

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2018

№ 52

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Норбосамбуев Ц.Д. Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля.....	5
Pchelintsev E.A., Pchelintsev V.A. On an extremal problem for nonoverlapping domains	13

МЕХАНИКА

Баранникова С.А., Ли Ю.В., Зуев Л.Б. Исследование неоднородности пластической деформации и разрушения при растяжении коррозионностойкого биметалла.....	25
Биматов В.И., Бородачева И.А., Лавронович А.Н., Савкина Н.В. Гистерезис аэродинамических характеристик и его влияние на параметры движения осесимметричных тел.....	35
Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Установившееся неизотермическое течение степенной жидкости в плоском/осесимметричном канале	41
Кочетков А.В., Леонтьев Н.В., Модин И.А., Савихин А.О. Исследование деформационных и прочностных свойств металлических плетеных сеток	53
Ледков А.С., Соболев Р.Г. Математическое моделирование движения космической тросовой системы с надувным шаром-баллоном при выводе космического аппарата на орбиту	63
Матвиенко О.В., Андропова А.О., Андриасян А.В., Мамадраимова Н.А. Математическое моделирование движения сферической частицы по наклонной поверхности в сдвиговом потоке	75
Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса	89
Прокофьев В.Г., Лапшин О.В., Смоляков В.К. Макрокинетика горения слоевых композиций с легкоплавким инертным слоем.....	102

МЕМОАРИИ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Берцун В.Н., Савина Н.И., Бедная Р.И. К 85-летию со дня рождения профессора В.Г. Пряжинской.....	114
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	124

CONTENTS

MATHEMATICS

Norbosambuev T. D. Rank of formal matrix. System of formal linear equations. Zero divisors	5
Pchelintsev E.A., Pchelintsev V.A. On an extremal problem for nonoverlapping domains	13

MECHANICS

Barannikova S.A., Li Yu.V., Zuev L.B. Investigation of a plastic deformation inhomogeneity and failure of the corrosion-resistant bimetal under uniaxial tension	25
Bimatov V.I., I.A. Borodacheva, A.N. Lavronovich, Savkina N.V. Hysteresis of aerodynamic characteristics and its influence on the motion parameters of axisymmetric bodies	35
Borzenko E.I., Shrager G.R. Non-isothermal steady flow of power-law fluid in a planar/axisymmetric channel	41
Kochetkov A.V., Leont'ev N.V., Modin I.A., Savikhin A.O. Study of the stress-strain and strength properties of the metal woven grids	53
Ledkov A.S., Sobolev R.G. Mathematical simulation of a tethered satellite system motion with an inflatable spherical balloon during a spacecraft orbit injection	63
Matvienko O.V., Andropova A.O., Andriasyan A.V., Mamadramova N.A. Mathematical modelling of the spherical particle motion along an inclined surface in the shear flow	75
Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Restrictions on stress components in the top of round cone	89
Prokof'ev V.G., Lapshin O.V., Smolyakov V.K. Macrokinetics of combustion of layered compositions with a low-melting inert layer	102

MATHEMATICS MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

Bertsun V.N., Savina N.I., Bednaya R.I. To the 85-th anniversary of V.G. Pryazhinskaya	114
---	-----

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	124
--	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 512.552+512.643.8
DOI 10.17223/19988621/52/1

MSC: 15B9, 15A06, 15A24, 16S50

Ц.Д. Норбосамбуев

РАНГ ФОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ. СИСТЕМА ФОРМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ

Вводится понятие ранга формальной матрицы со значениями в данном коммутативном кольце и рассматриваются системы формальных линейных уравнений. Приводятся некоторые свойства ранга. Получены необходимые и достаточные условия существования решения однородной системы формальных линейных уравнений. Находится условие, при котором формальная матрица будет левым или правым делителем нуля.

Ключевые слова: *кольцо, формальная матрица, ранг формальной матрицы, система формальных линейных уравнений.*

Везде далее R – коммутативное кольцо с единицей; R^m – R -модуль всех векторов столбцов длины m ; $M(n \times m, R)$ – множество матриц размера $n \times m$ с элементами из кольца R ; $\text{Col}_i(A)$ и $\text{Row}_j(A)$ – i -й столбец и j -я строка матрицы A соответственно; $K = M(n, R, \Sigma)$ – кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R , с системой множителей $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$.

Подробно познакомиться с формальными матрицами и кольцами формальных матриц можно в [1–4].

1. Ранг формальной матрицы

Напомним сначала определение ранга матрицы над произвольным коммутативным кольцом с единицей (см.[3]).

Пусть $A \in M(n \times m, R)$.

Определение 1. Для всякого $t = 1, \dots, r = \min\{m, n\}$ через $I_t(A)$ будем обозначать идеал в R , порожденный всеми $(t \times t)$ -минорами матрицы A .

Таким образом, для нахождения $I_t(A)$ необходимо вычислить определители всех $(t \times t)$ -подматриц в матрице A и затем взять идеал, порожденный ими. По теореме Лапласа всякий $(t+1) \times (t+1)$ -минор матрицы A лежит в $I_t(A)$. Поэтому имеет место следующая цепочка вложений идеалов в R :

$$I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq \dots \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq R.$$

Кажется логичным продолжить определение идеала $I_t(A)$ на все целые числа следующим образом:

$$I_t(A) = \begin{cases} (0), & \text{если } t > \min\{m, n\}; \\ R, & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

Тогда $0 = I_{r+1}(A) \subseteq I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq \dots \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq I_0(A) = R$.

Определение 2. Аннулятором непустого множества S в кольце R называется множество $Ann_R(S) = \{r \in R \mid s \cdot r = 0, \forall s \in S\}$.

Найдя аннуляторы идеалов $I_l(A)$, получим вложения:

$$(0) = Ann_R(R) = Ann_R(I_0(A)) \subseteq Ann_R(I_1(A)) \subseteq Ann_R(I_2(A)) \subseteq \dots \\ \dots \subseteq Ann_R(I_r(A)) \subseteq Ann_R(I_{r+1}(A)) = Ann_R((0)) = R.$$

Заметим, что если $Ann_R(I_l(A)) \neq (0)$, то $Ann_R(I_k(A)) \neq (0)$ для всех $k \geq l$.

Определение 3. Рангом матрицы $A \in M(n \times m, R)$, обозначаемым через $rk(A)$, назовем следующее число: $rk(A) = \max\{t \in \mathbb{Z} \mid Ann_R(I_t(A)) = (0)\}$.

Теперь определим ранг формальной матрицы в кольце $K = M(n, R, \Sigma)$, введённом выше. Далее увидим, что на самом деле можно определить n рангов.

Пусть $A \in K$. Зафиксируем число $l \in \{1, \dots, n\}$. Существует гомоморфизм колец $\eta_l: K \rightarrow M(n, R)$, $(a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij})$, где $t_{ij} = s_{ijl} \in \Sigma$ (см. [1]). Другими словами, $\eta_l(a_{ij}) = (s_{ijl} \cdot a_{ij})$.

Определение 4. Назовем Σ -рангом, l -рангом или просто рангом $r_l(A)$ матрицы $A \in K$ ранг матрицы $\eta_l(A) \in M(n, R)$. То есть $r_l(A) = rk(\eta_l(A))$. Подробнее – $r_l(A) = \max\{t \in \mathbb{Z} \mid Ann_R(I_t(\eta_l(A))) = (0)\}$.

Итак, имеем n рангов – $r_1(A), r_2(A), r_3(A), \dots, r_n(A)$ матрицы $A \in K$.

Замечание 1. Эти ранги у одной и той же матрицы могут не совпадать для разных $l \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть теперь $A \in M(m \times n, R)$, то есть A – прямоугольная матрица размера $m \times n$. Определим ранг матрицы A относительно кольца формальных матриц $K = M(n, R, \Sigma)$.

Пусть $m < n$. Тогда можно «дополнить» матрицу A до матрицы порядка n , дописав к A снизу $(n-m)$ нулевых строк. Полученную матрицу будем обозначать через

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Полагаем } r_l(A) = r_l\left(\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Теперь пусть $m > n$. Также «дополним» матрицу A до матрицы порядка n , дописав к A справа $(m-n)$ нулевых столбцов. Полученную матрицу будем обозначать через $(A \mid 0)$:

$$(A \mid 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Полагаем } r_l(A) = r_l(A \mid 0).$$

Приведем далее несколько простых фактов, непосредственно вытекающих из определения ранга формальной матрицы.

Лемма 1. Пусть $A \in M(m \times n, R)$, $K = M(n, R, \Sigma)$ – кольцо формальных матриц. Имеют место следующие соотношения и импликации для любого фиксированного $l \in \{1, \dots, n\}$:

$$1) \ 0 \leq r_l(A) \leq \min\{m, n\};$$

$$2) \ r_l(A) = r_l(PAQ), \forall P, Q \in U(M(n, R, \Sigma));$$

$$3) \ r_l(A) = 0 \Leftrightarrow \text{Ann}_R(I_1(\eta_l(A))) \neq (0);$$

4) Если $m = n$, то $r_l(A) < n \Leftrightarrow d(A) \in Z(R)$, где $d(A)$ – определитель формальной матрицы A , $Z(R)$ – множество делителей нуля кольца R .

Доказательство. Пункты 1), 3) и 4) прямо следуют из определения Σ -ранга формальной матрицы и леммы 4.11 в [3].

2) Для всяких матриц $B \in M(m \times p, R)$ и $C \in M(p \times n, R)$ справедлив следующий факт [5]: $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Теперь можем заключить: $I_t(\eta_l(PA)) \subseteq I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(P^{-1}(PA))) \subseteq I_t(\eta_l(PA))$, то есть $I_t(\eta_l(PA)) = I_t(\eta_l(A))$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\forall l \in \{1, \dots, n\}$. Аналогично можем проверить равенство: $I_t(\eta_l(PAQ)) = I_t(\eta_l(PA))$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\forall l \in \{1, \dots, n\}$. Откуда прямо следует: $r_l(A) = r_l(PAQ)$, $\forall P, Q \in U(M(n, R, \Sigma))$. $\square$

Следствие 1. Так как определитель формальной матрицы не зависит от выбора номера $l \in \{1, \dots, n\}$, то из пункта 4) леммы 1 вытекает, что если $r_l(A) < n$ хотя бы для одного l , то он не равен n ни для какого другого номера $k \in \{1, \dots, n\}$.

2. Системы формальных линейных уравнений

Пусть $A \in M(m \times n, R)$ и $m < n$. Под системой формальных линейных уравнений (СФЛУ) понимаем матричное уравнение

$$\left(\frac{A}{0}\right) \circ X_l = B_l,$$

где X_l – квадратная матрица порядка n с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ в l -м столбце и нулями на всех остальных местах, B_l – аналогичная матрица, но с элементами $b_1, b_2, \dots, b_n$. То есть, в полном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. В данном случае в l -м столбце матрицы B_l последние $n-m$ элементов всегда равны нулю.

Если $A \in M(m \times n, R)$ и $m > n$, то, аналогично, системой формальных матричных уравнений назовем матричное уравнение:

$$(A | 0) \circ X_l = B_l,$$

где X_l – квадратная матрица порядка m с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0$ в l -м столбце и нулями на всех остальных местах, B_l – квадратная матрица порядка m с элементами $b_1, b_2, \dots, b_m$ в l -м столбце и нулями на всех остальных местах.

В частности, при $m = n$, то есть, если A – квадратная матрица, имеем систему $A \circ X_l = B_l$, или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее везде будем писать $A \circ X_l = B_l$. Если матрица A прямоугольная, то дописывая в систему формальных линейных уравнений нулевые строки или столбцы всегда можем получить систему с квадратной матрицей.

Перемножая матрицы A и X_l , имеем равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \sum_{k=1}^n s_{1kl} a_{1k} x_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{k=1}^n s_{2kl} a_{2k} x_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{k=1}^n s_{nkl} a_{nk} x_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Замечание 4. В зависимости от выбора $l \in \{1, \dots, n\}$ получим n различных СФЛУ, не обязательно эквивалентных между собой.

Предложение 1. Система формальных линейных уравнений $A \circ X_l = B_l$ эквивалента обычной системе линейных уравнений $\eta_l(A) \cdot X = B$ над кольцом R , где X и B – вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ длины n соответственно.

Доказательство. Действительно, отбросив в равенстве $(*)$ нулевые столбцы, получим n линейных уравнений над R , которые можно объединить в систему

$$\begin{cases} s_{11l}a_{11}x_1 + s_{12l}a_{12}x_2 + \dots + s_{1nl}a_{1n}x_n = b_1 \\ s_{21l}a_{21}x_1 + s_{22l}a_{22}x_2 + \dots + s_{2nl}a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ s_{n1l}a_{n1}x_1 + s_{n2l}a_{n2}x_2 + \dots + s_{nnl}a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} s_{11l}a_{11} & s_{12l}a_{12} & \dots & s_{1nl}a_{1n} \\ s_{21l}a_{21} & s_{22l}a_{22} & \dots & s_{2nl}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1l}a_{n1} & s_{n2l}a_{n2} & \dots & s_{nnl}a_{nn} \end{pmatrix}$$

является образом матрицы A относительно гомоморфизма η_l .

Очевидно, что решение этой системы $\xi \in R^n$ будет решением и для СФЛУ $A \circ X_l = B_l$, если записать его в виде матрицы с нулями везде, кроме l -го столбца, в который нужно вписать вектор $\xi \in R^n$. $\square$

Если $B_l = 0$, то система $A \circ X_l = 0$ называется однородной. У такой системы всегда имеется, по крайней мере, одно решение, а именно $X_l = 0$, называемое тривиальным или нулевым.

Следующий результат, являющийся аналогом теоремы Маккоя [7], дает необходимые и достаточные условия для существования нетривиального решения однородной системы формальных линейных уравнений.

Теорема 1. Пусть $A \in M(m \times n, R)$. Однородная СФЛУ $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $r_l(A) < \min\{m, n\}$.

Доказательство. Согласно предложению 1, однородная система $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда имеет нетривиальное решение однородная система $\eta_l(A) \cdot X = 0$. Тогда по теореме Маккоя (см. [5], теорема 5.3) последнее эквивалентно неравенству $rk(\eta_l(A)) < \min\{m, n\}$. Осталось заметить, что $r_l(A) = rk(\eta_l(A))$ по определению ранга $r_l(A)$. $\square$

Следствие 2. Однородная СФЛУ имеет нетривиальное решение, если количество уравнений в ней меньше числа неизвестных.

Доказательство. Действительно, пусть $A \circ X_l = 0$ – система, в которой количество уравнений меньше числа неизвестных, то есть $m < n$. По пункту 1) леммы 1 $r_l(A) \leq \min\{m, n\} = m < n$. Тогда по теореме 1 система $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение. $\square$

Далее будем говорить о неоднородных системах, то есть B_l – не обязательно нулевая матрица.

Комбинируя предложение 1 и теорему 5.17 из [5], несложно убедиться в том, что правило Крамера остается справедливым для СФЛУ.

Теорема 2 (Правило Крамера). Пусть $A \in K$ и $d(A) \in U(R)$, другими словами, пусть A – обратимая формальная матрица. Тогда для любой матрицы B_l с l -м столбцом $\text{Col}_l(B_l) = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in R^n$ и нулями на всех остальных местах уравнение $A \circ X_l = B_l$ имеет единственное решение – матрицу $\Lambda_l \in K$ с l -м столбцом $\text{Col}_l(\Lambda_l) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$, где

$$y_j = d(A)^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} s_{11l}a_{11} & \dots & s_{1,j-1,l}a_{1,j-1} & b_1 & s_{1,j+1,l}a_{1,j+1} & \dots & s_{1nl}a_{1n} \\ s_{21l}a_{21} & \dots & s_{2,j-1,l}a_{2,j-1} & b_2 & s_{2,j+1,l}a_{2,j+1} & \dots & s_{2nl}a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1l}a_{n1} & \dots & s_{n,j-1,l}a_{n,j-1} & b_n & s_{n,j+1,l}a_{n,j+1} & \dots & s_{nnl}a_{nn} \end{pmatrix}, \forall j=1, \dots, n,$$

и нулями на всех остальных местах.

Итак, если A – обратимая формальная матрица, то СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет единственное решение для любой $B_l \in K$. Следующая теорема дает необходимые условия, при которых уравнение $A \circ X_l = B_l$ имеет решение для любой $A \in M(m \times n, R)$ и любой $B_l \in K$.

Теорема 3. Пусть $A \in M(m \times n, R)$. Допустим, что СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение. Тогда $I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(A) \mid \text{Col}_l(B_l))$, для любого $t \in \{1, \dots, n\}$, где $(\eta_l(A) \mid \text{Col}_l(B_l))$ – матрица $\eta_l(A)$ с приписанным справа l -м столбцом матрицы B_l .

Доказательство этой теоремы следует из предложения 1 и теоремы 5.21 в [5].

Замечание 5. В теореме 3 мы могли сразу считать, что $m \leq n$.

Доказательство. Действительно, пусть $A \in M(m \times n, R)$ и $m > n$. Легко видеть, что $I_l(A) = I_l(A | 0)$, где $A | 0$ – матрица A с дописанными справа $(m-n)$ нулевыми столбцами. Матрица $A | 0$ имеет размерность $n \times n$. Смысл вышесказанного в том, что, переходя от A к $A | 0$, можем, без потери общности, считать, что $m \leq n$. $\square$

В общем случае выполнение равенства $I_l(\eta_l(A)) = I_l(\eta_l(A) | \text{Col}_l(B_l))$ не гарантирует существование решения для системы $A \circ X_l = B_l$. Следующий результат, аналогичный теореме Камиона – Леви – Манна [6] для систем линейных уравнений над кольцом R , дает достаточные условия для разрешимости СФЛУ $A \circ X_l = B_l$.

Можем полагать $B_l \neq 0$ и $m \leq n$.

Через $I_m(\eta_l(A) | B)^*$ будем обозначать идеал в R , порождаемый всеми $(m \times m)$ -минорами матрицы $(\eta_l(A) | \text{Col}_l(B_l))$, которые включают элементы последнего столбца. Другими словами, $I_m(\eta_l(A) | B)^*$ порождается множеством $\{\Delta(i_1, \dots, i_m; j_1, \dots, j_{m-1}, n+1) \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_{m-1} \leq n\}$.

Теорема 4. Пусть $A \in M(m \times n, R)$, $m \leq n$ и $r_l(A) = 0$. Допустим, что в R существует идеал W и неделитель нуля $z \in R$ такие, что $WI_m(\eta_l(A) | B)^* \subseteq Rz \subseteq WI_m(\eta_l(A))$. Тогда СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение.

Доказательство этой теоремы следует из предложения 1 и теоремы 5.25 в [3].

Следствие 3. Пусть матрица $A \in M(m \times n, R)$ такая, что $I_m(\eta_l(A)) = R$ для некоторого фиксированного $l \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для любой $B_l \in K$ СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение.

3. Делители нуля в кольце формальных матриц

Формальная матрица A из кольца $K = M(n, R, \Sigma)$ формальных матриц порядка n над кольцом R с системой множителей $\Sigma = \{s_{ijk} \in C(R) \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ называется левым делителем нуля, если $A \circ B = 0$ для некоторой ненулевой формальной матрицы B из K . Аналогично, $A \in K$ – правый делитель нуля, если $B \circ A = 0$ для какой-то ненулевой $B \in K$. Следующая теорема характеризует делители нуля в K .

Теорема 5. Пусть $A \in K$. Эквивалентны следующие утверждения:

- 1) A – левый делитель нуля в K ;
- 2) A – правый делитель нуля в K ;
- 3) $d(A) \in Z(R)$;
- 4) $r_l(A) < n$ для любого $l \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Схема доказательства: 4) $\leftrightarrow$ 3), 4) $\rightarrow$ 1), 2) $\rightarrow$ 3), 1) $\rightarrow$ 2).

4) $\leftrightarrow$ 3) По лемме 1.

4) $\rightarrow$ 1). Так как $r_l(A) < n$ для любого $l \in \{1, \dots, n\}$, то по теореме 1 СФЛУ $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение. Таким образом, A – левый делитель нуля в K .

2) $\rightarrow$ 3). Пусть $\hat{R}$ – кольцо частных кольца R . Ясно, что существует кольцо формальных матриц $\hat{K} = M(n, \hat{R}, \Sigma)$. Считаем, что $R \subseteq \hat{R}$ и $K \subseteq \hat{K}$. Допустим, что $d(A)$ – неделитель нуля. Значит, $d(A)$ – обратимый элемент в $\hat{R}$. Тогда по [1] матрица A обратима в $\hat{K}$.

Из равенства $B \circ A = 0$ получаем $B = 0$. Но по условию $B \neq 0$. Противоречие. Итак, $d(A) \in Z(R)$.

1)→2). Пусть $A, B \in K$ – ненулевые формальные матрицы и $A \circ B = 0$. Тогда в кольце K^T будет справедливо равенство: $B^T * A^T = 0$, то есть A^T – правый делитель нуля в K^T . Тогда по 2)→3)→1) A^T – также левый делитель нуля в K^T . Значит, найдется ненулевая матрица $C \in K$, для которой $A^T * C = 0$. Возвращаясь в кольцо K , получаем равенство $C^T \circ A = 0$. То есть A – правый делитель нуля в K . $\square$

Таким образом, правые и левые делители нуля в кольцах формальных матриц со значениями в данном коммутативном кольце R совпадают и их определители – делители нуля в R .

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2014. № 1(19). С. 65–119.
2. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Модули над кольцами формальных матриц // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2009. Т. 15. № 8. С. 145–211.
3. Норбосамбиев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2015. № 4(36). С. 34–41.
4. Норбосамбиев Ц.Д. 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел // *Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»* (25 – 29 апреля 2016 г.): сб. статей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. С. 6–13.
5. Brown W.C. *Matrices over commutative rings*. New York: Marcel Dekker Inc., 1993. 294 p.
6. Camion P., Levy L.S., Mann H.B. Linear equations over commutative ring // *J. Algebra*. 1971. V. 18. P. 432 – 436.
7. McCoy N. *Rings and Ideals*. Carus Math. Monogr. 8, Mathematical Association of America, 1948. 216 p.

Статья поступила 19.01.2018 г.

Norbosambuev T. D. (2018) RANK OF FORMAL MATRIX. SYSTEM OF FORMAL LINEAR EQUATIONS. ZERO DIVISORS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 5–12

DOI 10.17223/19988621/52/1

Keywords: Ring, formal matrix, rank of formal matrix, system of formal linear equations.

In this paper, we present the notion of the formal rank, i.e., the rank of a formal matrix over an arbitrary commutative ring, and some its general properties. Next, we introduce the notion of systems of formal linear equations and give necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of homogenous systems of formal linear equations. In Section 2, we show that Cramer's rule is still valid for systems of formal linear equations. Finally, in Section 3, we establish the condition under which a formal matrix is a left or right zero divisor.

AMS Mathematical Subject Classification: 15B9, 15A06, 15A24, 16S50

NORBOSAMBUEV Tsyrendorji Dashatsyrenovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

REFERENCES

1. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal Matrices and Their Determinants. *J. Math. Sci.* 211:341. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3
2. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2010) Modules over formal matrix rings. *J. Math. Sci.* 171:248. DOI: 10.1007/s10958-010-0133-5
3. Norbosambuev T.D. (2015) O summah diagonal'nyh i obratimyh formal'nyh matrits [On sums of diagonal and invertible formal matrices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*.

- Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 34–41. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
4. Norbosambuev T.D. (2016) 2-horoshie diagonal'nye formal'nye matritsy nad koltsom tselyh chisel [2-good diagonal formal matrices over the ring of integers]. *Proceedings of All-Russia Scientific Youth Conferences "All Faces of Mathematics and Mechanics"*. Tomsk: TGU Publ. pp. 6–13.
 5. Brown W.C. (1993) *Matrices over commutative rings*. New York: Marcel Dekker Inc.
 6. Camion P., Levy L.S., Mann H.B. (1971) Linear equations over commutative ring. *J. Algebra*. 18. P. 432–436. DOI: 10.1016/0021-8693(71)90073-1.
 7. McCoy N. (1948) *Rings and Ideals*. Carus Math. Monogr. 8, Mathematical Association of America.

E.A. Pchelintsev, V.A. Pchelintsev

ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR NONOVERLAPPING DOMAINS¹

The paper considers the problem of finding the range of the functional $I = J(f(z_0), \overline{f(z_0)}, F(\zeta_0), \overline{F(\zeta_0)})$ defined on the class $\mathfrak{M}$ of functions pairs $(f(z), F(\zeta))$ that are univalent in the system of the disk and the interior of the disk, using the method of internal variations. We establish that the range of this functional is bounded by the curve whose equation is written in terms of elliptic integrals, depending on the parameters of the functional I .

Keywords: *Method of internal variations, Univalent function, Nonoverlapping domains, Functional range, Elliptic integrals.*

1. Introduction

In the geometric theory of univalent functions there are a number of papers and books devoted to the problem of nonoverlapping domains. These problems were developed by M.A. Lavrentiev [1], G.M. Goluzin [2], James A. Jenkins [3], Z. Nehari [4], N.A. Lebedev [5], M. Shiffer [6], R. Kühnau [7] and others. A summary of results in this area is contained in [8].

Let D and D^* be nonoverlapping simply connected domains in the w -plane such that $0 \in D$ and $\infty \in D^*$. Assume that $f: E \rightarrow D$ and $F: E^* \rightarrow D^*$ are holomorphic and meromorphic (respectively) univalent functions normalized by the conditions $f(0) = 0$ and $F(\infty) = \infty$. Here $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and $E^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$. The family of all such pairs $(f(z), F(\zeta))$ is called the class $\mathfrak{M}$. Some extremal problems for this class were studied in [5, 9, 10].

Let $J: G \rightarrow \mathbb{C}$ and $J = J(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ is an analytic in some domain $G \subset \mathbb{C}^4$ nonhomogeneous and nonconstant function.

Now we fix an arbitrary points $z_0 \in E$, $\zeta_0 \in E^*$ and define on the class $\mathfrak{M}$ a functional

$$I: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}, \quad I(f, F) = J\left(f(z_0), \overline{f(z_0)}, F(\zeta_0), \overline{F(\zeta_0)}\right). \quad (1)$$

This paper considers the problem of finding the range Δ of the functional I on the class $\mathfrak{M}$. Since together with pair $(f(z), F(\zeta))$ the class $\mathfrak{M}$ contains the following pairs of functions $(f(ze^{i\varphi}), F(\zeta e^{i\psi}))$ for any parameters $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, then we reduce the initial problem to an equivalent one for the functional

$$I = J\left(f(r), \overline{f(r)}, F(\rho), \overline{F(\rho)}\right),$$

where $r = |z_0| \in (0, 1)$, $\rho = |\zeta_0| \in (1, +\infty)$. Further on we will solve this problem. We note that the class of such problems has a long history. Its special cases have been studied in the works [11, 12].

¹ The second author was supported by RFBR Grant no 18-31-00011.

Taking into account that the class $\mathfrak{M}$ contains the pair of functions $(f(zt), F(\zeta t^{-1}))$ for any $t \in [0, 1]$ (see [9]), we have that the range Δ of the functional (1) is a connected set. Note that if the class $\mathfrak{M}$ complement the pair of functions $(f(z), \infty)$, where $f(z)$, $f(0) = 0$, is a holomorphic univalent function in E , then Δ will be a closed set [13]. Hence, it suffices to find the boundary Γ of the set Δ .

A point $I_0 \in \Gamma$ is called a *nonsingular boundary point* if there exists an exterior point I_e for Δ such that the distance between I_e and I_0 is equal to the distance between I_e and the set Δ , i.e.

$$|I_0 - I_e| = \inf_{I \in \Delta} |I - I_e|. \quad (2)$$

The set Γ_0 of nonsingular boundary points is dense in Γ [14]. Thus, the initial problem of finding the range Δ of (1) is replaced by an equivalent extremal problem: find the minimum of the real-valued functional $|I - I_e|$ on $\mathfrak{M}$ for all possible $I_e \notin \Delta$.

The functions giving nonsingular boundary points of a functional are called the *boundary functions* of this functional; i.e., these are the functions at which the values of the functional are nonsingular boundary points.

In this paper, to solve the problem we apply Schiffer's method of internal variations [15] using pairs of varied functions from [5]. In [10, 16] this method has been developed to studying the range of some functionals defined on the classes of pairs functions.

Main results are given in the following Section 2.

2. Differential equations for the boundary functions. The equation of the boundary of Δ

Now write the variational formulas for boundary functions $f(z)$ and $F(\zeta)$ on the class $\mathfrak{M}$ in the form

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(z) &= f(z) + \varepsilon P(z) + o(z, \varepsilon), \\ F_\varepsilon(\zeta) &= F(\zeta) + \varepsilon Q(\zeta) + o(\zeta, \varepsilon) \end{aligned}$$

for ε positive and sufficiently small. Because the functional (1) is Gâteaux differentiable, we can rewrite it in the form

$$I_* = I + \varepsilon \left\{ \frac{\partial J(\omega_0)}{\partial \omega_1} P(r) + \frac{\partial J(\omega_0)}{\partial \omega_2} \overline{P(r)} + \frac{\partial J(\omega_0)}{\partial \omega_3} Q(\rho) + \frac{\partial J(\omega_0)}{\partial \omega_4} \overline{Q(\rho)} \right\} + o(\varepsilon),$$

where $I_* = I(f_\varepsilon(z), F_\varepsilon(\zeta))$, $\omega_0 = (f(r), \overline{f(r)}, F(\rho), \overline{F(\rho)}) \in G$.

Let $(f(z), F(\zeta))$ be a boundary pair of functions of this functional giving the point I_0 . The equality (2) implies that

$$|I_* - I_e| \geq |I_0 - I_e|.$$

From here each boundary pair of functions satisfies the necessary condition

$$\operatorname{Re}[pP(r) + qQ(\rho)] \geq 0 \quad (3)$$

where $p = e^{-i\alpha} \frac{\partial J(\omega_0)}{\partial \omega_1} + e^{i\alpha} \overline{\left(\frac{\partial J(\omega_0)}{\partial \omega_2} \right)}$, $q = e^{-i\alpha} \frac{\partial J(\omega_0)}{\partial \omega_3} + e^{i\alpha} \overline{\left(\frac{\partial J(\omega_0)}{\partial \omega_4} \right)}$

and $\alpha = \arg(I - I_e)$.

Lemma 1. Let $f(z), F(\zeta)$ be boundary functions of functional (1). Then the union of domains D and D^* has no exterior points in $\overline{\mathbb{C}_w}$.

Proof. Suppose that $D \cup D^*$ has at least one exterior point w_0 in the w -plane. Then by definition of the exterior point there exists a neighborhood of the point w_0 consisting of exterior points. Using the pair of varied functions

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon A_0 \frac{f(z)}{f(z) - w_0}, \quad F(\zeta, \varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon A_0 \frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - w_0},$$

where w_0 is an exterior point for D and D^* simultaneously and A_0 is an arbitrary complex constant, as the comparison pair in (3), rewrite it as

$$\operatorname{Re} \left(A_0 \frac{R(w_0)}{(f(r) - w_0)(F(\rho) - w_0)} \right) \geq 0, \quad (4)$$

where $R(w_0)$ is a linear polynomial. The fraction in the condition (4) is equal to zero, otherwise in view of the arbitrariness of $\arg A_0$ we can choose it so that the left side will be negative. Therefore $R(w_0) = 0$. It is possible only for a single point, while inequality (4) should be performed for any point from the neighborhood of the w_0 . This contradiction proves the lemma.

