга // Датчики и системы. 2002. № 1. С. 7–9.
14. *Efimov V.G.* A method of quality comparison of different reference function application for ultrasonic measurement problems / V.G. Efimov, J.N. Lozhkova // Nondestructive Testing and Evaluation. 2011. V. 26. No. 2. P. 181–185.
15. *Осоков Г., Шитов А.* Применение вейвлет-анализа для обработки дискретных сигналов гауссовой формы // Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997. С. 11–97.

Статья поступила 06.01.2012 г.

Lozhkova Yu. N. WAVELET-TECHNOLOGY OF PROCESSING THE STUDIES OF POWER PLANTS. Power plants with a charge of solid propellants are widely used in rescue systems, oil production, management, and rocket and space systems. The most advanced wave methods of investigation of such facilities include ultrasonic and microwave techniques. The existing methodological framework, based on correlation procedures and Fourier-analysis does not allow for efficient processing and presentation of test results. This leads to the creation of specialized software systems of modeling and digital processing of the results based on the use and development of the theory of the wavelet transform.

Keywords: non-destructive testing, signal-to-noise ratio, Fourier analysis, wavelet transform, ultrasonic method.

LOJKOVA Ylia Nikolayevna (I.I. Polzunov Altai State Technical University)
E-mail: julianna9@qip.ru

УДК 539.4

П.В. Макаров, М.О. Еремин**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ КЕРАМИЧЕСКИХ
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ**

На основе разработанной модели квазихрупкой среды изучено хрупкое и квазихрупкое разрушение композиционных керамических материалов с матрицей из диоксида циркония с различным процентным содержанием упрочняющих частиц корунда. Показано, что разрушение развивается в две стадии – медленная квазистационарная фаза накопления неупругих деформаций и повреждений и сверхбыстрая катастрофическая фаза – режим с обострением, когда процесс разрушения выходит на макроуровень и происходит формирование макротрещины.

Ключевые слова: *хрупкое и квазихрупкое разрушение, квазистационарная фаза, режим с обострением*

Конструкционные керамические композиционные материалы получили широкое практическое применение в промышленности благодаря их высокой удельной прочности, повышенной вязкости разрушения, твёрдости, трещиностойкости, высокому сопротивлению усталостному разрушению и т.д. Конструкционные керамики на основе прочных оксидов различных металлов (циркония, алюминия и др.) способны эффективно сопротивляться интенсивным механическим нагрузкам. Однако именно хрупкие свойства керамики, их сравнительно низкая устойчивость к ударным воздействиям сильно ограничивают области применения керамических композитов. Изучение механизмов и особенностей хрупкого и квазихрупкого разрушения керамических материалов является актуальнейшей проблемой современной механики разрушения.

Согласно представлениям физической мезомеханики [1] и идеям работы [2], нагружаемое твердое тело является нелинейной динамической системой, эволюция которой в полях действующих сил полностью соответствует фундаментальным особенностям эволюции нелинейных динамических систем.

В настоящей работе основное внимание уделено характеру разрушения квазихрупких тел и сред – наличию двух стадий разрушения: сравнительно медленной квазистационарной и сверхбыстрой катастрофической стадии – режима с обострением по терминологии Курдюмова С.П. [3], что и является фундаментальной особенностью эволюции нелинейных динамических систем, обладающих свойством самоорганизованной критичности [4].

Одной из центральных проблем механики деформируемого твёрдого тела остаётся проблема формулировки условий или критериев разрушения. В настоящей работе эта проблема также решается на основе идей математической теории эволюции нагружаемых твёрдых тел и сред [2].

Согласно традиционным представлениям механики разрушения, локальное разрушение в твёрдом теле происходит тогда, когда достигается предельная нагрузка. Весь опыт применения этого подхода к решению задач предельного проектирования показал его приемлемую работоспособность и корректность для решения многих практических задач. Однако мы ничего не можем сказать о самом

процессе разрушения, тем более о его прогнозе. Если к телу приложена некая постоянная или переменная нагрузка, можно вычислить только соответствующее напряжённо-деформированное состояние и ответить на вопрос, достигнута или нет где-либо предельная нагрузка. В ряде важных случаев при решении инженерных задач такие ответы оказываются полезными и достаточными, но сказать что-либо о механизмах и сценариях формирования очага разрушения невозможно.

Ещё в 70-х годах прошлого века была установлена фундаментальная закономерность разрушения любых материалов: полному разрушению (и не только усталостному, но и любому) предшествует более или менее значительный подготовительный период. Например, для силикатных стёкол, разрушение которых рассматривалось как мгновенное, скорость развития трещины в начале процесса оказалась в миллионы раз меньше, чем на заключительном этапе [5], и это при том, что процесс разрушения в целом укладывается в несколько миллисекунд.

Бурное развитие идей и методов нелинейной динамики в эти же годы и в последующие десятилетия позволили С.П. Курдюмову с учениками сформулировать новую концепцию сверхбыстрых катастрофических этапов эволюции нелинейных систем – режимов с обострением [3] – и аналитически и численно изучить виды и особенности этих режимов.

Эти идеи и полученные на их основе качественные результаты являются ключевыми и для понимания процесса разрушения. В рассматриваемом случае хрупкого или квазихрупкого разрушения (а также при разрушении любых материалов и конструкций, пластичных металлов, хрупких бетонов, горных пород, геосред и т.д.) подготовительный процесс накопления неупругих деформаций или повреждений в хрупких средах локализуется в определённых областях. Эта подготовительная квазистационарная стадия в силу свойства самоорганизованной критичности деформируемого твёрдого тела как нелинейной динамической системы рано или поздно переходит в сверхбыструю катастрофическую стадию – режим с обострением по С.П. Курдюмову [2, 4, 7]. Понятно, что любой прогноз разрушения в принципе невозможен без изучения особенностей развития этих стадий и условий перехода стадии устойчивого развития разрушения в неустойчивый сверхбыстрый режим.

Математическая постановка задачи.

Модель квазихрупкой среды

В соответствии с эволюционной концепцией описания процессов неупругого деформирования и последующего разрушения [2, 4, 6–9] полная система уравнений включает:

1. Фундаментальные законы сохранения:

$$\text{-массы} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0; \quad (1)$$

$$\text{- количества движения} \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{d\sigma_{ij}}{dx^j} + \rho F_i; \quad (2)$$

$$\text{- энергии} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \quad (3)$$

2. Эволюционные уравнения первой группы, записанные в релаксационной форме, в которых приращения напряжений $\Delta\sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}\Delta t$ пропорциональны приращениям полных скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^T$ и релаксируют пропорционально развитию неупругой скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^P$. Процедура снесения напряжений на мгновенную предельную поверхность будет означать мгновенную релаксацию напряжений на каждом временном шаге до некоего динамического равновесия, определяемого как релаксацией, так и скоростью деградации прочностных и упругих параметров среды. При $\dot{\epsilon}_{ij}^P > \dot{\epsilon}_{ij}^T$ $\Delta\sigma_{ij} < 0$, идёт релаксация, при $\dot{\epsilon}_{ij}^P < \dot{\epsilon}_{ij}^T$ $\Delta\sigma_{ij} > 0$ и напряжения растут:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda(\dot{\theta}^T - \dot{\theta}^P)\delta_{ij} + 2\mu(\dot{\epsilon}_{ij}^T - \dot{\epsilon}_{ij}^P); \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = (-P\delta_{ij} + S_{ij}); \quad (5)$$

$$\dot{P} = -K\frac{\dot{V}}{V}; \quad (6)$$

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = 2\mu\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\delta_{ij}\right); \quad (7)$$

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = \dot{S}_{ij} - S_{ik}\dot{\omega}_{jk} - S_{jk}\dot{\omega}_{ik}; \quad (8)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right); \quad (9)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right). \quad (10)$$

Здесь D/Dt – коротационная производная Яумана, учитывающая поворот элементов среды при деформировании.

3. Задачей эволюционных уравнений второй группы является определения скоростей неупругих деформаций в уравнениях (4). В общем случае это кинетические уравнения, задающие скорости неупругой деформации и обеспечивающие релаксацию упругих напряжений в (4). В настоящей работе компоненты тензора скоростей неупругой деформации определим в соответствии с теорией пластического течения и мгновенной релаксации напряжений на каждом временном шаге.

Предельная поверхность напряжений записана в форме Мизеса – Шлейхера, что позволяет удовлетворить требованию обобщения условий пластичности и хрупкого разрушения: форма предельной поверхности и её свойства полностью определены тремя параметрами напряжённого состояния – октаэдрическим нормальным напряжением $\sigma_{окт}$, октаэдрическим сдвиговым напряжением $\tau_{окт}$ и видом напряжённого состояния μ_σ (параметром Лоде – Надаи)

$$f = \frac{\alpha}{3}J_1(\sigma_{ij}) + J_2^{1/2}(\sigma_{ij}) - Y \quad (11)$$

и является обобщением критерия текучести Кулона – Мора, где α имеет смысл коэффициента внутреннего трения. За основу взята модель Друккера – Прагера – Николаевского с неассоциированным законом течения, позволяющая описывать процесс дилатансии как независимый от внутреннего трения. В этом случае уже неассоциированного закона неупругого течения пластический потенциал не совпадает с функцией текучести и для предельной поверхности (11) записывается в виде [10]

$$g(\sigma_{ij}) = J_2 + \frac{\Lambda}{3} J_1 \left(2Y - \frac{\alpha}{3} J_1 \right) + \text{const}. \quad (12)$$

Компоненты тензора скоростей неупругой деформации определяются следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \left(s_{ij} + \frac{2}{3} \Lambda \left(Y - \frac{\alpha}{3} I_1 \right) \delta_{ij} \right) \dot{\lambda}; \quad (13)$$

$$I_1^p = 2\Lambda (I_2^p)^{1/2}, \quad (14)$$

что позволяет установить связь между объёмной и сдвиговой составляющими пластической деформации (14) [7], где Λ имеет смысл коэффициента дилатансии. Однако модель пока не связана с видом напряжённого состояния. Эта зависимость будет прописана при задании скорости накопления повреждений.

4. Разрушение материала в развиваемом подходе описано как процесс обвальной деградации прочности материала до нуля при формировании трещины на сверхбыстрой катастрофической стадии эволюции НДС, являющейся завершающим этапом предразрушения, среда остается консолидированной, следовательно, остаются справедливыми все уравнения неупругого деформирования (1) – (14); нет также необходимости вводить в модель прочностные параметры, определяющие «предельное» состояние материала. По развиваемым в настоящей работе представлениям предельное состояние должно формироваться в нагружаемой среде по мере накопления в ней неупругих деформаций и повреждений. Необходимо только задать величину Y_0 – исходную прочность материала.

Согласно идеям классиков кинетической концепции разрушения (С.Н. Журкова, А.В. Степанова, Р. Беккера, Я.И. Френкеля и других) [11], для того, чтобы довести неповреждённый кристалл до состояния локального сдвига, надо совершить работу, пропорциональную разнице свободных энергий F идеального кристалла и

кристалла в текущем состоянии $A(\sigma) \sim V \frac{\sigma_0^2 - \sigma^2}{2\mu}$ (V – объём, σ_0 – значение теоретической прочности, σ – текущий уровень напряжений, μ – модуль сдвига).

Орован модифицировал эту идею, положил энергию активации, зависящую только от величины пластической (неупругой) деформации, и принял, что $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0 = h\varepsilon_p$, где h – коэффициент деформационного упрочнения [12],

$$F(\sigma) \sim h^2 V \frac{\varepsilon_p^2}{2\mu}.$$

Воспользуемся этой идеей и положим функцию деградации среды $D = D(t, \mu_\sigma, \varepsilon)$ в виде зависимости от накапливаемой средой неупругой деформации $\varepsilon_p = \varepsilon_{\text{тек}} - \varepsilon_0$ и вида напряжённого состояния:

$$D = \int_{t_0}^t \frac{[K_1(\varepsilon_{\text{тек}} - \varepsilon_0)^2 + K_2(\varepsilon_{\text{тек}} - \varepsilon'_0)^2] dt}{\varepsilon_*^2 t_*}, \quad (15)$$

$$\varepsilon_* = \varepsilon_{0*}(1 + \mu_\sigma)^n, \quad Y = Y_0(1 - D), \quad D \leq 1,$$

$$\mu_\sigma = 2 \frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_3} - 1 \quad (16)$$

$\varepsilon_{\text{тек}}$ – второй инвариант тензора деформаций, $\varepsilon_0, \varepsilon'_0$ – начальные степени деформации, по достижении которых в материале начинается накопление повреждений в областях сжатия и растяжения соответственно (составляют 0,2–0,5 от предела упругости в зависимости от решаемой задачи), что позволяет накапливаться повреждениям еще на упругой стадии деформирования. Причём $\varepsilon'_0 \ll \varepsilon_0$, таким образом, повреждения в областях растяжения-сдвига ($\mu_\sigma < 0$) начинают копиться при существенно меньших напряжениях, чем при $\mu_\sigma > 0$ в областях сжатия-сдвига. Скорости накопления повреждений для локальных областей, где $\mu_\sigma < 0$ также существенно выше, чем в областях сжатия-сдвига ($\mu_\sigma > 0$). Этот процесс регулируется параметром $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\mu_\sigma)$ в (15). Таким образом, отклик среды на вид напряженно-го состояния (её текущая прочность) формируется в процессе её нагружения. Следовательно, прочностные параметры будут деградировать существенно быстрее в тех областях (частицах) среды, где параметр Лоде – Надаи $\mu_\sigma < 0$, что соответствует растяжениям-сдвигам. Этот отклик зависит также от истории нагружения. Если в какой-то частице среды сначала было, например, растяжение со сдвигом, а затем вид напряженного состояния изменился на сжатие со сдвигом, то процесс дальнейшего разрушения будет развиваться уже при пониженных прочностных параметрах, хотя и более медленно, в соответствии с кинетикой (15). При $\mu_\sigma \leq 0$ $K_1 = 0$ и $K_2 = 1$, при $\mu_\sigma > 0$ $K_1 = 1$ и $K_2 = 0$. ε_{0*} – параметр модели, t_* имеет смысл характерного времени процесса.

Расчеты проводились в 2D-постановке при условии плоской деформации с использованием схемы второго порядка точности, подробно описанной в работе [13].

Результаты моделирования хрупкого и квазихрупкого разрушения композиционных керамических материалов

На рис. 1 представлены модельные структуры керамических композитов с матрицей из диоксида циркония ZrO_2 и различным процентным содержанием упрочняющих частиц оксида алюминия Al_2O_3 (корунда). В расчетах осуществлялось одноосное сжатие модельных образцов керамических композитов.

В [14] было показано, что в керамическом композите при нагружении возникают локальные области растягивающих напряжений на межфазовых границах. И именно в этих областях растягивающих напряжений происходит разрушение материала с образованием мезотрещин. Покажем, что разрушение композитов в подавляющем большинстве случаев происходит в областях растяжения. Это обусловлено двумя причинами: 1) наличие структурных неоднородностей всегда приводит к формированию в композите локальных областей растяжения; 2) прочность квазихрупких материалов при растяжении существенно ниже, чем при сжа-

тии. Скорости накопления повреждений в областях растяжения также существенно выше.

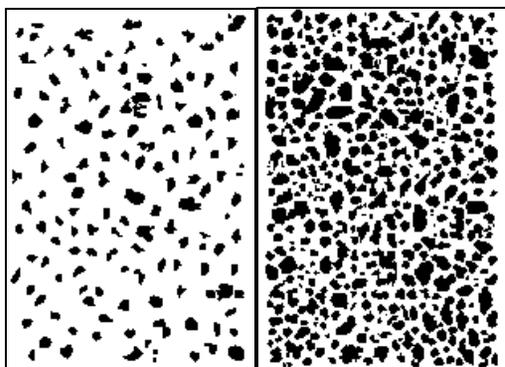


Рис. 1. Модельные структуры композитов с 15 и 40 %-м содержанием упрочняющих частиц

В табл. 1 приведены физико-механические свойства материалов, составляющих композит.

Таблица 1

Физико-механические свойства материалов, составляющих композит

Параметр	ρ , г/см ³	K , Мбар	μ , Мбар	γ , Мбар	Λ	α
ZrO ₂	5,7	1,433	0,6615	0,021	0,22	0,62
Al ₂ O ₃	3,984	3,46	1,6	0,0374	0,12	0,6

На рис. 2 продемонстрированы σ – ϵ -диаграммы для модельных композитов при различных условиях нагружения – идеального скольжения (рис. 2, а) и защемления (рис. 2, б) на границе приложения нагрузки.

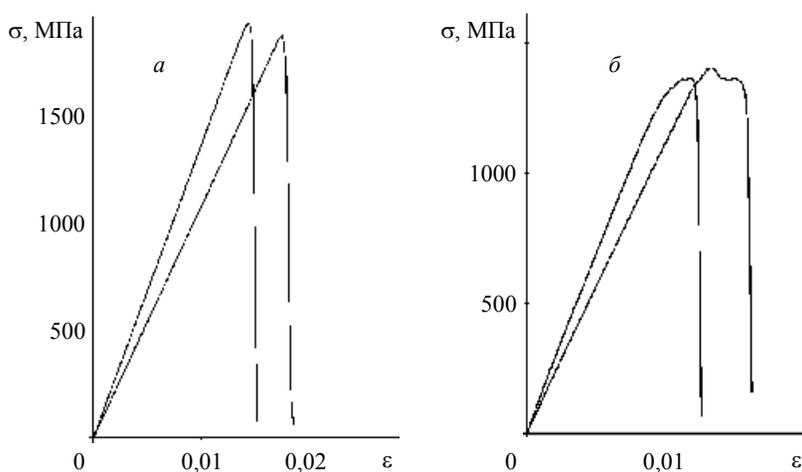


Рис. 2. σ – ϵ -диаграммы в случае: идеального скольжения (а), защемления (б) на границе приложения нагрузки

Общей закономерностью для двух вариантов нагружения является эволюция прочности композитов в режиме с обострением на заключительной стадии деформирования. Устойчивое медленное накопление неупругих деформаций и повреждений на более низких структурных уровнях, чем рассматриваемый макроуровень, сменяется стадией неустойчивого лавинообразного накопления повреждений (режима с обострением), который занимает десятые доли процента макродеформации, то есть происходит локализация процесса разрушения во времени. В режиме с обострением происходит глобальная потеря устойчивости, прочность и упругие модули композитов деградирует до нуля очень быстро.

В случае идеального скольжения на границе приложения нагрузки модельные композиты разрушаются хрупко, то есть за стадией линейного роста напряжений наблюдается резкий излом и эволюция системы в режиме с обострением. Особенностью же деформационного отклика в случае защемления на границе приложения нагрузки (рис. 2, б) является наличие стадии неупругого деформирования образцов за счет формирования областей сдвигов-сжатий вблизи защемленной границы, что резко снижает скорость накопления повреждений в этих локальных областях. Этот процесс задерживает фазу режима с обострением и глобальной деградации физико-механических свойств среды. Таким образом, стадия неупругой деформации занимает несколько процентов общей макродеформации.

Иной сценарий развивается в случае бокового давления (рис. 3). Стесненность деформации приводит к затягиванию катастрофической фазы эволюции системы. Ресурс прочности в этом случае расходуется постепенно, наблюдается последовательность сбросов и подрастаний напряжений на фоне общей эволюции системы в режиме с обострением. Подобная ситуация наблюдается в геосредах при так называемых «медленных» землетрясениях (брадисейсмах), когда особенности стесненности деформации приводят к затягиванию процесса локального разрушения геосреды.

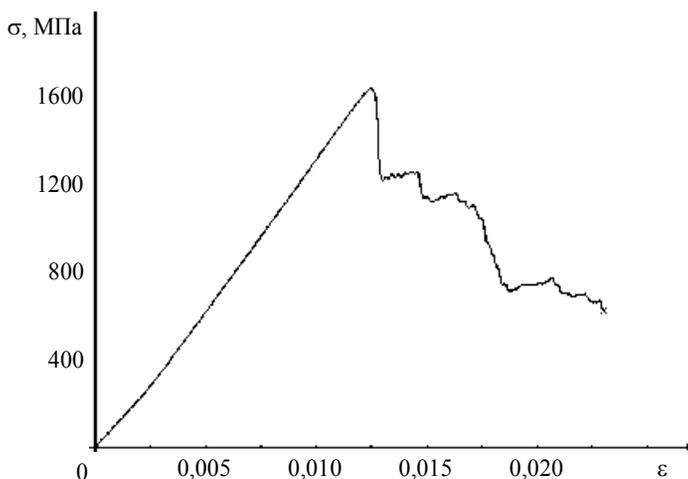


Рис. 3. $\sigma - \varepsilon$ -диаграмма в случае бокового обжимающего давления

Подобное изменение вида напряженно-деформированного состояния (НДС) в локальной области разрушаемого материала, в частности в области формирующейся трещины, демонстрирует рис. 4 (отмечено овалом).

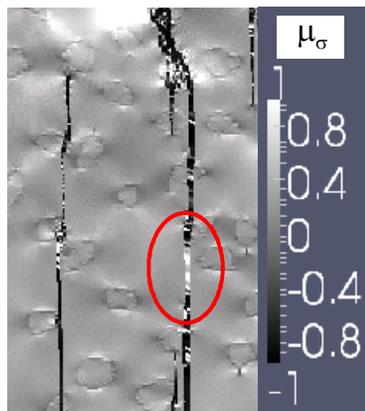


Рис. 4. Часть расчетной области, отражающая вид напряженного состояния в композите, определяемого по параметру Лоде – Надаи μ_σ

На рис. 4 представлена часть расчетной области, отражающая вид напряженного состояния в композите, определяемый по параметру Лоде – Надаи. Во-первых, формирование полосы локализованного разрушения происходит в узких зонах нормальных растягивающих напряжений, $\mu_\sigma \rightarrow -1$.

Во-вторых, в сформированной макротрещине, в отмеченной овалом области, напряженное состояние сменилось на сжатие-сдвиги, что означает переход в режим компактирования за счет нарастающей стесненности деформации, обусловленной наличием упрочняющих частиц. Этот процесс задержки разрушения в матрице демонстрирует еще одну положительную роль упрочняющих частиц.

На рис. 5 – 8 представлены рассчитанные картины неупругих деформаций в композитах для трех степеней деформации, напряженного состояния (по параметру Лоде – Надаи), меры поврежденности (функция D) при 2 вариантах граничных условий.

