

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2014

№ 2(28)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербаков Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики); Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 17.02.2014.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10,16. Уч.-изд. л. 11,38. Тираж 300 экз. Заказ № 4.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Камчатный С.А., Кузнецов В.М, Сквородин А.В., Щербаков Н.Р. Математическое моделирование процесса формообразования деталей конического передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением	5
Колесников И.А. Определение аксессуарных параметров для отображения на счетноугольник	18
Садритдинова Г.Д. Экстремальное управление для одного функционала на классах аналитических функций	29

МЕХАНИКА

Борзенко Е.И., Дьякова О.А. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале	35
Ворожцов А.Б., Глазунов А.А., ДеЛюка Л., Кувшинов Н.Е., Еремин И.В., Тырышкин И.М., Фассина М. Влияние применения наноалюминия на газодинамику высокоэнергетических установок	45
Добрица Д.Б. Теоретико-экспериментальная оценка стойкости сотовых панелей космического корабля при воздействии метеорно-техногенных частиц	58
Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Режимы горения бедной метано-воздушной смеси в U-образной горелке	69
Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к исследованию влияния объемного соотношения компонентов волокнистого однонаправленного углепластика на его механические характеристики	77
Шваб А.В., Попп М.Ю. Моделирование ламинарного закрученного течения в вихревой камере	90
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	98

CONTENTS

MATHEMATICS

Kamchatnyi S.A., Kuznetsov V.M., Skovorodin A.V., Scherbakov N.R. Mathematical simulation of the formbuilding of the conic driving gear details with ec-gearing	5
Kolesnikov I.A. Determination of accessory parameters for mapping onto a numerable polygon	18
Sadritdinova G. D. Extreme control for a functional on classes of analytical functions.....	29

MECHANICS

Borzenko E.I., Diakova O.A. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel	35
Vorozhtsov A.B., Glazunov A.A., DeLuca L., Kuvshinov N.E., Eremin I.V., Tyryshkin I.M., Fassina M. Gas dynamics aspects of nanoaluminum use for high energy systems	45
Dobritsa D.B. Theoretical-experimental estimate of resistance of spacecraft honeycomb panels upon impacts from meteoroids and space debris.....	58
Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. Combustion modes of the lean methane-air mixture in a u-shaped burner	69
Sovetova Yu.V., Sidorenko Yu.N., Skripnyak V.A. The multilevel approach to studying the influence of the volumetric ratio in components of unidirectional carbon fiber composite on its mechanical properties.....	77
Shvab A.V., Popp M.Yu. Modeling of the laminar swirling flow in a vortex chamber	90
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	98

МАТЕМАТИКА

УДК 514.8, 62.342

С.А. Камчатный, Кузнецов В.М, А.В. Сковородин, Н.Р. Щербаков

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ДЕТАЛЕЙ КОНИЧЕСКОГО
ПЕРЕДАТОЧНОГО МЕХАНИЗМА С ЭЦ-ЗАЦЕПЛЕНИЕМ**

Формообразование поверхности детали передаточного механизма в самой общей постановке является задачей сближения двух поверхностей (обрабатываемой детали и поверхности инструмента) в пространстве до состояния касания, в котором поверхности имеют общую касательную плоскость. Решение задачи аналитического описания геометрии касания поверхностей необходимо для нахождения наивыгоднейших методов и средств обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ. С этих позиций в работе построена математическая модель процесса формообразования деталей конического передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением с помощью фрез двух видов. Получены системы уравнений для определения местоположения фрезы в момент касания. Найдены аналитические или численные решения этих систем. Разработан комплекс специальных компьютерных программ управления движением фрезы, обрабатывающей деталь.

Ключевые слова: *формообразование, эксцентриково-циклоидальное зацепление, касание поверхностей.*

В [1] была рассмотрена геометрия касания поверхностей детали и инструмента при формообразовании деталей цилиндрического передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением (ЭЦ-зацеплением [2]), т.е. устройства, у которого оси вращения входной и выходной детали параллельны. В данной работе аналогичные задачи решены для конической передачи с ЭЦ-зацеплением, у которой оси вращения деталей пересекаются (рассмотрен случай пересечения под прямым углом – см. рис.1).



Рис. 1. Входная и выходная детали конической передачи в ЭЦ-зацеплении

1. Параметрические уравнения поверхностей деталей

Параметрические уравнения поверхностей деталей

$$x = f_1(u, v),$$

$$y = f_2(u, v),$$

$$z = f_3(u, v)$$

будут записаны в виде вектор-функций двух аргументов, т.е. в виде:

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \\ f_3(u, v) \end{pmatrix}.$$

1.1. Выходная деталь

Пусть дана сфера радиуса R , которую можно задать вектор-функцией двух аргументов u и v , принимающих значения от 0 до 2π :

$$\vec{S}(u, v) = \begin{pmatrix} R \cos u \cos v \\ R \cos u \sin v \\ R \sin u \end{pmatrix}.$$

Обозначим через z_1 количество зубьев входной детали (далее – шестерни), через z_2 – количество зубьев выходной детали (далее – колеса), а через n – передаточное отношение:

$$n = \frac{z_2}{z_1}.$$

Циклоидальную кривую на сфере описывает точка окружности радиуса ε , лежащей на сфере, при одновременных поворотах этой окружности вокруг своего центра на угол α и вокруг оси вращения колеса (ось OZ) на угол $\frac{-\alpha}{n}$. Такую окружность можно задать поворотом радиус-вектора точки

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{R^2 - \varepsilon^2} \\ 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

вокруг оси OX :

$$\overline{Okr}(\alpha) = Qx(\alpha) \vec{M},$$

где

$$Qx(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

– матрица поворота вокруг оси OX на угол α . Тогда циклоидальная кривая на сфере (см. рис. 2) задаётся в виде вектор-функции:

$$\vec{Sn}(\alpha) = Qz(\alpha) \overline{Okr}(\alpha), \quad (1.1)$$

где

$$Qz(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{-\alpha}{n}\right) & -\sin\left(\frac{-\alpha}{n}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{-\alpha}{n}\right) & \cos\left(\frac{-\alpha}{n}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица поворота вокруг оси OZ на угол $\frac{-\alpha}{n}$.

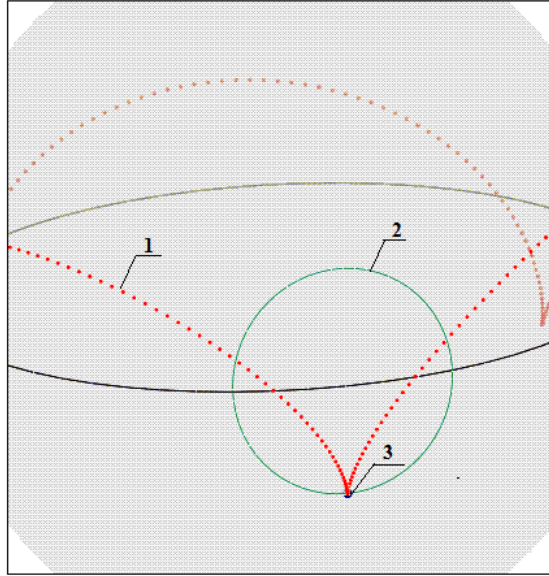


Рис. 2. Обозначено: 1 – циклоидальная кривая; 2 – окружность радиуса ϵ ,
3 – точка, описывающая циклоиду

Поверхность колеса образована движением в пространстве кривой, называемой профилем детали. В коническом ЭЦ-зацеплении профилем колеса является эквидистанта циклоидальной кривой на сфере (1.1), т.е. огибающая семейства окружностей радиуса $\rho < \epsilon$, лежащих на сфере, центры которых проектируются из центра сферы в точки кривой (1.1). Для построения эквидистанты достаточно повернуть радиус-вектор каждой точки циклоидальной кривой в нормальных плоскостях этой кривой на угол

$$\gamma = \arccos \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R}.$$

Принимая в качестве базисных векторов нормальной плоскости в точке кривой (1.1) ортогональные вектора $\overrightarrow{Sn}(\alpha)$ и векторное произведение $\overrightarrow{Sn}(\alpha) \times \overrightarrow{Sn}'(\alpha)$, запишем эквидистанту циклоидальной кривой на сфере в виде:

$$\overrightarrow{Ev}(\alpha) = \cos \gamma \cdot \overrightarrow{Sn}(\alpha) + R \cdot \sin \gamma \cdot \frac{\overrightarrow{Sn}(\alpha) \times \overrightarrow{Sn}'(\alpha)}{|\overrightarrow{Sn}(\alpha) \times \overrightarrow{Sn}'(\alpha)|}. \quad (1.2)$$

На рис. 3 изображен фрагмент эквидистантной кривой – профиля колеса в касании с окружностью радиуса ρ – профилем зуба шестерни для случая $z_1 = 3$.

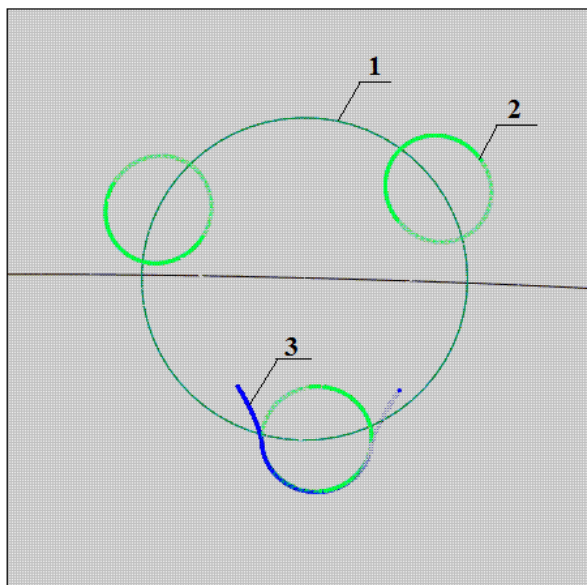


Рис 3. Обозначно: 1 – окружность радиуса ε ; 2 – окружности радиуса ρ ; 3 – эквидистантная кривая

Для построения поверхности колеса нужно эквидистанту циклоидальной кривой поворачивать на угол $\frac{v}{n}$ вокруг OZ с одновременным уменьшением радиуса сферы, на которой она расположена от R до $(R - lr)$ (lr – ширина входной детали). Это приводит к записи уравнения поверхности колеса в виде вектор функции двух аргументов:

$$\overline{Fk}(v, \alpha) = C(v) \cdot Qz(v) \overline{Ev}(\alpha), \quad (1.3)$$

где

$$C(v) = 1 - c_1 v, \quad c_1 = \frac{lr \cdot z_1}{R \cdot 2\pi},$$

а параметр v изменяется от 0 до $\frac{2\pi}{z_1}$.

При $v=0$ координатная линия поверхности $\overline{Fk}(v, \alpha)$ лежит на сфере радиуса R , а при $v = \frac{2\pi}{z_1}$ – на сфере радиуса $\frac{R - lr}{R}$.

В работе [3] было показано, что точки контакта профилей деталей в реальном зубчатом ЭЦ-зацеплении лежат в достаточно узкой области в зоне перегиба циклоидальной кривой. Поэтому достаточно вытачивать только часть поверхности колеса, содержащую эту зону контакта. Эта часть поверхности определяется как лежащая по одну сторону от конуса с вершиной в центре сферы и основанием –

окружностью радиуса rk на сфере. Величина rk задается из тех соображений, чтобы «обрезаемая» часть поверхности колеса не содержала точек зоны контакта. Запишем уравнения конуса, обрезающего зубья:

$$\overrightarrow{Kon}(u, v) = u \begin{pmatrix} \sqrt{R^2 - rk^2} \cos v \\ \sqrt{R^2 - rk^2} \sin v \\ -rk \end{pmatrix}.$$

На рис. 4 изображен фрагмент поверхности колеса и конус, «обрезающий» зуб детали.

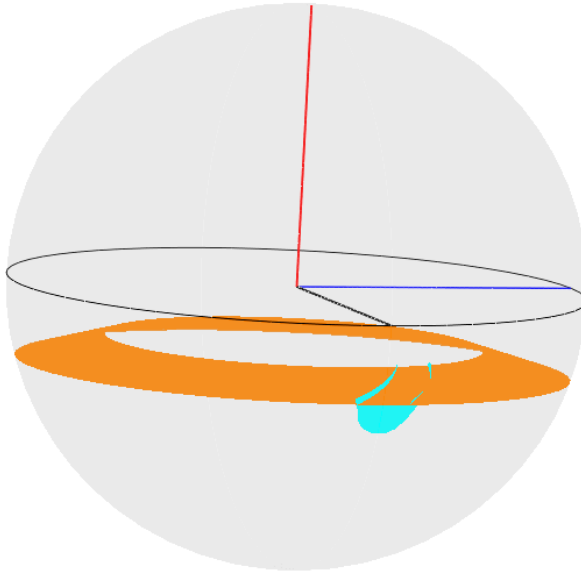


Рис. 4. Фрагмент зуба поверхности колеса и «обрезающий» конус

1.2. Входная деталь

Поверхность зуба входной детали получается следующим образом. Дана сфера радиуса R и круговой конус с вершиной в центре этой сферы, пересекающий её по окружности радиуса ε . Поверхность зуба образована окружностями, лежащими на концентрических сферах уменьшающихся радиусов, с центрами на конической винтовой линии, причем по мере приближения к центру сферы уменьшаются и радиусы окружностей (рис. 4). Наибольшая образующая окружность зуба лежит на сфере радиуса R и имеет радиус ρ . Эту окружность можно задать в виде вектор функции:

$$\overrightarrow{okr}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2} + \varepsilon \cdot \rho \cdot \sin \alpha}{R} \\ \frac{\rho \cdot \cos \alpha}{R} \\ \frac{-\varepsilon \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2} + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2} \cdot \rho \cdot \sin \alpha}{R} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение поверхности зуба шестерни можно записать в виде:

$$\overrightarrow{Fs}(v, \alpha) = C(v) Qx(v) \overrightarrow{okr}(\alpha). \quad (1.4)$$

Уравнение конуса, на котором лежат центры окружностей, образующих зуб шестерни, имеет вид:

$$\overrightarrow{kon}(u, v) = \begin{pmatrix} u\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} \\ u \cdot \varepsilon \cdot \cos v \\ u \cdot \varepsilon \cdot \sin v \end{pmatrix}.$$

На рис. 5 изображён этот конус и один зуб шестерни.

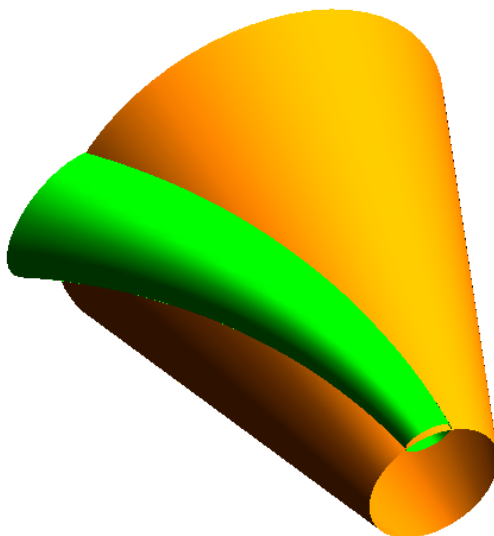


Рис. 5. Поверхность одного зуба входной детали на коническом барабане

2. Определение местоположения сферической фрезы при обработке поверхностей деталей

Предлагаемый здесь алгоритм управления движением сферической фрезы подходит для обработки как входной так и выходной детали. Поэтому в дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться обозначением $\overrightarrow{F}(v, \alpha)$ считая $\overrightarrow{F}(v, \alpha) = \overrightarrow{Fk}(v, \alpha)$ (см. (1.3)), если речь идет об обработке поверхности колеса, и $\overrightarrow{F}(v, \alpha) = \overrightarrow{Fs}(v, \alpha)$ (см. (1.4)) – для шестерни. Фреза вытачивает деталь последовательным прохождением координатных линий поверхности детали, т.е. поверхность фрезы должна в каждый момент движения касаться наперед заданной координатной линии обрабатываемой поверхности. Обозначим через Rc_1 и Rc_0 ($Rc_1 > Rc_0$) расстояния от центра сферы (фрезы) до оси вращения колеса в начале и в конце обработки, причем эти величины задаются так, чтобы разность $Rc_1 - Rc_0$ была несколько больше, чем ширина деталей lr . Таким образом, в про-

цессе движения фрезы её центр находится на поверхности цилиндра переменного радиуса с осью – осью вращения колеса. Запишем уравнения этого цилиндра в виде вектор-функции:

$$\overrightarrow{CI_k}(u, v) = \begin{pmatrix} Rx_k \cos u \\ Rx_k \sin u \\ v \end{pmatrix}.$$

Здесь через Rx_k обозначен переменный радиус цилиндра:

$$Rx_k = Rc_1 - \left(\frac{Rc_1 - Rc_0}{K} \right) \cdot k,$$

где K – число шагов изменения радиуса цилиндра, а k – это целое число, находящееся в диапазоне от 0 до K .

Для каждого значения этого радиуса от Rc_1 до Rc_0 нужно найти координаты центра сферы (фрезы), касающейся заданной линии на обрабатываемой поверхности. Линия задается фиксированным значением параметра $\alpha = \alpha_0$ в уравнениях поверхности (1.3) или (1.4). Это касание обеспечивается 1) наличием общей точки у сферы диаметром df и у поверхности детали, что можно в векторной форме записать в виде:

$$\left| \overrightarrow{CI_k}(u, v) - \overrightarrow{F}(v, \alpha_0) \right| = \frac{df}{2}, \quad (2.1)$$

и 2) параллельностью нормалей к этим поверхностям в точке касания (общая касательная плоскость). Поскольку нормаль к сфере определяется вектором $\overrightarrow{CI_k}(u, v) - \overrightarrow{F}(v, \alpha_0)$, а нормаль к поверхности детали перпендикулярна касательным к двум координатным линиям на этой поверхности, то условие 2) приводит к ещё двум уравнениям:

$$\left[\overrightarrow{CI_k}(u, v) - \overrightarrow{F}(v, \alpha_0) \right] \cdot \frac{\partial \overrightarrow{F}(v, \alpha_0)}{\partial v} = 0, \quad (2.2)$$

$$\left[\overrightarrow{CI_k}(u, v) - \overrightarrow{F}(v, \alpha_0) \right] \cdot \frac{\partial \overrightarrow{F}(v, \alpha_0)}{\partial \alpha} = 0. \quad (2.3)$$

Таким образом, получена система (2.1) – (2.3) из трёх уравнений на три неизвестных: u , v , v . Её аналитическое решение приводит к трансцендентному уравнению на v , корни которого находятся численно с помощью встроенных программ пакета MathCad. Благодаря специальному созданному алгоритму нахождения начальных приближений, корни находятся с высокой точностью (порядка 10^{-12} мм). На рис. 6 изображено положение сферической фрезы с центром на заданном цилиндре при касании фрезы с поверхностью зуба колеса в точке заданной линии на этой поверхности.

3. Обработка деталей торической фрезой

При формообразовании поверхности детали малого размера, целесообразно использование не сферической фрезы, а фрезы, режущая часть поверхности которой – тор, поскольку при этом достигается меньший радиус кривизны вытачиваемой поверхности фрезы.

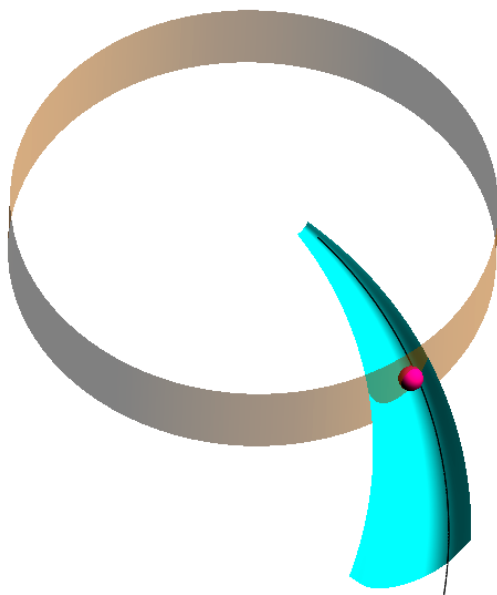


Рис. 6. Касание сферической фрезы с поверхностью выходной детали в точке заданной линии. Показан цилиндр, на котором лежит центр фрезы

Зададим поверхность тора, полагая, что ось фрезы – это ось OZ , в виде вектор-функции двух аргументов:

$$\overrightarrow{tor}(u, v) = \begin{pmatrix} \left(\frac{df}{2} - rf \right) \cos v + rf \cos u \cos v \\ \left(\frac{df}{2} - rf \right) \sin v + rf \cos u \sin v \\ rf \sin u \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где, df – диаметр фрезы, rf – радиус кривизны боковой поверхности тора.

3.1.1. Формообразование поверхности зуба колеса

При обработке поверхности зуба колеса фреза перемещается в пространстве, сохраняя положение своей оси параллельным оси вращения колеса (ось OZ). При касании с поверхностью колеса в точке координатной линии, задаваемой фиксированным значением параметра $\alpha = \alpha_0$ в уравнениях этой поверхности (1.3), положение фрезы определяется значениями трех смещений поверхности тора (3.1) относительно координатных осей. Обозначая величины этих смещений через R_x , R_y , R_z , запишем уравнения поверхности торической фрезы в касании с зубом колеса в виде:

$$\overrightarrow{TR}(u, v) = \begin{pmatrix} \left(\frac{df}{2} - rf \right) \cos v + rf \cos u \cos v + R_x \\ \left(\frac{df}{2} - rf \right) \sin v + rf \cos u \sin v + R_y \\ rf \sin u + R_z \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Определим дискретный набор точек на линии $\alpha = \alpha 0$ значениями параметра v в уравнении поверхности колеса (1.3) по формуле:

$$v_k = \frac{2\pi k}{z_1 K},$$

где K – число шагов изменения параметра v , а k – целое число, изменяющееся от 0 до K . Задача определения местоположения фрезы при обработке зуба колеса сводится к тому, чтобы для каждого значения k , т.е. для каждой из K точек на линии $\alpha = \alpha 0$, найти величины смещений R_x, R_y, R_z , исходя из условий касания поверхностей фрезы (3.2) и детали (1.3). Эти условия: 1) наличие общей точки у поверхностей (3.2) и (1.3) и 2) параллельность нормалей к поверхностям в точке касания. Из первого условия, приравняв правые части (3.2) и (1.3), получаем выражение смещений R_x, R_y, R_z через параметры u и v :

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \overline{Fk}(v_k, \alpha 0) - \overline{tor}(u, v). \quad (3.3)$$

Для записи соотношений, к которым приводит условие 2), обычным образом найдем вектор нормали к поверхности тора (3.1):

$$\overline{Nt}(u, v) = \frac{\partial \overline{tor}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{tor}(u, v)}{\partial v} \parallel \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Аналогично, дифференцируя по параметрам v и α вектор-функцию (1.3), найдем вектор нормали к поверхности зуба колеса:

$$\overline{Nk}(v, \alpha) = \begin{pmatrix} f_1(v, \alpha) \cos\left(\frac{v}{n}\right) + f_2(v, \alpha) \sin\left(\frac{v}{n}\right) \\ f_1(v, \alpha) \sin\left(\frac{v}{n}\right) - f_2(v, \alpha) \cos\left(\frac{v}{n}\right) \\ f_0(v, \alpha) \end{pmatrix},$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} f_0(v, \alpha) &= \left(Ev(\alpha)_0 Ev'(\alpha)_0 + Ev(\alpha)_1 Ev'(\alpha)_1 \right) \frac{C(v)}{n} + \left(Ev(\alpha)_0 Ev'(\alpha)_1 - Ev(\alpha)_1 Ev'(\alpha)_0 \right) c_1, \\ f_1(v, \alpha) &= -Ev(\alpha)_0 Ev'(\alpha)_2 \frac{C(v)}{n} + \left(Ev(\alpha)_1 Ev'(\alpha)_2 - Ev(\alpha)_2 Ev'(\alpha)_1 \right) c_1, \\ f_2(v, \alpha) &= -Ev(\alpha)_1 Ev'(\alpha)_2 \frac{C(v)}{n} + \left(Ev(\alpha)_0 Ev'(\alpha)_2 - Ev(\alpha)_2 Ev'(\alpha)_0 \right) c_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В соотношениях (3.4) скалярные функции: $Ev(\alpha)_i$, и $Ev'(\alpha)_i$ ($i = 0, 1, 2$) – это координаты вектор-функции $\overline{Ev}(\alpha)$ из (1.2) и ее производной по параметру α , а $C(v)$ и c_1 введены в (1.3).

Из условия 2) параллельности нормалей $\overline{Nt}(u, v)$ и $\overline{Nk}(v_k, \alpha 0)$ получаются два соотношения на параметры u и v , из которых удастся выразить эти параметры через v_k и $\alpha 0$. Таким образом, для каждой точки (v_k) на линии $\alpha 0$ получаем зна-

чения параметров u и v , при подстановке которых в (3.2) получаем координаты точки касания фрезы и детали, а при подстановке этих значений в (3.3) находим величины смещений R_x , R_y , R_z , определяющих положение фрезы в пространстве в момент касания с деталью. На рис. 7 показан фрагмент поверхности зуба колеса в касании с торической фрезой в точке линии $\alpha = \alpha_0$.

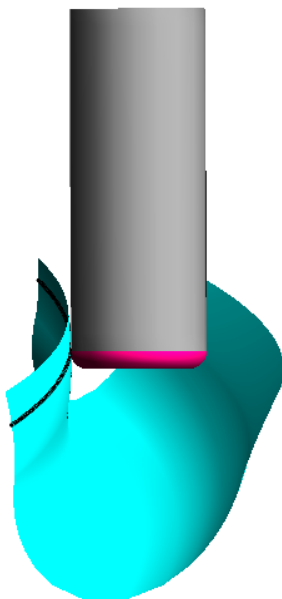


Рис. 7. Фрагмент поверхности зуба колеса в касании с торической фрезой

3.2. Формообразование поверхности зуба шестерни

Запишем уравнения обрабатываемой поверхности зуба шестерни (1.4) в развернутом виде:

$$\overrightarrow{Fs}(v, \alpha) = C(v) \begin{pmatrix} okr(\alpha)_0 \\ okr(\alpha)_1 \cos v - okr(\alpha)_2 \sin v \\ okr(\alpha)_1 \sin v + okr(\alpha)_2 \cos v \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где $okr(\alpha)_i$ ($i = 0, 1, 2$) – координаты вектор-функции $\overrightarrow{okr}(\alpha)$, задающей наибольшую образующую окружность зуба шестерни (см. **n.1.2**). Параметр α на поверхности зуба шестерни считается заданным ($\alpha = \alpha_0$) – тем самым на этой поверхности выделяется винтовая линия, которой касается фреза при обработке детали. Вектор нормали в произвольной точке поверхности (3.5) имеет вид:

$$\overrightarrow{Ns}(v, \alpha) = \begin{pmatrix} g_0(v, \alpha) \\ g_1(v, \alpha) \cos v + g_2(v, \alpha) \sin v \\ g_1(v, \alpha) \sin v - g_2(v, \alpha) \cos v \end{pmatrix},$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} g_0(v, \alpha) &= okr'(\alpha)_1 (okr(\alpha)_1 C(v) - okr(\alpha)_2 c_1) + okr'(\alpha)_2 (okr(\alpha)_2 C(v) + okr(\alpha)_1 c_1), \\ g_1(v, \alpha) &= -okr'(\alpha)_2 okr(\alpha)_0 c_1 - okr'(\alpha)_0 (okr(\alpha)_1 C(v) - okr(\alpha)_2 c_1), \\ g_2(v, \alpha) &= -okr'(\alpha)_1 okr(\alpha)_0 c_1 + okr'(\alpha)_0 (okr(\alpha)_2 C(v) + okr(\alpha)_1 c_1), \end{aligned}$$

а $okr'(\alpha)_i$ – ($i = 0, 1, 2$) – координаты производной вектор-функции $\overline{okr}(\alpha)$.

При обработке поверхности зуба шестерни ось фрезы находится в плоскости Π , перпендикулярной оси вращения шестерни (ось OX), смещаясь вместе с этой плоскостью вдоль оси OX на величину Rx . Кроме того, ось фрезы поворачивается в плоскости Π на угол ϕ , а поверхность тора смещается вдоль этой оси на величину Ht . Эти три величины определяют положение фрезы в каждый момент времени обработки детали (т.е. для каждой точки $\overline{Fs}(v_k, \alpha_0)$ заданной линии $\alpha = \alpha_0$ на обрабатываемой поверхности) и должны быть найдены из условия касания взаимодействующих поверхностей. Запишем уравнения поверхности фрезы с учетом этих смещений в виде:

$$\overline{Tr}(u, v, \phi, Rx, Ht) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \left(\overline{tor}(u, v) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Ht \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда единичный вектор нормали поверхности тора в точке с криволинейным координатами (u, v) имеет вид:

$$\overline{Nt}(u, v, \phi) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin \phi \sin u + \cos \phi \cos u \sin v \\ \cos \phi \sin u - \sin \phi \cos u \sin v \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти точки касания поверхности детали и тора (фрезы), используем два условия: параллельность нормалей этих поверхностей в точке касания, и принадлежность этой точки обеим поверхностям.

Из условия параллельности нормалей:

$$\overline{Ns}(v_k, \alpha_0) \times \overline{Nt}(u, v, \phi) = 0$$

при $\alpha = \alpha_0$ получаем 2 уравнения на 3 неизвестных, u, v, ϕ , из которых можно выразить u и v через ϕ :

$$\begin{aligned} \tan(u) &= \frac{\sin(v_k + \phi)g_1(v_k, \alpha_0) - \cos(v_k + \phi)g_2(v_k, \alpha_0)}{\sqrt{g_0(v_k, \alpha_0)^2 + g_1(v_k, \alpha_0)^2}}, \\ \tan(v) &= \frac{\cos(v_k + \phi)g_1(v_k, \alpha_0) + \sin(v_k + \phi)g_2(v_k, \alpha_0)}{g_0(v_k, \alpha_0)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условие наличия общей точки у поверхностей:

$$\overline{Tr}(u, v, \phi, Rx, Ht) = \overline{Fs}(v_k, \alpha_0)$$

приводит к ещё трём уравнениям на 3 неизвестных ϕ, Rx и Ht (после подстановки в эти уравнения соотношений (3.6)). Аналитическое решение этой системы приводит к трансцендентному уравнению на ϕ , корни которого находятся численно с помощью встроенных программ пакета MathCad. Благодаря специальному созданному алгоритму нахождения начальных приближений, корни находятся с высокой точностью (порядка 10^{-12} мм). На рис. 8 изображено положение торической

фрезы при её касании с поверхностью зуба шестерни в точке заданной линии на этой поверхности.

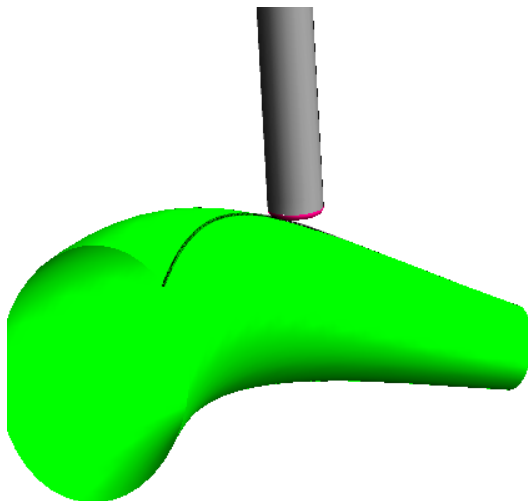


Рис. 8. Контактное взаимодействие поверхности зуба шестерни с торической фрезой

Решенные в данной работе задачи были использованы при разработке компьютерных программ для станка с ЧПУ, управляющих движением фрез при формообразовании деталей различных механизмов с ЭЦ-зацеплением. Эти программы успешно применяются при изготовлении в ЗАО «Технология маркет» (г. Томск) опытных образцов конических тяговых редукторов для железнодорожного транспорта и двухступенчатого редуктора [3], который прошел успешные испытания на фирме SEW (Германия).

ЛИТЕРАТУРА

1. Камчатный С.А., Сквородин А.В., Становской А.В., Щербаков Н.Р. Математическое моделирование процесса сближения поверхностей при формообразовании деталей передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4(20). С. 15–24.
2. Патент РФ 2439401. Эксцентриково-циклоидальное зацепление зубчатых профилей (варианты) / В.В. Становской, С.М. Казакивичус, Т.А. Ремнева, В.М. Кузнецов, А.В. Становской. Заявлено 29.01.2010; опубл. 10.01.2012, Бюлл. № 1.
3. Становской В.В., Казакивичус С.М., Ремнева Т.А. и др. Двухступенчатый редуктор на основе эксцентриково-циклоидального зацепления (зацепление ExSyGear) // Вестник машиностроения. 2011. № 12. С. 41–44.

Статья поступила 14.03.2014 г.

Kamchatnyi S.A., Kuznetsov V.M., Skovorodin A.V., Scherbakov N.R. MATHEMATICAL SIMULATION OF THE FORMBUILDING OF THE CONIC DRIVING GEAR DETAILS WITH EC-GEARING. Formbuilding of the surface of a driving gear detail, in the most general formulation, is the task of two surfaces (the processed detail and the instrument's surface) closing in up in the space to the point of contact where the surfaces have the common contact plane. Solving the problem of analytical description of the geometry of the surface contact is necessary for finding optimum methods and tools of processing details on multicoordinate NC units. In this

aspect, a mathematical model for the formbuilding of conic driving gear details with EC-gearing has been constructed in this work using milling cutters of two types. Systems of equations for the determination of the milling cutter location, at the point contact, have been derived. Analytical and numerical solutions of these systems are found. The complex of special computer programs to control the milling cutter moving while processing the detail was developed.