Further, to obtain differential equations for the boundary functions of the functional (1) we consider the following pairs of variational formulas from [5]:

$$\begin{aligned} 1) \quad f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon A_0 \left(\frac{f(z)}{f(z) - f(z_0)} - \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)} \frac{zf'(z)}{z - z_0} \right) + \\ &+ \varepsilon A_0 \frac{\overline{f(z_0)}}{z_0 f'^2(z_0)} \frac{z^2 f'(z)}{1 - z_0 z} + o(z, \varepsilon), \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) + \varepsilon A_0 \frac{f(z)}{f(z) - F(\zeta_0)}, \end{aligned} \quad (5)$$

where $z_0 \in E$, A_0 is an arbitrary complex constant;

$$\begin{aligned} 2) \quad f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon A_0 \frac{f(z)}{f(z) - F(\zeta_0)}, \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) + \varepsilon A_0 \left(\frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - F(\zeta_0)} - \frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0^2 F'^2(\zeta_0)} \frac{\zeta^2 F'(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} \right) + \\ &+ \varepsilon A_0 \frac{\overline{F(\zeta_0)}}{\zeta_0^2 F'^2(\zeta_0)} \frac{\zeta F'(\zeta)}{1 - \zeta_0 \zeta} + o(\zeta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (6)$$

where $\zeta_0 \in E^*$, A_0 is an arbitrary complex constant.

Theorem 2. Every boundary pair of functions $(f(z), F(\zeta))$ of the functional (1) satisfies in E and E^* the system of functional-differential equations

$$\frac{(C_1 f(z) - C_2)(f'(z))^2}{f(z)(f(z) - f(r))(f(z) - F(\rho))} = \frac{A}{z(r - z)(1 - rz)}, \quad (7)$$

$$\frac{(C_1 F(\zeta) - C_2)(F'(\zeta))^2}{F(\zeta)(F(\zeta) - f(r))(F(\zeta) - F(\rho))} = \frac{B}{\zeta(\rho - \zeta)(1 - \rho\zeta)}, \quad (8)$$

where

$$C_1 = pf(r) + qF(\rho), \quad C_2 = (p + q)f(r)F(\rho),$$

$$A = -(1 - r^2)rp f'(r) > 0, \quad B = (\rho^2 - 1)\rho q F'(\rho) > 0.$$

Proof. If we choose the variational formula (5), then (3) takes the form

$$\operatorname{Re} \left[pA_0 \frac{f(r)}{f(r) - f(z_0)} - pA_0 \frac{rf'(r)}{r - z_0} \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)} + \overline{pA_0} \frac{-r^2 f'(r)}{1 - rz_0} \frac{\overline{f(z_0)}}{z_0 \overline{f'^2(z_0)}} + qA_0 \frac{F(\rho)}{F(\rho) - f(z_0)} \right] \geq 0.$$

Replacing the third summand under the real part by its conjugate, we have

$$\operatorname{Re} A_0 \left[\frac{pf(r)}{f(r) - f(z_0)} - p \frac{rf'(r)}{r - z_0} \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)} + \overline{p} \frac{-r^2 f'(r)}{1 - rz_0} \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)} + \frac{qF(\rho)}{F(\rho) - f(z_0)} \right] \geq 0.$$

In this condition, the expression in parentheses is equal to zero; otherwise, under an appropriate choice of $\arg A_0$ we would get that the left-hand side of the last inequality is negative. This leads to the equality

$$\frac{pf(r)}{f(r) - f(z_0)} + \frac{qF(\rho)}{F(\rho) - f(z_0)} = \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)} \left(\frac{rpf'(r)}{r - z_0} - \overline{pf'(r)} \frac{r^2}{1 - rz_0} \right).$$

Since, in this equation, z_0 is an arbitrary point of E , replacing z_0 by z , and in view of $pf'(r) < 0$, we obtain a differential equation for the boundary function $f(z)$. The calculations show that it has the form (7).

The deduction of (8) repeats (7); for this we must apply (3) together with the variational formulas (6) and use inequality $qF'(\rho) > 0$. The theorem is proved.

From the analytic theory of differential equations [17], we conclude that the boundary functions $f(z)$ and $F(\zeta)$ satisfying their equations are holomorphic not only in E and E^* , but also on the unit circle $|z| = |\zeta| = 1$. From here and because the union $D \cup D^*$ does not contain exterior points, we have that the domains D and D^* are bounded by some closed analytic Jordan curve.

Further, to find the equation of the boundary of the range Δ of the functional (1) we integrate (7) and (8).

Extract the square root from both sides of (7) and integrate the result by z from 0 to r . Consider the left-hand side:

$$J = \int_0^r \sqrt{\frac{C_1 f(z) - C_2}{f(z)(f(z) - f(r))(f(z) - F(\rho))}} f'(z) dz.$$

Changing the integration variable $t = f(z)/f(r)$, we have

$$J = a \int_0^1 \frac{t - b}{\sqrt{t(1 - t)(1 - ct)(t - b)}} dt,$$

where

$$a = \sqrt{C_1 \frac{f(r)}{F(\rho)}}, \quad b = \frac{C_2}{C_1 f(r)}, \quad c = \frac{f(r)}{F(\rho)}.$$

Putting $t = 1/x$ in J , we infer

$$J = a \int_1^\infty \frac{dx}{x \sqrt{(x-1)(x-c)(1-bx)}} - ab \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c)(1-bx)}}.$$

Performing the change of variables $y = b(x-1)/(bx-1)$ in the integrals, after transformations we obtain

$$J = -ph \, \Pi(n, k),$$

where

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+n \sin^2 t) \sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$$

is the complete elliptic integral of the third kind,

$$h = \sqrt{\frac{(f(r)-F(\rho))f^2(r)}{C_2}}, \quad n = -\frac{1}{b}, \quad k = \sqrt{\frac{q}{p+q}}.$$

Here $\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}$ stands for the branch of the function assuming 1 at $t \rightarrow 0$.

Now integrate the right-hand side:

$$J = \sqrt{A} \int_0^r \frac{dz}{\sqrt{z(r-z)(1-rz)}}.$$

Changing the integration variable $x = z/r$, we have

$$J = 2\sqrt{A} \, \mathbf{K}(r),$$

where

$$\mathbf{K}(r) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1-r^2 \sin^2 t}}$$

is the complete elliptic integral of the first kind.

Thus, upon integration, we can rewrite (7) as

$$-ph \, \Pi(n, k) = \sqrt{A} \, \mathbf{K}(r). \quad (9)$$

Integrate (8) after extracting the square root with respect to ζ from ρ to ∞ . First consider the left-hand side:

$$L = a^* \int_\rho^\infty \sqrt{\frac{C_1 F(\zeta) - C_2}{F(\zeta)(F(\zeta) - F(\rho))(F(\zeta) - f(r))}} F'(\zeta) d\zeta.$$

Changing the integration variable $t = F(\zeta)/F(\rho)$, we have

$$L = a^* \int_1^\infty \frac{t - b^*}{\sqrt{t(1-t)(1-c^*t)(t-b^*)}} dt,$$

where

$$a^* = \sqrt{C_1 \frac{F(\rho)}{f(r)}}, \quad b^* = \frac{C_2}{C_1 F(\rho)}, \quad c^* = \frac{F(\rho)}{f(r)}.$$

Putting $t = 1/x$ in L , we infer

$$L = a^* \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{(x-1)(x-c^*)(1-b^*x)}} - a^* b^* \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c^*)(1-b^*x)}}.$$

Performing the change of variables $u = b^*(1-x)/(b^*-1)$ in the integrals, after calculation we come to equality

$$L = 2(l\Pi(\phi, m, k) - h_0\mathbf{F}(\phi, k)),$$

where

$$\mathbf{F}(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$$

is the incomplete elliptic integral of the first kind;

$$\Pi(\phi, m, k) = \int_0^\phi \frac{dt}{(1+m \sin^2 t)\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$$

is the incomplete elliptic integral of the third kind;

$$l = C_1 \sqrt{\frac{c^*}{(p+q)(f(r)-F(\rho))}},$$

$$\phi = \arcsin \frac{1}{k(1-c^*)}, \quad m = k(c^*-1), \quad h_0 = \frac{f(r)}{h}.$$

On the right-hand side

$$J = \sqrt{B} \int_\rho^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}},$$

changing the integration variable $\tau = \rho/\zeta$, we have

$$L = 2 \frac{\sqrt{B}}{\rho} \mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Hence, integrating (8), we obtain

$$(l \Pi(\phi, m, k) - h_0\mathbf{F}(\phi, k)) = \frac{\sqrt{B}}{\rho} \mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (10)$$

Now in the w -plane, take the point $F(1) = f(-e^{i\alpha})$. Integrate the equalities that are obtained from the system (7)–(8) by extracting the square root in first over z from 0 to -1 , and then over the arc $|z|=1$ counterclockwise from -1 to $-e^{i\alpha}$, and in the second, over ζ from 1 to ρ .

Write the integrals on the left-hand side of (7):

$$\begin{aligned} & \int_0^{f(-1)} \sqrt{\frac{C_1 w - C_2}{w(w-F(\rho))(w-f(r))}} dw, \\ & \int_{f(-1)}^{F(1)} \sqrt{\frac{C_1 w - C_2}{w(w-F(\rho))(w-f(r))}} dw. \end{aligned}$$

Proceed with the integral on the left-hand side of (8)

$$\int_{F(1)}^{F(\rho)} \sqrt{\frac{C_1 w - C_2}{w(w-F(\rho))(w-f(r))}} dw.$$

Summing up these integrals, we have

$$T = \int_0^{F(\rho)} \sqrt{\frac{C_1 w - C_2}{w(w - F(\rho))(w - f(r))}} dw.$$

Making the change of variables $t = w / F(\rho)$, note that

$$T = a^* \int_0^1 \frac{t - b^*}{\sqrt{t(1-t)(1-c^*t)(t-b^*)}} dt.$$

Using $t = 1/x$, we find

$$T = a^* \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-c^*)(1-b^*x)}} - a^* b^* \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c^*)(1-b^*x)}}.$$

Changing the integration variable $y = b^*(1-x)/(b^*x-1)$ in the integrals and performing the corresponding transformations, we obtain

$$T = 2iqh^* \Pi(n^*, k'),$$

where
$$h^* = \sqrt{\frac{(f(r) - F(\rho))F^2(\rho)}{C_2}}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}, \quad n^* = -\frac{1}{b^*}.$$

Integrate the right-hand sides of (7). First, integrate over z from 0 to -1

$$T_1 = \sqrt{A} \int_{-1}^0 \frac{dz}{\sqrt{z(r-z)(1-rz)}}.$$

Performing the change of the integration variable $x = (1+z)/(1-z)$ and applying a formula from [18], we obtain

$$T_1 = \sqrt{A}i \mathbf{K}(\sqrt{1-r^2}).$$

Integrate the right-hand side over the arc β of the unit circle counterclockwise from -1 to $-e^{i\alpha}$:

$$T_2 = \sqrt{A} \int_{\beta} \frac{dz}{\sqrt{z(r-z)(1-rz)}}.$$

Substituting $z = -e^{i\varphi}$ in T_2 , where $0 \leq \varphi \leq \alpha$, we infer

$$T_2 = \sqrt{A} \int_0^\alpha \frac{d(-e^{i\varphi})}{\sqrt{-e^{i\varphi}(r + e^{i\varphi})(1 + re^{i\varphi})}}.$$

Performing the change of variable $t = -e^{i\varphi}$, we find

$$T_2 = -\frac{2\alpha}{\pi} \sqrt{A} \mathbf{K}(r).$$

Finally, integrate the right-hand side of (8) over ζ from 1 to ρ :

$$T_3 = \sqrt{B} \int_1^\rho \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}}.$$

Changing the integration variable $u = \rho / \zeta$, we have

$$T_3 = \frac{\sqrt{B}}{\rho} \mathbf{K} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} \right).$$

Summing T_1 , T_2 and T_3 yields

$$\sqrt{A} i \mathbf{K}(\sqrt{1-r^2}) + \frac{\sqrt{B}}{\rho} \mathbf{K} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} \right) - \frac{2\alpha}{\pi} \sqrt{A} \mathbf{K}(r).$$

Thus, integrating the equalities (7) and (8), we come to

$$qh^* \Pi(n^*, k') = \frac{\sqrt{A}}{2} \mathbf{K}(\sqrt{1-r^2}) + \frac{\sqrt{B}}{2\rho} \mathbf{K} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} \right) - \frac{\alpha}{\pi} i \sqrt{A} \mathbf{K}(r).$$

Excluding the constants $\sqrt{A}$ and $\sqrt{B}$ from this equality by using (9) and (10), we obtain the following equation

$$-\frac{qh^* \Pi(n^*, k')}{ph \Pi(n, k)} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} - \frac{1}{2} \frac{l \Pi(\phi, m, k) - h_0 \mathbf{F}(\phi, k)}{ph \Pi(n, k)} \frac{\mathbf{K} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} \right)}{\mathbf{K} \left(\frac{1}{\rho} \right)} + \frac{\alpha}{\pi} i. \quad (11)$$

Hence, we have proved:

Theorem 3. The range Δ of the functional (1) on the class $\mathfrak{M}$ is bounded by the curve defined by equation (11) for $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Note that Theorem 3 implies the following result, established in [10].

Corollary 4. Let $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}$ and r, ρ are fixed points in E and E^* respectively. Then the range of the functional $\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{f(r)}{F(\rho)}$ is bounded by the curve

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{2} \ln \left(-16d \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+d^{2n}}{1-d^{2n-1}} \right)^8 \right), \quad (12)$$

where $d = e^{-\pi\mu}$, $\mu = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} + \frac{\mathbf{K} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} \right)}{\mathbf{K} \left(\frac{1}{\rho} \right)} \right\} + \lambda i$, $0 \leq \lambda < 2$.

In Figures 1 and 2 below we can see the curve (12) for some fixed parameters r and ρ .

Corollary 4 allow us to obtain the new estimates for the moduli of the functionals on the class $\mathfrak{M}$.

Proposition 5. On the class $\mathfrak{M}$ for any $r \in (0, 1)$ and $\rho \in (1, \infty)$, the following inequality holds

$$\left| \frac{f(r)}{F(\rho)} \right| \leq e^{2\xi(0)}.$$

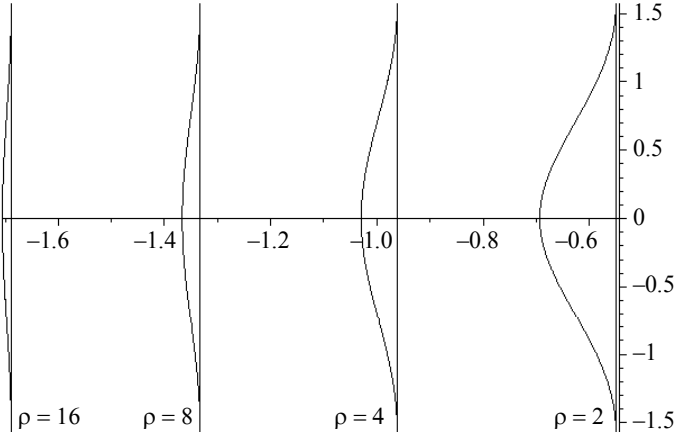


Fig. 1. Curve (12) for $r = 0.5$ and $\rho = 2, 4, 8, 16$

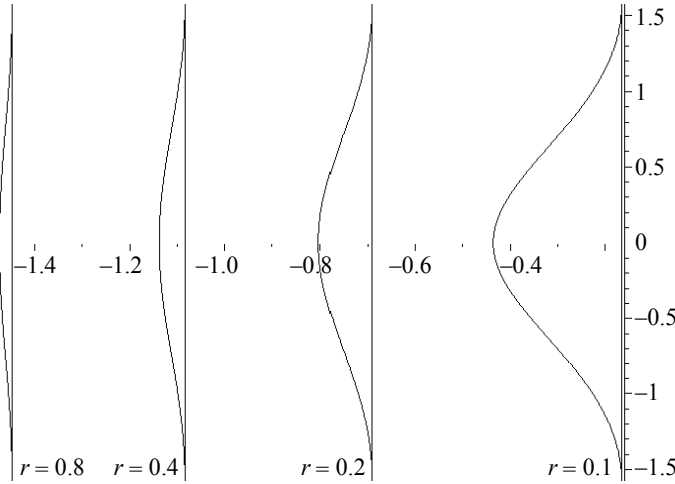


Fig. 2. Curve (12) for $r = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ and $\rho = 2$

Proof. Using the equality (12) and formulas from [18], it is easy to show that

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(r)}{F(\rho)} \right| &\leq 16e^{-\pi v} \cdot |e^{-\pi \lambda i}| \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|1 + (e^{-\pi v} \cdot e^{-\pi \lambda i})|^{2n}}{|1 - (e^{-\pi v} \cdot e^{-\pi \lambda i})|^{2n-1}} \right)^8 \leq \\ &\leq 16e^{-\pi v} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|1 + (e^{-\pi v} \cdot |e^{-\pi \lambda i}|)|^{2n}}{|1 - (e^{-\pi v} \cdot |e^{-\pi \lambda i}|)|^{2n-1}} \right)^8 = e^{2\xi(0)}, \end{aligned}$$

where

$$v = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} + \frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\right)}{\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right)} \right\}.$$

Hence Proposition 5. Next we establish the auxiliary inequality.

Proposition 6. Let $\xi(\lambda)$ describes by the equality (12). Then

$$e^{2\xi(0)} \leq \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)(\rho^2-1)}}$$

for any $r \in (0,1)$ and $\rho \in (1,\infty)$.

Proof. Taking into account the formulas from [18] for the elliptic integrals, we have

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} &= 4\sqrt{q_1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q_1^{2n}}{1+q_1^{2n-1}} \right)^4, \quad q_1 = e^{-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)}}. \\ \frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}} &= 4\sqrt{q_2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q_2^{2n}}{1+q_2^{2n-1}} \right)^4, \quad q_2 = e^{-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}})}{\mathbf{K}(\frac{1}{\rho})}}. \end{aligned}$$

One can check that for any $m \in \mathbb{N}$

$$(1+e^{a+b})^m \leq (1+e^a)^{m/2} (1+e^b)^{m/2}, \quad (1-e^{a+b})^m \geq (1-e^a)^{m/2} (1-e^b)^{m/2}.$$

From here we obtain

$$\begin{aligned} e^{2\xi(0)} &= 16e^{-\pi v} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+e^{-2n\pi v}}{1+e^{-(2n-1)\pi v}} \right)^8 \leq \\ &\leq 4e^{-\pi a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+e^{-2n\pi a}}{1+e^{-(2n-1)\pi a}} \right)^4 \times 4e^{-\pi b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+e^{-2n\pi b}}{1+e^{-(2n-1)\pi b}} \right)^4 = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)(\rho^2-1)}}, \end{aligned}$$

where $v = a + b$, $a = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)}$, $b = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}})}{\mathbf{K}(\frac{1}{\rho})}$.

Hence Proposition 6.

From Proposition 5 and Proposition 6 we come to the corollaries.

Corollary 7. On the class $\mathfrak{M}$ for any $r \in (0,1)$ and $\rho \in (1,\infty)$, the following inequality holds

$$\left| \frac{f(r)}{F(\rho)} \right| \leq \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)(\rho^2-1)}}.$$

Corollary 8. On the class $\mathfrak{M}$ the following estimates hold:

1) the range of functional $\frac{f'(0)}{F(\rho)}$ is a punctured disc

$$\left| \frac{f'(0)}{F(\rho)} \right| \leq 4 \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\right)}{\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right)} \right\},$$

2) the range of functional $\frac{f(r)}{F'(\infty)}$ is a punctured disc

$$\left| \frac{f(r)}{F'(\infty)} \right| \leq 4 \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} \right\}.$$

REFERENCES

1. Lavrentiev M.A. (1934) K teorii konformnykh otobrazheniy [On the theory of conformal mappings]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 5. pp. 159–245 (Translated in *A.M.S. Translations*, 122, pp. 1–63 (1984)).
2. Goluzin G.M. (1969) *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*. Amer. Math. Soc., Providence.
3. Jenkins J.A. (1958) *Univalent Functions and Conformal Mapping*. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer Verlag.
4. Nehari Z. (1953) Some inequalities in the theory of functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 75(2). pp. 256–286.
5. Lebedev N.A. (1957) Ob oblasti znacheniy odnogo funktsionala v zadache o nenalegayushchikh oblastiakh [On the range of the restriction of a functional on nonoverlapping domains]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 115(6). pp.1070–1073.
6. Duren P.L., Schiffer M.M. (1988) Conformal Mappings onto Nonoverlapping Regions. Hersch J., Huber A. (eds) *Complex Analysis*. Birkhäuser Basel. pp. 27–39. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9158-5_3.
7. Kühnau R. (1971) Über zwei Klassen schlichter konformer Abbildungen. *Math. Nachr.* 49(1-6). pp. 173–185.
8. Bakhtin A. K., Bakhtina G. P., Zelinskii Yu. B. (2008) Topologo-algebraicheskie struktury i geometricheskie metody v kompleksnom analize [Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis]. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*. 73. p. 308 (in Russian).
9. Andreev V.A. (1976) Some problems on nonoverlapping domains. *Siberian Math. J.* 17(3). pp. 373–386.
10. Pchelintsev V.A. (2012) On a problem of nonoverlapping domains. *Siberian Math. J.* 53(6). pp. 1119–1127.
11. Alexandrov I.A. (1976) *Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.
12. Schaeffer A.C., Spencer D.C. (1950) Coefficient regions for schlicht functions. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* 35. New York.
13. Ulina G.V. (1960) Ob oblastiakh znacheniy nekotorykh sistem funktsionalov v klassakh odnolistnykh funktsiy [On the range of some functional systems in classes of univalent functions]. *Vestn. Leningr. un-ta. Matem., mekhan. i astr. – Vestnik Leningrad. Univ. Mathematics, Mechanics and Astronomy*. 1(1). pp. 35–54.
14. Lebedev N.A. (1955) Mazhorantnaya oblast' dlya vyrazheniya $I = \ln \left\{ z^\lambda [f'(z)]^{1-\lambda} / [f(z)]^\lambda \right\}$ v klasse S [The majorant domain for the expression $I = \ln \left\{ z^\lambda [f'(z)]^{1-\lambda} / [f(z)]^\lambda \right\}$ in the class S]. *Vestn. Leningr. un-ta. Matem., fiz. i khim. – Vestnik Leningrad. Univ. Mathematics, physics and chemistry*. 3(8). pp. 29–41.
15. Schiffer M. (1943) Variation of the Green function and theory of the p-valued functions. *Amer. J. Math.* 65. pp. 341–360
16. Pchelintsev V.A., Pchelintsev E.A. (2015) On the range of one complex-valued functional. *Siberian Math. J.* 56(5). pp. 922–928.
17. Golubev V.V. (1950) Lekcii po analiticheskoy teorii differentsial'nykh uravnenij [Lectures on the Analytic Theory of Differential Equations]. Moscow; Leningrad: GITTL.
18. Gradshteyn I.S. and Ryzhik I.M. (1994). *Tables of Integrals, Sums, Series and Product*. Boston: Academic Press.

Received: January 7, 2018

PCHELINTSEV Evgeny Anatolievich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

PCHELINTSEV Valerii Anatolievich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vpchelintsev@vtomske.ru

Пчелинцев Е.А., Пчелинцев В.А. (2018) ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. № 52. С. 13–24

DOI 10.17223/19988621/52/2

В статье методом внутренних вариаций решается задача о нахождении множества значений функционала $I = J(f(z_0), \overline{f(z_0)}, F(\zeta_0), \overline{F(\zeta_0)})$, определенного на классе $\mathfrak{M}$ пар функций $(f(z), F(\zeta))$ однолистных в системе круг – внешность круга. Устанавливается, что множество значений функционала ограничено кривой, уравнение которой записано через эллиптические интегралы, зависящие от параметров функционала I .

Ключевые слова: метод внутренних вариаций, однолистные функции, неналегающие области, множество значений функционала, эллиптические интегралы.

Pchelintsev E.A., Pchelintsev V.A. (2018) ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR NONOVERLAPPING DOMAINS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 13–24

AMS Mathematical Subject Classification: 30C70

МЕХАНИКА

УДК 539.379.4

DOI 10.17223/19988621/52/3

С.А. Баранникова, Ю.В. Ли, Л.Б. Зуев

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ
ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ КОРРОЗИОННОСТОЙКОГО БИМЕТАЛЛА¹**

Рассматривается эволюция очагов локализации пластической деформации коррозионно-стойкого биметалла на основе соединения аустенитной нержавеющей стали марки 12Х18Н9Т и низкоуглеродистой конструкционной стали Ст3 в условиях агрессивной водородосодержащей среды. Методом корреляции цифровых спекл-изображений получены картины локализации пластической деформации в процессе одноосного растяжения. Рассмотрен характер разрушения биметаллического материала в исходном состоянии и после электролитического наводороживания. Проведен анализ стадийности деформационных кривых.

Ключевые слова: локализация деформации, пластическое течение, корреляция цифровых спекл-изображений, водородное охрупчивание, сталь.

Локализация пластической деформации проявляется на всех масштабных уровнях процесса в виде полос и пачек скольжения, дислокационных субструктур (ячейки, полосовые структуры, фрагменты), фронтов пластической деформации, полос сброса, пространственно-временных осцилляций пластической деформации и т.п. [1–5]. Явления пространственно-временной локализации пластической деформации в твердых телах являлись предметом большого интереса на протяжении последних десятилетий, были предприняты значительные усилия их интерпретации в рамках современных подходов к описанию процессов самоорганизации в системах, далеких от равновесия. Процесс неоднородного развития пластической деформации, по крайней мере в металлах, подвергаемых одноосной пластической деформации, имеет многомасштабную природу, зависящую от величины средней пластической деформации, ее скорости, температуры и других факторов. Изученные к настоящему времени закономерности пластической деформации на микро-, мезо- и макроскопическом масштабных уровнях установлены на широком классе чистых металлов или сплавов [1–5]. Различные формы процесса локализации пластической деформации на макроскопическом уровне могут рассматриваться как разные типы автоволн, зависящие от действующего на данной стадии закона деформационного упрочнения [4, 5].

Деформационному поведению многослойных материалов при интенсивной пластической деформации посвящено ограниченное количество работ. Такие ма-

¹ Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Государственной академии наук в 2013-2020 гг. и гранта РФФИ №16-08-00385-а.

териалы могут быть изготовлены с помощью соединения разнородных металлов в монолитную композицию, сохраняющую надежную связь составляющих при дальнейшей технологической обработке и в условиях эксплуатации. К числу таких материалов относятся двухслойные металлические композиты – биметаллы, в том числе и антикоррозионные биметаллы, которые достаточно устойчивы к воздействию агрессивных сред и обладают высокими механическими характеристиками [6–9]. Наибольшая доля в выпуске коррозионно-стойкого биметалла приходится на композиции углеродистых и коррозионно-стойких сталей в виде тонких и толстых листов, а также в виде труб в химической, нефтеперерабатывающей и целлюлозно-бумажной, пищевой промышленности и судостроении.

Водородосодержащая среда, проникая в объем элементов конструкции и деталей, приводит к значительным ухудшениям кратковременных и длительных механических характеристик материала, что вызывает изменение напряженно-деформированного состояния и приводит к значительному уменьшению несущей способности и сокращению долговечности конструкций [10–13]. Коррозия и водородное охрупчивание металлических материалов тесно связаны с определенными элементами их микроструктуры и, в частности, с сегрегационными и диффузионными процессами, протекающими на внутренних структурно-фазовых поверхностях (границах) раздела и ассоциированных дефектах дислокационного типа; микромеханизмы таких процессов мало изучены. Фундаментальные знания о природе водородного охрупчивания металлов и сварных соединений необходимы для стандартизации материалов, применяемых при создании водородной инфраструктуры. Необходимы фундаментальные исследования для раскрытия механизмов локализации деформации, водородной деградации и разрушения, что позволит усовершенствовать конструкционные материалы.

Настоящая работа посвящена изучению особенностей пластической деформации и разрушения биметаллической композиции на основе соединения углеродистой стали и высокохромистой нержавеющей стали при одноосном растяжении в условиях агрессивной водородосодержащей среды.

Материалы и методы исследования

Исследовались образцы биметаллического соединения, вырезанные из полосы, полученной по следующей схеме: между вставленными в изложницу листами плакирующего металла – 12Х18Н9Т – в качестве основного металла заливалась Ст3 ($T = 1500\text{ }^{\circ}\text{C}$) с последующей горячей прокаткой полученного трехслойного листа при $T = 1200\text{--}1400\text{ }^{\circ}\text{C}$. По внешнему краю образца с обеих сторон расположен плакирующий слой из стали 12Х18Н9Т толщиной $\approx 750\text{ мкм}$, в центре – основной металл $\approx 6.7\text{ мм}$ Ст3 [6–9].

Насыщение водородом исследуемого металла проводилось электролитическим методом в трехэлектродной электрохимической ячейке при постоянном контролируемом катодном потенциале в 1N растворе серной кислоты в течение 6 [14].

Механические испытания на одноосное растяжение проводились при $T = 300\text{ К}$ со скоростью деформации $6.67 \cdot 10^{-5}\text{ с}^{-1}$ на испытательной машине LFM-125 плоских образцов в исходном состоянии – 1 и после электролитического насыщения водородом – 2 (рис. 1).

Требования к методике исследования локализации пластического течения в деформируемых материалах являются ключевыми при поиске главных закономерностей пластического течения. Эти требования практически очевидны: методика

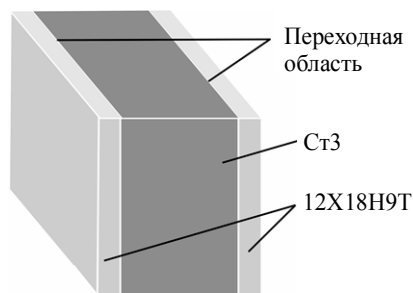


Рис. 1. Схематическое изображение образца биметаллического материала
Fig. 1. Schematic representation of a sample of bimetal material

должна сочетать точность измерения количественных характеристик процесса пластического течения на уровне разрешения оптического микроскопа ($\sim 10^{-6}$ м) с размером поля зрения порядка длины исследуемого образца ($\sim 10^{-1}$ м). Выполнение первого требования необходимо для обеспечения достаточной чувствительности прибора, а второго – продиктовано необходимостью наблюдения деформации образца в целом. Детальное исследование картин локализации пластического течения на макромасштабном уровне проводилось с использованием универсального измерительного комплекса ALMEC-tv для цифровой регистрации полей векторов смещений и компонент тензора пластической дисторсии [15]. При использовании этого комплекса растягиваемый образец освещается когерентным светом полупроводникового лазера с длиной волны 635 нм и мощностью 15 мВт. Полученные изображения деформируемого образца с наложенными спекл-картинами регистрируются цифровой видеокамерой PixeLink PL-B781. Для каждой точки изображения формируется последовательность отсчетов, характеризующая временной ход ее яркости, вычисляются дисперсия и математическое ожидание яркости мерцания спеклов, которые используются для отображения зон локализации деформации. Используя такую методику, удастся *in situ* регистрировать области, в которых при заданном приросте общего удлинения образца локализуется деформация материала.

