ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 42

УДК 004.10:519.872
DOI: 10.17223/19988605/42/7

М.А. Маталыцкий, Д.Я. Копать

АНАЛИЗ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ СЕТИ С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Проведено исследование в переходном режиме открытой сети, в которую поступают простейшие потоки положительных и отрицательных заявок различных типов. Обслуживания требуют только положительных заявки. Время пребывания в очереди СМО для положительных и отрицательных заявок ограничено случайными величинами, имеющими экспоненциальное распределение с параметрами, различными для каждого типа заявок. Отрицательная заявка определенного типа, время ожидания в СМО которой закончилось, уменьшает количество положительных заявок такого же типа в СМО на единицу, если такие заявки в ней есть. Для нахождения нестационарных вероятностей состояний сети предложен модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов.

Ключевые слова: G-сеть; положительные и отрицательные заявки различных типов; модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов.

Рассмотрим открытую G-сеть массового обслуживания [1] с n однолинейными системами массового обслуживания (СМО), в которую поступают положительные и отрицательные заявки r типов. В i-ю СМО из внешней среды поступает простейший поток обычных заявок (положительных) с интенсивностью λ^+ и дополнительный поток отрицательных заявок, который также является простейшим, с интенсивностью λ^-, $i=\overline{1,n}$. Все поступающие потоки независимы. Каждая положительная заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i-ю СМО как заявка типа c с вероятностью p_{0ic}^+, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{c=1}^{r} p_{0ic}^+ = 1$. Длительности обслуживания положительных заявок в i-й СМО c-го типа распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_{ic}.

В сети циркулируют не только положительные заявки, но и отрицательные [2]. Каждая отрицательная заявка входного потока независимо от других отрицательных заявок направляется в i-ю СМО как отрицательная заявка типа c с вероятностью p_{0ic}^-, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{c=1}^{r} p_{0ic}^- = 1$ и через случайное время уничтожает одну положительную заявку типа c. После окончания обслуживания положительной заявки типа c в i-й СМО она направляется в j-ю СМО с вероятностью p_{icjs}^+ опять как положительная заявка типа s, а с вероятностью p_{icjs}^- – как отрицательная заявка типа s, и с вероятностью $p_{ic0} = 1 - \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{c=1}^{r}\left(p_{icjs}^+ + p_{icjs}^-\right)$ уходит из сети, $i, j=\overline{1,n}$, $c, s=\overline{1,r}$.

Каждая положительная заявка типа c, находящаяся в системе, имеет время ожидания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной (СВ) с параметром θ_{ic}. Отрицательная заявка, находящаяся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\mu_{ic}^-, i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$. Положительная заявка типа c, время ожидания которой в очереди i истекло, мгновенно переходит в j-ю СМО и становится положительной заявкой типа s с вероятностью q_{icjs}^+ или отрицательной заявкой типа s с вероятностью q_{icjs}^-, а с вероятностью $q_{ic0} = 1 - \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{c=1}^{r}\left(q_{icjs}^+ + q_{icjs}^-\right)$ уходит из сети, $i, j=\overline{1,n}$, $c, s=\overline{1,r}$.

Такую сеть можно применить при моделировании реальных сетей связи, в которых при передаче запроса (положительной заявки) в систему связи часто устанавливается так называемый тайм-аут, истечение которого означает, что передача запроса не укладывается в планируемый интервал времени, после чего данный запрос удаляется из очереди. Отрицательные заявки при этом могут описывать вирусы в системе, которые начинают действовать через случайное время.

Под состоянием сети будем понимать вектор

$$(\vec{k},\vec{l},t)=(k_{11},k_{12},\dots,k_{1r},k_{21},k_{22},\dots,k_{2r},\dots,k_{n1},k_{n2},\dots,k_{nr},l_{11},l_{12},\dots,l_{1r},l_{21},l_{22},\dots,l_{2r},\dots,l_{n1},l_{n2},\dots,l_{nr},t),$$

который образует цепь Маркова с непрерывным временем и счетным числом состояний, здесь k_{ic} и l_{ic} соответственно число положительных и отрицательных заявок типа c в i-й СМО в момент времени t, $i=\overline{1,n},\ c=\overline{1,r}$. Требуется найти вероятности состояний сети в переходном режиме.

Следует отметить, что выражения для таких вероятностей состояний в стационарном режиме в форме произведения, когда под состоянием сети понимается вектор типов заявок, были найдены в работах [1–3]. При этом предполагается, что отрицательные заявки фиксированного типа воздействуют только на положительные заявки того же типа. В работе [4] рассматривалась марковская сеть со случайным временем пребывания в очередях различных типов положительных, отрицательных заявок и сигналов, причем очереди в СМО сеть отдельно формировались для этих типов заявок и сигналов. Под состоянием сети понимался вектор числа заявок; также найдено стационарное распределение вероятностей сети в форме произведения.

Для нахождения вероятностей состояний G-сети в переходном (нестационарном) режиме ранее применялся приближенный метод, основанный на использовании аппарата многомерных производящих функций [5], при предположении, что СМО сети функционируют в условиях высокой нагрузки. В данной работе это предположение снято.

1. Система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний сети

Пусть I_{ic} – нулевой вектор размерности $n\times r$, за исключением компоненты с номером $r(i-1)+c$, которая равна единице, I_{00} – $n\times r$ вектор, состоящий из нулей, $P(\vec{k},\vec{l},t)$ – вероятность состояния $(\vec{k},\vec{l},t)$, $u(x)$ – единичная функция Хевисайда.