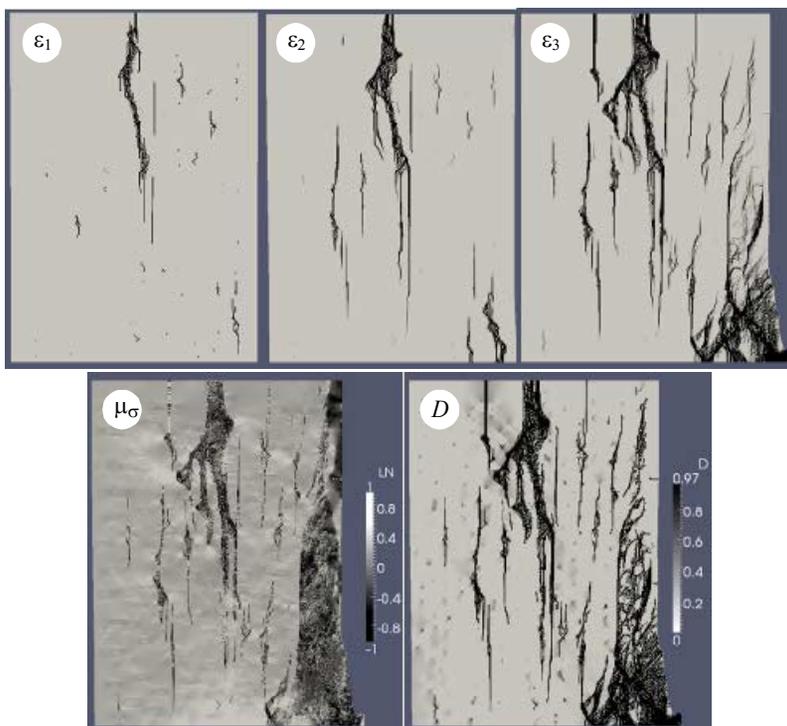


Рис. 5. Расчётные картины: неупругих деформаций (для трёх степеней деформации), напряжённого состояния (μ_σ), меры повреждённости в модельном образце (D) композита с 15%-м содержанием упрочняющих частиц в случае идеального скольжения на границе приложения нагрузки

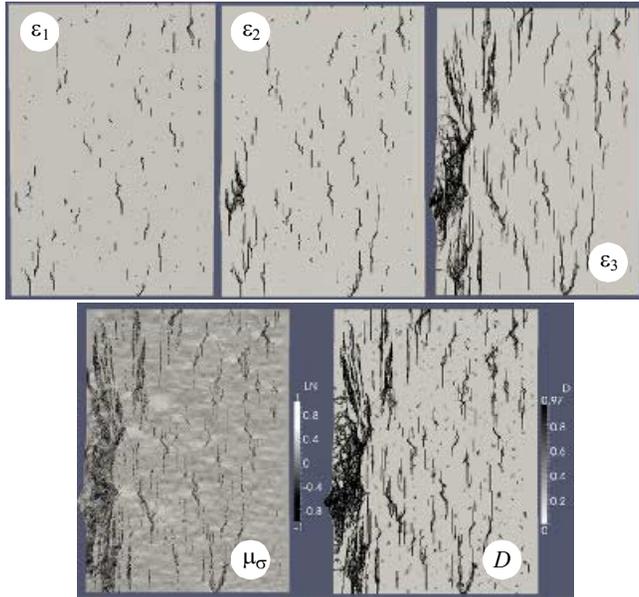


Рис. 6. Расчётные картины: неупругих деформаций (для трёх степеней деформации), напряжённого состояния ($\mu\sigma$), меры повреждённости в модельном образце (D) композита с 40 %-м содержанием упрочняющих частиц в случае идеального скольжения на границе приложения нагрузки

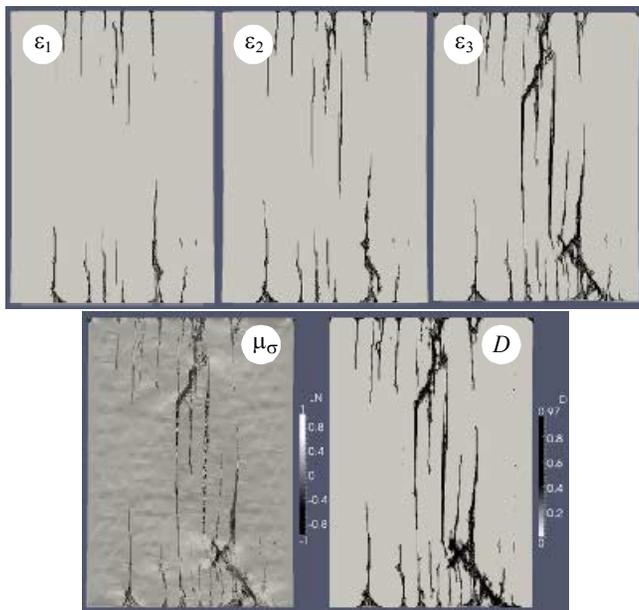


Рис. 7. Расчётные картины: неупругих деформаций (для трёх степеней деформации), напряжённого состояния ($\mu\sigma$), меры повреждённости в модельном образце (D) композита с 15 %-м содержанием упрочняющих частиц в случае жесткого защемления на границе приложения нагрузки

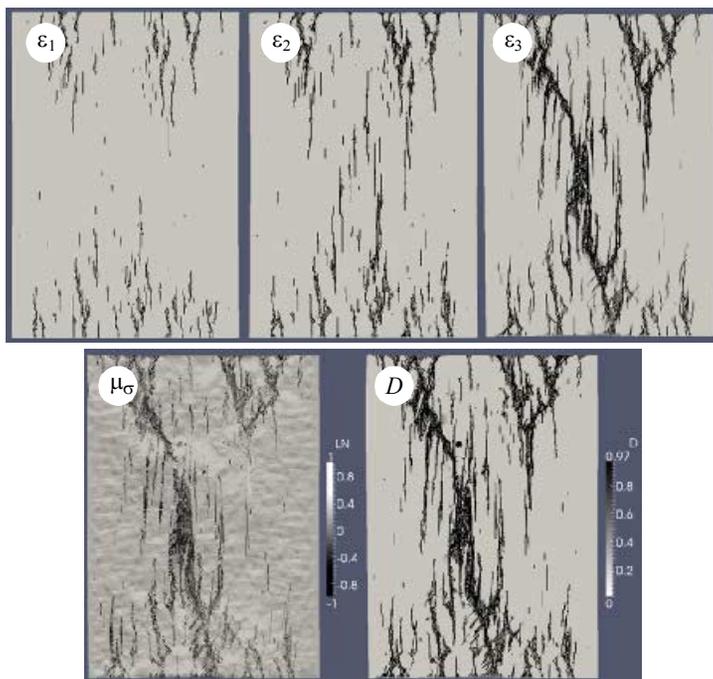


Рис. 8. Расчётные картины: неупругих деформаций (для трёх степеней деформации), напряжённого состояния (μ_σ), меры повреждённости в модельном образце (D) композита с 40 %-м содержанием упрочняющих частиц в случае жесткого защемления на границе приложения нагрузки

Во всех представленных случаях на начальных стадиях деформирования образцов рост мезотрещин имеет преимущественно вертикальный характер, что показывают и эксперименты [15].

Сравнение картин разрушения модельных композитов при различном процентном содержании упрочняющих частиц демонстрирует различие в механизмах их разрушения. В композите с 40 %-м содержанием корунда большое число упрочняющих частиц одновременно создает возможность для формирования областей локальных растягивающих напряжений на фазовой границе матрица – включение, в которых деградация физико-механических свойств среды происходит значительно быстрее, но и препятствует распространению трещин. В связи с чем на стадии предразрушения в композите с 40 %-м содержанием корунда формируется значительное число мезотрещин в областях растяжения-сдвига, и это более энергоёмкий процесс, чем формирование малого числа протяженных трещин для композита с 15 %-м содержанием упрочняющих частиц (рис. 5, 7).

Динамика роста трещин в таких модельных композитах (рис. 6, 8) для трех степеней деформации ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) показывает, что на стадии предразрушения происходит устойчивое накопление неупругих деформаций и повреждений во всем рассматриваемом объеме композитов. Катастрофическую сверхбыструю фазу эволюции системы – режим с обострением, когда процесс накопления неупругих деформаций и повреждений выходит на макроуровень, предваряет квазистациона-

нарная фаза подготовки, которая выражается в формировании перколяционной сети мезотрещин. На заключительной стадии деформирования происходит объединение соседних мезотрещин в магистральную макротрещину.

Иная ситуация наблюдается в композите с 15 %-м содержанием упрочняющих частиц. Движение вершины мезотрещины, сформировавшейся на межфазовой границе, задерживается меньшим количеством упрочняющих частиц, то есть растущая трещина приблизительно в три раза реже встречает сопротивление со стороны упрочняющих частиц. В связи с этим, длина единичной мезотрещины для композита с 15 %-м содержанием корунда превышает аналогичную длину единичной мезотрещины для композита с 40 %-м содержанием корунда в среднем в 1,5–2 раза. Такое различие на мезоуровне приводит к различию на макроуровне в характерах разрушения двух композитов. В композите с 15 %-м содержанием упрочняющих частиц макротрещина также имеет преимущественно вертикальный характер. Мезотрещины, идущие с противоположных краев образца, попадая в зону динамического влияния, начинают оказывать взаимное влияние друг на друга, что приводит к их объединению на заключительной стадии деформирования.

Характер течения в композите демонстрируют поля смещений точек в образце, например, на рис. 9, 10 представлены поля смещений в модельных композитах, относительно отмеченного зерна, для трёх степеней деформации.

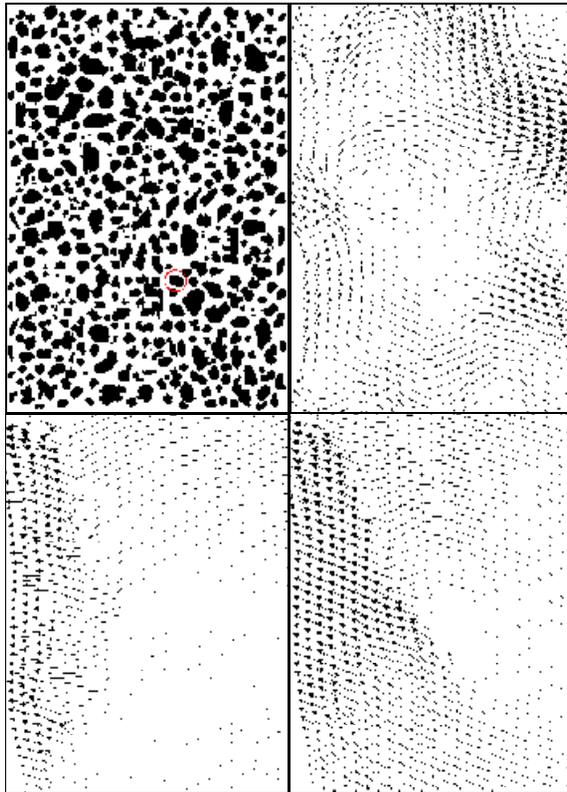


Рис. 9. Расчётные поля смещений для композита с 40 %-м содержанием упрочняющих частиц в случае идеального скольжения на границе приложения нагрузки

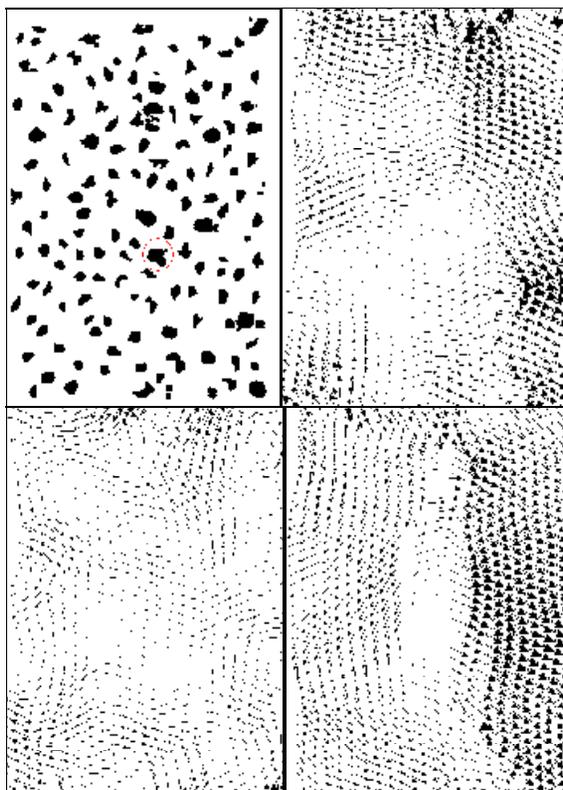


Рис. 10. Расчётные поля смещений для композита с 15 %-м содержанием упрочняющих частиц в случае заземления на границе приложения нагрузки

Поля смещений обладают ярко выраженной неоднородностью, эволюция полей смещений во времени показывает, что НДС в области зафиксированного зерна меняется в ходе нагружения – от сжатия на начальной стадии деформирования, затем сдвиги и формирование вихрей и растяжение при фрагментации композита. При образовании магистральной трещины поле смещений демонстрирует коррелированное движение фрагментов композита в нормальном к магистральной трещине направлении.

Картина мониторинга меры поврежденности D для частиц в объеме образца, находящихся в предполагаемой зоне взаимного динамического влияния (рис. 11) демонстрирует наличие медленной квазистационарной фазы роста поврежденности и сверхбыстрой фазы эволюции – режима с обострением с ростом поврежденности в частице композита до максимума. Из рис. 11 также видно, что поврежденность в соседних частицах последовательно достигает своего максимального значения. Подобное поведение может свидетельствовать о миграции деформационной активности. А именно за режимом с обострением в одной из частиц начинается (или продолжается) квазистационарная фаза в соседней частице, а затем и в ней начинается сверхбыстрая фаза эволюции и происходит миграция деформационной активности в следующую частицу.

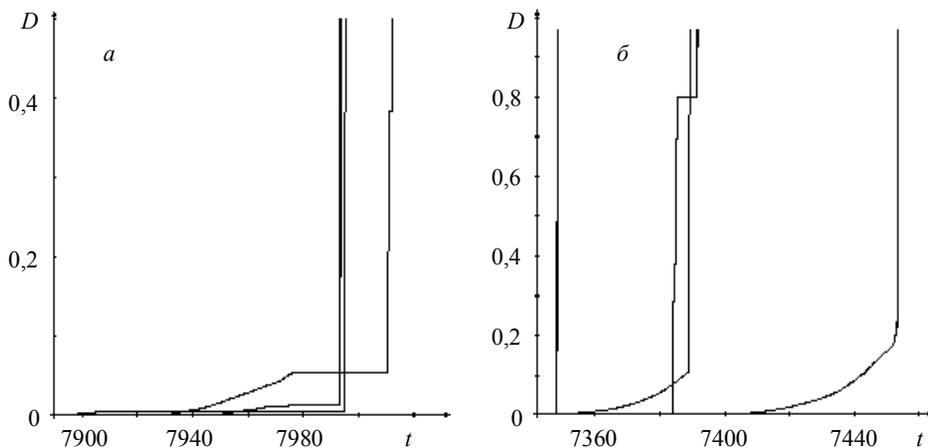


Рис. 11. Мониторинг функции поврежденности D для частиц образца, находящихся в зоне предполагаемого динамического влияния, в композите с 15 %-м содержанием упрочняющих частиц (a – при условии жесткого защемления на границе приложения нагрузки, b – при условии идеального скольжения на границе приложения нагрузки)

Заключение

В рассматриваемой модели среды предельное состояние в нагружаемом материале формируется в зависимости от вида напряженного состояния.

Изучение закономерностей хрупкого и квазихрупкого разрушения композиционных керамических материалов с использованием разработанной модели квазихрупкой среды показало, что процесс разрушения всегда развивается в две стадии – квазистационарная фаза медленного устойчивого накопления неупругих деформаций и повреждений во всей иерархии структурно-масштабных уровней сменяется режимом с обострением – сверхбыстрой катастрофической фазой эволюции системы, когда процесс выходит на макроуровень. При идеальном скольжении на границе приложения нагрузки разрушение носит хрупкий характер, когда за линейной стадией роста напряжений следует глобальная потеря устойчивости и деградация упругих и прочностных свойств композитов до нуля. При защемлении на границе приложения нагрузки наблюдается стадия предварительного неупругого деформирования композитов с образованием локальных областей потери несущей способности, которая занимает несколько процентов макродеформации. При этом стадия эволюции системы в режиме с обострением затягивается.

В условиях стесненной деформации наблюдается иной сценарий эволюции композита. Ресурс упругих и прочностных свойств среды расходуется постепенно. На фоне общей эволюции системы в режиме с обострением наблюдается последовательность подрастаний и сбросов средних напряжений на $\sigma - \epsilon$ -диаграмме.

Показано, что хрупкое и квазихрупкое разрушение материалов происходит преимущественно в областях, где преобладают растягивающие напряжения, в которых скорость деградации упругих и прочностных свойств среды выше на порядки. На стадии предразрушения формируется перколяционная сеть мезотрещин, слияние которых на заключительной стадии деформирования эволюционирует в макротрещину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панин В.Е., Коротаев А.Д., Макаров П.В., Кузнецов В.М. Физическая мезомеханика материалов // Изв. вузов. Физика. 1998. № 9. С. 8–36.
2. Макаров П.В. Математическая теория эволюции нагружаемых твердых тел и сред // Физ. мезомех. 2008. Т. 11. № 3. С. 19–35.
3. Курдюмов С.П. Режимы с обострением. Эволюция идеи / под ред. Г.Г. Малинецкого. 2–е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 312 с.
4. Макаров П.В. Самоорганизованная критичность деформационных процессов и перспективы прогноза разрушения // Физ. мезомех. 2010. Т. 13. № 5. С. 97–112.
5. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
6. Макаров П.В. Эволюционная природа блочной организации геоматериалов и геосред. Универсальный критерий фрактальной делимости // Геология и геофизика. 2007. Т. 48. № 7. С. 724–746.
7. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Стефанов Ю.П. и др. Нелинейная механика геоматериалов и геосред. Новосибирск: Академич. изд-во «Гео», 2007. 235 с.
8. Макаров П.В. Нагружаемый материал как нелинейная динамическая система. Проблемы моделирования // Физ. мезомех. 2005. Т. 8. № 6. С. 39–56.
9. Евтушенко Е.П., Еремин М.О., Костандов Ю.А. и др. Моделирование разрушения хрупких и квазихрупких тел и геосред // Физ. мезомех. 2012. Т. 15. № 3. С. 35–44.
10. Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Неассоциированные законы течения и локализации пластической деформации // Успехи механики. 1989. Т. 12. № 1. С. 131–183.
11. Журков С.Н., Нарзуллаев Б.Н. Временная зависимость прочности твёрдых тел // ЖТФ. 1953. Т. XXIII. Вып. 10. С. 1677–1689.
12. Orowan E.J. West Scot. Iron and steel Inst., 54, 1947, 45.
13. Уилкинс М.Л. Расчёт упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
14. Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П. О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения // Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение. 1960. № 3.
15. Еремин М.О., Макаров П.В., Смолин И.Ю. и др. Изучение влияния ориентации трещины на разрушение хрупких образцов при сжатии // Материалы XXI Международной научной школы. Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2011. 412 с.

Статья поступила 23.06.2012 г.

Makarov P. V., Eremin M. O. SIMULATION OF CERAMIC COMPOSITIONAL MATERIALS FRACTURE UPON UNIAXIAL COMPRESSION. Based on the developed model of quasi-brittle media, the brittle and quasi-brittle fracture of ceramic compositional materials with zirconium dioxide matrix and different percent content of corundum hardening particles is studied. The fracture is shown to develop in two stages – slow quasi-stationary phase of damage accumulation and superspeed catastrophic phase – aggravation mode when the fracture process reaches the macro-level and the macro-crack formation occurs.

Keywords: brittle and quasi-brittle fracture, quasi-stationary phase, aggravation mode

MAKAROV Pavel Vasiliyevich (Tomsk State University)

E-mail: pvm@ispms.ru

YEREMIN Mikhail Olegovich (Tomsk State University)

E-mail: bacardi@sibmail.com

УДК: 532.542.4:575.5, 519.63

Л.Л. Миньков, И.Г. Дик, Е.В. Пикушак

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СУСПЕНЗИИ В ГИДРОЦИКЛОНЕ С ИНЖЕКТОРОМ¹

В данной работе проводится численное моделирование закрученного турбулентного течения полидисперсной суспензии в гидроциклоне с инжектором. Для описания турбулентного поля течения суспензии используется модель рейнольдсовых напряжений и модель смеси для описания параметров частиц в двумерном осесимметричном приближении. Особое внимание уделяется выяснению механизмов воздействия способа инъекции на перестройку гидродинамических полей и, в конечном итоге, на механизмы классификации. Показано, что тангенциальный способ инъекции сильнее влияет на сепарационную кривую по сравнению с радиальным способом, что согласуется с экспериментальными данными.

Ключевые слова: гидроциклон, инъекция, полидисперсная суспензия, вычислительная гидродинамика.

Одной из проблем при работе гидроциклонов является проблема нежелательного выноса частиц мелкодисперсных фракций в нижний слив, предназначенный для вывода частиц крупнодисперсных фракций. Для борьбы с этим явлением используется промывка крупного продукта путем инжектирования воды в нижнюю коническую часть гидроциклона в место скопления нежелательно присутствующих мелких частиц перед выводом их из аппарата [1–8].

Несмотря на то, что метод инжектирования известен достаточно давно, систематические исследования влияния параметров инъекции на характеристики гидроциклона стали проводиться недавно. Так, в [9] выявлены основные закономерности течения воды в гидроциклоне с инжектором, имеющим 5 тангенциально направленных сопла. Моделирование проводилось на основе трехмерной RNG- k - ε -модели. Численное моделирование и экспериментальное исследование влияния способа инжектирования на расходные характеристики гидроциклона, работающего на чистой воде, а также на поле турбулентности, выполнено в [10, 11] на основе двумерной осесимметричной модели для закрученного течения, причем для нахождения турбулентных характеристик привлекалась модель рейнольдсовых напряжений.

В предлагаемой работе на основе численного моделирования в двумерном осесимметричном приближении исследуется турбулентное течение полидисперсной суспензии в гидроциклоне с двухсопловым инжектором и объясняются механизмы воздействия радиально и тангенциально направленной инъекции на процесс классификации твердых частиц.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России 2009-2013 г.» Гос. Соглашение №14.В37.21.0872.