Экспериментальные результаты

Изучение микроструктуры методами оптической металлографии позволило выявить 3 основные области материала: основной материала Ст3, переходную область и плакирующий слой материала из аустенитной нержавеющей стали 12X18H9T (рис. 2).

Из рис. 2 видно, что в трехслойном образце после прокатки границы раздела разнородных материалов четкие и тонкие, поры и неметаллические включения отсутствуют, что свидетельствует о сплошности и высоком качестве соединения. В стали Ст3 основной фазой является феррит, а в стали 12X18H9T – аустенит. Структура основного металла (стали Ст3) на расстоянии ≈ 2 мм от границы соединения предоставляет собой матрицу феррита с колониями перлита, что является типично для низкоуглеродистой стали. На расстоянии около 200 мкм от границы соединения обнаружена область частичного обезуглероживания, которая является переходной от структуры основного металла к ферритной структуре. По границе соединения металлов со стороны стали Ст3 образовался обезуглероженный

слой, состоящий полностью из зерен феррита. В зоне частичного обезуглероживания стали Ст3 по границам ферритных зерен выявлены отдельные включения и прослойки перлита.

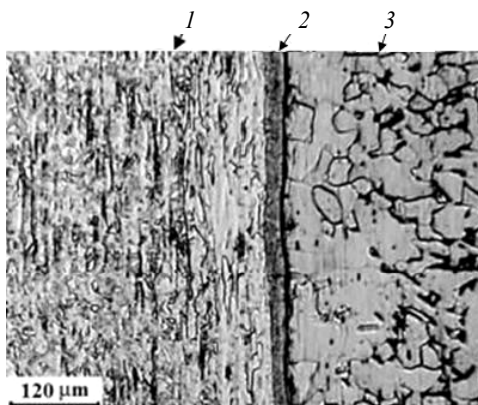


Рис. 2. Оптическая металлография биметалла: 1 – область плакирующего слоя металла 12X18H9T; 2 – переходная область (зона соединения); 3 – область основного металла Ст3

Fig. 2. Optical metallography of bimetal: 1, area of the cladding layer of 12X18H9T (12H18N9T); 2, transition area (interface); and 3, area of the basic metal Ст3 (St3)

В результате проведения механических испытаний были получены деформационные кривые биметалла в исходном состоянии 1 и состоянии 2 после насыщения водородом в течение 6 ч (рис. 3).

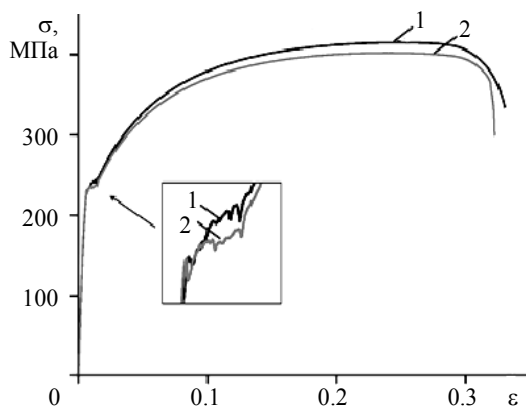


Рис. 3. Диаграмма нагружения биметалла в исходном состоянии 1 и состоянии 2 после электролитического насыщения водородом в течении 6 часов

Fig. 3. Loading diagram for bimetal (1) in the initial state and (2) after 6-hour electrolytic hydrogenation

Деформационные кривые в состояниях 1 и 2 можно отнести к диаграммам общего типа, которые принято описывать параболической функцией вида

$$\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon^n, \quad (1)$$

где K – коэффициент деформационного упрочнения; $n \leq 1$ – показатель деформационного упрочнения.

Анализ стадийности деформационных кривых в состояниях 1 и 2 позволил выделить следующие стадии пластического течения: зуб и площадку текучести, стадию линейного деформационного упрочнения, стадию параболического деформационного упрочнения и стадию предразрушения. В результате электролитического насыщения водородом в течение 6 ч произошло незначительное уменьшение прочности и увеличение пластичности биметалла.

Использование метода корреляции цифровых спекл-изображений позволило на всех стадиях деформационного упрочнения для образцов состояний 1 и 2 рассмотреть эволюцию картин локализации пластической деформации во внешнем слое нержавеющей стали 12Х18Н9Т, основном слое низкоуглеродистой стали Ст3 и переходном слое (зоне соединения) материала. Прирост деформации растяжения между отдельными кадрами составил 0.002. Контраст для изображений обычно выбирается таким образом, чтобы темные области соответствовали деформирующимся в данный момент объемам, а светлые указывали на пассивные объемы, где пластического течения в момент наблюдения нет. Интенсивность окраски пропорциональна амплитуде локальной деформации (рис. 4).

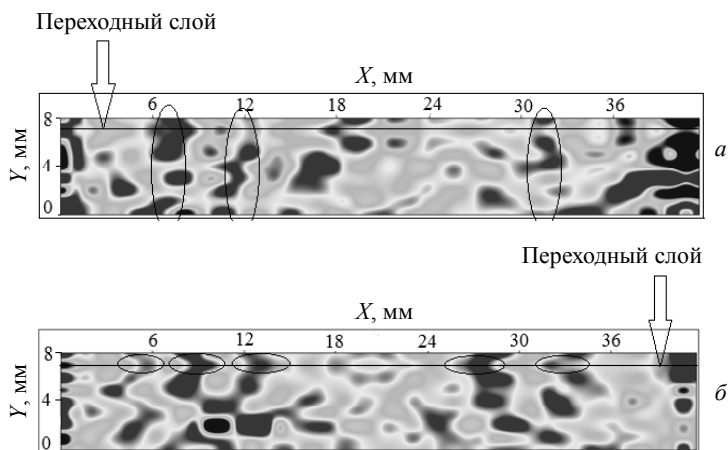


Рис. 4. Картина распространения фронтов локализации пластической деформации для материала в состоянии 2, при общей деформации: a – 1,7 %, b – 2,6 %

Fig. 4. Pattern of the propagation of localized bands of plastic deformation for material in the state 2 at the total deformation ε of (a) 1.7 % and (b) 2.6 %

Анализ картин локализации пластической деформации биметалла в состоянии (1) и (2) показал, что на площадки текучести в области внешнего и переходного слоя материала формируется общая система подвижных очагов локализации пластической деформации (рис. 4, a). Далее, в процессе деформирования от них, в области переходного слоя на глубине 0,7 мм от поверхности, отделяются одиноч-

ные фронты, которые продолжают согласованное движение вдоль оси растяжения материала, но уже с другими скоростями, в отличие от очагов локализации деформации слоя нержавеющей стали (рис. 4, б).

На стадии линейного деформационного упрочнения для состояний 1 и 2 помимо описанной выше картины в области основного материала Ст3 формируются четыре эквидистантно расположенных подвижных очага локализации пластической деформации. Однако подвижные очаги в нержавеющей стали 12Х18Н9Т и очаги пластической деформации в переходной области материала препятствуют их распространению с постоянной скоростью по длине образца.

На стадии параболического деформационного упрочнения при общей деформации $\varepsilon = 12\%$ для состояния 1 и $\varepsilon = 13\%$ для состояния 2 формируются стационарные системы эквидистантно расположенных очагов локализации пластической деформации.

На стадии предразрушения в состоянии 1 и 2 неподвижные ранее очаги локализации пластической деформации начинают согласованное движение с тенденцией к их слиянию к высокоамплитудному максимуму локальных деформаций, который формируется в том месте образца, где происходит разрушение (рис. 5).

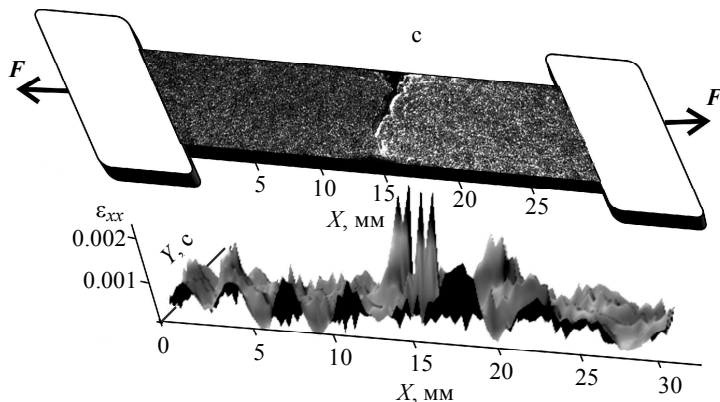


Рис. 5. Образование трещины образца в состоянии 2 и распределение локальных удлинений на стадии предразрушения

Fig. 5. Formation of a sample crack in the state 2 and distribution of the local extensions at the prefracture stage

Характер разрушения материала в двух состояниях 1 и 2 отличен друг от друга. В состоянии 2 разрушение имеет более вязкий характер. В исходном состоянии 1 в области макроконцентратора напряжений на стадии образования шейки при общей деформации $\varepsilon = 32,6\%$ формируются две макрополосы локализованной пластической деформации, распространяющиеся по направлениям максимальных касательных напряжений, образуя магистральную трещину. Магистральная трещина зарождается в области защитного слоя биметалла и быстро распространяется через все сечение образца (рис. 6, а).

В состоянии 2 после электролитического наводороживания биметалла, при общей деформации $\varepsilon = 31,7\%$, формируется одна макрополоса локализованной пластической деформации (рис. 6, б) и наблюдается повышенное сопротивление разрушению по сравнению с состоянием 1. В процессе движения основная магистральная трещина разделяется на ряд отдельных мелких трещин, которые

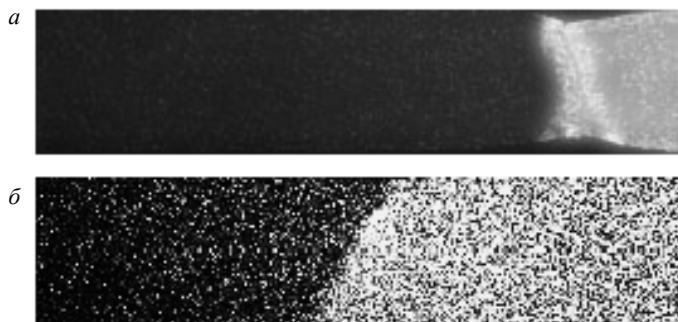


Рис. 6. Визуализация полос локализованной пластической деформации на стадии предразрушения: *a* – в состоянии 1 при общей деформации $\varepsilon = 32,6 \%$, *б* – в состоянии 2 при общей деформации $\varepsilon = 31,7 \%$

Fig. 6. Visualization of the localized bands of plastic deformation at the prefracture stage: (*a*) in the state 1 at the total deformation of $\varepsilon = 32.6 \%$ and (*b*) in the state 2 at the total deformation of $\varepsilon = 31.7 \%$

уменьшают скорость распространения магистральной трещины и увеличивают вязкость разрушения материала. Магистральная трещина имеет зигзагообразный вид и распространяется рывками, меняя свое положение и направление распространения в процессе движения. Следует отметить, что траектория трещины обусловлена расположением зон локализации пластической деформации на ранних стадиях пластического течения, которые являются предвестниками будущего разрушения.

Заключение

В настоящей работе установлено, что при растяжении биметаллических образцов Ст3+12Х18Н9Т как в исходном состоянии поставки 1, так и в состоянии 2 после электролитического наводороживания в течение 6 ч на всем протяжении пластического течения в основном, защитном и переходном слое биметалла формируются и эволюционируют очаги локализации пластической деформации. Установлено, что в исходном состоянии 1 в биметалле со стороны стали Ст3, образуется обезуглероженный слой, а со стороны стали 12Х18Н9Т – науглероженный слой. Процесс разрушения биметалла в состояниях 1 и 2 обусловлен формированием концентраторов напряжений в области переходного слоя биметалла. Картины распределения локальных удлинений на стадии предразрушения в виде высокоамплитудного максимума локальных деформаций позволяют за 5 % до предела прочности определить место зарождения и распространения трещины. Характер разрушения образцов после легирования водородом имеет более вязкий характер по сравнению с исходным материалом, что свидетельствует о том, что в данном случае атомы водорода способствует увеличению пластичности слоя нержавеющей аустенитной стали рассматриваемого биметалла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mudrock R.N., Lebyodkin M.A., Kurath P., et al. Strain-rate fluctuations during macroscopically uniform deformation of a solution-strengthened alloy // Scr. Mater. 2011. V. 65. P. 1093–1096. DOI: 1093–95. 10.1016/j.scriptamat.2011.09.025.

2. Tretiakova T.V., Vildeman V.E. Relay-race deformation mechanism during uniaxial tension of cylindrical samples of carbon steel: using digital image correlation technique // *Fratt. Integ. Strut.* 2013. V. 24. P. 1–6. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.24.01.
3. Баранникова С.А. Локализация деформации растяжения в монокристаллах легированного γ -Fe с углеродом // *ЖТФ*. 2000. Т. 70. С. 138–140.
4. Zuev L.B., Barannikova S.A. Experimental study of plastic flow macro-scale localization process: pattern, propagation rate, dispersion // *Int. J. Mec. Sci.* 2014. V. 88. P. 1–7. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.06.012.
5. Баранникова С.А. Дисперсия волн локализации пластической деформации // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 8. С. 75–80.
6. Sallam H.E.M., El-Aziz Kh. Abd., El-Raouf H. Abd., et al. Failure analysis and flexural behavior of high chromium white cast iron and AISI4140 Steel bimetal beams // *Mater. Des.* 2013. V. 52. P. 974–980.
7. Chen I., Yang Z., Jhan B., Xia J., et al. Clad metals, roll bonding and their applications for SOFC interconnects // *J. Power Sources*. 2005. V. 152. P. 40–45. DOI: 10.1016/j.jpowsour.2005.01.055.
8. Jin J.Y., Hong S.I. Effect of heat treatment on tensile deformation characteristics and properties of Al 3003/STS 439 clad composite // *Mater. Sci. Eng.* 2014. P. 1–8. DOI: 10.1016/j.msea.2013.12.019.
9. Lee J.E., Bae D.H., Chung W.S., et al. Effects of annealing on the mechanical and interface properties of stainless steel/aluminum/copper clad-metal sheets // *J. Mater. Process. Technol.* 2007. V. 187–188. P. 546–549. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2006.11.121.
10. Ramunni V.P., Paiva Coelho T. De., de Miranda P.E.V. Interaction of hydrogen with the microstructure of low-carbon steel // *Mater. Sci. Eng.* 2006. V. A 435–436. P. 504–514. DOI: 10.1016/j.msea.2006.07.089.
11. Sofronis P., Liang Y., Aravas N. Hydrogen induced shear localization of plastic flow in metals and alloys // *Eur. J. Mech. A: Solids*. 2001. V. 20. P. 857–872. DOI: 10.1016/S0997-7538(01)01179-2.
12. Robertson I.M. The effect of hydrogen on dislocation dynamics // *Eng. Frac. Mech.* 2001. V. 68. P. 671–692. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00011-X.
13. Yagodzinskyy Y., Saukkonen T., Kilpeläinen S., et al. Effect of hydrogen on plastic strain localization in single crystals of austenitic stainless steel // *Scripta Mater.* 2010. V. 62. P. 155–158. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2009.10.005.
14. Баранникова С.А., Надеждин М.В., Мельничук В.А., Зуев Л.Б. О локализации пластической деформации растяжения монокристаллов аустенитной стали, электролитически насыщенных водородом // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 37. С. 9–17.
15. Zuev L.B., Gorbatenko V.V., Pavlichev K.V. Elaboration of speckle photography techniques for plastic flow analyses // *Measur. Sci. & Technol.* 2010. V. 21(054014). P. 1–5.

Статья поступила 29.01.2018 г.

Barannikova S.A., Li Yu.V., Zuev L.B. (2018) INVESTIGATION OF A PLASTIC DEFORMATION INHOMOGENEITY AND FAILURE OF THE CORROSION-RESISTANT BIMETAL UNDER UNIAXIAL TENSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 25–34

DOI 10.17223/19988621/52/3

This paper is aimed to study particularities of the plastic deformation and fracture of bimetal composition based on the compound of carbon steel and high-chromium stainless steel exposed to a uniaxial tension in aggressive hydrogen-containing medium.

The investigation of microstructure in a region of bimetal compounds is carried out by optical microscopy. A detailed macro-scale study of the patterns of plastic flow localization was carried out using the DIC method.

Bimetal plastic deformation arises from the nucleation of stress concentration in the bimetal transition area. In the basic layer, localized deformation areas propagate along a bimetal axis with different velocity. Cladding layer does not suppress the formation of localized deformation areas in the basic layer. As a result of 6-hour electrolytic hydrogenation, the strength of bimetal has decreased insignificantly while its plasticity has increased. The fracture of the samples after hydrogenation is more ductile as compared with that of primary material.

In this study, it was found that the localized plastic deformation areas are formed and evolve during the tension of 301 bimetal samples as in the initial state 1 and after 6-hour electrolytic hydrogenation throughout the plastic flow in the primary, protective, and transitional layers of bimetal.

Keywords: deformation localization, plastic flow, digital image correlation, hydrogen embrittlement, steel.

BARANNIKOVA Svetlana Aleksandrovna (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS (ISPMS), National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bsa@ispms.tsc.ru

LI Yuliya Vladimirovna (Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS (ISPMS), Tomsk, Russian Federation). E-mail: jul2207@mail.ru

ZUEV Lev Borisovich (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS (ISPMS), National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lbz@ispms.ru

REFERENCES

1. Mudrock R.N., Lebyodkin M.A., Kurath P., et al. (2011) Strain-rate fluctuations during macroscopically uniform deformation of a solution-strengthened alloy. *Scr. Mater.* 65(12). pp. 1093–1096. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2011.09.025.
2. Tretiakova T.V., Vildeman V.E. (2013) Relay-race deformation mechanism during uniaxial tension of cylindrical samples of carbon steel: using digital image correlation technique. *Fratt. Integ. Strut.* 24. pp. 1–6. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.24.01.
3. Barannikova S.A. (2000) Localization of stretching strain in doped carbon gamma-Fe single crystals. *Tech. Phys.* 45(10). pp. 1368–1370. DOI: 10.1134/1.1318982.
4. Zuev L.B., Barannikova S.A. (2014) Experimental study of plastic flow macro-scale localization process: pattern, propagation rate, dispersion. *Int. J. Mec. Sci.* 88. pp. 1–7. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.06.012.
5. Barannikova S.A. (2004) Dispersion of the plastic strain localization waves. *Tech. Phys. Lett.* 30(4). pp. 338–340. DOI: 10.1134/1.1748618.
6. Sallam H.E.M., Abd El-Aziz Kh., Abd El-Raouf H., et al. (2013) Failure analysis and flexural behavior of high chromium white cast iron and AISI4140 Steel bimetal beams. *Mater. & Des.* 52. pp. 974–980. DOI: 10.1016/j.matdes.2013.06.045.
7. Chen I., Yang Z., Jhan B., Xia J., et al. (2005) Clad metals, roll bonding and their applications for SOFC interconnects. *J. Power Sources.* 152. pp. 40–45. DOI: 10.1016/j.jpowsour.2005.01.055.
8. Jin J.Y., Hong S.I. (2014) Effect of heat treatment on tensile deformation characteristics and properties of Al3003/STS439 clad composite. *Mater. Sci. & Eng. A* 596. pp. 1–8. DOI: 10.1016/j.msea.2013.12.019.
9. Lee J.E., Bae D.H., Chung W.S., et al. (2007) Effects of annealing on the mechanical and interface properties of stainless steel/aluminum/copper clad-metal sheets. *J. Mater. Process. Technol.* 187–188. pp. 546–549. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2006.11.121.
10. Ramunni V.P., de Paiva Coelho T., de Miranda P.E.V. (2006) Interaction of hydrogen with the microstructure of low-carbon steel. *Mater. Sci. Eng. A* 435–436. pp. 504–514. DOI: 10.1016/j.msea.2006.07.089.

11. Sofronis P., Liang Y., Aravas N. (2001) Hydrogen induced shear localization of plastic flow in metals and alloys. *Eur. J. Mech. A: Solids*. 20(6). pp. 857–872. DOI: 10.1016/S0997-7538(01)01179-2.
12. Robertson I.M. (2001) The effect of hydrogen on dislocation dynamics. *Eng. Frac. Mech.* 68(6). pp. 671–692. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00011-X.
13. Yagodzinsky Y., Saukkonen T., Kilpeläinen S., et al. (2010) Effect of hydrogen on plastic strain localization in single crystals of austenitic stainless steel. *Scripta Mater.* 62(3). pp. 155–158. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2009.10.005.
14. Barannikova S.A., Nadezhkin M.V., Mel'nichuk V.A., et al. (2011) Tensile plastic strain localization in single crystals of austenite steel electrolytically saturated with hydrogen. *Tech. Phys. Let.* 37. pp. 793–796. DOI: 10.1134/S1063785011090057.
15. Zuev L.B., Gorbatenko V.V., Pavlichev K.V. (2010) Elaboration of speckle photography techniques for plastic flow analyses. *Measur. Sci. & Technol.* 21(5). pp. 1–5. DOI: 10.1088/0957-0233/21/5/054014.

УДК 531.55
DOI 10.17223/19988621/52/4

В.И. Биматов, И.А. Бородачева, А.Н. Лавронович, Н.В. Савкина

ГИСТЕРЕЗИС АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Исследования направлены на решение задачи влияния гистерезиса аэродинамических характеристик на кинематические параметры движения осесимметричных тел. Показано, что наличие гистерезиса в коэффициенте момента тангажа приводит к «раскачке» амплитуды колебаний углов атаки

Ключевые слова: *аэродинамические характеристики, гистерезис, перестройка обтекания, отрывные течения, динамическая устойчивость, кинематические параметры движения.*

Среди явлений нестационарной аэродинамики отчетливо выделяются гистерезисные процессы, привлекающие интерес с точки зрения как фундаментального исследования, так и практики.

Для современных летательных аппаратов (ЛА) изменение аэродинамических сил и моментов, связанное с нестационарностью и отрывами потоков обтекающего газа, могут оказаться весьма существенными и значительно повлиять на характер движения. Вследствие этого, интерес к изучению нелинейных аэродинамических характеристик и отрывных течений значительно возрос из-за потребности практики в соответствующих данных. Известно, что для некоторых тел аэродинамические характеристики при определенных числах Маха неоднозначно зависят от угла атаки. Это связано с определенными гистерезисными явлениями при перестройке структуры обтекания таких тел. При наличии гистерезиса в перестройке структуры обтекания значения аэродинамических характеристик зависят не только от величины угла атаки, но и от направления его изменения. Несмотря на то, что само явление аэродинамического гистерезиса известно давно с точки зрения приложения к динамике, оно еще недостаточно изучено.

Гистерезис характеристики $m_z(\alpha)$ обуславливает при колебаниях тела появление на каждом полуцикле колебаний дополнительной энергии. В зависимости от ее знака, что определяется реализуемой схемой течения, будет происходить или «раскачка», или затухание колебаний. Анализ этого явления показывает, что наличие в характеристике $m_z(\alpha)$ даже небольшой по величине гистерезисной петли может привести к «раскачке» колебаний и что неучет влияния гистерезиса ведет к качественно неправильной оценке аэродинамических свойств летательных аппаратов.

Наиболее ярко аэродинамический гистерезис проявляется при трансзвуковых скоростях обтекания тел с изломами образующих (комбинации цилиндрических и конических поверхностей, тела вращения с сегментальными и торцевыми затуплениями, со стержневыми надстройками), когда происходит изменение хотя бы

одного из следующих параметров: скорости невозмущенного потока, угла атаки или числа Рейнольдса [1,2].

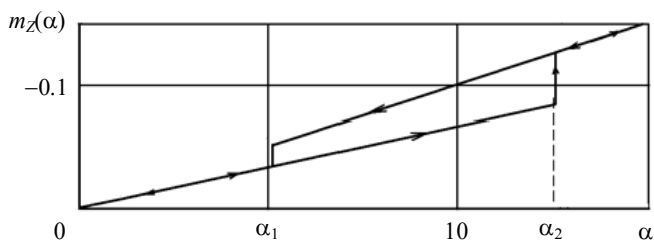


Рис. 1. Гистерезис в коэффициенте момента тангажа

Fig. 1. Hysteresis in the torque moment ratio

Неоднозначность структур течения в диапазоне сверхзвуковых скоростей проявляется также с изменением угла атаки цилиндрических тел. На рис. 1 показана зависимость коэффициента момента тангажа $m_z(\alpha)$, полученная экспериментально при прямом увеличении и обратном уменьшении угла атаки тела цилиндрической формы с сегментальным затуплением, обтекаемого сверхзвуковым потоком воздуха ($M_\infty = 1,1$) [3]. Для нулевых и малых значений α имеет место структура с головным скачком уплотнения передней локальной зоны отрыва и скачком вторичного сжатия потока. Увеличение угла атаки до $12,5^\circ$ незначительно изменяет моментную характеристику, структура обтекания остается прежней. При достижении некоторого критического значения угла атаки α_2 , равного для рассматриваемого случая обтекания $12,5^\circ$, происходит резкое изменение коэффициента момента m_z , что обусловлено почти мгновенной перестройкой структуры обтекания. Объясняется это следующими причинами. Повышенное давление с наветренной стороны распространяется на всю цилиндрическую поверхность, включая и подветренную. Для углов атаки $\alpha < \alpha_2$ распространяющиеся возмущения не способны вызвать отрыв с подветренной стороны. Если $\alpha = \alpha_2$, то происходит слияние локальной отрывной зоны с отрывом на подветренной поверхности. За счет существования кольцевого отрывного течения возмущения распространяются на наветренную поверхность, что приводит к образованию развитого отрывного течения вокруг всей поверхности. Скачок вторичного сжатия становится несимметричным и с наветренной стороны прижимается к внешней границе области отрыва. Дальнейшее увеличение угла атаки $\alpha > \alpha_2$ изменяет лишь геометрические параметры зон отрыва.

При уменьшении угла атаки зависимость коэффициента момента $m_z(\alpha)$ в диапазоне $\alpha \geq \alpha_1$ остается непрерывной. До этих же значений угла атаки сохраняется неизменным и тип структуры обтекания. Угол α_1 является вторым критическим углом атаки, приводящим к обратной перестройке отрывного обтекания на структуру течения с локальными зонами отрыва. Характеристика коэффициента момента $m_z(\alpha)$ изменяется скачком, а с дальнейшим уменьшением угла атаки до нуля изменяется непрерывно. Двухзначность аэродинамического момента проявляется при углах атаки $\alpha = 5 - 12,5^\circ$.

Математическая модель и результаты расчета кинематических параметров движения летательного аппарата

Влияние гистерезиса на параметры движения осесимметричного ЛА исследовались с использованием математической модели движения твердого тела [4]. Кинематические уравнения движения центра масс записаны в стартовой системе координат; динамические уравнения движения центра масс – в траекторной системе координат; уравнения вращательного движения ЛА – в связанной системе координат.

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta \cos \Psi, \quad x(0) = x_0,$$

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \theta, \quad y(0) = y_0,$$

$$\frac{dz}{dt} = -V \cos \theta \sin \Psi, \quad z(0) = z_0,$$

$$\frac{dV}{dt} = -K_1 V^2 C_x - g \sin \theta, \quad V(0) = V_0,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = K_1 V C_y - g \cos \theta, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = K_1 V C_z / \cos \theta, \quad \Psi(0) = \Psi_0,$$

$$\frac{d\omega_{z1}}{dt} = -K_2 m_z, \quad \omega_{z1}(0) = \omega_{z10},$$

$$\frac{d\omega_{y1}}{dt} = -K_2 m_y, \quad \omega_{y1}(0) = \omega_{y10},$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{z1}, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0.$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_{y1}}{\cos \theta}, \quad \psi(0) = \psi_0,$$

$$\sin \vartheta = \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha,$$

$$\sin \psi = \sin \Psi \cos \beta + \cos \Psi \sin \beta \cos \theta.$$

Здесь $K_1 = \rho S / 2m$, $K_2 = \rho S l / 2J_{z1}$, $C_x = C_{x0} + C_x^{\delta^2} \delta^2$, $C_y = C_y^\alpha \alpha$, $C_z = C_z^\beta \beta$, $m_y + m_y^\beta \beta$, $m_z + m_z^\alpha \alpha$. Обозначения приведены в конце текста.

Испытания проводились при следующих значениях массово-геометрических и динамических парметрах ЛА:

$$m = 0,6 \text{ кг}, d = 0,08 \text{ м}, l = 0,27 \text{ м}, V_0 = 1000 \text{ м/с}, J_{z1} = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$C_{x0} = 0,18, C_x^{\alpha^2} = 5, C_y^\alpha = 1,8, (m_z^\alpha)_1 = 0,05, (m_z^\alpha)_2 = 1,1,$$

$$\alpha_1 = 4^0, \alpha_2 = 10^0, m_z^{\omega_z} = 0,16.$$

На рис. 2 – 4 представлены расчеты кинематических параметров движения для однозначной зависимости $m_z(\alpha)$, а также для «гистерезисной» характеристики $m_z(\alpha)$.