Возможны следующие переходы нашей цепи Маркова процесса в состояние $(\vec{k},\vec{l},t+\Delta t)$ за время Δt:

1) из состояния $(\vec{k}-I_{js},\vec{l},t)$, в этом случае в j-ю СМО за время Δt поступит положительная заявка типа s с вероятностью $\lambda^{+}_{0js}u(k_{js})\Delta t+o(\Delta t)$, $j=\overline{1,n},\ \ s=\overline{1,r}$;

2) из состояния $(\vec{k},\vec{l}-I_{js},t)$, при этом в j-ю СМО за время Δt поступит отрицательная заявка типа s с вероятностью $\lambda^{-}_{0ic}u(l_{ic})\Delta t+o(\Delta t)$, $j=\overline{1,n},\ \ s=\overline{1,r}$;

3) из состояния $(\vec{k}+I_{ic},\vec{l},t)$, в этом случае за время Δt положительная заявка типа c после обслуживания или по истечении времени ожидания в i-й СМО уходит из сети во внешнюю среду; суммарная вероятность таких событий равна $(\mu_{ic}p_{ic0}+\theta_{ic}q_{ic0})\Delta t+o\ (\Delta t)$, $i=\overline{1,n},\ \ c=\overline{1,r}$;

4) из состояния $(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{ic},t)$, в данном случае в i-ю СМО после истечения времени ожидания в ней отрицательной заявки типа c она уничтожает в этой СМО положительную заявку своего типа, вероятность такого события равна $\mu^{-}_{ic}\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n},\ \ c=\overline{1,r}$;

5) из состояния $(\vec{k},\vec{l}+I_{ic},t)$, при этом в i-й СМО время ожидания отрицательной заявки типа c в i-й СМО закончилось, и в момент времени t в ней не было положительных заявок; вероятность такого события равна $\mu^{-}_{ic}(1-u(k_{ic}))\Delta\ t+o\ (\Delta t)$, $i=\overline{1,n},\ \ c=\overline{1,r}$;

6) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},t\right)$, в данном случае время обслуживания или ожидания положительной заявки типа c в i-й СМО закончилось, и она направляется в j-ю СМО снова как положительная заявка типа s с вероятностью $\left(\mu_{ic}p^{+}_{icjs}+\theta_{ic}q^{+}_{icjs}\right)u\left(k_{js}\right)\Delta t+o(\Delta t)$, $i,j=\overline{1,n},\ \ c,s=\overline{1,r}$;

7) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},t\right)$, при этом время обслуживания или ожидания положительной заявки типа c в i-й СМО закончилось и она направляется в j-ю СМО как отрицательная заявка типа c; вероятность такого события равна $\left(\mu_{ic}p^{-}_{icjs}+\theta_{ic}q^{-}_{icjs}\right)u\left(l_{js}\right)\Delta t+o\ (\Delta t)$, $i,j=\overline{1,n},c,s=\overline{1,r}$;

8) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$, в этом случае за промежуток времени Δt состояние сети не изменилось, при этом в каждую СМО не поступает ни положительные ни отрицательные заявки любого типа, в них за время Δt не обслужилось, ни ушло из очереди ни одной отрицательной заявки любого типа; вероятность такого события равна $1-\left(\lambda^{+}+\lambda^{-}+\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_{ic}+\theta_{ic}\ \ +\mu^{-}_{ic}\right]\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$;

9) из остальных состояний с вероятностью $o(\Delta t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности, получаем, что нестационарные вероятности состояний рассматриваемой сети удовлетворяют следующей системе разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\frac{dP\left(\vec{k},\vec{l},t\right)}{dt}=-\left(\lambda^{+}+\lambda^{-}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\left(\mu_{ic}+\theta_{ic}\right)\ \ +\mu^{-}_{ic}\right]\right)P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\lambda^{+}p^{+}_{0js}u\left(k_{js}\right)P\left(\vec{k}-I_{js},\vec{l},t\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-}p^{-}_{0js}u\left(l_{js}\right)P\left(\vec{k},\vec{l}-I_{js},t\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{n}\left(\mu_{ic}p_{ic0}+\theta_{ic}q_{ic0}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l},t\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\mu^{-}_{ic}P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{ic},t\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\mu^{-}_{ic}\left(1-u\left(k_{ic}\right)\right)P\left(\vec{k},\vec{l}+I_{ic},t\right)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(\mu_{ic}p^{+}_{icjs}+\theta_{ic}q^{+}_{icjs}\right)u\left(k_{js}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},t\right)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(\mu_{ic}p^{-}_{icjs}+\theta_{ic}q^{-}_{icjs}\right)u\left(l_{js}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},t\right). \qquad (1)$$

2. Нахождение вероятностей состояний G-сети методом последовательных приближений

Систему РДУ (1) можно представить в виде:

$$\frac{dP\left(\vec{k},\vec{l},t\right)}{dt}=-\Lambda\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi^{+-}_{icjs}\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},t\right)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi^{++(1)}_{icjs}\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},t\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi^{-}_{icjs}\left(\vec{k},\vec{l}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},t\right), \qquad (2)$$

где

$$\Lambda\left(\vec{k}\right)=\lambda^{+}+\lambda^{-}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\left(\mu_{ic}+\theta_{ic}\right)\mathrm{u}\left(\mathrm{k}_{ic}\right)\ \ +\mu^{-}_{ic}u\left(l_{ic}\right)\right],$$

$$\Phi^{+-}_{icjs}\left(\vec{k}\right)=\delta_{0i}\delta_{0c}\lambda^{+}p^{+}_{0js}+\delta_{0j}\delta_{0s}\left(\mu_{ic}p_{ic0}+\theta_{ic}q_{ic0}\right)+\left(\mu_{ic}p^{+}_{icjs}+\theta_{ic}q^{+}_{icjs}\right)u\left(k_{js}\right),$$

$$\Phi^{-}_{icjs}\left(\vec{k},\vec{l}\right)=\delta_{0\mathrm{i}}\delta_{0\mathrm{c}}\lambda^{-}p^{-}_{0js}u\left(l_{js}\right)+\left(\mu_{ic}p^{-}_{icjs}+\theta_{ic}q^{-}_{icjs}\right)u\left(l_{js}\right),$$

$$\Phi^{-}_{icjs}\left(\vec{k}\right)=\mu^{-}_{\mathrm{ic}}\delta_{0\mathrm{j}}\delta_{0\mathrm{s}}+\left(1-u\left(k_{ic}\right)\right)\mu^{-}_{ic}\left(1-\delta_{ij}\right)\left(1-\delta_{cs}\right),\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