Keywords: formbuilding, eccentrically cycloidal (EC) gearing, contact of surfaces

KAMCHATNIY Sergei Alexandrovich

(M.Sc, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: kam-serega2030@sibmail.com

KUZNETZOV Vladimir Mihailovich

(M.Sc, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: tm@mail.tomsknet.ru

SKOVORODIN Alexandr Vladimirovich

(M.Sc, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: tm@mail.tomsknet.ru

SHCHERBAKOV Nikolay Romanovich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: nrs@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Kamchatny S.A., Skovorodin A.V., Stanovskoy A.V., Shcherbakov N.R. Matematicheskoe modelirovanie protsessa sblizheniya poverkhnostey pri formoobrazovanii detaley pereda-tochnogo mekhanizma s ETs-zatsepleniem (2012) Vestnik Tomsk. gos. univ. Matematika i mekhanika. 4(20). pp. 15–24. (in Russian)
2. Patent RF 2439401. Ekstsentrlikovo-tsikloidal'noe zatseplenie zubchatykh profiley (varianty) / V.V. Stanovskoy, S.M. Kazakyavichyus, T.A. Remneva, V.M. Kuznetsov, A.V. Stanovskoy. Zayavleno 29.01.2010; opubl. 10.01.2012, Byull. No 1. (in Russian)
3. Stanovskoy V.V., Kazakyavichyus S.M., Remneva T.A., Kuznetsov V.M., Bubenchikov A.M., Shcherbakov N.R., Shmidt Y. Dvukhstupenchatyy reduktor na osnove ekstsentrlikovo-tsikloidal'nogo zatsepleniya (zatseplenie ExSyGear) (2011) Vestnik mashinostroeniya, No. 12, pp. 41–44. (in Russian)

И.А. Колесников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ НА СЧЕТНОУГОЛЬНИК

Метод П.П. Куфарева определения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца распространяется на случай конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π .

Ключевые слова: конформное отображение, счетноугольник, симметрия переноса, акцессорные параметры, метод П.П. Куфарева.

Область Δ называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π , если при линейном преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ область остается неизменной $L(\Delta) = \Delta$.

Область Δ называют областью типа полуплоскости, если при преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ среди всех простых концов границы области Δ в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Определение 1. Счетноугольником с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π называют [1] односвязную область Δ типа полуплоскости, с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π , такую, что часть границы области Δ от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ состоит из конечного числа прямолинейных отрезков и лучей.

Двигаясь по границе счетноугольника Δ от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ в положительном направлении, обозначим последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0, A_1^1$, $A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$, а углы счетноугольника обозначим соответственно через $\alpha_{1\pi}, \alpha_{2\pi}, \dots, \alpha_{n\pi}, \alpha_{1\pi}$. Для вершин A_k^0 в конечной части плоскости $\alpha_k \in (0, 1) \cup (1, 2]$, если вершина A_k^0 находится в бесконечно удаленной точке, то $\alpha_k = 0$. Из геометрических соображений видим, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n$. Остальные вершины A_k^m определяются сдвигом вершин A_k^0 вдоль вещественной оси $A_k^m = A_k^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, n$.

Согласно теореме Римана существует отображение f однолистно и конформно переводящее верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ на счетноугольник Δ . Интерес к конформным отображениям верхней полуплоскости на счетноугольники с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π появился в последние десятилетия [2, 3] благодаря приложению к некоторым задачам гидродинамики, задачам теплопроводности, СВЧ теории и др.. Интегральная формула Кристоффеля-Шварца записана для отображения f верхней полуплоскости на счетноугольник с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π И.А. Александровым [4] с использованием принципа симметрии Римана-Шварца, С.А. Копаневым и Л.С. Копаневой [1] с помощью формулы типа формулы Шварца в следующей теореме.

Теорема 1. Для отображения f , переводящего верхнюю полуплоскость на счетноугольник и удовлетворяющему условию $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} (f(z) - z) = 0$, имеет место формула (типа формулы Кристоффеля-Шварца)

$$f(z) = c_1 \int_0^z \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{a_k^0 - \zeta}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2, \quad (1)$$

где c_1, c_2 , – комплексные постоянные, $a_k^0 \in [0, 2\pi)$ – прообразы вершин счетноугольника с углами $\alpha_k \pi$.

На отображение f наложено дополнительно условие

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} (f(z) - z) = 0,$$

предел здесь равномерный относительно $\operatorname{Re} z$. Заметим, что это условие влечет за собой свойство $f(z + 2\pi m) = f(z) + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

В задачах на нахождение конформного отображения задаются вершины области, а прообразы вершин a_k и константы c_1, c_2 , называемые аксессуарными параметрами, как и в классической формуле Кристоффеля-Шварца остаются неизвестными. К настоящему времени разработаны различные эффективные методы численного определения этих параметров в классической формуле Кристоффеля-Шварца. Один из таких методов определения аксессуарных параметров восходит к работе П.П. Куфарева [6] (см., более подробно, [7]). Используя параметрический метод Левнера, П.П. Куфарев показал, что для отображения с внутренней нормировкой определение аксессуарных параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца может быть сведено к задаче интегрирования некоторой системы дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши. Первые доведенные до конца расчеты выполнены Ю.В. Чистяковым [8]. Метод П.П. Куфарева получил развитие в работе [9], в работе [10] применительно к случаю конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольник при наличии граничной нормировки. В работе [11] с использованием идеи П.П. Куфарева и аппарата краевых задач Гильберта с кусочно-гладкими коэффициентами и вариации решений таких задач получен новый приближенный метод нахождения аксессуарных параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца. В настоящей статье метод П.П. Куфарева определения аксессуарных параметров распространяется на случай конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π .

Пусть D есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π типа полуплоскости, представляющая собой плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по попарно не пересекающимся простым кривым γ_m , уходящим на бесконечность, $\gamma_m = \gamma_0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, где γ_0 имеет некоторую параметризацию $\gamma_0 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_0 = \gamma_0(\xi)$. Часть кривой γ_0 , когда $\xi \in [s, +\infty) \subset [0, +\infty)$ обозначим через $\gamma_0^{(s)}$, то есть $\gamma_0^{(s)} : [s, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_0^{(s)} = \gamma_0(\xi)$.

Согласно теореме Римана для каждого $s \in [0, +\infty)$ существует однолистное и голоморфное отображение $\Psi_s : \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$, $\Psi = \Psi_s(z) = \Psi(z, s)$ такое, что

$$\Psi_s(\Pi^+) = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_m^{(s)} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_m(\xi), s \leq \xi < +\infty \right\}.$$

Ясно, что $\Psi_0(\Pi^+) = D$. Выберем параметризацию кривой $\gamma_0 = \gamma_0(s(t)) = \gamma_0(t)$ так, чтобы $0 \leq t < +\infty$ и выполнялось

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} (\Psi(z, t) - z) = 0.$$

Обозначим $\Psi_t(\Pi^+) = D(t)$. При фиксированном t $D(t)$ является частным случаем счетноугольника с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π .

Семейство отображений $\Psi(z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению типа уравнения Левнера [12]

$$\frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial z} \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - z}{2}. \quad (3)$$

Заметим, что $\lambda(t)$ при каждом фиксированном t – точка вещественной оси, являющаяся прообразом конца кривой $\gamma_0(t)$.

Построим континуальное семейство областей $D(t)$, $0 < t < \infty$, сходящееся к счетноугольнику Δ как к ядру относительно точки w_0 при t стремящемся к нулю, где w_0 принадлежит области Δ . Соединим какую-нибудь вершину A_k^0 , $k \in \{1, \dots, n\}$, и вершины $A_k^m = A_k^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, счетноугольника Δ с бесконечно удаленной точкой параллельными лучами l_0^m , целиком лежащими вне Δ . Проведем переменные разрезы $\gamma_0^m(t)$, $m \in \mathbb{Z}$, удлиняющиеся из бесконечно удаленной точки по лучам l_0^m до начала этих лучей, получим семейство областей $D(t_0) = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_0^m(t)$, $0 < t_0 \leq t < \infty$. Каждому разрезу может принадлежать не-

сколько вершин счетноугольника Δ , выделим какие-нибудь из них с одинаковой мнимой координатой. Выпустим из выбранных вершин прямолинейные разрезы $\gamma_1^m(t)$ вдоль некоторых сторон l_1^m счетноугольника Δ примыкающих к лучам l_0^m в этих вершинах так, чтобы подвижные концы разрезов при изменении t от t_0 до некоторого t_1 , $0 \leq t_1 \leq t_0$, проходили путь равный длине стороны l_1^0 счетноугольника Δ . Можем считать, что на этом и последующих этапах построения, для отображения $\Psi(z, t): \Pi^+ \rightarrow D(t)$ выполняется условие (2). Если

$D(t_1) = \left(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_0^m(t) \right) \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_1^m(t) \neq \Delta$, то $t_1 > 0$ и в этом случае продолжаем по-

строение, принимая область $D(t_1)$ за исходную и проводя в ней разрезы $\gamma_2^m(t)$ вдоль некоторых сторон l_2^m счетноугольника, примыкающих к $l_0^m \cup l_1^m$. Получим

область $D(t_2) = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{k=0}^2 \gamma_k^m(t)$, $0 \leq t_2 < t_1$. После n аналогичных шагов будет

построена полигональная область $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{k=0}^{n-1} \gamma_k^m(t)$ без внешних точек, содержащая счетноугольник Δ и не включающая в свою границу сторон l_n^m , $m \in \mathbb{Z}$, этого счетноугольника. Проведя надлежащие разрезы γ_n^m , $m \in \mathbb{Z}$, вдоль этих сторон счетноугольника Δ , получим семейство областей, сходящееся к счетноугольнику Δ как к ядру относительно точки w_0 при t стремящемся к нулю.

Семейство отображений $\Psi: \Pi^+ \rightarrow D(t)$ можем выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие (2) и $\Psi(0, t) = A_1^0$ для всех $t \in [0, \infty)$. Равномерная сходимость внутри верхней полуплоскости семейства отображений $\Psi(z, t)$ к отображению f следует из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность односвязных областей, $D_n \subset \overline{\mathbb{C}}$. Все области D_n , $n \in \mathbb{N}$, содержат точку w_0 вместе с некоторой ε -окрестностью, границе каждой области D_n , $n \in \mathbb{N}$, принадлежат точки w_1, w_2, w_3 . При n стремящемся к бесконечности последовательность областей D_n сходится к ядру D относительно точки w_0 , причем границе области D принадлежат точки w_1, w_2, w_3 . Тогда последовательность отображений $f_n: \Pi^+ \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f_n(\Pi^+) = D_n$, нормированных условиями $f_n(0) = w_1$, $f_n(1) = w_2$, $f_n(\infty) = w_3$, сходится к отображению $f: \Pi^+ \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(\Pi^+) = D$, при n стремящемся к бесконечности равномерно внутри Π^+ , причем $f(0) = w_1$, $f(1) = w_2$, $f(\infty) = w_3$.

Доказательство. Пусть последовательность отображений $g_n: \Pi^+ \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $g_n = g_n(\zeta)$, $g_n(\Pi^+) = D_n$ удовлетворяет условиям $g_n(\zeta_0) = w_0$, $g'_n(\zeta_0) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, где $\zeta_0 \in \Pi^+$. Согласно теореме Каратеодори о сходимости последовательности областей к ядру, последовательность отображений g_n равномерно сходится к голоморфному однолиственному отображению g , $g(\Pi^+) = D$ внутри верхней полуплоскости. Обозначим прообразы точек w_1, w_2, w_3 при отображении g через a, b, c соответственно, пусть, для определенности, $a < b < c$. Обозначим прообразы точек w_1, w_2, w_3 при отображении g_n через $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, $c_n = c + \gamma_n$ соответственно.

Построим последовательность дробно-линейных отображений $\zeta_n = \zeta_n(z)$, удовлетворяющую условиям $\zeta_n(0) = a_n$, $\zeta_n(1) = b_n$, $\zeta_n(\infty) = c_n$. Предположим сначала, что точки a, b, c – конечные, тогда отображение ζ_n будет иметь вид

$$\zeta_n(z) = \frac{z(b - a + \beta_n - \alpha_n)(c + \gamma_n) - (b - c + \beta_n - \gamma_n)(a + \alpha_n)}{z(b - a + \beta_n - \alpha_n) - (b - c + \beta_n - \gamma_n)}.$$

При n стремящемся к бесконечности последовательность отображений ζ_n сходится к отображению

$$\zeta(z) = \frac{z(b - c)c - (b - c)a}{z(b - c) - (b - c)}.$$

Покажем, что последовательность отображений ζ_n сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению ζ , т. е. что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что $|\zeta_n(z) - \zeta(z)| < \varepsilon$ при любом $n > N$ и для всякого $z \in K$, где K – компакт, содержащийся в верхней полуплоскости. Поскольку z принадлежит замкнутому, ограниченному множеству K , то существуют $\max_{z \in K} |z|$ и $\min_{z \in K} \operatorname{Im} z$, обозначим их соответственно M и m . Последовательности a_n, b_n, c_n сходятся к числам a, b, c , следовательно, можно указать такой номер N , что при $n > N$ выполняется $|\alpha_n| < \delta, |\beta_n| < \delta, |\gamma_n| < \delta$, для любого $\delta > 0$, пусть

$$\delta \leq \frac{|b-a|}{3}. \quad (4)$$

Оценим модуль разности отображений ζ и ζ_n для $n > N$, имеем

$$|\zeta_n(z) - \zeta(z)| \leq \frac{|z|^2 A_n + |z| B_n + C_n}{|z(b-a+\beta_n-\alpha_n)+c-b+\gamma_n-\beta_n||z(b-c)+c-b|}, \quad (5)$$

где последовательности A_n, B_n, C_n выражаются через $a, b, c, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$. Оценим сверху последовательность A_n , имеем

$$A_n = |\gamma_n((b-a)^2 + (b-a)(\beta_n - \alpha_n))| \leq \delta((b-a)^2 + |b-a|2\delta).$$

В силу (4), заключаем, что

$$A_n \leq \delta A,$$

где $A = \frac{5}{3}(b-a)^2$ – константа. Аналогично, для B_n, C_n получаем

$$B_n \leq \delta B, \quad C_n \leq \delta C.$$

Оценим знаменатель правой части неравенства (5). Для первого множителя, учитывая (4) получаем

$$\begin{aligned} |z(b-a+\beta_n-\alpha_n)+c-b+\gamma_n-\beta_n| &\geq |b-a+\beta_n-\alpha_n| \operatorname{Im} z \geq \\ &\geq (|b-a|-2\delta) \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{3}|b-a| \operatorname{Im} z, \end{aligned}$$

и для второго

$$|z(b-a)+c-b| \geq |b-a| \operatorname{Im} z.$$

Таким образом

$$|\zeta_n(z) - \zeta(z)| \leq \delta R,$$

где

$$R = 3 \frac{M^2 A + MB + C}{m^2 (b-a)^2}.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta > 0$ удовлетворяющее условию (4) и $\delta \leq \frac{\varepsilon}{R}$, получим

$$|\zeta_n(z) - \zeta(z)| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь случай когда $c = \infty$. Отображение

$$\zeta_n(z) = z(b-a+\beta_n-\alpha_n) + a + \alpha_n$$

переводит верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость так, что $\zeta_n(0) = a_n$, $\zeta_n(1) = b_n$, $\zeta_n(\infty) = c_n$ и при n стремящемся к бесконечности сходится к отображению

$$\zeta(z) = z(b-a) + a.$$

Покажем, что последовательность отображений ζ_n сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению ζ . Пусть $z \in K$, где K – компакт, обозначим $\max_{z \in K} |z|$ через M . Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем такое N , чтобы $|\alpha_n| < \delta$, $|\beta_n| < \delta$, при всех $n > N$, где

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2M+1}.$$

Оценим модуль разности отображений ζ и ζ_n для $n > N$, имеем

$$|\zeta_n(z) - \zeta(z)| = |z(\beta_n - \alpha_n) + \alpha_n| \leq |z| |\beta_n| + |z| |\alpha_n| + |\alpha_n| \leq \delta(2M+1) \leq \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность отображений ζ_n сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению ζ , $\zeta(0) = a$, $\zeta(1) = b$, $\zeta(\infty) = c$.

Пусть точка $z \in K$, K – компакт, $K \subset \Pi^+$. Начиная с некоторого номера N_1 , образ точки z при отображении ζ_n содержится в $U_{\varepsilon_1}(\zeta(z))$ – окрестности точки $\zeta(z)$ радиуса ε_1 . Функция $|g'|: \zeta(K) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, задана на компакте, и, в силу теоремы Вейерштрасса, принимает в $\zeta(K)$ наибольшее значение, $|g'(\zeta)| \leq h < \infty$ для всех $\zeta \in \zeta(K)$. Следовательно, при достаточно малых ε_1 , окружность $|\zeta - \zeta(z)| = \varepsilon_1$ переходит в кривую, такую, что расстояние от любой ее точки до окружности $|w - g(\zeta(z))| = h\varepsilon_1$ является малой высшего порядка относительно ε_1 т. е. образ окрестности $U_{\varepsilon_1}(\zeta(z))$ содержится в окрестности точки $g(\zeta(z))$ радиуса $\varepsilon_1(h+1)$. Пусть $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(h+1)}$. Получаем, что

$$|g(\zeta_n(z)) - g(\zeta(z))| < \varepsilon_1(h+1) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

для всех $z \in K$ при $n \geq N_1$. Начиная с некоторого номера N_2 для всех $z \in K$ выполняется

$$|g(\zeta_n(z)) - g_n(\zeta_n(z))| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из неравенства треугольника следует, что начиная с номера $N = \max(N_1, N_2)$ выполняется

$$|g_n(\zeta_n(z)) - g(\zeta(z))| \leq |g(\zeta_n(z)) - g(\zeta(z))| + |g(\zeta_n(z)) - g_n(\zeta_n(z))| \leq \varepsilon,$$

для всех $z \in K$.

Получаем, что композиция $g_n(\zeta_n(z)) = f_n(z)$ сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению f . Теорема доказана.

Теорема 2 обычным образом обобщается на случай континуального семейства областей.

Теорема 2 может быть получена с помощью [13, теорема 14.6].

Таким образом, для отображения f , переводящего верхнюю полуплоскость Π^+ на счетноугольник Δ , существует производящая функция $\Psi(z, t)$, совпадающая с отображением f при $t = 0$.

Зафиксируем на границе счетноугольника Δ точки $A_*^m = A_*^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, где A_*^0 – точка, принадлежащая части границы счетноугольника от точки A_1^0 до точки A_1^1 и $A_*^0 \neq A_1^0$, $A_*^0 \neq A_1^1$. Из точек A_*^m проведем прямолинейные разрезы $\varphi^m = \varphi^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, переменной длины, зависящие от вещественного параметра $\varphi^0 = \varphi^0(t)$, $0 \leq t \leq \tau'$, внутри области Δ . С увеличением параметра t от 0 до некоторого τ'' , $0 \leq \tau'' \leq \tau'$, разрезы φ^m удлиняются соответственно до точек $\Lambda_*^m = \Lambda_*^0(\tau'') + 2\pi m$, $A_*^0 = \lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t)$. Обозначим прообраз конца разреза $\Lambda_*^0(t)$ через $\lambda(t)$, пусть $0 < \lambda(t) < 2\pi$ при $0 \leq t \leq \tau'$. Углы, образованные разрезом $\varphi^m(t)$ с границей области Δ , обозначим через $\alpha_{n+1}\pi$, $\alpha_{n+2}\pi$. При t стремящемся к τ' , разрезы $\varphi^m(t)$ могут замкнуться на границу счетноугольника Δ , в этом случае точка $\Lambda_*^0(\tau')$ попадает на часть границы счетноугольника от точки A_1^0 до точки A_1^1 и $\Lambda_*^0(\tau') \neq A_1^0$, $\Lambda_*^0(\tau') \neq A_1^1$. Обозначим через $\Delta(t)$ область Δ с разрезами, $\Delta(t)$ является счетноугольником с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π .

Обозначим через $f(z, t)$ отображение, переводящее верхнюю полуплоскость Π^+ на счетноугольник с разрезами $\Delta(t)$, такое, что $f(\Pi^+, 0) = \Delta$,

$\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z, t) - z) = 0$ и $f(0, t) = A_1^0$. Отображение $f(z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). С другой стороны отображение $f(z, t)$, согласно теореме 1 представляется интегралом

$$f(z, t) = c(t) \int_0^z \sin \frac{\lambda(t) - \zeta}{2} \prod_{k=1}^{n+2} \left(\sin \frac{a_k^0(t) - \zeta}{2} \right)^{\sigma_k} d\zeta + A_1^0, \quad (6)$$

где a_{n+1}^0 , a_{n+2}^0 – прообразы точки A_*^0 , $a_1^0 = 0$, $\lambda(t)$ – прообраз подвижного конца разреза $\Lambda_*^0(t)$, $0 < a_{n+1}^0 \leq \lambda(t) \leq a_{n+2}^0 < 2\pi$, $\sigma_k = \alpha_k - 1$, $k = 1, \dots, n+2$. Отметим, что параметры α_{n+1} и α_{n+2} связаны соотношениями $\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} = 1$, если $A_*^0 \neq A_k^0$, $k = 1, \dots, n$ и $\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} = \alpha_k$, если $A_*^0 = A_k^0$, $k = 1, \dots, n$.

Пусть при $t = 0$ известны значения всех параметров, входящих в формулу (6), то есть известно конформное отображение $f: \Pi^+ \rightarrow \Delta$, $f = f(z, 0)$. Требуется определить конформное отображение $f: \Pi^+ \rightarrow \Delta(t)$, $f = f(z, t)$, при всех допустимых значениях параметра t , иначе говоря, найти при таких t аксессуарные параметры $a_k^0(t)$, $\lambda(t)$, $c(t)$. Для определения аксессуарных параметров отображения f получен следующий результат.

Теорема 3. Для всех $0 \leq t \leq \tau'$ аксессуарные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{da_k^0(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \text{ctg} \frac{\lambda(t) - a_k^0(t)}{2}, \quad k = 2, \dots, n+2, \quad (7)$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - a_k^0(t)}{2}, \quad (8)$$

$$c(t) = \operatorname{const} = c_1, \quad (9)$$

с начальными условиями

$$a_k^0(0) = a_k^0, \quad k = 2, \dots, n+2,$$

$$a_{n+1}^0(0) = a_{n+2}^0(0) = \lambda(0) = f^{-1}(A^*, 0).$$

Замечание 1. Если $A_*^0 = A_p^0$, $p = 2, \dots, n$, то в формуле (7) отсутствует уравнение при $k = p$, а в формулах (8), (9) должно отсутствовать слагаемое при $k = p$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(z, t) = \ln f'_z(z, t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - z}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-2} \frac{\lambda(t) - z}{2}. \quad (10)$$

Поскольку

$$\Phi(z, t) = \ln c(t) + \ln \sin \frac{\lambda(t) - z}{2} + \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k \ln \sin \frac{a_k^0(t) - z}{2},$$

то ее частные производные относительно параметра t и переменной z имеют вид

$$\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = \frac{c'(t)}{c(t)} + \lambda'(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - z}{2} + \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k (a_k^0(t))' \operatorname{ctg} \frac{a_k^0(t) - z}{2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - z}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k \operatorname{ctg} \frac{a_k^0(t) - z}{2}. \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в уравнение (10) получим соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{c'(t)}{c(t)} + \lambda'(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - z}{2} + \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k (a_k^0(t))' \operatorname{ctg} \frac{a_k^0(t) - z}{2} = \\ & = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\lambda(t) - z}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - z}{2} \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k \operatorname{ctg} \frac{a_k^0(t) - z}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-2} \frac{\lambda(t) - z}{2}, \end{aligned}$$

которое должно выполняться при всех значениях параметра t и всех z из верхней полуплоскости.

Приравнявая вычеты левой и правой частей уравнения (13) в точках $z = a_k^0(t)$, $\lambda(t)$ и, сравнивая свободные члены, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_k^0(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - a_k^0(t)}{2}, \quad k = 2, \dots, n+2, \quad (14)$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k \operatorname{ctg} \frac{\lambda(t) - a_k^0(t)}{2}, \quad (15)$$

$$\frac{d \ln c(t)}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k,$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} a_k^0(t) &= a_k^0, \quad k = 2, \dots, n, \\ \lim_{t \rightarrow +0} a_{n+1}^0(t) &= \lim_{t \rightarrow +0} a_{n+2}^0(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \lambda(t) = f^{-1}(A_*^0, 0), \\ \lim_{t \rightarrow +0} c(t) &= c_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как $\sum_{k=1}^{n+2} \sigma_k = -1$, то

$$c(t) = \text{const} = c(0) = c_1. \quad (17)$$

Теорема доказана.

Уравнения (14), (15), (17) вместе с начальными условиями (16) для аксессуарных параметров позволяют путем интегрирования найти их значения в любой момент времени t , $0 \leq t \leq \tau'$.

Предположим, что разрез ϕ^0 выходит не из вершины счетноугольника Δ . Обозначим длину прямолинейного отрезка $|A_*^0, \Lambda_*^0(t)|$ через s . Поскольку

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{\partial f(\lambda, t)}{\partial t} \right|,$$

то, используя уравнение (3) и (6), можем показать что

$$\frac{ds}{dt} = \left| c(t) \prod_{k=1}^{n+2} \left(\sin \frac{a_k^0(t) - \lambda(t)}{2} \right)^{\sigma_k} \right|.$$

Таким образом, значение τ'' параметра t , до которого проводится интегрирование, определяется в процессе интегрирования из соотношения

$$|A_*^0, \Lambda_*^0(\tau'')| = \int_0^{\tau''} \left| c(t) \prod_{k=1}^{n+2} \left(\sin \frac{a_k^0(t) - \lambda(t)}{2} \right)^{\sigma_k} \right| dt,$$

если разрез ϕ^0 выходит не из вершины счетноугольника, и соотношением

$$|A_*^0, \Lambda_*^0(\tau'')| = \int_0^{\tau''} \left| c(t) \prod_{k=1, k \neq p}^{n+2} \left(\sin \frac{a_k^0(t) - \lambda(t)}{2} \right)^{\sigma_k} \right| dt,$$

если разрез выходит из вершины A_p^0 .

Для определения значения τ'' параметра t , до которого проводится интегрирование, также можно воспользоваться соотношением

$$|A_*^0, \Lambda_*^0(\tau'')| = \left| c_1 \int_{a_{n+1}^0(\tau'')}^{\lambda(\tau'')} \sin \frac{\lambda(\tau'') - \zeta}{2} \prod_{k=1}^{n+2} \left(\sin \frac{a_k^0(\tau'') - \zeta}{2} \right)^{\sigma_k} d\zeta \right|,$$

если разрез ϕ^0 выходит не из вершины счетноугольника, и соотношением

$$\left| A_*^0, \Lambda_*^0(\tau'') \right| = \left| c_1 \int_{a_{n+1}^0(\tau')}^{\lambda(\tau'')} \sin \frac{\lambda(\tau'') - \zeta}{2} \prod_{k=1, k \neq p}^{n+2} \left(\sin \frac{a_k^0(\tau'') - \zeta}{2} \right)^{\sigma_k} d\zeta \right|,$$

если разрез выходит из вершины A_p^0 .

Теорему 3 можно применять и в том случае, когда разрезы ϕ^m замыкаются на границу счетноугольника. Тогда при t стремящемся к τ' , r прообразов вершин $a_k^0(t)$ стягиваются в одну точку $\lim_{t \rightarrow \tau'} a_j^0(t) = \lim_{t \rightarrow \tau'} a_{j+1}^0(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow \tau'} a_{j+r}^0(t)$. Число r равно числу вершин счетноугольника $\Delta(t)$, которые отделяются от счетноугольника Δ разрезом ϕ^0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копанев С.А., Копанева Л.С.* Формула типа формулы Кристоффеля-Шварца для счетноугольника // Вестник Томск. ун-та. 2003. № 280. С. 52–54.
2. *Floryan J.M.* Schwarz-Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary // J. Comput. and Applied Math. 1993. No. 46. P. 77–102.
3. *Hussenpflug W.S.* Elliptic integrals and the Schwarz-Christoffel transformation // Computers Math. Applic. 1997. V. 33. No. 12. P. 15–114.
4. *Александров И.А.* Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Известия вузов. Мат. 1999. № 6(445). С. 15–18.
5. *Куфарев П.П.* Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля // ДАН СССР. 1947. Т. 57. №. 6. С. 535–537.
6. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
7. *Чистяков Ю.В.* Численный метод определения функции, конформно отображающей круг на многоугольники: дис. ... к. ф.-м. н. Томский гос. ун-т, 1953.
8. *Hopkins T.R., Roberts D.E.* Kufarev's metod for determining the Schwartz-Christoffel parameters // Numer. Math. 1979. No. 33. P. 353–365.
9. *Гутлянский В.Я., Зайдан А.О.* О конформных отображениях полигональных областей // Укр. матем. журн. 1993. Т. 45. № 11. С. 1464–1467.
10. *Насыров С.Р., Низамиева Л.Ю.* Определение аксессуарных параметров в смешанной обратной краевой задаче с полигональной известной частью границы // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. № 4. С. 34–40
11. *Александров И.А., Копанева Л.С.* Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса // Вестник Томск. ун-та. 2004. № 284. С. 5–7.
12. *Насыров С.Р.* Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей. Казань: Магариф, 2008. 276 с.

Статья поступила 17.02.2014 г.

Kolesnikov I.A. DETERMINATION OF ACCESSORY PARAMETERS FOR MAPPING ONTO A NUMERABLE POLYGON. We consider a simply connected region of the half-plane type with symmetry of translation along the real axis by 2π and such that a part of the boundary from a point w_0 to a point $w_0+2\pi$ consists of a finite number of straight line segments and rays. The region is called a numerable polygon with symmetry of translation along the real axis by 2π . Conformal mappings of the upper half-plane onto a numerable polygon find applications in some problems of hydrodynamics, heat conduction problems, microwave theory, etc. The representation of conformal mappings of the half-plane onto a numerable polygon with symmetry of translation along the real axis by 2π is known in a form of the Christoffel–Schwarz type integral. Different efficient numerical methods of finding the accessory parameters included in the classical Christoffel–Schwarz integral have been developed; one of them was proposed by P.P. Kufarev. In this paper, the problem of finding the accessory parameters in the Christoffel–Schwarz integral

for mapping onto a numerable polygon with symmetry of translation by 2π along the real axis is reduced to the problem of integrating a system of ordinary differential equations with Cauchy initial conditions by use of an idea of P.P. Kufarev. The system of differential equations is derived using the Christoffel–Schwarz formula for mapping onto a numerable polygon and the differential equation of the Loewner type for mapping the half-plane onto the plane with cuts along pairwise disjoint simple curves γ_m tending to infinity, $\gamma_m = \gamma_0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Keywords: conformal mapping, numerable polygon, symmetry of translation, accessory parameters, P.P. Kufarev's method.

KOLESNIKOV Ivan Aleksandrovich (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

REFERENCES

1. Kopanev S.A., Kopaneva L.S. Formula tipa formuly Kristoffelya-Shvartsa dlya schetnougol'nika (2003) Vestnik Tomsk. univ. No 28, pp. 52–54. (in Russian)
2. Floryan J.M. Schwarz-Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary (1993) J. Comput. and Applied Math. No. 46, pp. 77–102.
3. Hussenpflug W.S. Elliptic integrals and the Schwarz-Christoffel transformation (1997) Computers Math. Applic. V. 33. No. 12, pp. 15–114.
4. Aleksandrov I.A. Konformnye otobrazheniya poluploskosti na oblasti s simmetriey perenosy (1999) Izvestiya VUZov. Mat. No 6(445), pp. 15–18. (in Russian)
5. Kufarev P.P. Ob odnom metode chislennogo opredeleniya parametrov v integrale Shvartsa-Kristoffelya. (1947) Doklady Akad. Nauk SSSR. V. 57. No. 6, pp. 535–537. (in Russian)
6. Aleksandrov I.A. Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy. M.: Nauka, 1976. 344 p. (in Russian)
7. Chistyakov Yu.V. Chislennyy metod opredeleniya funktsii, konformno otobrazhayushchey krug na mnogougol'niki: diss. na soiskanie uchenoy stepeni k. f.-m. n. Tomsk. gos. univ (1953) (in Russian)
8. Hopkins T.R., Roberts D.E. Kufarev's metod for determining the Schwartz-Christoffel parameters (1979) Numer. Math. No 33, pp. 353–365.
9. Gutlyanskiy V.Ya., Zaydan A.O. O konformnykh otobrazheniyakh poligonal'nykh oblastey (1993) Ukr. matem. zhurn. V. 45. No 11, pp. 1464–1467. (in Russian)
10. Nasyrov S.R., Nizamieva L.Yu. Opredelenie aktsessornykh parametrov v smeshannoy obratnoy kraevoy zadache s poligonal'noy izvestnoy chast'yu granitsy (2011) Izv. Sarat. univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. V. 11. No 4, pp. 34–40. (in Russian)
11. Aleksandrov I.A., Kopaneva L.S. Levnerovskie semeystva otobrazheniy poluploskosti na oblasti s simmetriey perenosy (2004) Vestnik Tomsk. univ. No 284, pp. 5–7. (in Russian)
12. Nasyrov S.R. Geometricheskie problemy teorii razvetvlennykh nakrytiy rimanovykh poverkhnostey. Kazan': Magarif, 2008. 276 p. (in Russian)

УДК 517.54

Г.Д. Садритдинова

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Исследования, проведённые в данной работе, относятся к геометрической теории функций комплексного переменного. А именно, продолжается решение экстремальной задачи о нахождении управляющих функций в уравнении Лёвнера, приводящих к граничным функциям системы функционалов, зависящих от значения функции и её производной в фиксированной точке, на некоторых классах однолистных функций.

Ключевые слова: *граничная функция, класс голоморфных однолистных функций, максимальное значение функционала, минимальное значение функционала, уравнение Лёвнера, экстремальная управляющая функция.*

Задача о нахождении множества значений функционалов, зависящих от значения функции и её производных в фиксированной точке, является классической задачей геометрической теории функций комплексного переменного. Подобными функционалами занимались такие авторы как Л. Бибербах, Г.М. Голузин, И.Е. Базилевич, П.П. Куфарев, И.А. Александров и другие. Для исследований использовался, среди прочих, метод параметрических представлений Лёвнера, в основе которого лежит обыкновенное дифференциальное уравнение, в частном случае уравнение Лёвнера.

Пусть S – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Пусть S_p ($p=1, 2, \dots$) – подкласс класса S функций, обладающих p -кратной симметрией вращения относительно нуля, т.е. таких что

$$f\left(e^{i\frac{2\pi k}{p}} z\right) = e^{i\frac{2\pi k}{p}} f(z), \quad k=1, 2, \dots, p-1.$$

Подкласс S_p выделяется в самостоятельный класс функций, причём $S_1=S$.