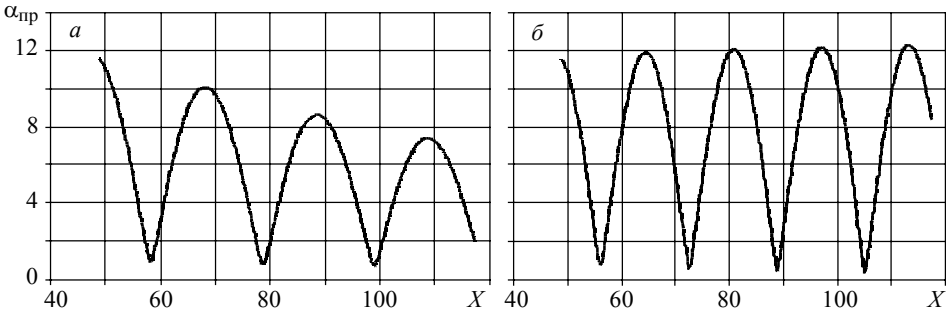


Рис. 2. Изменение пространственного угла атаки в случае отсутствия (а) и наличия (б) гистерезиса в коэффициенте момента тангажа $m_{\lambda}(\alpha)$
Fig. 2. The change in the spatial angle of attack in the absence (a) and the presence of (b) hysteresis in the pitch moment factor $m_{\lambda}(\alpha)$

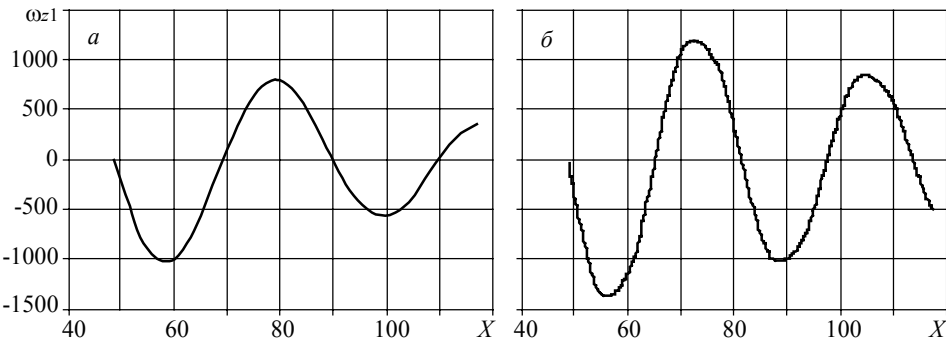


Рис. 3. Изменение угловой скорости $\omega_{z1}(x)$ в случае отсутствия (а) и наличия (б) гистерезиса в коэффициенте момента тангажа $m_{\lambda}(\alpha)$
Fig. 3. The change in the angular velocity $\omega_{z1}(x)$ in the absence (a) and the presence of (b) hysteresis in the pitch moment factor $m_{\lambda}(\alpha)$

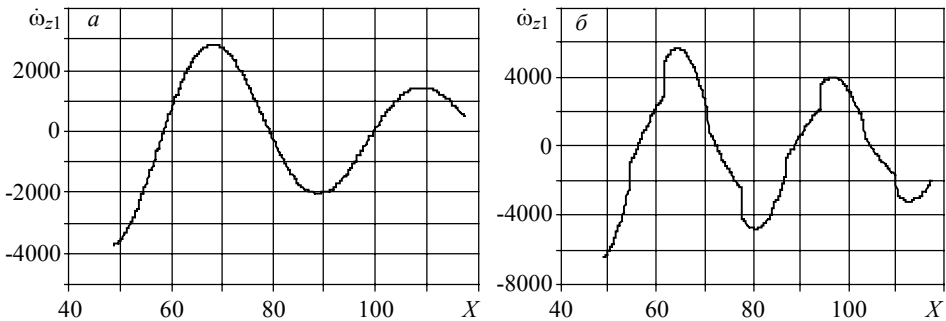


Рис. 4. Изменение производной угловой скорости $\dot{\omega}_{z1}(x)$ в случае отсутствия (а) и наличия (б) гистерезиса в коэффициенте момента тангажа $m_{\lambda}(\alpha)$
Fig.4. The change in the derivative of the angular velocity $\dot{\omega}_{z1}(x)$ in the absence (a) and the presence of (b) hysteresis in the pitch moment factor $m_{\lambda}(\alpha)$

Видно возрастание амплитуды пространственного угла атаки $\alpha_{\text{пр}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, то есть наблюдается явление антидемпфирования, хотя функция $m_z(\alpha)$ отрицательна во всем диапазоне изменения α .

В данном случае обычные методы обработки экспериментальных данных по определению АДХ m_z^α , становятся непригодными. Для создания рабочей методики определения характеристик продольной устойчивости с неоднозначностью необходимо не только более полное развитие физической теории вопроса, но и установление для кинематических параметров $\alpha_{\text{пр}}(x)$, $\omega_z(x)$, $\dot{\omega}_z(x)$ отличительных признаков, позволяющих выявить «гистерезисные» случаи, и, следовательно правильно организовать схему расчета.

Выводы

Представлено решение задачи влияния гистерезиса аэродинамических характеристик на кинематические параметры движения летательных аппаратов. Разработана физико-математическая модель для численного расчета параметров движения ЛА. Из анализа результатов можно заключить, что наличие гистерезиса в коэффициенте момента тангажа приводит к «раскачке» амплитуды колебаний углов атаки, а также, что одним из основных признаков гистерезиса m_z^α является анализ кривых $\dot{\omega}_z(x)$. «Гистерезисные» кривые $\dot{\omega}_z(x)$ по своему характеру резко отличаются от обычных. У «гистерезисной» кривой $\dot{\omega}_z(x)$ наблюдаются резкие изменения на небольших участках движения, чего нет в случае отсутствия гистерезиса. Эти скачки $\dot{\omega}_z(x)$ вызваны перестройкой структуры обтекания, а появление их при вполне определенных комбинациях значений углов α и угловых скоростей ω_z объясняется только наличием гистерезиса в перестройке структуры обтекания.

Список основных обозначений в уравнениях движения

x, y, z – оси лабораторной системы координат,

C_x, C_y, C_z – коэффициенты лобового сопротивления, подъемной и боковой силы,

m_z, m_y – коэффициенты момента тангажа и рыскания,

g – ускорение силы тяжести,

ρ – плотность воздуха,

m, l – масса и длина тела,

S – площадь миделя тела,

M – число Маха,

t – время,

V – модуль вектора скорости тела,

θ, Ψ – угол наклона траектории и курсовой угол,

Θ, ψ – угол тангажа и рыскания,

α, β – угол атаки и скольжения.

δ – пространственный угол атаки: $\cos \delta = \cos \alpha \cos \beta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Калугин В. Т. Аэродинамика отрывных течений. М.: Высшая школа, 1988. 351 с.
2. Коробов Я.П., Гужавин А.И. Гистерезис аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Обзор. М.: ЦНИИИТИ, 1982.
3. Гужавин А.И., Коробов Я.П. О гистерезисе сверхзвуковых отрывных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 116–125.
4. Биматов В.И. Обобщенный алгоритм решения обратной задачи траекторной баллистики // Изв. вузов. Физика. 2005. Т. 48. № 11. С. 30–36.

Статья поступила 15.02.2018 г.

Bimатов V.I., I.A. Borodacheva, A.N. Lavronovich, Savkina N.V. (2018) HYSTERESIS OF AERODYNAMIC CHARACTERISTICS AND ITS INFLUENCE ON THE MOTION PARAMETERS OF AXISYMMETRIC BODIES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 35–40

DOI 10.17223/19988621/52/4

There has been represented a problem solution of influence of hysteresis of aerodynamic characteristics on kinematic parameters of flying vehicle movement. A physico-mathematical model for numeric calculations of parameters of flying vehicle movements has been worked out. The outcome analysis gives a conclusion that presence of hysteresis in pitching moment coefficient leads to “swinging” the amplitude of oscillation of angle of attack, and also that one of the main features of hysteresis is analysis of angular accelerations diagram of rotational movement of body. “Hysteresis” curves of angular accelerations in their character differ markedly from ordinary curves. “Hysteresis” curve of angular accelerations has violent changes in small sections of movement, which do not appear in case of absence of hysteresis. This is generated by rearrangement of flow-around structure, and their appearance by well defined combinations of attack angles values and angular velocities of rotational movement of body can be explained only by presence of hysteresis in rearrangement of flow-around structure.

Keywords: aerodynamic characteristics, hysteresis, rearrangement of flow-around, separated flows, dynamical stability, kinematic parameters of movement.

BIMATOV Vladimir Ismagilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vbimатов@mail.ru

BORODACHEVA Irina Aleksandrovna (Aspirant, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: i.revenko@mail.ru

LAVRONOVICH Aleksey Nikolaevich (Aspirant, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vbimатов@mail.ru

SAVKINA Nadejda Valeryevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Krasnov N.F., Koshevoy V.N., Kalugin V.T. (1988) *Aerodinamika otryvnyh techeniy* [Aerodynamics of detachable sections]. Moscow: Vysshaya shkola.
2. Korobov Ya.P., Guzhavin A.I. (1982) *Gisterezis aerodinamicheskikh harakteristik letatelnykh apparatov* [Hysteresis of aerodynamic characteristics of flying vehicles]. Moscow: CNIINTI.
3. Guzhavin A.I., Korobov Ya.P. (1984) *O gisterezise sverkhzvukovykh otryvnykh techeniy* [About hysteresis of supersonic separation flow]. *Izv. AN SSSR. MZhG.* 2. pp. 116–125.
4. Bimатов V.I. (2005) *Obobshenniy algoritm resheniya obratnoy zadachi traektornoy ballistiki* [Generalized algorithm of solving inverse problem of trajectory ballistics]. *Izv. vuzov. Fizika.* 11. pp. 30–33.

УДК 532.135

DOI 10.17223/19988621/52/5

Е.И. Борзенко, Г.Р. Шрагер

УСТАНОВИВШЕЕСЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ/ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КАНАЛЕ¹

Представлены результаты исследования одномерного установившегося течения степенной жидкости в круглой трубе / плоском канале с учетом вязкой диссипации и зависимости консистенции среды от температуры. Численные решения сформулированных задач получены с использованием конечно-разностного метода. Проведены параметрические исследования. Получены характерные распределения скорости, температуры, вязкости и диссипативной функции в сечении канала/трубы при разных значениях определяющих параметров. Численно реализован алгоритм определения критических значений параметра задачи, разделяющих области существования и отсутствия устойчивого стационарного решения. Получены критические значения параметра, выше которых реализуется режим гидродинамического теплового взрыва. Построены зависимости параметра от показателя нелинейности степенного реологического закона, выделяющие область устойчивых стационарных решений. Результаты расчетов согласуются с аналитическим решением.

Ключевые слова: *степенная жидкость, вязкая диссипация, установившееся течение, метод конечных разностей, гидродинамический тепловой взрыв.*

Ламинарные течения неньютоновской жидкости в плоских каналах и в круглых трубах реализуются во многих технических приложениях. В частности, при переработке полимерных материалов в текучем состоянии осуществляются течения между параллельными плоскостями и в трубах кругового сечения в элементах технологической оснастки. В общем случае течения вязкой жидкости являются неизотермическими, что обуславливается диссипацией механической энергии, возможными химическими источниками тепла, различными условиями теплообмена на границах области, физические характеристики среды при этом зависят от температуры. Решение задач о неизотермических течениях неньютоновских жидкостей с учетом диссипации механической энергии и зависимости реологических характеристик от температуры связано со значительными трудностями. Поэтому в большинстве случаев теоретические исследования течения и теплообмена при переменных физических характеристиках жидкости выполнены приближенными или численными методами при использовании ряда упрощающих допущений. Математические постановки задач о стационарных неизотермических течениях вязкой среды в одномерном приближении допускают получение решений в аналитической форме. Первые работы, в которых представлены аналитические решения таких задач, появились в середине прошлого столетия [1–4]. Устойчивость получаемых стационарных решений и связанное с этим явление гидродинамического теплового взрыва обсуждаются в работах [5, 6]. Результаты исследований

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-00412а) и гранта Президента РФ (МК-3085.2018.1)

подобных течений описываются также в соответствующих монографиях, например [7–9]. Математические аспекты устойчивости получаемых стационарных решений рассматриваются в книге [10]. Следует отметить, что обсуждаемые одномерные задачи до сих пор привлекают внимание исследователей и появляются публикации, содержащие решения для течений с более сложной реологией, различными условиями теплообмена на границах с применением технологий аналитического либо численного анализа [11, 12]. Аналитические решения описывают течения в определенных условиях. Кроме того они используются для тестирования численных решений, а также в качестве начальных и граничных условий для задач в более общей постановке, возникающих, например, при моделировании транспорта жидкости в каналах сложной геометрии, процессов экструзии и литья под давлением, реализуемых в технологии переработки полимеров [13–16]. Форма аналитических решений рассматриваемых задач зависит от типа граничных условий и вида функциональной зависимости реологических характеристик от температуры. В этой связи в случае использования распределений скорости и температуры для одномерного стационарного течения в качестве граничных условий для полной постановки задачи, например на входной границе области решения, часто требуется модификация существующих либо получение новых аналитических решений, соответствующих условиям общей задачи. С другой стороны несложно получить численное решение одномерной задачи и, можно численную процедуру нахождения граничных значений искомых функций в одномерном приближении включать в общий вычислительный алгоритм. В большей степени именно с этой целью в работе рассматриваются одномерные неизотермические стационарные течения степенной жидкости и предлагается численный алгоритм их исследования.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся течение неньютоновской несжимаемой жидкости в плоском/осесимметричном канале под действием заданного перепада давления с учетом вязкой диссипации. Реология жидкости описывается степенным законом Оствальда – де Вилля с экспоненциальной зависимостью консистенции от температуры. Течение предполагается ламинарным и одномерным. Используемые системы координат представлены на рис. 1.

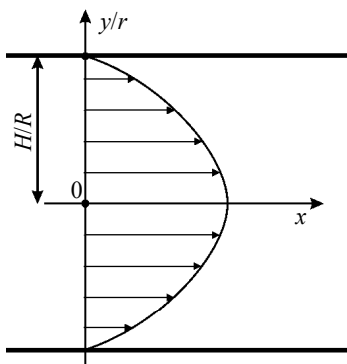


Рис. 1. Система координат

Fig. 1. Coordinate system

Течение описывается уравнениями движения и теплопереноса, которые с учетом сделанных допущений запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) записаны для плоского канала, (2) – для круглой трубы. Здесь v – скорость, T – температура, y и r – поперечная и радиальная координаты декартовой и цилиндрической систем координат соответственно, $\partial p / \partial x$ – продольная составляющая градиента давления, λ – коэффициент теплопроводности.

Система (1) или (2) замыкается реологическим законом, согласно которому эффективная вязкость η определяется выражением

$$\eta(T, \dot{\gamma}) = k_0 e^{-\beta(T-T_0)} |\dot{\gamma}|^{n-1}.$$

где $\dot{\gamma}$ – скорость сдвига, k_0 – консистенция при температуре T_0 , β – константа, n – степень нелинейности жидкости. Граничные условия записываются следующим образом:

$$y = 0: \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dT}{dy} = 0; \quad y = H: v = 0, \quad T = T_1;$$

$$r = 0: \frac{dv}{dr} = 0, \quad \frac{dT}{dr} = 0; \quad r = R: v = 0, \quad T = T_1.$$

Запишем системы уравнений (1), (2) в безразмерных переменных

$$\frac{1}{\zeta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^\alpha \eta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = \delta, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\zeta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + \alpha \eta \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 = 0,$$

где ζ – безразмерная координата ($\zeta = y/H$ для плоского канала, $\zeta = r/R$ для цилиндрической трубы), u , θ – безразмерные скорость и температура соответственно,

$\alpha = \frac{\beta k_1 U^{n+1}}{\lambda L^{n-1}}$, $\delta = \frac{L}{k_1} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{L}{U} \right)^n$ – безразмерный перепад давления на единицу длины,

ны, $k_1 = k_0 \exp[-\beta(T_1 - T_0)]$ – консистенция среды при температуре стенки. Параметр α определяет геометрию области течения: $\alpha = 0$ соответствует плоскому каналу ($L = H$), $\alpha = 1$ – цилиндрической трубе ($L = R$). В качестве масштаба обезразмеривания скорости выбрана величина среднерасходной скорости U . Для безразмерной температуры используется выражение $\theta = \beta(T - T_1)$. Безразмерная эффективная вязкость определяется по формуле

$$\eta = e^{-\theta} \left| \frac{du}{d\zeta} \right|^{n-1}. \quad (4)$$

Граничные условия принимают вид

$$\zeta = 0: \frac{du}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = 0; \quad (5)$$

$$\zeta = 1: u = 0, \quad \theta = 0.$$

Величина δ выбирается такой, чтобы объемный расход жидкости через единицу площади равнялся единице

$$2^\alpha \int_0^1 u \zeta^\alpha d\zeta = 1. \quad (6)$$

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию профилей скорости и температуры, удовлетворяющих системе уравнений (3), (4), условиям (5), (6).

Метод расчета

Сформулированная задача решается численно. В области решения строится расчетная сетка, представленная на рис. 2. В узлах сетки с целыми индексами рассчитывается скорость, с дробными – вязкость и температура.

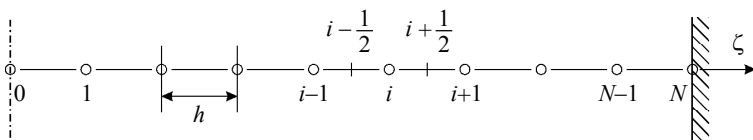


Рис. 2. Расчетная сетка
Fig. 2. Computational grid

Конечно-разностные аналоги системы (3) записываются в форме, используемой для реализации метода прогонки [17]:

$$\begin{aligned} \zeta_{i+0.5}^\alpha \eta_{i+0.5} u_{i+1} - (\zeta_{i+0.5}^\alpha \eta_{i+0.5} + \zeta_{i-0.5}^\alpha \eta_{i-0.5}) u_i + \zeta_{i-0.5}^\alpha \eta_{i-0.5} u_{i-1} &= \delta h^2 \zeta_i^\alpha, \\ \zeta_{i+1}^\alpha \theta_{i+1.5} - (\zeta_{i+1}^\alpha + \zeta_i^\alpha) \theta_{i+0.5} + \zeta_i^\alpha \theta_{i-0.5} + \alpha \eta_{i+0.5} (u_{i+1} - u_i)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение (4) и граничные условия (5) в разностном представлении принимают вид

$$\begin{aligned} \eta_{i+0.5} &= e^{-\theta_{i+0.5}} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right|^{n-1}; \\ u_0 &= u_1 - \frac{0.5 \delta h^2}{(1 + \alpha) \eta_{0.5}}, \quad \theta_{0.5} = \theta_{-0.5}; \\ u_N &= 0, \quad \theta_{N+0.5} = -\theta_{N-0.5}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выбранная расчетная сетка удобна для стыковки с разнесенной расчетной сеткой, используемой в методе контрольного объема для решения двумерных задач [18]. Разностные аналоги (7), (8) аппроксимируют дифференциальные уравнения (3), зависимость (4) и условия (5) со вторым порядком точности. Полученные системы алгебраических уравнений (7) решаются методом прогонки [17]. Совместное решение систем разностных уравнений (7) для получения стационарных полей скорости и температуры обуславливает организацию итерационного процесса. В качестве начального приближения для итерационного процесса используется нулевое значение температуры.

Значение параметра δ , обеспечивающего выполнения условия (6) с заданной точностью, подбирается методом деления отрезка пополам [19]. Для проверки аппроксимационной сходимости была проведена серия расчетов на последователь-

ности сеток. В качестве критерия сходимости итерационного процесса для нахождения стационарных полей скорости и температуры используются условия

$$\max_i \left| \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{u_i^{k+1}} \right| < \varepsilon_u, \max_i \left| \frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^k}{\theta_i^{k+1}} \right| < \varepsilon_\theta, 0 \leq i \leq N-1,$$

где верхний индекс соответствует номеру итерации, а нижний – номеру расчетного узла.

Сходимость алгоритма определения δ , обеспечивающего выполнение равенства (6), определяется выполнением условия

$$\left| 1 - 2^\alpha \sum_{i=1}^N \frac{u_{i-1} \zeta_{i-1}^\alpha + u_i \zeta_i^\alpha}{2} h \right| < \varepsilon_Q.$$

Аналитическое решение задачи в случае круглой трубы дает следующее выражение для распределения температуры [9]:

$$\theta = -n \ln \left[\frac{b}{8} \left(c \zeta^{\frac{3n+1}{n}} + \frac{1}{c} \right)^2 \right], \quad (9)$$

где

$$b = \frac{4n\alpha}{(3n+1)^2} \left(-\frac{\delta}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}, c = \left(\frac{2}{b} \right)^{0.5} - \left(\frac{2}{b} - 1 \right)^{0.5}.$$

В табл. 1 a, b представлены значения скорости и температуры в точке $\zeta = 0$ и значения безразмерного перепада давления δ для осесимметричного и плоского случаев, вычисленные на последовательности сеток.

Таблица 1а

$$(\alpha = 1, n = 0.6, \alpha = 1, \varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5})$$

h	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200	Аналитическое решение
u_0	1.9906	1.9827	1.9805	1.9802	1.9801	-
θ_0	0.5140	0.5136	0.5135	0.5135	0.5135	0.5135
δ	-3.8930	-3.8975	-3.8986	-3.8989	-3.8989	-

Таблица 1б

$$(\alpha = 1, n = 0.6, \alpha = 0, \varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5})$$

h	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
u_0	1.4544	1.4545	1.4546	1.4546	1.4546
θ_0	0.4254	0.4258	0.4259	0.4259	0.4259
δ	-1.7071	-1.7113	-1.7125	-1.7126	-1.7126

В работах [4,6] показано, что рассматриваемые задачи имеют решения не при всех α , а только при $\alpha < \alpha^*$, где α^* – некоторое критическое значение параметра α . При $\alpha > \alpha^*$ задачи не имеют решений, следовательно, невозможно получить стационарные распределения скорости и температуры. Тепло, выделяемое за счет диссипации механической энергии, не успевает отводиться через стенки канала, что приводит к росту температуры. По аналогии с тепловым взрывом химического происхождения [20], это явление называется гидродинамическим тепловым

взрывом [10]. При численном решении рассматриваемой задачи отсутствие стационарных распределений искомым функций приводит к бесконечному росту температуры, то есть к отсутствию сходимости вычислительного алгоритма. Численная методика определение критического значения α^* основана на методе деления отрезка пополам, на одном конце которого сходимость отсутствует, а на другом задача имеет устойчивое решение. Процесс деления продолжается пока длина отрезка, то есть диапазон изменения α не станет меньше 10^{-3} .

Критические значения параметра α^* , полученные численно и по формуле аналитического анализа [9]:

$$\alpha^* = \frac{(3n+1)^2}{2n} \left(-\frac{\delta}{2} \right)^{-\frac{n+1}{n}}$$

(10)

приведены в табл. 2.

Таблица 2

($n = 0.6, \alpha = 1, \varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5}$)

h	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
α^* (числ.)	1.68026	1.68313	1.68389	1.68404	1.68404
α^* (аналит.)	1.69050	1.68566	1.68427	1.68412	1.68404

Представленные результаты демонстрируют аппроксимационную сходимость предлагаемой методики расчета. Во всех последующих расчетах используются сетка с шагом 1/200 и $\varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5}$.

Результаты расчетов

С использованием описанной вычислительной технологии проведены параметрические расчеты для плоского и осесимметричного течений. Для подтверждения достоверности результатов численного решения мы ограничиваемся их сравнением с аналитическим решением для случая течения в цилиндрической трубе.

На рис. 3 представлены профили скорости и температуры для плоского и осесимметричного течений псевдопластичной жидкости при различных значениях параметра α . С увеличением параметра α усиливается роль вязкой диссипации, что приводит к возникновению точки перегиба в профиле скорости и к увеличению ее максимального значения. Влияние вязкой диссипации проявляется также в увеличении значений температуры по всему сечению канала. В количественном выражении полученный эффект для течения в круглой трубе несколько выше по отношению к плоскому течению. Точками на сплошных кривых рис. 3, б показано аналитическое решение (9).

Рис. 4 демонстрирует влияние параметра нелинейности n степенного реологического закона на распределения скорости и температуры. Качественный характер влияния параметра n на формирование профиля скорости в окрестности линии симметрии и на значение ее максимальной скорости совпадает с таковым для случая изотермического стационарного течения степенной жидкости в плоской щели и круглой трубе. Точками на сплошных кривых рис. 4, б показано аналитическое решение (9).

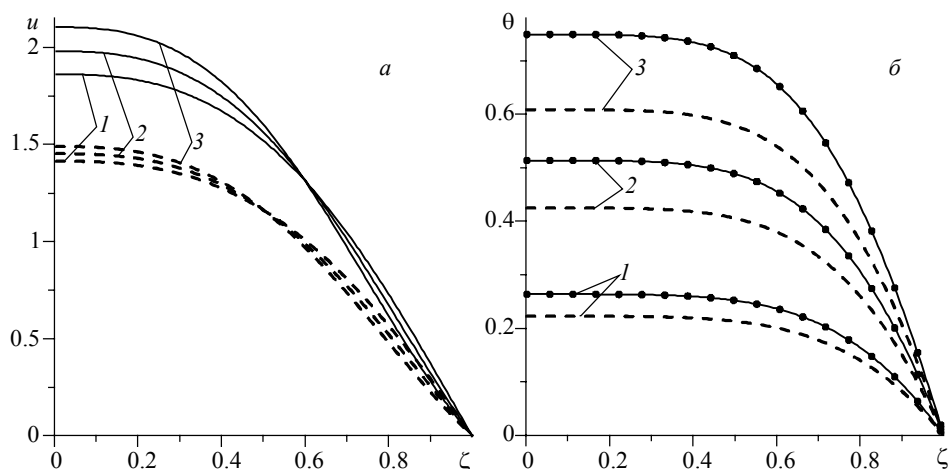


Рис. 3. Профили скорости (а) и температуры (б)
(пунктир – $\alpha = 0$, сплошная линия – $\alpha = 1$, $n = 0.6$: 1, 2, 3 – $x = 0.5, 1, 1.5$)
Fig. 3. Distributions of (a) velocity and (b) temperature
(the dotted line indicates $\alpha = 0$; the solid line, $\alpha = 1$; $n = 0.6$, $x = (1) 0.5, (2) 1$, and (3) 1.5)

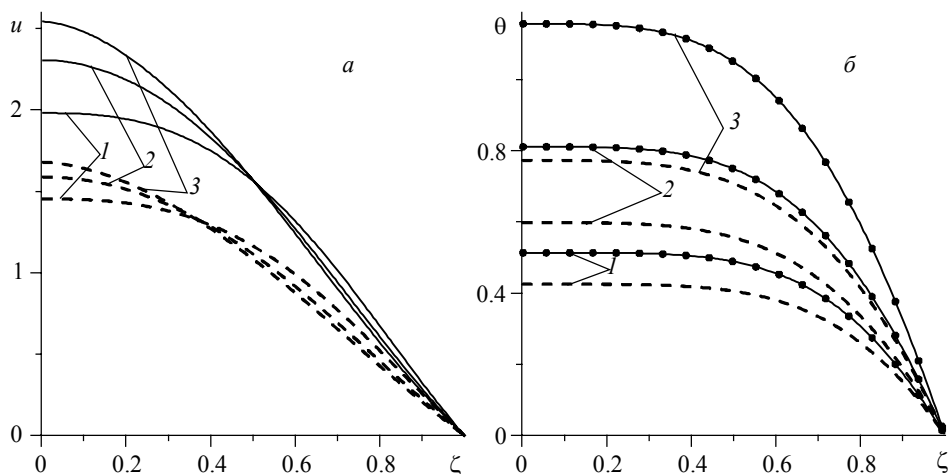


Рис. 4. Профили скорости (а) и температуры (б)
(пунктир – $\alpha = 0$, сплошная линия – $\alpha = 1$, $x = 1$: 1, 2, 3 – $n = 0.6, 1, 1.4$)
Fig. 4. Distributions of (a) velocity and (b) temperature
(the dotted line indicates $\alpha = 0$; the solid line, $\alpha = 1$, $x = 1$, $n = (1) 0.6, (2) 1$, and (3) 1.4)

На рис. 5 представлены распределения эффективной вязкости в сечениях плоского канала и круглой трубы в зависимости от параметра x для псевдопластичной жидкости (рис. 5, а) и в зависимости от параметра нелинейности n (рис. 5, б). По мере приближения к линии симметрии значение скорости сдвига уменьшается и равно нулю на линии симметрии. Поэтому эффективная вязкость псевдопластичной жидкости ($n < 1$) достигает больших значений в окрестности линии симметрии несмотря на максимальные значения температуры в этой области. Зависимость вязкости от температуры заметно проявляется в области течения.

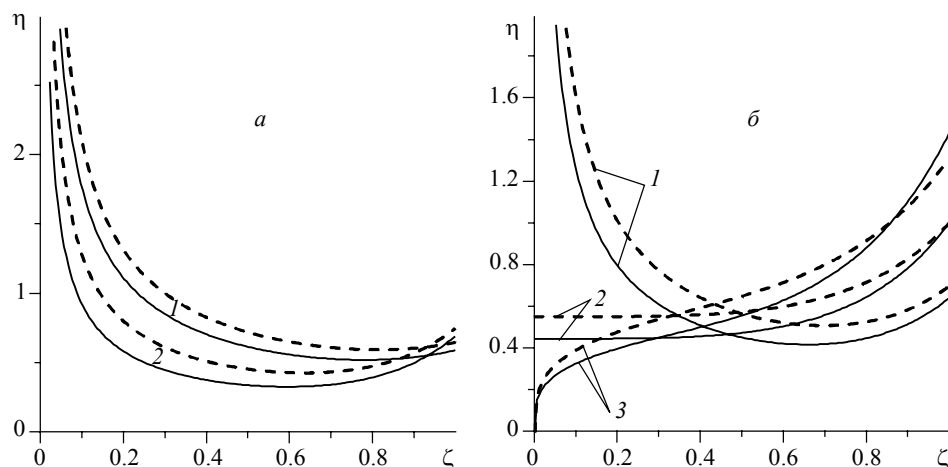


Рис. 5. Распределение вязкости (пунктир – $\alpha = 0$, сплошная линия – $\alpha = 1$;
 а: $n = 0.6$: 1, 2 – $\alpha = 0.5, 1.5$; б: $\alpha = 1$: 1, 2, 3 – $n = 0.6, 1, 1.4$)

Fig. 5. Viscosity distributions (the dotted line indicates $\alpha = 0$; the solid line, $\alpha = 1$;
 а: $n = 0.6$: $\alpha = (1) 0.5$ and $(2) 1.5$; б: $\alpha = 1$: $n = (1) 0.6$, $(2) 1$, and $(3) 1.4$)

Распределения диссипативной функции E в сечении канала/трубы показаны на рис. 6. Характер изменения диссипативной функции по сечению канала/трубы определяется характером функциональной зависимости вязкости и скорости от поперечной/радиальной координаты. Представленные на рис. 6 кривые $E(\zeta)$ демонстрируют влияние основных параметров на характер изменения и количественные значения диссипативной функции.

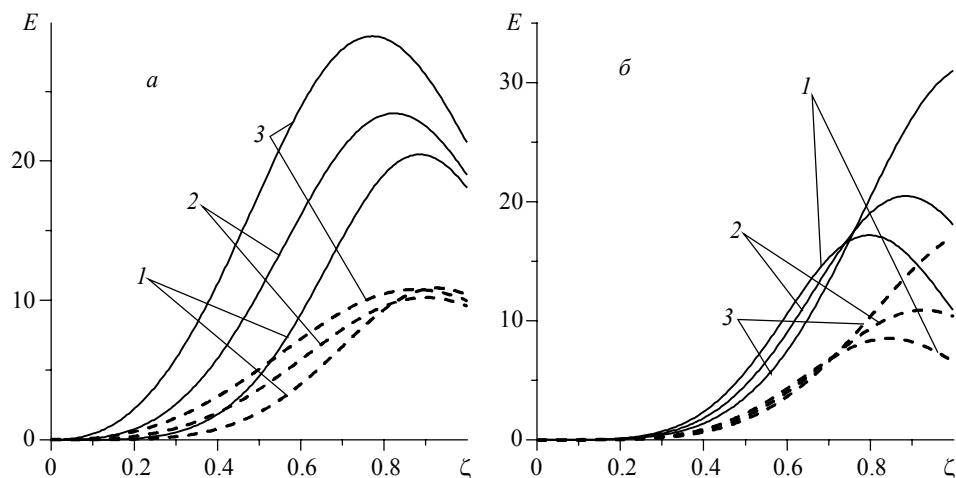


Рис. 6. Диссипативная функция (пунктир – $\alpha = 0$, сплошная линия – $\alpha = 1$;
 а: $\alpha = 1$: 1, 2, 3 – $n = 0.6, 1, 1.4$; б: $n = 0.6$: 1, 2, 3 – $\alpha = 0.5, 1, 1.5$)

Fig. 6. Dissipative function (the dotted line indicates $\alpha = 0$; the solid line, $\alpha = 1$;
 а: $\alpha = 1$: $n = (1) 0.6$, $(2) 1$, and $(3) 1.4$; б: $n = 0.6$: $\alpha = (1) 0.5$, $(2) 1$, and $(3) 1.5$)

Зависимости критического значения α^* от показателя нелинейности n , разделяющие область значений параметра α , при которых существует или отсутствует устойчивое стационарное решение, представлены на рис. 7. Точками на кривой 2 показаны результаты аналитического анализа по формуле (10) для течения в круглой трубе.