Из (2) следует, что

$$P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}\left(P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\int\limits_0^t e^{\Lambda\left(\vec{k}\right)x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},x\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{ic}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{ic},x\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},x\right)\right)dx\right). \qquad (3)$$

Пусть $P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$ – приближение $P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$ на q-й итерации, $P_{q+1}\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$ – решение системы (2) , полученное методом последовательных приближений. Тогда из (3) вытекает, что

$$P_{q+1}\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}\left(P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\int\limits_0^t e^{\Lambda\left(\vec{k}\right)x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)P_q\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},x\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{ic}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)P_q\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},x\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)P_q\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},x\right)\right)dx\right). \qquad (4)$$

В качестве начального приближения возьмем стационарное распределение

$$P_0\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=P\left(\vec{k},\vec{l}\right)=\lim_{t\to\infty}P\left(\vec{k},\vec{l},t\right),$$

которое удовлетворяет соотношению

$$\Lambda\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k},\vec{l}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)P_q\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)P_q\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)P_q\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js}\right).$$

Для последовательных приближений справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Последовательность $\left\{P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\right\}$, $q=0,1,2,\ldots$, построенная по схеме (4), при любом ограниченном по t нулевом приближении $P_0\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$, $0\le P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\le 1$ сходится при $m\to\infty$ к единственному решению системы (2).

Доказательство. Так как $P_0\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$ – ограниченная по t функция, то в силу (4) $P_1\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$ также ограничена, поэтому

$$\left|P_1\left(\vec{k},\vec{l},t\right)-P_0\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\right|\le C\left(\vec{k},\vec{l}\right). \qquad (5)$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\left|P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)-P_{q-1}\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\right|\le C^*\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*+\alpha_3^*\right)^{q-1}\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}, \qquad (6)$$

где

$$\max_{\vec{k}}\alpha_1\left(\vec{k}\right)=\alpha_1^*,\ \max_{\vec{k}}\alpha_2\left(\vec{k}\right)=\alpha_2^*,\ \max_{\vec{l}}\alpha_3\left(\vec{k},\vec{l}\right)=\alpha_3^*,$$

$$\alpha_1\left(\vec{k}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right),\alpha_2\left(\vec{k}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right),\alpha_3\left(\vec{k},\vec{l}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\varPhi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)$$

$$\max_{\vec{k},\vec{l}}C\left(\vec{k},\vec{l}\right)=C^*. \qquad (7)$$

При q = 1 согласно (5) это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется при $q = N$, и покажем его справедливость при $q = N + 1$. Имеем:

$$\left|P_{N+1}\left(\vec{k},\vec{l},t\right)-P_N\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\right|=\left|e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}\left(P_N\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\int\limits_0^t e^{\Lambda\left(\vec{k}\right)x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)P_N\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},x\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)P_N\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},x\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)P_N\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},x\right)\right)dx\right)-$$

$$-e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left(P_{N-1}(\vec{k},\vec{l},0)+\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P_{N-1}(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},x)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k})P_{N-1}(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},x)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{js}^{-}(\vec{k},\vec{l})P_{N-1}(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},x)\right)dx\right|\le$$

$$\le\left|e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left(\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})\left|P_N(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},x)-P_{N-1}(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},x)\right|+\right.\right.\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k})\left|P_N(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},x)-P_{N-1}(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},x)\right|+$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}(\vec{k},\vec{l})\left|P_N(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},x)-P_{N-1}(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},x)\right|\right)dx\right)\right|\le$$

$$\le\left|e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left(\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}\left(\alpha_1^*C^*\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*+\alpha_3^*\right)^{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\alpha_2^*C^*\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*+\alpha_3^*\right)^{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\le\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\alpha_3^*C^*\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*+\alpha_3^*\right)^{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\right)\right|\le\left|e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left(\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}C^*\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*+\alpha_3^*\right)^{N}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}dx\right)\right|.$$

Поскольку $e^{-\Lambda(\vec{k})t}e^{-\Lambda(\vec{k})x}\le 1$ при $x\in[0,t]$, то

$$e^{-\Lambda(\vec{k})t}\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}dx\le\int_0^t\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}dx=\frac{t^N}{N!}\tag{8}$$

и из (8) следует, что неравенство (6) имеет место.

Так как $\lim\limits_{q\to\infty}P_q(\vec{k},\vec{l},t)=\lim\limits_{q\to\infty}\left(P_0(\vec{k},\vec{l},t)+\sum_{n=0}^{m-1}\left(P_{q+1}(\vec{k},\vec{l},t)-P_q(\vec{k},\vec{l},t)\right)\right)=P_0(\vec{k},\vec{l},t)+\sum_{q=0}^{\infty}\left(P_{q+1}(\vec{k},\vec{l},t)-P_q(\vec{k},\vec{l},t)\right)\le$

$\le P_0(\vec{k},\vec{l},t)+C^*\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha_1^*t+\alpha_2^*t+\alpha_3^*t\right)^q}{q!}=P_0(\vec{k},\vec{l},t)+C^*e^{\alpha_1^*t+\alpha_2^*t+\alpha_3^*t}$, т.е. предел последовательности $\{P_q(\vec{k},\vec{l},t)\}$, $q=0,1,2,...,$ существует, обозначим его $P_\infty(\vec{k},\vec{l},t)$. Если подставить $P_\infty(\vec{k},\vec{l},t)$ в (3) вместо $P(\vec{k},\vec{l},t)$, то видно, что $P_\infty(\vec{k},\vec{l},t)$ является решением системы уравнений (2), удовлетворяющим начальным условиям $P_\infty(\vec{k},\vec{l},0)=P(\vec{k},\vec{l},0)$ согласно условиям предыдущей теоремы.