Физическая постановка задачи

Рассматривается стационарное закрученное турбулентное течение полидисперсной суспензии в гидроциклоне, которая подается через входной участок с постоянным расходом Q_F (рис. 1, а). Учитываются следующие силы, действующие на частицы суспензии: центробежные, отбрасывающие частицы на стенку гидроциклона; силы турбулентной диффузии, препятствующие движению частиц к периферии; силы гидродинамического сопротивления со стороны жидкости; гравитационные и силы взаимодействия частиц между собой, за счет которых мелкие частицы увлекаются более крупными. Крупные частицы, в большей мере подверженные действию центробежных сил, движутся к периферии и выводятся в нижний слив УГ. Мелкие частицы, с одной стороны, за счет турбулентной диффузии равномерно распределяются по всему объему гидроциклона и выводятся внутренним вихрем через верхний слив ОВ, но, с другой стороны, увлекаемые крупными частицами, движутся также к периферии и выводятся вместе с ними в нижний слив. В коническую часть гидроциклона через инжекционное устройство подается вода с расходом Q_{inj} , с целью вымыть мелкие частицы из суспензии и вывести их через верхний слив. Инжекционное устройство состоит из распределительного кольца 1 и двух сопел 2, которые могут обеспечить либо радиальную (рис. 1, б), либо тангенциальную (рис. 1, в) инжекцию. Основные размеры гидроциклона указаны в табл. 1.

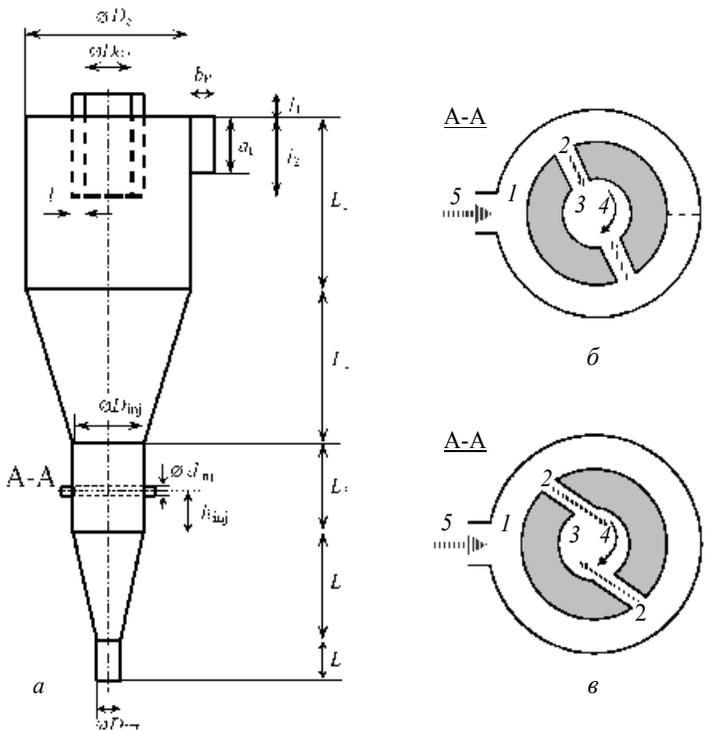


Рис. 1. Гидроциклон с инжектором: а – схема гидроциклона; б, в – центральное поперечное сечение инжектора: б – радиальный способ инжекции; в – тангенциальный способ инжекции; 1 – распределительное кольцо; 2 – инжекционные входы; 3 – внутренняя полость гидроциклона в сечении инжектора; 4 – направление вращения основного потока; 5 – подвод инжектируемой воды

Таблица 1

Размеры гидроциклона и элементов инжектора, мм

a_F	b_F	D_c	D_{OF}	D_{UF}	D_{inj}	d_{inj}	h_{inj}	l	l_1	l_2	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
22	9.1	50	14.4	7.2	22	2	38	8.4	30.1	45.5	277	192	76	102	43

Математическая постановка задачи

Система уравнений, описывающая стационарное турбулентное течение полидисперсной суспензии (состоящей из жидкой фазы (воды) и N фракций дисперсной фазы (частицы)) в гидроциклоне, в соответствии с «моделью смеси» [12, 13] записывается следующим образом:

Уравнение сохранения массы смеси:

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}_m) = 0, \tag{1}$$

где $\rho_m = \sum_{i=0}^N \alpha_i \rho_i$, $\mathbf{U}_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{i=0}^N \rho_i \alpha_i \mathbf{U}_i$. Здесь индекс $i = 0$ относится к жидкой фазе, а индексы $i \geq 1$ – к фракциям дисперсной фазы. Учитывая то, что плотности вещества частиц всех фракций дисперсной фазы одинаковы, выражения для плотности смеси и ее среднemasсовой скорости могут быть переписаны в виде

$$\rho_m = (1 - \alpha) \rho_{liq} + \alpha \rho_s, \mathbf{U}_m = \frac{1}{\rho_m} \left(\rho_{liq} (1 - \alpha) \mathbf{U}_i + \rho_s \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{U}_i \right),$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ – объемная доля дисперсной фазы.

Скорость каждой фракции выражается через ее «диффузионную» скорость и скорость смеси соотношением $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{d,i} + \mathbf{U}_m$. «Диффузионная» скорость i -й фазы выражается через скорость скольжения фазы i относительно жидкой фазы $\mathbf{U}_{i,liq} = \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{liq}$ в виде

$$\mathbf{U}_{d,i} = \mathbf{U}_{i,liq} - \frac{\rho_s}{\rho_m} \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{U}_{j,liq}. \tag{2}$$

Скорость частиц дисперсной фазы относительно жидкости (скорость скольжения) находится по известному соотношению [13]:

$$\mathbf{U}_{i,liq} = \frac{\tau_i}{f_{drag,p}} \frac{\rho_s - \rho_m}{\rho_s} \mathbf{a}, \tag{3}$$

в котором ускорение частицы \mathbf{a} согласно «модели смеси» можно найти через градиент давления:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{g} - \mathbf{U}_i \nabla \mathbf{U}_i \approx \mathbf{g} - \mathbf{U}_m \nabla \mathbf{U}_m \approx \frac{1}{\rho_m} \nabla p.$$

Уравнение изменения объемной доли для i -й фракции частиц с учетом их диффузии за счет турбулентности:

$$\nabla \left(\rho_s \alpha_i \left(\mathbf{U}_i - D_{turb,i} \frac{\nabla \alpha_i}{\alpha_i} \right) \right) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \tag{4}$$

Уравнение сохранения количества движения смеси:

$$\nabla(\rho_m \mathbf{U}_m \mathbf{U}_m) + \nabla p = \nabla(\boldsymbol{\sigma}_m + \boldsymbol{\sigma}_{\text{turb}}) + \rho_m \mathbf{g} - \nabla \left(\sum_{i=0}^N \alpha_i \rho_i \mathbf{U}_{d,i} \mathbf{U}_{d,i} \right). \quad (5)$$

В (5) тензор вязких напряжений смеси $\boldsymbol{\sigma}_m = \mu_m (\nabla \mathbf{U}_m + \nabla \mathbf{U}_m^T)$, а тензор турбулентных напряжений смеси $\boldsymbol{\sigma}_{\text{turb}} = -\rho_m \mathbf{R}$.

Вязкость суспензии зависит от концентрации дисперсной фазы:

$$\mu_m = \frac{\mu_{\text{liq}}}{(1 - \alpha/0.62)^{1.55}}. \quad (6)$$

Время релаксации частицы τ_p в жидкости (без учета ее взаимодействия с другими частицами) определяется по известному выражению $\tau_p = \frac{\rho_s d_p^2}{18\mu_{\text{liq}}}$ [12]. Со-

гласно модели [14, 15], мелкие частицы, увлекаемые крупными, приобретают скорость намного выше стоксовской. В полидисперсной суспензии она пропорциональна квадрату «кажущегося» диаметра частицы $d_p^2 + G(\alpha)f(d_p)$, где

$f(d_p) = \left(\sum_{d_j > d_i}^N \alpha_j d_j^6 \right)^{1/3}$ – функция увлечения мелких частиц крупными;

$G(\alpha) = 2,5\alpha^{1/3} \exp[-(5\alpha)^3]$. Отсюда время релаксации частицы в формуле для скорости частиц относительно жидкости (3) будет иметь следующий вид:

$$\tau_p = \frac{\rho_s}{18\mu_{\text{liq}}} (d_p^2 + G(\alpha)f(d_p)). \quad (7)$$

Коэффициент сопротивления определяется по формуле Шиллера–Науманна [16]:

$f_{\text{drag}, p} = 1 + 0,15 \text{Re}_i^{0,687}$, где $\text{Re}_i = \frac{\rho_{\text{liq}} d_p}{\mu_{\text{liq}}} |\mathbf{U}_{i,\text{liq}}|$, а коэффициент турбулентной

диффузии частиц $D_{\text{turb},i}$ — по формуле [17]:

$$\rho_m D_{\text{turb},i} = \frac{\mu_{\text{turb}}}{1 + 1,6 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^2 \left(\frac{\rho_s d_p^2}{\mu_{\text{liq}}} \right)^2} \quad (8)$$

Для определения параметров поля турбулентности привлекалась модель Рейнольдсовых напряжений [18, 19], описываемая следующей системой уравнений. Уравнение переноса для рейнольдсовых напряжений:

$$\nabla(\rho_m \mathbf{U}_m \mathbf{R}) = \nabla \left(\left(\mu_m + \frac{\mu_{\text{turb}}}{\sigma_1} \right) \nabla \mathbf{R} \right) + \mathbf{P} + \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (9)$$

где $\mathbf{P} = -\rho_m (\mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{U}_m + \nabla \mathbf{U}_m^T \mathbf{R}^T)$ – тензор, отвечающий за производство турбулентных напряжений; $\boldsymbol{\Phi}$ – тензор, отвечающий за перераспределение турбулент-

ности за счет быстрых деформаций, медленных деформаций и за счет перераспределения напряжения вблизи стенки; ε – тензор скорости диссипации, $\varepsilon = \frac{2}{3} I_{\rho_m} \varepsilon$.

Коэффициент турбулентной вязкости вычисляется по формуле $\mu_{\text{turb}} = \rho C_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon}$, в которой кинетическая энергия турбулентных пульсаций определяется через тензор рейнольдсовых напряжений: $k = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{R})$.

Уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии:

$$\nabla(\rho_m \varepsilon U_m) = \nabla \left(\left(\mu_m + \frac{\mu_{\text{turb}}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}) \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho_m \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (10)$$

где $\sigma_{\varepsilon} = 1,0$; $\sigma_1 = 0,82$; $C_{\varepsilon 1} = 1,44$; $C_{\varepsilon 2} = 1,92$; $C_{\mu} = 0,09$ – параметры модели.

Предполагается, что течение в гидроциклоне является закрученным с осевой симметрией, т. е. $\mathbf{U}_m = \{U_m, V_m, W_m\}$, $\mathbf{x} = \{x, r\}$, \mathbf{R} – симметричный тензор Рейнольдсовых напряжений:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xr} & R_{x\theta} \\ R_{xr} & R_{rr} & R_{r\theta} \\ R_{x\theta} & R_{r\theta} & R_{\theta\theta} \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (1), (4), (5), (9), (10) решалась численно при следующих краевых условиях:

На входе в гидроциклон

$$U_m = 0, \quad V_m = -\frac{Q_F}{\pi d_c a_F}, \quad W_m = \frac{Q_F}{a_F b_F}, \quad \alpha_i = \alpha_{i,0};$$

$$R_{xx} = R_{rr} = R_{\theta\theta} = (0,1|U_m|)^2; \quad R_{xr} = R_{x\theta} = R_{r\theta} = 0; \quad \varepsilon = C_{\mu}^{3/4} \frac{k^{3/2}}{0,07 \cdot d_{\text{hyd}}},$$

где d_{hyd} – гидравлический диаметр входного патрубка, $d_{\text{hyd}} = \frac{2a_F b_F}{a_F + b_F}$.

На входе в инжектор

$$U_m = 0, \quad V_m = -\frac{Q_{\text{inj}}}{S_{\text{inj}}},$$

$W_m = -V_m$ – для тангенциальной инъекции, $W_m = 0$ – для радиальной инъекции.

$$\alpha_i = 0; \quad R_{xx} = R_{rr} = R_{\theta\theta} = (0,1|U_m|)^2; \quad R_{xr} = R_{x\theta} = R_{r\theta} = 0;$$

$$\varepsilon = C_{\mu}^{3/4} \frac{k^{3/2}}{0,07 \cdot d_{\text{inj}}}, \quad S_{\text{inj}} = n \cdot d_{\text{inj}}^2.$$

На нижнем и верхнем выходах из гидроциклона задавалось давление равное атмосферному $p = p_{\text{out}}$, для остальных параметров задавались условия

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \phi = \{ \alpha_i, U_m, V_m, W_m, R_{xx}, R_{rr}, R_{\theta\theta}, R_{xr}, R_{x\theta}, R_{r\theta}, \varepsilon \}.$$

На оси симметрии задавались условия симметрии:

$$V_m = 0, W_m = 0, R_{xr} = 0, R_{x\theta} = 0, R_{r\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \phi = \{ \alpha_i, U_m, p, R_{xx}, R_{rr}, R_{\theta\theta}, \varepsilon \}.$$

На стенке гидроциклона:

$$U_m = 0, V_m = 0, W_m = 0.$$

Напряжения Рейнольдса на стенке гидроциклона определялись по методике, изложенной в руководстве [20].

Для численного решения определяющей системы уравнений проводилась дискретизация области на 41252 четырехугольные ячейки с использованием предпроцессора Gambit 2.3.16.

Решение системы уравнений количества движения и системы уравнений переноса напряжений Рейнольдса выполнялось с помощью экспоненциальной схемы с привлечением алгоритма PRESTO [20] для расчета давления на гранях ячеек. Согласование между полем давления и полем скорости реализовано на основе алгоритма PISO [21].

Вся совокупность частиц разбивалась на 12 фракций. Объемная доля дисперсной фазы приведена в табл. 2. На входе в гидроциклон скорости частиц и жидкости совпадают. Объемный расход суспензии на входе в гидроциклон равнялся $Q_F = 74,47$ л/мин. Плотность вещества частиц твердой фазы $\rho_s = 2650$ кг/м³. Объемная доля частиц составила $\sim 0,0189$, что соответствует содержанию твердой фазы в суспензии 50 г/л. Расход жидкости через инжектор варьировался от 2 до 6 л/мин.

Таблица 2

Начальная функция распределения частиц по размерам

Параметры	Номер фракции											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d , мкм	0,66	0,88	1,63	2,73	4,43	6,67	9,44	12,71	17,74	24,91	36,90	45,84
$\alpha_i \cdot 10^3$	0,596	0,743	0,972	1,236	1,531	1,698	2,293	3,388	3,301	2,312	0,617	0,181

Обсуждение результатов

Как показывают расчеты, при одинаковом расходе инжектирующей жидкости тангенциальный подвод гораздо сильнее деформирует основной поток в гидроциклоне (рис. 2, в), чем радиальный (рис. 2, б), и над местом инъекции возникает тороидальный вихрь, направляющий пристеночные слои суспензии в сторону входного патрубка. При этом происходит частичное запыление основного потока в конической части гидроциклона, которое препятствует выносу мелких частиц в нижний слив [10, 11]. Следует отметить, что такие различия в картине течения начинают проявляться для расхода инжектирующей жидкости от 6 л/мин и выше.

В результате деформации поля течения происходит перераспределение твердой фазы в инжекторе, рис. 3, выражающееся в ее выносе из пристеночной области в направлении оси симметрии, в результате чего происходит повышение объемной доли частиц в ядре потока, тем самым увеличивается вероятность выноса частиц через верхний слив. Тангенциальный способ инжектирования в большей

степени повышает объемную долю твердой фазы в потоке (рис.3 в) по сравнению с радиальным способом (рис. 3, б) за счет сформировавшегося пристеночного вихря над местом инъекции (рис. 2, в).

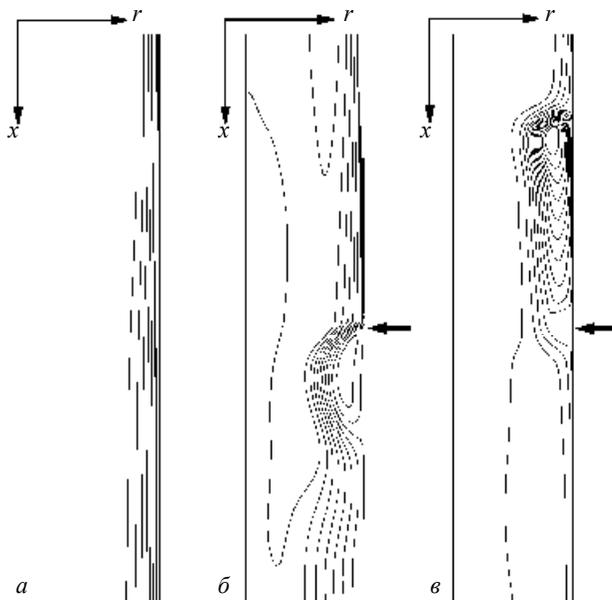


Рис. 2. Траектории частиц фракции № 1. $Q_{inj} = 6$ л/мин:
 а – без инъекции; б – радиальная инъекция; в – тангенциальная инъекция

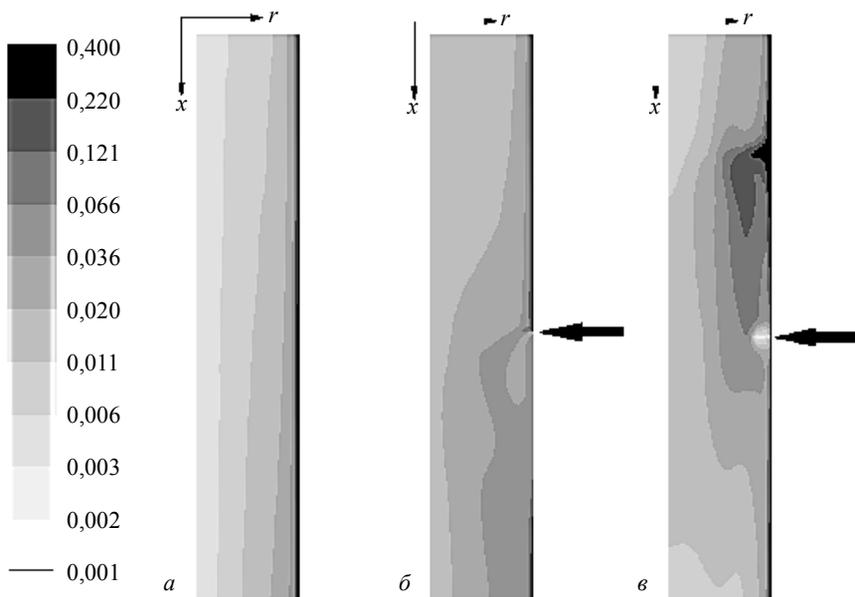


Рис. 3. Объемная доля твердой фазы (логарифмическая шкала), $Q_{inj} = 6$ л/мин:
 а – без инъекции; б – радиальная инъекция; в – тангенциальная инъекция

На рис. 4 показано влияние объемного расхода инжектирующей жидкости на зависимость функции разделения (отношение массового расхода частиц некоторой фракции через нижний слив к массовому расходу частиц этой же фракции через питающий патрубок) от размера фракции для двух способов инжектирования: радиального (рис. 4, а) и тангенциального (рис. 4, б). Как видно из результатов расчета, при небольших расходах инжекционного потока (до 4 л/мин) способ инжектирования не оказывает заметного влияния на поведение функции разделения, хотя при этом наблюдается ее снижение для мелкогазразмерных фракций (1–3 фракции) до 4,5 % и для среднеразмерных фракций (5–7 фракции) до 19 %. Дальнейшее увеличение инжекционного потока до 6 л/мин не приводит к какому-либо изменению функции разделения в случае радиального способа инжектирования. Тангенциальный же способ инжектирования, наоборот, существенно снижает функцию разделения в широком фракционном диапазоне. Подобное влияние инжекции на функцию разделения было получено и при проведении экспериментов с 50 мм гидроциклоном, оборудованным двумя инжекционными соплами [11].

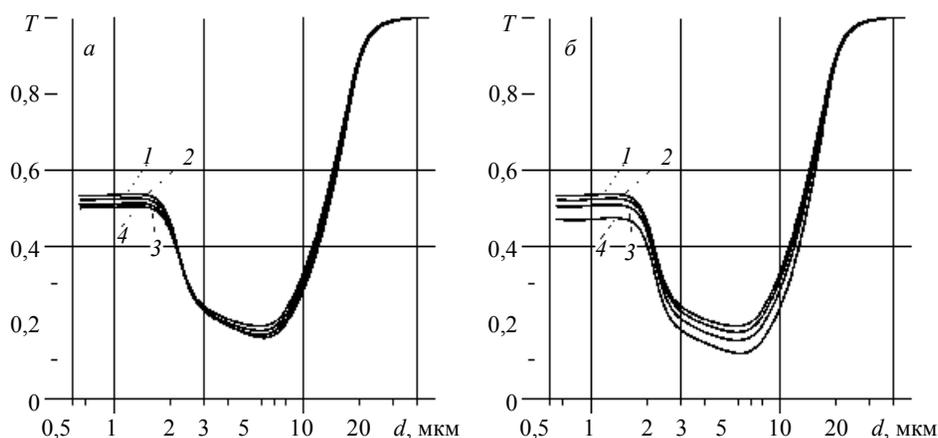


Рис. 4. Влияние инжекции на функцию разделения: а – радиальный способ инжекции; б – тангенциальный способ инжекции; 1 – $Q_{inj} = 0$, 2 – 2 л/мин, 3 – 4 л/мин, 4 – 6 л/мин

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dahlstrom D.A.* Fundamentals and applications of the liquid cyclone // Chemical Engineering Progress Symposium Series / American Institute of Chemical Engineers. 1954. V. 15. No. 50. P. 41.
2. *Kelsall D.F., Homes J.A.* Improvement in classification efficiency in hydraulic cyclones by water injection // Proceedings of the 5th Mineral Processing Congress, Paper vol. 9, Institute of Mining and Metallurgy. 1960. P. 159–170.
3. *Bradley D.* The Hydrocyclone. London: Pergamon Press, 1965.
4. *Firth B., Edwards D., Clarkson C., O'Brien M.* The impact of classification on coal preparation performance // Proceedings of the 7th Australian Coal Preparation Conference, Paper E2, Australian Coal Preparation Society. 1995. P. 250–276.
5. *Patil D.D., Rao T.C.* Classification evaluation of water injected hydrocyclone // Minerals Engineering. 1999. V. 12. No. 12. P. 1527–1532.
6. *Honaker R.Q., Ozsever A.V., Singh N., Parekh B.K.* Apex water injection for improved hydrocyclone classification efficiency // Minerals Engineering. 2001. V. 14. No. 11. P. 1445–1458.
7. *Udaya Bhaskar K., Govindarajan B., Barnwal J.P., et al.* Classification studies of lead-zinc ore fines using water-injection cyclone // Intern. J. Mineral Processing. 2005. V. 77. No. 2. P. 80–94.