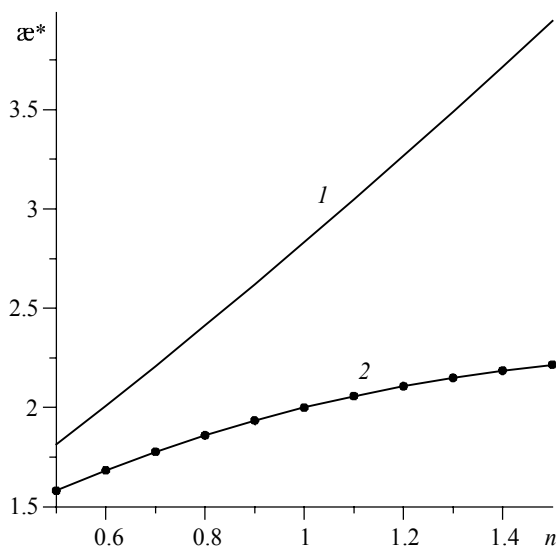


Рис. 7. Зависимости α^* от n

Fig. 7. Dependences of α^* on n

Заключение

Сформулирована математическая постановка задачи о стационарном неизотермическом течении степенной жидкости в плоском канале / круглой трубе с учетом вязкой диссипации и зависимости консистенции среды от температуры в одномерном приближении. Разработан численный алгоритм решения задачи на основе метода конечных разностей. В результате проведенных параметрических расчетов получены характерные распределения скорости, температуры, вязкости и диссипативной функции в сечении канала/трубы при разных значениях параметра, определяющего степень влияния вязкой диссипации, и показателя нелинейности реологической модели. Разработан алгоритм определения критических значений параметра задачи, разделяющих области существования и отсутствия устойчивого стационарного решения. Получены критические значения параметра, выше которых осуществляется режим гидродинамического теплового взрыва. Построены зависимости параметра от показателя нелинейности степенного реологического закона, выделяющие область устойчивых стационарных решений. Проведено сравнение результатов расчетов с аналитическим решением для случая течения в круглой трубе. Результаты расчетов хорошо согласуются с аналитическим решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С.А. Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой каплевой жидкости // ПММ. 1957. Т. 21. № 3. С. 424–430.
2. Каганов С.А. Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры // ПМТФ. 1962. № 3. С. 96–99.
3. Kearsley E.A. The viscous heating correction for viscometer flows // Trans. Soc. Rheol. 1962. No. 6. P. 253–261. DOI: 10.1122/1.548925.
4. Martin B. Some analytical solutions for viscometric flows of power-law fluids with heat generation and temperature dependent viscosity // Ind. J. Non-Linear Mech. 1967. V. 2. Iss. 4. P. 285–301. DOI: 10.1016/0020-7462(67)90001-7.
5. Бостанджиян С.А., Мержанов А.Г., Худяев С.И. О гидродинамическом тепловом взрыве // ДАН СССР. 1965. Т. 163. № 1. С. 133–136.
6. Бостанджиян С.А., Черняева С.М. О гидродинамическом тепловом взрыве неньютоновской жидкости // ДАН СССР. 1966. Т. 170. № 2. С. 301–304.
7. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 409 с.
8. Фройштетер Г.Б., Данилевич С.Ю., Радионова Н.В. Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах. Киев: Наукова думка, 1990. 216 с.
9. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запryanов З.Д. и др. Химическая гидродинамика: Справочное пособие. М.: Бюро Квантум, 1996. 336 с.
10. Худяев С.И. Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003. 271 с.
11. Bognár G., Kovács J. Non-isothermal steady flow of power-law fluids between parallel plates // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2012. V. 6. Iss. 1. P.122–129.
12. Baptista A., Alves M.A., Coelho P.M. Heat Transfer in Fully Developed Laminar Flow of Power Law Fluids // J. of Heat Transfer. 2014. V. 136. Iss. 4. P. 1–8. DOI: 10.1115/1.4025662.
13. Borzenko E.I., Shrager G.R. Effect of viscous dissipation on temperature, viscosity, and flow parameters while filling a channel // Thermophysics and Aeromechanics. 2014. V. 21. Iss. 2. P. 211–221. DOI:10.1134/S0869864314020073.
14. Borzenko E.I., Frolov O.Yu., Shrager G.R. Fountain nonisothermal flow of a viscous liquid during the filling of a circular tube // Theor. Found. Chem. Eng. 2014. V. 48. Iss. 6. P. 824–831. DOI: 10.1134/S0040579514060013.
15. Borzenko E., Ryltsev I., Frolov O., Shrager G. Nonisothermal filling of a planar channel with a power-law fluid // J. Physics: Conf. Series. 2017. V. 899. P. 1–6. DOI: 10.1088/1742-6596/899/2/022001.
16. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Неизотермическое течение вязкой жидкости при заполнении плоского канала // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2012. № 2. С. 80–87.
17. Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.
18. Patankar S. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill, 1980. 197 p.
19. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Физматлит, 1960. 660 с.
20. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука 1987. 491 с.

Статья поступила 27.02.2018 г.

Borzenko E.I., Shrager G.R. (2018) NON-ISOTHERMAL STEADY FLOW OF POWER-LAW FLUID IN A PLANAR/AXISMETRIC CHANNEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 41–52

DOI 10.17223/19988621/52/5

The results of research on a one-dimensional steady flow of power-law fluid in the planar channel/circular pipe with allowance for viscous dissipation and temperature dependence of consistency factor defined by exponential law are shown. The flow is described by the motion and heat-transfer equations. The constant temperature and no-slip condition are set on the solid walls. The numerical solutions of formulated problems are obtained using the finite-difference method. The effect of medium rheology and dissipative heating on the flow pattern is parametrically investigated. Typical distributions of velocity, temperature, viscosity, and dissipative function in the channel/pipe cross-sections at various governing parameters are obtained. The algorithm defining critical values of parameter in the problem, which separate domains of existence and non-existence of stable stationary solution, is numerically implemented. Exceeding the obtained critical values leads to a hydrodynamic thermal explosion. When the rate of heat generation due to mechanical energy dissipation is higher than that of heat loss through the walls, the unlimited increase in the temperature occurs. The dependencies of parameter on the power-law index defining a stable stationary solution domain are plotted. The calculated results are in a good agreement with analytical solution.

Keywords: power law fluid, viscous dissipation, steady flow, finite-difference method, hydrodynamic thermal explosion.

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

SHRAGER Gennady Rafailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Regirer S.A. (1957) Nekotorye termogidrodinamicheskie zadachi ob ustanovivshemsya odnomernom techenii vyazkoy kapel'noy zhidkosti [Some thermohydrodynamic problems on a one-dimensional steady flow of viscous dropping liquid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 21(3). pp. 424–430.
2. Kaganov S.A. (1962) Ob ustanovivshemsya laminarnom techenii neszhimaemoy zhidkosti v ploskom kanale i krugloy tsilindricheskoy trube s uchchetom teploty treniya i zavisimosti vyazkosti ot temperatury [On a steady laminar flow of incompressible fluid in plane channel and round cylindrical tube with allowance for heat of friction and temperature dependence of viscosity]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 3. pp. 96–99.
3. Kearsley E.A. (1962) The viscous heating correction for viscometer flows. *Trans. Soc. Rheol.* 6. pp. 253–261. DOI: 10.1122/1.548925.
4. Martin B. (1967) Some analytical solutions for viscometric flows of power-law fluids with heat generation and temperature dependent viscosity. *Ind. J. Non-Linear Mech.* 2(4). pp. 285–301. DOI: 10.1016/0020-7462(67)90001-7.
5. Bostandzhiyan S.A., Merzhanov A.G., Khudyaev S.I. (1965) O gidrodinamicheskom teplovom vzryve [On the hydrodynamic thermal explosion]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 163(1). pp. 133–136.
6. Bostandzhiyan S.A., Chernyaeva S.M. (1966) O gidrodinamicheskom teplovom vzryve nen'yutonovskoy zhidkosti [On the hydrodynamic thermal explosion in a non-Newtonian fluid flow]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 170(2). pp. 301–304.

7. Petukhov B.S. (1967) *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat transfer and resistance in a laminar fluid flow in the pipes]. Moscow: Energiya.
8. Froysheter G.B., Danilevich S.Yu., Radionova N.V. (1990) *Techenie i teploobmen nen'yutonovskikh zhidkostey v trubakh* [Flow and heat transfer of non-Newtonian fluids in the pipes]. Kiev: Naukova dumka.
9. Kutepov A.M., Polyaniin A.D., Zapryanov Z.D. et al. (1996) *Khimicheskaya gidrodinamika: Spravochnoe posobie* [Chemical Hydrodynamics: Handbook]. Moscow: Byuro Kvantum.
10. Hudyayev S.I. (2003) *Porogovye yavleniya v nelineynykh uravneniyakh* [Threshold phenomena in nonlinear equations]. Moscow: Fizmatlit.
11. Bognár G., Kovács J. (2012) Non-Isothermal Steady Flow of Power-Law Fluids between Parallel Plates. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 6(1). pp. 122–129.
12. Baptista A., Alves M.A., Coelho P.M. (2014) Heat transfer in fully developed laminar flow of power law fluids. *Journal of Heat Transfer*. 136(4). pp. 1–8. DOI: 10.1115/1.4025662.
13. Borzenko E.I., Shrager G.R. (2014) Effect of viscous dissipation on temperature, viscosity, and flow parameters while filling a channel. *Thermophysics and Aeromechanics*. 21(2). pp. 211–221. DOI: 10.1134/S0869864314020073.
14. Borzenko E.I., Frolov O.Yu., Shrager G.R. (2014) Fountain nonisothermal flow of a viscous liquid during the filling of a circular tube. *Theor. Found. Chem. Eng.* 48(6). pp. 824–831. DOI: 10.1134/S0040579514060013.
15. Borzenko E., Ryltsev I., Frolov O. Shrager G. (2017) Nonisothermal filling of a planar channel with a power-law fluid. *Journal of Physics: Conf. Series*. 899. pp. 1–6. DOI: 10.1088/1742-6596/899/2/022001.
16. Borzenko E.I., Shrager G.R. (2012) Nonisothermal flow of a viscous fluid when filling a plane channel. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(18). pp. 80–87.
17. Godunov S.K., Ryabenkii V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.
18. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill.
19. Demidovich B.P., Maron I.A. (1981) *Computational Mathematics*. Moscow: Mir Publishers.
20. Frank-Kamenetskii D.A. (2015) *Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics*. Princeton: Princeton University Press.

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/52/6

А.В. Кочетков, Н.В. Леонтьев, И.А. Модин, А.О. Савихин**ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛЕТЕННЫХ СЕТОК¹**

Металлические сетки в виде многослойных пакетов используются как высокопористые легкодеформируемые элементы для защиты силовых корпусов взрывных камер и других конструкций от осколочного повреждения и других импульсных воздействий. Пакет сеток формируется, как правило, путем наложения слоев друг на друга с сохранением направлений проволок, поэтому многослойный пакет можно считать высокопористым деформируемым элементом конструкции, обладающим ортотропными свойствами. В результате экспериментальных исследований были получены кривые деформирования многослойных пакетов и одного слоя плетеной металлической сетки при испытаниях на сжатие по нормали к слою и растяжение вдоль проволок, вплоть до разрушения образцов. Экспериментально показан эффект увеличения силы растяжения предварительно обжатого одного слоя плетеной сетки, характерный для многослойных пакетов. Математическое моделирование деформирования одного слоя плетеной сетки подтверждает эффект увеличения силы при растяжении вдоль линий проволок после предварительного обжатия слоя по нормали. По результатам математического моделирования выявлены два механизма увеличения растягивающей силы. Первый – связан с упрочнением материала в окрестности узла сетки, вызванного сильным его обжатием и развитым пластическим течением. Второй – с тем, что в результате обжатия растягиваемые проволоки находятся преимущественно в сжатом состоянии и для их растяжения требуются дополнительные силы.

Ключевые слова: *плетеные сетки, ортотропия, упругопластическое сжатие, растяжение, разрушение, эксперимент, численное моделирование.*

Использование в конструкциях пористых элементов в виде проволочных решеток, экранов, сеток, перфорированных перегородок является одним из способов снижения импульсных и вибрационных нагрузок [1–3]. Например, для защиты корпусов взрывных камер от осколочного повреждения в настоящее время применяются многослойные металлические сетки тканого плетения. Подобные преграды используются как в виде плоских, так и осесимметричных пакетов, скрученных в рулон для укладки их перед стенками цилиндрических камер [4–6]. Пакет сеток формируется, как правило, путем наложения слоев друг на друга с сохранением направлений проволок, поэтому многослойный пакет можно считать высокопористым деформируемым элементом конструкции, обладающим ортотропными свойствами [6]. Пакеты сеток сопротивляются деформированию при сжатии по нормали к слоям и растяжению вдоль проволок. Для проектирования подобных демпфирующих элементов необходимо знать их деформационные и

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (задание 9.7057.2017/БЧ в части экспериментальных исследований на растяжение) и грантов РФФИ № 16-19-10237 в части испытаний на сжатие, № 17-79-20161 в части численного моделирования.

прочностные свойства. В [7–9] приведены некоторые результаты экспериментальных исследований деформационных свойств многослойных пакетов сеток на квазистатическое и динамическое сжатие по направлению нормали к слоям сеток и на растяжение вдоль проволок в плоскости слоя. Показано, что при интенсивных нагрузках диаграммы деформирования носят нелинейный и необратимый характер. В квазистатическом режиме нагружения, в отличие от динамического, выявлена зависимость степени предварительного обжатия многослойных пакетов по нормали к плоскости слоя на характеристики растяжения пакета в плоскости слоя по направлениям проволок. В данной работе приводятся результаты экспериментальных и численных исследований выявленного эффекта на одном слое стальной плетеной сетки.

1. Экспериментальные исследования предварительно обжатой металлической сетки на растяжение

Квазистатические испытания на сжатие по нормали и растяжение вдоль одного из направлений проволок сетки проводились на сервогидравлической установке Zwick/Roell Amsler HA 100. Управление и регистрация процесса нагружения осуществлялась с помощью программного обеспечения «Test Xpert II». Экспериментальные исследования были проведены для сетки диаметром 0.5 мм и шагом плетения 2.5 мм, изготовленной из Ст3. Ранее проведенные исследования квазистатического деформирования пакетов сеток из 10 и 20 слоев при растяжении [9] выявили нелинейный характер и существенную зависимость диаграмм растяжения от степени предварительного обжатия. По мере увеличения степени предварительного обжатия пакетов сеток по нормали к слоям происходит увеличение напряжения, необходимого для растяжения образцов по направлению проволок и их разрушения. Предельные характеристики разрушения ($\sigma_{\text{пред}}$ – напряжение разрушения, $\epsilon_{\text{пред}}$ – деформация разрушения) при растяжении в зависимости от степени обжатия $\sigma_{\text{сж}}$ приведены в таблице.

**Таблица предельных характеристик растяжения
(пакет плетеных сеток, материал сталь 3)**

$-\sigma_{\text{сж}}$, МПа	0	5	20	40	80
$\sigma_{\text{пред}}$, МПа	23	32	54	75	84
$\epsilon_{\text{пред}}$	0,45	0,3	0,2	0,09	0,06

Для изучения эффекта увеличения силы на растяжение при возрастании степени предварительного обжатия проведены испытания на растяжение одного слоя аналогичной сетки. Образец был изготовлен в размере 110 × 20 мм, рабочая база образца составляла 14 мм, на растяжение образца вдоль нитей работало 8 проволок. На рис. 1 приведены кривые в пересчете на одну из восьми растягиваемых проволок на один шаг плетения (для последующего сравнения с численными исследованиями). Отмечены следующие кривые: 1 – сетка без предварительного статического обжатия; 2 – обжатие сетки до $0.5h$, где h – начальная толщина слоя, равная двум диаметрам проволоки ($h = 1$ мм); 3 – обжатие до $0.3h$. По результатам экспериментов качественно был выявлен тот же эффект, что и при испытании многослойного пакета [9]. Кривые растяжения при увеличении предварительного обжатия располагаются выше. Разрушающее напряжение увеличивается с ростом силы предварительного обжатия, а разрушающее перемещение уменьшается.

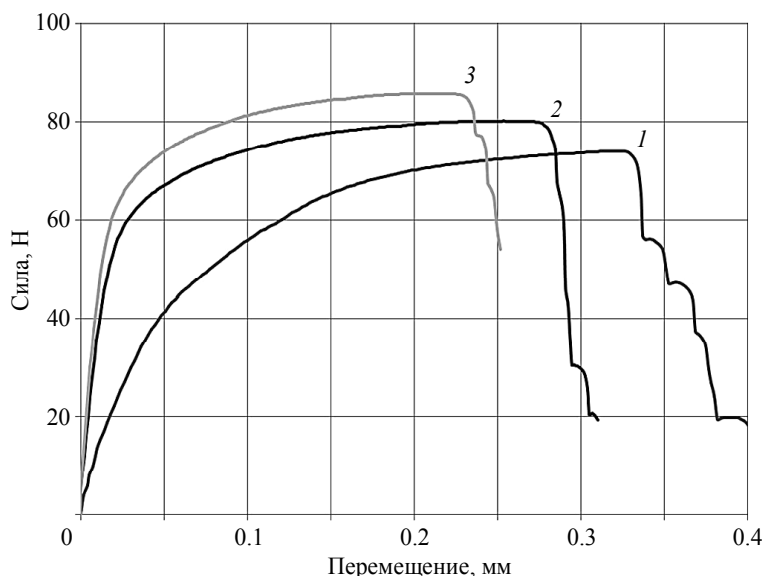


Рис. 1. Диаграммы растяжения сетки в зависимости от степени обжатия

Fig. 1. Diagrams of the grid extension as a function of reduction rate

После предварительного обжатия слоя сетки был визуально рассмотрен узел плетения под микроскопом (рис. 2) для обжатия $0,5h$. Видно пятно контакта с обжимаемой плоскостью. Оно одинаково по форме и площади для обеих проволок узла плетения. Замерены параметры проволоки в обжатом состоянии, ее максимальная ширина составила 0.75 мм, толщина – 0.25 мм в узле плетения при начальном диаметре проволоки 0.5 мм. Растяжение сетки завершается ее разрушением – образованием шейки и разрывом. Необжатая сетка разрушается в окрестности узла плетения (рис. 3, справа – здесь одна поперечная проволока выпала после разрыва), для обжатой сетки меняется характер разрушения, образование шейки и разрыв происходит между узлами плетения (рис. 3, слева).

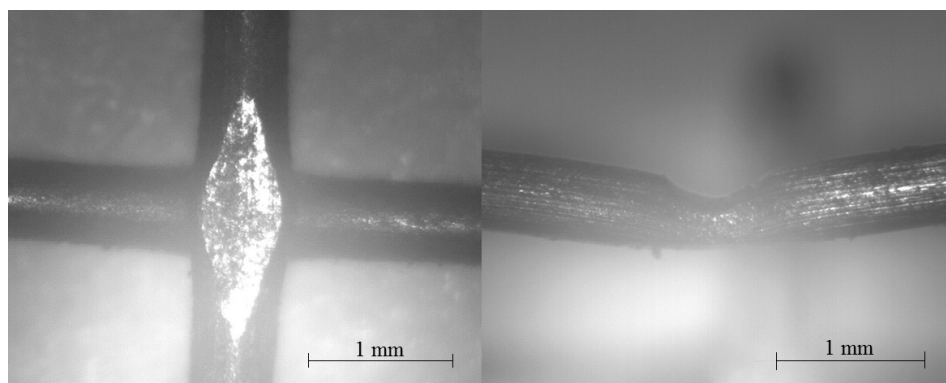


Рис. 2. Формы проволок в узле плетения после обжатия

Fig. 2. Shape of the wires in a knot after reduction

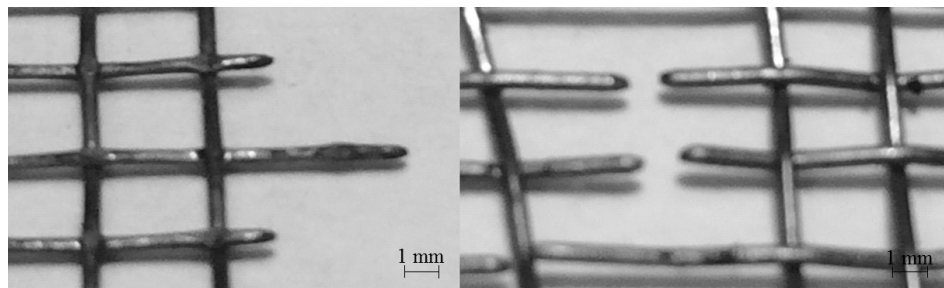


Рис. 3. Вид разрушенной сетки после растяжения
(слева – обжатая сетка, справа – сетка без обжатия)

Fig. 3. Pattern of a destructed grid after tension
(on the left – reduced grid, on the right – grid without reduction)

2. Результаты численного моделирования

С целью выявления причин, вызывающих экспериментально наблюдаемый эффект увеличения сил растяжения от степени предварительного обжатия сеток, проведено численное моделирование процессов деформирования. Моделирование проводилось в вычислительной системе ANSYS v 17.2 методом конечных элементов (лицензия Academic Research, Customer #623640). Для моделирования была выбрана типовая ячейка плетеной сетки (рис. 4). Расчетная область состоит из четырех трехмерных цилиндрических тел (проволок). В силу симметрии берется половина сечения проволок. На торцах проволок также выполняются условия симметрии. В начальный момент времени напряжения и деформации отсутствуют.

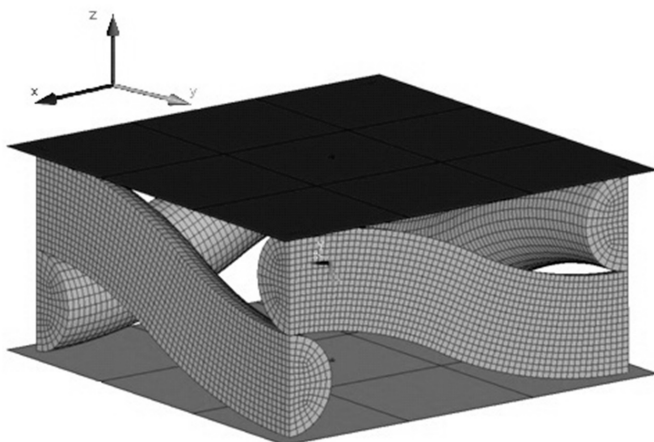


Рис. 4. Конечно-элементная модель объекта исследования

Fig. 4. Finite-element model of the test sample

В данной задаче использовался алгоритм расчета идеального симметричного контакта тел без трения и с трением, когда в каждой контактной области используются две контактные пары. Коэффициент трения принимался равным 0.3. Сжатие проводилось парой абсолютно жестких плоскостей, движущихся в направлении оси Z симметрично навстречу друг другу. Выбран один из вариантов сжатия в

проведенных выше экспериментах – до половины начальной толщины слоя $0.5h$. Весь процесс моделируемого нагружения был разбит на три этапа:

1. Обжатие сетки, перпендикулярно плоскости слоя по оси Z .
2. Снятие нагрузки с обжатого образца.
3. Растяжение по направлению проволок по оси X в плоскости сетки, движением боковых плоскостей симметрии аналогично обжатию.

Геометрическая модель проволоки получена вытягиванием полукруглого сечения вдоль оси проволоки. Ось состоит из двух сопряженных дуг окружности. Для построения конечно-элементной модели использовался 20-узловой КЭ второго порядка SOLID185 с сокращенным ($2 \times 2 \times 2$) интегрированием. Проводилось сравнение численных решений на последовательности конечно-элементных сеток; результаты оказались сходящимися и близкими. Итоговая сетка передает все особенности процессов нагружения и упругопластической деформации. Модель каждой из проволок состоит из 6144 конечных элементов (КЭ), всего 24576 КЭ. Общее количество неизвестных составило 321660. Для описания поведения материала рассматривалась мультилинейная модель пластичности с изотропным упрочнением. Для получения достоверных результатов расчетов использовалась полученная авторами экспериментальная диаграмма деформирования для Ст3, из которой изготовлена сетка (рис. 5). В качестве меры деформации принимается логарифмическая мера. Модуль упругости равен 200 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.3, предел текучести – 235 МПа, линейный модуль упрочнения при больших деформациях равен 1 ГПа.

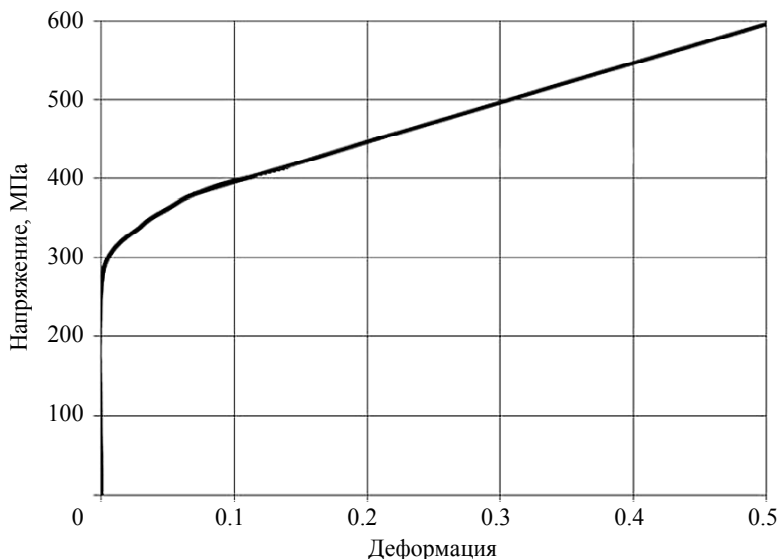


Рис. 5. Диаграмма деформирования материала
Fig. 5. Material deformation diagram

Первый этап моделирования (сжатие) был реализован за 200 шагов без изменения величины шага. Это обусловлено необходимостью уменьшить искажения формы конечных элементов при больших деформациях. На втором и третьем этапах нагружения применялась автоматическая коррекция величины шага, что позволило адаптивно увеличить шаг и сократить временные затраты на решение.

Второй этап пройден за 25 шагов, третий – за 22 шага. Задача решалась в параллельном режиме на сервере HP ProLiant DL585, процессор AMD Opteron 6176SE – 2.3GHz, на восьми ядрах. Время, затраченное на решение, составило около 8 ч. На рис. 6 приведено распределение эквивалентных пластических деформаций после второго этапа нагружения. Наблюдается развитое пластическое течение во всех проволоках, максимальное значение эквивалентных пластических деформаций в узле плетения достигает 1,3.

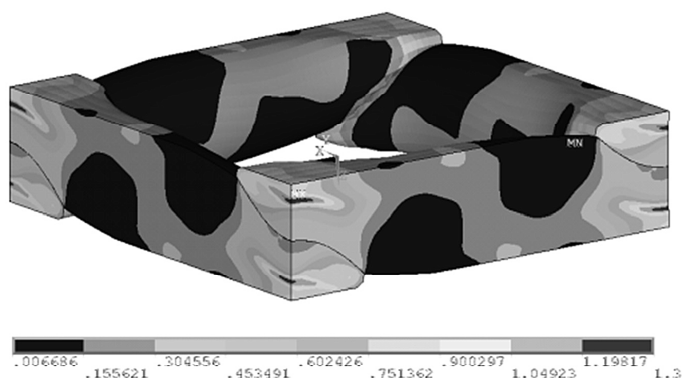


Рис. 6. Распределение эквивалентных пластических деформаций
Fig. 6. Distribution of the equivalent plastic deformations

По результатам расчета была замерена ширина сечения в узле плетения проволок, которая составила 0.77 мм, то есть увеличилась в 1.55 раза, что соответствует экспериментальным данным (рис. 2). Наблюдается высокая неоднородность деформированного состояния, особенно в окрестности сжатого узла плетения. На рис. 7 приведены зависимости силы сжатия на расчетную ячейку сетки от перемещения.

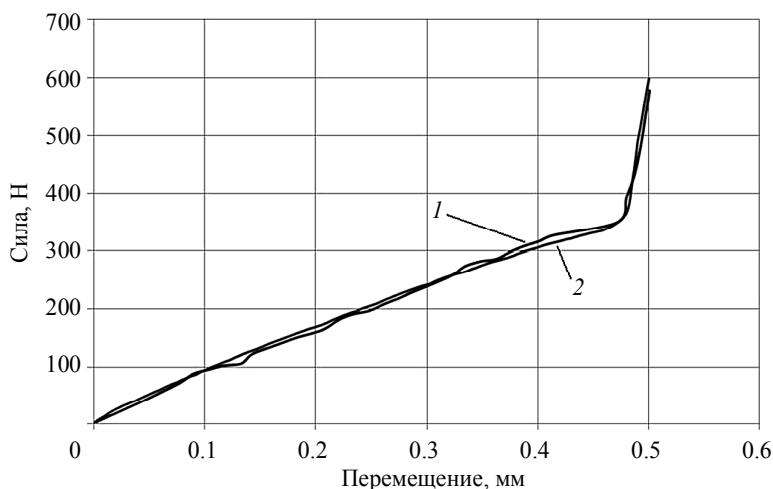


Рис. 7. Зависимость силы от перемещения при сжатии
Fig. 7. Strength as a function of displacement under compression

Зависимость имеет резкий излом, вызванный значительным увеличением площади контакта проволок с обжимающими плоскостями в результате пластического течения материала. Сравнение экспериментальной кривой 1 и кривой, полученной численным моделированием 2, показывает хорошее совпадение результатов, что свидетельствует о достоверности используемой модели. Сравнение результатов моделирования с учетом и без учета трения на контактных поверхностях показало незначительное влияние сил трения.