Докажем единственность решения. Предположим, что существует другое решение $P^*(\vec{k},\vec{l},t)$, тогда для него справедливо (3), если заменить в нем $P(\vec{k},\vec{l},t)$, $P(\vec{k},\vec{l},0)$, $P(\vec{k}+I_{ic}-I_{jc},\vec{l},t)$, $P(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{jc,},t)$ соответственно на $P^*(\vec{k},\vec{l},t)$, $P^*(\vec{k},\vec{l},0)$, $P^*(\vec{k}+I_{ic}-I_{jc},\vec{l},t)$, $P^*(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{jc,},t)$. Поэтому, используя (3), получаем:

$$\left|P_q(\vec{k},\vec{l},t)-P^*(\vec{k},\vec{l},t)\right|\le e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left|P_q(\vec{k},\vec{l},t)-P^*(\vec{k},\vec{l},t)\right|+e^{-\Lambda(\vec{k})t}\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}\times$$

$$\times\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})\left|P_q(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},x)-\vec{P}^*(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},x)\right|+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k})\left|P_q(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},\vec{l}+I_{js},x)-P^*(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},\vec{l}+I_{js},x)\right|+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\Phi_{js}^{-}(\vec{k},\vec{l})\left|P_q(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},x)-P^*(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},x)\right|dx\right).$$

Аналогично, как при доказательстве неравенства (6), можно показать, что

$$\left|P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)-P^*\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\right|\le M\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*+\alpha_3^*\right)^q\frac{t^q}{q!}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю, как общий член сходящегося ряда $\sum_{q=0}^{\infty}M\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*+\alpha_3^*\right)^q\frac{t^q}{q!}=M\left(\vec{k}\right)e^{\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*+\alpha_3^*\right)t}$, поэтому $\lim_{q\to\infty}P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=P^*\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$. Но ранее уже получили, что $\lim_{q\to\infty}P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$, значит $P^*\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$, что и доказывает единственность.

Теорема 2. Любое приближение $P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$, $q\ge 1$, представимо в виде сходящегося степенного ряда

$$P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=\sum_{m=0}^{\infty}d_{qm}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)t^m, \tag{9}$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям (10) с учетом (11), (12), где

$$d_{q+1m}^{+-}\left(\vec{k}.\vec{l}\right)=\frac{-\Lambda\left(\vec{k}\right)^m}{m!}\left\{P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{k}\right)^{u+1}}D_{qu}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right\},m\ge 0, \tag{10}$$

$$d_{q0}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)=P\left(\vec{k},\vec{l},0\right),\ d_{0m}^{+}\left(\vec{k},\vec{l}\right)=P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)\delta_{m0}, \tag{11}$$

$$D_{qm}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)d_{qm}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)d_{qm}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)d_{qm}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)\right. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем, что коэффициенты степенного ряда (9) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (10). Подставим последовательные приближения (9) в (4). Тогда, учитывая, что

$$e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{k}\right)x}x^m dx=\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{k}\right)}\right]^{m+1}l!\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^m}{j!},m=0,1,2,\ldots,$$

получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}d_{qm}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)t^m=e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)d_{qm}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)d_{qm}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)d_{qm}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js}\right)\right].$$

Используя обозначения (10), этот ряд можно переписать в виде:

$$\sum_{m=0}^{\infty}d_{qm}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)t^m=e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{m=0}^{\infty}D_{qm}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{k}\right)}\right]^{m+1}m!\sum_{u=m+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^u}{u!}t^u.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая $e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}$ в ряд по степеням t, будем иметь

$$\sum_{m=0}^{\infty}d_{qu}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)t^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^m}{m!}\left\{P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\left[\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^{u+1}}D_{qu}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right\}t^m. \tag{13}$$

Приравнивая в левой и правой части выражения (13) коэффициенты при t^m, получим соотношения (10) для коэффициентов ряда (9).

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (9) воспользуемся формулой Коши–Адамара: $\frac{1}{R\left(\vec{k},\vec{l}\right)}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\left|d_{qm}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right|}$.

Из (10) следует, что $\left|d_{q+1m}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right| = \dfrac{\Lambda\left(\vec{k}\right)^m}{m!}\left|P\left(\vec{k},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\dfrac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{k}\right)^{u+1}}D_{qu}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right|, m \ge 0.$

Покажем, что $\left|D_{qu}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right|, q \ge 1, u = \overline{0, m-1},$ ограничено конечным значением $C_1\left(\vec{k},\vec{l}\right)$. Из ограниченности $P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)$ и определения $D_{qu}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)$ следует, что

$$D_{00}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right) d_{00}^{+-}\left(k + I_{ic} - I_{js},\vec{l}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)d_{00}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)d_{00}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js}\right)\right]\le C_{00}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right).$$

Здесь $C_{00}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)$ – некоторая ограниченная величина, а все $D_{0l}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)=0, l=1, 2, \ldots$ Поскольку $D_{q-10}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)= D_{q-20}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)= \ldots = D_{10}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)= D_{00}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)$, то из (11) следует, что $D_{q-10}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)< C_{00}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right), q \ge 1.$

Используя метод математической индукции, покажем, что

$$\left|D_{q-1l}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right| \le \frac{C_{q-1m}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)}{m!}, l = 1, 2, \ldots \qquad (14)$$

Для m = 1 имеем:

$$D_{q-11}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)d_{q-11}^{+-}\left(\vec{k} + I_{ic} - I_{js},\vec{l}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)d_{q-11}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)d_{q-11}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js}\right)\right]=$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)\left(-\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},0\right)+D_{q-10}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l}\right)\right)+\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)\left(-\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l}+I_{js},0\right)+D_{q-10}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)\right)+$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\left(-\Lambda\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},0\right)+D_{q-10}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js}\right)\right)\right]\le\frac{C_{q-11}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)}{1!},$$