Рассмотрим уравнение Лёвнера

$$\frac{d\zeta(z, \tau)}{d\tau} = -\zeta(z, \tau) \frac{\mu^p(\tau) + \zeta^p(z, \tau)}{\mu^p(\tau) - \zeta^p(z, \tau)}, \quad \zeta(z, 0) = z, \quad (1)$$

$$|z| < 1, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

в котором управляющая функция $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, является непрерывной или кусочно-непрерывной на $[0, \infty)$. Функции $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau} \zeta(z, \tau)$, которые мы называем предельными для решений уравнения Лёвнера, образуют плотный подкласс класса S_p .

Ставится задача выделить управляющие функции в уравнении Лёвнера, приводящие к так называемым граничным функциям системы функционалов

$$\left\{ \ln |f'(z)|, \arg f'(z), \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right|, \arg \frac{f(z)}{z}, \ln \left| \frac{f(z)}{zf'(z)} \right|, \arg \frac{f(z)}{zf'(z)} \right\}$$

на классах S и S_p , т.е. к функциям, вносящим граничные точки в область значений этих функционалов, обнаружить закономерности. Эта задача была решена для $\arg f'(z)$ на классе S И.А. Александровым и А.И. Александровым [1], на классе S_p ($p=2,3,\dots$) Г.Д. Садритдиновой [2], для $\ln |f'(z)|$ на классах S и S_p ($p=2,3,\dots$) Г.Д. Садритдиновой [3–4].

В настоящей работе задача решается для функционала $I = \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right|$ на классах S и S_p .

Выполним над уравнением (1) некоторые преобразования. Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varsigma} \frac{d\varsigma}{d\tau} &= -1 - \frac{2\varsigma^p}{\mu^p - \varsigma^p} \Rightarrow \frac{1}{\varsigma} \left(\varsigma + \frac{d\varsigma}{d\tau} \right) = -\frac{2\varsigma^p}{\mu^p - \varsigma^p} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{e^\tau \varsigma} \frac{d(e^\tau \varsigma)}{d\tau} = -\frac{2\varsigma^p}{\mu^p - \varsigma^p} \Rightarrow \frac{d(\ln e^\tau \varsigma)}{d\tau} = -\frac{2\varsigma^p}{\mu^p - \varsigma^p} \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее равенство по τ , $0 < \tau < \infty$, получим

$$\ln \frac{f(z)}{z} = -2 \int_0^\infty \frac{\varsigma^p(z, \tau)}{\mu^p(\tau) - \varsigma^p(z, \tau)} d\tau, \quad (2)$$

где $f(z) \in S_p$.

Множество значений функционала $\ln \frac{f(z)}{z}$ не зависит от $\arg z$, поэтому далее будем считать $z = r$, $0 < r < 1$.

Введём обозначения

$$|\varsigma(r, \tau)| = \rho(r, \tau), \quad \varsigma(r, \tau) \bar{\mu}(\tau) = \rho(r, \tau) y(r, \tau). \quad (3)$$

Тогда уравнение Лёвнера (1) после некоторых преобразований примет вид

$$\frac{d \ln \varsigma(r, \tau)}{d\tau} = -\frac{1 + \rho^p(r, \tau) y^p(r, \tau)}{1 - \rho^p(r, \tau) y^p(r, \tau)}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{d \ln \rho(r, \tau)}{d\tau} = -\frac{1 - \rho^{2p}}{|1 - \rho^p y^p|^2}, \quad (4)$$

и

$$i \frac{d \arg \varsigma(r, \tau)}{d\tau} = -\frac{\rho^p (y^p - \bar{y}^p)}{|1 - \rho^p y^p|^2}. \quad (5)$$

Равенство (2) с учётом обозначений (3) преобразуется к виду

$$\ln \frac{f(r)}{r} = -2 \int_0^\infty \frac{\rho^p y^p}{1 - \rho^p y^p} d\tau.$$

Заменим в последнем интеграле τ на ρ , используя формулу (4), которая свидетель-

ствуется об убывании функции $\rho(\tau)$, причём $\rho(r, 0) = r$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(r, \tau) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \ln \frac{f(r)}{r} &= 2 \int_0^r \frac{\rho^{p-1} y^p}{1 - \rho^p y^p} \cdot \frac{-|1 - \rho^p y^p|^2}{1 - \rho^{2p}} d\rho = -2 \int_0^r \frac{\rho^{p-1} y^p (1 - \rho^p \bar{y}^p)}{1 - \rho^{2p}} d\rho = \\ &= -2 \int_0^r y^p \frac{\rho^{p-1} d\rho}{1 - \rho^{2p}} - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}). \end{aligned}$$

Положив в полученном интеграле $\rho = \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{1}{p}}$, будем иметь

$$\ln \frac{f(r)}{r} = -\frac{1}{p} \int_{\sigma}^1 y^p \frac{ds}{s} - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}), \quad (6)$$

где $\sigma = \frac{1-r^p}{1+r^p}$. Заменим в (6) функцию $y(r, s)$ на вещественнозначную функцию

$t(r, s)$ по формуле $y = \left(\frac{i+t}{i-t}\right)^{\frac{1}{p}}$. Получим

$$\ln \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{p} \int_{\sigma}^1 \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \frac{ds}{s} - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}) + \frac{2i}{p} \int_{\sigma}^1 \frac{t}{1 + t^2} \frac{ds}{s}.$$

Таким образом,

$$\ln \left| \frac{f(r)}{r} \right| = \frac{1}{p} \int_{\sigma}^1 g(s, t) ds - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}), \quad (7)$$

$$\text{где } g(s, t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{s}.$$

Условие $g'_t(s, t) = 0$ даёт $t(s) = 0$ и $t(s) = \infty$.

Вычислив в (7) интеграл при $t(s) = 0$, приходим к минимальному значению

$$\ln \frac{1}{(1 + r^p)^{2/p}} \text{ функционала } \ln \left| \frac{f(r)}{r} \right| \quad [5].$$

Восстановим $\mu(\tau)$, соответствующую минимуму функционала I . При $t = 0$ имеем $y = 1^{1/p}$. Проинтегрировав при таких y уравнение (4) с начальным условием $\rho(r, 0) = r$, получаем

$$\rho(r, \tau) = \left[\frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4K_1(r)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_1(r)e^{-p\tau}} \right]^{\frac{1}{p}},$$

где $K_1(r) = \frac{r^p}{(1 + r^p)^2}$. Уравнение (5) при $y = 1^{1/p}$ принимает вид $\frac{d \arg \zeta(r, \tau)}{d\tau} = 0$.

С учётом начального условия $\arg \zeta(r, 0) = 0$ находим $\arg \zeta(r, \tau) = 0$.

Поскольку получили $\zeta(r, \tau) = \rho(r, \tau)$, то из формул (3) следует, что $\bar{\mu} = 1^{1/p}$ и, соответственно, $\mu = 1^{1/p}$ – экстремальные управляющие функции, дающие функционалу I минимум.

Интегрирование уравнения Лёвнера (1) с $\mu = 1^{1/p}$ даёт решение

$$\zeta(z, \tau) = \left[\frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4K_1(z)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_1(z)e^{-p\tau}} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Однозначная ветвь функции ζ выбирается в соответствии с условием

$$\zeta(z, \tau) = e^{-\tau} z + \dots \quad \text{Функция} \quad f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau} \zeta(z, \tau) = \frac{z}{(1 + z^p)^{2/p}} \in S_p \quad \text{является гранич-}$$

ной функцией относительно функционала I , на которой функционал достигает своего минимального значения.

Вычислив теперь интеграл в (7) при $t = \infty$, приходим к максимальному значению $\ln \frac{1}{(1 - r^p)^{2/p}}$ функционала $\ln \left| \frac{f(r)}{r} \right|$ [5].

Восстановим $\mu(\tau)$, соответствующую максимуму функционала I . При $t = \infty$ получаем $y = (-1)^{1/p}$. Интегрирование уравнения (4) с такими y и с начальным условием $\rho(r, 0) = r$ даёт решение

$$\rho(r, \tau) = \left[\frac{\left(1 - \sqrt{1 + 4K_2(r)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_2(r)e^{-p\tau}} \right]^{\frac{1}{p}},$$

где $K_2(r) = \frac{r^p}{(1 - r^p)^2}$. Уравнение (5) при $y = (-1)^{1/p}$ с начальным условием

$\arg \zeta(r, 0) = 0$ даёт $\arg \zeta(r, \tau) = 0$. Таким образом, из формул (3) следует, что $\mu = (-1)^{1/p}$ – экстремальные управляющие функции, приводящие к максимуму функционала I .

Проинтегрировав уравнение Лёвнера (1) с $\mu = (-1)^{1/p}$, получаем

$$\zeta(z, \tau) = \left[\frac{\left(1 - \sqrt{1 + 4K_2(z)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_2(z)e^{-p\tau}} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau} \zeta(z, \tau) = \frac{z}{(1 - z^p)^{2/p}} \in S_p$ – граничная функция для функциона-

ла I , на которой функционал достигает своего максимума.

Итак, экстремальные управляющие функции, приводящие к граничным значениям функционала I на классе S_p , найдены.

Положив везде $p = 1$, найдём экстремальные управляющие функции для функционала I на классе S . Так, $\mu = 1$ приводит к минимальному значению, а $\mu = -1$ – к максимальному значению данного функционала.

Добавим, что экстремальные управления на классе S_p ($p=1,2,\dots$) для функционала $\ln \left| \frac{f(z)}{z} \right|$ оказываются такими же, как и для функционала $\ln |f'(z)|$ [3–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А., Александров А.И. Экстремальные управляющие функции в уравнении Лёвнера в теореме вращения // ДАН. 2000. Т. 371. № 1. С. 7–9.
2. Садритдинова Г.Д. Управляющие функции и аргумент производной // Вестник Томского государственного университета. Математика. Кибернетика. Информатика. 2003. № 280. С. 78–80.
3. Садритдинова Г.Д. Управляющие функции и модуль производной // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 299. С. 104–105.
4. Садритдинова Г.Д. Экстремальное управление для модуля производной на классе p -симметричных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 54–57.
5. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 17.11.2013 г.

Sadritdinova G. D. EXTREME CONTROL FOR A FUNCTIONAL ON CLASSES OF ANALYTICAL FUNCTIONS.

Keywords: Boundary function, class of univalent holomorphic functions, the maximum value of the functional, minimal value of the functional, Loewner's equation, extreme control function.

Let S be the class of holomorphic univalent functions $f(z)$ normalized by conditions $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ in a unit circle $E = \{z : |z| < 1\}$ functions $f(z)$, rated conditions $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Let S_p ($p = 1, 2, \dots$) is a subclass of the class S of functions possessing p -multiple symmetry of rotation with respect to zero, that is, such that

$$f\left(e^{i\frac{2\pi k}{p}}z\right) = e^{i\frac{2\pi k}{p}}f(z), \quad k=1,2,\dots,p-1.$$

The subclass S_p is distinguished as an independent class of functions, and $S_1=S$.

We consider Loewner's equation

$$\frac{d\zeta(z,\tau)}{d\tau} = -\zeta(z,\tau)\frac{\mu^p(\tau) + \zeta^p(z,\tau)}{\mu^p(\tau) - \zeta^p(z,\tau)}, \quad \zeta(z,0) = z$$

$$|z| < 1, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

in which control function $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)|=1$, is continuous or piecewise-continuous on $[0,\infty)$. Functions $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau} \zeta(z,\tau)$ which we call limiting for solutions of the Loewner equation form a dense subclass of the class S_p .

In this article the problem of finding control functions leading to boundary functions of the functional $I = \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right|$ in Loewner's equation on classes S and S_p is solved by the parametrical method.

The set of values of this functional does not depend on $\arg z$ therefore, from now on we suppose $z=r$, $0 < r < 1$.

Executing some transformations over Loewner's equation, introducing the designations

$$|\zeta(r,\tau)| = \rho(r,\tau), \quad \zeta(r,\tau)\bar{\mu}(\tau) = \rho(r,\tau)y(r,\tau)$$

and substituting $\rho = \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{1}{p}}$ and $y = \left(\frac{i+t}{i-t}\right)^{\frac{1}{p}}$, we have

$$\ln \left| \frac{f(r)}{r} \right| = \frac{1}{p} \int_{\sigma}^1 g(s, t) ds - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}),$$

where $g(s, t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{s}$, $\sigma = \frac{1 - r^p}{1 + r^p}$.

The condition $g'(s, t) = 0$ yields $t(s) = 0$ and $t(s) = \infty$. The solution $t(s) = 0$ leads to extreme control functions $\mu = 1^{1/p}$, providing a minimum to the studied functional. Function

$f(z) = \frac{z}{(1+z^p)^{2/p}} \in S_p$, as applied to the functional I , is a boundary function at which the func-

tional reaches the minimum value. As $t(s) = \infty$, we find extreme control functions $\mu = (-1)^{1/p}$,

leading to a maximum of the functional I . The boundary function $f(z) = \frac{z}{(1-z^p)^{2/p}} \in S_p$ pro-

vides a maximum to the functional I .

Setting everywhere $p = 1$, we find extreme control functions for the functional I on the class S .

REFERENCES

1. Aleksandrov I.A., Aleksandrov A.I. Ekstremal'nye upravlyayushchie funktsii v uravnenii Levnera v teoreme vrashcheniya (2000) Doklady Akad. Nauk V. 371. No 1, pp. 7–9. (in Russian)
2. Sadritdinova G.D. Upravlyayushchie funktsii i argument proizvodnoy (2003) Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Kibernetika. Informatika. No 280, pp. 78–80. (in Russian)
3. Sadritdinova G.D. Upravlyayushchie funktsii i modul' proizvodnoy (2007) Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. No 299, pp. 104–105. (in Russian)
4. Sadritdinova G.D. Ekstremal'noe upravlenie dlya modulya proizvodnoy na klasse r-simmetrichnykh funktsiy (2007) Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. No 1, pp. 54–57. (in Russian)
5. Aleksandrov I.A. Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy. M.: Nauka, 1976. (in Russian)

SADRITDINOVA Gulnora Dolimdganovna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: dolina1@sibmail.com

МЕХАНИКА

УДК 532.542

Е.И. Борзенко, О.А. Дьякова

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ В СЛУЧАЕ
ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ИЗОГНУТОМ КАНАЛЕ¹**

Исследуется напорное течение вязкой несжимаемой жидкости в изогнутом под прямым углом канале. Рассматриваются три модели взаимодействия жидкости с твердой стенкой, которые соответствуют следующим граничным условиям: прилипание, проскальзывание по закону Навье и проскальзывание с предельным напряжением. Задача решается численно с помощью конечно-разностного алгоритма. В результате расчетов получены картины установившегося течения с образованием циркуляционных зон вблизи угловых точек. Проведены параметрические исследования влияния моделей взаимодействия и основных параметров на картину течения.

Ключевые слова: *течение, вязкая жидкость, граничное условие, изогнутый канал, численное моделирование.*

В технологии переработки полимерных материалов широко реализуются течения в различных элементах технологической оснастки. Полимерная композиция в текучем состоянии являются вязкой жидкостью. При математическом моделировании на стенке традиционно используется условие прилипания. Однако, экспериментальные данные [1–2] показывают нарушение условия прилипания на твердой стенке, в результате чего реализуется условие скольжения. Подобные явления могут привести к дефектам в готовом изделии, в частности, эффекту «акульей кожи» («shark-skin effect») [3].

В работе [4] на примере задачи о течении в плоском канале рассматриваются модели взаимодействия жидкости с твердой стенкой, в которых касательная скорость является функцией нормального и касательного напряжений. Установившееся течение при заданном перепаде давления в плоском канале с различной геометрией поперечного сечения с учетом условия скольжения Максвелла исследуется в [5]. Численная реализация условия скольжения Навье для метода конечных элементов применительно к плоским и пространственным течениям подробно рассмотрена в работе [6]. Исследования течений вязкой жидкости в микроканалах с учетом условия проскальзывания на твердых стенках проводятся в [7, 8].

В настоящей работе исследуется плоское течение несжимаемой ньютоновской жидкости в изогнутом под прямым углом канале. При этом рассматриваются три задачи с различными граничными условиями на твердой стенке: прилипание, проскальзывание Навье и проскальзывание с предельным напряжением.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№12-08-00313а) и в рамках госзадания Минобрнауки РФ (регистрационный номер НИР 7.3960.2011).

Постановка задачи

Исследуется плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в изогнутом канале с заданным постоянным расходом во входном сечении. Математическая постановка течения включает уравнение Навье-Стокса и неразрывности, которые в безразмерных переменных в векторном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \Delta \mathbf{U}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (U, V)$ – вектор скорости, p – давление, $\operatorname{Re} = \rho U_0 L / \mu$ – число Рейнольдса, ρ – плотность жидкости, μ – динамическая вязкость. В качестве безразмерных масштабов длины, скорости, времени, давления используются величины: L – ширина входного канала, U_0 – среднерасходная скорость во входном сечении, L/U_0 , $\mu U_0 / L$ соответственно.

Область течения представлена на рис.1. Жидкость подается через входное сечение Γ_2 . При этом профиль скорости совпадает с параболическим профилем, характерным для установившегося течения ньютоновской жидкости в плоском бесконечном канале с заданным единичным расходом и соответствующими физической постановке условиями на твердой стенке. В выходном сечении Γ_3 используются мягкие граничные условия, заключающиеся в равенстве нулю производных по нормали к границе от компонентов вектора скорости. Входная и выходная границы находятся на достаточном удалении от уступа во избежание влияния последнего на характер течения в окрестности Γ_2 и Γ_3 . Отношение поперечных размеров входного и выходного каналов составляет 1:4.

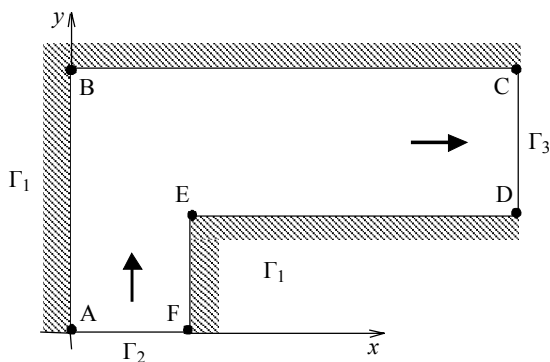


Рис. 1. Область течения

На твердой стенке наряду с традиционным условием прилипания $\mathbf{U}=0$ (модель 1) рассматривается условие проскальзывания Навье (модель 2), в соответствии с которым касательная скорость на твердых границах Γ_1 пропорциональна касательному напряжению. В условиях данной постановки в безразмерной форме оно имеет вид

$$\begin{cases} u_s = \beta \frac{\partial u_s}{\partial n}, \\ u_n = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\beta = \beta^* \mu / L$ – безразмерный коэффициент проскальзывания, β^* – размерный коэффициент проскальзывания, u_s – касательная скорость, u_n – нормальная скорость.

Третьей исследуемой моделью является модель проскальзывания с предельным напряжением, согласно которой жидкость на твердой стенке Γ_1 начинает проскальзывать вдоль нее, если касательное напряжение на стенке превышает некое предельное напряжение. Особенностью такой модели является то, что при ее использовании на твердой границе возникают участки, на которых выполняется условие прилипания. Условие проскальзывания для модели с предельным напряжением в безразмерной форме записывается в виде

$$\begin{cases} u_s = 0, u_n = 0, \text{ если } \tau \leq \tau_0 \\ |u_s| = \beta \left(\left| \frac{du_s}{dn} \right| - \tau_0 \right), u_n = 0, \text{ если } \tau > \tau_0 \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau_0 = \frac{\tau_0^* L}{\mu U}$ – безразмерный критерий, $\tau = \left| \frac{\partial u_s}{\partial n} \right|$ – касательное напряжение, τ_0^* – размерное предельное напряжение. Условие проскальзывания (3) для модели с предельным напряжением при $\tau_0 = 0$ переходит в условие проскальзывания Навье (2).

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию полей скорости и давления, которые будут удовлетворять уравнениям системы (1) с заданными граничными условиями.

Метод решения

Поставленная задача решается численно с помощью конечно-разностного метода. Для нахождения полей скорости и давления в расчетных узлах разнесенной сетки используется алгоритм PISO [9], широко применяемый для решения задач о течении вязких жидкостей. Расчет на каждом итерационном шаге состоит из двух стадий. На первой стадии рассчитывается поле скорости, а на второй – корректируются поля давления и скорости, чтобы последнее удовлетворяло уравнению неразрывности.

Для проверки аппроксимационной сходимости был проведен ряд расчетов на последовательности сеток. На рис. 2 представлено распределение скорости U в сечении $x = 2$, проходящим через циркуляционную зону вблизи уступа E . Результаты

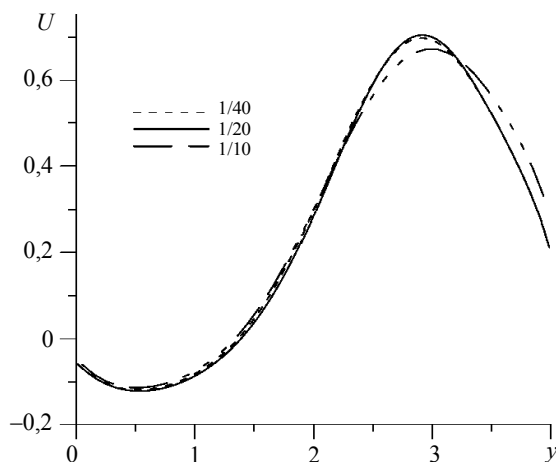


Рис. 2. Распределение скорости U в сечении $x = 2$
(Модель 2, $Re = 40$, $\beta = 0,2$)

на сетках с шагом по пространству $1/20$ и $1/32$ практически не отличаются, поэтому все дальнейшие расчеты проводились на сетке с шагом по пространству $1/20$.

Сравнение результатов расчета течения с учетом условия прилипания по описанной методике с результатами, полученными с помощью пакета прикладных программ с открытым исходным кодом OpenFOAM, представлено на рис. 3. Наблюдается качественное и количественное согласование результатов.

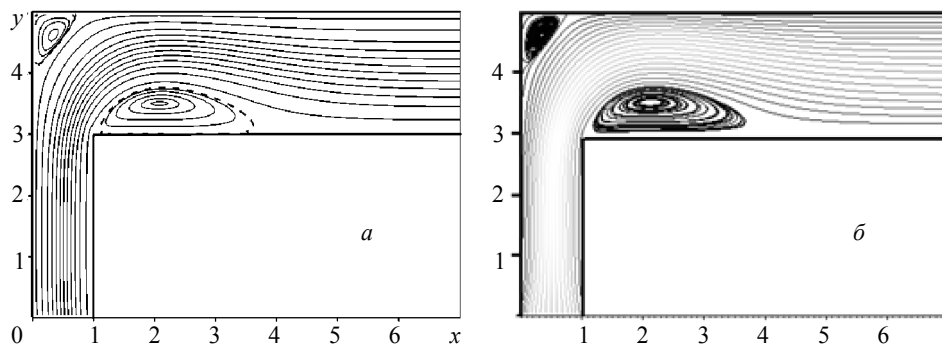


Рис. 3. Линии тока при $Re = 40$
(*a* – настоящая работа, *б* – пакет OpenFOAM)

Результаты расчетов

Численные расчеты показали, что для описанных выше моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой формируется установившийся режим течения. В окрестностях входной и выходной границ реализуются плоскопараллельное течение с параболическим профилем скорости; в окрестности угловых точек образуются циркуляционные зоны.

Вначале исследовалось течение с моделью 2. Граничное условие на входе, соответствующее установившемуся течению в плоском бесконечном канале с заданным постоянным расходом, имеет вид:

$$V_{\text{вх}}(x) = -\frac{6}{1+6\beta}(x^2 - x - \beta),$$

На рис. 4 представлены распределения линий тока в окрестности угловой точки, демонстрирующие картину течения для различных значений коэффициента проскальзывания β . Пунктирная линия отделяет основной поток от циркуляционной зоны. Из рисунка видно, что при увеличении β происходит уменьшение циркуляционной зоны вблизи верхней угловой точки *B* и увеличение размеров циркуляционной зоны за уступом *E*. Так при $\beta=0$ (рис.4,а) длина циркуляционной зоны 2 составляет 7,9 безразмерных единиц, а при $\beta=0.8$ (рис.4,в) – 12,5 безразмерных единиц. Дальнейшее увеличение β практически не влияет на размеры циркуляционных зон в окрестности точки *E*, а зона вблизи точки *B* исчезает.

Далее исследовалось влияние граничных условий на твердой стенке на распределение кинематических характеристик вдоль нее. На рис. 5 (*a*, *б*) приведено распределение скорости на границе *AB*, которое подтверждает постепенное уменьшение циркуляционной зоны, соответствующей отрицательным значениям скорости, вблизи верхней угловой точки *B*. Таким образом, при $\beta = 0.5$ нет отрицательной области значений касательной скорости, то есть зона отсутствует.

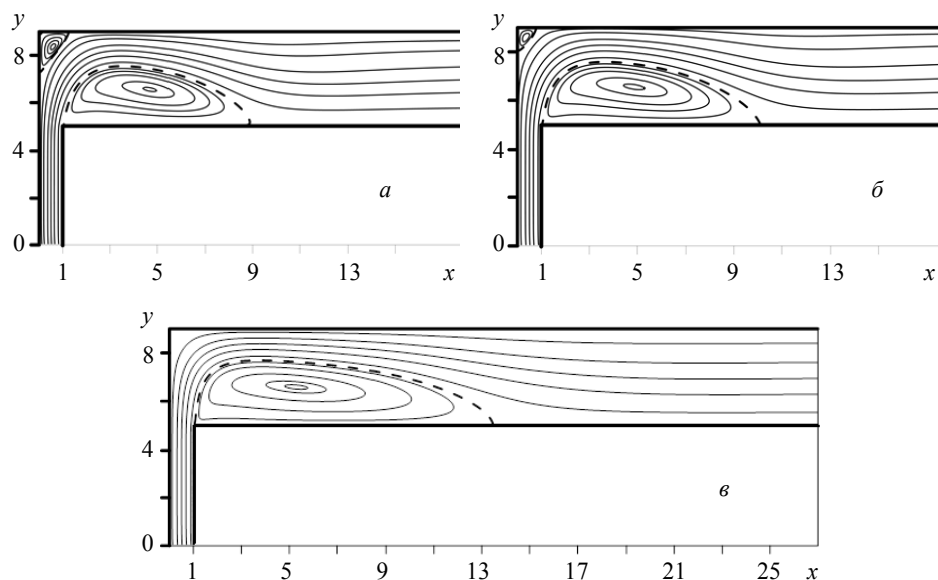


Рис. 4. Распределение линий тока при различных β
($Re = 40$, a – модель 1, модель 2: $\delta - \beta = 0,2$, $\epsilon - \beta = 0,8$)

Распределения касательной скорости на границе EF представлено на рис. 5, ϵ . На участке твердой стенки в окрестности входа значение скорости совпадает со значением $V_{ex}(I)$, соответствующей установившемуся течению жидкости в плоском бесконечном канале. С ростом координаты y начинает проявляться влияние уступа, которое в направлении, противоположном течению, тем больше, чем меньше β .

При увеличении значений коэффициента проскальзывания амплитуда распределения скорости на границе ED (рис. 5, ϵ) возрастает, что соответствует увеличению интенсивности и размеров циркуляционной зоны вблизи уступа E ; экстремальные значения распределения скорости соответствуют максимальным значениям касательного напряжения, достигаемым как внутри циркуляционной зоны, так и за ее пределами.

В свою очередь распределение скорости на выходе при увеличении β становится более пологим, что свидетельствует об усилении явления проскальзывания, и совпадает с аналитическим решением для течения ньютоновской жидкости в плоском бесконечном канале с заданным постоянным расходом и соответствующими физической постановке условиями на твердой стенке.

На рис. 6 приведено поле давления для рассматриваемой модели. При этом для удобства анализа на выходе устанавливается нулевое значение с учетом того, что давление определяется с точностью до константы. Параллельное распределение изолиний в окрестности входной и выходной границ свидетельствует о плоскопараллельном течении. При этом наиболее высокие давления возникают в окрестности входной границы и верхней угловой точки B , чему соответствуют более светло окрашенные области, а наименьшие значения давлений достигаются в области циркуляционной зоны сразу за уступом E .

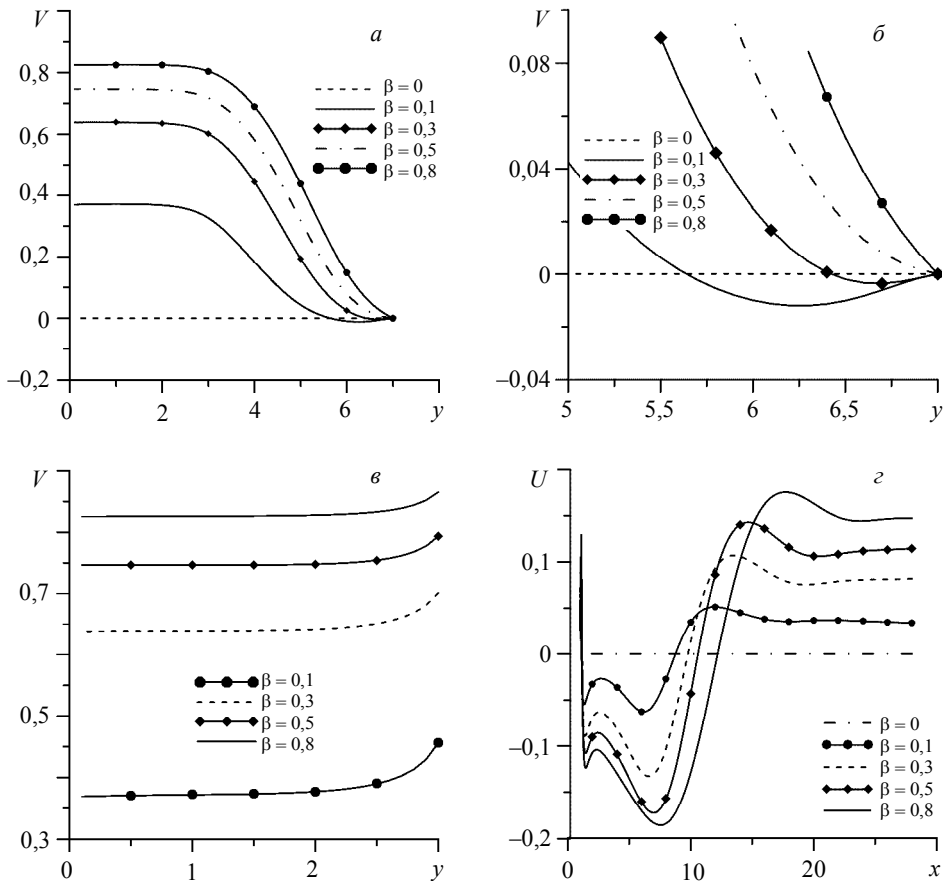


Рис. 5. Распределение скорости вдоль границ при различных β ($Re = 40$; *a*, *б* – граница *AB*, *в* – граница *EF*, *г* – граница *ED*)

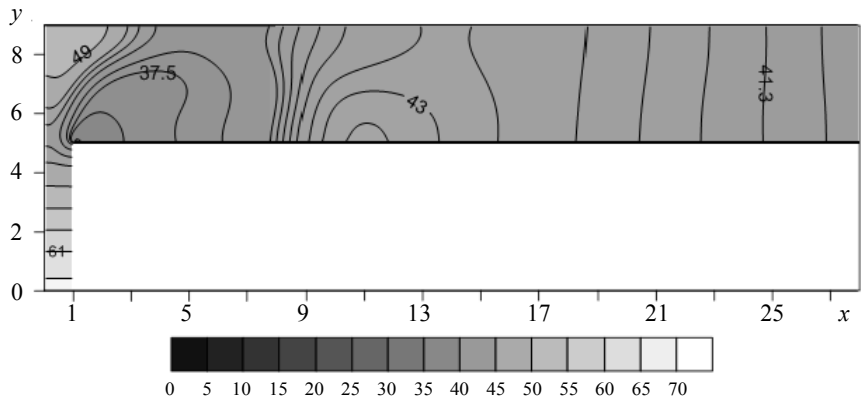


Рис. 6. Поле давления ($Re = 40$, $\beta = 0.2$)

При исследовании динамических характеристик от параметра модели было установлено, что при увеличении β разность давлений на входе и на выходе ΔP уменьшается, что демонстрирует рис. 7, а. Для достаточно больших β касательная скорость на твердых стенках достигает максимальных значений, соответствующих заданному расходу. При этом в областях одномерного течения профиль продольной скорости стремится к однородному распределению и стенки практически не создают сопротивления, чем объясняется асимптотическая сходимость к нулю ΔP . Результаты исследования влияния числа Re на характеристику ΔP для различных коэффициентов проскальзывания представлены на рис. 7, б. Из рисунка видно, что с ростом числа Re перепад давления ΔP уменьшается, что объясняется снижением влияния вязких сил. При этом увеличение коэффициента проскальзывания способствует уменьшению значений перепада давления.