Численное моделирование третьего этапа на растяжение вдоль оси X проводилось при дополнительных предположениях. Диаграмма упругопластического деформирования с упрочнением (рис. 5) использовалась не для всей длины проволок. Средняя часть проволок подвергалась слабому обжатию, поэтому здесь использовалось линейное продолжение диаграммы деформирования без упрочнения. Кроме того, в середине проволок вводилось линейное возмущение геометрического размера, составляющее 1 % от диаметра проволоки. Без этих дополнительных предположений локализация пластических деформаций и образование шейки происходило в окрестности узла плетения. На рис. 8 приведено распределение пластической деформации ϵ_x , которое свидетельствует о локализации пластической деформации в центральных сечениях растягиваемых проволок. Картина деформирования проволоки между узлами качественно соответствует картине, полученной в [10] для цилиндрического образца. Как и в экспериментах, образование шейки и разрушение образца при численном моделировании при дополнительных предположениях происходит между узлами.

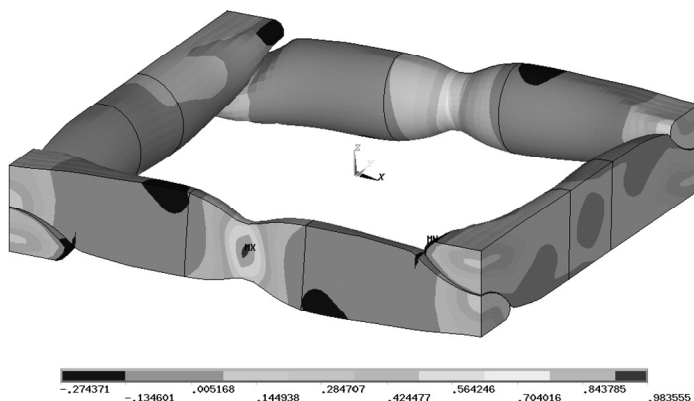


Рис. 8. Распределение пластической деформации ϵ_x при растяжении

Fig. 8. Distribution of the plastic deformation ϵ_x under tension

Для сравнения решалась также задача растяжения необжатой сетки. Результаты численного моделирования необжатой сетки показывают локализацию пластических деформаций и образование шейки, а следовательно, и разрушение в окрестности узла плетения. На рис. 9 приведены кривые «сила – перемещение» на растяжение в плоскости слоя по направлению проволок. Пунктирные кривые 2, 4 – экспериментальные, верхняя пунктирная кривая 2 – с предварительным обжатием по нормали к слою. Кривые 1, 3 получены численным моделированием, кривая 1 – с учетом предварительного обжатия. Поведение численных кривых качественно соответствует поведению экспериментальных. Наблюдается увеличение силы при

растяжении предварительно обжатой сетки. Это увеличение объясняется двумя механизмами. Первый – связан с упрочнением материала в окрестности узла сетки, вызванным сильным его обжатием и развитым пластическим течением. Второй – с тем, что в результате обжатия растягиваемые проволоки находятся преимущественно в сжатом состоянии вдоль оси растяжения. Этот факт подтверждают отрицательные внутренние силы, которые видны на кривой 1 рис. 9 в начале процесса растяжения. Для получения лучшего количественного соответствия требуются дополнительные специальные исследования с применением более адекватной модели поведения материала при сложном нагружении с учетом его поврежденности и изменения его деформационных свойств при больших деформациях [10].

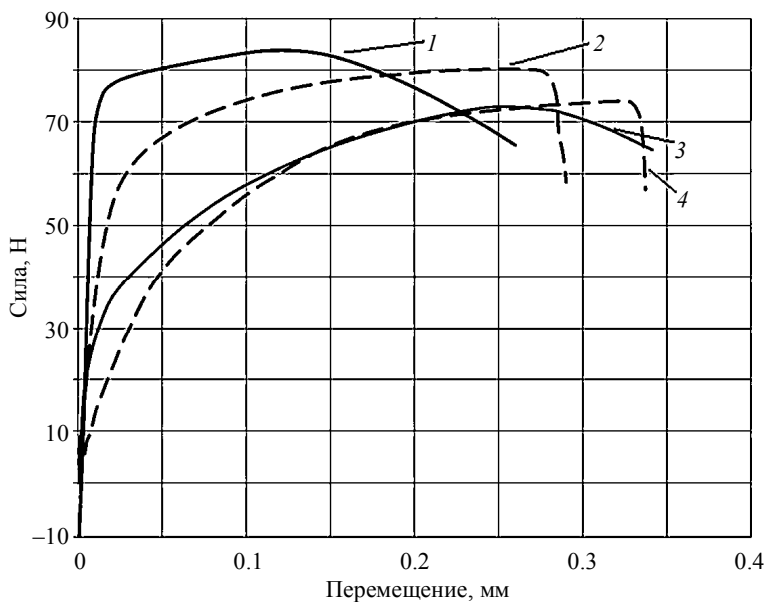


Рис. 9. Кривые растяжения одной проволоки сетки

Fig. 9. Stress-strain curves for a single wire of the grid

Заключение

В результате экспериментальных исследований были получены кривые деформирования одного слоя плетеной металлической сетки при испытаниях на сжатие и растяжение, вплоть до разрушения образца. Экспериментально показан эффект увеличения силы растяжения предварительно обжатого одного слоя плетеной сетки, как и для многослойного пакета. Математическое моделирование деформирования одного слоя плетеной сетки подтверждает эффект увеличения силы при растяжении вдоль линий проволок после предварительного обжатия слоя по нормали. По результатам математического моделирования выявлены два механизма увеличения растягивающей силы. Первый – связан с упрочнением материала в окрестности узла сетки, вызванного сильным его обжатием и развитым пластическим течением. Второй – с тем, что в результате обжатия растягиваемые проволоки находятся преимущественно в сжатом состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermann W. Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1969. V. 40. No. 6.
2. Гельфанд Б.Е., Сильников М.В. Фугасные эффекты взрывов. СПб.: Полигон. 2002. 272 с.
3. Кругликов Б.С., Кутушев А.Г. Ослабление ударных волн экранирующими решетками // ФГВ. 1998. Т. 24. № 1. С. 115–118.
4. Абакумов А.И. и др. Численная модель деформирования противоосколочной сетки при взрывном нагружении // Тр. ВНИИЭФ. Математическое моделирование физических процессов. 2006. № 10. С. 16–30.
5. Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В. и др. Моделирование взаимодействия ударных волн с деформируемыми газопроницаемыми преградами // Проблемы прочности и пластичности – 2010. Вып. 72. С. 120–129.
6. Глазова Е.Г., Константинов А.Ю., Кочетков А.В., Крылов С.В. Взрывное нагружение деформируемых газопроницаемых осесимметричных элементов конструкций // ПМТФ. № 5. 2016. С. 119–126. DOI: 10.15372 / PMTF20160513.
7. Горохов А.Н., Казаков Д.А., Кочетков А.В. и др. Исследование деформационных свойств пакетов плетеных металлических сеток при квазистатическом сжатии и растяжении // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76. № 3. С. 251–254.
8. Кочетков А.В., Леонтьев Н.В., Модин И.А. Экспериментально-численное исследование деформирования металлических плетеных сеток при квазистатическом нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79. № 1. С. 104–117.
9. Брагов А.М., Жегалов Д.В., Константинов А.Ю. и др. Экспериментальное исследование деформационных свойств пакетов плетеных металлических сеток при динамическом и квазистатическом нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 3. С. 252–262. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.17.
10. Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А. Моделирование нелинейного деформирования и разрушения конструкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.. 2015. 350 с.

Статья поступила 12.11.2017 г.

Kochetkov A.V., Leont'ev N.V., Modin I.A., Savikhin A.O. (2018) STUDY OF THE STRESS-STRAIN AND STRENGTH PROPERTIES OF THE METAL WOVEN GRIDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 53–62

DOI 10.17223/19988621/52/6

Metal grids represented as multilayer packages are used as highly-porous easy-deformable elements to protect pressure vessels of the blasting chambers and other structural components from fragmentation damage and other impulse actions. The package of grids is typically formed by layer stacking with the same directions of the wires providing multilayer package that is considered as a highly-porous deformable structural element with orthotropic properties. As a result of experimental studies, the stress-strain curves were obtained for multilayer packages and single layer of a woven metal grid under compression along the normal to the layer and under tension along the wires up to the sample destruction. Experiments show that the tensile strength of pre-compressed single layer of a woven grid increases which is typical for multilayer packages. Mathematical modeling of the stress-strain of single layer of a woven grid confirms an increase in the tensile strength along the wires after pre-compression along the normal. According to the results of mathematical modeling, two mechanisms providing an increase in the tensile strength are revealed. The first is related to material hardening in the vicinity of grid node caused by strong compression and developed plastic flow. The second is a reason of compression of the tensed wires which are preferably in a compressed state and the addition strength is needed for their tension.

Keywords: woven grid, orthotropy, elastoplastic compression, tension, destruction, experiment, numerical simulation.

KOCHETKOV Anatoliy Vasil'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: kochetkov@mech.unn.ru)

LEONT'EV Nikolay Vasil'evich (Candidate of Technical Sciences, Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: tam015@mail.ru)

MODIN Ivan Alexandrovich (Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: mianet@mail.ru)

SAVIKHIN Andrey Olegovich (Candidate of Physics and Mathematics, Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: andrey-savikhin@yandex.ru)

REFERENCES

1. Hermann W. (1969) Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials. *J. Appl. Phys.* 40(6). DOI: 10.1063/1.1658021.
2. Gelfand B.E., Silnikov M.V. (2002) *Fugasnye efekty vzryvov* [High-explosive effects of explosions]. St. Petersburg: Polygon.
3. Kruglikov B.S., Kutushev A.G. (1998) Oslablenie udarnykh voln ekraniruyushchimi reshetkami [Attenuation of shock waves by screening gratings]. *Journal of Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 24(1). pp. 115–118.
4. Abakumov A.I. et al. (2006) Chislennaya model' deformirovaniya protivoo skolochnoy setki pri vzryvnom nagruzhении [Numerical model of the deformation of anti-shatter grid under explosive loading]. *Proc. Russian Federal Nuclear Center. Mathematical Modeling of Physical Processes*. 10. pp. 16–30.
5. Abuzyarov M.Kh., Glazova E.G., Kochetkov A.V. et al. (2010) Modelirovanie vzaimodeystviya udarnykh voln s deformiruemyimi gazopronitsaemyimi pregradami [Simulation of the interaction of shock waves with deformable gas-permeable barriers]. *Problems of Strength and Plasticity*. 72. pp. 120–129.
6. Glazova E.G., Konstantinov A.Yu., Kochetkov A.V., Krylov S.V. (2016) Vzryvnoe nagruzhение deformiruemykh gazopronitsaemykh osesimmetrichnykh elementov konstruksii [Explosive loading of deformable gas-permeable axisymmetric structural elements]. *PMTF*. 5. pp. 119–126. DOI: 10.15372 / PMTF20160513.
7. Gorokhov A.N., Kazakov D.A., Kochetkov A.V. et al. (2014) Issledovanie deformatsionnykh svoystv paketov pletenykh metallicheskiy setok pri kvazistaticheskom szhatii i rastyazhenii [Investigation of the deformation properties of woven metal grid packages under quasi-static compression and tension]. *Problems of Strength and Plasticity*. 73(3). pp. 251–256.
8. Kochetkov A.V., Leontyev N.V., Modin I.A. (2017) Eksperimental'no-chislennoe issledovanie deformirovaniya metallicheskiy pletenykh setok pri kvazistaticheskom nagruzhении [Experimental and numerical investigation of the deformation of metallic woven grids under quasi-static loading]. *Problems of strength and plasticity*. 79(1). pp. 104–113.
9. Bragov A.M., Zhegalov D.V., Konstantinov A.Yu., Kochetkov A.V., Modin I.A., Savikhin A.O. (2016) Eksperimental'noe issledovanie deformatsionnykh kharakteristik paketov pletenykh metallicheskiy setok pri dinamicheskom i kvazistaticheskom nagruzhении [Experimental study of the stress-strain properties of woven metal grid packages under dynamic and quasi-static loading]. *PNRPU Mechanics bulletin*. 3. pp. 252–262. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.17
10. Kapustin S.A., Churilov Yu.A., Gorokhov V.A. (2015) *Modelirovanie nelineynogo deformirovaniya i razrusheniya konstruksiy v usloviyakh mnogofaktornykh vozdeystviy na osnove MKE* [Modeling of non-linear deformation and destruction of the structures under multifactor effects on the basis of the finite-element method]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky.

УДК 629.78

DOI 10.17223/19988621/52/7

А.С. Ледков, Р.Г. Соболев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ С НАДУВНЫМ ШАРОМ- БАЛЛОНОМ ПРИ ВЫВОДЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОРБИТУ¹

Рассматривается задача вывода космического аппарата на орбиту с помощью вспомогательной тросовой системы, оснащенной стыковочным модулем с надувным баллоном. Изучается возможность перевода системы во вращение за счет действия аэродинамических сил. Разработана математическая модель системы и проведено сравнение движения тросовой системы с надувным баллоном и без него. Определены параметры орбиты космического аппарата после отделения от троса и приведена оценка сэкономленного топлива.

Ключевые слова: космическая тросовая система, уравнение Лагранжа, вывод груза, фазовый портрет, численное моделирование.

С начала космической эры и по сей день многоступенчатые ракеты-носители являются единственным средством доставки грузов на орбиту. Основным недостатком этого способа является необходимость тратить топливо на разгон самой ракеты. Поиску путей удешевления операции вывода груза посвящено большое количество научных работ, например, румынское космическое агентство предложило запускать лунный зонд с высотного аэростата [1]. В статье [2] обсуждается проект электромагнитной рельсовой пушки. Оригинальный лазерный двигатель, подпитывающийся от удаленного источника энергии, описан в [3]. Интересным и глубоко проработанным является проект космического лифта [4, 5], текущий уровень развития технологий не позволяет создать космический лифт на Земле, но это возможно на Луне или на Марсе [6]. Весьма перспективной видится возможность использования космических тросовых систем для удешевления транспортных операций в космосе. На основе вращающихся тросовых систем может быть создана система транспортировки грузов с низких околоземных орбит на геостационарную орбиту [7–9]. В работах [10–12] предложен проект использования транспортных тросовых систем регулярного сообщения Земля – Луна. А в работах [13, 14] показана возможность доставки грузов на Марс и обратно, а также на другие планеты Солнечной системы. В проекте космической тросовой системы MXER [15] предполагается совместное использование преимуществ вращающихся и электродинамических систем. Космические тросовые системы могут быть использованы для решения задачи спуска груза с орбиты [16, 17].

В данной статье рассматривается задача вывода космического аппарата (КА) на орбиту с помощью вспомогательной космической тросовой системы. Предполагается, что на низкой околоземной орбите развернута космическая тросовая система, состоящая из спутника с опущенным в верхние слои атмосферы тросом,

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№15-01-01456).

на конце которого расположен стыковочный модуль. Изначально космическая тросовая система находится в устойчивом положении около местной вертикали. В [18] предлагается закон управления, позволяющий осуществить управляемый выпуск троса для перевода системы в требуемое устойчивое положение. С помощью ракеты-носителя на орбиту выводится КА и совершает стыковку с нижним концом троса. После стыковки на модуле надувается шар-баллон и под действием аэродинамических сил космическая тросовая система переводится во вращательное движение. При достижении КА наивысшей точки происходит его отделение от троса (рис. 1). Описанная схема позволяет снизить стоимости выполнения маневра за счет отказа от использования последней ступени ракеты-носителя.

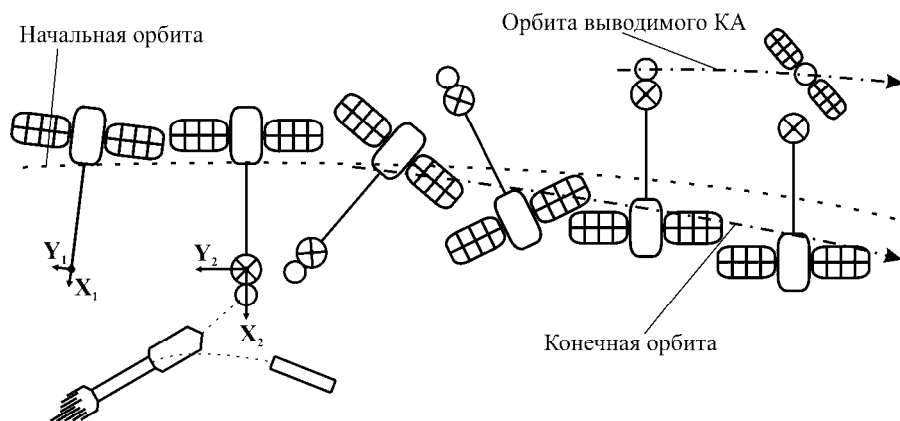


Рис. 1. Схема вывода космического аппарата на орбиту

Fig. 1. Scheme of a spacecraft orbit injection

Целью исследования является изучение возможности перевода системы во вращательное движение за счет использования надувного шара-баллона и действующих на него аэродинамических сил. Для этого будет построена математическая модель, проведено численное моделирование процесса перевода системы во вращение, определены параметры системы. Данная работа является развитием [19]. В отличие от [19] здесь не делается допущения о движении спутника по круговой орбите.

Математическая модель

Рассмотрим плоское движение космической тросовой системы, состоящей из спутника (точка А на рис. 2), груза (точка В) и соединяющего их невесомого упругого троса. Спутник рассматривается как материальная точка массой M , а груз – точка массой m . На груз помимо гравитационной силы действует сила аэродинамического сопротивления. При расчете аэродинамической силы будем считать баллон динамически симметричным шаром с площадью миделя S . Под действием этих сил он совершает колебания около местной вертикали. Движение системы будет полностью описываться системой дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода. За обобщенные координаты примем $q_1 = R$ – расстояние от центра Земли до спутника, $q_2 = \theta$ – угол истинной аномалии, $q_3 = l$ – длина троса, $q_4 = \varphi$ – угол отклонения троса от местной вертикали. Таким образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{q_i}, \quad (1)$$

где $L = T - \Pi$ – лагранжиан системы, T и Π – кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно.

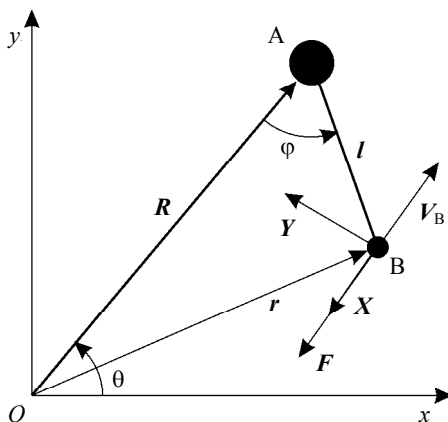


Рис. 2. Исследуемая механическая система
Fig. 2. Mechanical system of interest

Кинетическая энергия запишется как сумма энергий двух материальных точек

$$T = T_M + T_m = \frac{M}{2} V_A^2 + \frac{m}{2} V_B^2, \quad (2)$$

где T_M – кинетическая энергия спутника, T_m – кинетическая энергия груза, а их скорости, соответственно V_A и V_B , в векторном виде запишутся как

$$V_A = \dot{R} + \dot{\theta} \times r, \quad V_B = V_A + \dot{l} + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times l,$$

где вектор r – расстояние от центра Земли до груза (рис. 2).

Для потенциальной энергии в данном случае имеем сумму из энергий спутника, груза и упругого троса

$$\Pi = \Pi_M + \Pi_m + \Pi_{тр} = -\frac{\mu M}{R} - \frac{\mu m}{|r|} + \frac{c(l - l_0)}{2}, \quad (3)$$

где μ – гравитационная постоянная, l_0 – длина недеформированного троса, c – коэффициент жесткости;

$$c = \frac{ES_t}{l_0},$$

E – модуль Юнга, S_t – площадь поперечного сечения троса.

Непотенциальные обобщенные силы могут быть найдены как [20]

$$Q_{q_i} = \sum_k F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}.$$

Здесь сила F есть аэродинамическая сила, действующая на груз и равная векторной сумме силы лобового сопротивления X и подъемной силы Y [21]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}, \quad (4)$$

$$X = c_x \frac{\rho V_B^2}{2} S, \quad Y = c_y \frac{\rho V_B^2}{2} S,$$

где c_x, c_y – безразмерные коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы соответственно, ρ – плотность атмосферы. Для шара имеем $c_y = 0$, и обобщенные силы могут быть записаны в виде

$$Q_R = -\frac{c_x \rho S V_B}{2} (V_x \cos \theta + V_y \sin \theta); \quad (5)$$

$$Q_\theta = \frac{c_x \rho S V_B}{2} (V_x (r \sin \theta - l \sin(\varphi + \theta)) - V_y (r \cos \theta - l \cos(\varphi + \theta))); \quad (6)$$

$$Q_l = \frac{c_x \rho S V_B}{2} (V_x \cos(\varphi + \theta) + V_y \sin(\varphi + \theta)); \quad (7)$$

$$Q_\varphi = \frac{c_x \rho S V_B}{2} l (V_x \cos(\varphi + \theta) + V_y \sin(\varphi + \theta)). \quad (8)$$

Здесь проекции скорости точки B расписываются как

$$\begin{aligned} V_x &= -\dot{\theta} R \sin(\theta) + \dot{R} \cos(\theta) - \dot{l} \cos(\varphi + \theta) + (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) l \sin(\varphi + \theta), \\ V_y &= \dot{\theta} R \cos(\theta) + \dot{R} \sin(\theta) - \dot{l} \sin(\varphi + \theta) - (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) l \cos(\varphi + \theta). \end{aligned}$$

Подставляя (2), (3), (5) – (8) в (1), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение космической тросовой системы с учетом влияния атмосферы на нижнее тело. Используем эту систему для численного исследования возможности вывода груза на орбиту.

Численное моделирование

В качестве примера рассмотрим космическую тросовую систему со следующими параметрами: масса спутника $M = 6000$ кг, масса груза $m = 250$ кг, длина недеформированного троса $l_0 = 50$ км, модуль Юнга $E = 50$ ГПа, поперечная площадь троса $S = 3.4 \cdot 10^{-6}$ м². Плотность атмосферы ρ будем аппроксимировать экспоненциальной зависимостью

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{r-R_3}{7100}},$$

где ρ_0 – плотность атмосферы на поверхности Земли, R_3 – радиус Земли. Будем считать, что до момента стыковки спутник движется по круговой орбите радиуса $R = 6521$ км.

Предположим, что до момента стыковки космическая тросовая система находилась в стационарном состоянии. Под влиянием гравитационного момента космическая тросовая система стремится принять устойчивое радиальное положение [6]. В нашем же случае, за счет воздействия аэродинамической силы стыковочный модуль будет иметь некоторое отклонение от местной вертикали. Величина отклонения будет зависеть от геометрических размеров и массы стыковочного модуля, а также от длины троса. Так, например, для достаточно короткого троса (или легкого спутника-зонда) аэродинамические эффекты приводят к тому, что равновесная конфигурация, характеризующаяся ориентацией связки в трансверсальном

направлении, становится единственно возможной [22]. Для определения начальных условий приравняем левые части системы (1) нулю. Получим $R^* = const$, $\dot{\theta}^* = \sqrt{\mu R^{*-3}}$, $l^* = const$. Здесь звездочка означает стационарное положение. Величина отклонения φ^* может быть определена из нелинейного уравнения

$$-\frac{1}{2} \frac{\mu}{R^{*3}} l^* c_x \rho S (R^* \cos(\varphi^*) - l^*) \sqrt{(l^{*2} + R^{*2} - 2l^* R^* \cos(\varphi^*))} + m \mu R^* l^* \left(\frac{1}{(l^{*2} + R^{*2} - 2l^* R^* \cos(\varphi^*))^{3/2}} - \frac{1}{R^{*3}} \right) \sin(\varphi^*) = 0.$$

Стационарная длина троса $l^* = 50003.2$ м может быть найдена из условия равенства гравитационной силы, силы упругости и сил инерции, действующих на нижний конец троса. На рис. 3 представлен фазовый портрет, описывающий колебания нижнего конца троса до стыковки. Баллон находится в спущенном состоянии и из рисунка видно, что нижнее тело совершает колебательные движения около стационарного положения $\varphi^* = 0.057$ рад.

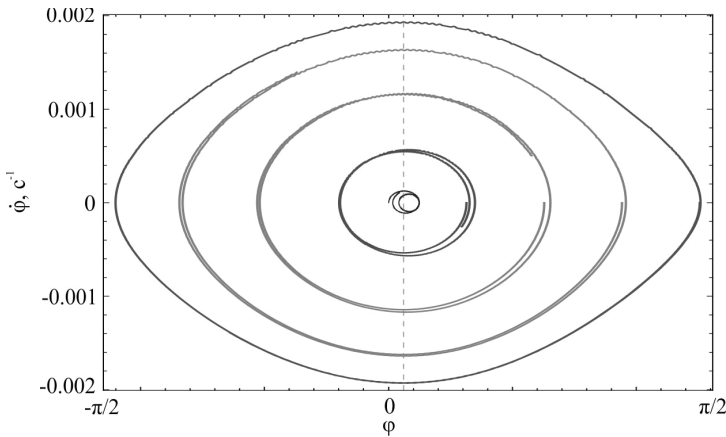


Рис. 3. Фазовый портрет для значения радиуса баллона 0.06 м

Fig. 3. Phase-plane plot for balloon radius of 0.06 m

Расчеты показывают, что на этапе ожидания стыковки, когда система находится в стационарном положении и на нижний конец действует аэродинамическая сила, высота спутника будет уменьшаться примерно на 1,5 км за период обращения системы вокруг Земли. Зависимость высоты космической тросовой системы от времени показана на рис. 4. Для компенсации этого негативного воздействия атмосферы можно использовать, например, электродинамические тросовые системы, как это предлагается в [23].

Предположим, что выводимый КА мягко пристыковался к нижнему концу тросовой системы, то есть скорость КА относительно стыковочного модуля в момент стыковки равнялась нулю. После этого происходит надувание шара-баллона и влияние аэродинамических сил на нижний конец троса значительно возрастает. Проинтегрируем численно (1) и построим фазовый портрет системы после сты-

ковки (рис. 5) для баллонов различного радиуса. Фазовый портрет показывает, что нижний конец троса выходит из зоны колебаний и переходит во вращательное движение. Серые линии соответствуют движению космической тросовой системы без учета влияния аэродинамических сил. В зависимости от радиуса баллона система будет переводиться во вращательное движение за разные временные промежутки и вращаться с разными угловыми скоростями. Для сравнения на фазовую плоскость нанесены фазовые траектории для значений радиуса баллона r_b 0.4, 0.7, 1, 2 и 4 м.

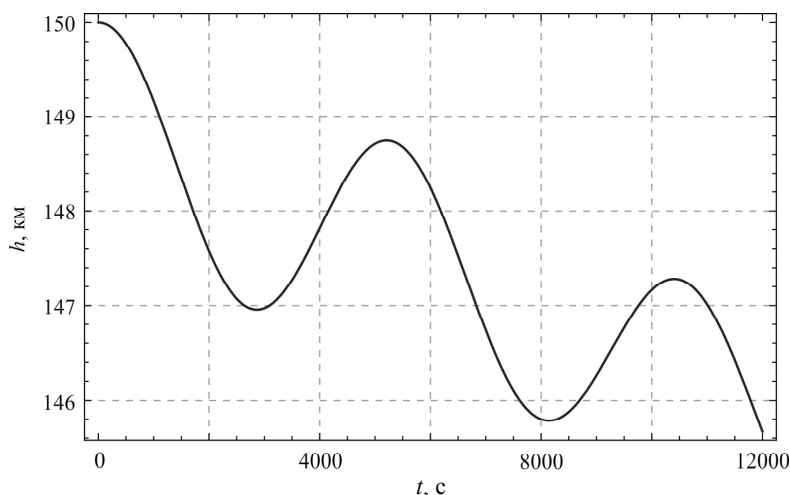


Рис. 4. Изменение высоты в режиме ожидания стыковки

Fig. 4. Altitude variation in a docking standby mode

Из рис. 5 видно, что увеличение площади баллона приводит к уменьшению времени перехода КА в верхнее положение ($\varphi = \pi$) и увеличению скорости $\dot{\varphi}$ в верхнем положении, что будет сказываться на параметрах орбиты груза после отделения от троса. Приведено сравнение характеристик орбит, по которым выводимый КА продолжит свободный орбитальный полет после отделения от троса в точке $\varphi = \pi$. Результаты приведены в табл. 1. Таблица 2 содержит сравнение характеристик орбит спутника после описанного маневра. Как можно заметить из табл. 1, перигей исходной орбиты находится на расстоянии меньше среднего радиуса Земли. Это значит, что выводимый КА без последующей стыковки с тросовой системой упал бы на поверхность Земли. Рис. 6 показывает зависимость высоты спутника при совершении маневра с надутым баллоном, с последующим его сдуванием после отделения космического аппарата от спутника. За начало численного расчета принято стационарное положение системы. Кривые 2 – 6 рассчитаны для значений радиусов баллона, приведенных в табл. 1 и 2. Жирными точками на рис. 6 отмечены моменты отделения космического аппарата от троса. Пунктирные линии показывают движение спутника после отделения груза в верхней точке и свертывания баллона. Жирные линии соответствуют движению с надутым баллоном. Линия 1 описывает движение спутника на этапе ожидания стыковки и соответствует приведенной на рис. 4 зависимости. Таким образом, использование баллонов большого радиуса более эффективно с точки зрения увели-

чения высоты орбиты КА, но приводит к падению спутника (кривые 2–4). Такая схема может быть использована, когда не требуется сохранять спутник на орбите, например в случае увода с орбиты грузового корабля Прогресс, после того как он выполнил свою основную программу.

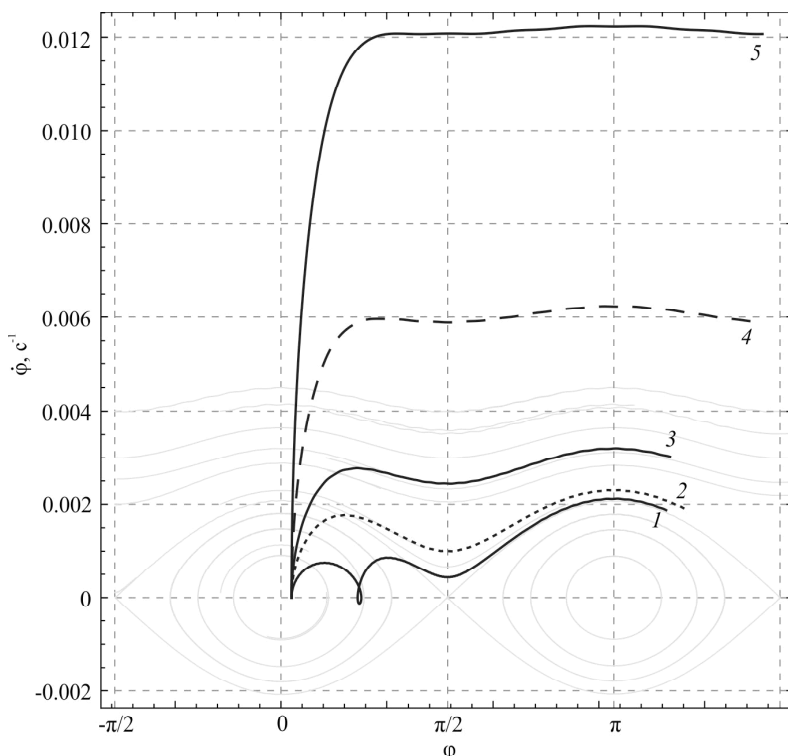


Рис. 5. Фазовые траектории для значений r_b , м: 1 – 0.4, 2 – 0.7, 3 – 1, 4 – 2, 5 – 4.