где $C_{q-11}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)$ – некоторая ограниченная величина. Предположим, что (14) справедливо для m – 1, т.е.

$$\left|D_{q-1m-1}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right| \le \frac{C_{q-1m-1}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)}{(m-1)!}, l = 1, 2, \ldots \qquad (15)$$

Докажем справедливость неравенства (12) для m. Используя (8), получим

$$D_{q-1m}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)d_{q-1m}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{jc},\vec{l}\right)+\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)d_{q-1m}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{jc}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\left(-\Lambda\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},0\right)+D_{q-10}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)\right)\right]=\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)\right]^m}{m!}\left(P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!(-1)^{u+1}}{\left[\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)\right]^{u+1}}D_{q-1m-1}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}\right)\right]^m}{m!}\times\right.$$

$$\times\left(P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!(-1)^{u+1}}{\left[\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}\right)\right]^{u+1}}D_{q-1m-1}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\left(-\Lambda\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!(-1)^{u+1}}{\left[\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}\right)\right]^{u+1}}D_{q-1m-1}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js}\right)\right).$$

Пусть $C_1\left(\vec{k},\vec{l}\right)=\max\limits_{q,m}C_{qm}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)$, тогда

$$D_{q-1m}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\mathit{\Phi}_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)\times\times\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)\right]^{m}}{m!}\left(P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!}{\left[\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)\right]^{u+1}}\frac{C_1\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l}\right)}{u!}\right)+\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\mathit{\Phi}_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}\right)\right]^{m}}{m!}\times\right.$$

$$\times\left(P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!}{\left[\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}\right)\right]^{u+1}}\frac{C_1\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)}{u!}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\left(\Lambda\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!}{\left[\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^{u+1}}\frac{C_1\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js}\right)}{u!}\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{m!}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)\left[-\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)\right]^{m}\left(P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!}{\left[\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)\right]^{u+1}}\frac{C_1\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l}\right)}{u!}\right)+\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\mathit{\Phi}_{icjs}^{++(1)}\left(\vec{k}\right)\left[-\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}\right)\right]^{l}\times\right.$$

$$\times\left(P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!}{\left[\Lambda\left(\vec{k}+I_{ic}\right)\right]^{u+1}}\frac{C_1\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js}\right)}{u!}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\left(\Lambda\left(\vec{k}\right)P\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{u!}{\left[\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^{u+1}}\frac{C_1\left(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js}\right)}{u!}\right)\leq\frac{C_{q-1l}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)}{m!},$$

где $C_{q-1m}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)$ – выражение, стоящее в фигурных скобках, т.е. неравенство (14) справедливо.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{R\left(\vec{k},\vec{l}\right)}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{\Lambda\left(\vec{k}\right)^{m}}{m!}\left|P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{k}\right)^{u+1}}D_{qu}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)\right|}\leq$$

$$\leq\Lambda\left(\vec{k}\right)\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{1}{m!}\left|P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{m-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{k}\right)^{u+1}}\frac{C_{q-1u}^{+-}\left(\vec{k},\vec{l}\right)}{u!}\right|}\leq\Lambda\left(\vec{k}\right)\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{1}{m!}\left|P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)+C_1\left(\vec{k},\vec{l}\right)\sum_{u=0}^{m-1}\frac{(-1)^{u+1}}{\Lambda\left(\vec{k}\right)^{u+1}}\right|}\leq$$

$$\leq\Lambda\left(\vec{k}\right)\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{1}{(m-1)!}}\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\left(\frac{P\left(\vec{k},\vec{l},0\right)}{m}+\frac{C_1\left(\vec{k},\vec{l}\right)}{m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{1}{\Lambda\left(\vec{k}\right)^{u+1}}\right)}. \qquad (16)$$

Поскольку

$$S_{m-1}\left(\vec{k}\right)=\sum_{u=0}^{m-1}\frac{1}{\left[\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^{u+1}}=\begin{cases}\dfrac{1-\left[\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^{-m}}{\left(\Lambda\left(\vec{k}\right)-1\right)},\Lambda\left(\vec{k}\right)\neq1\\ m\ \ ,\Lambda\left(\vec{k}\right)=1\end{cases},\ \text{то}\ \lim_{m\to\infty}\frac{S_{m-1}}{m}=\begin{cases}0,\Lambda\left(\vec{k}\right)>1\\1,\Lambda\left(\vec{k}\right)=1\end{cases}. \qquad (17)$$

В [5] показано, что $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{\dfrac{1}{(m-1)!}}=0.$

При $0<\Lambda(\vec{k})<1,$ используя (16) в правой части (12), имеем:

$$\sum_{u=0}^{m-1}\frac{1}{\left[\Lambda(\vec{k})\right]^{u+1}}=\frac{1-\left[\Lambda(\vec{k})\right]^{-m}}{\left(\Lambda(\vec{k})-1\right)}=\frac{a^m-1}{1-a},\ \text{где}\ a=\frac{1}{\Lambda(\vec{k})}>1,$$

поэтому

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{1}{m!}}\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{P(\vec{k},\vec{l},0)+C_1(\vec{k})\sum_{u=0}^{m-1}\frac{1}{\left[\Lambda(\vec{k})\right]^{u+1}}}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{1}{m!}}\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{P(\vec{k},\vec{l},0)+\frac{C_1(\vec{k})}{1-\Lambda(\vec{k})}\left(a^m-1\right)},$$

В силу $\sqrt[m]{b+ca^m}\le\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{ca^m}=\sqrt[m]{b}+a\sqrt[m]{c}$ имеем $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{b+ca^m}\le\lim\limits_{m\to\infty}b^{\frac{1}{m}}+a\lim\limits_{m\to\infty}c^{\frac{1}{m}}=1+a$.

Так как верхняя граница ограниченная величина, и учитывая $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{\dfrac{1}{m!}}=0$, получаем, что

$$\frac{1}{R(\vec{k},\vec{l})}=0.$$

Поэтому, как следует из (11), радиус сходимости степенного ряда (5) равен $+\infty$.