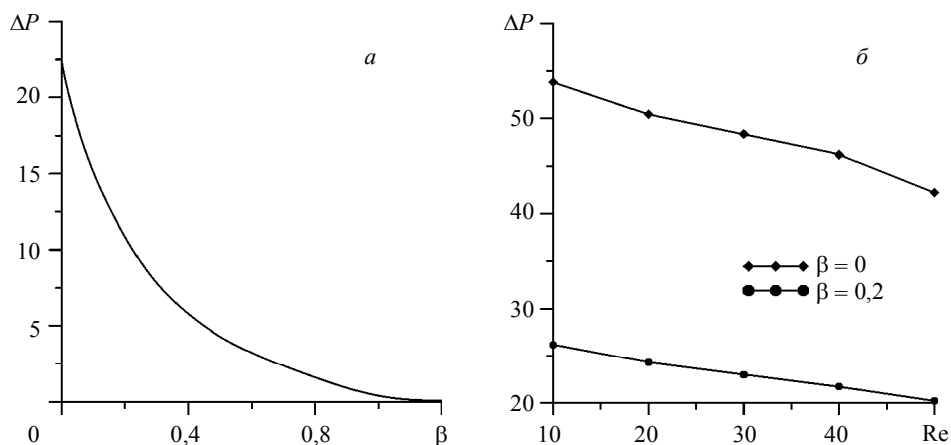
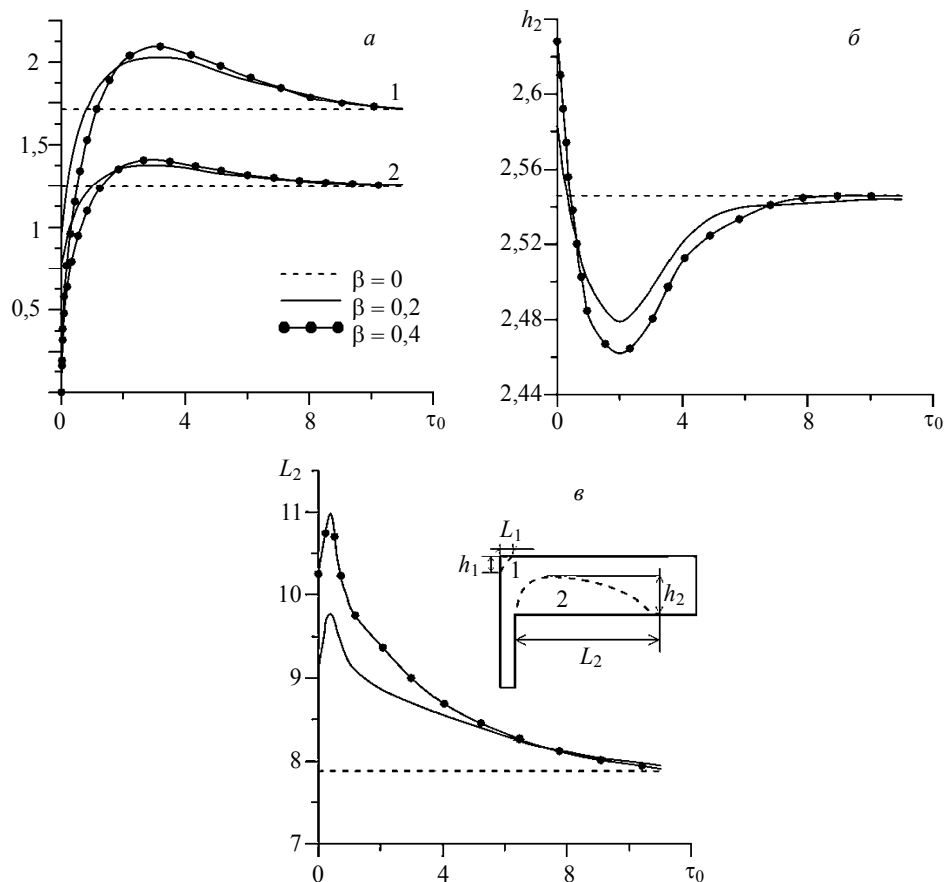
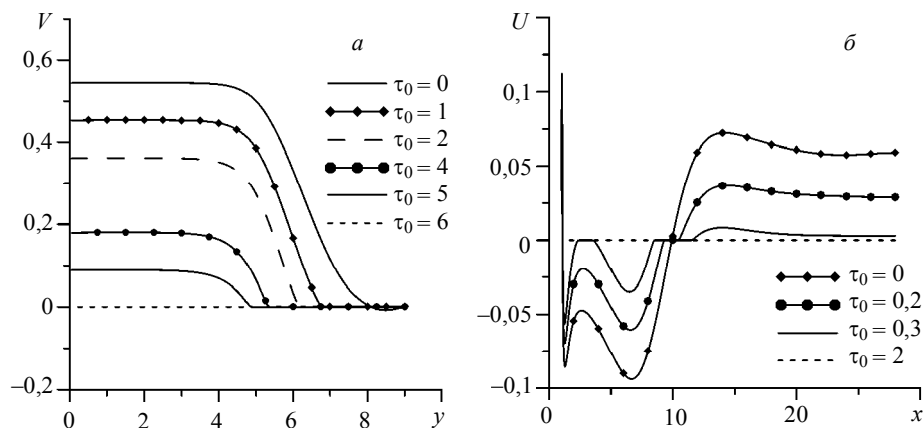


Рис. 7. Зависимость разности давлений на входе и выходе ($Re = 40$, а – от коэффициента проскальзывания β , б – от Re)

Далее рассматривалась третья модель взаимодействия, при этом распределение скорости во входной границе задавалось формулой

$$V_{\text{вх}}(x) = -\frac{6(1+6\beta\tau_0)}{1+6\beta}(x^2 - x - \beta) - \beta\tau_0,$$

Было установлено, что течение носит аналогичный предыдущей модели характер с образованием циркуляционных зон в окрестности угловых точек и формированием плоскопараллельного течения вблизи входной и выходной границ. Исследование картины течения показало, что увеличение предельного напряжения способствует изменению размеров циркуляционных зон. Поэтому далее проводилось исследование зависимости размеров циркуляционных зон от τ_0 . На рис. 8 приведены зависимости высоты h_1 (кривая 1) и длины L_1 (кривая 2) циркуляционной зоны вблизи верхней угловой точки B от предельного напряжения. Из рисунка видно, что сначала увеличение значения τ_0 приводит к росту этих размеров, а при достижении некоторых максимальных значений они начинают уменьшаться и в результате асимптотически стремятся к значениям, характерным для условий прилипания. Это объясняется тем, что рост τ_0 приводит к выполнению условия прилипания на всех стенках. Аналогичное поведение имеют размеры циркуляционных зон за уступом E (рис. 8, б, в).

Рис. 8. Зависимость размеров циркуляционных зон от τ_0 ($Re = 40$)Рис. 9. Распределение скорости на твердых границах при различных τ_0 ($Re = 40$, $\beta = 0.2$, а – на границе AB, б – на границе ED)

Параметрические исследования кинематических характеристик на границе позволяют сделать вывод, что с ростом τ_0 длина участков, на которых выполняется условие прилипания, увеличивается. Приведенное на рис. 9, а распределение скорости на границе AB показывает, что при $\tau_0 = 0$ на этой границе выполняется только условие проскальзывания, а, например, при $\tau_0 = 2$ длина участка, на котором выполняется условие прилипания, составляет уже порядка 1 безразмерной единицы. При достижении критического напряжения $\tau_0 = 6$ на стенке выполняется только условие прилипания. Аналогичная зависимость от τ_0 наблюдается и для распределения скорости на других границах. В частности, на границе ED (рис. 8, б) жидкость полностью начинает прилипать при $\tau_0 = 2$, а на границе EF – при $\tau_0 = 11$.

Заключение

Исследование течения в изогнутом канале с заданным постоянным расходом на входе показало, что в случае установившегося движения характерным является наличие в потоке циркуляционных зон в окрестностях угловых точек. Продемонстрировано изменения размеров циркуляционных зон в зависимости от типа граничных условий на твердой стенке: прилипание, скольжение и скольжение с предельным напряжением. Проведены параметрические исследования распределения полей скоростей и давления в широком диапазоне изменения параметров моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой. Условие скольжение задавалось по закону Навье. С ростом коэффициента скольжения наблюдался рост скорости на твердых стенках. Начиная с некоторого значения, дальнейшее увеличение коэффициента практически не влияет на картину течения, а разность давлений на входе и выходе асимптотически стремиться к нулю. В случае модели скольжения с предельным напряжением для малых значений предельного напряжения картина течения имеет аналогичный предыдущему случаю характер. Однако с его ростом на стенках появляются участки, где скольжение отсутствует. Дальнейшее увеличение предельного напряжения приводит к реализации течения, характерного для условия прилипания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Reports on Progress in Physics. 2005. V. 39. P. 2859–2897.
2. Янков В.И. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 264 с.
3. Rudolf J. Koopmans, Jaap Molenaar. The “sharkskin effect” in polymer extrusion // Polymer Engineering & Science. 1998. V. 38. P. 101–107.
4. Rao I.J., Rajagopal K.R. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel // Acta Mechanica. 1999. V. 135. P. 113–126.
5. Bahrani M., Tamayol A., Taheri P. Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section // Journal of Fluids engineering. 2009. V. 131. P. 031201-1–031201-8.
6. Volker J. Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equation – numerical test s and aspects of the implementation // Journal of Computational and Applied Mechanics. 2002. V. 147. P. 287–300.
7. Minakova A., Rudyak V., Dektereva A., Gavrilov A. Investigation of slip boundary conditions in the T-shaped microchannel // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2013. V. 43. P. 161–169.

8. Hoomana K., Hooman F., Famouri M. Scaling effects for flow in micro-channels: Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2009. V. 36. P. 192–196.
9. Issa R.J. Solution of the implicitly discretized reacting flow equations by operator-splitting // Journal of Computational Physics. 1986. V. 62. P. 40–65.

Статья поступила 15.01.2014 г.

Borzenko E.I., Diakova O.A. STUDYING THE SLIP PHENOMENON FOR A VISCOUS FLUID FLOW IN A CURVED CHANNEL. The pressure flow of a viscous incompressible fluid in a channel curved at the right angle is studied. We consider three models of the interaction between the fluid and solid wall that satisfy the following boundary conditions: no-slip, Navier slip, and slip with a limit stress. The problem is solved numerically using a finite-difference algorithm based on the SIMPLE scheme. The steady pattern flow with the formation of the circulation areas around corner points is demonstrated. It is characterized by one-dimensional flow regions near inlet and outlet boundaries. Parametric studies of the influence of interaction models and main parameters on the flow pattern are performed. In particular, tangent velocity profiles at the solid wall as functions of the slip length, circulation areas' sizes, and limit stress are constructed.

Keywords: flow, viscous fluid, boundary condition, curved channel, numerical simulation

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

DIAKOVA Olga Alekseevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: olga.dyakova.1992@mail.ru

REFERENCES

1. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. (2005) Reports on Progress in Physics. V.39, pp. 2859–2897.
2. Yankov V.I. Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techenie polimerov v kanalakh. – Moskva-Izhevsk.: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2008. 264p. (in Russian)
3. Rudolf J. Koopmans, Jaap Molenaar. The “sharkskin effect” in polymer extrusion (1998) Polymer Engineering & Science. V.38, pp.101–107.
4. Rao I.J., Rajagopal K.R. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel (1999) Acta Mechanica. V.135, pp.113–126.
5. Bahrami M., Tamayol A., Taheri P. Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section (2009) Journal of Fluids engineering. V.131, pp.031201-1 – 031201-8.
6. Volker J. Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equation – numerical tests and aspects of the implementation (2002) Journal of computational and applied mechanics. V.147, pp.287–300.
7. Minakova A., Rudyak V., Dektereva A., Gavrilov A. Investigation of slip boundary conditions in the T-shaped microchannel (2013) International Journal of Heat and Fluid Flow. V. 43, pp.161–169.
8. Hoomana K., Hooman F., Famouri M. Scaling effects for flow in micro-channels: Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump (2009) International Communications in Heat and Mass Transfer. V. 36., pp.192–196.
9. Issa R.J. Solution of the implicitly discretized reacting flow equations by operator-splitting (1986) Journal of computational physics. V.62, pp. 40–65.

УДК 533.17

А.Б. Ворожцов, А.А. Глазунов, Л. Делюка,
Н.Е. Кувшинов, И.В. Еремин, И.М. Тырышкин, М. Фассина

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ НАНОАЛЮМИНИЯ НА ГАЗОДИНАМИКУ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК¹

На основе математического моделирования двухфазного течения в энергетических установках, проанализированы газодинамическая картина двухфазного течения и уровень потерь удельного импульса на двухфазность, в зависимости от вида функции распределения частиц по размерам во входном сечении сопла.

Ключевые слова: газовая динамика, двухфазное течение, наноалюминий, коагуляция, дробление, двухфазные потери

Широкое применение различных силовых установок космических систем обуславливает проведение работ по их совершенствованию. Они связаны, в частности, с повышением удельного импульса тяги РДТТ за счет повышения энергетических характеристик топлива. В настоящее время для увеличения энергетики смесевых твердых топлив в их состав добавляют порошки легких металлов. На практике это обычно порошок алюминия. Хотя отмечено, что можно для улучшения характеристик применять бериллий или гидриды алюминия или бериллия [1]. В последнее время, в связи с определенными достижениями в порошковой технологии, появилась возможность получать порошки алюминия с меньшей дисперсностью, вплоть до наноразмеров. Разработаны технологии, позволяющие ввести их в состав смесевого топлива. Такие составы топлив с мелкодисперсными частицами в настоящее время интенсивно изучаются [2–4]. Так рассматриваются вопросы по определению скорости их горения и по спектру образующихся окислов металлов. Эта информация важна для изучения газодинамической картины течения продуктов сгорания в сопле и определения уровня двухфазных потерь удельного импульса. Некоторые аспекты газодинамической картины течений при сгорании таких топлив отражены в работах [5–7]. При численном исследовании двухфазных течений в соплах необходимо задавать распределение частиц окислов на входе в сопло. К настоящему времени пока таких данных явно недостаточно. Поэтому применяют различные упрощенные подходы. Так в работе [5] в квазиодномерном приближении выполнено численное исследование течения продуктов сгорания с ультрадисперсными частицами окиси алюминия на основе одномодальной функции распределения с уменьшенным средним размером частиц. Отмечено, что в этом случае процессы коагуляции частиц значительно ниже по сравнению с топливами с обычным порошком алюминия, что в итоге приводит к уменьшению потерь удельного импульса на двухфазность. Экспериментальные данные по горению смесевого твердого топлива с добавками наноалюминия пока-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №2014/223 (код проекта 2382).

зывают, что функция распределения частиц по размерам имеет двухмодальный вид. В работе [6] рассмотрена газодинамическая картина течения в модельном сопле при различных двухмодальных формах функций распределений в трехмерных соплах. Показано, что картина течения сильно зависит от начальной функции распределения что приводит к существенной неравномерности течения и трансформации дисперсности конденсата в газодинамическом тракте сопла.

Цель настоящей работы состояла в изучении картины двухфазного течения и потерь удельного импульса на двухфазность в соплах с учетом экспериментальной информации по горению прорабатываемых составов с частичной заменой дисперсного алюминия на нанодисперсный алюминий.

2. Постановка задачи

Для описания двухфазного течения в соплах использовалась многожидкостная модель сплошной среды. В соответствии с ней все уравнения, описывающие двухфазное течение, условно можно разделить на подсистему уравнений для газовой фазы и N подсистем для фракций частиц. Учёт взаимного влияния выделенных «сплошных» сред осуществляется записью соответствующих «свободных» членов уравнений. Подсистема трёхмерных стационарных уравнений для газовой фазы в форме законов сохранения записанная в декартовой (x, y, z) системе координат имеет вид [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^N \rho_i \Phi_{Ri} (u_i - u) \\ \sum_{i=1}^N \rho_i \Phi_{Ri} (v_i - v) \\ \sum_{i=1}^N \rho_i \Phi_{Ri} (w_i - w) \\ \sum_{i=1}^N \rho_i \{ \Phi_{ai} c_p (T_i - T) + \Phi_{Ri} V_i (V_i - V) \} \end{bmatrix}.$$

Эта подсистема замыкается уравнением состояния:

$$p = \rho \frac{R}{c_p} \left(H - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right). \quad (2)$$

Подсистемы, описывающие пространственное течение фракций частиц, записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial z} = \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$E_i = \begin{bmatrix} \rho_i u_i \\ \rho_i u_i u_i \\ \rho_i u_i v_i \\ \rho_i u_i w_i \\ \rho_i u_i T_i \\ n_i u_i \\ n_i u_i M_i^2 \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} \rho_i v_i \\ \rho_i v_i u_i \\ \rho_i v_i v_i \\ \rho_i v_i w_i \\ \rho_i v_i T_i \\ n_i v_i \\ n_i v_i M_i^2 \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} \rho_i w_i \\ \rho_i w_i u_i \\ \rho_i w_i v_i \\ \rho_i w_i w_i \\ \rho_i w_i T_i \\ n_i w_i \\ n_i w_i M_i^2 \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} Q_{1i} \\ \rho_i \Phi_{Ri} (u - u_i) + Q_{2i} \\ \rho_i \Phi_{Ri} (v - v_i) + Q_{3i} \\ \rho_i \Phi_{Ri} (w - w_i) + Q_{4i} \\ \rho_i \Phi_{\alpha i} (T - T_i) c_p / c_\theta + Q_{5i} \\ Q_{6i} \\ -n_i \Phi_{Mi} M_i^2 + Q_{7i} \end{bmatrix}.$$

Для описания процессов коагуляции и дробления частиц конденсата используется непрерывный подход, метод «меченых» частиц и «полидисперсная» модель осколков, предложенная Шрайбером А.А. В этом случае коагуляционные члены Q_{ji} имеют следующий вид [6,7]:

$$\begin{aligned} Q_{1i} &= n_i \sum_{r_j < r_i} K_{ji} \Phi_{ji} \rho_j - \rho_i \sum_{r_j > r_i} K_{ij} n_j + \sum_{r_j > r_i} n_j \sum_{r_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} \rho_k (1 - \Phi_{kj}); \\ Q_{2i} &= n_i \sum_{r_j < r_i} K_{ji} \rho_j [u_j - (1 - \Phi_{ji}) u_{jik}] - \rho_i u_i \sum_{r_j > r_i} K_{ij} n_j + \\ &\quad + \sum_{r_j > r_i} n_j \sum_{r_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} \rho_k (1 - \Phi_{kj}) u_{kji}; \\ Q_{3i} &= n_i \sum_{r_j < r_i} K_{ji} \rho_j [v_j - (1 - \Phi_{ji}) v_{jik}] - \rho_i v_i \sum_{r_j > r_i} K_{ij} n_j + \\ &\quad + \sum_{r_j > r_i} n_j \sum_{r_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} \rho_k (1 - \Phi_{kj}) v_{kji}; \\ Q_{4i} &= n_i \sum_{r_j < r_i} K_{ji} \rho_j [w_j - (1 - \Phi_{ji}) w_{jik}] - \rho_i w_i \sum_{r_j > r_i} K_{ij} n_j + \\ &\quad + \sum_{r_j > r_i} n_j \sum_{r_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} \rho_k (1 - \Phi_{kj}) w_{kji}; \\ Q_{5i} &= \left[n_i \sum_{r_j < r_i} K_{ji} \rho_j [E_j - (1 - \Phi_{ji}) E_{jik}] - \rho_i E_i \sum_{r_j > r_i} K_{ij} n_j + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r_j > r_i} n_j \sum_{r_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} \rho_k (1 - \Phi_{kj}) E_{kji} + \frac{q_i^2}{2} Q_{1i} - u_i Q_{2i} - v_i Q_{3i} - w_i Q_{4i} \right] \frac{1}{c_\theta}; \\ Q_{6i} &= -n_i \sum_{r_j > r_i} K_{ij} n_j + \frac{n_i}{\rho_i} \sum_{r_j > r_i} n_j \sum_{r_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} \rho_k (1 - \Phi_{kj}); \\ Q_{7i} &= n_i \left(\sum_{r_j < r_i} 0,058 M_{ij}^2 K_{ij} n_j - \sum_{r_j > r_i} K_{ij} n_j \Phi_{ij} M_i^2 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Массовая функция распределения имеет вид

$$\alpha_{kji} = \frac{\alpha'_{ki}}{\sum_{\eta < r_j} \alpha'_{li}}, \quad \alpha'_{ki} = 0.5 (\operatorname{erf} x_{k(i+1)} - \operatorname{erf} x_{ki}), \quad x_{ki} = 1.16 \ln \varepsilon_{ki} + 0.07.$$

$$\text{Здесь } E_i = c_v T_i + V_i^2 / 2, E_{kji} = c_v T_{kji} + V_{kji}^2 / 2, T_{kji} = T_j + \gamma (T_k - T_j), \\ V_{kji} = V_j + \beta (V_k - V_j), M_{ij} = |V_i - V_j| (r_i + r_j) m_i m_j / (m_i + m_j),$$

u, v, w – проекции вектора скорости. Индексы i, j, k относятся к номерам фракций частиц, v – к веществу частиц, величины без индексов относятся к газу. T, p, ρ – температура, давление и плотность. H – энтальпия торможения, c_p – теплоёмкость газа при постоянном давлении, n_i – количество частиц i -й фракции в единице объёма, m – масса частицы, E – полная энергия, K_{ji} – константа взаимодействия, $\mathcal{E}_{ji}$ – коэффициент осаждения, Φ_{ji} – математическое ожидание отношения изменения массы крупной частицы к общей массе столкнувшихся с ней мелких частиц, α_{kji} – массовая нормированная функция распределения по размерам осколков i , образовавшихся при столкновении частицы k -й фракции с j -й. $V_{kji}, E_{kji}, T_{kji}$ – начальные значения скорости, полной энергии и температуры осколков. V_{ji}, E_{ji} – начальные скорости и энергия той части массы частиц фракции i , которая приходит в неё из более мелкой фракции j . ϕ_{Ri} и ϕ_{oi} – параметры динамического и теплового взаимодействия частиц с газом. Эмпирические величины $\beta = 0,08, \gamma = 0,01$.

Все выражения для требуемых коэффициентов и параметров взяты из [8].

3. Метод решения

Вся область течения разбивается на две подобласти: до-трансзвуковую и сверхзвуковую. В первой подобласти для решения используется метод квазиустановления. Во второй подобласти осуществляется совместное решение стационарных уравнений для газовой фазы и фракций частиц маршевым методом.

Для решения нестационарных уравнений для газовой фазы на входе в сопло задаются четыре граничных условия, на стенке – одно, на выходе из первой подобласти, где течение уже сверхзвуковое, граничные условия не выставляются. Если есть плоскость симметрии, то задаются условия симметрии.

Для подсистем фракций частиц на входе в сопло задается число условий, совпадающее с числом уравнений. Здесь течение полагается равновесным и поэтому такие параметры частиц, как скорости и температуры, полагаются равным соответствующим параметрам газовой фазы. Кроме того, задаются плотность, число и квадраты моментов вращения частиц. На стенке сопла выставляется условие прилипания. На входе в сверхзвуковую часть сопла задаются 5 условий для газовой фазы и аналогичные параметры для фракций частиц, которые выбираются из решения в первой подобласти.

Как частный случай, эта методика позволяет проводить расчеты для осесимметричного течения с учетом изменения соответствующих граничных условий. Квазиодномерное приближение осуществляется на основе решения обратной задачи теории сопла Лавалья. В этом случае для заданного контура сопла задается распределение давления вдоль сопла соответствующее «равновесному» двухфазному течению.

4. Результаты расчётов

Расчёты проводились в косинусо-коническом сопле Лавалья (рис. 1). Контур профиль сопла в до-трансзвуковой области описывается косинусом, в сверхзвуковой – конусом с углом наклона образующей 20° . Радиус минимального сечения $r_* = 0.082$ м. Все линейные размеры нормировались к r_* . В безразмерном виде радиус входного сечения сопла равнялся $r_{\text{вх}} = 2.2, r_{\text{вых}} = 7.85$, длина сопла $l = 20.9$.

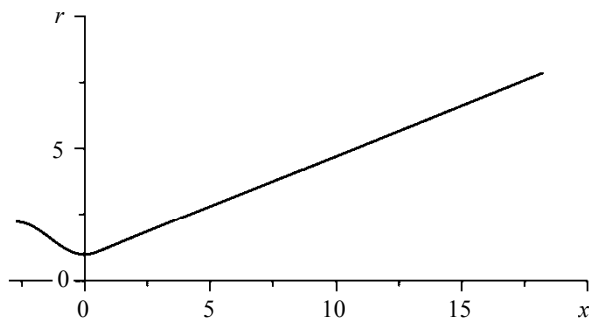


Рис. 1. Профиль сопла

Параметры газовой фазы для модельного состава принимались следующими: давление и температура в камере сгорания $P_0 = 7.4$ МПа, $T_0 = 3336$ К; молекулярный вес и показатель адиабаты газообразных продуктов сгорания $M = 23.883$ кг/кмоль, $\gamma = 1.205$. Весовая доля частиц конденсированной фазы $z = 0.3$.

В ходе численных расчетов исследовалось влияние вида двухмодальной функции распределения частиц по размерам на величину двухфазных потерь импульса тяги, в зависимости от весовой доли конденсированной фазы $z = 0.2, 0.3, 0.4$, и радиуса минимального сечения сопла $r^* = 0.05, 0.082, 0.1$ м. При выборе вида двухмодальной функции распределения предполагалось, что увеличение количества ультрадисперсного порошка алюминия вводимого в качестве частичной замены обычного порошка алюминия, приводит к увеличению первой моды. Ширина диапазонов первой и второй мод оставались постоянными. Это означает что введение ультрадисперсного порошка алюминия приводит к увеличению максимума первой моды. Вторая мода обусловлена наличием в потоке частиц конденсированной фазы, образовавшихся в результате окисления обычного порошка алюминия.

Двухмодальная функция распределения частиц оксида алюминия по размерам имеет вид:

$$g(x) = Ax^\alpha \exp(-bx^\beta) + B \exp(-p(x-q)).$$

где $A, B, b, \alpha, \beta, p, q$ – постоянные коэффициенты.

Для проведения расчетов использовалось шесть вариантов функции распределения отличающихся $d_{43} = 2.82, 3.23, 3.69, 4.18, 4.64, 4.84$ мкм. Варьировалась доля частиц мелких (первая мода) и крупных (вторая мода) фракций. Во всех вариантах максимум первой моды приходится на 1.0 мкм, второй моды на – 4.8 мкм. Число фракций $N = 15$. Минимальный и максимальный радиусы частиц во входном сечении $r_{\min} = 0.25$ мкм, $r_{\max} = 7.25$ мкм.

Вид полученных распределений показан на рис. 2 – 7, где представлены гistogramмы начальных распределений частиц по фракциям.

В качестве базового варианта для расчетов выбрано сопло с радиусом минимального сечения $r^* = 0.082$ м, и весовой долей конденсированной фазы $z = 0.3$. На рис. 8 представлено изменение среднемассового диаметра частиц конденсированной фазы оксида алюминия на вдоль сопла в квазиодномерном приближении для шести вариантов функции распределения. Видно, что в до-трансзвуковой части сопла идет интенсивное взаимодействие частиц различных фракций, и за счет коагуляции происходит значительное увеличение среднемассового диаметра.

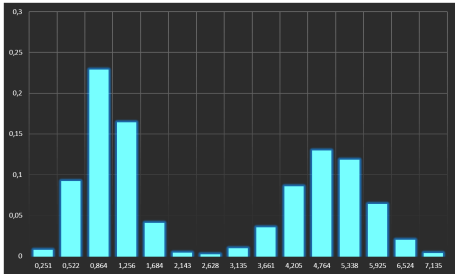


Рис. 2. Двухмодальная функция распределения, $d_{43} = 2.82$ мкм

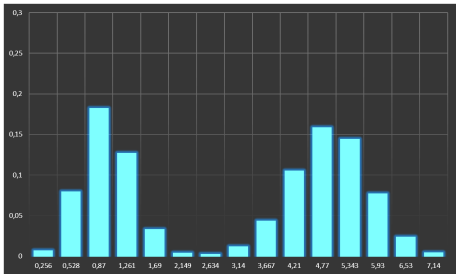


Рис. 3. Двухмодальная функция распределения, $d_{43} = 3.23$ мкм

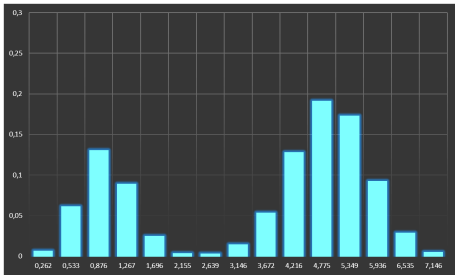


Рис. 4. Двухмодальная функция распределения, $d_{43} = 3.69$ мкм

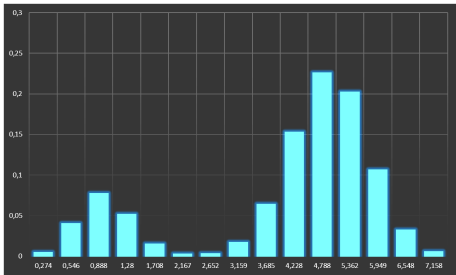


Рис. 5. Двухмодальная функция распределения, $d_{43} = 4.18$ мкм

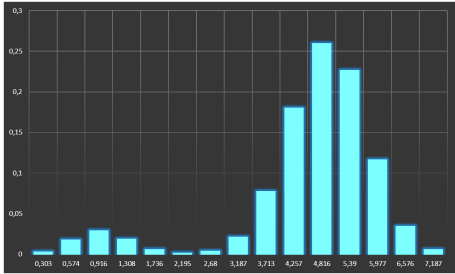


Рис. 6. Двухмодальная функция распределения, $d_{43} = 4.64$ мкм

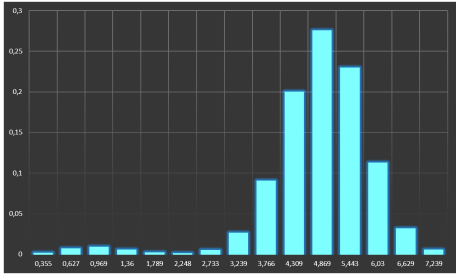


Рис. 7. Двухмодальная функция распределения, $d_{43} = 4.84$ мкм

При этом процессы коагуляции протекают интенсивнее, в случае меньших d_{43} на входе в сопло. За минимальным сечением происходит дробление частиц во всех вариантах расчетов. Далее также преобладают процессы коагуляции, а начиная с сечения на расстоянии двух радиусов от минимального сечения определенную роль играет дробление частиц за счет столкновений. В результате d_{43} незначительно уменьшается до среза сопла. Несколько иначе протекают процессы взаимодействия в первом варианте (d_{43} на входе равно 2.82 мкм), где коагуляция за счет большого количества мелких фракций происходит наиболее интенсивно. Далее на расстоянии калибра от минимального сечения, происходит еще один цикл дробления. Дальнейшее взаимодействие частиц в этом варианте не приводит к существенному изменению d_{43} . Анализ данных представленных на рис. 8 показывает, что большое количество частиц мелких фракций приводит к более интенсивному росту d_{43} .

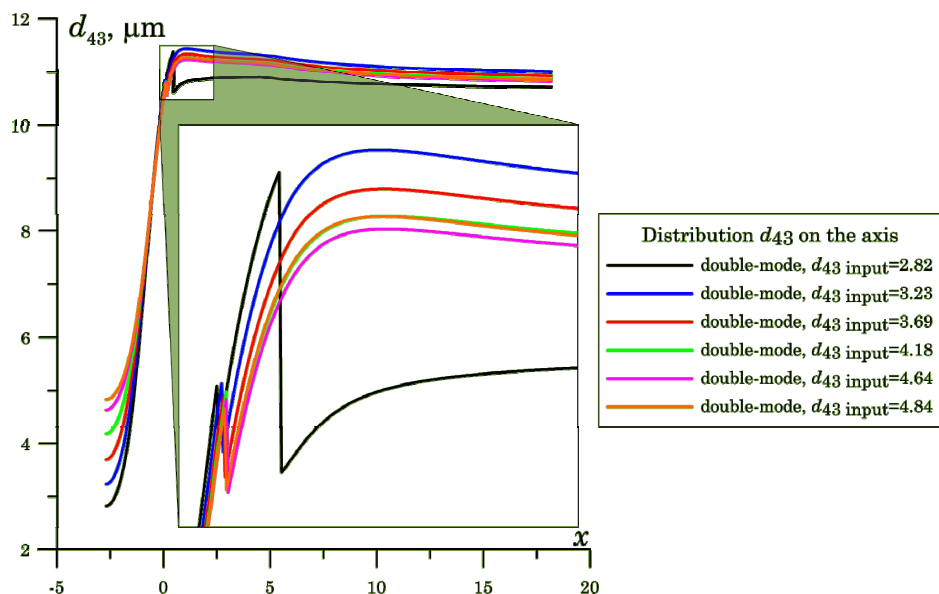


Рис. 8. Распределение среднемассового диаметра частиц конденсированной фазы вдоль оси сопла

Описанные выше процессы обуславливают отличие изменения величины двухфазных потерь по сравнению с одномодальными функциями распределения частиц по фракциям с одинаковыми d_{43} на входе. В табл. 1 и 2 приведены значения среднемассовых диаметров частиц на входе и выходе из сопла, а также величины двухфазных потерь ξ для $z = 0.3$ в рассмотренных вариантах. Для одномодальной функции распределения двухфазные потери растут с увеличением среднемассового диаметра частиц (табл. 2). В случае двухмодальных функций распределения

Таблица 1

Двухфазные потери для вариантов с добавками частиц ультрадисперсного алюминия (двухмодальные функции распределения)

№	1	2	3	4	5	6
d_{43in} , МКМ	2,82	3,23	3,69	4,18	4,64	4,84
d_{43out} , МКМ	10,71	11,00	10,92	10,87	10,83	10,85
ξ , %	1,769	1,777	1,769	1,763	1,756	1,753

Таблица 2

Двухфазные потери для вариантов с добавками частиц обычного алюминия (одномодальные функции распределения)

№	1	2	3	4	5	6
d_{43in} , МКМ	2,82	3,23	3,69	4,18	4,64	4,84
d_{43out} , МКМ	10,97	11,00	11,68	11,45	11,35	11,19
ξ , %	1,487	1,636	1,828	1,927	1,984	1,988

двухфазные потери имеют одинаковый уровень для всех вариантов расчетов, что обусловлено интенсивным взаимодействием большого количества мелких частиц с более крупными. При этом в большинстве вариантов двухфазные потери в топливах с добавками ультрадисперсного алюминия ниже чем в топливах с добавками обычного алюминия (см. табл. 1 и 2).

Из табл. 1 видно, что среднемассовый размер конденсированной фазы к срезу сопла увеличивается, особенно в вариантах 1 – 3. Это происходит в основном за счет процессов коагуляции и, следовательно, уменьшения доли мелких фракций. В подтверждение этому на рис. 9 – 14 показан спектр распределения частиц конденсированной фазы оксида алюминия на срезе сопла для рассмотренных выше вариантов расчета. Следует отметить, что в вариантах 1 – 5 самая мелкая фракция полностью уходит, в варианте 6 – исчезают частицы первых 6 фракций.