8. *Farghaly M.G., Golyk V., Ibrahim G.A., et al.* Controlled wash water injection to the hydrocyclone underflow // *Minerals Engineering*. 2010. V. 23. No. 4. P. 321–325
9. *Minkov L., Dueck J.* CFD-modeling of a flow in a hydrocyclone with additional water injection // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2011. Т. 3. № 1. С. 63–76.
10. *Миньков Л.Л., Крохина А.В., Дик И.Г.* Расходные характеристики гидроциклона со встроенным инжектором // *Теплофизика и аэромеханика*. 2011. Т. 18. № 3. С. 413–426.
11. *Миньков Л.Л., Крохина А.В., Дик И.Г.* Гидродинамические механизмы влияния инъекции на классификационные характеристики гидроциклона // *ИФЖ*. 2011. Т. 84. № 4. С. 747–758.
12. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
13. *Manninen M.* On the mixture model for multiphase flow. VTT Publications 288 / M. Manninen, V. Taivassalo, S. Kallio. Technical Research Centre of Finland, Espoo, 1996.
14. *Дик И.Г., Миньков Л.Л., Неессе Т.* Гидродинамическая модель ускорения седиментации мелких частиц в бидисперсной суспензии // *Теплофизика и аэромеханика*. 2001. Т. 8. № 2. С. 283–294.
15. *Дик И.Г., Килимник Д.Ю., Миньков Л.Л., Неессе Т.* Измерение скорости седиментации мелкодисперсных частиц в тарельчатой центрифуге // *ИФЖ*. 2003. Т. 76. № 4. С. 7–17.
16. *Schiller L., Naumann Z.* A Drag Coefficient Correlation // *Z. Ver. Deutsch. Ing.* 1935. V. 77. P. 318.
17. *Dueck J., Neeße Th.* Contribution to the analysis of energy spectrum and transport phenomena in a turbulent two-phase flow // *Progress in Fluid Flow Research: Turbulence and Applied MHD Progress in Astronautics and Aeronautics, Virginia*. 1998. V. 182. P. 173–181.
18. *Launder B.E.* Second-moment closure and its use in modeling turbulent industrial flows // *Intern. J. for Numerical Methods in Fluids*. 1989. No. 9. P. 963–985.
19. *Gibson M.M. and Launder B.E.* Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 86. P. 491–511.
20. *FLUENT 6.3 User's Guide*. © Fluent Inc. 2006-09-20.
21. *Issa R. I.* Solution of implicitly discretized fluid flow equations by operator splitting // *J. Comput. Phys.* 1986. V. 62. P. 40–65.

Статья поступила 18.09.2012 г.

Min'kov L.L., Dueck J.H., Pikushchak E.V. SIMULATION OF TURBULENT POLYDISPERSE SUSPENSION FLOW IN THE HYDROCYCLONE WITH AN INJECTOR. In this paper, the numerical simulation of the swirling turbulent flow of a polydisperse suspension in the hydrocyclone with an injector is carried out. The 2D axisymmetric approximation of Reynolds Stresses Model and model of mixture are used to describe the swirling turbulent flow field of suspension and particles parameters in the hydrocyclone. Special attention is paid to the clarification of mechanisms of injection influence on the reorganization of hydrodynamic fields and, finally, on classification mechanisms. It is shown that the tangential injection method more strongly affects the separation curve as compared to the radial method, which is consistent with the experimental data.

Keywords: hydrocyclone, injection, polydisperse suspension, computational fluid dynamics.

MINKOV Leonid Leonidovich (Tomsk State University)

E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

DUECK Johann (Erlangen-Nurnberg University)

E-mail: Johann.Dueck@mbt.uni-erlangen.de

PIKUSHCHAK Elizaveta Vladimirovna (Tomsk State University)

E-mail: pikushchak@ftf.tsu.ru

УДК 532.5

Д.В. Платонов, А.В. Минаков, А.А. Дектерев, Е.Б. Харламов**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ CFD-ПАКЕТОВ SIGMAFLOW
И ANSYS FLUENT НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ
ЛАМИНАРНЫХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ**

В данной работе представлен сравнительный анализ двух программных комплексов для решения задач вычислительной гидродинамики SigmaFlow и Fluent. При помощи данных программ проведено решение нескольких ламинарных тестовых задач. Полученные результаты сопоставлены между собой, а также с экспериментальными данными и расчётами других авторов.

Ключевые слова: *вычислительная гидродинамика, Fluent, SigmaFlow, уравнения Навье – Стокса, CFD-пакеты, ламинарное течение.*

Появление быстродействующих ЭВМ, а также необходимость скорейшего решения острейших проблем (создание ядерного оружия, покорение космоса) в середине прошлого века дало мощный толчок развитию вычислительных методов. Прогресс в совершенствовании вычислительной техники и самих численных методов резко изменил характер применения основных принципов исследований в теоретической гидродинамике и теплопередаче при решении инженерных задач. Наряду с традиционными методами исследований, такими, как аналитические и экспериментальные методы, сформировался третий метод исследований – вычислительная гидродинамика (CFD). Сам термин «вычислительная гидродинамика» или «CFD» сегодня рассматривается гораздо шире и включает себя не только методы расчета течений жидкости и газа, но и методы моделирования сложного теплообмена, химического реагирования, многофазных сред, сопряженных задач. Методы вычислительной гидродинамики нашли очень широкое применение для изучения характеристик течений и теплообмена как при проведении академических исследований, так и при оптимизации режимов работы технологических устройств. Пожалуй трудно найти область человеческой деятельности, где бы не нашли применения методы CFD. Продолжая непрерывно развиваться и совершенствоваться, уже сегодня эти методы могут выступать в качестве альтернативы натурного эксперимента при решении очень многих практически важных задач.

На данный момент в мире существует ряд универсальных коммерческих программных продуктов для решения задач вычислительной гидродинамики. Среди ведущих зарубежных коммерческих пакетов можно выделить такие, как «ANSYS FLUENT» и «ANSYS CFX» корпорации ANSYS Inc, «STAR-CD/STAR-CCM+» компании CD-adapco Group, позволяющие проводить моделирование широкого класса физических процессов в научных и инженерных областях. Существуют и отечественные универсальные коммерческие пакеты: Flow Vision компании ТЕ-СИС, Gas Dynamics Tool компании GDT Software Group.

Помимо коммерческих пакетов существует очень большое количество некоммерческих, так называемых «in-house» кодов. За рубежом практически каждый крупный университет или научно-исследовательский институт имеет собственные

разработки в области создания CFD-кодов. По своим возможностям и быстрдействию некоторые из них могут существенно опережать коммерческие коды. Однако, как правило, они имеют менее удобный и развитый интерфейс и требуют существенно более квалифицированного пользователя.

Среди отечественных некоммерческих кодов можно назвать VP2/3, SINF, SigmaFlow. Что же касается заложенных в эти пакеты математических моделей и численных алгоритмов, то в целом они соответствуют мировому уровню, а по некоторым аспектам существенно его превосходят.

Программа SigmaFlow – это универсальный некоммерческий программный продукт для решения широкого класса задач гидродинамики, теплообмена и горения, разрабатываемая специалистами Красноярского филиала Института теплофизики СО РАН, кафедры теплофизики Сибирского федерального университета и фирмы ООО «ТОРИНС». Программа SigmaFlow является развитием программы AeroChem, разрабатываемой с 1993 года. Специализированные версии программы используются рядом научно-исследовательских и проектных организаций, а также в учебном процессе. Развитие программы происходит в рамках выполнения проектов по грантам и договорам на выполнение НИР. Программа SigmaFlow позволяет моделировать следующие процессы: стационарные и нестационарные течения жидкости и газа; течения неньютоновских жидкостей; турбулентные течения с использованием RANS- и гибридных RANS/LES-моделей; конвективный, кондуктивный и радиационный теплообмен.

Важный вопрос любого численного исследования – это оценка адекватности численных прогнозов. Чтобы ответить на него, надо произвести тестирование пакета на совокупности задач как модельного плана, так и таких, для которых имеются надежные экспериментальные данные.

Целью данной работы являлся сравнительный анализ вычислительной эффективности широко известного во всем мире программного комплекса FLUENT и разрабатываемого в Красноярском филиале Института теплофизики СО РАН программного пакета SigmaFlow на решении нескольких задач ламинарной гидродинамики.

Математическая модель и численный алгоритм

В данной работе рассматривались изотермические, ламинарные, стационарные течения несжимаемой жидкости с постоянной плотностью. В этой постановке течение описывается уравнениями Навье – Стокса

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} &= -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, \mathbf{v} – вектор скорости, p – давление, $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$ – тензор напряжений, μ – коэффициент вязкости, \mathbf{g} – вектор силы тяжести.

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$$

– тензор скоростей деформации.

Для компьютерной реализации математической модели, как уже было сказано выше, были выбраны два программных комплекса, FLUENT и SigmaFlow.

Подробное описание численного алгоритма программы SigmaFlow можно найти в работах [1–3]. Здесь лишь отметим основные моменты численной методики. Разностный аналог уравнений Навье – Стокса (1) находится с помощью метода конечного объема [4, 5] для многоблочных сеток. В этом случае полученная схема оказывается автоматически консервативной. Суть метода заключается в разбиении расчетной области на контрольные объемы и интегрировании исходных уравнений сохранения по каждому контрольному объему для получения конечно-разностных соотношений. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса осуществляется с помощью противопоточной схемы второго порядка [6]. Диффузионные потоки и источниковые члены аппроксимируются конечно-объемными аналогами центрально-разностных соотношений со вторым порядком точности. Связь между полями скорости и давления, обеспечивающая выполнение уравнения неразрывности, реализуется при помощи SIMPLEC-процедуры на совмещенных сетках [5]. Для устранения осцилляций поля давления используется подход Рхи – Чоу, заключающийся во введении монотонизатора в уравнение для поправки давления [5].

В рамках SIMPLEC-процедуры полное давление представляется в виде суммы гидростатического и гидродинамического давления. Поскольку в данной работе рассматриваются только изотермические течения с постоянной плотностью, то гидростатическое давление не представляет особого интереса и может быть найдено как $p = \rho g z$, где z – высота относительно начала координат. Гидродинамический перепад давления согласно SIMPLEC-процедуре, определяется из решения уравнения на поправку давления, при этом на границах задавалось условие отсутствие градиента давления. Для замыкания системы уравнений и получения единственного решения необходимо задание значения фиксированного давления в какой либо из точек расчетной области. В случае постоянной плотности расположение этой точки и значение фиксированного давления в ней не имеет принципиального значения. В данной работе величина фиксированного давления задавалась равной нулю и точка располагалась в начале координат расчетной области. Такой подход является на сегодняшний день общепринятым и реализован во всех пакетах программ, использующих метод контрольного объема и SIMPLEC-процедуры.

Полученные в результате дискретизации исходной системы дифференциальных уравнений разностные уравнения решаются итерационным способом с применением алгебраического многосеточного решателя.

При проведении расчетов при помощи пакета Fluent использовалась версия 6.23 с академической лицензией, приобретенной Сибирским федеральным университетом в 2007 г. Подробное описание численных алгоритмов этого пакета можно найти в его документации [5]. В пакете программ Fluent реализован очень большой выбор численных методик решения и способов дискретизации уравнений Навье – Стокса. В данной работе при решении задач для корректности сравнения использовались, насколько это возможно, те же самые алгоритмы, методики и параметры, что реализованы в пакете SigmaFlow. А именно: segregated pressure-based solver, SIMPLE-C-процедура для связи скорости и давления, схема аппроксимации QUICK на конвективные члены уравнений переноса, Green-Gauss Cell-метод аппроксимации градиентов, коэффициент релаксации в уравнении на давление задавался равным 1, коэффициент релаксации в уравнениях на компоненты вектора скоростей равным 0,8, многосеточные-AMG решатели с параметрами, выбранными по умолчанию.

Ламинарное течение в двумерной каверне

Тестирование расчетного алгоритма начнем с самого распространенного в вычислительной гидродинамике теста – задачи о стационарном ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне. Задача о каверне в вычислительной гидродинамике является своеобразным испытательным полигоном, на котором проходят тестирование новые численные алгоритмы и процедуры. Начиная с появления первых вычислительных машин до сегодняшних дней по данной задаче накоплен огромный вычислительный материал [7, 8].

Каверна представляет собой замкнутую квадратную полость, заполненную вязкой несжимаемой жидкостью. Верхняя стенка каверны движется с постоянной скоростью $U = 1$ м/с. Движение от стенки за счет вязкого трения передается к жидкости, и в зависимости от величины числа Рейнольдса в каверне формируется сложное циркуляционное течение. Такая постановка, будучи геометрически крайне простой, позволяет отразить многие характерные черты задач, описываемых уравнениями Навье – Стокса, например различные соотношения между инерционными и вязкими силами и т.п. Кроме того, такого рода течения широко распространены в природе и различных промышленных процессах.

Расчет течения в каверне был проведен в широком диапазоне значений числа Рейнольдса от 100 до 10000. Число Рейнольдса менялось путем варьирования динамической вязкости, при этом плотность и скорость крышки каверны оставались постоянными. Расчеты проводились на равномерных декартовых сетках с детализацией 30×30 и 100×100 узлов.

Картину течения в каверне для числа Рейнольдса 3200 можно представить себе из данных на рис. 1. Структура течения в каверне при данных числах Рейнольдса характеризуется наличием развитого центрального вихря и нескольких вторичных вихрей в углах каверны. С увеличением числа Рейнольдса происходит интенсификация течения в первичном и вторичных вихрях, которые увеличиваются в размерах. При этом с ростом числа Рейнольдса наблюдается процесс растягивания и дробления вторичных вихрей в нижних углах каверны. Данная тенденция сохраняется и при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса. При приближении числа

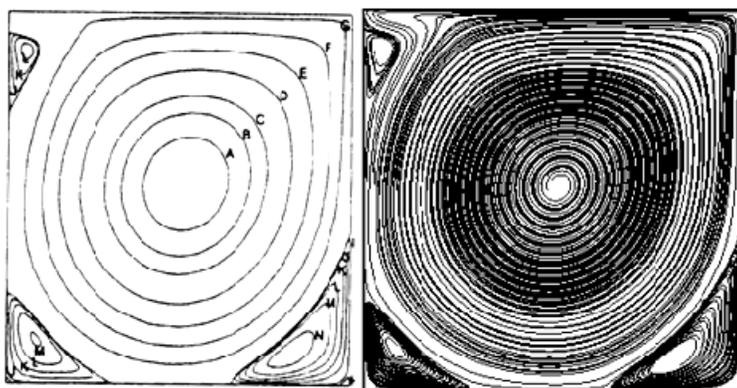


Рис. 1. Линии тока в квадратной каверне для $Re=3200$. Левый рисунок – результаты из работы [9], правый рисунок – результаты, полученные при помощи пакета *SigmaFlow*

Рейнольдса к значению 10 000 течение в плоской каверне становится нестационарным. На рис. 1 для сравнения также приведены результаты расчетов из работы [9]. Видно, что в целом структура течения в обоих расчетах качественно согласуется. Стоит сказать, что линии на правых рисунках не являются в строгом смысле линиями тока, фактически эти линии являются траекториями частиц маркеров, которые для стационарной задачи должны совпадать с линиями тока.

Количественное сопоставление результатов расчетов будем проводить по распределению вертикальной компоненты скорости в центральном горизонтальном сечении каверны. На рис. 2 приведены графики вертикальной компоненты скорости в среднем горизонтальном сечении для значения числа Рейнольдса 3200, полученные при помощи программ FLUENT и SigmaFlow на различных по детализации сетках.

Для сопоставления также приводим данные из работы U.Ghia, K.N.Ghia, and C.T.Shin [10], которые были получены на очень подробной сетке – 257×257 узлов и считаются эталонным решением данной задачи.

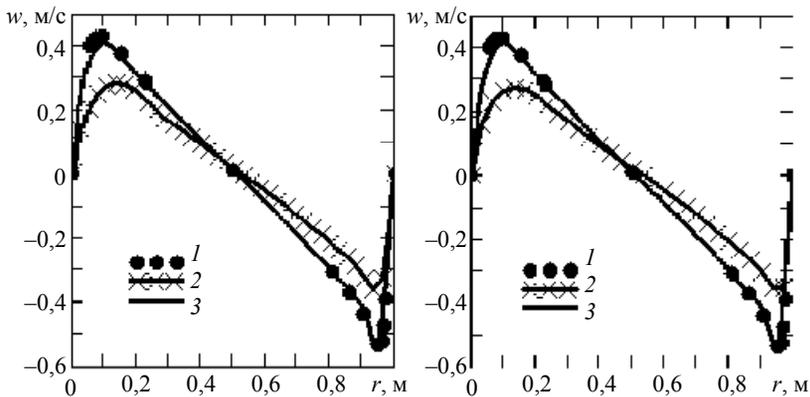


Рис. 2. Вертикальная скорость в центральном горизонтальном сечении каверны $Re = 3200$: 1 – расчет U.Ghia, K.N.Ghia, and C.T.Shin, 2 – сетка 30×30 , 3 – сетка 100×100 (слева – SigmaFlow, справа – FLUENT)

Как видно из графиков, решение, полученное на детальной сетке, для обеих программ хорошо согласуется с эталонным решением U. Ghia, K.N. Ghia и C.T. Shin. Сопоставление решений друг с другом показало, что они практически полностью совпадают. Максимальное отклонение двух решений по форме профиля скорости друг от друга составляет порядка 0,5 % на грубой сетке. На детальной сетке это отклонение уменьшается.

Ламинарное закрученное течение в банке

В следующей задаче рассмотрено ламинарное закрученное течение в закрытом цилиндре с вращающейся верхней крышкой. Закрученное течение с концентрированным вихрем на оси цилиндра образуется путем вращения крышки с угловой скоростью Ω . От крышки вращательное движение за счет сил трения передается жидкости, а разрежение на оси вращения приводит к появлению осевого движения жидкости к центру вращающегося диска и возвратного течения у стенок цилиндра. При определенных режимах возможен распад вихря на оси цилиндра.

В работах Vogel и Escudier [12] было показано, что характер распада вихря зависит от числа Рейнольдса $Re = \Omega R^2/\nu$ и отношения H/R , где H – высота, а R – радиус. В зависимости от этих параметров Escudier [12] была построена карта режимов, дополненная в последующих работах. Доминирующим типом распада является пузырьковый с одним пузырьком. Внутри зоны однопузырькового распада лежит область существования двух пузырей, и в очень узком диапазоне параметров возможно появление трех пузырей. При повышении числа Рейнольдса картина становится неустойчивой, причем, в зависимости от отношения H/R эта неустойчивость проявляется различным образом. При $H/R < 3$ начинаются осесимметричные колебания, а при $H/R > 3,1$ – прецессия вихря вокруг оси.

В данной работе проведены расчеты режима без распада, $H/R = 1$, $Re = 1800$, экспериментальные данные профилей скорости взяты из работы [13] полученные Michelsen;

При моделирование задавались следующие параметры: высота цилиндра $H = 1$ м, его радиус $R = 1$ м, плотность жидкости $\rho = 1$ кг/м³, вязкость зависит от числа Рейнольдса, верхняя крышка вращается со скоростью $\Omega = 1$ рад/с. В результате исследования влияния детализации сетки на сходимость задачи была выбрана трехмерная сетка 580 тысяч узлов.

Картина течения в банке при данных параметрах показана при помощи изолинии модуля скорости в центральном вертикальном сечении банки на рис. 3. Как видно из сравнения изолиний модуля скорости, структура потока, полученная в расчетах при помощи различных пакетов, очень похожа.

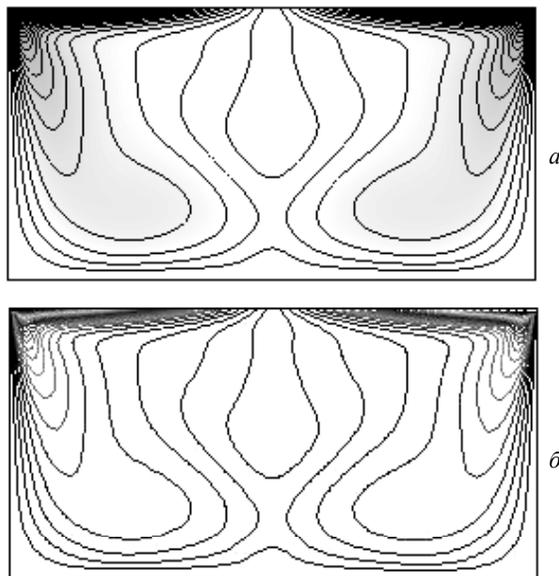


Рис. 3. Изолинии модуля скорости:
а – SigmaFlow; б – FLUENT

Количественное сопоставление численных результатов, полученных на сетке 580 тыс. ячеек, друг с другом и экспериментом [13], показаны на рис. 4, 5.