Отметим, что в работе [6] описывается метод решения линейных бесконечных систем дифференциальных уравнений (ДУ) с постоянными коэффициентами, основанный на применении преобразований Лапласа к построению решений. В [7] устанавливается взаимно однозначное соответствие между решениями ДУ бесконечного порядка и бесконечной системы линейных ДУ первого порядка. В [6, 7] предложено для нахождения решения ДУ бесконечного порядка использовать метод последовательных приближений, но сами приближения находятся достаточно сложно [8]. В данном подразделе для нахождения ожидаемых доходов в системах открытой G-сети МО предложена методика решения бесконечных систем ДУ методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов.

Пример 1. В данном примере количество СМО в сети n = 5. Пусть вероятности поступления заявок типа c в i-ю систему равны соответственно:

$$p_{011}^{+}=0{,}15;\ p_{012}^{+}=0{,}1;\ p_{013}^{+}=0{,}05;\ p_{033}^{+}=p_{043}^{+}=p_{053}^{+}=0{,}04;\ p_{021}^{+}=0{,}05;$$
$$p_{022}^{+}=0{,}03;\ p_{023}^{+}=0{,}02;\ p_{031}^{+}=p_{041}^{+}=p_{051}^{+}=0{,}1;\ p_{032}^{+}=p_{042}^{+}=p_{052}^{+}=0{,}06;\ p_{011}^{-}=p_{021}^{-}=p_{031}^{-}=p_{041}^{-}=$$
$$=p_{041}^{-}=p_{051}^{-}=0{,}1;\ p_{012}^{-}=p_{022}^{-}=p_{032}^{-}=p_{042}^{-}=p_{052}^{-}=0{,}06;\ \text{причем}\ \sum_{i=1}^{5}\sum_{c=1}^{3}p_{0ic}^{+}=1,\ \sum_{i=1}^{5}\sum_{c=1}^{3}p_{0ic}^{-}=1.$$

Пусть интенсивности входящих потоков положительных и отрицательных заявок равны соответственно $\lambda^{+}=100$ и $\lambda^{-}=90$. Пусть интенсивности обслуживания заявок типа c в СМО сети равны $\mu_{i1}=30,\mu_{i2}=40,\ \mu_{i3}=50,i=\overline{1,5}.$ Предположим, что $\theta_{i1}=5,\theta_{i2}=4,\theta_{i3}=3,\mu_{i1}^{-}=10,\ \mu_{i2}^{-}=15,\mu_{i3}^{-}=20,i=\overline{1,5}.$ Положим также, что вероятности перехода положительных и отрицательных заявок между СМО сети $p_{1111}^{+}=0{,}01,\ p_{1112}^{+}=0{,}012,\ p_{1113}^{+}=0{,}011,\ p_{1211}^{+}=0{,}01,\ p_{1212}^{+}=0{,}012,\ p_{1213}^{+}=0{,}011,\ p_{1311}^{+}=0{,}01,\ p_{1312}^{+}=0{,}012,$ $p_{1313}^{+}=0{,}012,\ p_{1111}^{-}=0{,}01,\ p_{1112}^{-}=0{,}012,\ p_{1121}^{+}=0{,}03;\ p_{1122}^{+}=0{,}036;\ p_{1123}^{+}=0{,}033;\ p_{1113}^{-}=0{,}011,\ p_{1211}^{-}=$ $=0{,}01,\ p_{1212}^{-}=0{,}012,\ p_{1213}^{-}=0{,}011,\ p_{1311}^{-}=0{,}01,\ p_{1312}^{-}=0{,}012,\ p_{1313}^{-}=0{,}012,\ p_{1221}^{+}=0{,}03;\ p_{1222}^{+}=0{,}036;$ $p_{1223}^{+}=0{,}033;\ p_{1321}^{+}=0{,}03;\ p_{1322}^{+}=0{,}036;\ p_{1323}^{+}=0{,}036;\ p_{1121}^{-}=0{,}01,\ p_{1122}^{-}=0{,}012,\ p_{1123}^{-}=0{,}011,\ p_{1221}^{-}=0{,}01,$ $p_{1222}^{-}=0{,}012,\ p_{1223}^{-}=0{,}011,\ p_{1321}^{-}=0{,}01,\ p_{1322}^{-}=0{,}012,\ p_{1323}^{-}=0{,}012,\ p_{11i1}^{+}=0{,}005,\ p_{12i1}^{+}=0{,}005,\ p_{12i2}^{+}=0{,}006,$ $p_{12i3}^{+}=0{,}0055,\ p_{13i1}^{+}=0{,}005,\ p_{13i2}^{+}=0{,}006,\ p_{13i3}^{+}=0{,}006,\ p_{11i1}^{-}=0{,}005,\ p_{11i2}^{-}=0{,}006,\ p_{11i3}^{-}=0{,}0055,\ p_{12i1}^{-}=0{,}005,$ $p_{11i2}^{+}=0{,}006,\ p_{11i3}^{+}=0{,}0055,\ p_{13i1}^{-}=0{,}005,\ p_{13i2}^{-}=0{,}006,\ p_{13i3}^{-}=0{,}006,\ i=\overline{3,5},\ p_{110}=0{,}05;\ p_{2121}^{-}=0{,}01,\ p_{2122}^{-}=0{,}012,$