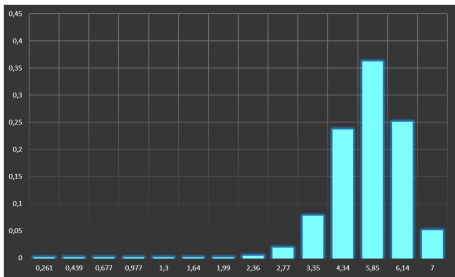


Рис. 9. Спектр частиц на срезе сопла, $d_{43in} = 2.82$ мкм

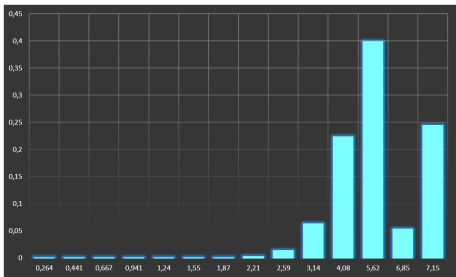


Рис. 10. Спектр частиц на срезе сопла, $d_{43in} = 3.23$ мкм

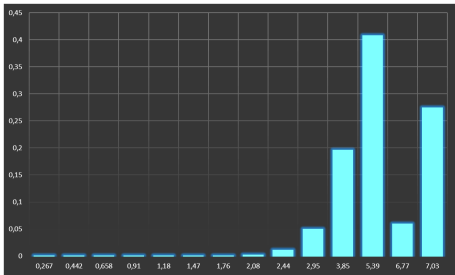


Рис. 11. Спектр частиц на срезе сопла, $d_{43in} = 3.69$ мкм

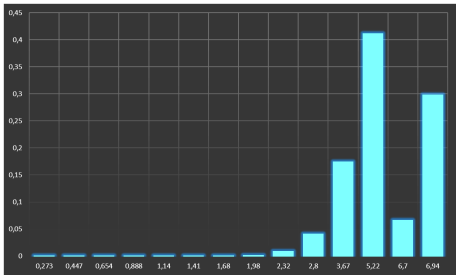


Рис. 12. Спектр частиц на срезе сопла, $d_{43in} = 4.18$ мкм

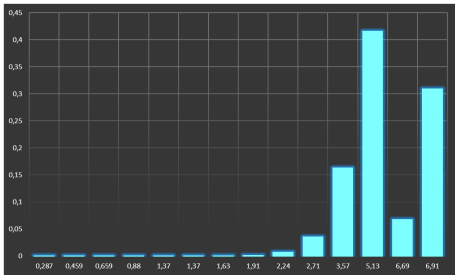


Рис. 13. Спектр частиц на срезе сопла, $d_{43in} = 4.64$ мкм

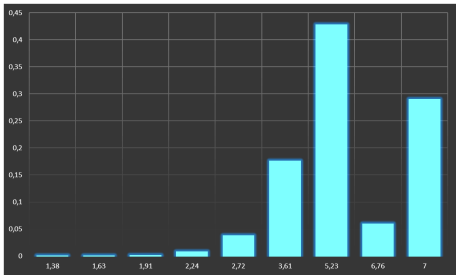


Рис. 14. Спектр частиц на срезе сопла, $d_{43in} = 4.84$ мкм

В табл. 3 и 4 представлены результаты численных исследований по определению двухфазных потерь удельного импульса для рассмотренных вариантов в случае $z = 0.2$ и 0.4 . Анализ результатов показывает, что процессы коагуляции также играют значительную роль в случае большого количества мелких частиц на входе в сопло. Это также приводит к возрастанию d_{43} , и выравниванию двухфазных потерь. В вариантах расчета с $z = 0.2$ не наблюдается дробление частиц оксида алюминия. В вариантах расчета с $z = 0.4$ за счет большего расхода частиц среднего массового размера в результате процессов коагуляции растет быстрее, затем последовательно происходит несколько циклов дробления.

Таблица 3

Двухфазные потери (двухмодальные функции распределения), $z = 0.2$

№	1	2	3	4	5	6
d_{43in} , МКМ	2,82	3,23	3,69	4,18	4,64	4,84
d_{43out} , МКМ	9,24	9,10	8,99	8,92	8,87	8,85
ξ , %	0,850	0,856	0,860	0,861	0,863	0,862

Таблица 4

Двухфазные потери (двухмодальные функции распределения), $z = 0.4$

№	1	2	3	4	5	6
d_{43in} , МКМ	2,82	3,23	3,69	4,18	4,64	4,84
d_{43out} , МКМ	11,75	11,43	12,16	12,00	11,96	12,04
ξ , %	3,056	2,980	3,148	3,103	3,085	3,108

Результаты расчетов по оценке влияния на двухфазные потери изменения радиуса минимального сечения сопла приведены в табл. 5 и 6. Видно, что двухфазные потери, аналогично случаю с одномодальной функцией распределения, возрастают с уменьшением радиуса минимального сечения сопла (табл. 1, 5), и уменьшаются с его увеличением (табл. 1, 6). Следует отметить, что для сопла с

Таблица 5

Двухфазные потери (двухмодальные функции распределения), $z = 0.3$, $r_* = 0.05$ м

№	1	2	3	4	5	6
d_{43in} , МКМ	2,82	3,23	3,69	4,18	4,64	4,84
d_{43out} , МКМ	9,37	9,22	9,80	8,97	8,89	8,92
ξ , %	2,295	2,278	2,249	2,224	2,207	2,213

Таблица 6

Двухфазные потери (двухмодальные функции распределения), $z = 0.3$, $r_* = 0.1$ м

№	1	2	3	4	5	6
d_{43in} , МКМ	2,82	3,23	3,69	4,18	4,64	4,84
d_{43out} , МКМ	11,81	11,72	11,65	11,60	11,58	11,60
ξ , %	1,600	1,593	1,589	1,585	1,579	1,577

$r^* = 0.05$ м d_{43} на срезе сопла меньше, чем для сопел с большим радиусом минимального сечения. Анализ распределения d_{43} вдоль сопла показывает, что в соплах с относительно малыми r^* в окрестности трансзвукового сечения сопла интенсивно протекают процессы коагуляции частиц, а вниз по потоку их дробление.

На рис. 15 – 17 приведены результаты расчетов в осесимметричном профилированном сопле с двухмодальными функциями распределения частиц. На рис. 15 показано распределение чисел Маха для $z = 0.3$ и $r^* = 0.082$ м, на рис. 16 распределение среднемассового диаметра частиц конденсированной фазы и на рис. 17 плотность «газа» частиц. В области до-трансзвуковой части сопла за счет процессов коагуляции наблюдается рост d_{43} , наиболее сильно это происходит в окрестности стенки сопла (рис. 16). Плотность «газа» частиц в окрестности стенки при этом уменьшается (рис. 17).

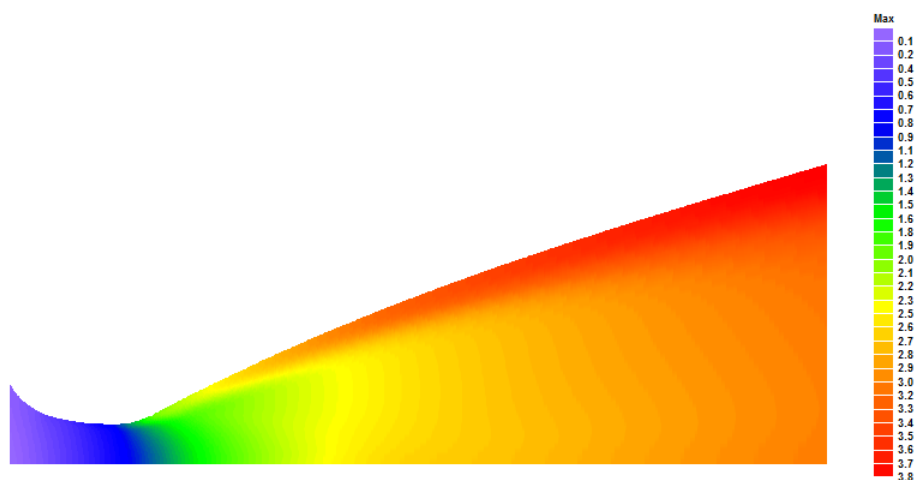


Рис. 15. Распределение чисел Маха

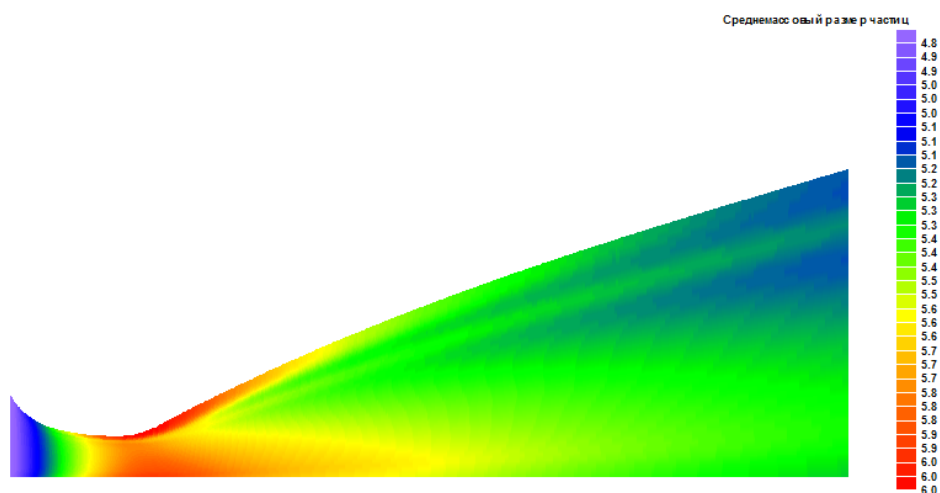


Рис. 16. Распределение среднемассового диаметра частиц



Рис. 17. Распределение плотности «газа» частиц конденсированной фазы

Заключение

В случае частичной замены обычного алюминия ультрадисперсным, с одной стороны уменьшается среднемассовый размер частиц конденсированной фазы во входном сечении сопла, а с другой возрастают процессы коагуляции между частицами. Для исследованных составов это приводит к большему уровню d_{43} вдоль сопла, и практически одинаковому уровню двухфазных потерь удельного импульса (табл. 1, 3 – 6). Но эти потери интегрально несколько ниже потерь на двухфазность по сравнению с составами топлив включающих только обычный алюминий (табл. 1 и 2).

Для дальнейшего изучения возможности использования составов с ультрадисперсными порошками алюминия необходимо проведение дополнительных исследований по горению таких составов и получению информации о «реальных» спектрах частиц срываемых с поверхности горения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазунов А.А., Кувшинов Н.Е., Ткаченко А.С. Математическое моделирование двухфазных течений в эллиптических соплах Лавалья // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Томск, 2000. С. 105–106.
2. Глазунов А.А., Кувшинов Н.Е. Ткаченко А.С. Исследование трёхмерных двухфазных течений в соплах сложных форм // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Томск, 1998. С. 147–148.
3. Vasenin I.M., Narimanov R.K., Glazunov A., Kuvshinov N.E., and Ivanov V.A. Two-phase flows in the nozzles of solid rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. No. 4. P. 583–592. doi: 10.2514/3.23884
4. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
5. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 172 с.
6. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
7. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука, 1988. 222 с.

8. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
9. Рычков А.Д., Шрайбер А.А. Осесимметричное полидисперсное двухфазное течение с коагуляцией и дроблением частиц при произвольном распределении осколков по массам и скоростям // МЖГ. 1985. № 3. С. 73–79.
10. Васенина Т.Н., Глазунов А.А. Двухфазное осесимметричное течение с учётом коагуляции, дробления и вращения частиц при произвольном распределении вторичных частиц по массам и скоростям // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Томск, 1998. С. 143–144.

Статья поступила 16.01.2014 г.

Vorozhtsov A.B., Glazunov A.A., DeLuca L., Kuvshinov N.E., Eremin I.V., Tyryshkin I.M., Fassina M. GAS DYNAMICS ASPECTS OF NANOALUMINUM USE FOR HIGH ENERGY SYSTEMS. In the paper, based on mathematical modeling of the two-phase flow in high energy systems, the gas-dynamic two-phase flow pattern and levels of losses of specific impulse for the biphasity has been analyzed depending on the particle size distribution function at the nozzle inlet. The function was specified using experimental information on the combustion of the studied compositions with partial replacement of the dispersed aluminum by nanodispersed aluminum. The calculations were performed under different conditions (pressure in the combustion chamber, weight fraction of condensate, and minimum diameter of the nozzle) in the quasi-one-dimensional and axisymmetric approximations and taking into account coagulation, crushing, and rotation of the condensate particles. To describe the processes of coagulation, the model of "tagged" particles and polydisperse fragment model was used. It is shown that the flow pattern and the level of loss in the specific impulse for biphasity are different in the cases of two-modal and one-modal particle size distribution functions at the nozzle inlet. The processes of coagulation for the two-modal function occur more rapidly, and the level of two-phase losses upon varying the proportion of nanodispersed aluminum, all other things being equal, remains almost at the same level.

Keywords: gas dynamics, two-phase flow, nanoaluminum, coagulation, fragmentation of particles, loss of two-phase specific impulse

VOROZHTSOV Alexander Borisovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: abv@mail.tomsknet.ru

GLAZUNOV Anatoly Alekseevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

DeLUCA Luigi T. (PhD, Prof, Polytechnic Institute of Milan, Department of Aerospace Science and Technology, Milan, Italy)
E-mail: luigi.deluca@polimi.it

KUVSHINOV Evgeny Nikolaevich (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: kvshn@niipmm.tsu.ru

EREMIN Ivan Vladimirovich (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

TYRYSHKIN Ilia Mikhailovich (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

FASSINA Marco (PhD, Polytechnic Institute of Milan, Department of Aerospace Science and Technology, Milan, Italy)
E-mail: fassina.marco@gmail.com

REFERENCES

1. Glazunov A.A., Kuvshinov N.E., Tkachenko A.S. Matematicheskoe modelirovanie dvukhfaznykh techeniy v ellipticheskikh soplakh Lavalya (2000) Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki. Tomsk, pp.105–106. (in Russian)
2. Glazunov A.A., Kuvshinov N.E. Tkachenko A.S. Issledovanie trekhmernykh dvukhfaznykh techeniy v soplakh slozhnykh form (1998) Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki. Tomsk, pp. 147–148. (in Russian)
3. Vasenin I. M., Narimanov R. K., Glazunov A., Kuvshinov N. E., and Ivanov V. A. Two-phase flows in the nozzles of solid rocket motors, Journal of Propulsion and Power, Vol. 11, No. 4 (1995), pp. 583–592. doi: 10.2514/3.23884
4. Sternin L.E. Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh. M.: Mashinostroenie, 1974. 212 p. (in Russian)
5. Sternin L.E., Maslov B.N., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. Dvukhfaznye mono- i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami M.: Mashinostroenie, 1980. 172 p. (in Russian)
6. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta, 1986. 262 p. (in Russian)
7. Rychkov A.D. Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh. Novosibirsk: Nauka, 1988. 222 p. (in Russian)
8. Sternin L.E., Shrayber A.A. Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami . M.: Mashinostroenie, 1994. 320 p. (in Russian)
9. Rychkov A.D., Shraiber A.A Axisymmetric polydisperse two-phase flow with particle coagulation and fragmentation for an arbitrary distribution of the fragments by masses and velocities (1985) Fluid Dynamics, V 20, No 3, pp. 398–404.
10. Vasenina T.N., Glazunov A.A. Dvukhfaznoe osesimmetrichnoe techenie s uchetoм koagulyatsii, drobleniya i vrashcheniya chastits pri proizvol'nom raspredelenii vtorykhnykh chastits po massam i skorostyam (1998) Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki. Tomsk, pp. 143–144. (in Russian)

УДК 531.58

Д.Б. Добрица

**ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СТОЙКОСТИ
СОТОВЫХ ПАНЕЛЕЙ КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ ПРИ
ВОЗДЕЙСТВИИ МЕТЕОРНО-ТЕХНОГЕННЫХ ЧАСТИЦ**

В статье приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования баллистических характеристик сотовых панелей космического аппарата при воздействии метеорно-техногенных частиц.

Ключевые слова: *космический мусор, соты, защита от загрязнений, гиперскоростное воздействие, баллистическая кривая ограничения.*

Существует два типа частиц, представляющих опасность для космического корабля при гиперскоростном воздействии: естественные метеорные тела и искусственные частицы орбитального космического мусора (КМ). Метеорные тела – это фрагменты комет или астероидов на околосолнечных орбитах. Частицы КМ характеризуются либо как более крупные, прослеживаемые фрагменты, либо как меньшие по размерам, неотслеживаемые частицы на околоземных орбитах.

Ударное повреждение при воздействии частиц космического мусора или метеорных тел на элементы конструкции космического корабля может вызывать широкий диапазон различных эффектов. Оценка степени риска при таких воздействиях необходима при проектировании КА и его систем, чтобы построить космический корабль, защищенный от угрозы воздействия этих частиц.

Количество пробоев зависит от интенсивности воздействующих потоков и критерия разрушения, который определяется толщиной защитного экрана и его свойствами. Широко используемый критерий разрушения – полное проникновение (то есть, «перфорация») стенки защищаемой структуры. Но также возможны другие критерии разрушения, такие как образование отверстия, превышающего заданный критический размер, глубина проникновения, которая превышает заданную, или образование кратера, по объему превышающего заданное значение, и т.д.

Чтобы определить условия воздействия (то есть размер частицы, плотность частицы, скорость воздействия и угол воздействия), которые приводят к порогу повреждения определенных компонент или подсистем КА, разрабатываются баллистические предельные уравнения (БПУ). Для определения БПУ необходимо использовать базу данных результатов испытаний по гиперскоростным воздействиям и их исследований.

В работах [1–3] рассматривались проблемы защиты космических аппаратов с использованием экранов различных конструкций: сплошных, разнесенных и сеточных. Исследования защитных свойств таких конструкций основывались на базе проведенных баллистических экспериментов и численного моделирования.

Структуры космического корабля должны обеспечить требуемую стойкость к метеорно-техногенным воздействиям для защиты полезной нагрузки от воздействия метеорно-техногенных тел (МТТ). Масса структур должна быть как можно более низкой, чтобы обеспечить максимум полезной нагрузки. Поэтому космический корабль, как правило, представляет собой легковесовую конструкцию, состоящую из окруженных тонкой стенкой структурных элементов, которые могут

быть локально усилены (защищены) или выполнены в виде многослойных панелей или оболочек.

В дополнение к инерционным нагрузкам, возникающим вследствие ускорения и оказывающим давление на составные части КА в герметичных частях структуры (камеры высокого давления или герметичные модули), структура должна защитить полезную нагрузку от гиперскоростных воздействий, которые возникают от микрометеорных тел или от частиц орбитального космического мусора. Сложность этой задачи становится важным соображением при конструировании беспилотного космического корабля. Необходимо избегать критического повреждения нагруженных структур (камеры высокого давления, герметичные модули) также и как вероятного источника новых частиц КМ.

Воздействие частиц на тонкостенные структуры сопровождается высоким давлением и повышением температуры, что может привести к плавлению или даже испарению материала и образованию кратера, объем которого будет намного больше, чем объем частицы. Если частица будет достаточно большой (приблизительно 10–15 % толщины стенок для скорости частицы приблизительно 7 км/с [4]), то произойдут перфорация тонкой структуры и образование трещин. Частица будет фрагментирована, а фрагменты проникнут внутрь структуры и произведут дальнейшие повреждения. В случае герметичных структур, возникающие трещины могут превысить критическую длину, приводящую к катастрофическому разрыву.

Сотовые панели представляют собой два тонких листа, соединенных легким заполнителем. Сотовые заполнители разделяют листы и несут сдвиговые нагрузки, в то время как листы очень эффективно несут нагрузки на изгиб. По отношению к ударным нагрузкам, две обшивки работают подобно щитовой структуре. В этом случае они менее эффективны, поскольку каналы сотового заполнителя пропускают облако осколков.

В конструкции беспилотных космических кораблей, как правило, используются сотовые структуры, то есть обшивки, соединенные сотовыми ячейками (рис. 1), обычно используемый материал для обеих обшивок и сот – алюминий или углепластик. Как правило, толщина обшивки может колебаться от 0,25 мм до 2 мм, с размерами ячейки в диапазоне от 3 мм до 25 мм. Полная толщина сотовой структуры может находиться между 4 и 50 мм.

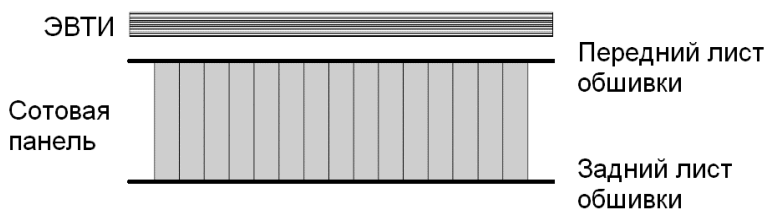


Рис. 1. Стандартная сотовая панель с ЭВТИ

Назначение каждой обшивки в структуре панели:

- Выдерживать прямые нагрузки (растяжение и сжатие), которые вызывают расширение и сужение.

- Нести внутренние сдвиговые нагрузки и нагрузки на изгиб обшивки.

Сотовый заполнитель в структуре вносит следующий вклад:

- Стабилизация обшивок в пространстве, чтобы обеспечить необходимое соотношение сила/вес и жесткость.

- Обеспечение сопротивления поперечной сдвиговой нагрузке, для воспрепятствования сдвигу плоскостей.

С целью улучшения терморегулирования обшивки могут быть покрыты такими материалами, как многослойная изоляция (ЭВТИ) или тефлон.

Для сотовой структуры из алюминиевого сплава наблюдалось несколько вариантов повреждения при высокоскоростном воздействии.

1) Первичное и внутреннее повреждение

Этот тип повреждения относится к пробое ударником и косвенному повреждению передней и задней обшивок и внутреннего сотового заполнителя. Внутреннее повреждение, как правило, намного серьезнее, чем отверстие в обшивке (см. рис. 2; параметры соударения – снаряд 1,74 мм, 7,2 км/с, угол полета 45 град). Повреждение отдельных сотовых ячеек может классифицироваться как выпучивание стенки (перфорация ячейки отсутствует), разрыв (перфорация ячейки) и, наконец, уничтожение (распад ячейки). Повреждение всей структуры происходит при наличии перфорации на задней обшивке. Совместный эффект наличия перфорированных обшивок и пустот в сотовых ячейках создает местные концентрации напряжения. Случайное распределение пустот в сотах может способствовать местной стабильности поврежденной структуры, что может быть крайне важным с точки зрения точности используемого расчетного инструментария. Разрыв ячейки может привести к потере структурной целостности клеевого состава соседних металлических конструкций, сопряженных с сотовой панелью. Это может привести в результате к отрыву установленного оборудования.



Рис. 2. Типовое ударное повреждение сотовых ячеек в сотовой панели

2) Повреждение облаком осколков

Это повреждение относится ко вторичному облаку высоко- и низкоскоростных частиц, образуемому при перфорации обшивки.

Возникновение вторичного облака осколков, образующегося в случае перфорации структуры, приводит к наиболее высокому риску механического повреждения полезной нагрузки, расположенной на корпусе КА. Особенно это относится к оборудованию, установленному непосредственно на уязвимых лицевых панелях корпуса или близко к ним. Для установленного снаружи оборудования поврежде-

ние облаком осколков возможно от рикошета частицы, воздействующей на соседнюю поверхность под наклонным углом.

Эффект воздействия низкоэнергетического облака состоит в эрозии поверхности оборудования, тогда как воздействие высокоэнергетического облака может привести к проникновению вторичных частиц внутрь через алюминиевые стенки корпуса оборудования.

3) Загрязнение

Если соударение со стенкой происходит под достаточным наклоном, то могут появиться фрагменты вторичного извержения (рикошет), которые могут воздействовать на другие части космического корабля или загрязнить полезную нагрузку и подсистемы.

Уравнения повреждения и БПУ

Баллистические предельные зависимости для сотовых конструкций в целом плохо определены для находящихся в широком диапазоне диаметров частицы и скоростей. В связи с этим невозможно сравнение относительного исполнения различных конфигураций. Однако ключевые механизмы повреждения могут быть идентифицированы следующим образом:

- Значительное отслаивание сотового заполнителя от обшивок происходит выше баллистического предела [5].

- Облако осколков направлено по определенному руслу и для нормальных и для наклонных углов воздействия [6–8].

- Внутреннее повреждение ячеек сот может быть, по крайней мере, на порядок больше, чем изначальный диаметр снаряда [9].

- Тип алюминиевого сплава, используемого в сотовом заполнителе, не влияет на направление ударной волны [10].

- Существует зависимость баллистического предела от угла воздействия [8, 9].

- ЭВТИ увеличивает баллистический предел структуры в целом.

Баллистический предел для сотовой конструкции – функция толщины обшивки, размеров ячейки и толщины стенки ячейки, глубины сотовой структуры и используемых материалов. В настоящее время не существует уравнений, которые объединяют все эти параметры. Возможно использование измененного уравнения Кур-Паласа (Christiansen-Cour-Palais) для защиты Уиппла (см. ниже), расчетные значения которого могут быть сопоставлены с экспериментальными данными испытаний воздействия с соответствующими параметрами. Однако, при таком подходе влияние сотового заполнителя в уравнении не представлено.

Для некоторых сотовых конфигураций это уравнение может быть совместимо с известными данными, в которых используется либо эквивалентный интервал [10], либо эквивалентная толщина задней обшивки [6].

Для $V_n \leq 3$ км/с:

$$d_c(v_n) = \left[\frac{t_w}{K_{3S}} \left(\frac{\tau}{40000} \right)^{0,5} + t_b \right]^{0,947} \cdot \frac{1}{0,6 \cos \theta v_n^{0,667} \cdot \rho_p^{0,5}} \quad (1)$$

Для $V_n \geq 7$ км/с:

$$d_c(v_n) = 1,155 K_{3D}^{-0,667} t_w^{0,667} \rho_p^{-0,333} \rho_b^{-0,111} v_n^{-0,667} \left(\frac{\tau S}{70000} \right)^{0,333} \quad (2)$$

Для $3 \leq V_n \leq 7$ км/с:

$$d_c(v_n) = d_c(v_n = 3) \cdot \left(1,75 - \frac{v_n}{4}\right) + d_c(v_n = 7) \cdot \left(\frac{v_n}{4} - 0,75\right) \quad (3)$$

- где $K_{3S} = 1$ (базовый вариант);
 $K_{3D} = 0,16$ (базовый вариант);
 d_c – предельный минимальный диаметр пробивающей частицы (см);
 v – скорость (км/с);
 v_n – нормальная компонента скорости (км/с);
 θ – угол воздействия, измеренный от нормали к поверхности (град);
 t_b – толщина бампера, т.е. передней обшивки (см);
 t_w – толщина задней стенки (обшивки) (см);
 ρ_p – плотность снаряда (г/см³);
 ρ_w – плотность задней стенки (г/см³);
 ρ_b – плотность бампера (г/см³);
 τ – напряжение текучести (в фунт/дюйм²);
 S – интервал между бампером и задней стенкой (см).

Из-за влияния угла соударения на стойкость сотовой структуры уравнение Christiansen-Cour-Palais не может использоваться как представление функции угла воздействия для мишеней с сотовой структурой. В случае наклонных воздействий, линия полета снаряда многократно пересекается с тонкими алюминиевыми листами (сотовый наполнитель). Сотовое ядро в этом случае действует как многослойный щит. Для определения стойкости мишени в качестве функции энергии воздействия, может использоваться баллистический предел мишени как функция энергии удара. Экспериментальные данные [8] показали, что при соударении под углом 45 град, требуется ~ в 2,3 раза большая энергия воздействия, чтобы достичь баллистического предела по сравнению с соударением 0 град. Это соотношение справедливо для глубины сотового наполнителя 22 мм. Для глубины сотового наполнителя 45 мм (двойной сотовый наполнитель) в таком случае для достижения баллистического предела потребуется энергия воздействия ~ в 4,6 раза больше.

Экспериментальные испытания стойкости сотовых панельных конструкций

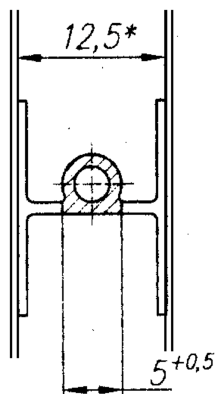


Рис. 3. Элемент профиля тепловой трубы радиатора с обшивкой (образец № 1)

Проблема стойкости сотовых панелей и конструкций, устанавливаемых на их обшивке с внутренней стороны, является весьма распространенной при проведении расчетов вероятности непробоя (ВНП) для КА и их систем при воздействии метеорно-техногенных частиц. Данные о стойкости таких конструкций к воздействию МТТ были получены, в частности, в НИИ ПММ ТГУ при проведении экспериментальных работ по определению стойкости типовых конструкций КА «Спектр-УФ» для НПО им. С.А. Лавочкина [11]. В качестве объекта испытаний был взят фрагмент типового радиатора КА (см. рис. 3).

В качестве метательной установки была выбрана пороховая пушка калибром 8 мм. Ниже приведена сводная таблица, составленная по протоколам проведенных экспериментов на данной конструкции.

Таблица 1

Результаты экспериментов по пробую радиатора

№ опыта	Материал ударника	Размер ударника мм	Скорость ударника км/с	Результаты опыта
1	графелон	цилиндр Ø2x2	1,76	сквозное пробитие (радиатор)
2	графелон	цилиндр Ø2x2	1,51	Пробита внешняя оболочка + закладная трубки, вторая оболочка не пробита
3	графелон	цилиндр Ø2x2	1,9 (оценка)	Пробита внешняя оболочка + закладная трубки, вторая оболочка не пробита
4	графелон	цилиндр Ø2x2	2,0	Пробита внешняя оболочка + закладная трубки + сама трубка
5	незачётный			
6	графелон	цилиндр Ø2x2	2,17	сквозное пробитие (радиатор)
7	графелон	цилиндр Ø2x2	1,28	Пробита внешняя оболочка + закладная трубки,
8	графелон	цилиндр Ø2,5x2,5	1,59	Пробита внешняя оболочка + закладная трубки,
9	графелон	цилиндр Ø2,5x2,5	1,64	Пробита внешняя оболочка + закладная трубки,

Картины взаимодействия ударников с образцом № 1 приведены на рис. 4 – 5.

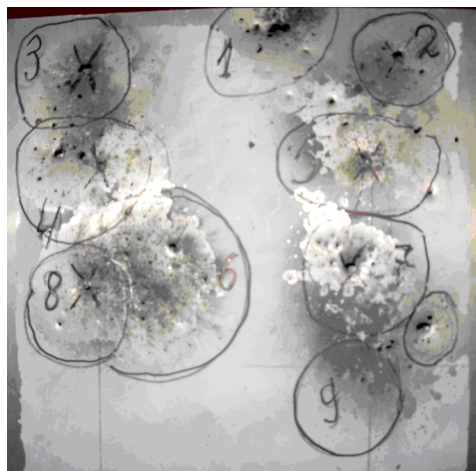


Рис. 4. Лицевая поверхность образца



Рис. 5. Тыльная поверхность образца

В опытах №№ 1, 6 осуществлялось воздействие непосредственно на сотовую панель (минуя профильную тепловую трубу), и это привело к сквозному пробитию радиатора (т.е. перфорации задней стенки). Для того, чтобы нанести эти экспериментальные точки на теоретическую баллистическую кривую, уравнение (2) было модифицировано с целью введения в него зависимости от угла воздействия.

Для $V_n \geq 7$ км/с:

$$d_c(v_n) = 1,155 K_{3D}^{-0,667} t_w^{0,667} \rho_p^{-0,333} \rho_b^{-0,111} v_n^{-0,667} \left(\frac{\tau S}{70000} \right)^{0,333} (\cos \theta)^{-0,414 S^{0,84}} \tag{4}$$

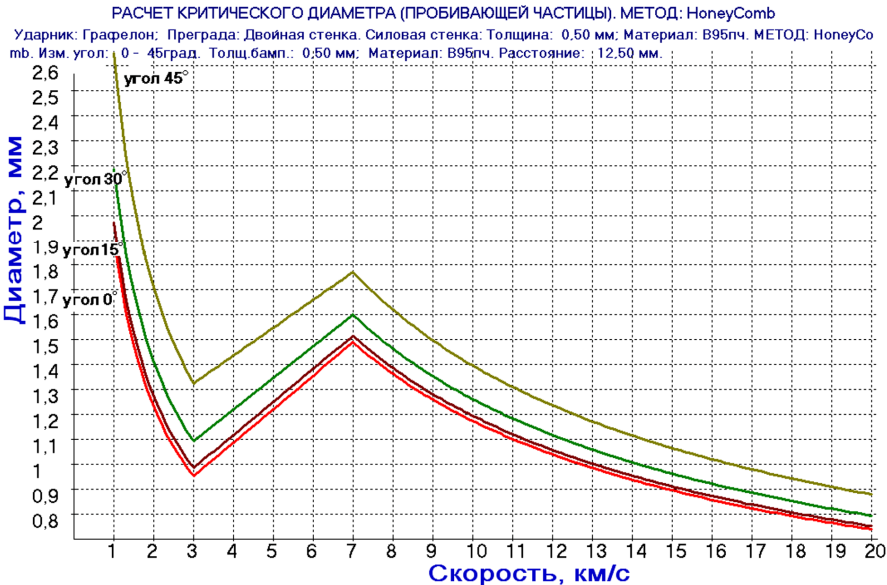


Рис. 6. Баллистическая предельная зависимость для сотовой панели (углы соударения 0, 15, 30 и 45°)

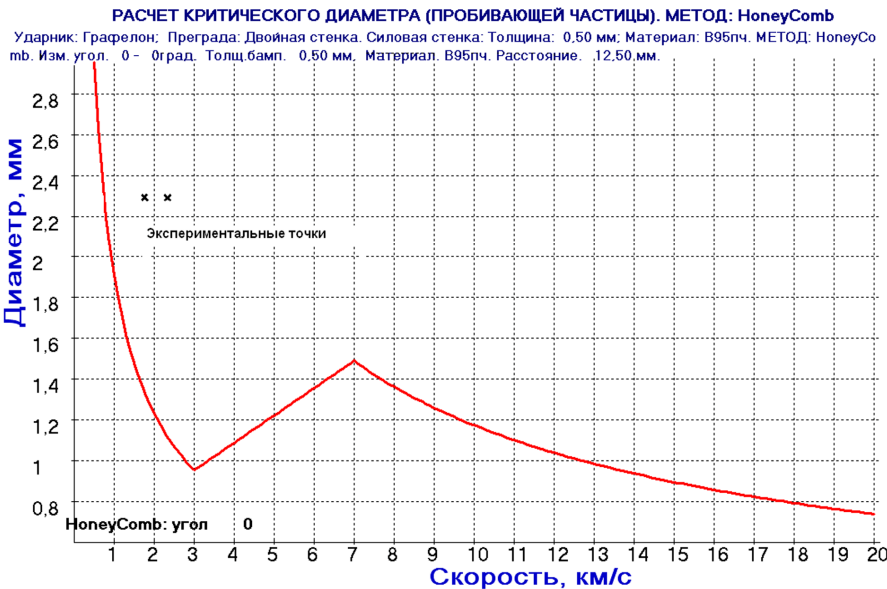


Рис. 7. Баллистическая предельная зависимость для сотовой панели и экспериментальные точки

Расчетные баллистические предельные зависимости, полученные для рассматриваемой сотовой панели по формулам (1, 2, 4) для углов соударения от 0° до 45° , показаны на рис. 6. На рис. 7 на графике нанесены экспериментальные точки, в качестве которых взяты опытные выстрелы с результатом «сквозное пробитие (радиатор)». При этом учитывалось, что масса шара диаметром 2,3 мм соответствует массе цилиндра диаметром 2 и высотой 2 мм. Зона расположения имеющихся экспериментальных точек не противоречит предельной баллистической зависимости, построенной для данной структуры на основании соотношений (1, 2, 4).