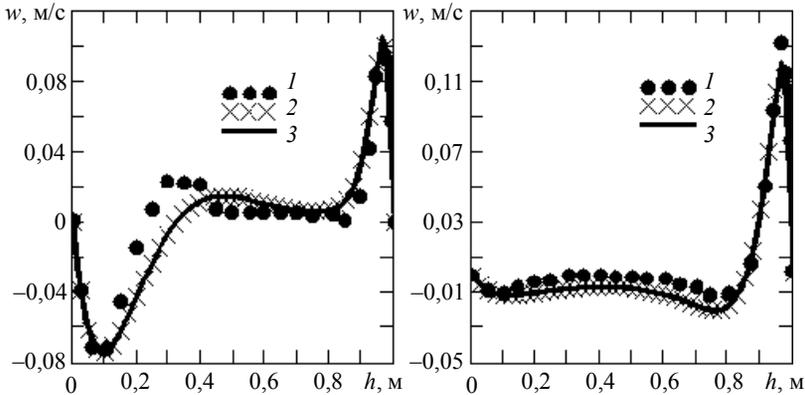


Рис. 4. Распределение радиальной компоненты скорости вдоль вертикальной линии $r = 0.6$ (левый рисунок) и $r = 0.9$ (правый): 1 – эксперимент, 2 – FLUENT, 3 – SigmaFlow

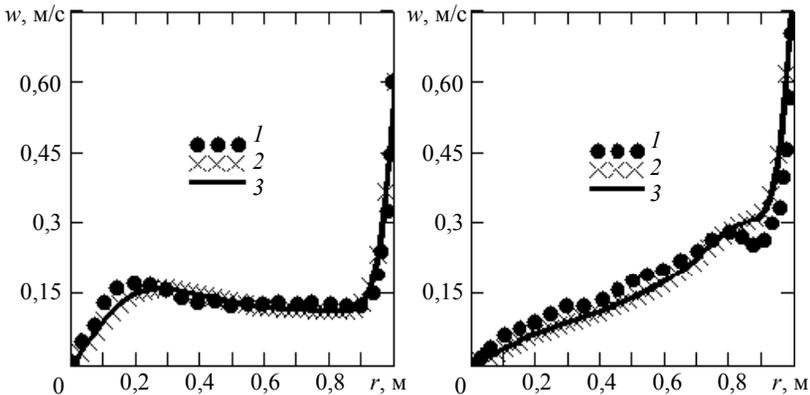


Рис. 5. Распределение тангенциальной компоненты скорости вдоль вертикальной линии $r = 0,6$ (левый рисунок) и $r = 0,9$ (правый): 1 – эксперимент, 2 – FLUENT, 3 – SigmaFlow

Как видно из представленных графиков, результаты расчетов, полученные, при помощи SigmaFlow и FLUENT, практически совпадают друг с другом и хорошо описывают данные эксперимента [13].

Сравнение быстродействия программных комплексов представлено на рис. 6 и в таблице. На рис. 6 приведено сравнение графиков невязки модуля скорости при сходимости задачи к стационарному решению. Количественно сравнение невязок проводить некорректно, потому что в разных программах эти величины нормируются по-разному, но тем не менее видно, что динамика итерационного процесса в обоих пакетах сходная. Кроме того, полная сходимость итерационного процесса для SigmaFlow и FLUENT достигается примерно за одинаковое количество итераций (порядка 2000). В таблице приведено время, за которое для данной задачи выполняется определенное количество итераций. Расчеты проведены на машине Core2 Duo 6600 с частотой 2400 МГц с 2 ГБ оперативной памяти в однопроцессорном режиме. Видно, что решение данной задачи в программе SigmaFlow на 15 % превосходит по скорости счета пакет FLUENT.

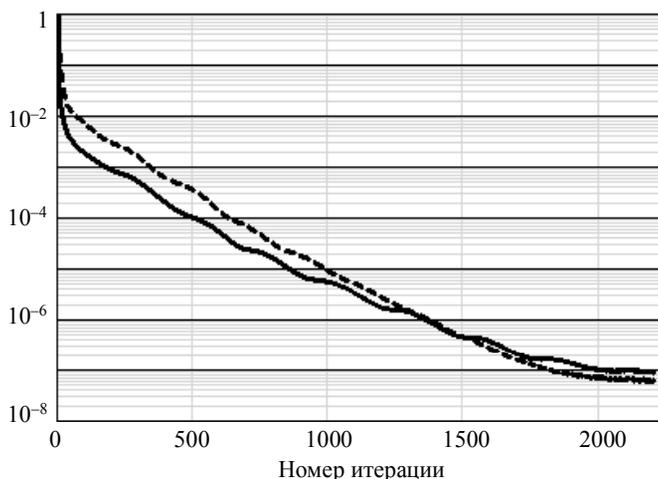


Рис. 6. График сходимости компоненты скорости, сетка 580 тысяч узлов (сплошная – Fluent; пунктир – SigmaFlow)

Сравнение быстродействия программ

Количество итерации	Время, с		
	FLUENT	SigmaFlow	Различие, %
600	4018	3506	15
700	4725	4105	15
800	5462	4700	16
1000	6856	5869	17

Ламинарное течение в изогнутой на 90° градусов трубе круглого сечения

В следующей задаче рассматривается ламинарное течение жидкости в круглой трубе, изогнутой под углом 90°. В гидравлике такие изогнутые каналы принято называть гibaми. Особенностью течений в гibaх является возникновение продольной завихренности, обусловленной центробежными силами, которые генерируют вторичное течение и перераспределение продольной составляющей скорости. Возникающая при этом сложная структура течения идеально подходит для тестирования расчетных алгоритмов. Для рассматриваемой задачи сопоставление расчетных результатов проводилось с данными эксперимента, взятыми из отчета [14].

Геометрия гiba представлена на рис. 7. Длина вертикального участка канала 212 мм. Длина горизонтального участка 480 мм. Средний радиус гiba $R = 134,4$ мм. Диаметр канала всюду одинаков и равен $D = 48$ мм.

На входе в гиб задавался представленный на рис. 7. профиль скорости, взятый из эксперимента. Видно, что данный профиль не является параболическим. Объясняется это тем, что в эксперименте вода на вход в измерительный участок подается из большого бака и профиль скорости «не успевает» установиться. Величина расхода жидкости для данного профиля равна примерно 0,02 кг/с, что соответствует числу Рейнольдса 500 (плотность жидкости 1000 кг/м³, динамическая вязкость 0,001 Па·с). В задаче рассматривается однофазное течение с постоянной плотностью, без учёта силы тяжести.

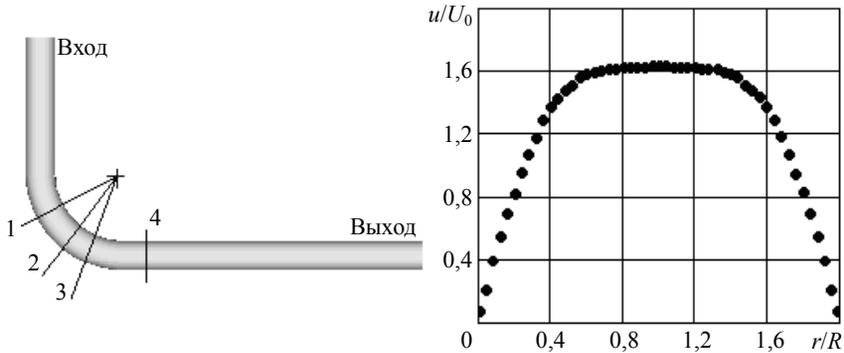


Рис. 7. Геометрия канала со схемой сечений для измерения (1 – 30° , 2 – 60° , 3 – 75° , 4 – $x/D = 1$) и профиль скорости на входе в гиб

На выходе изгиба задавались условия Неймана (равенство нулю производных по нормали к поверхности выхода от всех компонент скорости).

Все приведенные в работе профили скорости обезразмерены на величину среднерасходной скорости $U_0 = 0,0105$ м/с. По оси X на графиках отложено, обезразмеренное на радиус трубы $R = 24$ мм, расстояние между стенками канала. В ходе предварительных тестовых расчетов было показано, что для данной задачи удовлетворяет сетка 430 тысячи узлов.

На рис. 8, 9 приведены результаты численного моделирования и сопоставление их с экспериментальными данными [14].

Как видно из представленных графиков, численные решения, полученные при помощи SigmaFlow и FLUENT, близки к экспериментальным данным и практически полностью совпадают с друг другом. Максимальное отклонение двух решений по форме профиля скорости друг от друга не превышает 0,2 %. Анализ вычислительной производительности показал, что полная сходимость итерационного процесса для обеих программ достигается примерно за одно и то же количество итераций (около 1500), времена счета также близкие (SigmaFlow на 10 % быстрее).

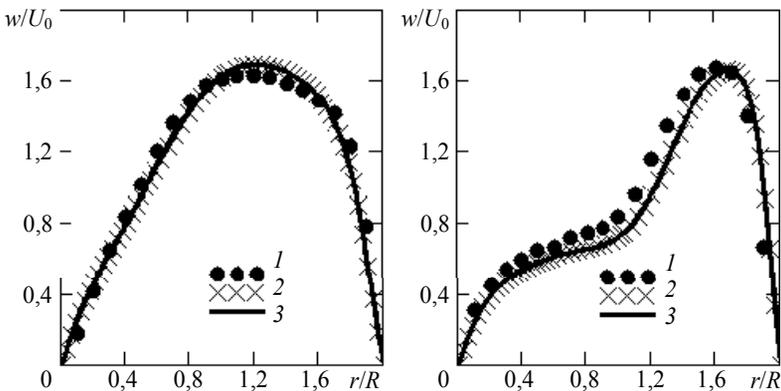


Рис. 8. Профиль модуля скорости в центральном поперечном сечениигиба: 1 – эксперимент, 2 – FLUENT, 3 – SigmaFlow (слева – угол 30° , справа – угол 60°)

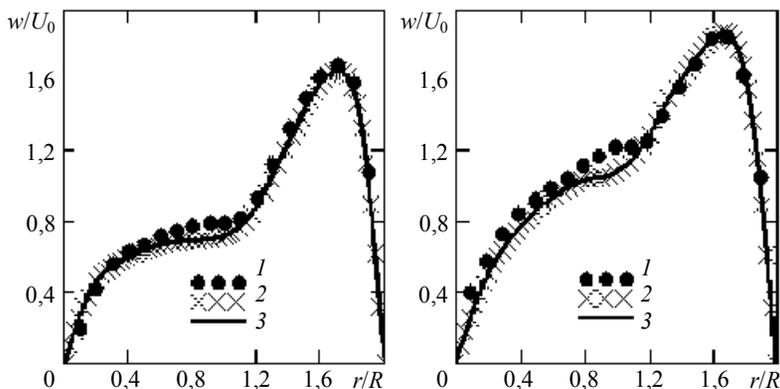


Рис. 9. Профиль модуля скорости в центральном поперечном сечении гйба: 1 – эксперимент, 2 – FLUENT, 3 – SigmaFlow (слева – угол 75° , справа – $x/D = 1$)

Заклучение

Таким образом, в данной работе проведено тестирование прикладных пакетов программ SigmaFlow и FLUENT на ряде классических тестовых ламинарных задачах.

Как видно из результатов сравнения двух программных комплексов, результаты расчётов практически совпадают между собой, можно сказать, что отклонения незначительны и находятся в пределах погрешности методов. Из сравнения результатов быстродействия видно, что специализированный CFD-пакет SigmaFlow считает подобного рода задачи примерно на 10–15 % процентов быстрее, чем универсальный пакет FLUENT.

Вполне удовлетворительное согласие численных прогнозов, полученных на различных сетках и различных программах, с имеющимися экспериментальными данными служит не только достаточным основанием для верификации пакета SigmaFlow, но и в целом повышает доверие к полученной расчетной информации. А также говорит об адекватности разработанных численных методик решений уравнений Навье – Стокса и иллюстрирует приемлемость данных программных продуктов для описания ламинарных течений.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что специализированные программные комплексы, разрабатываемые отдельными научными группами, институтами, заслуживают своего внимания. У них существует ряд преимуществ перед универсальными коммерческими пакетами, это, в первую очередь, гибкость расчётного алгоритма и программного обеспечения, которые могут настраиваться на определённый круг задач по мере необходимости. Как показывают результаты данной работы, специализированные программные комплексы не уступают универсальным пакетам, как в точности, так и в производительности. Также к плюсам можно отнести относительную доступность данных кодов, так как, как правило, подобного рода софт является полукommerческим и может находиться в свободном доступе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов А.А., Минаков А.В., Дектерев А.А., Рудяк В.Я. Численный алгоритм для моделирования ламинарных течений в кольцевом канале с эксцентриситетом // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 13. № 4. С. 3–14.

2. *Minakov A.V., Rudyak V.Ya., Gavrilov A.A., Dekterev A.A.* On optimization of mixing process of liquids in microchannels // *J. Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2010. V. 3(2). P. 146–156.
3. *Рудяк В.Я., Минаков А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А.* Моделирование течений в микромиксерах // *Теплофизика и аэромеханика*. 2010. Т. 17. № 4. С. 601–612.
4. *Patankar S.V.* Numerical heat transfer and fluid flow. Washington, DC, Hemisphere, 1980. P. 180.
5. *Ferziger J.H. and Peric M.* Computational methods for fluid dynamics. Berlin: Springer Verlag, 2002. P. 423.
6. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.* 1979. V. 19. P. 59–98.
7. *Белов И.А.* Моделирование турбулентных течений: учеб. пособие БГТУ. 2001. Вып. 10. С. 107.
8. *Быстров Ю.А.* Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб / Ю.А. Быстров, С.А. Исаев, Н.А. Кудрявцев, А.И. Леонтьев. М.: Судостроение, 2005. С. 389.
9. *Kim S.-W.* A velocity-pressure integrated, mixed interpolation, Galerkin finite element method for high Reynolds number laminar flows / S.-W. Kim // NASA. Report CR-179264. 1988. P. 1988.
10. *Ghia U., Ghia K.N., and Shin C.T.* High-Re solutions for incompressible flow using the Navier – Stokes equations and a multigrid method // *J. Computational Physics*. 1982. V. 48. P. 378–411.
11. *Исаев С.А.* Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб / Ю.А. Быстров, С.А. Исаев, Н.А. Кудрявцев, А.И. Леонтьев. СПб.: Судостроение, 2005. 392 с.
12. *Escudier M.P.* Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall // *Exp. in Fluids*. 1984. V. 2. No. 4. P. 189–196.
13. *Michelsen J.A.* Modeling Incompressible Rotating Fluid Flow, AFM 86-05, Ph.D. Dissertation, Department of Fluid Mechanics, Technical University of Denmark, 1986.
14. *Enayet M.M., Gibson M.M.* Laser Doppler measurements of laminar and turbulent flow in pipe bend // NASA contractor report 3551. 1982.
15. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 840 с.

Статья поступила 09.04.2012 г.

Platonov D.V., Minakov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A., Kharlamov E.B. COMPARATIVE ANALYSIS OF CFD SIGMAFLOW AND FLUENT PACKAGES BY THE EXAMPLE OF SOLVING LAMINAR TEST PROBLEMS. This paper presents a comparative analysis of two software systems for solving computational fluid dynamics: SigmaFlow and Fluent. With the help of the programs, several laminar test problems were solved. The results are compared with each other and with experimental data and calculations of other authors.

Keywords: Computational fluid dynamics, Fluent, SigmaFlow, Navier-Stokes equations, CFD packages, laminar flow.

PLATONOV Dmitriy Viktorovich (Siberian Federal University)

E-mail: platonov-08@yandex.ru

MINAKOV Andrey Viktorovich (Siberian Federal University)

E-mail: tov-andrey@yandex.ru

KHARLAMOV Yegor Borisovich (Heat and mass transfer department of Siberian branch of Russian science academy)

DEKTEREV Aleksandr Anatolievich (Siberian Federal University)

E-mail: dekterev@mail.ru

УДК 534.014

И.П. Попов**КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩИЕ ТОЛЬКО ИЗ ИНЕРТНЫХ ИЛИ ТОЛЬКО УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ, И ВОЗНИКНОВЕНИЕ В НИХ СВОБОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Рассматриваются механические колебательные системы, состоящие только из инертных (mm -, mmm -, m^n -системы) или только упругих элементов (kk -, kkk -, k^n -системы). Показана возможность возникновения в них свободных гармонических колебаний. В mm -, mmm -, m^n -системах происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами, в kk -, kkk -, k^n -системах – взаимный обмен потенциальной энергией между упругими элементами.

Ключевые слова: колебательные, инертные, упругие, гармонические, частота.

Свободные гармонические колебания основаны на обмене энергией между элементами колебательной системы.

В механическом линейном гармоническом осцилляторе происходит обмен энергией между разнородными элементами – грузом массой m (инертным элементом) и пружиной с коэффициентом упругости k (упругим элементом). При этом кинетическая энергия груза преобразуется в потенциальную энергию пружины и наоборот.

Существуют электромеханические колебательные системы [1], в которых свободные гармонические колебания осуществляются за счет взаимного преобразования потенциальной энергии пружины в энергию электрического поля конденсатора или кинетической энергии груза в энергию магнитного поля катушки индуктивности.

Таким образом, свободные гармонические колебания сопровождаются самыми разнообразными вариантами преобразования энергии. В этой связи представляет интерес возможность возникновения свободных гармонических колебаний, осуществляемых за счет преобразования кинетической энергии в кинетическую или потенциальной энергии в потенциальную. Реализующие такие колебания системы должны состоять либо только из инертных (mm -, mmm -, m^n -системы), либо только из упругих элементов (kk -, kkk -, k^n -системы). Механизм обмена энергией между однородными элементами в таких системах позволит, в частности, расширить возможности нейтрализации реакции этих элементов на внешние периодические воздействия.

Как таковая теория колебаний была в основном разработана в 30-х годах 20-го века [2]. Современные источники в части свободных гармонических колебаний преимущественно сохраняют преемственность [3, 4]. В указанных и подобных им источниках колебательные системы с однородными элементами не рассматриваются. В последнее время появляются работы в направлении темы настоящего исследования [5], которое является их развитием.

Синтез mm -системы

Синтез системы осуществляется на основе двух исходных условий.

Первое исходное условие. Система содержит два инертных элемента – два груза массой m каждый. Элементы совершают гармонические колебания

$$x_1 = A \sin(\zeta + \zeta_1), \quad x_2 = A \sin(\zeta + \zeta_2),$$

где x_1, x_2 – текущие координаты грузов, A – амплитуда колебаний, ζ – фаза, ζ_1, ζ_2 – начальные фазы.

Второе исходное условие. Энергия системы при колебаниях не меняется

$$W_1 + W_2 = \text{const.}$$

Одновременный учет обоих исходных условий дает представление о характере связи между инертными элементами. Действительно,

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = \text{const},$$

$$\cos^2(\zeta + \zeta_1) + \cos^2(\zeta + \zeta_2) = \text{const}_2.$$

Последнее справедливо при условиях

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \pm \pi/2.$$

Полученное соотношение позволяет определить связующее звено между инертными элементами. Таким звеном является устройство, изображенное на рис. 1.

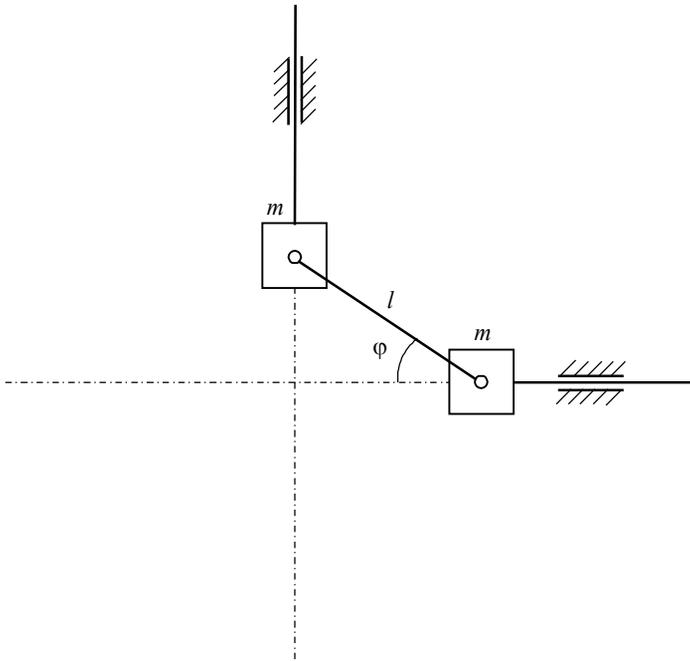


Рис. 1. mm -система

Анализ *тт*-системы

Внешние усилия к грузам не приложены. Масса промежуточного стержня и трение не учитываются. Координаты грузов соответственно

$$x_1 = l \cos \varphi, \quad x_2 = l \cos(\pi/2 - \varphi). \tag{1}$$

В качестве обобщенной координаты удобно использовать φ . Система имеет одну степень свободы и уравнение Лагранжа второго рода для нее записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Обобщенная сила $Q = 0$, поскольку активные силы отсутствуют. Кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = \frac{ml^2}{2} \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{ml^2}{2} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

Решение последнего уравнения

$$d\varphi/dt = C_1, \quad \varphi = C_1 t + C_2. \tag{2}$$

Пусть начальные условия

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0. \tag{3}$$

Тогда

$$C_2 = \varphi_0, \quad C_1 = \omega_0. \tag{4}$$

При этом (1) принимает вид

$$x_1 = l \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad x_2 = l \cos(\pi/2 - \omega_0 t - \varphi_0). \tag{5}$$

Пусть

1) $x_1(0) = x_{10}, \quad \cos \varphi_0 = x_{10}/l, \quad \varphi_0 = \arccos(x_{10}/l) = \arcsin(x_{20}/l);$

2) $\frac{dx_2}{dt}(0) = v_{20}, \quad l\omega_0 \cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = v_{20}, \quad \omega_0 = v_{20}/x_{10} = -v_{10}/x_{20},$

$$\begin{aligned} x_1 &= l \cos[(v_{20}/x_{10})t + \arccos(x_{10}/l)], \\ x_2 &= l \cos[\pi/2 - (-v_{10}/x_{20})t - \arcsin(x_{20}/l)], \\ v_1 &= l(v_{10}/x_{20})\sin[(-v_{10}/x_{20})t + \arcsin(x_{10}/l)], \\ v_2 &= l(v_{20}/x_{10})\cos[(v_{20}/x_{10})t + \arccos(x_{20}/l)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, грузы массой m совершают свободные гармонические колебания (внешние усилия к грузам не приложены).

В рассмотренной колебательной системе происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами. При $\varphi = 0$ кинетическая энергия первого груза равна нулю, а второго – максимальна. После этого первый груз начинает ускоряться за счет энергии второго груза, который приобретает отрицательное ускорение.

Синтез *тлт*-системы

Пусть три координатные оси Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 лежат в одной плоскости Z , последовательно повернуты относительно друг друга на $\pi/3$ и пересекаются в одной точке. Точка пересечения O является началом произвольно направленного вектора \mathbf{R} , принадлежащего Z .

Теорема 1. Координаты x_1 , x_2 , x_3 проекций конца вектора \mathbf{R} на оси Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 являются вершинами равностороннего треугольника, размер которого не зависит от направления \mathbf{R} .