$$p_{120} = 0{,}03;\ p_{120} = 0{,}02;\ p^{+}_{2311} = 0{,}01,\ p^{+}_{2312} = 0{,}012,\ p^{+}_{2313} = 0{,}012,\ p^{+}_{2111} = 0{,}01,\ p^{+}_{2112} = 0{,}012,\ p^{-}_{21i3} =$$
$$= p^{+}_{21i3} = 0{,}0055,\ p^{+}_{2113} = 0{,}011,\ p^{+}_{2211} = 0{,}01,\ p^{+}_{2323} = 0{,}024,\ p^{-}_{12i2} = 0{,}006,\ p^{-}_{12i3} = 0{,}0055,\ p^{+}_{2212} = 0{,}012,$$
$$p^{-}_{23i1} = p^{+}_{23i1} = 0{,}005,\ p^{+}_{2121} = 0{,}02,\ p^{+}_{2122} = p^{+}_{222}0{,}024,\ p^{+}_{2123} = p^{+}_{2223} = 0{,}022,\ p^{+}_{2221} = p^{+}_{2321} = 0{,}02,\ p^{-}_{23i2} =$$
$$= p^{+}_{23i2} = p^{+}_{21i2} = p^{-}_{21i2}0{,}006,\ p^{-}_{2123} = 0{,}011,\ p^{-}_{2221} = 0{,}01,\ p^{-}_{2222} = 0{,}012,\ p^{-}_{2223} = 0{,}011,\ p^{-}_{2321} = 0{,}01,$$
$$p^{+}_{j1i1} = p^{-}_{j1i1} = 0{,}01,\ p^{+}_{i1j2} = p^{-}_{i1j2} = 0{,}012,\ p^{+}_{i1j3} = p^{-}_{i1j3} = 0{,}011,\quad p^{+}_{i3j2} = p^{-}_{i3j2} = 0{,}012,\ p^{+}_{i3j3} = p^{-}_{i3j3}0{,}012,\ i,\ j = \overline{3{,}5},$$
$$p^{-}_{21i1} = p^{+}_{21i1} = 0{,}005,\ p_{i10} = 0{,}1;\ p_{i20} = 0{,}07;\ p_{i30} = 0{,}03,\ i = \overline{2{,}5},\ p^{-}_{2321} = 0{,}012,\ p^{-}_{2322} = 0{,}012,\ p^{-}_{2323} = 0{,}01,$$
$$q_{icjs} = \frac{1}{45},\ i \ne j,\ q_{icis} = \frac{1}{90},\ q_{ic0} = \frac{1}{30},\ i,\ j = \overline{1{,}5},\ c,s = \overline{1{,}3}\ p^{+}_{2213} = 0{,}011,\ p^{+}_{2311} = 0{,}01,\ p^{+}_{2321} = 0{,}02,\ p^{+}_{2322} = 0{,}024.$$

Найдём $P(\vec{k},t)$, где $\vec{k} = (1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,1,1,1,2,1,1,2,2,1,3,1,1,2,2,2,t)$ при условии, что состояние $(2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ было начальным. Расчёты показали, что $a_0(t) = e^{-1075t}$.

Количество членов ряда, вычисляемых по формуле (5), находилось при использовании соотношения $\left|d^{+-}_{ql}\left(\vec{k}^*,\vec{l}^*\right)\right| \le \varepsilon$, где $k^*, m^* : d^{+-}_{qm}\left(\vec{k}^*,\vec{l}^*\right) = \max\limits_{\vec{k},\vec{l}} d^{+-}_{qm}\left(\vec{k},\vec{l}\right)$, а количество итераций q, используя неравенство $\left|P_{q+1}\left(\vec{k},\vec{l},t\right) - P_q\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\right| \le \varepsilon$. Получили, что количество итераций $q^* = 105$, а членов ряда $m^* = 80$.

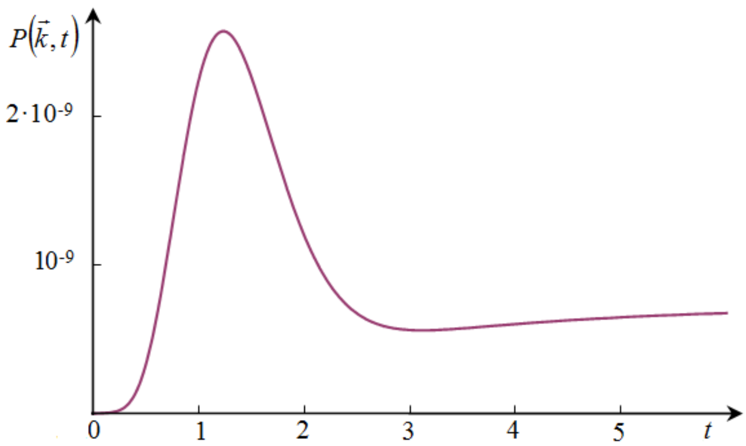

Рис. 1. Вероятность состояния $\vec{k}$ на отрезке времени [0; 6]

Время выполнения программы на компьютере с параметрами Intel(R) Pentium(R) Dual CPU G860 @ 3.00GHz 4Gb приблизительно равнялось 5 час. На рис. 1 представлен график этой вероятности.

Заключение

В работе проведено исследование марковской G-сети массового обслуживания с нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками различных типов в случае, когда отрицательная заявка может уничтожать одну положительную заявку своего типа. Для нахождения нестационарных вероятностей состояний предложено использовать модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов, который позволяет сделать это за приемлемое процессорное время.

Дальнейшие исследования в этом направлении могут быть связаны с нахождением ожидаемых доходов в таких сетях с доходами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe E., Schassberger R. Stability of G-networks. // Probability and its Applications in Engineering and the Information Sciences. 1992. V. 6. P. 271–276.

2. Fourneau J., Gelenbe E. G-networks with multiple classes of negative and positive customers. // Theoretical Computer Science. 1996. V. 155. P. 141–156.
3. Chao X., Pinedo M. On generalized networks of queues with positive and negative arrivals // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 1993. V. 7. P. 301–334.
4. Якубович О.В., Евдокимович В.Е. Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов положительных, отрицательных заявок и сигналов // Проблемы физики, математики и техники. 2010. № 4. С. 63–67.
5. Маталыцкий М.А., Науменко В.В. Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок. Гродно : Гродненский гос. ун-т, 2017. 347 с.
6. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата : Наука, 1974. 415 с.
7. Коробейник Ю.Ф. Исследование дифференциальных уравнений бесконечного порядка с полиномиальными коэффициентами с помощью операторных уравнений интегрального типа // Математический сборник. 1959. Т. 49, № 2. С. 191–206.
8. Коробейник Ю.Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и бесконечные системы дифференциальных уравнений // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1970. Т. 34, № 4. С. 881–922.