Серые траектории построены при отсутствии аэродинамической силы

Fig. 5. State space trajectory at $r_b = (1) 0.4$, (2) 0.7, (3) 1, (4) 2, and (5) 4 m.

The trajectories painted in grey indicate the cases without aerodynamic force

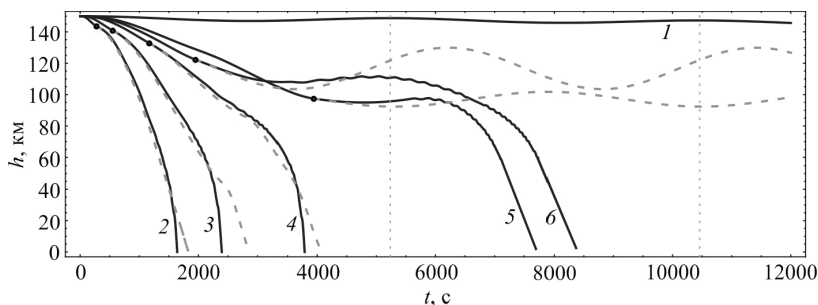


Рис. 6. Зависимость высоты спутника h от времени.

1 – 0.06, 2 – 4, 3 – 2, 4 – 1, 5 – 0.4 и 6 – 0.7 м

Fig. 6. Time dependence of a satellite altitude $h = (1) 0.06$,

(2) 4, (3) 2, (4) 1, (5) 0.4, and (6) 0.7 m

Таблица 1

Сравнение характеристик орбит космического аппарата

Параметры орбиты	Исходная орбита	$r_b = 0.4$ м	$r_b = 0.7$ м	$r_b = 1$ м	$r_b = 2$ м	$r_b = 4$ м
Эксцентриситет орбиты e	0.0227	0.0498	0.0521	0.0606	0.0972	0.1715
Параметр орбиты p , км	6324.1	6848.4	6882.3	6951.0	7200.2	7690.7
Большая полуось a , км	6327.3	6865.5	6901.1	6976.7	7268.9	7923.8
Малая полуось b , км	6325.7	6856.9	6891.6	6963.8	7234.5	7806.4
Радиус перигея r_π , км	6183.5	6523.4	6541.1	6553.3	6561.8	6564.8
Радиус апогея r_α , км	6471.2	7207.5	7260.8	7400.1	7976.1	9282.2

Таблица 2

Сравнение характеристик орбит спутника

Параметры орбиты	Исходная орбита	$r_b = 0.4$ м	$r_b = 0.7$ м	$r_b = 1$ м	$r_b = 2$ м	$r_b = 4$ м
Эксцентриситет орбиты e	0	0.0016	0.0017	0.0042	0.0081	0.0145
Параметр орбиты p , км	6521.0	6469.6	6488.3	6482.7	6462.1	6421.2
Большая полуось a , км	6521.0	6469.7	6488.4	6482.8	6462.5	6422.5
Малая полуось b , км	6521.0	6469.7	6488.4	6482.7	6462.3	6421.8
Радиус перигея r_π , км	6521.0	6459.6	6477.7	6455.5	6410.3	6329.1
Радиус апогея r_α , км	6521.0	6479.7	6499.1	6510.1	6514.6	6515.9

Оценка экономии топлива

Предположим, что использование космической тросовой системы заменяет схему двухимпульсного перелета. Траектория, по которой происходит перелет между начальной и конечной орбит, называется полуэллипсом Гоманна. Для оптимальной схемы импульсы скорости ΔV прикладываются в апсидальных точках траектории. Суммарное приращение скорости будет состоять из суммы первого и второго импульса [24]. А их величины определяются как разность двух орбитальных скоростей в точке касания этих орбит. В общем случае орбитальная скорость вычисляется по следующей формуле [25]

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1 + e + 2e \cos(\theta))},$$

для апсидальных точек выражение упрощается

$$V_{\pi,\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1 \pm e)},$$

где индексы π и α соответствуют скоростям КА в точке перигея и апогея. Или если переписать через радиусы перигея r_π и апогея r_α

$$V_{\pi,i} = \sqrt{\frac{2\mu r_{\alpha,i}}{r_{\pi,i}(r_{\pi,i} + r_{\alpha,i})}}, \quad V_{\alpha,i} = \sqrt{\frac{2\mu r_{\pi,i}}{r_{\alpha,i}(r_{\pi,i} + r_{\alpha,i})}},$$

здесь нижний индекс $i = 1, 2, 3$ обозначает номер орбиты. Пусть 1 – исходная орбита, 2 – орбита перелета, 3 – конечная орбита. Вычисляя суммарный импульс и подставляя его в формулу Циолковского [24], получим соотношение для оценки массы топлива, сэкономленного при использовании космической тросовой системы

$$m_T = m_0 \left(1 - \exp \left(- \frac{V_{\pi,2} - V_{\alpha,1} + V_{\alpha,3} - V_{\alpha,2}}{W} \right) \right), \quad (9)$$

где W есть скорость истечения газов из сопла двигателя, для примера возьмем ее равной 500 м/с.

Рассчитаем массу сэкономленного топлива для значений радиусов перигея и апогея исходной и конечной ($r_b = 4$ м) орбиты из таблицы 1. Получаем 224.6 кг. В случае если бы система переводилась во вращение с помощью реактивного двигателя, эквивалентного по эффективности баллону с радиусом 0.7 м, было бы необходимо затратить 62 кг.

Заключение

Рассмотрена задача доставки на орбиту космического аппарата с помощью тросовой системы с надувным баллоном. Для исследования осуществимости описанной схемы вывода с помощью формализма Лагранжа была разработана математическая модель космической тросовой системы, в рамках которой спутник рассматривался как материальная точка, трос – как невесомый упругий стержень, а КА с надутым баллоном – как твердое тело сферической формы. С помощью разработанной модели проведено сравнение движения системы с надувным баллоном и без него. Для разных значений радиуса баллона определены параметры орбиты космического аппарата после отделения от троса. Произведен расчет сэкономленного топлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. HAAS Orbital Rocket Launcher (Brochure), ARCASPACE. 2012. DOI: 10.1155/2012/830536.
2. Jones R.M. Electromagnetically launched microspacecraft for space science missions // J. Spacecraft and Rockets. 1989. V. 26. No. 5. P. 338–342.
3. Krier H., GLUMB R.J. Concepts and status of laser-supported rocket propulsion // J. Spacecraft and Rockets. 1984. V. 21. No. 1. P. 70–79. DOI: 10.2514/3.8610.
4. Edwards B.C. Design and deployment of a space elevator // Acta Astronautica. 2000. V. 47. No. 10. P. 735–744.
5. Ледков А.С., Пикалов Р.С. Исследование влияния движения подъемника на динамику космического лифта // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. No. 5. P. 206–216. DOI: 10.7463/0514.0710704.
6. Pugno N.M. On the strength of the carbon nanotube-based space elevator cable: from nanomechanics to megamechanics // J. Physics: Condensed Matter. 2006. V. 18. No. 33. P. S1971.
7. Bangham M.E., Lorenzini E.C., Vestal L. Tether Transport System Study. NASA; TP-1998-206959. 1998.
8. Carroll J.A. Preliminary Design of a 1 km/sec Tether transport facility // Final Report on NASA contract NASW-4461. 1991. V. 78.
9. Lorenzini E.C. et al. Mission analysis of spinning systems for transfers from low orbits to geostationary // J. Spacecraft and Rockets. 2000. V. 37. No. 2. P. 165–172.
10. Hoyt R.P. LEO-Lunar Tether Transport System // AIAA Paper 97-2794, 33rd Joint Propulsion Conference. 1997.
11. Hoyt R.P., Forward R.L. Tether Transport from Sub-Earth-Orbit to the Moon... And Back! // 1997 International Space Development Conference, Orlando FL. 1997.
12. Hoyt R.P., Uphoff C. Cislunar tether transport system // J. Spacecraft and Rockets. 2000. V. 37. No. 2. P. 177–186.
13. Hoyt R.P., Forward R.L., Nordley G.D., Uphoff C.W. Rapid Interplanetary Tether Transport // 50th Int. Astronautical Congress, Netherlands, Amsterdam, Oct 1999. Amsterdam, 1999.

14. Nordley G.D., Forward R.L. Mars-earth rapid interplanetary tether transport system: I. Initial feasibility analysis // J. Propulsion and Power. 2001. V. 17. No. 3. P. 499–507. DOI: 10.2514/2.5798.
15. Marshall L., Finkenor M. Space tethers // Aerospace America. 2004. No. 12. P. 92.
16. Асланов В.С., Ледков А.С., Стратилатов Н.Р. Влияние на вращательное движение КА тросовой системы, предназначенной для доставки груза на землю // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2009. № 1. С. 54–60.
17. Щербаков В.И. Аналитическая модель маневра космической тросовой системы для спуска с орбиты малого КА // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-2. С. 367–368.
18. Дон Ч., Заболотнов Ю.М., Ван Ч. Анализ динамики развевываемой космической тросовой системы с атмосферным зондом // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4-4.
19. Ледков А.С., Жаринов М.К. Использование надувного баллона в задаче вывода груза на орбиту с помощью тросовой системы // Интернет-журнал Науковедение. 2014. № 4 (23).
20. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учеб. пособие. Наука, 1990.
21. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. 1976.
22. Шахов Е.М. Колебания спутника-зонда, буксируемого на нерастяжимой нити в неоднородной атмосфере // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52. № 4. С. 567.
23. Sorensen K. Momentum eXchange Electrodynamic Reboost (MXER) Tether Technology Assessment Group Final Report // NASA/MSFC In-Space Propulsion Technology Office, Huntsville, AL. 2003. V. 4.
24. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета: учеб. пособие. М.: Наука, 1990.
25. Балк М.Б. Элементы динамики космического полёта. 1965.

Статья поступила 01.07.2017 г.

Ledkov A.S., Sobolev R.G. (2018) MATHEMATICAL SIMULATION OF A TETHERED SATELLITE SYSTEM MOTION WITH AN INFLATABLE SPHERICAL BALLOON DURING A SPACECRAFT ORBIT INJECTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 63–74

DOI 10.17223/19988621/52/7

This paper deals with a problem of spacecraft delivery into orbit using a tethered satellite system. Tethered system consists of satellite, elastic tether, and docking module equipped with an inflatable balloon. Spacecraft placed in an orbit makes a soft docking. The balloon is inflated after docking and the system transfers into rotation mode due to aerodynamic forces. When a half-turn has been made, the spacecraft is separated from the docking module. The objective of this paper is to study an applicability of the orbital injection scheme described. The mathematical model is developed using Lagrange equations of the second kind. It takes into account the effect of aerodynamic forces on the inflatable balloon. The numerical simulation of the system motion is implemented. A comparison of mechanical system motion with and without inflatable balloon is performed. The spacecraft orbit parameters are evaluated for different balloon radius. The estimation of unspent jet propellant is exposed.

Keywords: tethered satellite system, Lagrange equations, payload injection, phase-plane plot, numerical simulation.

LEDKOV Alexander Sergeevich (Candidate of Technical Science, Samara National Research University, Samara, Russian Federation). E-mail: ledkov@inbox.ru

SOBOLEV Ruslan Gennad'evich (Samara National Research University, Samara, Russian Federation). E-mail: rus7522@yandex.ru

REFERENCES

1. HAAS Orbital Rocket Launcher (Brochure). *ARCA Space*. DOI:10.1155/2012/830536.
2. Jones R.M. (1989) Electromagnetically launched microspacecraft for space science missions. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 26(5). pp. 338–342. DOI: 10.2514/3.26077.
3. Krier H., Glumb R. (1984) Concepts and status of laser-supported rocket propulsion. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 21(1). pp. 70–79. DOI: 10.2514/3.8610.
4. Edwards B.C. (2000) Design and deployment of a space elevator. *Acta Astronautica*. 47(10). pp. 735–744. DOI: 10.1016/S0094-5765(00)00111-9.
5. Ledkov A.S., Pikalev R.S. (2014) Study of influence of climber motion on the space elevator dynamics. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU imeni N.E. Bauman – Science and Education: Scientific Publication*. 5. pp. 206–216. DOI: 10.7463/0514.0710704.
6. Pugno N.M. (2006) On the strength of the carbon nanotube-based space elevator cable: from nanomechanics to megamechanics. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 18(33). DOI: 10.1088/0953-8984/18/33/S14.
7. Bangham M.E., Lorenzini E.C., Vestal L. (1998) Tether Transport System Study. *NASA/TP-1998-206959*.
8. Carroll J.A. (1991) Preliminary Design of a 1 km/sec Tether Transport Facility. *Final Report on NASA contract NASW-4461*.
9. Lorenzini E.C., Cosmo M.L., Kaiser M., Bangham M.E. et al. (2000) Mission analysis of spinning systems for transfers from low orbits to geostationary. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 37(2). pp. 165–172. DOI: 10.2514/2.3562.
10. Hoyt R.P. (1997) LEO-Lunar tether transport system. *AIAA Paper 97-2794, 33rd Joint Propulsion Conference*.
11. Hoyt R.P., Forward R.L. (1997) Tether transport from sub-Earth-orbit to the Moon... And back!. *Int. Space Development Conference*.
12. Hoyt R.P., Uphoff C. (2000) Cislunar tether transport system. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 37(2). pp. 177–186.
13. Hoyt R.P., Forward R.L., Nordley G.D., Uphoff C.W. (1999) Rapid interplanetary tether transport. *50th International Astronautical Congress, Netherlands, Amsterdam*.
14. Nordley G.D., Forward R.L. (2001) Mars-Earth rapid interplanetary tether transport system: I. Initial feasibility analysis. *Journal of Propulsion and Power*. 17(3). pp. 499–507. DOI: 10.2514/2.5798.
15. Marshall L., Finkenor M. (2004) Space tethers. *Aerospace America*. 12. p. 92.
16. Aslanov V.S., Ledkov A.S., Stratilatov N.R. (2009) Vliyanie na vrashchatel'noe dvizhenie KA trossovoy sistemy, prednaznachennoy dlya dostavki gruzha na Zemlyu [Effect of the tether system delivering freights to the Earth on the rotary motion of spacecraft]. *Obscherossiyskiy nauchno-tehnicheskii jurnal «Polet» – All-Russian Scientific-Technical Journal "Polyot"*. 1. pp. 54–60.
17. Shcherbakov V.I. (2011) Analytical model of a tethered satellite system maneuver for the descent of a small space vehicle from the orbit. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4-2. pp. 367–368.
18. Dong Z., Zabolotnov Y.M., Wang C. (2016) Analysis of deployment dynamics of a space tether system with an atmospheric sounder. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN – Academic Journal "Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"*. 18(4-4). pp. 726–732.
19. Ledkov A.S., Zharinov M.K. (2014) Ispol'zovanie naduvnovo ballona v zadache vyvoda gruzha na orbitu s pomoshch'yu trosovoy sistemy [Application of inflatable balloon in the problem of payload orbit injection by tether satellite system]. *Internet-jurnal Naukovedenie*. 4(23). pp. 1–18.
20. Markeev A.P. (1990) *Teoreticheskaya mekhanika: Uchebnoe posobie* [Theoretical mechanics: a textbook]. Moscow: Nauka.
21. Krasnov N.F. (1976) *Aerodinamika* [Aerodynamics]. Moscow: Visshaya shkola.
22. Shakhov E.M. (1988) Kolebaniya sputnik-zonda, buksiruемого na nerastyazhimoy niti v neodnorodnoy atmosfere [Oscillations of the satellite-sounder towed on an inextensible cord]

- in heterogeneous atmosphere]. *Prikl. Matematika i Mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 52(4). pp. 567–572.
23. Sorensen K. (2003) Momentum Exchange Electrodynamic Reboost (MXER) Tether Technology Assessment Group Final Report. *NASA/MSFC In-Space Propulsion Technology Office*. 4.
 24. Okhotsimskiy D.E., Sikhuralidze Yu.G. (1990) *Osnovy mekhaniki i kosmicheskogo poleta: Uchebnoe posobie* [Fundamentals of mechanics and space flight: a textbook]. Moscow: Nauka.
 25. Balk M.B. (1965) *Elementy dinamiki kosmicheskogo poleta* [Principles of space flight dynamics]. Moscow: Nauka.

УДК 532.529:662.62

DOI 10.17223/19988621/52/8

О.В. Матвиенко, А.О. Андропова, А.В. Андриасян, Н.А. Мамадраимова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПО НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

Проведено исследование движения сферической частицы по наклонной поверхности, обдуваемой сдвиговым потоком. Проанализированы различные режимы движения частицы в потоке: качение, скольжение, пробуксовка. Исследование движения по наклонной поверхности, обдуваемой воздушным потоком, показывает, что скорость центра масс частиц увеличивается с увеличением ее диаметра, при этом скорость частиц быстро достигает стационарного значения. Изменение угловой скорости ω характеризуется на начальном этапе резким ее возрастанием, после чего качение частицы происходит с постоянной угловой скоростью. Для малых размеров частицы ее движение на начальном участке характеризуется качением без скольжения, однако затем переходит в режим проскальзывания.

Ключевые слова: *механика жидкости, дисперсная фаза, суспензии, качение, скольжение.*

Математическая модель

Изучение движения частиц аэрозоля, их осаждения и коагуляции составляет предмет весьма важного раздела учения об аэродисперсных системах, который можно назвать механикой аэрозолей [1, 2]. Сюда же целесообразно отнести тесно примыкающий к проблемам осаждения и сепарации [3, 4] вопрос о явлениях, происходящих при соприкосновении частиц друг с другом и с макроскопическими телами, а также весьма важный, мало изученный вопрос об обратных процессах – отрыве частиц от стенок и переходе порошкообразных тел в аэрозольное состояние [5].

В работах [6, 7] представлены результаты экспериментального исследования гравитационного осаждения консолидированной системы твердых монодисперсных сферических частиц в вязкой жидкости в широких диапазонах их концентрации и чисел Рейнольдса и Стокса. На основе экспериментальных данных по изменению скорости осаждения совокупности частиц получена критериальная зависимость для коэффициента сопротивления совокупности частиц в исследуемом режиме осаждения.

Авторами [8] проведено исследование движения частицы в окрестности подвижной стенки. Результаты расчетов показывают, что увеличение частоты колебания пластины ω увеличивает частоту изменения скорости частицы. С ростом частоты колебаний пластины колебательный режим изменения скорости частицы наблюдается в более тонком слое, прилегающем к пластине. С увеличением диаметра частиц увеличивается их инерционность. Амплитуда колебаний частицы уменьшается с увеличением частоты колебаний пластины.

В работе [9] представлены экспериментальные исследования режима соударения твердой сферической частицы, движущейся в жидкости, с горизонтальной

плоской стенкой. В результате проведенных измерений был определен коэффициент восстановления при ударе. Установлено, что при малых значениях числа Стокса $Stk = \rho_p v_n d_p / \mu$, являющегося отношением силы инерции частицы к силе внутреннего трения (плотность частицы, диаметр частицы, динамическая вязкость жидкости и скорость частицы) коэффициент восстановления равен нулю и соударение со стенкой происходит без отскакивания. С увеличением значения числа Стокса коэффициент восстановления монотонно увеличивается, асимптотически достигая значений, соответствующих удару в вакууме.

В работе [10] представлено исследование ударного взаимодействия частиц в потоке. Проанализировано осаждение бидисперсной смеси с учетом соударения частиц. Проведенные расчеты показали, что соударения частиц существенным образом определяют скорость их осаждения в воздушной среде и практически не оказывают влияния на процессы седиментации в жидкости.

В [11] предложена модель движения частицы, движущейся в газе вблизи шероховатой стенки. На основе экспериментальных данных предложена математическая модель движения частицы по поверхности средней и малой шероховатости, размер которой не превышает размера частицы. В результате проведенных экспериментов определена величина силы адгезии частицы вблизи шероховатой стенки.

Авторами [12] проведено экспериментальное и теоретическое исследование движения твердой сферы по наклонной плоскости под действием силы тяжести в присутствии поперечного потока вязкой жидкости. Установлено, что движение тяжелой сферы по наклонной плоскости в жидкости ускоряется, если жидкость течет в поперечном направлении. Эффект увеличивается с ростом скорости поперечного потока, с ростом коэффициента трения и с уменьшением угла наклона плоскости. Эффект ускорения оседания обусловлен поворотом вектора силы контактного трения скольжения под действием поперечного потока.

Целью работы является математическое моделирование движения сферической частицы, обдуваемой сдвиговым потоком, по наклонной поверхности.

Уравнение движения центра масс частицы можно записать в виде [1, 13]:

$$\rho V \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1)$$

где ρ – средняя плотность частицы; V – ее объем; $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ – главный вектор внешних действующих сил. Рассмотрим более подробно систему сил, действующих на частицу. Силу тяжести можно определить по формуле

$$\vec{F}_G = \rho V \vec{g}. \quad (2)$$

Наличие локального градиента давления приводит к появлению силы, направленной в сторону градиента давления [2, 14]:

$$\vec{F}_p = - \int_s p \vec{n} ds = - \int_V \text{grad}(p) dV \approx - \text{grad}(p) V. \quad (3)$$

Градиент давления, создаваемый статическим давлением, $\text{grad}(p) = -\rho_e \vec{g}$. Складывая силу тяжести и силу, вызванную градиентом статического давления, получим силу Архимеда [1]

$$\vec{F}_A = (\rho - \rho_e) V \vec{g}. \quad (4)$$

Сила сопротивления в однородном потоке газа определяется как [15, 16]

$$\vec{F}_D = -\frac{C_D}{8} \pi d_p^2 \rho_e |\vec{v} - \vec{v}_e| (\vec{v} - \vec{v}_e), \quad (5)$$

где C_D – коэффициент сопротивления; d_p – диаметр частицы, $\vec{v}_e$ – скорость несущей среды, $\vec{v}$ – скорость центра масс частицы.

В потоке с неравномерным распределением скорости $\vec{v}_e$ частица может совершать вращательное движение относительно своего центра масс. При этом в области, где скорость набегающего потока имеет более высокие значения, формируется область пониженного давления, что, в свою очередь, приводит к образованию подъемной силы, так называемой силы Саффмана [17, 18]. Величина этой силы определяется по формуле

$$\vec{F}_S = \frac{C_S}{4} \pi d_p^2 \sqrt{\frac{\mu_e \rho_e}{|\text{rot}(\vec{v}_e)|}} (\vec{v} - \vec{v}_e) \times \text{rot}(\vec{v}_e), \quad (6)$$

где $C_S = 0.01$ – константа Саффмана.

В результате несовпадения угловой скорости вращения частицы, вызванного несимметричным обтеканием, и завихренности обтекающего потока возникает сила Магнуса. Эту силу можно определить следующим образом [1, 17]:

$$\vec{F}_M = \frac{C_M}{8} \pi d_p^2 \rho_e \frac{|\vec{v} - \vec{v}_e|}{|\vec{\omega} - \vec{\omega}_e|} (\vec{\omega} - \vec{\omega}_e) \times (\vec{v} - \vec{v}_e), \quad (7)$$

где $C_M = 0.05$ – константа Магнуса.

Рассмотрим движение частицы диаметром d_p , находящейся на наклонной поверхности с углом наклона к горизонту α , обдуваемую воздушным потоком с линейным распределением скорости $v_e = \gamma y$ (рис. 1). В качестве сил, действующих на частицу, будем рассматривать силу Архимеда $\vec{F}_A$ (1), подъемные силы Саффмана $\vec{F}_S$ (6) и Магнуса $\vec{F}_M$ (7), силу сопротивления $\vec{F}_D$ (5). Также необходимо учитывать силу реакции опоры $\vec{F}_R$ ($F_R = \max(0, F_G \cos \alpha - F_M - F_S)$) и силу трения $\vec{F}_{\text{fr}}$.

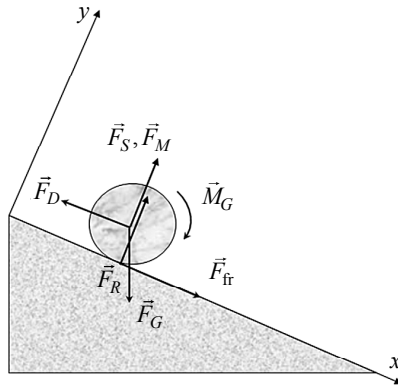


Рис. 1. Схема движения частицы по наклонной поверхности
Fig. 1. Scheme of the particle motion along an inclined surface

Сила трения скольжения определяется законом Кулона – Амонтона [19] и может быть определена как

$$\vec{F}_{\text{fr,sl}} = -f_{\text{sl}} F_R \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (8)$$

Сила трения покоя препятствует возникновению скольжения тел. Она направлена противоположно силе, пытающейся вывести тело из состояния равновесия. Величина этой силы изменяется от нуля до максимального значения, которое может быть определено как

$$|F_{\text{fr,stat}}| = f_{\text{stat}} F_R. \quad (9)$$

В уравнениях (8), (9) $f_{\text{fr,sl}}$ – коэффициент трения скольжения, f_{stat} – коэффициент трения покоя. В расчетах $f_{\text{fr,sl}} = 0.15$, $f_{\text{stat}} = 0.2$.

В результате взаимодействия несущей среды и катящейся частицы возникает пара сил с гидродинамическим моментом равным [1]:

$$\vec{M}_G = -\frac{1}{64} C_\omega \rho d^5 |\vec{\omega} - \vec{\omega}_e| (\vec{\omega} - \vec{\omega}_e). \quad (10)$$

Параметр C_ω , согласно результатам исследований [1, 20], вычисляется в соответствии с корреляцией

$$C_\omega = \frac{12.9}{\sqrt{\text{Re}_\omega}} + \frac{128.4}{\text{Re}_\omega}, \quad \text{Re}_\omega = \frac{\rho |\omega| d^2}{2\mu}. \quad (11)$$

Трение качения происходит при наличии контактной площадки между частицей и опорной поверхностью. В результате реакция опоры смещается в сторону возможного движения и создает момент сопротивления.

Максимальное значение расстояния между линией действия реакции опоры и нормалью к поверхности, проведенной через центр масс тела, составляет половину длины площадки контакта. Это расстояние принимают за коэффициент трения качения. Таким образом, предельная величина момента трения качения может быть определена как

$$|M_{\text{fr,max}}| = F_R \delta, \quad (12)$$

где δ – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. В расчетах коэффициент трения качения принимался равным $\delta = 0.05 d_p$.

Динамика частицы в потоке определяется дифференциальными уравнениями, описывающими движение центра масс, а также вращение частицы [19]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \pi d_p^3 \rho_p \frac{dv_x}{dt} = & \frac{1}{6} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) - \frac{C_D}{8} \pi d_p^2 \rho_e |\vec{v} - \vec{v}_e| (v_x - \gamma y) - \\ & - \frac{C_S}{4} \pi d_p^2 v_y \sqrt{\mu_e \rho_e |\gamma|} - \frac{C_M}{8} \pi d_p^2 \rho_e \frac{|\vec{v} - \vec{v}_e|}{|\vec{\omega} - \vec{\omega}_e|} (\omega - \gamma) v_y + F_{\text{fr}}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \pi d_p^3 \rho_p \frac{dv_y}{dt} = & -\frac{1}{6} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \cos(\alpha) - \frac{C_D}{8} \pi d_p^2 \rho_e |\vec{v} - \vec{v}_e| v_y + \\ & + \frac{C_S}{4} \pi d_p^2 (v_x - \gamma y) \sqrt{\mu_e \rho_e |\gamma|} + \frac{C_M}{8} \pi d_p^2 \rho_e \frac{|\vec{v} - \vec{v}_e|}{|\vec{\omega} - \vec{\omega}_e|} (\omega - \gamma) (v_x - \gamma y) + F_R; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{1}{60} \pi d_p^5 \rho_p \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{64} C_\omega \rho_e d_p^5 |\vec{\omega} - \vec{\omega}_e| (\omega - \gamma) - \frac{1}{2} F_{\text{fr}} d_p \frac{\omega}{|\omega|} - M_{\text{fr}}. \quad (15)$$

Рассмотрим различные сценарии движения частицы.

Отрыв частицы от поверхности возможен при выполнении условия $dv_y/dt > 0$. С учетом уравнения (14) условие отрыва частицы от поверхности может быть представлено в виде

$$d_p g \cos(\alpha) < \frac{3}{4} \left(2C_S \frac{\sqrt{\mu_e \rho_e \gamma}}{(\rho_p - \rho_e)} + \frac{C_M}{8} \frac{\rho_e}{(\rho_p - \rho_e)} \frac{|v_x - \gamma d_p|}{|\omega - \gamma|} (\omega - \gamma) \right) (v_x - \gamma d_p). \quad (16)$$

Проведенные расчеты показали, что в исследуемом диапазоне параметров: $10 \leq d_p \leq 1000$ мкм, $\gamma < 10$ с⁻¹, $6^\circ < \alpha < 87^\circ$, $\rho = 2600$ кг/м³, $\rho_e = 1.2$ кг/м³ условие отрыва частицы от поверхности (13) не реализуется. Таким образом, в рассмотренных случаях частица движется вдоль поверхности.

Определим условия равновесия частицы:

$$\left| \frac{1}{6} \pi d_p^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) + \frac{C_D}{32} \pi d_p^4 \gamma |\gamma| \rho_e \right| \leq f_{\text{stat}} F_R; \quad (17)$$

$$\left| -\frac{1}{64} C_\omega \rho d_p^5 \gamma |\gamma| + \frac{1}{2} F_{\text{fr}} d_p \right| \leq F_R \delta. \quad (18)$$

При этом сила реакции опоры определяется выражением

$$F_R = \frac{1}{6} \pi d_p^3 (\rho_p - \rho_e) g \cos(\alpha) + \frac{C_S}{8} \pi d_p^3 \gamma \sqrt{\mu_e \rho_e |\gamma|} - \frac{C_M}{16} \pi d_p^3 \rho_e \gamma |\gamma| d. \quad (19)$$

Условием вращением частицы без скольжения будет невыполнение условия (18) при выполнении условия (17). Этот случай может реализоваться при обдуве поверхности восходящим несущим потоком ($\gamma < 0$). При этом составляющая силы тяжести, направленная вдоль поверхности уравнивается силой трения и силой сопротивления. Вращение частицы обуславливается действием гидродинамического момента, вызванного неоднородным полем скорости потока несущей среды.

Поступательное движение частицы, то есть скольжение без вращения осуществляется при выполнении условия (18) и невыполнении условия (17).

Если условия (17), (18) не выполняются одновременно, то частица скатывается по наклонной поверхности. В зависимости от величин действующих сил и моментов возможно: качение частицы без скольжения ($|v_x| = 0.5|\omega|d_p, v_y = 0$), пробуксовка частицы ($|v_x| < 0.5|\omega|d_p, v_y = 0$); качение частицы со скольжением ($|v_x| > 0.5|\omega|d_p, v_y = 0$).