Доказательство. Координаты проекций

$$x_1 = R \cos \varphi, \quad x_2 = R \cos(\pi/3 - \varphi), \quad x_3 = R \cos(2\pi/3 - \varphi). \quad (7)$$

Здесь φ – угол между \mathbf{R} и Ox_1 . По теореме косинусов

$$\begin{aligned} (x_1 x_2)^2 &= R^2 [\cos^2 \varphi + \cos^2(\pi/3 - \varphi) - 2 \cos \varphi \cos(\pi/3 - \varphi) \cos(\pi/3)] = \\ &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - 2 \cos \varphi \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \frac{1}{2} \right] = \\ &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2, \\ (x_1 x_3)^2 &= R^2 [\cos^2 \varphi + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - 2 \cos \varphi \cos(2\pi/3 - \varphi) \cos(2\pi/3)] = \\ &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - 2 \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2, \\ (x_2 x_3)^2 &= R^2 [\cos^2(\pi/3 - \varphi) + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - 2 \cos(\pi/3 - \varphi) \cos(2\pi/3 - \varphi) \cos(\pi/3)] = \\ &= R^2 \left[\left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \frac{1}{2} \right] = \\ &= R^2 \left[\frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Центр треугольника $x_1 x_2 x_3$ совпадает с серединой вектора \mathbf{R} .

Доказательство. Пусть r – середина вектора \mathbf{R} . По теореме косинусов

$$\begin{aligned} (x_1 r)^2 &= R^2 [\cos^2 \varphi + 1/4 - 2 \cos \varphi (1/2) \cos \varphi] = R^2/4, \\ (x_2 r)^2 &= R^2 [\cos^2(\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2 \cos(\pi/3 - \varphi) (1/2) \cos(\pi/3 - \varphi)] = R^2/4, \\ (x_3 r)^2 &= R^2 [\cos^2(2\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2 \cos(2\pi/3 - \varphi) (1/2) \cos(2\pi/3 - \varphi)] = R^2/4. \end{aligned}$$

Точка r равноотстоит от точек x_1 и x_2 , следовательно, она расположена на прямой, перпендикулярной отрезку $x_1 x_2$ и проходящей через его середину. Это же справедливо в отношении отрезка $x_1 x_3$. Таким образом, точка r принадлежит двум высотам треугольника $x_1 x_2 x_3$, следовательно, она лежит на их пересечении, которое для равностороннего треугольника является центром. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 позволяют определить конфигурацию *mmm*-системы, упрощённая схема которой показана на рис. 2.

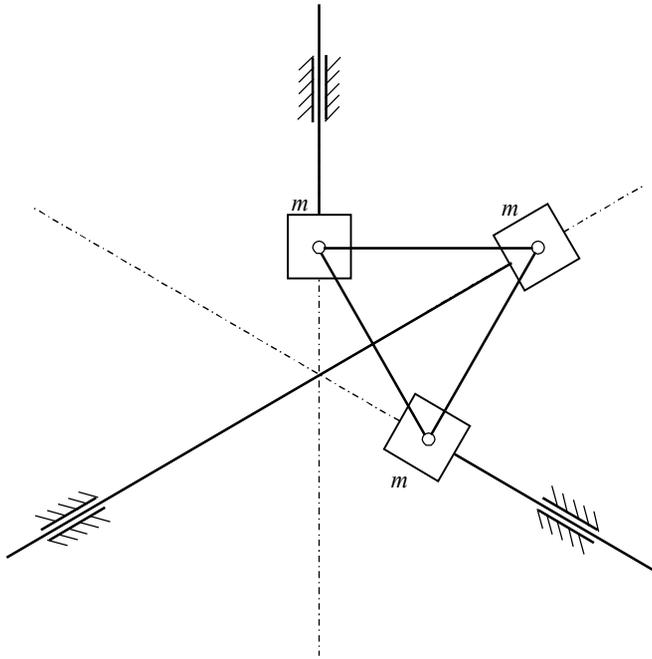


Рис. 2. *mmm*-система

Анализ *mmm*-системы

Внешние усилия к грузам не приложены. Скорости грузов с учетом (7)

$$dx_1/dt = -R\sin\varphi d\varphi/dt, \quad dx_2/dt = R\sin(\pi/3 - \varphi)d\varphi/dt,$$

$$dx_3/dt = R\sin(2\pi/3 - \varphi)d\varphi/dt.$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является постоянство полной, в рассматриваемом случае кинетической энергии системы

$$T = 0,5mR^2[\sin^2\varphi + \sin^2(\pi/3 - \varphi) + \sin^2(2\pi/3 - \varphi)](d\varphi/dt)^2 = 0,75mR^2(d\varphi/dt)^2 = \text{const},$$

$$d\varphi/dt = \text{const}.$$

С учетом (2)–(4) (7) принимает вид

$$x_1 = R\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad x_2 = R\cos(\pi/3 - \omega_0 t - \varphi_0), \quad x_3 = R\cos(2\pi/3 - \omega_0 t - \varphi_0). \quad (8)$$

Пусть $x_1(0) = x_{10}$, $(dx_1/dt)(0) = v_{10}$. Тогда

$$\cos\varphi_0 = x_{10}/R, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}}; \quad (9)$$

$$-R\omega_0 \sin(\omega_0 0 + \varphi_0) = v_{10}, \quad \omega_0 = -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}. \quad (10)$$

Таким образом, все три груза совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою кинетической энергией.

Упругая kk -система

Система отличается от mm -системы тем, что вместо массивных грузов к вертикальному и горизонтальному стержням прикреплены пружины с коэффициентом упругости k , а середина промежуточного стержня связана с началом координат посредством кривошипа. При $\varphi = 0$ первая пружина максимально сжата, вторая – не деформирована. При $\varphi = \pi/2$ первая пружина не деформирована, вторая – максимально сжата. При $\varphi = \pi$ первая пружина максимально растянута, вторая – не деформирована. Поскольку все действующие на систему силы потенциальные, то уравнение Лагранжа второго рода может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad L = T - \Pi.$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = 0,5kx_1^2 + 0,5kx_2^2 = 0,5kl^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 0,5kl^2.$$

Таким образом, уравнение Лагранжа для системы является тождеством. Суммарный момент $M = d\Pi/d\varphi = 0$ при любой скорости вращения кривошипа. При начальных условиях (3) и в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0, \quad \varphi = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + C = \omega_0 t + \varphi_0. \quad (11)$$

При этом (1) приводится к (5) и (6).

Таким образом, пружины с коэффициентом упругости k совершают свободные гармонические колебания.

В рассмотренной колебательной системе происходит взаимный обмен потенциальной энергией между упругими элементами. При $\varphi = 0$ потенциальная энергия первой пружины максимальна, а второй – равна нулю. После этого вторая пружина начинает сжиматься за счет энергии первой пружины, которая начинает разжиматься.

Упругая kkk -система

Система отличается от mmm -системы тем, что грузы заменены пружинами с коэффициентом упругости k . Кроме того, она оснащена кривошипом, связывающим точку пересечения координатных осей с центром треугольника $x_1x_2x_3$. При этом центр треугольника жестко связан с его сторонами. С учетом (7) потенциальная (она же полная) энергия системы

$$\Pi = 0,5kR^2 [\cos^2 \varphi + \cos^2(\pi/3 - \varphi) + \cos^2(2\pi/3 - \varphi)] = 0,75kR^2 = \text{const}.$$

Суммарный момент $M = d\Pi/d\varphi = 0$ при любой скорости вращения кривошипа. При начальных условиях (3) и в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения выполняется (11). При этом (7) приводится к (8)–(10).

Таким образом, все три пружины совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою потенциальной энергией.

Обобщение на n -мерный случай

Пусть n координатных осей Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n , лежат в одной плоскости Z и пересекаются в одной точке. Соседние оси ориентированы под углами π/n относительно друг друга. Точка пересечения O является началом произвольно направленного вектора \mathbf{R} , принадлежащего Z .

Теорема 3. Координаты x_1, x_2, \dots, x_n проекций конца вектора \mathbf{R} на оси Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n являются вершинами правильного n -угольника, размер которого не зависит от направления \mathbf{R} , а центр совпадает с серединой \mathbf{R} .

Доказательство. Координаты проекций

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \varphi, & x_2 &= R \cos(\pi/n - \varphi), & x_3 &= R \cos(2\pi/n - \varphi), \\ x_i &= R \cos[(i-1)\pi/n - \varphi], & x_n &= R \cos[(n-1)\pi/n - \varphi]. \end{aligned} \quad (12)$$

По теореме косинусов

$$\begin{aligned} (x_i x_{i+1})^2 &= R^2 \{ \cos^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + \cos^2(i\pi/n - \varphi) - 2 \cos[(i-1)\pi/n - \varphi] \cos(i\pi/n - \varphi) \cos(\pi/n) \} = \\ &= R^2 \{ \cos^2(i\pi/n - \varphi - \pi/n) + (\cos(i\pi/n) \cos \varphi + \sin(i\pi/n) \sin \varphi)^2 - \\ &\quad - 2 [\cos(\pi/n) (\cos(i\pi/n) \cos \varphi + \sin(i\pi/n) \sin \varphi) + \sin(\pi/n) (\sin(i\pi/n) \cos \varphi - \\ &\quad - \cos(i\pi/n) \sin \varphi)] \times (\cos(i\pi/n) \cos \varphi + \sin(i\pi/n) \sin \varphi) \cos(\pi/n) \} = \\ &= R^2 \{ \cos^2(\pi/n) \cos^2(i\pi/n) \cos^2 \varphi + \cos^2(\pi/n) \sin^2(i\pi/n) \sin^2 \varphi + \sin^2(\pi/n) \sin 2(i\pi/n) \cos^2 \varphi + \\ &\quad + \sin^2(\pi/n) \cos^2(i\pi/n) \sin^2 \varphi + 2 \cos^2(\pi/n) \cos(i\pi/n) \cos \varphi \sin(i\pi/n) \sin \varphi + \\ &\quad + 2 \cos(\pi/n) \cos(i\pi/n) \cos^2 \varphi \sin(\pi/n) \sin(i\pi/n) - 2 \cos(\pi/n) \cos^2(i\pi/n) \cos \varphi \sin(\pi/n) \sin \varphi + \\ &\quad + 2 \cos(\pi/n) \sin^2(i\pi/n) \sin \varphi \sin(\pi/n) \cos \varphi - 2 \cos(\pi/n) \sin(i\pi/n) \sin^2 \varphi \sin(\pi/n) \cos(i\pi/n) - \\ &\quad - 2 \sin^2(\pi/n) \sin(i\pi/n) \cos \varphi \cos(i\pi/n) \sin \varphi + \cos^2(i\pi/n) \cos^2 \varphi + \sin^2(i\pi/n) \sin^2 \varphi + \\ &\quad + 2 \cos(i\pi/n) \cos \varphi \sin(i\pi/n) \sin \varphi - 2 \cos^2(\pi/n) \cos^2(i\pi/n) \cos^2 \varphi - \\ &\quad - 2 \cos^2(\pi/n) \sin(i\pi/n) \sin \varphi \cos(i\pi/n) \cos \varphi - 2 \sin(\pi/n) \sin(i\pi/n) \cos^2 \varphi \cos(i\pi/n) \cos(\pi/n) + \\ &\quad + 2 \sin(\pi/n) \cos^2(i\pi/n) \sin \varphi \cos \varphi \cos(\pi/n) - 2 \cos^2(\pi/n) \cos(i\pi/n) \cos \varphi \sin(i\pi/n) \sin \varphi - \\ &\quad - 2 \cos^2(\pi/n) \sin^2(i\pi/n) \sin^2 \varphi - 2 \sin(\pi/n) \sin^2(i\pi/n) \cos \varphi \sin \varphi \cos(\pi/n) + \\ &\quad + 2 \sin(\pi/n) \cos(i\pi/n) \sin^2 \varphi \sin(i\pi/n) \cos(\pi/n) \} = R^2 \{ \cos^2 \varphi (\sin^2(\pi/n) \sin^2(i\pi/n) - \\ &\quad - \cos^2(\pi/n) \cos^2(i\pi/n) + \cos^2(i\pi/n)) + \sin^2 \varphi (\sin^2(\pi/n) \cos^2(i\pi/n) - \cos^2(\pi/n) \sin^2(i\pi/n) + \\ &\quad + \sin^2(i\pi/n)) \} = R^2 \{ \cos^2 \varphi (\sin^2(\pi/n) \sin^2(i\pi/n) + \cos^2(i\pi/n) \sin^2(\pi/n)) + \\ &\quad + \sin^2 \varphi (\sin^2(\pi/n) \cos^2(i\pi/n) + \sin^2(i\pi/n) \sin^2(\pi/n)) \} = \\ &= R^2 \{ \cos^2 \varphi \sin^2(\pi/n) + \sin^2 \varphi \sin^2(\pi/n) \} = R^2 \sin^2(\pi/n). \end{aligned}$$

Таким образом, все стороны многоугольника равны и не зависят от φ . Пусть r – середина вектора \mathbf{R} . По теореме косинусов

$$(x_i r)^2 = R^2 \{ \cos^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + 1/4 - 2 \cos[(i-1)\pi/n - \varphi] (1/2) \cos[(i-1)\pi/n - \varphi] \} = R^2/4.$$

Все лучи, соединяющие r с вершинами многоугольника, равны между собой. Таким образом, многоугольник правильный. Теорема доказана.

Для инертной системы скорости грузов с учетом (12)

$$dx_1/dt = -R \sin \varphi d\varphi/dt, \quad dx_2/dt = R \sin(\pi/n - \varphi) d\varphi/dt,$$

$$dx_i/dt = R \sin[(i-1)\pi/n - \varphi] d\varphi/dt, \quad dx_n/dt = R \sin[(n-1)\pi/n - \varphi] d\varphi/dt.$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является постоянство полной, в рассматриваемом случае кинетической энергии системы

$$\begin{aligned} T = 0,5mR^2 \{ \sin^2 \varphi + \sin^2(\pi/n - \varphi) + \dots + \sin^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + \dots \\ + \sin^2[(n-1)\pi/n - \varphi] \} (d\varphi/dt)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 4. При $n \geq 2$ справедлива формула

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[\frac{(i-1)2\pi}{n} \pm 2\varphi \right] \right\} = \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \sum_{i=1}^n \cos \frac{(i-1)2\pi}{n} \mp \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{i=1}^n \sin \frac{(i-1)2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Пусть n единичных векторов образуют центрально симметричную звезду таким образом, чтобы один из векторов совпал с осью абсцисс. В силу симметрии сумма векторов равна нулю. Сумма проекций векторов на любую ось тоже равна нулю. Таким образом, две последние суммы равны нулю. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 5. При $n \geq 2$ справедлива формула

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}.$$

Кинетическая энергия инертной системы (13)

$$T = 0,25nmR^2(d\varphi/dt)^2 = \text{const},$$

$$d\varphi/dt = \text{const}$$

С учетом (2) – (4) (12) принимает вид

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad x_2 = R\cos(\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0), \quad x_3 = R\cos(2\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0), \\ x_i &= R\cos[(i-1)\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0], \quad x_n = R\cos[(n-1)\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0]. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом в соответствии с (9), (10)

$$\omega_0 = -\frac{v_{x10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R}. \quad (15)$$

Таким образом, все n грузов совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою кинетической энергией.

Многоугольник $x_1 x_2 \dots x_n$ совершает двойное вращение – вокруг своего центра и вокруг точки O .

В отличие от инертной для упругой системы условием возникновения свободных гармонических колебаний являются постоянство потенциальной (полной) энергии и наличие кривошипа, связывающего точку пересечения координатных осей с центром многоугольника $x_1 x_2 \dots x_n$, который в свою очередь жестко связан с его сторонами.

$$\Pi = 0,5kR^2 \{ \cos^2 \varphi + \cos^2(\pi/n - \varphi) + \dots + \cos^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + \dots + \cos^2[(n-1)\pi/n - \varphi] \}.$$

В соответствии с теоремой 5

$$\Pi = 0,25nkR^2 = \text{const}.$$

Суммарный момент $M = d\Pi/d\varphi = 0$ при любой скорости вращения кривошипа. При начальных условиях (3), в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения и (11), выполняются (14), (15).

Таким образом, все n пружин совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою потенциальной энергией.

Заключение

Установлена возможность возникновения свободных гармонических колебаний в системах, состоящих только из инертных (mm -, mmm -, m^n -системах) или только упругих элементов (kk -, kkk -, k^n -системах), которая реализуется при обеспечении сдвига по фазе между колебаниями элементов.

В отличие от традиционных [2–4] или смешанных [1] колебательных систем при энергообмене между однородными элементами представленных систем вид энергии не меняется. В mm -, mmm -, m^n -системах происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами. В kk -, kkk -, k^n -системах – потенциальной энергией между упругими элементами. При этом суммарная энергия систем при колебаниях не изменяется.

Другим отличием является то, что частоты свободных колебаний систем с однородными элементами не зависят от параметров элементов и определяются исключительно начальными условиями. Иначе говоря, рассмотренные системы могут совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Колебательные свойства mm -, mmm -, m^n -систем могут учитываться при проектировании двигателей внутреннего сгорания, поршневых пневмосистем и прочих преобразователей возвратно-поступательного движения во вращательное в плане взаимной компенсации реактивного характера масс движущихся частей – поршней, штоков и пр.

Принцип обмена энергией между элементами в kk -, kkk -, k^n -системах может использоваться для самонейтрализации квазиупругих воздействий в пневмосистемах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов И.П. Реактивные элементы электрических цепей с «неэлектрическими» параметрами // Вестн. Самарского государственного технического университета. Технические науки. 2010. № 4(27). С. 166–173.
2. Баркгаузен Г. Введение в учение о колебаниях. М.: Госэнергоиздат, 1934. 116 с.
3. Tongue B. Principles of Vibration. Oxford University Press, 2001. 367 p.
4. Thompson W.T. Theory of Vibrations. Nelson Thornes Ltd., 1996. 295 p.
5. Попов И.П. Свободные гармонические колебания в системах с однородными элементами // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 546–549.

Статья поступила 20.03.2012 г.

Popov I.P. VIBRATION SYSTEMS CONSISTING ONLY OF INERT OR ONLY ELASTIC ELEMENTS AND THE APPEARANCE OF FREE HARMONIC VIBRATIONS IN THEM. We consider mechanical vibration systems consisting only of inert (mm -, mmm -, m^n -systems) or only elastic (kk -, kkk -, k^n -systems) components. The possibility of the of free harmonic vibrations appearance in such systems is shown. In the mm -, mmm -, m^n -systems, the mutual exchange of kinetic energy between the inert elements occurs; in kk -, kkk -, k^n -systems, the mutual exchange of the potential energy between elastic elements.

Keywords: vibration, inert, elastic, harmonic, frequency.

POPOV Igor Pavlovich (Kurgan State University)
E-mail: popov_ip@kurganobl.ru, ip.popov@yandex.ru

УДК 539.114

А.К. Томилин, Е.В. Прокопенко

**ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО
СТЕРЖНЯ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

В работе приведена краткая история вопроса о проблеме электромагнитного взаимодействия проводников с током. Показано, что электромагнитная сила, в общем случае имеет две составляющие: поперечную и продольную. Поставлена и решена задача о колебаниях упругого электропроводного стержня с учетом продольной составляющей магнитной силы.

Ключевые слова: *электромагнитное взаимодействие, вихревое магнитное поле, потенциальное магнитное поле, продольная магнитная сила, продольные колебания, упругий электропроводный стержень.*

Современная электродинамика оперирует силами Ампера и Лоренца, которые направлены ортогонально току. Эти силы имеют вихревой характер, поскольку возникают за счет взаимодействия магнитных полей. В теории Максвелла магнитное поле считается сугубо вихревым. Потенциальная компонента магнитного поля исключается при помощи калибровок Кулона и Лоренца. Такой подход игнорирует потенциальную составляющую электромагнитной силы, направленную вдоль тока.

Если обратиться к «Электродинамике» А.М. Ампера [1], то можно найти описание двух экспериментов, в которых проявляется сила, направленная вдоль тока. Современная интерпретация этих экспериментов содержится в монографии [2]. К сожалению, в современных учебниках физики нет ссылок на эти исторические эксперименты. Обычно ограничиваются описанием опытов Ампера с параллельными токами. Причина заключается в том, что при рассмотрении электромагнитного взаимодействия двух непараллельно расположенных проводников с током обнаруживается нарушение третьего закона Ньютона. Эта проблема известна давно. Попытки ее решения в рамках существующих теоретических представлений предприняты в известных учебниках [3 – 5], но их нельзя считать исчерпывающими. Обычно отмечают [3], что постоянные токи по необходимости являются замкнутыми и «нарушение третьей аксиомы Ньютона связано лишь с представлением сил взаимодействия токов как сил попарного взаимодействия их элементов». Действительно, при описании взаимодействия двух замкнутых контуров с токами проблем не возникает. Однако такой подход не исключает возможность рассмотрения отдельного замкнутого контура с током в качестве электромеханической системы. В стационарном случае, когда отсутствует излучение, контур с током можно рассматривать как замкнутую электромеханическую систему. При этом полная энергия (механическая плюс электромагнитная) системы, состоящей из проводников, по которым течет постоянный ток, остается неизменной. Понятно, что в такой изолированной системе для внутренних сил третий закон Ньютона обязательно должен выполняться при попарном взаимодействии любых двух элементов, входящих в ее состав. На этом основании вполне закономерно рассматривать силы взаимодействия между двумя элементами, входящими в состав одного электрического контура.

Ампер стремился учесть две компоненты магнитной силы: ортогональную току, текущему в проводнике, и действующую по току или против него. В качестве закона электромагнитного взаимодействия Ампер предложил формулу (закон Ампера) [1 – 3]:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 \mu J_1 J_2}{4\pi} \left\{ \frac{3}{r_{21}^5} (d\vec{s}_1 \cdot \vec{r}_{21})(d\vec{s}_2 \cdot \vec{r}_{21}) - \frac{2}{r_{21}^3} (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) \right\} \vec{r}_{21} . \quad (1)$$

Из (1) следует, что при взаимодействии двух участков тока $d\vec{s}_1$ и $d\vec{s}_2$, расположенных на одной прямой, возникает сила, действующая на один из проводников в направлении тока, на другой – против тока (рис. 1). Этот результат подтвердил один из упомянутых выше экспериментов Ампера [1, 2].

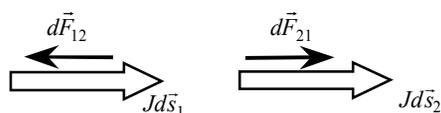


Рис. 1. Взаимодействие участков токов, расположенных на одной прямой

Однако закон (1) имеет недостатки. В частности, из него следует, что элементарные участки тока $d\vec{s}_1$ и $d\vec{s}_2$, расположенные взаимно ортогонально, вообще не должны взаимодействовать между собой, что противоречит другому эксперименту Ампера (весы Ампера) [1,2]. Исходя из третьего закона Ньютона, в этом случае должно быть две силы: одна из них $d\vec{F}_{12}$ ортогональна току, а другая $d\vec{F}_{21}$ направлена по току (рис.2).