Маталыцкий Михаил Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: m.matalytski@gmail.com
Копать Дмитрий Ярославович. E-mail: dk80395@mail.ru
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (Беларусь)

Поступила в редакцию 6 июня 2017 г.

Matalytski Mihail A., Kopat Dmitry Ya. (Grodno State University, Belarus).

Analysis in the transient regime of the network with impatient positive and negative customers of multiple classes.

Keywords: G-network; positive and negative customers of multiple classes; modified method of successive approximations; combined with the method of series.

DOI: 10.17223/19988605/42/7

The article explores the network with impatient positive and negative applications of multiple classes, in the case where a negative customer removes one positive customer of its type. The *i*-th queuing system (QS) from the external environment receives the simplest flow of positive requests with intensity λ^+ and an additional flow of negative requests, which is also the simplest with intensity λ^-, $i=\overline{1,n}$. All incoming streams are independent. Each positive request of the input stream, regardless of other requests, is sent to the *i*-th QS as a request of type c with probability p_{0ic}^+, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r} p_{0ic}^+ = 1$.

Each negative entry of the input stream, regardless of other negative requests, is sent to the *i*-th QS as a negative claim of type c with probability $p_{0ic}^-, \sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r} p_{0ic}^- = 1$, and after a random time destroys one positive claim of type *c*. After the end of the service of the positive requests of type *c* in the i-th QS, it is sent to the *j*-th QS with probability p_{icjs}^+ again as a positive requests of type *s*, and with probability p_{icjs}^- as a negative request of type s, and with probability $p_{ic0} = 1 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left(p_{icjs}^+ + p_{icjs}^-\right)$ leaves the network, $i, j = \overline{1,n}, c, s = \overline{1,r}$.

Each positive claim of type *c* in the system has a waiting time limited by an exponentially distributed random variable with a parameter θ_{ic}. A negative claim that is in the system remains in the queue a random time that has an exponential distribution with the parameter $\mu_{ic}^-, i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}.$ Positive request of type *c*, the waiting time in queue *i* has expired, instantly passes into the *j*-th of the QS and becomes a positive requests of type s with a probability q_{icjs}^+ or negative requests of type *s* with probability q_{icjs}^-, but with probability $q_{ic0} = 1 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left(q_{icjs}^+ + q_{icjs}^-\right)$ leaves the network $i, j = \overline{1,n}, c, s = \overline{1,r}$.

In the first part (Theorem 1) a difference-differential equations system is derived, which is satisfied by the probabilities of the states of such a network. It can be represented in a general form

$$\frac{dP(\vec{k},\vec{l},t)}{dt} = -\Lambda(\vec{k})P(\vec{k},\vec{l},t) + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},\vec{l},t) +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k})P(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}-I_{js},t) + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{--}(\vec{k},\vec{l})P(\vec{k}+I_{ic},\vec{l}+I_{js},t), \tag{1}$$

where $P(\vec{k},\vec{l},t)$ is the probability of the state $(\vec{k},\vec{l},t)$, $\Lambda(\vec{k}), \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}), \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}), \Phi_{icjs}^{--}(\vec{k},\vec{l})$ are some bounded negative functions. To solve system (1) it is suggested to use an algorithm based on the application of the modified method of successive approximations combined

with the method of series. This allows to find the probabilities of network states for acceptable CPU time. The tendency of successive approximations is proved for a stationary distribution of probabilities and their convergence to a unique solution of the system (1).

REFERENCES

1. Gelenbe, E. & Schassberger, R. (1992) Stability of G-networks. *Probability and its Applications in Engineering and the Information Sciences*. 6. pp. 271–276.
2. Fourneau, J.M., Gelenbe, E. & Suros, R. (1996) G-networks with multiple classes of negative and positive customers. *Theoretical Computer Science*. 155. pp. 141–156. DOI: 10.1016/0304-3975(95)00018-6
3. Chao, X. & Pinedo, M. (1993) On generalized networks of queues with positive and negative arrivals. *Probability in the Engineering and Informational Sciences.* 7. pp. 301–334. DOI: 10.1017/S0269964800002941
4. Yakubovich, O. & Evkokimovich, V. (2010) Set' massovogo obsluzhivaniya so sluchaynym vremenem prebyvaniya razlichnykh tipov polozhitel'nykh, otritsatel'nykh zayavok i signalov [Queueing network with random staying time of different types of positive, negative customers and signals]. *Problems of Physics, Mathematics and Technics – Problems physics, mathematics and technologies.* 4. pp. 63–67.
5. Matalytski, M. & Naumenko, V. (2017) *Stokhasticheskie seti s nestandartnymi peremeshcheniyami zayavok* [Stochastic network with non-standard move customers]. Grodno: GrSU.
6. Valeev, K. & Zhautykov, O. (1974) *Beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravneniy* [Infinite systems of differential equations]. Alma-Ata: Science.
7. Korobeynik, Y.F. (1959) Issledovanie differentsial'nykh uravneniy beskonechnogo poryadka s polinomial'nymi koeffitsientami s pomoshch'yu operatornykh uravneniy integral'nogo tipa [Investigation of differential equations of infinite order with polynomial coefficients by means of operator equations of integral type]. *Matematicheskiy sbornik.* 49(2). pp. 191–206.
8. Korobeynik, J. (1970) Differentsial'nye uravneniya beskonechnogo poryadka i beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravneniy [Differential equations of infinite order and infinite systems of differential equations]. *Izvestiya AN SSSR. Ser. matematicheskaya.* 34(4). pp. 881–922.