Улучшение стойкости сотовых панелей к повреждению от воздействий высокоскоростных частиц

Технологии усиления сотовой структуры КА и/или многослойной теплоизоляции применялись ранее на беспилотных космических кораблях [12, 13]. Они в первую очередь включали в себя повышение стойкости ЭВТИ с помощью тканей и материалов, таких как некстел, проволоочная сетка и стекловолоконная ткань. Набор стратегий защиты беспилотных КА на основе базовой структуры для низ-коорбитальной космической станции [14] представлен в табл. 2.

Таблица 2

Защитные возможности для сотовых структур

	Тип защиты	Ожидаемое улучшение от защиты
1	Изменение толщины стенок ячеек сот	Изменяет эффект направления облака осколков. Меняется зависимость от угла соударения
2	Изменение размера сотовой ячейки	Изменяет эффект направления облака осколков. Меняется угловая зависимость
3	Увеличение глубины сот	Увеличение разброса облака осколков
4	Варьирование толщины обшивки лицевой стороны	Увеличенное разрушение снаряда
5	Варьирование толщины обшивки внутренней стороны	Увеличенная стойкость к воздействию облака осколков
6	Использование многослойных сотовых структур	Эффект, подобный многослойной защите
7	Сотовая + ламинат	Разнообразие структур повышает сопротивление при соударении, чтобы увеличить стойкость к разрушению
8	ЭВТИ + некстел/кевлар/стекловолоконная ткань спереди	Эффект многослойной защиты и повышенное разрушение снаряда
9	ЭВТИ + некстел/кевлар/стекловолоконная ткань сзади	Эффект многослойной защиты и улучшенное сдерживание облака осколков
10	ЭВТИ + некстел/кевлар/стекловолоконная ткань средним слоем	Эффект многослойной защиты и улучшенное рассеивание облака осколков
11	ЭВТИ + разделительные стержни	Эффект многослойной защиты
12	Соты + некстел/кевлар внутри КА	Защита чувствительного внутреннего оборудования КА
13	Соты + отстоящий бампер	Эффект защиты Уиппла

Варианты, перечисленные в табл. 2, ограничены многими техническими условиями. Оптимальная силовая структура – глубокие соты, массивные стенки и маленькие размеры ячейки. Там, где в структуре должны быть установлены вставки, их интервал и нагрузка являются функцией от размера ячейки. Глубина сот также зависит от вставок.

Особенно интересный вариант в таблице – замена стандартной одиночной сотовой структуры кратным числом (например, двойной) сотовой структурой внутреннего заполнителя (рис. 8).

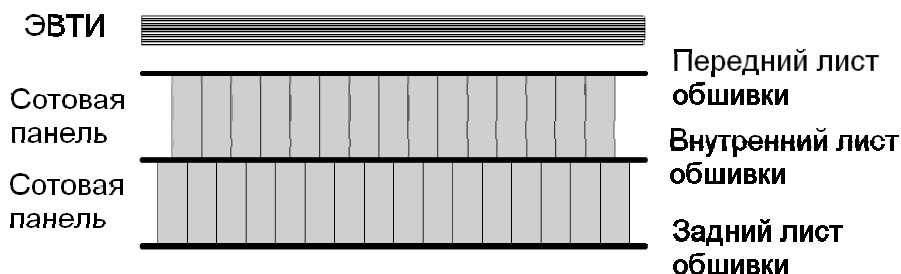


Рис. 8. Двойная сотовая панель с ЭВТИ

Данные структуры особенно рекомендуются для самых уязвимых поверхностей КА [14], например, тех, которые установлены по направлению скорости КА. Двойная сотовая структура эффективна для гашения эффекта воздействия направленного облака осколков, а также для сокращения размера самых больших фрагментов в облаке. Однако необходимо принять во внимание, что использование двойной сотовой структуры могло бы привести к дополнительным техническим проблемам по сравнению с одинарной сотовой конфигурацией. Например, может быть уменьшена теплопередача. Кроме того, не представляется возможным использование тонкослойных покрытий из-за деформирования во время изготовления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerasimov A.V., Dobritsa D.B., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. Theoretical and experimental study of interaction of protective systems of cosmic station with natural and man-caused fragments // Международная конференция «Х Забабахинские научные чтения (ЗНЧ-Х)». 15–19 марта 2010 г. Снежинск, Челябинская обл., Россия. Статья. С. 1–4. <http://www.vniitf.ru/images/zst/2010/sec1/1-7.pdf>
2. Герасимов А.В., Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Защита космических аппаратов от удара высокоскоростными частицами: сплошные, разнесенные и сеточные экраны // Труды межд. конф. XIII Харитоновские тематические научные чтения. «Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны». РФЯЦ-ВНИИЭФ. Саров. 14–18 марта 2011. С. 501–505.
3. Герасимов А.В., Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Теоретико-экспериментальное моделирование эффективной защиты космических аппаратов от высокоскоростных осколков // Zbornik Radova Konferencije MIT 2011, Beograd 2012, Serbia. С. 117–121.
4. Cour-Palais B. Hypervelocity Impact in Metals, Glass and Composites, International Journal of Impact Engineering, Volume 5. P. 221–237, 1987.

5. Frate D.T., Nahra H.K. Hypervelocity Impact testing of Nickel Hydrogen Battery Cells, AIAA Space Programs and Technologies Conference, Huntsville, Alabama, AIAA 96-4292, September 1996.
6. Taylor E.A., Herbert M.K., Vaughan B.A.M., McDonnell J.A.M. Hypervelocity Impact on Carbon Fibre Reinforced Plastic / Aluminium Honeycomb: Comparison with Whipple Bumper Shields, International Journal of Impact Engineering. V. 23. P. 883–894, 1999.
7. Lambert M. Hypervelocity impacts and damage laws, Ad. Space Res., 19(2). P. 369–378, 1997.
8. Jex D.W., Miller A.M., Mackay C.A. The Characteristics of Penetration for a Double-Sheet Structure with Honeycomb, NASA TM X-5397, 1970.
9. Taylor E.A., Herbert M.K., Gardner D.J., Kay L. Hypervelocity Impact on Carbon Fibre Reinforced Plastic (CFRP) / Aluminium Honeycomb, Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, 211 (Part G). P. 355–363, 1997a.
10. Sennett R.E., Lathrop B.L. Effects of Hypervelocity Impact on Honeycomb Structures, Journal of Spacecraft and Rockets. V. 5. P. 1496–1497, 1968.
11. Отчет об опытно-конструкторской работе «Экспериментальное определение предельной стойкости элементов конструкций КА «Спектр-УФ» и противометеорной защиты при воздействии высокоскоростных частиц (итоговый). Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики Томского государственного университета. Томск, 2010.
12. Terrillion F., Warren H.R., and Yelle M.J. Orbital Debris Shielding Design Of The Radarsat Satellite, IAF-91-283, 42nd Congress of the International Astronautical Federation, 5–11 October, Montreal, Canada, 1991.
13. Christiansen E.L. Design Practices for Spacecraft Meteoroid/Debris (M/D) Protection, Proceedings of the 1998 Hypervelocity Shielding Workshop, IAT Catalog number IAT.MG 0004, Institute for Advanced technology, The University of Texas at Austin, 1999.
14. Turner R.J., Taylor E.A., McDonnell J.A.M., Stokes H., Marriott P., Wilkinson J., Catling D., Vignjevic R., Berthoud L., Lambert M. Cost Effective Honeycomb and MLI Debris Shields for Unmanned Spacecraft, International Journal of Impact Engineering. V. 26. 2001.

Статья поступила 12.11.2013 г.

Dobritsa D.B. THEORETICAL-EXPERIMENTAL ESTIMATE OF RESISTANCE OF SPACECRAFT HONEYCOMB PANELS UPON IMPACTS FROM METEOROIDS AND SPACE DEBRIS. Results of the theoretical and experimental study of ballistic characteristics of spacecraft honeycombs upon impacts from meteoroids and space debris are presented. Consequences of the impact of high-speed particles on thin-walled spacecraft structures spacecraft and their failure criterions are considered. Damage options for honeycomb sandwich structures made of an aluminum alloy are given. An option of modification of the ballistic limit equations for the honeycomb structures on the example of application of the modified Cour-Palais (Christiansen–Cour-Palais) Whipple bumper equation for the purpose to introduce a functional dependence of the critical diameter of penetrating particles on the impact angle is proposed. For a standard honeycomb design of the Spektr-UF spacecraft, the results of the performed experiments received on ultra-high speed launcher are presented. The ballistic limit dependences calculated by a theoretical method are correlated to the experimental values which have been selected by criterion of perforation. Some ways to improve the resistance of the honeycomb panels to meteoroid/debris damage are given.

Keywords: space debris, honeycomb, debris protection, hypervelocity impact; ballistic limit curve.

DOBRITSA Dmitry Borisovich (Candidate of technical sciences,
FSUI named after S.A.Lavochkin, Khimki, Moscow region, Russian Federation)

E-mail: dobrica@laspace.ru

REFERENCES

1. Gerasimov A.V., Dobritsa D.B., Pashkov S.V., Khristenko Yu. F. Theoretical and experimental study of interaction of protective systems of cosmic station with natural and man-caused fragments (2010) Conference proceedings. «X Zababakhinskie nauchnye chteniya (ZNCh-X)» <http://www.vniitf.ru/images/zst/2010/sec1/1-7.pdf> (in Russian)
2. Gerasimov A.V., Dobritsa D.B., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. Zashchita kosmicheskikh apparatov ot udara vysokoskorostnymi chastitsami: sploshnye, raznesennye i setochnye ek-rany (2011) Conference proceedings. XIII Kharitonovskie tematicheskie nauchnye chteniya. «Ekstremal'nye sostoyaniya veshchestva. Detonatsiya. Udamnye volny». RFYaTs-VNIIEF. Sarov, pp. 501–505. (in Russian)
3. Gerasimov A.V., Dobritsa D.B., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. Teoretiko-eksperimental'noe modelirovanie effektivnoy zashchity kosmicheskikh apparatov ot vysokoskorostnykh oskolkov (2011) Conference proceedings. Zbornik Radova Konferencije MIT 2011, Beograd 2012, Serbia, pp. 117–121. (in Russian)
4. Cour-Palais, B., Hypervelocity Impact in Metals, Glass and Composites, International Journal of Impact Engineering, Volume 5, pp 221–237, 1987.
5. Frate, D.T., H.K. Nagra, Hypervelocity Impact testing of Nickel Hydrogen Battery Cells, AIAA Space Programs and Technologies Conference, Huntsville, Alabama, AIAA 96-4292, September 1996.
6. Taylor, E.A., M.K. Herbert, B.A.M. Vaughan, J.A.M. McDonnell, Hypervelocity Impact on Carbon Fibre Reinforced Plastic / Aluminium Honeycomb: Comparison with Whipple Bumper Shields, International Journal of Impact Engineering, Vol 23, pp. 883–894, 1999.
7. Lambert, M., Hypervelocity impacts and damage laws, Ad. Space Res., 19(2), pp. 369–378, 1997.
8. Jex, D.W., A.M. Miller, C.A. Mackay, The Characteristics of Penetration for a Double-Sheet Structure with Honeycomb, NASA TM X-5397, 1970.
9. Taylor, E.A., M.K. Herbert, D.J. Gardner, L. Kay, Hypervelocity Impact on Carbon Fibre Reinforced Plastic (CFRP)/Aluminium Honeycomb, Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, 211 (Part G), pp. 355–363, 1997a.
10. Sennett, R.E. , B.L. Lathrop, Effects of Hypervelocity Impact on Honeycomb Structures, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol 5, pp 1496–1497, 1968.
11. Otchet ob opytno-konstruktorskoy rabote «Eksperimental'noe opredelenie predel'noy stoykosti elementov konstruksiy KA «Spektr-UF» i protivometeornoy zashchity pri vozdeystvii vysokoskorostnykh chastits (itogovyy). Nauchno-issledovatel'skiy institut prikladnoy matematiki i mekhaniki Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Tomsk, 2010. (in Russian)
12. Terrillion, F., H.R. Warren, and M.J. Yelle, Orbital Debris Shielding Design Of The Radarsat Satellite, IAF-91-283, 42nd Congress of the International Astronautical Federation, 5–11 October, Montreal, Canada, 1991.
13. Christiansen E.L., Design Practices for Spacecraft Meteoroid/Debris (M/D) Protection, Proceedings of the 1998 Hypervelocity Shielding Workshop, IAT Catalog number IAT.MG 0004, Institute for Advanced technology, The University of Texas at Austin, 1999.
14. Turner, R.J., E.A. Taylor, J.A.M. McDonnell, H. Stokes, P. Marriott, J. Wilkinson, D. Catling, R. Vignjevic, L. Berthoud, M. Lambert, Cost Effective Honeycomb and MLI Debris Shields for Unmanned Spacecraft, International Journal of Impact Engineering, Vol 26, 2001.

УДК 536.46

А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева

**РЕЖИМЫ ГОРЕНИЯ БЕДНОЙ МЕТАНО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ
В U-ОБРАЗНОЙ ГОРЕЛКЕ¹**

Проведено численное исследование горения бедной метано-воздушной смеси в U-образной трубке в случае инициирования процесса горения предварительно разогретой внутренней стенкой трубки. Показано, что в зависимости от безразмерного параметра интенсивности теплообмена реакционной смеси на внешней стенке трубки и безразмерного параметра течения смеси в системе может реализоваться высокотемпературное или низкотемпературное стационарное состояние, либо колебательный режим горения.

Ключевые слова: бедная метано-воздушная смесь, процессы тепло- массопереноса, зажигание внутренней стенкой, устойчивые и неустойчивые режимы работы горелочного устройства.

Задача по сжиганию бедных газовых смесей является актуальной по нескольким причинам. Во-первых, существует проблема сокращения выбросов в атмосферу вредных газов и продуктов недогорания. Во-вторых, привлекает внимание задача полезной утилизации низкокалорийных топлив. Зажечь бедную метано-воздушную смесь трудно, так как на концентрационном пределе горение становится неустойчивым, а ниже этого предела – невозможным. В настоящее время продолжают разработки методов, позволяющих стабилизировать процесс горения бедных смесей [1]. Например, в [1] предлагается метод беспламенного горения или горения в пористых матрицах.

На устойчивость и эффективность работы горелочного устройства существенное влияние оказывает его конструкция [2]. Меняя форму горелочного устройства или добавляя в конструкцию различные теплообменные системы, можно изменить характер протекания процесса горения. В [3] предлагается сжигать низкокалорийные топлива в реакторе с пористым фильтрационным слоем. Введение пористого слоя обеспечивает сжигание низкокалорийного топлива, и дает возможность управлять процессом горения через изменение характеристик пористого слоя. В работе [4] была предложена модель проточного реактора с инертным внутренним телом. Присутствие инертного тела внутри горелочного устройства приводит к изменению процесса теплообмена внутри реактора, и позволяет повлиять на режимы его работы.

Теплообмен реакционной смеси с боковой поверхностью может приводить к затуханию пламени или, наоборот, способствовать стабилизации процесса горения для критических условий существования пламени. В работах [5–7] рассматривалось горение газа в узких трубках с диаметром меньше критического. В таких каналах теплотери через боковую поверхность могут привести к затуханию пламени. В [5] предлагалось подогревать стенки канала на одном из участков. Неравномерный нагрев стенок позволяет стабилизировать фронт пламени в нагретой

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №2014/223 (код проекта 1943).

части канала. В [6] рассматривался противоточный теплообменник, состоящий из двух прилегающих друг к другу трубок, входящая смесь в нем подогревалась за счет взаимного теплообмена газов через перегородку. Было показано, что при интенсивном теплообмене между трубками теплообменника существует принципиальная возможность организации процесса горения бедных реакционных смесей в каналах с радиусом меньше критического. В [7] рассматривалось горение водородо-воздушной смеси в кольцеобразной микрорелке. Реакционная смесь протекала в полости между двумя концентрическими трубками. Внутренняя трубка была заполнена азотом, а внешняя образовывала наружную поверхность горелочного устройства. Расчеты показали, что азот, заполняющий внутреннюю трубку, позволял стабилизировать фронт пламени, несмотря на большие теплотери от смеси через внешнюю стенку.

В настоящей работе на основе подходов [4, 6] ставится задача о зажигании и горении бедной метано-воздушной смеси в U-образной трубке, внешние стенки которой считаются холодными, а внутренняя стенка, представляющая собой аналог инертного тела из [4], инициирует процесс горения. На схеме (рис. 1) приведен внешний вид конструкции. Холодная реакционная смесь со скоростью v , температурой T , относительной концентрацией горючей компоненты α , подается в устройство на границе $x = 0$ (область I на рис. 1b). Смесь проходит через трубку и на границе $x = L$ меняет направление своего движения, на границе $x = 2L$ смесь вытекает через выходную трубку (область III, рис. 1b). На рис. 1a внутренняя стенка показана толстой черной линией на торце устройства, на рис. 1b внутренней стенке соответствует область II, расположенная между входной и выходной трубкой. Температура смеси на рис. 1b обозначена T , температура внутренней стенки – T_1 , температура внешних стенок – T_s , температура поверхности внутренней стенки – $T_{1,s}$. Внутренняя стенка обменивается теплом с реакционной смесью,

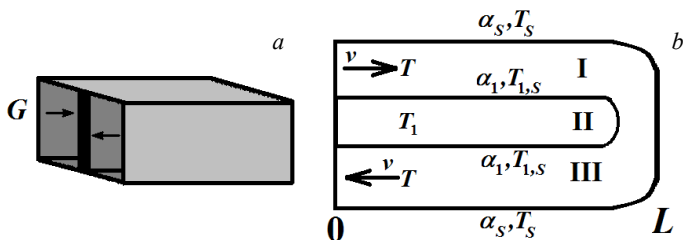


Рис. 1. Поля: a – модель U-образного горелочного устройства; b – горелочного устройства. I – входная трубка, II – внутреннее тело, III – выходная трубка

протекающей через входную и выходную части трубки. Реакционная газовая смесь обменивается теплом с внутренней и внешней стенкой с коэффициентами теплообмена α_s и α_1 соответственно. Полагается, что в трубке протекают экзотермические химические реакции с аррениусовской кинетикой первого порядка. При постановке задачи приняты следующие допущения: расход газовой смеси считается постоянным, учитывается распределение температуры смеси и выгорания горючей компоненты только вдоль трубок, температура внутренней стенки определяется только вдоль трубок и в поперечном направлении считается однородной.

Для записи системы уравнений математической модели введем обобщенную координату x вдоль трубок горелочного устройства. Тогда общая длина трубок в этих координатах – $2L$, длина внутренней стенки устройства – L . Газ, протекая вдоль трубок, обменивается теплом с поверхностью внутренней стенки, длина которой составляет $2L$. Ввиду предположения об однородности температуры стенки в поперечном направлении для температуры поверхности внутренней стенки $T_{1,S}$ выполняются равенства $T_{1,S}(x) = T_1(x)$ при $0 < x < L$ и $T_{1,S}(x) = T_1(2L-x)$, при $L < x < 2L$.

С учетом сделанных допущений математическая постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + A_v \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + I_1 (\theta_{1,S}(\xi, \tau) - \theta) + I_S (\theta_S - \theta) + \eta \exp\left(\frac{\theta}{1 + Ar\theta}\right), \quad 0 \leq \xi \leq 2\xi_L, \quad (1)$$

$$\theta_{1,S}(\xi, \tau) = \theta_1(\xi, \tau), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L; \quad \theta_{1,S}(\xi, \tau) = \theta_1(2\xi_L - \xi, \tau), \quad \xi_L \leq \xi \leq 2\xi_L.$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + A_v \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = Le \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - Td \eta \exp\left(\frac{\theta}{1 + Ar\theta}\right), \quad 0 \leq \xi \leq 2\xi_L. \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = k_\chi \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{I_1}{k_{cp}} (\theta(\xi, \tau) - \theta_{1,S}) + \frac{I_1}{k_{cp}} (\theta(2\xi_L - \xi, \tau) - \theta_{1,S}), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L. \quad (3)$$

Краевые условия:

$$\tau = 0: \theta(\xi, 0) = \theta_b, \quad \theta_1(\xi, 0) = \theta_{1b}, \quad \eta(\xi, 0) = \eta_b. \quad (4)$$

$$\xi = 0: \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi} = A_v (\theta(0, \tau) - \theta_v), \quad \frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad Le \frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial \xi} = A_v (\eta(0, \tau) - 1). \quad (5)$$

$$\xi = \xi_L: \frac{\partial \theta_1(\xi_L, \tau)}{\partial \xi} = 0. \quad (6)$$

$$\xi = 2\xi_L: \frac{\partial \theta(2\xi_L, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta(2\xi_L, \tau)}{\partial \xi} = 0. \quad (7)$$

В задаче (1) – (7) безразмерные параметры и переменные определяются соотношениями:

$$\xi = \frac{x}{x_m}, \quad \tau = \frac{t}{t_{ad}}; \quad \eta = \frac{a}{a_b}, \quad \theta = \frac{E}{RT_m^2} (T - T_m); \quad x_m = \sqrt{\frac{\lambda}{c\rho_b}} t_{ad},$$

$$t_{ad}(T_m) = \frac{c\rho_b RT_m^2}{EQw_{0*}}, \quad A_v = \frac{c\rho_b v_b \sqrt{RT_m^2}}{\sqrt{\lambda EQw_{0*}}}, \quad Ar = \frac{RT_m}{E}, \quad Td = \frac{c}{Q} \frac{RT_m^2}{a_b E},$$

$$k_{cp} = \frac{d}{d_1} \frac{c_1 \rho_1}{c\rho}, \quad k_\chi = \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1} \frac{c\rho_b}{\lambda}, \quad Le = \frac{Dc\rho_b}{\lambda}, \quad w_{0*} = \rho_b a_b k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_m}\right),$$

$$I_1 = \frac{\tilde{\alpha}_1 RT_m^2}{EQw_{0*}}, \quad I_S = \frac{\tilde{\alpha}_s RT_m^2}{EQw_{0*}}, \quad \tilde{\alpha}_s = \frac{2\alpha_s}{d}; \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1(d_1 + d)}{d^2}.$$

Здесь T_m – масштабная температура, c – теплоемкость, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, v – скорость течения смеси, E – энергия активации, Q –

тепловой эффект реакции, x – пространственная координата, d – ширина трубки, a – концентрация горючей компоненты, R – универсальная газовая постоянная, k_0 – предэкспонент в законе Аррениуса, w_{0*} – скорость химической реакции при температуре T_m и начальном значении концентрации горючей компоненты a_b . Индексами 1, S , b , v – отмечены параметры внутренней и внешней стенки трубки, начальные и входные параметры соответственно, $1, S$ – параметры поверхности внутренней стенки. Параметр ξ_L соответствует длине горелочного устройства и внутренней стенки, отсюда общая протяженность трубок горелочного устройства – $2\xi_L$. Параметр I_S характеризует интенсивность теплообмена газа с внешней стенкой, I_1 – с поверхностью внутренней стенки, A_v – скорость течения газа, Ar , Td , Le – числа Аррениуса, Тодеса и Льюиса.

Решение задачи проводилось методом прогонки по неявной разностной схеме. В качестве горючей смеси была взята 2 % смесь метана и воздуха. Рассчитанные для нее безразмерные параметры: $k_{cp} = 221.8$, $Ar = 0.03$, $\eta_b = 1$, $Td = 4.74 \cdot 10^{-2}$, $k_\chi = 0.51$, $Le = 1$, $\theta_v = -21.8$, $\theta_b = -21.8$, $I_1 = 2.19$. Расчеты проводились для значения $\xi_L = 27.54$, общая длина трубок равнялась $2\xi_L = 55.08$. Начальная температура внутренней стенки T_{1b} принималась за масштабную, тогда соответствующая безразмерная температура равнялась $\theta_{1b} = 0$. Расчеты показали, что в зависимости от значений параметров I_S и A_v в системе реализуются высокотемпературное или низкотемпературное стационарное состояние, либо колебательный режим.

На рис. 2 показано изменение положения фронта пламени вдоль оси реактора во времени. За фронт пламени выбиралась точка пространства ξ_f , в которой значение концентрации горючей компоненты равнялось $\eta = 0.5$. Согласно рис. 2 окончательное установление режима работы происходит при больших временах τ , это связано с относительно большой протяженностью расчетной области. Кривая 1 на рис. 2 соответствует установившемуся колебательному режиму работы. Амплитуда и положение колебаний фронта горения определяется координатами $11 \leq \xi \leq 28$.

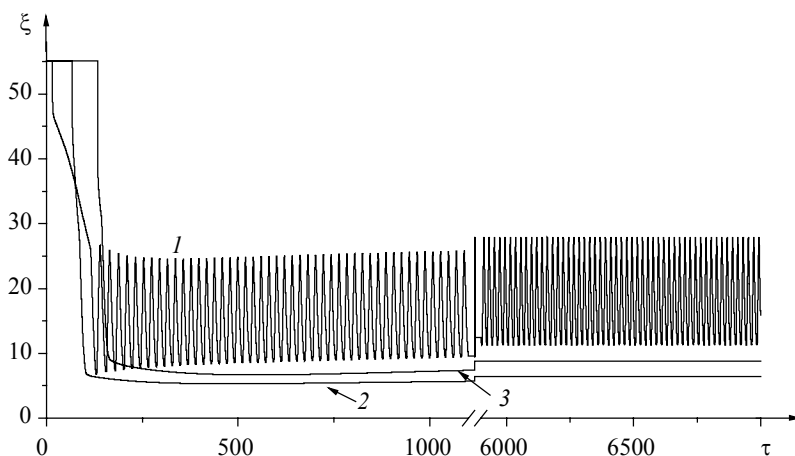


Рис. 2. Зависимость координаты положения фронта пламени от времени. Кривые: 1 – $I_S = 1,18 \cdot 10^{-2}$, $A_v = 3$; 2 – $I_S = 1,18 \cdot 10^{-2}$, $A_v = 4$; 3 – $I_S = 1,76 \cdot 10^{-2}$, $A_v = 4$

Распределения температуры и концентрации за период установившегося колебания представлен на рис. 3. Волна горения периодически перемещается из первой половины входной трубки в начало выходной трубки. При этом температура смеси в выходной трубке постоянна во времени и монотонно убывает от $\theta = 0$ до $\theta = -7$ от поворота до выхода. Кривые 1, 2, 3 на рис. 3 соответствуют этапу накопления горючей компоненты и охлаждению реакционной смеси. Затем происходит вспышка (кривая 4), формирование и распространение пламени навстречу потоку (кривые 5, 6, 7), которое из-за повышенной теплоотдачи в начале трубки останавливается (кривая 8), и затем цикл повторяется.

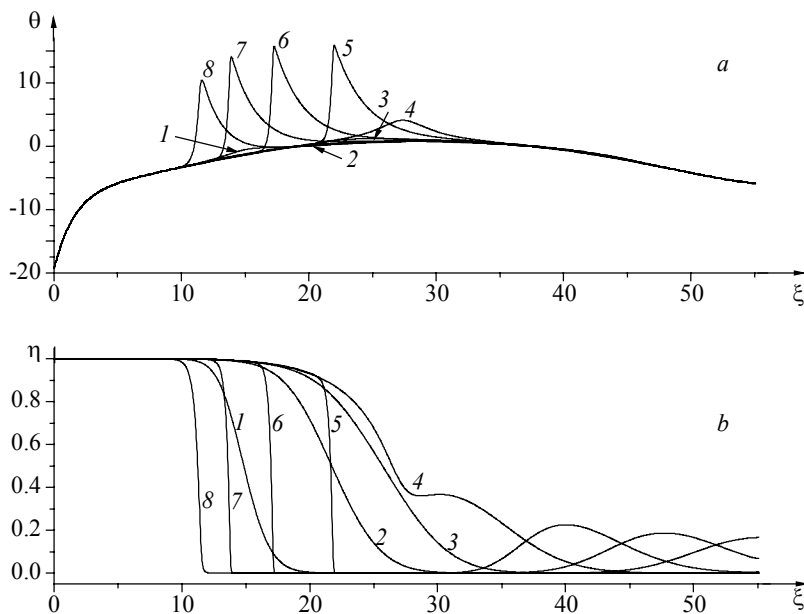


Рис. 3. Распределения температуры (а) и концентрации (б) по длине U-образной трубки в последовательные моменты времени через $\Delta t = 1.2$ за один период колебания. $I_S = 1,18 \cdot 10^{-2}$, $A_v = 3$

При увеличении A_v от 3 до 4 изменяется характер устанавливающегося режима работы – от колебательного режима работы система переходит к высокотемпературному стационарному состоянию (рис. 2, кривая 2). Характерное распределение температуры и концентрации для этого режима представлено на рис. 4. Согласно рис. 4 стационарное состояние устанавливается на глубине $\xi = 6.74$.

В стационарном высокотемпературном режиме фронт пламени при одинаковых значениях параметра A_v и разных I_S может находиться на различном расстоянии от входа в реактор. Изменение параметра I_S до значения $I_S = 1,76 \cdot 10^{-2}$ приводит к перемещению фронта горения вглубь реактора (рис. 2, кривая 3, $\xi_f = 8.65$). Увеличение I_S приводит к увеличению теплоотдачи от смеси во внешнюю среду. Если параметр I_S превышает некоторое критическое значение, то за счет высокой теплоотдачи система не успевает накопить достаточного количества тепла, чтобы произошло воспламенение, и реакционная смесь протекает через трубку без выгорания. Если параметр I_S не превышает критического значения, в системе устанавливается высокотемпературное стационарное состояние.

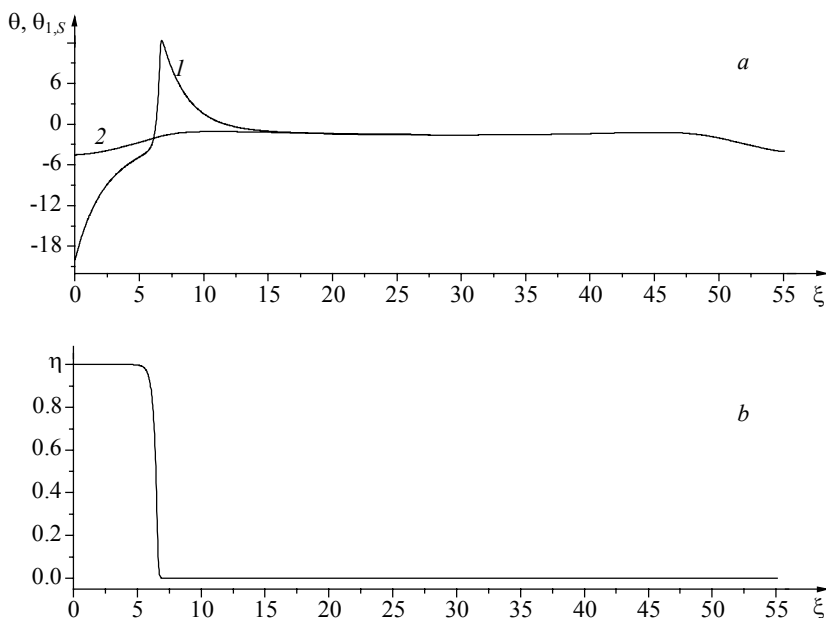


Рис. 4. Распределения температуры газа и температуры поверхности внутренней стенки θ и $\theta_{1,S}$ (a), относительной концентрации метана, η (b) по длине U-образной трубки в момент времени $\tau = 10000$. $I_S = 1.18 \cdot 10^{-3}$, $A_v = 4$. Кривые: 1 – $\theta(\xi, \tau)$, 2 – $\theta_{1,S}(\xi, \tau)$

Проведенные расчеты показали, что высокотемпературное стационарное состояние или колебательный режим устанавливаются для малых значений параметра I_S . Высокотемпературное стационарное состояние устанавливается при значениях A_v в интервале $2.9 \leq A_v \leq 6$, колебательный режим устанавливается для значений параметра $1.5 \leq A_v \leq 3$. Уменьшение параметра A_v при малых значениях параметра I_S приводит к тому, что в системе реализуется низкотемпературный режим горения, при этом горючая компонента практически полностью выгорает до выхода из реактора. Расчеты для значений $A_v = 1.4$, $I_S = 1.18 \cdot 10^{-2}$ показали, что максимальная температура смеси для установившегося состояния не превышает значения $\theta = 2.2$, и достигается в середине входной трубки. Горючая компонента интенсивно выгорает во входной трубке ($0 \leq \xi \leq 27.6$), в выходной трубке ($27.6 \leq \xi \leq 55.2$) относительная концентрация горючего уменьшается от 0.05 до 0.01. Температура поверхности внутренней стенки возрастает, максимум достигается в области перегиба U-образной трубки.