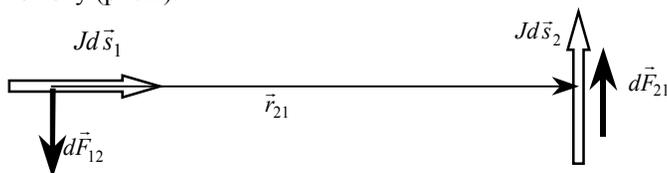


Рис. 2. Взаимодействие участков токов, расположенных ортогонально

Максвелл [6] был приверженцем закона Ампера (1), признавая его в качестве основного. К сожалению, ему не удалось устранить недостатки этого закона, сохранив суть: наличие поперечной и продольной компонент магнитной силы. Во второй половине XIX века возобладал подход, исключающий продольное электромагнитное взаимодействие. При этом отказались и от возможности рассматривать взаимодействие элементов тока, стали принимать во внимание только взаимодействие замкнутых контуров или бесконечных токов. Вопреки исторической правде поперечную магнитную силу стали называть в честь Ампера.

В конце XX столетия Николаев Г.В. [7] предложил вернуться к идее Ампера о продольной электромагнитной силе. Он предложил несколько десятков экспериментов, подтверждающих проявление этой силы. Путем ее введения решается парадокс взаимодействия непараллельных токов (рис. 2). Эта идея получила теоретическое и экспериментальное развитие в работах [2, 8–10].

Для описания механизма возникновения продольной электромагнитной силы требуется использовать дополнительную компоненту магнитного поля, которая обычно исключается в результате применения калибровок Кулона и Лоренца [6]. Николаев Г.В. предложил ввести в рассмотрение так называемое «скалярное магнитное поле» (СМП). Это означает, что дополнительная компонента магнитного поля описывается скалярной функцией H^* (или B^*). Тогда в совокупности с вектором напряженности \vec{H} (или вектором индукции \vec{B}) она образует четырехмерный вектор (\vec{H}, H^*) или (\vec{B}, B^*) .

Одно из дифференциальных уравнений обобщенной теории для квазистационарного случая записывается в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} + \operatorname{grad} H^* = \vec{j}. \quad (2)$$

То есть в общем случае поле токов создает как вихревое (векторное), так и скалярное (потенциальное) магнитное поле.

Условия физического возникновения и свойства СМП подробно описаны в публикациях [2, 7 – 10]. Показано, что поперечная магнитная сила возникает при взаимодействии двух объектов, создающих вихревые (векторные) магнитные поля, а продольная магнитная сила действует на объекты, создающие скалярные (потенциальные) магнитные поля. При рассмотрении электромагнитного взаимодействия для каждого объекта следует различать собственные и внешние поля. В монографии Томилина А.К. [2] обобщенный закон электромагнитного взаимодействия записан в дифференциальной форме:

$$\vec{f} = \operatorname{rot} \vec{H}_c \times \vec{B} + B^* \operatorname{grad} H_c^*, \quad (3)$$

где \vec{f} – объемная плотность магнитной силы, \vec{H}_c – напряженность собственного векторного магнитного поля; \vec{B} – индукция внешнего векторного магнитного поля, H_c^* – напряженность собственного СМП, B^* – индукция внешнего СМП.

На основании (2) и (3) можно сказать, что внешнее векторное магнитное поле воздействует на ту часть тока, которая создает собственное вихревое магнитное поле, а внешнее СМП образует продольную силу при взаимодействии с той частью тока, которая участвует в создании собственного СМП. Заметим, что бесконечно длинный проводник не создает СМП, поэтому при рассмотрении взаимодействия двух длинных параллельных проводников нужен только первый член правой части (3).

Поскольку помимо поперечной силы Ампера обнаружена и продольная электромагнитная сила, возникает возможность управления продольными колебаниями упругих систем. Рассмотрим упругий электропроводный стержень, находящийся полностью во внешнем неоднородном СМП $B^*(z)$ (рис. 3). Пусть продольные колебания в нем могут совершаться вдоль оси z . Рассмотрим случай, когда концы стержня неподвижны, следовательно, длина стержня не изменяется, то есть $L = \text{const}$.

На каждый элемент dz стержня действует продольная магнитная сила

$$dF^* = f^* S \cdot dz, \quad (4)$$

где $f^* = B^* \cdot \operatorname{grad} H_c^*$ – объемная плотность продольной магнитной силы.

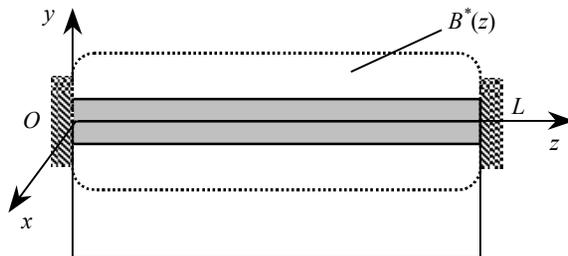


Рис. 3. Стержень с закрепленными концами в СМП

Если стержень является тонким, то модуль продольной силы можно записать в виде

$$dF^* = B^* \cdot S \cdot \frac{dH_c^*}{dz} \cdot dz = B^* \cdot S \cdot dH_c^* . \quad (5)$$

Собственное СМП H_c^* [8] линейного стержня можно рассчитать при помощи формулы

$$dH_c^* = \frac{j}{4\pi} \left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] dz .$$

Следовательно, приближенное выражение для продольной магнитной силы, действующей на стержень, запишется в виде

$$dF^* = B^* S \cdot \frac{j}{4\pi} \left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] dz . \quad (6)$$

С учетом того, что в цепи индуцируется ток плотности

$$j = \frac{\sigma}{L} \int_0^L B^*(z) \frac{\partial U(z,t)}{\partial z} dz , \quad (7)$$

следовательно, имеем

$$dF^* = S^2 \frac{\sigma B^*(z)}{4\pi L} \left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \left(\int_0^L B^*(z) \cdot \frac{\partial U(z,t)}{\partial t} dz \right) dz . \quad (8)$$

Кроме того, учтем диссипативные процессы. Примем силу механического сопротивления пропорциональной первой степени скорости

$$dF_c = \beta \rho S \frac{\partial U}{\partial t} dz , \quad (9)$$

где β – диссипативный коэффициент; ρ – плотность материала стержня; S – площадь сечения стержня.

Составим интегро-дифференциальное уравнение собственных продольных колебаний стержня в неоднородном СМП с учетом этих сил [13]:

$$\rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dz - ES \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dz + \beta \rho S \frac{\partial U}{\partial t} dz - \frac{S^2 \sigma B^*(z)}{4\pi L} \left(\left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \int_0^L B^*(z) \frac{\partial U}{\partial t} dz \right) dz = 0, \quad (10)$$

где E – модуль упругости.

После преобразования (10) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{S\sigma B^*(z)}{4\pi\rho L} \left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \int_0^L B^*(z) \frac{\partial U}{\partial t} dz = 0. \quad (11)$$

Для исследования данного уравнения применим метод Фурье. Представим функцию смещений в виде ряда Фурье по собственным амплитудным функциям:

$$U(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Z_n(z),$$

где $q_n(t)$ – обобщенные координаты, имеющие размерность длины; $Z_n(z)$ – безразмерная величина.

Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[Z_n \ddot{q}_n + \beta Z_n \dot{q}_n - \frac{E}{\rho} q_n \frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \dot{q}_n \frac{S\sigma B^*(z)}{4\pi\rho L} \left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \int_0^L B^*(z) Z_n dz \right] = 0. \quad (12)$$

Для стержня с закрепленными концами собственные амплитудные функции синусоидальны:

$$Z_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Умножим уравнение (12) на Z_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, и проинтегрируем по всей длине стержня. Применив условие ортогональности, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_k + \beta \dot{q}_k + \frac{Ek^2\pi^2}{\rho L^2} q_k - \frac{S\sigma}{2\pi\rho L^2} \int_0^L Z_k B^*(z) \left(\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right) dz \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{q}_n \int_0^L B^*(z) Z_n dz \right) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Введем следующие обозначения:

$$\int_0^L Z_k B^*(z) \left(\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right) dz = \gamma_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

$$\int_0^L B^*(z) Z_n dz = \alpha_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Уравнения (14), с учетом введенных обозначений (15), (16), запишем в следующем виде:

$$\ddot{q}_k + \beta \dot{q}_k + \frac{Ek^2\pi^2}{\rho L^2} q_k - \frac{S\sigma}{2\pi\rho L^2} \cdot \gamma_k \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \cdot \alpha_n = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Исследуем свойства интеграла (15). Чтобы избежать неопределенности с его вычислением, примем такое распределение внешнего СМП, при котором на концах стержня оно обращается в ноль. Пусть, например:

$$B^*(z) \left(\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right) = \text{const}. \quad (18)$$

Построим график зависимости $B^*(z)$ в случае распределения СМП (18) (рис. 4).

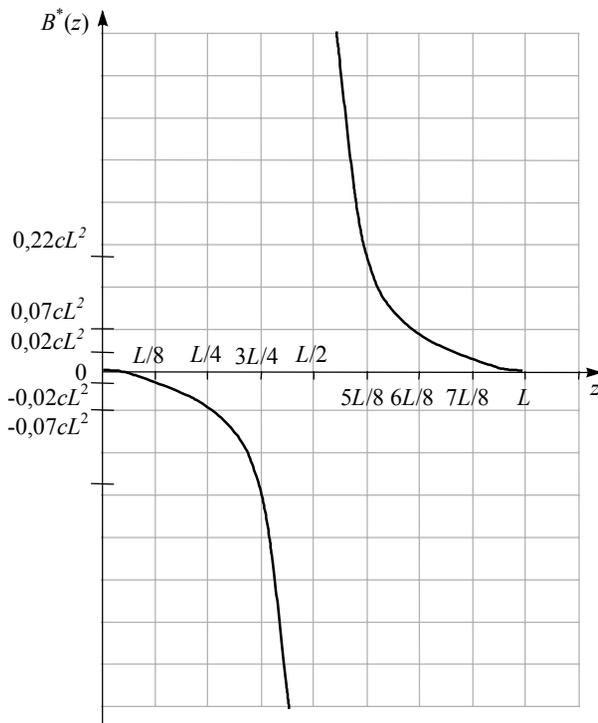


Рис. 4. График зависимости (18)

Из графика (рис. 4) видно, что в середине проводника имеется разрыв. Однако именно в этой точке функция

$$\left(\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right)_{z=\frac{L}{2}} = 0$$

обращается в ноль. Таким образом, при вычислении (23) неопределенность не возникает.

Значения интеграла (15) γ_k определяются выражением $\int_0^L Z_k dz$. Для четных синусоидальных амплитудных функций ($k = 2, 4, 6, \dots$) этот интеграл равен нулю, поэтому при $k = 2, 4, 6, \dots$ и $\gamma_k = 0$. Следовательно, в этом случае четные парциальные колебания электромагнитного воздействия не испытывают, их можно назвать изолированными.

Рассмотрим другой пример:

$$B^*(z) = \lambda(L-z)^2 z^2, \tag{19}$$

где λ – некоторая размерная константа.

Построим график зависимости $B^*(z)$ в этом случае (рис. 5).

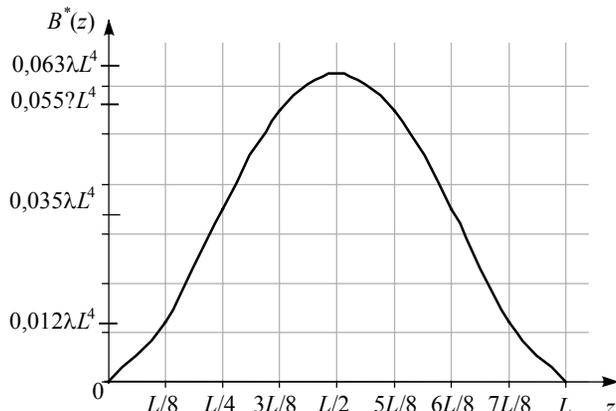


Рис. 5. График зависимости (19)

Из графика (рис. 5) видно, что на границах проводника внешнее СМП $B^*(z)$ равно нулю, а в центре имеет максимальное значение. Вычислим интеграл γ_k с учетом (19):

$$\gamma_k = \int_0^L Z_k B^*(z) \left(\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right) dz = \lambda \int_0^L (2zL - L^2) \sin \frac{k\pi z}{L} dz = -\frac{\lambda L^3}{k\pi} (\cos k\pi + 1). \quad (20)$$

Отсюда следует, что для всех нечетных колебаний интеграл $\gamma_k = 0$ ($k=1,3,5,\dots$), а при четных $k=2,4,6,\dots$

$$\gamma_k = -\frac{2\lambda L^3}{k\pi}, \quad k=2,4,6,\dots$$

Это объясняется симметричным распределением внешнего СМП относительно середины стержня.

Таким образом, задавая закон распределения внешнего СМП $B^*(z)$, можно избирательно воздействовать на определенные парциальные колебания, оставляя другие парциальные колебания изолированными от электромагнитного воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ампер А.М. Электродинамика. М.: АН СССР, 1954.
2. Томилин А.К. Обобщенная электродинамика. Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2009.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
4. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: ВШ, 1976.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.И. Механика. Электродинамика. Краткий курс теоретической физики. Кн. 1. М.: Наука, 1969.
6. Максвелл Дж. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: ГИТТЛ, 1952.
7. Николаев Г.В. Непротиворечивая электродинамика. Теория, эксперименты, парадоксы. Томск, 1997.
8. Томилин А.К. Экспериментальное исследование продольного электромагнитного взаимодействия. <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/9087.html>.
9. Tomilin A.K. The Fundamentals of Generalized Electrodynamics. Physics e-print, July 2008. <http://arxiv.org/pdf/0807.2172>

10. Tomilin A.K. The Potential-Vortex Theory of the Electromagnetic Field. Physics e-print, Aug. 2010. <http://arxiv.org/pdf/1008.3994>
11. Koen J. van Vlaenderen. A generalisation of classical electrodynamics for the prediction of scalar field effects. <http://arxiv.org/abs/physics/0305098v1>.
12. Хворостенко Н.П. Продольные электромагнитные волны // Изв. вузов. Физика. 1992. № 3. С. 24–29.
13. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968.

Статья поступила 06.03.2012 г.

Tomilin A.K., Prokopenko E.V. LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF A RESILIENT ELECTROCONDUCTIVE CORE IN AN INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD. Brief history of the problem about conductors' magnetic interaction is given in this work. Generally, the magnetic field is shown to have two component—swirling and potential ones. The problem of longitudinal oscillations of a resilient electroconductive core in an inhomogeneous magnetic field is stated and solved.

Keywords: electromagnetic interaction, swirling magnetic field, potential magnetic field, longitudinal magnetic force, longitudinal oscillations, resilient electroconductive core.

TOMILIN Alexander Konstantinovich (D. Serikbaev East Kazakhstan State Technical University)
E-mail: aktomilin@gmail.com

PROKOPENKO Yelena Vasilyevna (D. Serikbaev East Kazakhstan State Technical University)
E-mail: aktomilin@gmail.com

МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ**ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ БЕРЦУН****К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ**

В жизни Владимира Николаевича Берцуна было много событий, повлиявших на его судьбу, но самым главным стало поступление в ТГУ на механико-математический факультет в 1962 году. С тех пор минуло 50 лет, и все это время он оставался верным своей Alma Mater.

В.Н. Берцун родился 29 ноября 1942 года в селе Дзержинское Красноярского края в семье служащего. Его отец, Берцун Николай Авксентьевич, работал директором Дзержинского леспромхоза, а мама, Юрласова Валентина Яковлевна, вела домашнее хозяйство. После окончания Дзержинской средней школы в 1960 году Владимир попытался осуществить мечту своей жизни – стать летчиком, но подвело здоровье: он не прошел медицинскую комиссию. Пришлось идти работать в школу лаборантом. В течение года, пока осваивал новую профессию, много думал о своем призвании, о новых интересах.

Во многом на выбор будущей профессии Владимира оказал влияние учитель математики Дзержинской средней школы Бокк Андрей Андреевич своими интересными уроками, рассказами о великих математиках, о значении математики в быстромменяющемся мире.

Во времена юности В.Н. Берцуна единственным университетом за Уралом был Томский госуниверситет. В 1962 году Владимир Николаевич поступил на механико-математический факультет ТГУ. Студенческие годы Владимира совпали с временем творческого подъема на ММФ. На факультете работала большая группа известных в стране ученых, среди которых заслуженные деятели науки РСФСР, профессора З.И. Клементьев, П.П. Куфарев и Р.Н. Щербаков. Огромное влияние

на формирование научных и педагогических интересов В.Н. Берцуна оказал выпускник ФМФ ТГУ академик Николай Николаевич Яненко. В его отделе в Новосибирском академгородке Владимир Николаевич подготовил и защитил на «отлично» свою дипломную работу.

После окончания университета в 1967 году по специальности «Вычислительная математика» В.Н. Берцун как один из лучших выпускников был распределен на кафедру вычислительной математики, где и началась его трудовая деятельность в должности ассистента. Большую помощь и поддержку молодому преподавателю оказала заведующая кафедрой Роза Михайловна Малаховская. Работу преподавателя Владимир Николаевич успешно сочетал с научной работой под руководством тогда доцента Анатолия Михайловича Гришина.

В 1971 году В.Н. Берцун был избран на должность старшего преподавателя. Итоги научных исследований этого периода времени были оформлены в кандидатской диссертации, которую он блестяще защитил в апреле 1979 года после окончания годичной аспирантуры. В июне 1980 года Владимир Николаевич избирается на должность доцента кафедры вычислительной математики. С мая 1981 года становится заведующим кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования и успешно руководит этим коллективом по 2002 год.

В этот период времени идет активная работа над реализацией идеи заведующего кафедрой: улучшением организации учебного процесса, обновлением спецкурсов, внедрением интернет-технологий, активизацией научных исследований и получением грантов различных фондов. При кафедре созданы три дисплейных класса, на базе которых организована учебная лаборатория и Центр компьютерных технологий. За более чем двадцатилетний период времени на посту заведующего кафедрой были заключены творческие союзы с отделами томских НИИ, где сотрудники кафедры вместе со студентами занимались исследованиями по научной тематике отделов.

В апреле 2004 года коллектив механико-математического факультета избрал Владимира Николаевича Берцуна деканом своего факультета.

Несмотря на большую загруженность делами факультета, Владимир Николаевич выполняет большую педагогическую нагрузку: читает лекции и ведет практические занятия по «Методам вычислений» и программированию, им разработаны и читаются спецкурсы по теории разностных схем, вариационным методам, организации больших программ. Курсы лекций по «Методам сплайн-функций», алгоритмическим языкам, теории графов и параллельным вычислительным методам Владимир Николаевич читает не только студентам мехмата, но и слушателям факультета повышения квалификации ТГУ. Лекции доцента Берцуна отличаются глубиной, учет последних достижений в науке, обилие иллюстративного материала и высокое педагогическое мастерство. Владимир Николаевич успешно руководит курсовыми и дипломными работами студентов, имеет аспирантов.

Научные интересы В.Н. Берцуна связаны с вычислительными методами сплайновой интерполяции для решения задач механики сплошной среды. Им опубликовано более 60 научных статей в центральных журналах и в изданиях Томского университета.

Он является автором или соавтором семи учебных пособий, среди которых «Элементы математической технологии», «Итерационно-интерполяционный метод и его приложения», «Задачник по программированию для математиков». Владимир Николаевич – участник Всесоюзных конференций, научных семинаров и конференций ТГУ. С 1993 по 1995 год он являлся членом специализированного

совета K053.53.10 по защите кандидатских диссертаций по специальности 01.02.05. – механика жидкостей, газа и плазмы, а в настоящее время Владимир Николаевич – член совета по информатизации ТГУ.

С 1995 года Владимир Николаевич активно участвует в развитии параллельных вычислительных технологий в ТГУ, является одним из основных организаторов проведения Сибирской конференции по параллельным и высокопроизводительным вычислениям на базе Томского государственного университета (2001–2011 гг.), читает лекции по параллельным вычислениям на факультете повышения квалификации ТГУ, в том числе и для сотрудников и преподавателей иногородних вузов.

За 45 лет работы в университете В.Н. Берцун принимал активное участие в общественной жизни ММФ и ТГУ: был председателем профбюро и секретарем партийной организации факультета, членом избирательной комиссии, заместителем декана ММФ по научной работе.

Труд доцента В.Н. Берцуна отмечен многочисленными грамотами университетского, городского и областного значения: он награжден Почетной грамотой Министерства образования Российской Федерации, Нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Федерация космонавтики России наградила доцента В.Н. Берцуна медалью имени академика М.В. Келдыша за заслуги перед отечественной космонавтикой. Эта медаль – оценка вклада ученого в теоретическое осмысление проблем космоса и самолетостроения. Пусть неявно, но ему все-таки удалось прикоснуться к мечте своей жизни.

Друзья, коллеги и многочисленные ученики поздравляют Владимира Николаевича с юбилеем, желают крепкого здоровья и новых успехов на ниве просвещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *О концентрационном и комбинированном пределах гетерогенного воспламенения // Физика горения и взрыва.* 1973. № 3. С. 404–409. Соавт.: Гришин А.М.
2. *Итерационно-интерполяционный метод и теория сплайнов // Докл. АН СССР.* 1974. Т. 214. № 4. С. 751–754. Соавт.: Гришин А.М.
3. *Анализ диффузионно-тепловой неустойчивости ламинарных пламен // Численные методы механики сплошной среды.* Новосибирск, 1977. Т. 8. № 4. С. 5–19. Соавт.: Агранат В.М., Гришин А.М.
4. *Исследование диффузионно-тепловой неустойчивости ламинарных пламен // Докл. АН СССР.* 1977. Т. 235. № 3. С. 550–553. Соавт.: Гришин А.М., Агранат В.М.
5. *Диффузионно-тепловая неустойчивость ламинарных пламен в трубах // Докл. АН СССР.* 1978. Т. 241. № 4. С. 773–776. Соавт.: Агранат В.М., Гришин А.М.
6. *Термокинетические колебания в распределенных гомогенных системах // Докл. АН СССР.* 1978. Т. 241. № 2. С. 305–308. Соавт.: Головичев В.И., Агранат В.М., Гришин А.М.
7. *Устойчивость режимов теплообмена в лобовой критической точке тела, обтекаемого потоком диссоциированного газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1979. № 5. С. 97–106. Соавт.: Гришин А.М., Агранат В.М.
8. *Итерационно-интерполяционный метод и его приложения.* Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. 160 с. Соавт.: Гришин А.М., Зинченко В.И.
9. *Термохимическое разрушение углеграфитового тела в гиперзвуковом потоке газа // Журнал прикладной механики и технической физики.* 1982. № 2. С. 58–66. Соавт.: Гришин А.М., Исмаилов Н.Г.

10. *Задачник по программированию для математиков: учебное пособие для математических направлений и специальностей университетов* / Том. гос. ун-т; под ред. А.В. Старченко. Изд. 2-е, испр. и доп. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. 331 с.: ил. Соавт.: Гольдин В.Д., Зюзьков В.М., Каминская Е.В., Лаева В.И., Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д., Старченко А.В., Федорова О.П.
11. *Математическое моделирование на графах: учеб. пособие* / Том. гос. ун-т. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. Ч. 1. 85 с.: ил. Библиогр.: с. 76–79. (Сер. Инновационная образовательная программа).
12. Учебно-методический комплекс специализации «Параллельные компьютерные технологии» (010128) / Том. гос. ун-т. Томск, 2008. 107 с. Соавт.: Гольдин В.Д., Лаева В.И., Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д., Старченко А.В., Фазлиев А.З.

*Сотрудники кафедры вычислительной математики
и компьютерного моделирования
Томского государственного университета
А.В. Старченко, М.Д. Михайлов*



КРЫЛОВ ПЕТР АНДРЕЕВИЧ
К 65-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Петр Андреевич Крылов родился 12 марта 1948 г. в селе Глинка Берёзовского района Красноярского края в семье сельских учителей, участников Великой отечественной войны Андрея Степановича Крылова и Веры Петровны Крыловой (в девичестве – Никифоровой). Родители – выходцы из крестьянских семей, потомки переселенцев из европейской части России. Отец учился в Красноярской школе военных техников железнодорожного транспорта. В октябре 1942 г. вместе с несколькими курсантами был послан на Карельский фронт. Два года воевал командиром отделения специального партизанского отряда «Красный онежец». Отряд выполнял различные боевые задачи в тылу врага. В октябре 1944 г. получил тяжелое ранение. После войны в 1947 г. окончил Красноярскую школу военных техников, а в 1953 г. – Ачинский государственный учительский институт. В Глинской семилетней, потом восьмилетней школе преподавал математику, физику, черчение и астрономию. Мать в 1941 г. окончила Ачинское педучилище и начала преподавать в начальных классах. Была на фронте, с 1946 г. продолжила преподавание. В 1948–1951 гг. она – заведующая Глинской начальной школой, преобразованной в 1951 г. в семилетнюю. Постоянно вела начальные классы в Глинской школе. Родители были образованными людьми, выписывали различные газеты и журналы, в том числе «Математика в школе» и «Физика в школе»; они воспитали пятерых детей, и привили им любовь к знаниям. Их старшая дочь Валентина окончила физико-технический факультет ТГУ в 1966 г. У Петра Андреевича было

хорошее деревенское детство с различными играми, катаниями на санках, лыжах и велосипеде, купанием в пруду, походами за травами, ягодами и грибами. После окончания восьмого класса в Глинке Петр Андреевич учился в 9-м классе Березовской средней школы. В 1964 г. семья переехала в село Новопрображенка Тяжинского района Кемеровской области (старое название – село Каменка, родина отца). Родители продолжили свой учительский труд в Новопрображенской восьмилетней школе. В 10–11-х классах Петр Андреевич учился в Новоподзорновской средней школе Тисульского района Кемеровской области. Отец вернулся с войны инвалидом. Петр Андреевич рано начал помогать родителям по хозяйству; с 14 лет косил траву, работал на конных косилке и граблях, позже ставил стога сена. В те времена старшеклассники проходили производственное обучение. В Новоподзорновской школе мальчики изучали сельскохозяйственную технику и получали специальность механизатора. Школе было выделено поле. На этом поле Петр Андреевич работал на тракторах Беларус и ДТ-54. Отец держал пасеку. Надо было помогать, особенно при качке меда. Петр Андреевич сохранил интерес и уважение к нелегкому деревенскому труду.

Петр Андреевич рано увлекся математикой, физикой и другими естественными науками. Участвовал в областной математической олимпиаде в г. Кемерово. После окончания Новоподзорновской средней школы в 1966 г. П.А. Крылов поступил на механико-математический факультет Томского государственного университета, который окончил в 1971 г.

Наукой пытливым студент начал заниматься с младших курсов, сначала посещая студенческие кружки, читая математическую литературу, а затем перейдя к чтению научных статей и доказательству первых собственных результатов. В частности, в то время им были получены необходимые и достаточные условия возможности продолжения частичных автоморфизмов сепарабельных абелевых p -групп. А именно, доказано, что в классе сепарабельных абелевых p -групп всякий изоморфизм между двумя любыми подгруппами группы G , сохраняющий высоты элементов в G , продолжается до автоморфизма самой группы тогда и только тогда, когда G – периодически полная группа с конечными инвариантами Ульма – Капланского. Эта работа была отмечена за лучшую научно-исследовательскую студенческую работу премией имени заслуженного деятеля науки РСФСР П.П. Куфарева и опубликована в журнале «Математические заметки». Понятие периодически полной p -группы ввел Л.Я. Куликов, и эти группы играют фундаментальную роль в теории абелевых p -групп.

Дипломную работу Петр Андреевич писал у известного математика, основателя Томской алгебраической школы по абелевым группам, завоевавшей высокий авторитет в стране и за рубежом – Исаака Хаимовича Беккера. Интенсивные занятия математикой способствовали тому, что в аспирантуру к И.Х. Беккеру молодой математик поступил уже сформировавшимся ученым, имевшим весомые собственные результаты. Петр Андреевич вспоминает, что в воскресенье утром уже после 10 часов невозможно было найти свободное место в читальных залах Научной библиотеки, так велико было стремление студентов к учебе.

В 1975 г. Петр Андреевич блестяще защищает кандидатскую диссертацию «Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения» в Институте математики СО АН СССР и приступает к работе на кафедре алгебры.

В 1991 г. уже маститый и известный ученый также в Институте математики СО РАН защищает докторскую диссертацию «Кольца эндоморфизмов и структурная теория абелевых групп».

После кончины И.Х Беккера в 1997 г. Петр Андреевич занимает должность заведующего кафедрой алгебры, а с 2001 г. также должность заведующего научно-исследовательской лабораторией алгебры и топологии.

Научное творчество Петр Андреевич умело сочетает с педагогической деятельностью. С мастерством читает лекции по общему курсу алгебры и ряду спецкурсов. На спецкурсах он нередко излагает собственные результаты. Несколько лет подряд читал спецкурс «Кольца и модули» для студентов Горно-Алтайского государственного университета. Руководил студенческими кружками по алгебре. Он является одним из авторов сборников задач [1–4], предназначенных для широкого круга читателей от студентов до специалистов, интересующихся алгеброй.

Научные интересы Петра Андреевича относятся к теории колец эндоморфизмов абелевых групп, абелевым группам с большим числом эндоморфизмов (транзитивные и вполне транзитивные группы и др.), группам расширений и гомоморфизмов абелевых групп, а также к ряду вопросов теории колец и модулей.

Исследовательское творчество Петра Андреевича отличает не только глубина разработок математических проблем, но и удивительная широта, которая объясняется его уникальными энциклопедическими знаниями в различных разделах теории абелевых групп, теории колец и модулей и теории категорий.

Большой цикл работ П.А. Крылова относится к исследованию абелевых групп как модулей над своими кольцами эндоморфизмов. В этих работах изучались группы, являющиеся плоскими, проективными, образующими и регулярными модулями над своими кольцами эндоморфизмов. Изучались также абелевы группы и модули с различными кольцевыми свойствами (наследственность, полупервичность, нетеровость), накладываемые на их кольца эндоморфизмов. Исследовалась эндоплоская и эндопроективная размерности смешанных абелевых sp -групп. Получено полное описание эндопроективных и эндообразующих самомалых смешанных sp -групп конечного ранга без кручения. Исследовался вопрос, когда группа автоморфизмов абелевой группы аддитивно порождает ее кольцо эндоморфизмов. Доказан такой интересный факт, что каждый эндоморфизм прямой суммы попарно изоморфных групп может быть представлен в виде суммы четырех ее автоморфизмов.

Отметим, что для произвольных абелевых групп A и B Петром Андреевичем найдены условия инъективности, а также артиновости группы гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ как модуля над кольцом эндоморфизмов группы B или A .

Петром Андреевичем получены глубокие результаты по теории радикалов колец эндоморфизмов абелевых групп. Он перенес результаты Р.П. Пирса о радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов примарной группы на группы без кручения и смешанные sp -группы. Им дана характеристика радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов группы без кручения конечного ранга и вполне разложимой группы без кручения. Полностью выяснено, когда радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов группы без кручения конечного ранга нильпотентен или равен нулю. Исследовались полупрimitивность колец эндоморфизмов и характеристики факторколец колец эндоморфизмов по модулю радикала Джекобсона.

Петр Андреевич распространил понятие И. Капланского вполне транзитивной примарной абелевой группы на случай группы без кручения и получил ряд существенных и важных результатов по этим и близким к ним классам (транзитивные, сильно однородные, квазисервантно инъективные) групп. В частности, получил описание счетных однородных вполне транзитивных групп без кручения и вполне транзитивных групп без кручения, совпадающих со своим псевдоцокелем. Дока-

зал, что любой топологический изоморфизм колец эндоморфизмов двух однородных вполне транзитивных групп без кручения индуцируется изоморфизмом этих групп. Доказал, что квазисервантно инъективная группа без кручения с циклическими p -базисными подгруппами является межпрямой суммой неразложимых квазисервантно инъективных групп, допускающих удовлетворительное описание. Показал, что сильно однородные группы без кручения A обладают интересным свойством групп ранга 1, а именно, всякий элемент прямой суммы произвольного числа экземпляров группы A можно вложить в прямое слагаемое, изоморфное A . Серьезное значение для теории имеют построенные Петром Андреевичем примеры исследуемых групп, к таким относится пример счетной супперразложимой вполне транзитивной группы без кручения с нулевым псевдококом.

Петром Андреевичем изучался вопрос, когда тензорное произведение $A \otimes C$ абелевых групп A и C является нетеровым модулем над кольцом эндоморфизмов группы A . В связи с этим вопросом им получено структурное описание вполне характеристических подгрупп G группы A со свойством $pA \subseteq G \subseteq A_p + pA$, где A_p – p -компонента группы A .

Напомним, что аффинной группой модуля называется полупрямое расширение аддитивной группы модуля с помощью группы его автоморфизмов. Петр Андреевич описал максимальные абелевы нормальные подгруппы аффинной группы и доказал, что операторные изоморфизмы аффинных групп индуцируются изоморфизмами модулей. Он изучал автоморфизмы аффинной группы, не оставляющие модуль на месте, и нашел условия нехарактеристичности модуля в его аффинной группе.

Одновременно с профессором А.А. Фоминым П.А. Крыловым было введено понятие кольца псевдорациональных чисел, что привело к открытию нового направления – теории модулей над этим кольцом, в последнее время активно развивающееся.

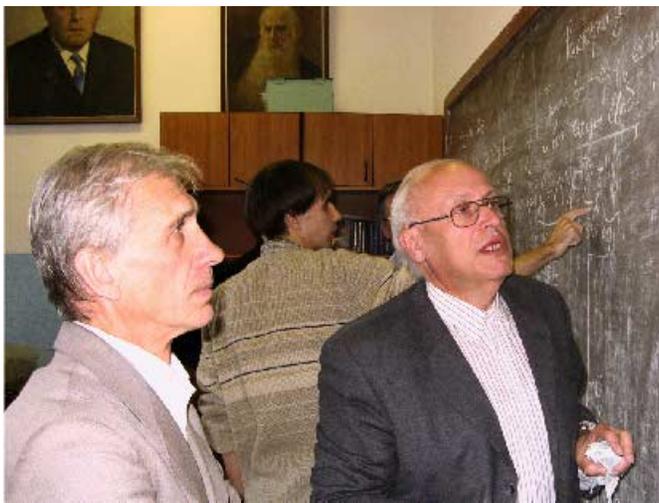
Отметим вклад Петра Андреевича в теорию групп расширений. Им изучены условия, при которых группа расширений не имеет кручения. Он получил ответ для абелевых групп без кручения конечного ранга на задачу 11.51, поставленную А. Мадером в сборнике нерешенных проблем по теории групп, известного под названием Коуровской тетради, а также на проблему 43 из монографии Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы».

В цикле работ Петр Андреевич исследует модули над кольцами обобщенных матриц. Охарактеризованы инъективные, плоские, проективные и наследственные модули над кольцами обобщенных матриц. В ряде случаев вычислена группа Гротендика K_0 кольца обобщенных матриц. Введено понятие (коммутативного) определителя обобщенной матрицы и гомоморфизма Фробениуса между кольцами обобщенных матриц.

В последнее время П.А. Крылов заинтересовался смежными вопросами теории категорий и теории модулей. Вместе с профессором А.А. Туганбаевым им получены различные результаты об идемпотентных функторах и локализациях в категориях модулей и абелевых групп. Установлено, что идемпотентные функторы и, в частности, локализации сохраняют кольцевые и модульные структуры. Введены стандартные идемпотентные функторы и стандартные локализации. С их помощью найдены локализации некоторых модулей и абелевых групп. Ими рассмотрены также стандартные колокализации модулей и двойственность в категории абелевых групп без кручения.

Интенсивные и плодотворные занятия наукой нашли отражения, примерно, в 70 научных статьях, опубликованных в таких журналах, как «Математический сборник», «Успехи математических наук», «Сибирский математический журнал», «Алгебра и логика», «Математические заметки», «Фундаментальная и прикладная математика», «Известия вузов. Математика», «Journal of Mathematical Sciences», в сборнике «Абелевы группы и модули» и др.

Петр Андреевич является также соавтором книг [5–9]. После известной переводной двухтомной монографии американского алгебраиста Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы» (М.: Мир, 1974, 1977) книги [5, 6] являются наиболее полными и подробными энциклопедиями по теории колец эндоморфизмов абелевых групп и близких к ним классов модулей; эти книги, а также книга [7] стали настольными у большинства отечественных алгебраистов, занимающихся абелевыми группами. Кольца эндоморфизмов абелевых групп также рассматриваются в книгах А.Г. Куроша («Теория групп». М.: Наука, 1967), Д. Арнольда («Finite rank torsion-free Abelian groups and rings». Lecture Notes Math. V. 931. 1982), К. Бенабдаллаха («Groupes abéliens sans torsion». Presses de l'Université de Montréal. Montréal, Que. 1981). По своему содержанию книги А.Г. Куроша, Л. Фукса, К. Бенабдаллаха, Д. Арнольда и книги [5–7] во многом дополняют друг друга; в [5–7] представлены все основные направления теории колец эндоморфизмов, изложены как классические результаты, так и последние достижения, и открытые проблемы; читатель подводится к переднему краю исследований. Отметим, что в [7] впервые систематизирован накопленный богатый и содержательный материал о модулях над (не обязательно коммутативными) областями дискретного нормирования. Книги [6, 7] переведены за рубежом, [8] (Нидерланды) и [9] (ФРГ).



На заседании семинара кафедры алгебры ТГУ.
Профессора ТГУ П.А. Крылов, С.Я. Гриншпон
и профессор МГПУ (г. Москва) А.В. Царев

Петр Андреевич постоянно генерирует новые идеи, побуждая своих коллег и учеников к научным исследованиям. Всем сослуживцам Петра Андреевича импонирует его неизменная скромность и деликатность, внимательность и доброжела-

тельность, широкая эрудиция и готовность прийти на помощь. Он щедро делится научной информацией и идеями с учениками и коллегами. Полученные П.А. Крыловым лично, а также возглавляемым им коллективом результаты закрепили томскую алгебраическую школу по абелевым группам на передовых научных позициях¹.



Сотрудники кафедры алгебры с проректором Г.Е. Дунаевским и деканом В.Н. Берцуном

П.А. Крылов искренне считает, что любой ученый формируется в коллективе и своими успехами во многом он обязан той среде, которая его окружает. Поэтому много сил и энергии Петр Андреевич отдает научно-организационной работе по руководству городским алгебраическим семинаром, проработавшим уже более 40 лет, а также работе с 2001 г. в качестве заместителя председателя диссертационного совета Д 212.267.21. П.А. Крылов – руководитель проектов «Локализации модулей и колец, проблемы классификации» и «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями» по Федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы». Исполнители проекта – сотрудники, аспиранты и студенты кафедры алгебры и кафедры теории функций механико-математического факультета ТГУ. П.А. Крылов является экспертом РФФИ по алгебре. Неоднократно был членом оргкомитетов ряда математических конференций, рецензент нескольких математических журналов. Он является членом редакционной коллегии научного журнала «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика».

Семь учеников Петра Андреевича успешно защитили кандидатские диссертации. Интересуется Петр Андреевич и историей математики (см. статьи [10–12] и др.), он также был председателем ГАК по математике в Кемеровском госуниверситете и в ТГПУ.

¹ В статье [Fomin A.A. Abelian groups in Russia // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 2002. V. 32. No. 4. P. 1161–1180] томская алгебраическая школа указана в тройке научных центров России по изучению абелевых групп (два других сосредоточены в Москве и Санкт-Петербурге).

П.А. Крылов вместе с супругой Татьяной Ивановной воспитали троих детей.

За научно-педагогические и организаторские достижения Петр Андреевич награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования РФ», медалью «За заслуги перед г. Томском», медалью «За заслуги перед Томским университетом», грамотой с благодарностью администрации Томской области за большой вклад в развитие науки и высшего образования, дважды награждался премией Томского университета за высокие достижения в науке, он – лауреат премии Томской области в сфере образования, науки, здравоохранения и культуры.

Пожелаем Петру Андреевичу доброго здоровья, творческого долголетия, новых учеников и всяческого благополучия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р.* Задачи по теории колец, модулей и полей. М.: Факториал Пресс, 2007.
2. *Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р.* Упражнения по группам, кольцам и полям. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008.
3. *Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р.* Упражнения по группам, кольцам и полям. М.: ФЛИНТА, 2012.
4. *Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р.* Задачи и упражнения по основам общей алгебры. М.: ФЛИНТА, 2012.
5. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002.
6. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.
7. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Модули над областями дискретного нормирования. М.: Факториал Пресс, 2006.
8. *Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 2003.
9. *Krylov P.A., Tuganbaev A.A.* Modules over Discrete Valuation Domains. Walter de Gruyter. Berlin, 2008.
10. *Александров И.А., Крылов П.А.* Ф.Э. Молин – ученый и педагог // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15). С. 6–11.
11. *Гринишон С.Я., Крылов П.А.* Заметки об истории кафедры алгебры Томского государственного университета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15). С. 127–138.
12. *Крылов П.А., Чехлов А.Р.* О первом заведующем кафедрой алгебры ТГУ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3(19). С. 107–112.

С.Я. Гринишон, А.Р. Чехлов

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АРКАБАЕВ Нуркасым Кылычбекович – старший преподаватель кафедры программирования Ошского государственного университета (Кыргызстан). E-mail: nurkasym@gmail.com

АФАНАСЬЕВА Светлана Ахмед-Рызовна – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: s.a.afanasyeva@mail.ru

БАДЯЕВА Зинаида Петровна – старший преподаватель Кузбасского государственного технического университета. E-mail: leemouse@mail.ru

БЕЛОВ Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: n.n.belov@mail.ru

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ГРИНШПОН Самуил Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

ДЕКТЕРЕВ Александр Анатольевич – кандидат технических наук, заведующий кафедрой теплофизики Сибирского федерального университета. E-mail: dekterev@mail.ru

ДИК Иван Генрихович – доктор технических наук (Dr.-Ing. habil.), приват-доцент университета Эрланген-Нюрнберг (Германия). E-mail: Johann.Dueck@mbt.uni-erlangen.de

ЕРЕМИН Михаил Олегович – аспирант кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: bacardi@sibmail.com

ЛОЖКОВА Юлия Николаевна – аспирантка, инженер кафедры информационных управляющих систем Бийского технологического института (филиал Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова). E-mail: julianna9@qip.ru

МАКАРОВ Павел Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pvm@ispms.ru

МАМЦЕВ Роман Сергеевич – аспирант кафедры металлических и деревянных конструкций Томского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: rmatcev@mail.ru

МИНАКОВ Андрей Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теплофизики Сибирского федерального университета. E-mail: tov-andrey@yandex.ru

МИНЬКОВ Леонид Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

МИХАЙЛОВ Михаил Дмитриевич – старший преподаватель кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: michel@math.tsu.ru

ПЕСТОВ Герман Гаврилович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: gpestov@mail.ru

ПИКУШЧАК Елизавета Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pikushchak@ftf.tsu.ru

ПЛАТОНОВ Дмитрий Викторович – аспирант кафедры теплофизики Сибирского федерального университета. E-mail: platonov-08@yandex.ru

ПОПОВ Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры технологии машиностроения, металлорежущих станков и инструментов Курганского государственного университета. E-mail: popov_ip@kurganobl.ru, ip.popov@yandex.ru

ПРОКОПЕНКО Елена Васильевна – преподаватель кафедры общинженерных дисциплин Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева. E-mail: aktomilin@gmail.com

СОПУЕВ Адахимжан – доктор физико-математических наук, профессор кафедры Программирования Ошского государственного университета (Кыргызстан). E-mail: sopushev@rambler.ru

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: starch@math.tsu.ru

ТЕЙМУРОВ Рафиг Агаджан оглы – научный сотрудник Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана. E-mail: rafiqt@mail.ru

ТОМИЛИН Александр Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, академик КазНАЕН, директор департамента СМК Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева. E-mail: aktomilin@gmail.com

ТУРСУНОВ Дилмурат Абдиллажанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и геометрии Ошского государственного университета (Кыргызстан), стажер кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: dosh2012@mail.ru

ФЕДОСОВ Олег Юрьевич – кандидат технических наук, старший офицер ВЧ 21055. E-mail: olefed78@mail.ru

ФОМИНА Елена Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике Томского государственного педагогического университета. E-mail: ef254@mail.ru

ХАРЛАМОВ Егор Борисович – ведущий инженер Института теплофизики Сибирского отделения Российской академии наук.

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

ЮГОВ Алексей Александрович – кандидат технических наук, докторант кафедры металлических и деревянных конструкций Томского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: yugalex@sibmail.com

ЮГОВ Николай Тихонович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: n.t.yugov@mail.ru