Были проведены расчеты реактора в два раза меньшей длины, $2\xi_L = 27.54$. Так как длина трубки по сравнению с предыдущим вариантом уменьшена в два раза, то сократилось время пребывания смеси в трубке. Смесь меньше времени обменивается теплом с внутренней стенкой, это приводит к сокращению диапазона безразмерных параметров A_v и I_S , для которых устанавливается высокотемпературное стационарное состояние или колебательный режим работы. Расчеты показали, что высокотемпературное стационарное состояние устанавливается для диапазона значений параметров $2.9 \leq A_v \leq 3.5$, $0 \leq I_S \leq 3.5 \cdot 10^{-3}$. Колебательный режим работы реализуется в диапазоне значений параметров $2.6 \leq A_v \leq 2.9$, $0 \leq I_S \leq 1.2 \cdot 10^{-3}$. Увеличение I_S приводит к тому, что смесь не успевает достаточно

прогреться, и воспламенение не происходит. При увеличении A_v фронт пламени выносится входящим потоком за пределы трубки, уменьшение параметра A_v приводит к затуханию колебательного режима и срыву системы на низкотемпературное состояние.

Выводы

Проведено численное исследование воспламенения и горения 2 % метано-воздушной смеси в U – образной трубке. Показано, что в зависимости от значений параметра теплообмена I_s , и параметра течения смеси A_v в системе устанавливается высокотемпературное или низкотемпературное стационарное состояние, либо колебательный режим.

Определено, что при увеличении длины трубки расширяются диапазоны значений параметров I_s и A_v , при которых происходит полное сгорание метано-воздушной смеси с низкой концентрацией метана. Показано, что для реактора большой длины возможно установление низкотемпературного режима горения смеси, в ходе которого горючая компонента практически полностью выгорает при относительно невысокой температуре реакционной смеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фролов С.М. Наука о горении и проблемы современной энергетики // Российский химический журнал. 2008. № 6(ЛП). С. 129–134.
2. Перлмуттер Д. [Perlmutter D.] Устойчивость химических реакторов / пер. с англ. Б.И. Соколова, В. П. Пилявского под ред. Н. С. Гурфейна. Л.: Химия, 1976.
3. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Манжос Е.В., Рычков А.Д., Вьюн А.В. Иницирование горения газа в пористой среде внешним источником // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2013. № 2(5). С. 189–196.
4. Буркина Р.С., Моисеева К.М. Динамика химических процессов в проточном реакторе при теплообмене на боковой поверхности реактора и инертной насадке внутри него // Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент, Караганда. 2012. С. 300–306.
5. Марута К., Минаев С.С., Парк Дж. К., Ох К.С., Фуджимори Т., Фурсенко Р.В. Особенности горения газа в узком нагретом канале // Физика горения и взрыва. 2004. № 5(40). С. 21–29.
6. Фурсенко Р.В., Минаев С.С. Устойчивость пламени с противоточным теплообменом // Физика горения и взрыва. 2005. № 2(41). С. 17–25.
7. Jejurkar S.Y., Mishra D.P. Numerical characterization of a premixed flame based annular microcombustor // International Journal of Hydrogen Energy. 2010. № 35. С. 9755–9766.

Статья поступила 12.02.2014 г.

Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. COMBUSTION MODES OF THE LEAN METHANE-AIR MIXTURE IN A U-SHAPED BURNER. Base on the model of a flowing reactor with an inert internal body, a numerical study of a lean methane-air mixture burning in a U-tube is carried out in the case of initiation of the combustion process by a preliminarily heated internal wall of the tube. The calculations were carried out for two values of a tube extent for revealing qualitative distinctions between established operating regimes. It is shown that, depending on the dimensionless parameter of heat exchange intensity in the reaction mixture on an external wall of the tube and dimensionless parameter of the mixture current, a high-temperature or low-temperature stationary regime, or an oscillatory operating mode can be implemented in the system. It is determined that the high-temperature stationary state is established at some distance from the input of the tube, and oscillatory modes are implemented in the top part of the tube; at the same time, the

mixture in the bottom part of the tube has a decreasing temperature profile. It is shown that the parameter of heat exchange intensity of the mixture at the external wall of the tube determines the depth of establishing the high-temperature steady state.

Keywords: lean methane-air mixture, heat and mass transfer process, ignition by the inner wall, steady and unstable operation modes of a burner

KRAINOV Alexey Yurievich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

MOISEEVA Ksenia Mihailovna (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

REFERENCES

1. Frolov S. M. Nauka o gorenii i problemy sovremennoy energetiki (2008) Rossiyskiy khimicheskiy zhurnal. 2008. No6(LII), pp. 129–134. (in Russian)
2. Perlmutter D. D. Stability of chemical reactors. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1972.
3. Kakutkina N.A., Korzhavin A.A., Manzhos E.V., Rychkov A.D., V'yun A.V. Initsirovanie gorennya gaza v poristoy srede vneshnim istochnikom (2013) Interekspo Geo-Sibir'. No 2(5), pp. 189–196. (in Russian)
4. Burkina R. S., Moiseeva K. M. Dinamika khimicheskikh protsessov v protochnom reaktore pri teploobmene na bokovoy poverkhnosti reaktora i inertnoy nasadke vnutri nego. Khaos i struktury v nelineynykh sistemakh. Teoriya i eksperiment, Karaganda. 2012, pp. 300–306. (in Russian)
5. Maruta K., Minaev S. S., Park Dzh. K., Oh K. S., Fudzhimori T., Fursenko R. V. Characteristics of Microscale Combustion in a Narrow Heated Channel (2004) Combustion, Explosion and Shock Waves. 5(40), pp. 516–523.
6. Fursenko R. V., Minaev S. S. Flame stability in a system with counterflow heat exchange (2005) Combustion, Explosion, and Shock Waves. 41(2), pp. 133–139.
7. Jejurkar S. Y., Mishra D. P. Numerical characterization of a premixed flame based annular microcombustor International journal of hydrogen energy. 2010. No35, pp. 9755–9766.

УДК 539.4

Ю.В. Советова, Ю.Н. Сидоренко, В.А. Скрипняк**МНОГОУРОВНЕВЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ
ВЛИЯНИЯ ОБЪЕМНОГО СООТНОШЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ
ВОЛОКНИСТОГО ОДНОНАПРАВЛЕННОГО УГЛЕПЛАСТИКА
НА ЕГО МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

Рассматривается проблема прогнозирования эффективных механических свойств композиционных материалов. Задача решается с использованием многоуровневого подхода к описанию структуры материала. На каждом структурном уровне композита рассматривается влияние процесса накопления повреждений на формирование его механических свойств. На примере модельных углепластиков с объемным содержанием углеродных волокон от 7 % до 50 % показана возможность исследования в рамках предложенной вычислительной методики влияния эффектов микро- и мезомасштабного уровня на формирование эффективных механических свойств композитов.

Ключевые слова: композиционные материалы, механическое поведение, эффективные механические свойства, накопление повреждений, прочность, разрушение, численное моделирование, метод конечных элементов, многоуровневый подход

В настоящее время одним из наиболее распространенных типов конструкционных материалов являются композиты. Широкое применение этих материалов связано с возможностью комбинирования при их создании свойств, присущих составляющим их компонентам, что, в частности, позволяет создавать материалы с заданными, зачастую уникальными, свойствами. Одним из типичных примеров материалов такого рода, нашедших широкое применение в машиностроении, являются углепластики, в которых сочетаются высокие жесткость и прочность армирующих углеродных волокон и малый удельный вес полимерных матричных материалов. Как и в случае любых других композиционных материалов, одной из наиболее актуальных задач при проектировании изделий из углепластиков является решение проблемы надежного прогнозирования эффективных физико-механических характеристик такого материала на основе информации о свойствах его компонент и параметров структуры армирования. Одним из перспективных направлений для решения этой задачи является развитие методов численного моделирования в материаловедении.

Повышение надежности прогнозирования механических свойств композитов может быть достигнуто, в частности, за счет учета при моделировании возможно большего количества значимых факторов, влияющих на формирование механических свойств этих материалов. Как показывают современные исследования, такие факторы по сути своей характеризуют результаты протекания различных процессов, сопровождающих деформирование материала. Примерами таких процессов могут служить накопление микроповреждений, твердофазные превращения, образование пор и трещин, разрушение межфазных границ и т. п. Важно, что такие процессы развиваются и проявляют себя, как правило, на разных масштабных уровнях материала: от уровня кристаллической решетки до макроскопического

(уровня эффективных свойств). Наличие разноуровневых процессов и явлений, имеющих место в процессе деформирования композитов, обуславливает необходимость развития многоуровневых подходов к моделированию поведения таких материалов. Использование многоуровневых представлений при моделировании, в частности, позволяет естественным образом учесть различие масштабов проявления всех тех процессов, совокупная реализация которых проявляется как отклик материала на внешнее воздействие, т. е., в конечном счете, формирует механические свойства этого материала. Примеры построения многоуровневых моделей структурно-неоднородных сред различного типа приведены, в частности, в работах [1–4]. В случае композитов на развитие таких процессов значительное влияние оказывает структура армирования материала [5–8].

Применительно к композитам представляется естественным выделить три уровня моделирования материала: микромасштабный – для объемов, полностью принадлежащих той или иной компоненте материала; мезомасштабный – для локально-представительных объемов материала, выбор размеров которых осуществляется с учетом локальных особенностей структуры армирования; макромасштабный – для представительных (эффективно-гомогенных) объемов композита [9].

Введенная таким образом иерархия масштабных уровней композита используется в данной работе для исследования влияния объемного содержания армирующих элементов волокнистого однонаправленного углепластика на его физико-механические свойства с учетом накопления повреждений в процессе деформирования. Полагается, что, с точки зрения влияния на механические свойства композита, повреждения на каждом масштабном уровне проявляют себя по-разному. Например, повреждение (включая полное разрушение) единичного объема микромасштабного уровня, может проявиться в некотором снижении локальных механических свойств материала в непосредственной окрестности этого объема, но практически не скажется на эффективных механических свойствах композита. Фактически, учитывая неидеальный характер реальных технологий получения композитов, подобные единичные повреждения могут появляться уже на стадии производства материалов [10]. При этом условия нагружения такого объема и параметры его напряженно-деформированного состояния, а, следовательно, и характер разрушения, в значительной степени определяются конфигураций элементов структуры армирования в пределах конкретного объема мезомасштабного уровня, содержащего данный микрообъем.

В свою очередь, накопление микромасштабных повреждений в пределах единичного объема мезомасштабного уровня способно привести к его фактическому разрушению, что может проявиться как разрушение отдельного включения, либо фрагмента матрицы между соседними включениями в композите. Такое повреждение уже можно рассматривать как признак начала макроскопического разрушения материала, однако наличие отдельных разрушенных фрагментов еще не означает разрушения всего композита. Лишь в том случае, когда количество таких фрагментов достигнет некоторой критической величины, либо в своем взаимном расположении разрушенные фрагменты образуют некоторую специфическую конфигурацию, факт возникновения которой может интерпретироваться, например, как признак образования магистральной трещины, можно говорить о полном (макроскопическом) разрушении материала. При этом каждый объем мезомасштабного уровня вследствие хаотической природы структуры армирования композита должен характеризоваться собственными уникальными значениями

физико-механических характеристик (иными словами, в каждом таком объеме реализуются свои собственные значения локальных свойств композита).

Таким образом, многоуровневая модель композита должна учитывать возможность разрушения объемов материала на каждом масштабном уровне, а также обеспечивать возможность передачи информации об условиях нагружения и состоянии разномасштабных объемов между уровнями модели.

При описании состояния материала компонент композита на микромасштабном уровне полагаются справедливыми обычные соотношения теории малых упругих деформаций с тем исключением, что при определении упругих свойств компонент учитывается информация о локальном состоянии материала на мезомасштабном уровне. Поскольку в данной работе предполагается, что основное влияние на локальное состояние композита оказывает процесс накопления повреждений в сравнительно малой окрестности исследуемого микрообъема, то в качестве характеристик локального состояния используются параметры повреждаемости компонент Π_k :

$$\Pi_k = \frac{V_k^*}{V_k}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (1)$$

где V_k^* – поврежденный объем k -й компоненты материала в составе объема мезомасштабного уровня, V_k – полный объем k -й компоненты в том же объеме, K – количество компонент композита. Необходимость «покомпонентного» учета накопления повреждений связана с тем, что для дискретно гетерогенных материалов (такими и являются композиты) при оценке прочности каждого объема мезомасштабного уровня предполагается справедливой модель «слабейшего звена», в соответствии с которой объем сохраняет свою несущую способность до тех пор, пока для каждой из его структурных компонент выполняется условие

$$\Pi_k < \Pi_k^{\max}, \quad (2)$$

где $\Pi_k^{\max}$ – предельно допустимая величина удельного объема повреждений в k -й компоненте композита, величина которой должна задаваться с учетом как физических соображений, так и требований к устойчивости вычислительного метода. Нарушение условия (2) рассматривается как признак разрушения моделируемого элементарного структурированного объема мезоскопического уровня (мезообъема), и вместе с тем – как признак локального повреждения композита на макроуровне.

Система уравнений, описывающих поведение материала на микромасштабном уровне, включает в себя уравнения равновесия

$$\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad (3)$$

уравнения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}), \quad (4)$$

уравнения состояния

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}, \Pi_k), \quad (5)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно, U_i –

компоненты вектора перемещений, индекс после запятой означает операцию дифференцирования по соответствующей координате, Π_k – параметр повреждаемости компоненты композита.

Параметры повреждаемости компонент композита (Π_k) рассчитываются на основе оценки состояния каждого из микромасштабных объемов в составе моделируемого мезообъема. Для определения состояния микрообъемов используется критерий прочности Цая-Ву [11]:

$$F_{ij} \sigma_{ij} + F_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \geq 1, \quad (6)$$

где коэффициенты F_{ij} и F_{ijkl} вычисляются по значениям пределов прочности компонент материала при одноосном растяжении и сжатии, а также их сдвиговой прочности. Выполнение микромасштабного критерия прочности (6) позволяет отнести соответствующий микрообъем к категории «поврежденных» при вычислении величины поврежденного объема k -й компоненты материала V_k^* в соотношении (1). Найденные значения параметров повреждаемости (1) позволяют для каждой компоненты рассчитать локальное значение модуля упругости компоненты E_k с учетом повреждений, накопленных данной компонентой на мезомасштабном уровне:

$$E_k = E_k^0 (1 - \Pi_k), \quad k = 1, \dots, K, \quad (7)$$

где E_k^0 – модуль упругости k -й компоненты в отсутствие повреждений. Такой подход позволяет оценивать усредненное по объему мезомасштабного уровня влияние микроуровневых повреждений на локальные механические свойства материала.

Поскольку система уравнений (1) – (7) физически нелинейна, для расчета параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) мезообъема при заданном уровне внешних воздействий используется метод пошагового нагружения. Поскольку при вычислении полей напряжений и деформаций для текущего уровня нагружения значения параметров повреждаемости компонент композита априори не известны, решение задачи на каждом шаге по нагрузке ищется с использованием вычислительной схемы «предиктор-корректор» (схема Хойна) [12].

Задача расчета параметров НДС мезообъема решается численно методом конечных элементов. Найденные поля параметров НДС на каждом шаге по нагрузке усредняются по мезообъему, что позволяет рассчитывать для данного объема его эффективные свойства. В частности, при граничных условиях, соответствующих случаю одноосного нагружения мезообъема, могут быть найдены значения модуля упругости в направлении нагружения (E_l) и коэффициента Пуассона (ν_l):

$$E_l = \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\langle \varepsilon_1 \rangle}, \quad \nu_l = -\frac{\langle \varepsilon_2 \rangle}{\langle \varepsilon_1 \rangle}, \quad (8)$$

где угловые скобки ($\langle \dots \rangle$) обозначают операцию усреднения по объему, индекс 1 соответствует направлению нагружения, индекс 2 – направлению, ортогональному к направлению нагружения. Поскольку эти свойства в общем случае зависят от конфигурации элементов структуры армирования в пределах данного конкретного мезообъема, их значения являются характеристикой локальных свойств композита в точке, соответствующей расположению данного мезообъема в пределах представительного объема материала макромасштабного уровня. Нагружение объема продолжается до тех пор, пока выполняется критерий локальной прочности (2). По результатам численного эксперимента может быть построена

локальная диаграмма деформирования материала, а также получена информация о развитии процесса накопления повреждений в локальной области, соответствующей выбранному мезообъему.

Оценка макроскопически эффективных свойств хаотически армированного композита может быть получена на основе анализа результатов совокупности численных экспериментов по нагружению представительной выборки мезообъемов. Такая выборка, в первую очередь, должна достаточно полно характеризовать возможные варианты локальных конфигураций элементов структуры армирования композита.

Для формирования такой выборки формируется геометрическая модель структуры армирования композита, в пределах которой случайным образом выбираются фрагменты, рассматриваемые в качестве объемов мезомасштабного уровня. Принципы выбора размеров таких объемов обсуждаются, в частности, в [13]. При таком подходе к моделированию композита полагается, что его свойства на макроуровне представляют собой случайные функции координат, вид которых обусловлен хаотическим характером структуры армирования. Усреднение параметров поведения мезообъемов, входящих в состав представительной выборки, позволяет получить оценки характеристик механических свойств композита на макроуровне. Таким образом, наряду с определением макроскопически эффективных свойств композита, использованный подход дает возможность детального исследования механического поведения материала в представительной выборке точек в пределах его модельного макрообъема.

Наличие информации о механическом поведении материала в разных точках макрообъема, в частности, позволяет использовать методы кластерного анализа для оценки предельных значений механических характеристик, соответствующих условиям макроскопического разрушения материала. С этой целью вводится представление о возможности существования каждой рассматриваемой точки макрообъема композита в одном из двух возможных состояний: исходном («неповрежденном») и конечном («разрушенном»). Переход точки из одного состояния в другое можно рассматривать как особый вид изменения фазового состояния этой точки. В соответствии с представлениями кластерного анализа, точки, находящиеся в одном и том же состоянии образуют некую совокупность – кластер. В условиях отсутствия внешнего воздействия все точки находятся в исходном состоянии и образуют единый кластер, охватывающий весь макрообъем композита. По мере возрастания внешних воздействий отдельные точки переходят в новое («поврежденное») состояние, что приводит к возникновению новых кластеров – кластеров повреждений. В дальнейшем происходит рост и слияние кластеров повреждений с одновременным сокращением исходного кластера (кластера неповрежденных точек). Полагается, что критерием перехода всей системы в новое состояния (условием макроскопического разрушения композита) является образование соединяющего кластера повреждений. Задачу об определении условий возникновения соединяющего кластера принято называть задачей о перколяции [14].

Для реализации этого подхода к оценке предельных свойств композита исследуется конфигурация поля кластеров повреждений в процессе его эволюции, вызванной ростом внешних нагрузок. Для решения вопроса о принадлежности точек тому или иному кластеру строится триангуляционный граф на всем множестве точек, входящих в представительную выборку. Необходимыми признаками

принадлежности двух точек одному кластеру являются совпадение состояний точек (поврежденное или неповрежденное) и их принадлежность одному и тому же ребру триангуляционного графа. Определение конфигураций кластеров повреждений выполняется для каждого шага по нагрузке, что позволяет отслеживать эволюцию поля кластеров повреждений в течение всего процесса нагружения модельного макрообъема.

Для идентификации соединительного кластера повреждений используется его характеристика («размах»), которая вычисляется как максимальное расстояние между точками, принадлежащими кластеру, по каждому из координатных направлений:

$$l_i = x_i^{\max} - x_i^{\min}, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (9)$$

где x_i – координаты точек, принадлежащих кластеру, в i -м координатном направлении. Признаком образования соединительного кластера является выполнение хотя бы для одного из координатных направлений неравенства:

$$l_i > k L_i, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (10)$$

где L_i – соответствующий «размах» расчетной области, величина коэффициента k принимается несколько меньшей 1. Значения внешних воздействий и макроскопических параметров напряженно-деформированного состояния композита, при которых происходит образование соединительного кластера повреждений, принимаются в качестве их предельных значений, соответствующих переходу материала в макроскопически разрушенное состояние.

Изложенный подход был использован для исследования влияния объемного соотношения компонентов волокнистого однонаправленного углепластика на его эффективные механические свойства. Задача решалась в двумерной постановке для случая одноосного статического нагружения по нормали к направлению армированию. В качестве значений механических характеристик компонентов были приняты следующие [10]: $E_i = 200$ ГПа, $\nu_i = 0,30$, $E_m = 3,4$ ГПа, $\nu_m = 0,22$, где E_i , E_m – модули упругости волокон и матрицы соответственно, ν_i , ν_m – коэффициенты Пуассона волокон и матрицы. Объемное содержание волокон варьировалось в пределах от 7 % до 50 %. Для каждого из рассмотренных значений объемного содержания волокон строилась геометрическая модель структуры армирования (модель макрообъема). Каждая модель представляла собой квадрат с размером стороны L , в котором случайным образом размещались круговые включения диаметром d . Количество включений в каждом случае составляло 200–225, при этом относительные линейные размеры моделей (L/d) варьировались от 100 (при объемном содержании включений 7 %) до 34 (при 50 %). Принятые соотношения размеров L и d позволяют считать построенные модели представительными в геометрическом смысле.

Для каждой из моделей структуры армирования случайным образом выбирались точки, в которых определялись локальные свойства модельных материалов. Количество точек, необходимых для обеспечения статистической представительности результатов, выбиралось таким образом, чтобы обеспечивался приемлемый уровень погрешности при определении среднего значения модуля упругости композита (т. е., значения эффективного модуля упругости) по выборке локальных свойств. Для оценки погрешности использовалось известное соотношение [15]

$$\Delta = \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{N}}, \quad (11)$$

где N – объем выборки, t_α – коэффициент Стьюдента для заданного уровня значимости α (принят равным 90 %), σ – среднееквадратичное отклонение по выборке, Δ – абсолютная величина погрешности определения среднего значения по выборке. Результаты оценок погрешностей показали, что при выбранном объеме выборок, равном 500 точек, погрешности определения среднего значения модуля упругости не превышают 3 %, что можно считать достаточным с точки зрения обеспечения их статистической представительности.

Для оценки влияния хаотичности расположения включений на результаты моделирования расчеты для каждой модельной структуры проводились трижды на вновь формируемых для этого выборках точек. В процессе численного эксперимента для модельных материалов определялись модули упругости в направлении нагружения в отсутствие повреждений, вид диаграмм деформирования с учетом накопления повреждений, предельные значения напряжений и деформаций, а также величина работы разрушения.

На рис. 1 приведена полученная в результате моделирования зависимость модуля упругости композита от объемного содержания армирующих волокон. Для сравнения на графике показаны верхняя (кривая 1) и нижняя (кривая 2) границы вилки Хашина-Штрикмана [11]. Видно, что полученная зависимость практически совпадает с нижней границей вилки, хотя с увеличением содержания армирующих элементов до 30 % и более значения упругих модулей отклоняются в сторону верхней границы вилки. Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в [16].

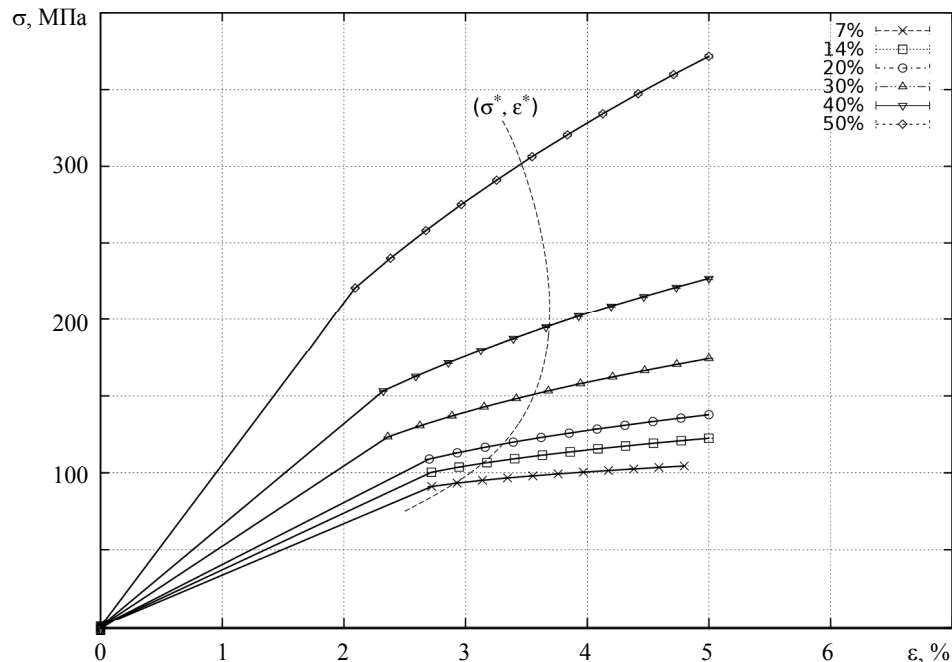


Рис. 1. Зависимость модуля упругости композита от объемного содержания армирующих волокон

На рис. 2 показаны эффективные диаграммы деформирования модельных материалов. При построении диаграмм в каждом из трех проведенных модельных испытаний выполнялось усреднение локальных напряжений для ряда значений макродеформации ε_1 , выбранных в области выполнения критерия локальной прочности (2):

$$\sigma_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_1^n, \quad (12)$$

где N – объем выборки локальных свойств. На рисунке представлены результаты усреднения найденных диаграмм по трем проведенным испытаниям. Видно, что во всех рассмотренных случаях накопление повреждений с ростом деформации материала приводит к существенному снижению упругих свойств композита. Видно также, что если диаграммы деформирования модельных материалов с содержанием армирующих волокон 7 %, 14 % и 20 % расположены достаточно близко друг от друга, то увеличение доли волокон до 30 % и более приводит к существенному возрастанию упругих свойств материала, которые растут тем более быстро, чем выше содержание волокна в композите. Результаты повторных вычислений эффективных значений модуля упругости характеризуются высокой повторяемостью, вследствие чего величина доверительных интервалов, построенных для уровня значимости 90% весьма мала и сравнима с элементами графического представления результатов.

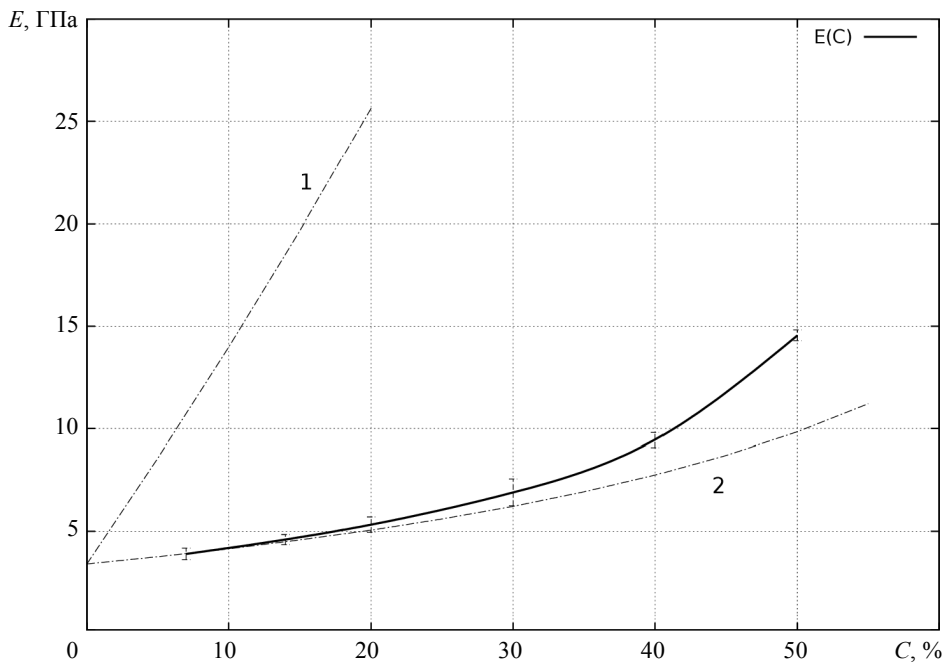


Рис. 2. Диаграммы деформирования модельных материалов

На рис. 3 представлены предельные значения главного напряжения (σ_1) и деформации (ε_1), полученные в результате проведенных расчетов. Точки, показанные на рисунке, соответствуют моменту образования соединительного кластера

повреждений в представительном объеме материала. На рисунке показаны также доверительные интервалы (для уровня значимости 90 %), характеризующие разброс величин, полученный при повторных расчетах. Как видно из представленных на рисунке данных, предельные значения главного напряжения возрастают при увеличении объемного содержания армирующих волокон. В отличие от этого, зависимость предельного значения главной деформации от содержания волокон является существенно немонотонной: наблюдается рост предельной деформации при увеличении содержания волокон от 7 % до 30 %, увеличение содержания волокон от 30 % до 40 % не приводит к существенному изменению величины предельной деформации, дальнейшее увеличение доли армирующих элементов до 50 % сопровождается снижением величины предельной деформации.

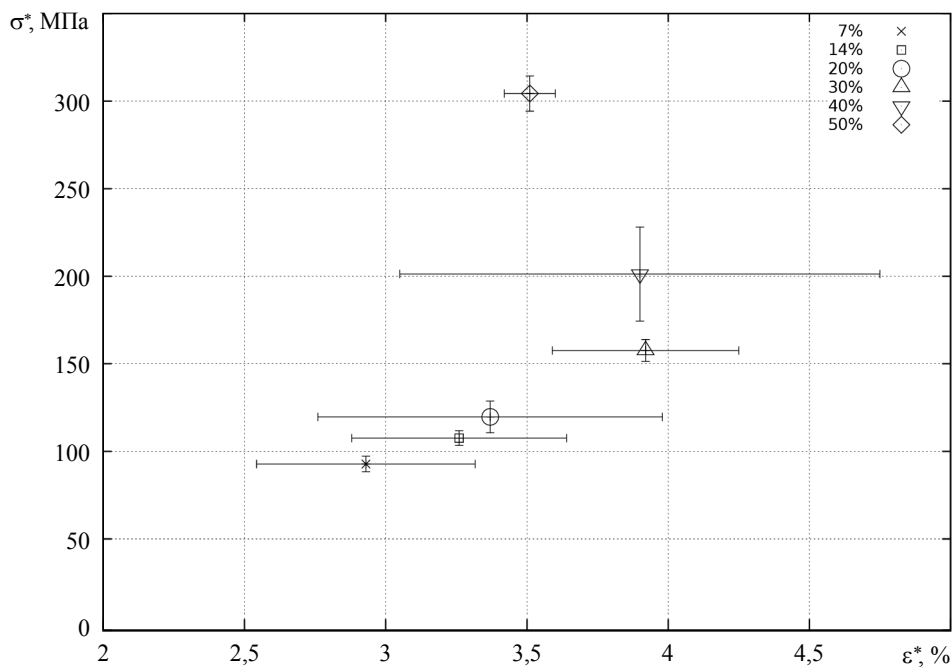


Рис. 3. Предельные значения главного напряжения и деформации

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в [16] для случая сжатия композита поперек волокон, которому наиболее полно соответствует использованный в расчетной методике критерий прочности. Отмеченный факт снижения предельной деформации с одновременным ростом предельного напряжения при увеличении содержания армирующих волокон можно интерпретировать как признак появления у материала характерных особенностей хрупкого разрушения. Данные, приведенные на рис. 3, позволили построить кривую «предельных состояний» (σ^* , ϵ^*), которая показана на рис. 2 пунктиром. Эта кривая разделяет области «допустимых» и «недопустимых» состояний композита. В первом случае в представительном объеме материала повреждения либо отсутствуют, либо сосредоточены в отдельных локализованных фрагментах материала. Во втором случае в представительном объеме имеется со-

единительный кластер повреждений, что в соответствии с принятым критерием макроскопической прочности является признаком разрушения композита.

Представляет интерес также изменение величины доверительных интервалов, характеризующих разброс результатов повторных вычислений, при возрастании содержания армирующих волокон. В тех случаях, когда содержание волокон не превышает 30 %, повторные расчеты характеризуются достаточно малыми разбросами результатов при определении предельных значений напряжений и существенно большими разбросами при определении значений предельных деформаций. Результаты, полученные для модельного материала с содержанием волокон 40 %, характеризуются максимальными разбросами результатов и по деформациям, и по напряжениям. Увеличение доли армирующих волокон до 50 % сопровождается резким уменьшением разброса результатов при определении значений предельных деформаций. Можно полагать, что отмеченные особенности разбросов результатов моделирования являются следствием того, что при разных объемных соотношениях компонентов композита условия развития процессов накопления повреждений в компонентах существенно различаются.

Полученные в результате моделирования данные о виде диаграмм деформирования и предельных значениях главного напряжения и деформации позволили оценить влияние объемного содержания армирующих волокон на удельную работу разрушения композита:

$$W = \int_0^{\varepsilon^*} \sigma_1 d\varepsilon_1, \quad (13)$$

Характер изменения удельной работы разрушения модельных композитов с увеличением объемного содержания включений показан на рис. 4.

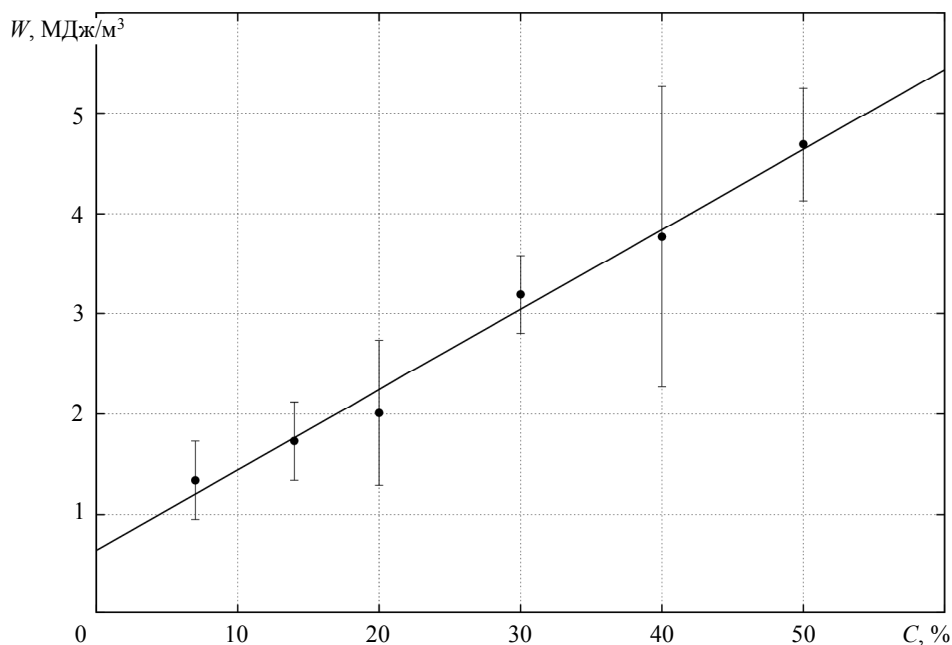


Рис. 4. Изменение работы разрушения с увеличением объемного содержания включений

На рисунке также показаны доверительные интервалы для уровня значимости 90 %. Как видно из представленных результатов, при увеличении содержания волокон в композите от 7 % до 50 % величина удельной работы разрушения увеличивается в 3,5 раза. Как видно из представленных данных, связь между удельной работой разрушения и содержания волокон в композите (C , %) хорошо аппроксимируется линейной зависимостью вида

$$W = a + b C, \quad (14)$$

где C – объемное содержание волокон (в процентах), значения коэффициентов: $a = 0,064$, $b = 0,008$. Поскольку вычисленная величина удельной работы разрушения непосредственно зависит от результатов, представленных на рис. 3, характер изменения разбросов результатов при повторных вычислениях в обоих случаях совпадает.

Таким образом, изложенный подход к моделированию композиционного материала, основанный на представлениях о многоуровневом характере процессов формирования его механических свойств, дает возможность оценки эффективных свойств композита на основе данных о механических характеристиках его компонент и параметров структуры армирования. Достоинством такого подхода является возможность анализа влияния процессов, протекающих на разных структурных уровнях, на формирование эффективных механических свойств материала. Показано, что решение задачи о макроскопической прочности композита может быть получено в результате исследования эволюции поля кластеров повреждений в представительном объеме материала в процессе его нагружения. Полученные данные свидетельствуют, что на свойства композита существенное влияние оказывают как объемное соотношение его компонент, так и условия развития процессов накопления повреждений на микро- и мезоскопическом масштабных уровнях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.Ф. Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск: Наука, 1985. 229 с.
2. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
3. Трусов П.В., Швейкин А.И., Нечаева Е.С., Волегов П.С. Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры // Физ. мезомех. 2012. Т. 15. № 1. С. 33–56.
4. Петров Ю.В., Груздков А.А., Братов В.А. Структурно-временная теория разрушения как процесса, протекающего на разных масштабных уровнях // Физ. мезомех. 2012. Т. 15. № 2. С. 15–21.
5. Макаров П.В., Еремин М.О. Моделирование разрушения керамических композиционных материалов при одноосном сжатии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 61–74.
6. Каракулов В.В., Смолин И.Ю., Скрипняк В.А. Численная методика прогнозирования эффективных механических свойств стохастических композитов при ударно-волновом нагружении с учетом эволюции структуры // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4 (24). С. 70–77.
7. Коноваленко Иг.С., Смолин А.Ю., Коноваленко Ив.С. и др. Компьютерное исследование зависимости механических свойств хрупкого материала от парциальной концентрации пор разного размера в его структуре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6 (26). С. 79–87.

8. Смолин И. Ю., Еремин М. О., Макаров П. В., и др. Численное моделирование механического поведения модельных хрупких пористых материалов на мезоуровне // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5 (25). С. 78–90.
9. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к определению эффективных свойств композита с учетом повреждаемости // Физ. мезомех. – 2013. – Т. 16. – № 5. – С. 59–65.
10. Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина: пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта / под ред. Б.Э. Геллера. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
11. Композиционные материалы: в 8 т. / под ред. Дж. Сендецкий; пер. с англ. М.: Мир, 1978. Т. 2. 566 с.
12. Press W.M., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes. The art of Scientific Computing. 3rd Ed. Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
13. Лейцин В.Н., Сидоренко Ю.Н. Оценка механических свойств многокомпонентных материалов стохастической структуры // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 12. С. 89–94.
14. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. -М.: Едиториал УРПС, 2002. 112 с.
15. Экспериментальная механика: в 2 кн. Кн. 2: пер. с англ. / под ред. Кобаяси. М.: Мир, 1990. 552 с.
16. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.

Статья поступила 28.02.2014 г.

Sovetova Yu.V., Sidorenko Yu. N., Skripnyak V. A. the Multilevel approach to studying the influence of the volumetric ratio in components of unidirectional carbon fiber composite on its mechanical properties. The problem of predicting effective mechanical properties of composite materials is considered. This problem is solved on the basis of the multilevel approach to the description of the material structure. For every level of the composite structure, the influence of damage accumulation on the formation of mechanical properties of the material is considered. The possibility of a detailed investigation of the influence of micro- and mesoscopic level effects on the formation of effective mechanical properties of the composites is shown. The proposed numerical procedure is used for the estimation of effective properties of model composites with volume ratios of carbon fiber ranging from 7% to 50%. The task of estimating local properties of materials is solved by the finite elements method. The ultimate values of strength and strain of the composite are determined as a result of studying the evolution of clusters of damages in representative volumes of the material. It is shown that these values grow nonmonotonically with an increase in the volume ratio of reinforcements. The results obtained have a good compliance with known experimental data.

Keywords: composite materials, mechanical behavior, effective mechanical properties, damage accumulation, strength, destruction, numerical simulation, finite element method, multilevel approach

Sovetova Yulya Valerievna (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: kasy@sibmail.com

Sidorenko Yury Nikolayevich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: sid@strelka.ftf2.tsu.ru

Skripnyak Vladimir Albertovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: scrp@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Panin V.E., Likhachev V.A., Grinyaev Yu.F. *Strukturnye urovni deformatsii tverdykh tel.* – Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie, 1985. – 229 p.
2. Likhachev V.A., Malinin V.G. *Strukturno-analiticheskaya teoriya prochnosti.* – Spb.: Nauka, 1993. – 471 p.
3. Trusov P.V., Shveykin A.I., Nechaeva E.S., Volegov P.S. *Mnogourovnevye modeli neuprugogo deformatirovaniya materialov i ikh primeneniye dlya opisaniya evolyutsii vnutrenney struktury* (2012) *Fiz. mezomekh.* V. 15, No 1, pp. 33–56.
4. Petrov Yu.V., Gruzdkov A.A., Bratov V.A. *Strukturno-vremennaya teoriya razrusheniya kak protsessa, protekayushchego na raznykh masshtabnykh urovnyakh* (2012) *Fiz. mezomekh.* V. 15, No 2, pp. 15–21.
5. Makarov P.V., Eremin M.O. *Modelirovaniye razrusheniya keramicheskikh kompozitsionnykh materialov pri odnoosnom szhatii* (2013) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika.* No 1 (21), pp. 61–74.
6. Karakulov V.V., Smolin I.Yu., Skripnyak V.A. *Chislennaya metodika prognozirovaniya effektivnykh mekhanicheskikh svoystv stokhasticheskikh kompozitov pri udarno-volnovom nagruzhenii s uchetom evolyutsii struktury* (2013) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika.* No 4 (24), pp. 70–77.
7. Konovalenko Ig.S., Smolin A.Yu., Konovalenko Iv.S., Promakhov V.V., Psakh'e S.G. *Kompyuternoye issledovaniye zavisimosti mekhanicheskikh svoystv khrupkogo materiala ot partial'noy kontsentratsii por raznogo razmera v ego strukture* (2013) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika.* No 6 (26), pp. 79–87.
8. Smolin I. Yu., Eremin M. O., Makarov P. V., Buyakova S. P., Kul'kov S. N., Evtushenko E. P. *Chislennoye modelirovaniye mekhanicheskogo povedeniya model'nykh khrupkikh poristyykh materialov na mezourovne* (2013) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika,* No 5 (25), pp. 78–90.
9. Sovetova Yu.V., Sidorenko Yu.N., Skripnyak V.A. *Mnogourovnevyy podkhod k opredeleniyu effektivnykh svoystv kompozita s uchetom povrezhdaemosti* (2013) *Fiz. mezomekh.* V. 16, No 5, pp. 59–65.
10. *Spravochnik po kompozitsionnym materialam: V 2-kh kn. Kn.1 / Pod red. Dzh. Lyubina: Per. s angl. A.B. Gellera, M. M. Gel'monta / Pod red. B.E. Gellera. – M.: Mashinostroenie, 1988. – 448 p.*
11. *Kompozitsionnye materialy: V 8 t. / Pod red. Dzh. Sendetski; Per. s angl. – M.: Mir, 1978. V. 2. – 566 p.*
12. Press W.M., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes. The art of Scientific Computing.* – 3rd Ed. – Cambridge University Press, 2007. – 1235 pp.
13. Leytsin V.N., Sidorenko Yu.N. *Otsenka mekhanicheskikh svoystv mnogokomponentnykh materialov stokhasticheskoy struktury* (1999) *Pis'ma v ZhTF.* V. 25, No. 12, pp. 89–94.
14. Tarasevich Yu.Yu. *Perkolyatsiya: teoriya, prilozheniya, algoritmy.* – M.: Editorial URRS, 2002. – 112s.
15. *Ekspperimental'naya mekhanika: V 2-kh kn. Kn. 2: Per. s angl. / Pod red. Kobayasi. M.: Mir, 1990. – 552 p.*
16. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik / V.V. Vasil'ev, V.D. Protasov, V.V. Bolotin i dr.; Pod obshch. red. V.V. Vasil'eva, Yu.M. Tarnopol'skogo. – M.: Mashinostroenie, 1990. – 512 s.*

УДК 532.517.3

А.В. Шваб, М.Ю. Попп

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ
В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ¹**

В работе рассматривается численное моделирование закрученного ламинарного течения вязкого газа в вихревой камере, которая используется для разделения тонкодисперсных порошков на мелкую и крупную фракцию по заданному размеру частиц. Для повышения эффективности процесса фракционного разделения частиц предлагается дополнительно закручивать стенки вихревой камеры, что способствует выравниванию поля окружной скорости и тем самым стабилизирует баланс центробежных и аэродинамических сил, действующей на сепарируемые частицы. При такой постановке задачи существенное влияние оказывает выбор геометрических параметров вихревой камеры. Достоверность результатов и выводов, представленных в работе, основывается на тестовых расчетах, а также на сопоставлении численных решений, полученных в переменных вихрь – функция тока – окружная составляющая скорости и в переменных скорость – давление.

Ключевые слова: закрученные течения, скорость, градиент давления, ротор скорости, функция тока, ламинарный поток, вихревая камера.

Закрученные течения в вихревых камерах представляют практический интерес при рассмотрении процессов сепарации и классификации для получения порошков заданного гранулометрического состава. Вихревые камеры предназначены для разделения на фракции в воздушном потоке частиц различных порошковых материалов и могут быть использованы в производстве стройматериалов, керамики, абразивных материалов, порошковой металлургии, химической, атомной и других отраслях промышленности.

Физическая и математическая постановка

В настоящей работе для численного исследования аэродинамики классификатора в качестве прототипа выбрана вихревая камера [1], которая представляет собой цилиндрическую область с не вращающимися стенками (рис.1). В камере такого типа, закрученный поток газа вместе с частицами через сечение А-А поступает в вихревую камеру и под действием перепада давления вместе с мелкой фракцией частиц выходит через сечение Е-Е. Крупная же фракция частиц, за счет действия на нее центробежной силы, которая преобладает над аэродинамической силой сопротивления частиц, отбрасывается на периферийную стенку классификатора и, оседая по ней, попадает в крупный продукт фракционного разделения. Известно, что вихревые камеры такого типа обладают достаточно большой производительностью по расходу несущей среды и твердой фазы. Однако эффективность фракционного разделения частиц по размерам существенно ниже, чем в воздушно-центробежных классификаторах [2–3]. С нашей точки зрения, одной из причин относительно низкой эффективности процесса фракционного разделения

¹ Работа поддержана грантом РФФИ 13-08-00367 А.

мелкодисперсных порошков является существенная неоднородность поля окружной скорости. Для ее выравнивания будем использовать дополнительное вращение стенок вихревой камеры с угловой скоростью вращения Ω_d .

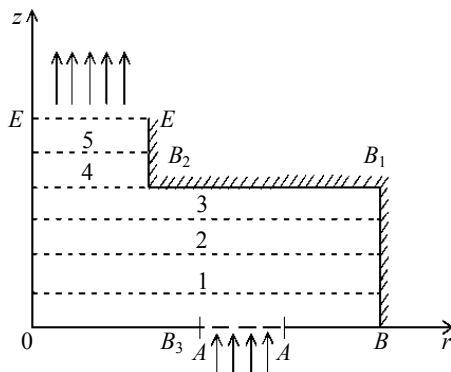


Рис. 1. Расчетная область

Таким образом, аэродинамику закрученного течения в зоне сепарации (рис. 1, область $BB_1B_2B_3$), показанной на рис. 1 будем проводить с учетом возможного вращения всех стенок вихревой камеры. Движение закрученного потока несущей среды описывается уравнениями Навье-Стокса, которые с учетом осевой симметрии в цилиндрической системе координат в безразмерном виде можно представить:

$$\frac{\partial u_r}{\partial \tau} + \frac{\partial (u_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial (u_z u_r)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right] + \frac{u_\varphi^2}{r} - \frac{u_r^2}{r}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial (u_r u_z)}{\partial r} + \frac{\partial (u_z^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] - \frac{u_z u_r}{r}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial (u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial (u_z u_\varphi)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right] - \frac{2u_r u_\varphi}{r}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0. \quad (4)$$

Здесь безразмерная форма уравнений получена путём введения масштабов длины R (радиус вихревой камеры) и скорости U_0 (среднерасходное значение скорости на входе в вихревую камеру), $\tau = tU_0/R$ – безразмерное время, $\text{Re} = U_0 R/\nu$ – число Рейнольдса, $h = H/R$, где H – высота вихревой камеры. В силу небольших скоростей, плотность газа считается постоянной, и безразмерная форма давления определяется с помощью постоянной плотности и квадрата скорости U_0 .

Для получения единственного решения ставятся следующие граничные условия. На стенках камеры радиальные и аксиальные составляющие вектора скорости равны нулю. На оси симметрии задаются условия Неймана для осевой составляющей скорости и равенство нулю для радиальной компоненты скорости. Определение граничных условий для окружной компоненты скорости на входе в вих-

ревую камеру и на вращающихся стенках даёт два дополнительных критерия: $Rg = \Omega_g R/U_0$ и $Rd = \Omega_d R/U_0$. Здесь Ω_g – средняя угловая скорость вращения газа на входе в вихревую камеру и Ω_d – угловая скорость стенок зоны сепарации. Таким образом, закрученное течение в вихревой камере определяется тремя критериями: Re , Rg и Rd . Последние два критерия, по сути, есть обратные числа Россби.

Решение в переменных функция тока, вихрь, окружная скорость

Для решения уравнений Навье-Стокса для осесимметричного случая в переменных «вихрь – функция тока» воспользуемся определениями завихренности ω и функции тока ψ следующими зависимостями:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad (5)$$

$$\omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (6)$$

После подстановки составляющих вектора скорости (5) в зависимость определения вихря (6), получим уравнение Пуассона для определения функции тока ψ

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \omega r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (7)$$

Эллиптическое уравнение (7) можно перевести в параболическое относительно времени, так как рассматривается стационарное решение задачи. В результате получим:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau_1} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\omega r - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (8)$$

Здесь τ_1 – безразмерное время, которое фактически является итерационным параметром при численном решении уравнения (8).

Перекрестным дифференцированием уравнений (1) и (2) с последующим вычитанием второго из первого, получим уравнение переноса вихря ω

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r \omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \omega)}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{2u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}. \quad (9)$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению дифференциальных уравнений (3), (8)-(9). Для получения единственного решения задаются следующие граничные условия. На входе в вихревую камеру: функция тока определяется интегрированием осевой скорости по зависимости (5); вихрь равняется нулю в силу постоянства осевой составляющей скорости; окружная скорость определяется формулой $u_\varphi = r Rg$. На оси симметрии: $\psi=0$, $\omega=0$, $u_\varphi=0$. На стенках вихревой камеры имеем: $\psi=\text{const}$, вихрь определяется формулой Тома [4], $u_\varphi = r \cdot Rd$. На выходе из вихревой камеры для всех искомым функций используется условие Неймана $\partial/\partial z=0$.

Решение в физических переменных скорость – давление

Для проверки достоверности полученных результатов поставленная задача решается также в переменных «скорость-давление». Решение безразмерной системы уравнений (1) – (4) проводится методом физического расщепления полей

скорости и давления с использованием разнесенной разностной сетки [5]. Представим кратко методику расчета на основе этого метода. Уравнение переноса импульса символически в векторном и безразмерном виде можно записать:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u} = -\nabla p. \quad (10)$$

Применяя метод физического расщепления полей скорости и давления, задача разбивается на два этапа:

$$\frac{\vec{u}_* - \vec{u}_*^n}{\delta \tau} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}_* = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u}_* - \nabla p^n; \quad (11)$$

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}_*}{\delta \tau} = -\nabla(\delta p). \quad (12)$$

Здесь сумма уравнений (11) и (12) аппроксимирует уравнение (10), символом δ обозначается приращение функции, а звездочкой обозначается промежуточный вектор скорости. Умножая на градиент уравнение (12) и, учитывая выполнение уравнения неразрывности для вектора скорости на $n+1$ временном слое, получим уравнение Пуассона для определения поправки к давлению δp

$$\nabla^2(\delta p) = \frac{(\nabla \cdot \vec{u}_*)}{\delta \tau}. \quad (13)$$

После расчета уравнения (11) определяется значение промежуточного вектора скорости, затем из уравнения Пуассона (13) определяется поправка к давлению. Зная величину вектора скорости на промежуточном временном слое и поправку к давлению, можно перейти к расчету скоростей и давления на $n+1$ временном слое с помощью зависимости (12)

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}_* - \nabla(\delta p) \delta \tau;$$

$$p^{n+1} = p^n + \delta p.$$

На всех границах для поправки к давлению δp на всех границах используется условия Неймана в соответствии с работой [5], а граничные условия для скоростей представлены выше.

Численный метод решения

Решение системы уравнений в переменных вихрь-функция тока и в переменных скорость-давление можно привести к решению системы нестационарных скалярных уравнений переноса, которые решаются эволюционным методом до установления по времени. Для каждого скалярного уравнения переноса в системе уравнений вихрь-функция тока и скорость-давление используется обобщенный неявный метод переменных направлений в дельта форме, который имеет второй порядок точности по времени [6]. Представим нестационарное уравнение переноса субстанции Φ в операторной форме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \Lambda_r(\Phi) + \Lambda_z(\Phi) + W;$$

$$\Lambda_r(\Phi) = \frac{\partial}{\partial r} \left(A \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (u_r \Phi); \quad \Lambda_z(\Phi) = \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (u_z \Phi).$$

В результате расщепления задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi^*}{\delta\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_r(\delta\Phi^*) &= f^n; \\ \frac{\delta\Phi^{**}}{\delta\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_z(\delta\Phi^{**}) &= \frac{\delta\Phi^*}{\delta\tau}; \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + \delta\Phi^{**}, \\ f^n &= \Lambda_r(\Phi^n) + \Lambda_z(\Phi^n) + W.\end{aligned}$$

где

Результаты численных расчетов

Достоверность получаемых решений определялась тестовыми исследованиями на сеточную сходимость, а также сравнением численных решений полученных с использованием двух подходов: вихрь-функция тока и скорость-давление. На рис. 2 показано сравнение радиальной, окружной и осевой составляющих вектора скорости в среднем сечении 2 (рис.2а) и в выходном сечении Е-Е вихревой камеры (рис.2б). На рис.2 сплошные кривые соответствуют методу решения в переменных вихрь-функция тока, а точками показано решение в переменных скорость-давление.

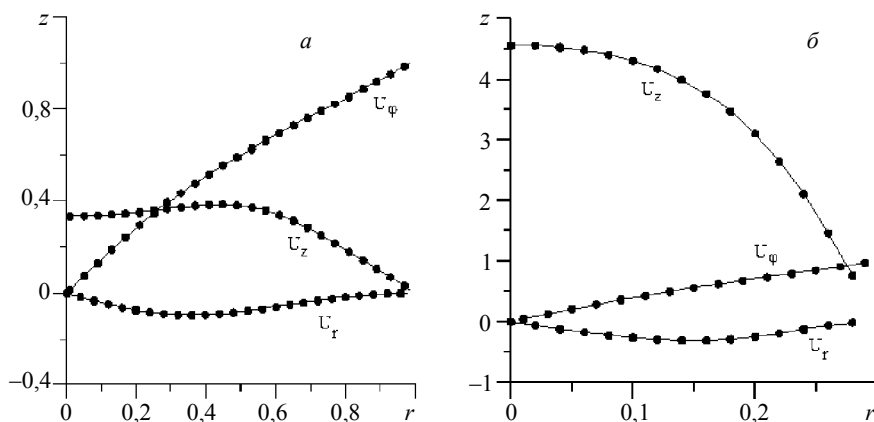


Рис. 2. Сравнение результатов численного решения двумя подходами: вихрь-функция тока и скорость-давление при параметрах закрученного течения $Re = 10$, $Rg = 1$, $Rd = 1$, $h = 1.5$

Численные исследования поля окружной скорости показали, что вблизи стенок вихревой камеры образуются существенные градиенты окружной скорости при отсутствии вращения стенок, что может стать причиной попадания крупных частиц в мелкий продукт процесса фракционного разделения. В случае же вращения стенок камеры поле окружной скорости существенно выравнивается не только вблизи стенок аппарата, но также во всей области (примерно при $r > 0.4$), где собственно и происходит сепарация крупных частиц. Для иллюстрации сказанного на рис. 3 показано распределение изолиний окружной скорости при вращающихся стенках камеры, а на рис. 4 – без вращения стенок при тех же параметрах потока. На рис. 5 показано распределение линий тока в вихревой камере.

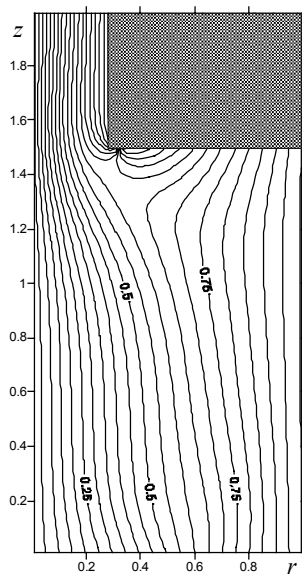


Рис. 3. Изолинии окружной составляющей скорости в вихревой камере при параметрах $Re=10$, $Rg=1$, $Rd=1$, $h=1.5$.

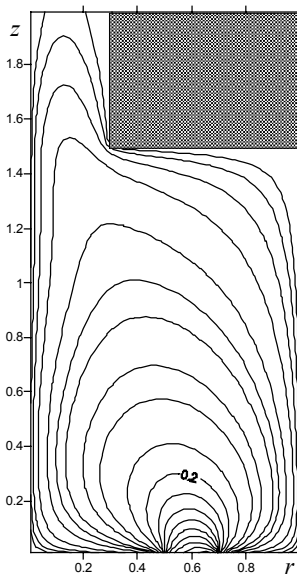


Рис. 4. Изолинии окружной составляющей скорости в вихревой камере при параметрах $Re=10$, $Rg=1$, $Rd=0$, $h=1.5$.

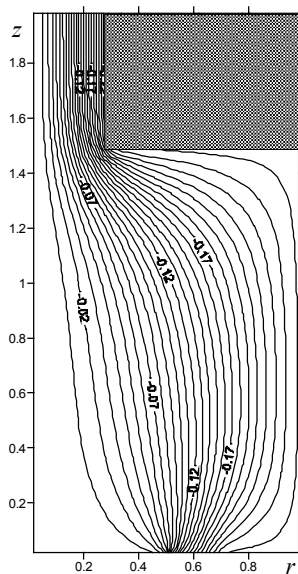


Рис. 5. Распределение линий тока в вихревой камере при параметрах потока $Re=10$, $Rg=1$, $Rd=1$, $h=1.5$.

При уменьшении в два раза высоты вихревой камеры показаны аналогичные распределения изолиний окружной скорости при вращении стенок камеры (рис. 6) и без вращения стенок (рис. 7), а также распределение линий тока (рис. 8) при тех же параметрах закрученного течения.

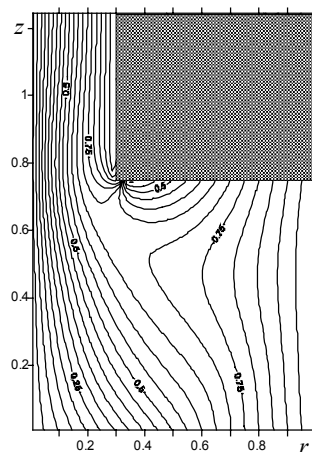


Рис. 6. Изолинии окружной составляющей скорости в вихревой камере. $Re=10$, $Rg=1$, $Rd=1$, $h=0.75$.

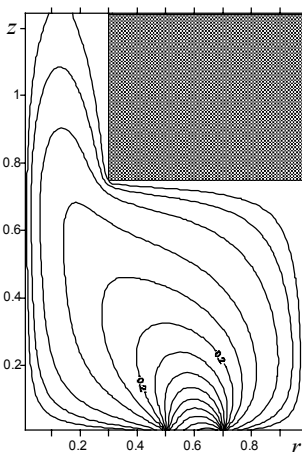


Рис. 7. Изолинии окружной составляющей скорости в вихревой камере. $Re=10$, $Rg=1$, $Rd=0$, $h=0.75$.

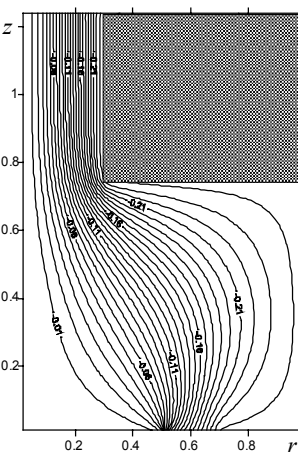


Рис.8. Распределение линий тока в вихревой камере. $Re=10$, $Rg=0$, $Rd=1$, $h=0.75$.

На рис. 9, а и рис. 9б показано изменение осевой составляющей вектора скорости в сечениях 1, 2, 3 (рис. 9а) вихревой камеры и в сечениях Е-Е, 4, 5 (рис. 9б), местоположение сечений показано на рис. 1. Из рис. 9а хорошо видно, что в области сепарации, т.е. примерно при $r > 0.4$ распределение осевой скорости существенно не меняется, а значение радиальной скорости существенно меньше осевой. Таким образом, добиваясь стабильности окружной составляющей скорости за счет вращения стенок камеры, получаем в области сепарации постоянное поле скорости, что несомненно, должно привести к повышению эффективности процесса фракционного разделения частиц.

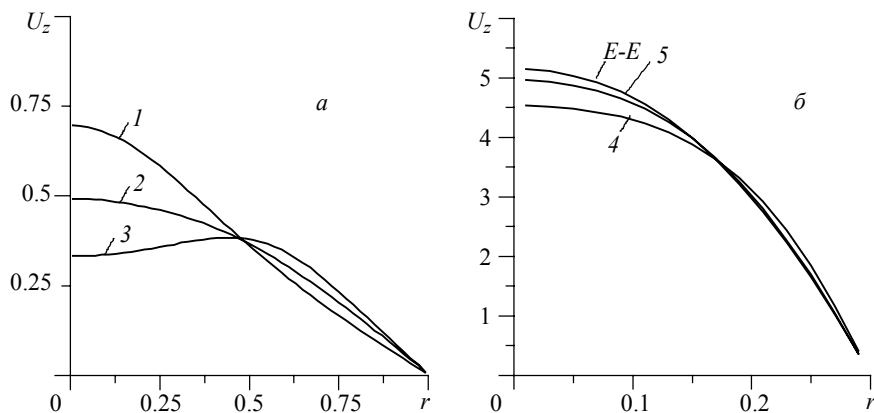


Рис. 9. Изменение вертикальной составляющей вектора скорости в а) средних сечениях расчетной области и б) в выходной части вихревой камеры. $Re=10$, $Rw=1$, $Rd=1$, $h=1.5$.

Заключение

В работе представлено моделирование закрученного потока вязкого газа в вихревой камере с вращающимися твердыми границами. Достоверность проведенного исследования обоснована тестовыми исследованиями, а также путем сравнения решений полученных на основе двух подходов: вихрь-функция тока и скорость-давление. В работе показано влияние геометрического параметра h и критериев вращения Rg и Rd на распределение поля скорости несущей среды в вихревой камере. Анализ аэродинамики закрученного ламинарного течения показал, что дополнительное вращение стенок вихревой камеры позволяет существенно уменьшить градиенты окружной скорости в зоне сепарации частиц и тем самым получить более равномерное поле вектора скорости, что, несомненно, приведет к более благоприятному режиму фракционного разделения мелкодисперсных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ушаков С.Г. Инерционная сепарация пыли / С.Г. Ушаков, Н.И. Зверев. М.: Энергия. 1974. 166.
2. Патент РФ № 2407601, ПК B07B7/083. Способ воздушно-центробежной классификации порошков и устройство для его осуществления / Зятиков П.Н., Росляк А.Т., Васенин И.М., Шваб А.В., Демиденко А.А., Садретдинов Ш.Р. // Опулб. Б.И. №36, 27.12.2010.

3. Шваб А.В., Хайруллина В.Ю. Исследование закрученного турбулентного течения между вращающимися профилированными дисками // Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45. № 5. С. 557–565.
4. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М.: Мир, 1977. 618 с.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена / С. Патанкар, Б.С. Петухов. М.: Энергоатомиздат, 1984. 124 с.
6. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. М.: Мир, 1990. Т. 2: Россия. 337 с.

Статья поступила 25.12.2013 г.

Shvab A.V., Popp M.Yu. MODELING OF THE LAMINAR SWIRLING FLOW IN A VORTEX CHAMBER. In this paper, numerical modeling of the swirling laminar viscous flow in the vortex chamber used for the separation of fine powders into small and large fractions by a given particle size is considered. To enhance the efficiency of particle separation, it is proposed to additionally tighten the walls of the vortex chamber to equalize the circumferential velocity field and thereby to stabilize the balance of centrifugal and aerodynamic forces acting on the separated particles. In this formulation of the problem, the choice of geometrical parameters of the vortex chamber is of great importance. Reliability of the results and conclusions presented in the paper is based on test calculations, as well as on a comparison of the numerical solutions obtained in the vortex – stream function – circumferential velocity variables and in the speed–pressure variables.

Keywords: swirling flows, speed, pressure gradient, vorticity, stream function, laminar flow, vortex chamber.

SHVAB Alexander Veniaminovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: avshvab@inbox.ru

POPP Marina Yurievna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: popp.marina@yandex.ru

REFERENCES

1. Ushakov S.G., Zverev N.I. Inertsionnaya separatsiya pyli. М.: Energiya. 1974, 166 p.
2. Zyatikov P.N., Roslyak A.T., Vasenin I.M., Shvab A.V., Demidenko A.A., Sadretdinov Sh.R. Patent RF № 2407601, PK V07V7/083. Sposob vozdushno-tsentrobezhoyn klassifikatsii poroshkov i ustroystvo dlya ego osushchestvleniya B.I. №36, 27.12.2010.
3. Shvab A.V., Khayrullina V.Yu. Issledovanie zakruchennogo turbulentnogo techeniya mezhdru vrashchayushchimisya profilirovannymi diskami (2011) Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii. V.45, No5, pp. 557–565
4. Roache, Patrick J. Computational fluid dynamics. Hermosa publishers albuquerque. 1976. V. 616
5. Patankar S., Petukhov B.S. Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena М.: Energoatomizdat, 1984. – 124 p.
6. Tannehill, John C., Anderson, Dale A., Pletcher, Richard H. Computational fluid mechanics and heat transfer . Taylor and Francis. 1984. V. 792

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БОРЗЕНКО Евгений Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

ВОРОЖЦОВ Александр Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, Заведующий лабораторией высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета. E-mail: abv@mail.tomsknet.ru

ГЛАЗУНОВ Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, Директор НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Де ЛЮКА Луиджи – доктор философии, профессор университета Politecnico di Milano (Италия), факультет аэрокосмической науки и техники. E-mail: luigi.deluca@polimi.it

ДОБРИЦА Дмитрий Борисович – кандидат технических наук, начальник отдела центр аэродинамического и теплового проектирования Федерального государственного унитарного предприятия «Научно-производственное объединение им. С.А. Лавочкина». E-mail: dobrica@laspace.ru

ДЬЯКОВА Ольга Алексеевна – магистрант 1 года обучения кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: olga.dyakova.1992@mail.ru

ЕРЕМИН Иван Владимирович – заведующий лабораторией математической физики НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

КАМЧАТНЫЙ Сергей Александрович – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: kam-serega2030@sibmail.com

КОЛЕСНИКОВ Иван Александрович – аспирант кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

КУВШИНОВ Николай Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: kvshn@niipmm.tsu.ru

КУЗНЕЦОВ Владимир Михайлович – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: tm@mail.tomsknet.ru

МОИСЕЕВА Ксения Михайловна – аспирант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

ПОПП Марина Юрьевна – студентка кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: popp.marina@yandex.ru

САДРИТДИНОВА Гулнора Долимджановна – кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Томского архитектурно-строительного университета. E-mail: dolina1@sibmail.com

СИДОРЕНКО Юрий Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sid@strelka.ftf2.tsu.ru

СКОВОРОДИН Александр Владимирович – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: tm@mail.tomsknet.ru

СКРИПНЯК Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: scrp@ftf.tsu.ru

СОВЕТОВА Юлия Валерьевна – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: kasy@sibmail.com

ТЫРЫШКИН Илья Михайлович – научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

ФАССИНА Марко – доктор философии, университет Politecnico di Milano (Италия), факультет аэрокосмической науки и техники. E-mail: fassina.marco@gmail.com

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: avshvab@inbox.ru

ЩЕРБАКОВ Николай Романович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии Томского государственного университета. E-mail: nrs@math.tsu.ru