Определим условия качения частицы без скольжения. В этом случае должно выполняться кинематическое соотношение $v_x = 0.5\omega d_p$. Таким образом, уравнение (15) может быть записано в виде

$$\frac{1}{30} \pi d_p^4 \rho_p \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{16} C_\omega \rho d_p^3 \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) + \frac{1}{2} F_{\text{fr}} d_p + F_R \delta \frac{v_x}{|v_x|}. \quad (20)$$

Совместное решение уравнений (13) и (20) позволяет определить условие качения частицы без скольжения и пробуксовки:

$$\left| \left(\frac{1}{9} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) - \frac{2C_D - 5C_\omega}{24} \pi d_p^2 \rho_e \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) \right) \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{3}{3} F_R \frac{\delta}{d_p} \right| \leq \leq f_{\text{stat}} F_R. \quad (21)$$

При движении частицы без скольжения величина силы трения будет определяться зависимостью

$$F_{\text{fr}} = \frac{1}{9} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{2C_D - 5C_\omega}{24} \pi d_p^2 \rho_e \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{3}{3} F_R \frac{\delta}{d_p}. \quad (22)$$

Качение частицы со скольжением происходит при выполнении условия

$$f_{\text{stat}} F_R < \left(\frac{1}{9} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) - \frac{2C_D - 5C_\omega}{24} \pi d_p^2 \rho_e \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) \right) \times \times \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{3}{3} F_R \frac{\delta}{d_p}. \quad (23)$$

Режим пробуксовки становится возможным при

$$f_{\text{stat}} F_R < \left(-\frac{1}{9} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) + \frac{2C_D - 5C_\omega}{24} \pi d_p^2 \rho_e \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) \right) \times \times \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{3}{3} F_R \frac{\delta}{d_p}. \quad (24)$$

Результаты математического моделирования

Рассмотрим результаты численного моделирования движения сферической частицы по наклонной поверхности, обдуваемой потоком несущей среды. Уравнения динамики частицы (13) – (15) решаются со следующими начальными условиями:

$$t = 0: v_x = 0, \omega = 0, x = 0. \quad (25)$$

На рис. 2 – 4 представлены динамические характеристики движения частицы различного диаметра по пластине, наклоненной к горизонту на угол $\alpha = 45^\circ$, при интенсивности обдува $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$. Как видно из рис. 2, скорость центра масс частиц увеличивается с увеличением ее диаметра. При этом скорость частиц быстро уходит на стационарное значение, определяемое балансом сил тяжести и сопротивления. За исключением небольшого начального этапа, изменение координаты со временем описывается линейной зависимостью.

Изменение угловой скорости ω , характеризуется на начальном этапе резким ее возрастанием, после чего качение частицы происходит с постоянной угловой скоростью, асимптотически стремясь к стационарному значению ω_{st} (рис. 3).

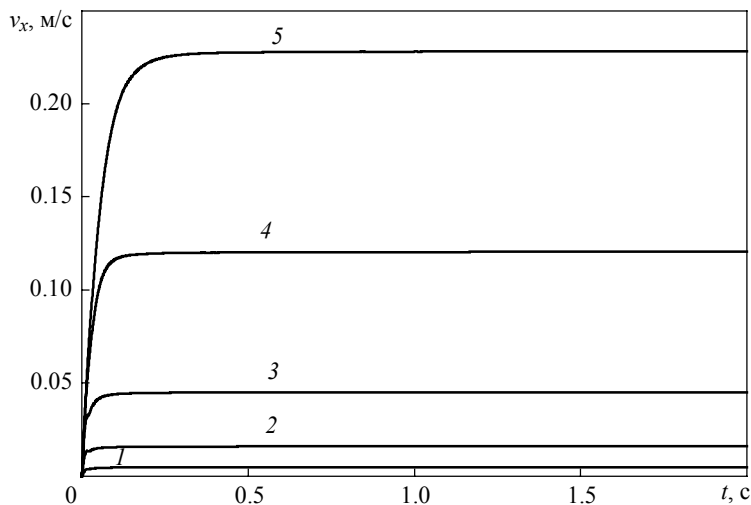


Рис. 2. Изменение скорости центра масс частицы со временем для разных значений ее диаметра $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ c}^{-1}$: 1 – $d_p = 50$, 2 – 100, 3 – 200, 4 – 500, 5 – 1000 мкм

Fig. 2. Variation in the velocity of particle center of mass with time for various diameters at $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$: $d_p = (1) 50$, (2) 100, (3) 200, (4) 500, and (5) 1000 μm

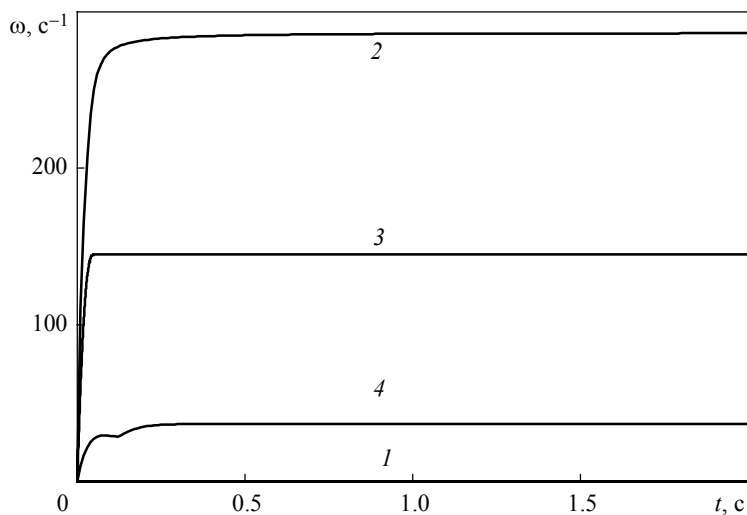


Рис. 3. Изменение угловой скорости частицы со временем для разных значений ее диаметра $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ c}^{-1}$: 1 – $d_p = 100$, 2 – 200, 3 – 500, 4 – 1000 мкм

Fig. 3. Variation in the angular velocity of the particle with time for various diameters at $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$: $d_p = (1) 100$, (2) 200, (3) 500, and (4) 1000 μm

Для частиц диаметром менее 100 мкм угловая скорость $\omega = 0$ вследствие выполнения условия (18) и невыполнения условия (17). Это означает, что происходит режим чистого скольжения, т.е. движение без вращения. Более крупные частицы движутся с вращением. Стационарное значение угловой скорости увеличивается с увеличением диаметра частиц вплоть до 200 мкм. С дальнейшим ростом диаметра частиц угловая скорость уменьшается. Уменьшение ω_{st} для крупных частиц можно объяснить из следующих соображений. С увеличением диаметра частицы увеличивается как линейная, так и угловая скорости частицы, что приводит к росту подъемных сил, Сафмана и Магнуса и, как следствие этого, уменьшается давление на опору. Это приводит к уменьшению вращательного момента, создаваемого силой трения. Таким образом, возрастает поступательная часть движения, связанная со скольжением. При этом, для $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 45^\circ$ движение крупных частиц $d_p > 1000$ мкм характеризуется скольжением по поверхности. Для малых размеров частицы ее движение на начальном участке характеризуется качением без скольжения, однако затем переходит в режим проскальзывания (рис. 4).

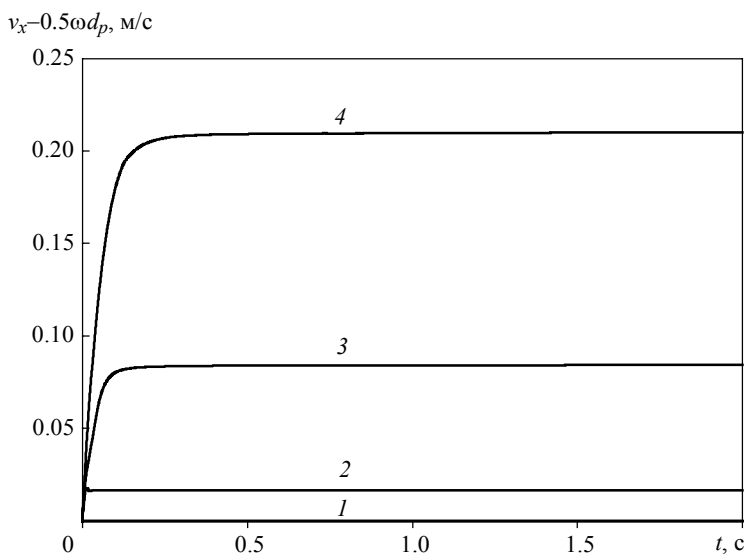


Рис. 4. Изменение скорости проскальзывания частицы со временем для разных значений ее диаметра $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$: 1 – $d_p = 50$, 2 – 100, 3 – 200, 4 – 500, 5 – 1000 мкм

Fig. 4. Variation in the slip velocity of the particle with time for various diameters at $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$: $d_p = (1) 50$, (2) 100, (3) 200, (4) 500, and (5) 1000 μm

Влияние наклона поверхности характеризуют рис. 5 – 8. С увеличением угла α скорость частицы увеличивается, достаточно быстро выходя на стационарный режим (рис. 5), так что закон движения близок к линейному.

Угловая скорость увеличивается до угла наклона поверхности $\alpha = 13^\circ$, после чего уменьшается с увеличением угла наклона поверхности (рис. 6).

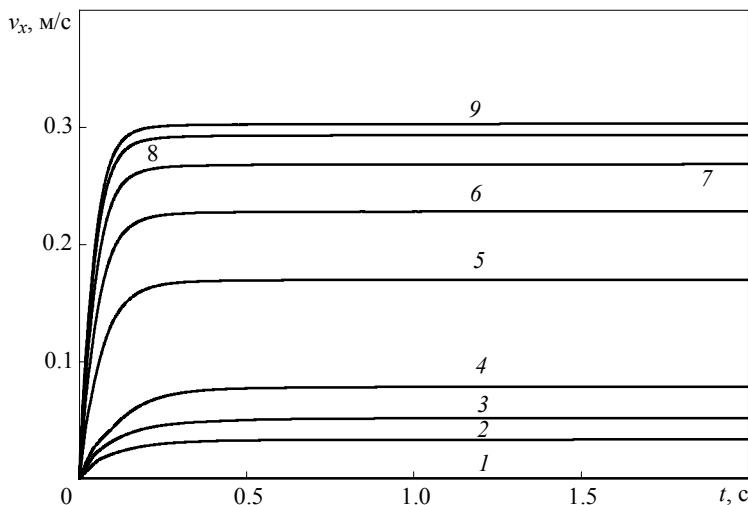


Рис. 5. Изменение скорости центра масс частицы со временем для разных значений угла наклона поверхности $d_p = 100$ мкм, $\gamma = 1$ с⁻¹: 1 – $\alpha = 0$, 2 – 10° , 3 – 12.5° , 4 – 15° , 5 – 30° , 6 – 45° , 7 – 60° , 8 – 75° , 9 – 87°
Fig. 5. Variation in the velocity of particle center of mass with time for various surface inclination angle at $d_p = 100$ μ m, $\gamma = 1$ s⁻¹: $\alpha =$ (1) 0, (2) 10° , (3) 12.5° , (4) 15° , (5) 30° , (6) 45° , (7) 60° , (8) 75° , and (9) 87°

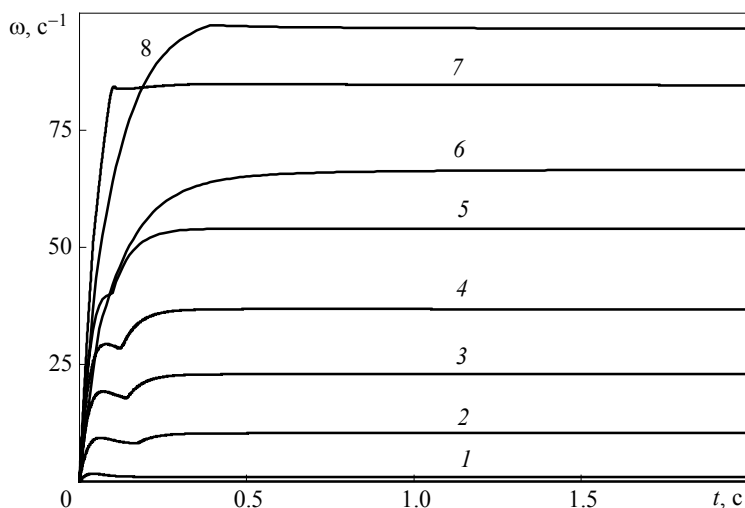


Рис. 6. Изменение угловой скорости частицы со временем для разных значений угла наклона поверхности $d_p = 100$ мкм, $\gamma = 1$ с⁻¹: 1 – $\alpha = 0$, 2 – 10° , 3 – 12.5° , 4 – 15° , 5 – 30° , 6 – 45° , 7 – 60° , 8 – 75° , 9 – 87°
Fig. 6. Variation in the angular velocity of the particle with time for various surface inclination angle at $d_p = 100$ μ m, $\gamma = 1$ s⁻¹: $\alpha =$ (1) 0, (2) 10° , (3) 12.5° , (4) 15° , (5) 30° , (6) 45° , (7) 60° , (8) 75° , and (9) 87°

Рис. 7 характеризует скорость проскальзывания частиц. Из рисунка видно, что для угла $\alpha < 15^\circ$ движение частицы на начальном участке характеризуется качением без скольжения, однако затем переходит в режим проскальзывания. Для больших α режим качения без скольжения отсутствует и наблюдается проскальзывание.

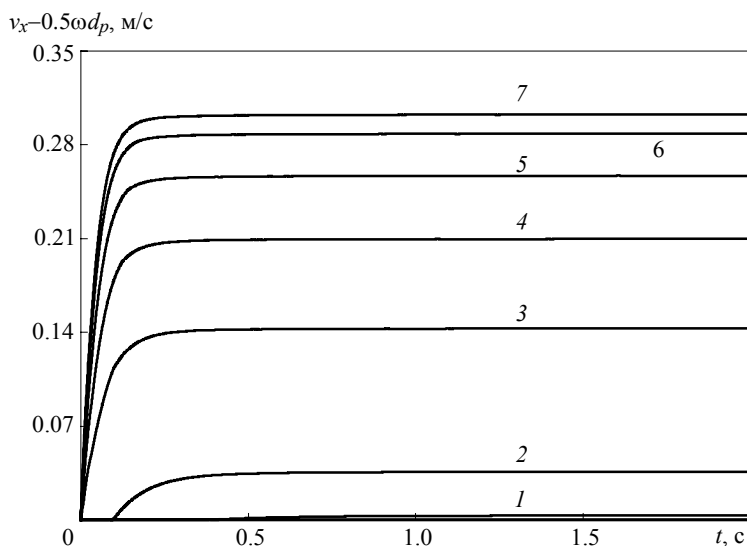


Рис. 7. Изменение скорости проскальзывания частицы со временем для разных значений угла наклона поверхности: $d_p = 100$ мкм, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$: 1 – $\alpha = 12.5^\circ$, 2 – 15° , 3 – 30° , 4 – 45° , 5 – 60° , 6 – 75° , 7 – 87°

Fig. 7. Variation in the slip velocity of the particle with time for various surface inclination angle at $d_p = 100 \text{ }\mu\text{m}$, $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$: $\alpha =$ (1) 12.5° , (2) 15° , (3) 30° , (4) 45° , (5) 60° , (6) 75° , and (7) 87°

На рис. 8 показано влияние интенсивности обдува для различных γ на изменение скорости по времени. Как следует из рисунков, скорость при больших временах выходит на стационарное значение. Однако при $t < 0.6$ с изменение скорости носит достаточно сложный характер. При значительных отрицательных γ сила сопротивления превосходит силу тяжести и частица движется вверх и влево, в сторону отрицательных значений x . При $\gamma = -1 \text{ с}^{-1}$ сила сопротивления не достаточна для преодоления силы тяжести, поэтому на начальном участке скорость имеет положительное значение. В результате действия гидравлического момента происходит торможение движение частицы, что приводит к остановке частицы при $t > 0.6$ с. Для $\gamma \geq 0$ наблюдается достаточно быстрый выход скорости на постоянное значение, однако такой режим движения не является окончательным. Гидравлический момент меняет свой знак и начинает тормозить вращение частицы, в результате наблюдается резкое уменьшение скорости с последующим выходом на новое стационарное значение.

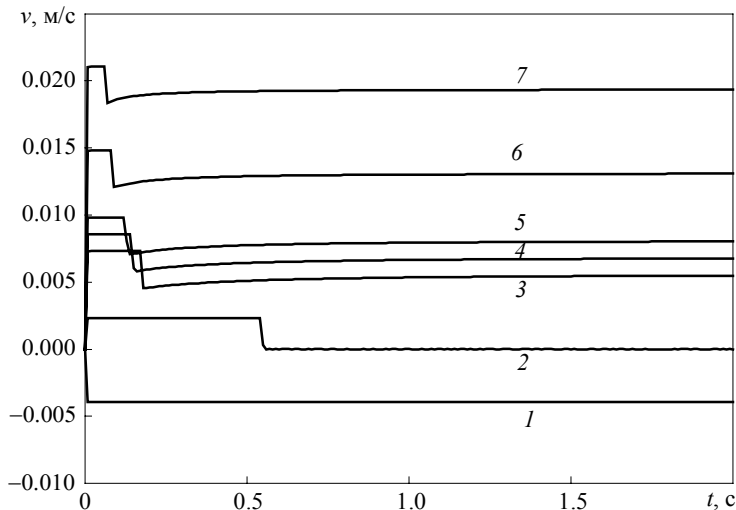


Рис. 8. Изменение скорости центра масс частицы со временем для разных значений интенсивности обдува $\alpha = 12.5^\circ$, $d_p = 100$ мкм: 1 – $\gamma = -10$ с $^{-1}$, 2 – (-5) , 3 – (-1) , 4 – 0, 5 – 1, 6 – 5, 7 – 10

Fig. 8. Variation in the velocity of particle center of mass with time for various blowing at $\alpha = 12.5^\circ$, $d_p = 100$ μm : $\gamma = (1) -10$, (2) -5 , (3) -1 , (4) 0, (5) 1, (6) 5, (7) 10 s $^{-1}$

Заключение

Проведенные расчеты показали, что в исследуемом диапазоне параметров $10 \leq d_p \leq 1000$ мкм, $\gamma < 10$ с $^{-1}$:

- отрыва частицы от поверхности не происходит;
- при движении по наклонной поверхности, обдуваемой воздушным потоком, скорость центра масс частиц увеличивается с увеличением ее диаметра, при этом скорость частиц быстро уходит на стационарное значение;
- изменение угловой скорости ω характеризуется на начальном этапе резким ее возрастанием, после чего качение частицы происходит с постоянной угловой скоростью;
- для малых размеров частицы ее движение частицы на начальном участке характеризуется качением без скольжения, однако затем переходит в режим проскальзывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. Multiphase Flows with Droplets and Particles. N.Y.: CRC Press, 1998. 472 p.
2. Кутепов А.М., Полянин Л.Д., Запryanов З.Д. и др. Химическая гидродинамика: справочное пособие. М.: Бюро Квантум. 1996. 336 с.
3. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000. 359 с.
4. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 2. С. 230–238.
5. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 351 с.

6. Архипов В.А., Усанина А.С. Режимы осаждения консолидированной системы твердых сферических частиц // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 5. С. 74–85.
7. Архипов В.А., Усанина А.С. Гравитационное осаждение совокупности твердых сферических частиц в режиме частично продуваемого облака // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 5. С. 1118–1125.
8. Матвиенко О.В., Андропова А.О. Исследование движения частицы в потоке жидкости вблизи подвижной стенки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4. С. 85–92.
9. Gondret P., Lance M., Petit L. Bouncing motion of spherical particles in fluids // Physics of fluids. V. 14. No. 2. 2002. P. 643–652.
10. Матвиенко О.В., Данейко А.М. Исследование ударного взаимодействия частиц в потоке // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 190–192.
11. Feuillebois F., Gensdarmes F., Mana Z., et al. Three-dimensional motion of particles in a shear flow near a rough wall // Journal of Aerosol Science. 2016. V. 96. P. 69–95.
12. Базилевский А.В., Рожков А.Н. Движение сферы по наклонной плоскости в потоке вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 4. С. 100–112.
13. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Теоретическое исследование процесса очистки загрязненной нефтью почвы в гидроциклонных аппаратах // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80. № 3. С. 72–80.
14. Матвиенко О.В., Дик И.Г. Численное исследование сепарационных характеристик гидроциклона при различных режимах загрузки твердой фазы // Теоретические основы химической технологии. 2006. Т. 40. № 2. С. 216–221.
15. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media. Prentice-Hall, 1965.
16. Матвиенко О.В., Андропова А.О., Агафонцева М.В. Исследование влияния режимов течения из гидроциклона на его сепарационные характеристики // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 1. С. 23–34.
17. Rubinow S.I., Keller J.B. The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid // J. of Fluid Mech. 1961. V. 11. Iss. 3. P. 447–459.
18. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. Bubbles, drops and particles. N.Y.: Academ Press, 1978. 380 p.
19. Беркович И.И., Громаковский Д.Г. Трибология. Физические основы, механика и технические приложения: учебник для вузов. Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2000. 268 с.
20. Böttner C.U., Sommerfeld M. Numerical calculation of powder painting using the Euler/Lagrange approach Powder Technology. 2002. V. 125. P. 206–216.

Статья поступила 24.12.2017 г.

Matvienko O.V., Andropova A.O., Andriasyan A.V., Mamadramova N.A. (2018) MATHEMATICAL MODELLING OF THE SPHERICAL PARTICLE MOTION ALONG AN INCLINED SURFACE IN THE SHEAR FLOW. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 75–88

DOI 10.17223/19988621/52/8

In this paper, the motion of a spherical particle along an inclined surface in the shear flow is studied. Different modes of the particle motion in the flow such as rolling, slipping, and sliding are analyzed. Investigation results show that the velocity of particle center of mass increases with an increase in particle diameter and the particle velocity becomes stationary rapidly. Variation in the angular velocity is characterized by an abrupt increase at the initial time instant which is followed by the particle rolling at a constant angular velocity. Initially, the motion of small particles is characterized by rolling without sliding but then it transfers into a slip mode.

Keywords: fluid mechanics, dispersed phase, suspension, rolling, sliding.

MATVIENKO Oleg Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk State University of Architecture and Building Tomsk, Russian Federation). E-mail: matvolegv@mail.ru

ANDROPOVA Antonina Olegovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.o.andropova@gmail.com

ANDRIASYAN Alina Valer'evna (Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alina-andriasyan@yandex.ru

MAMADRAIMOVA Nazira Abdiraimovna (Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mamadraimova96@mail.ru

REFERENCES

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. (1998) *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. New York: CRC Press.
2. Kutepov A.M., Polyaniin L.D., Zapryanov Z.D. et al. (1996) *Khimicheskaya gidrodinamika: spravochnoe posobie* [Chemical hydrodynamics: a textbook]. Moscow: Byuro Kvantum.
3. Ostrovskiy G.M. (2000) *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred* [Applied mechanics of heterogeneous media]. Saint Petersburg: Nauka.
4. Matvienko O.V., Evtyushkin E.V. (2011) Mathematical study of hydrocyclone dispersed phase separation in clearing viscoplastic drilling fluids. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(2). pp. 241–250. DOI: 10.1007/s10891-011-0466-z.
5. Fuchs N.A. (1964) *The Mechanics of Aerosols*. New York: Macmillan.
6. Arkhipov V.A., Usanina A.S. (2017) Regimes of sedimentation of a consolidated system of solid spherical particles. *Fluid Dynamics*. 52(5). pp. 666–677. DOI: 10.1134/S0015462817050088.
7. Arkhipov V.A., Usanina A.S. (2017) Gravity sedimentation of a set of solid spherical particles in the regime of a partially blown cloud. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 90(5). pp. 1061–1068. DOI: 10.1007/s10891-017-1657-z.
8. Matvienko O.V., Andropova A.O. (2015) Issledovanie dvizheniya chastitsy v potoke zhidkosti vblizi podvizhnoy stenki [Studying the particle motion in a fluid flow in the vicinity of a movable wall]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 85–92. DOI: 10.17223/19988621/36/10.
9. Gondret P., Lance M., Petit L. (2002) Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Physics of fluids*. 14(2). pp. 643–652. DOI: 10.1063/1.1427920.
10. Matvienko O.V., Daneyko A.M. (2013) Issledovanie udarnogo vzaimodeystviya chastits v potoke [Investigation of the shock interaction between particles in a stream]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika. – Russian Physical Journal*. 56(9-3). pp. 190–192.
11. Feuillebois F., Gensdarmes F., Mana Z., Ricciardi L. et al. (2016) Three-dimensional motion of particles in a shear flow near a rough wall. *Journal of Aerosol Science*. 96. pp. 69–95. DOI: 10.1016/j.jaerosci.2015.10.004.
12. Bazilevskiy A.V., Rozhkov A.N. (2009) Motion of a sphere down an inclined plane in a viscous flow. *Fluid Dynamics*. 44(4). pp. 566–576. DOI: 10.1134/S0015462809040103.
13. Matvienko O.V., Evtyushkin E.V. (2007) Theoretical investigation of the process of cleaning oil-polluted soil in hydrocyclone apparatuses. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 80(3). pp. 502–510. DOI: 10.1007/s10891-007-0066-0.
14. Matvienko O.V., Dueck J. (2006) Numerical study of the separation characteristics of a hydrocyclone under various conditions of loading of the solid phase. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 40(2). pp. 203–208. DOI: 10.1134/S0040579506020138.
15. Happel J., Brenner H. (1965) *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*. Prentice-Hall.
16. Matvienko O.V., Andropova A.O., Agafontseva M.V. (2014) Influence of the regime of flow of particles from a hydrocyclone on its separation characteristics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 87(1). pp. 24–37. DOI: 10.1007/s10891-014-0981-9.

17. Rubinow S.I., Keller J.B. (1961) The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid. *J. of Fluid Mech.* 11(3). pp. 447–459. DOI: 10.1017/S0022112061000640.
18. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. (1978) *Bubbles, drops, and particles*. New York: Academ Press.
19. Berkovich I.I., Gromakovskiy D.G. (2000) *Tribologiya. Fizicheskie osnovy, mekhanika i tekhnicheskie prilozheniya* [Tribology. Physical bases, mechanics, and technical applications]. Samara: Samara State Technical University.
20. Böttner C.U., Sommerfeld M. (2002) Numerical calculation of electrostatic powder painting using the Euler/Lagrange approach. *Powder Technology*. 125(2-3). pp. 206–216. DOI: 10.1016/S0032-5910(01)00508-3.

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/52/9

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик**ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
В ВЕРШИНЕ КРУГОВОГО КОНУСА**

Изучаются ограничения на параметры состояния в вершине кругового конуса под осесимметричной силовой и кинематической нагрузкой, а также когда вершина конуса – внутренняя точка. Результаты исследования найдут применение в постановках задач при изучении параметров состояния вблизи вершины конуса, в частности, при изучении взаимодействия конических инденторов с исследуемым образцом.

Ключевые слова: *особые точки, составной конус, круговой конус, внутренняя особая точка, концентрация напряжений, неклассические задачи, представительный объем.*

Элементы конструкций, содержащие особые точки в виде вершин клиньев, конусов, многогранников, пересечений образующих поверхностей (ребер) и т.п., вызывают большой интерес у исследователей. Подавляющее большинство авторов изучение особенности распределения напряжений вблизи особых точек проводят на основе асимптотической идеи (классический подход). Применяются методы операционного исчисления [1–4], функции комплексного переменного [5], функции Эри [6], интегральные уравнения [7, 8], метод граничных состояний [9], разложение по различным функциям [10, 11], метод конечных элементов [12–16], метод граничных элементов [17, 18]. Математическое обоснование асимптотического подхода изложено в работах [5, 19, 20]. Напряженное состояние вблизи вершин конусов с использованием классического подхода рассматривалось авторами статей [21–26]. В работах [27–33] показано, что достоверность решений, получаемых на основе классического подхода, ограничена областью вне малой окрестности особой точки. Это обстоятельство обусловлено принимаемой в данном подходе моделью точки сплошной среды в виде бесконечно малой частицы [34, 35]. Фактически точкой сплошной среды считается точка с нулевым объемом.

В отличие от классического подхода, авторы настоящей статьи точку сплошной среды считают малой частицей в непрерывном пространстве точек (континууме). Геометрическое положение частицы задается точкой континуума (точкой с нулевым объемом), а носителем физических свойств и характеристик состояния (напряжений и деформаций) является присоединенный объем. Присоединенный объем состоит из точек континуума, имеет линейный масштаб, равный характерному размеру представительного объема материала моделируемого элемента конструкции, и обладает физическими свойствами такого представительного объема. Особая точка отождествляется с точкой сплошной среды. В ней становятся определенными параметры состояния. На эти параметры могут быть наложены ограничения (например, граничные условия). Необычность (уникальность) особой точки проявляется в избыточном количестве (по сравнению с обычной точкой границы тела) задаваемых в ней ограничений.

Это обстоятельство делает задачу механики для тела с особой точкой неклассической. Неклассические (в указанном смысле) задачи рассматривались в работах [27, 28] (однородные плоские клинья), [30] (составные плоские клинья), [31] (составные пространственные ребра), [32] (внутренние особые точки в плоских элементах конструкций). Для неклассических задач механики упругих тел с особыми точками справедлива теорема единственности при условии существования решения и разработан численно-аналитический итерационный метод его нахождения [29].

В настоящей работе изучаются ограничения на параметры состояния в особой точке, являющейся вершиной кругового конуса. Рассмотрены случаи, когда вблизи вершины задана поверхностная нагрузка, когда боковая поверхность скользит без трения вдоль жесткой поверхности, когда боковая поверхность жестко закреплена и когда вершина конуса является внутренней точкой.

1. Круговой конус, поверхность которого нагружена

Рассматривается круговой конус. Угол при вершине A в его осевом сечении принимается равным 2α (рис. 1, a). Вводится правосторонняя ортонормированная система координат x_1, x_2, x_3 с базисом $\vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Ось x_1 направляется по оси конуса. Через φ обозначен угол, отсчитываемый в плоскости x_2, x_3 от оси x_3 против часовой стрелки (рис. 1, b).

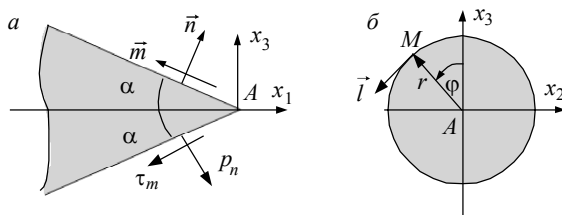


Рис. 1. Осевое (a) и поперечное (b) сечение конуса
Fig. 1. (a) Axial section and (b) cross section of the cone

Для любой точки $M(x_1, x_2, x_3)$ на поверхности конуса справедливы равенства

$$\cos \varphi = \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{-x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}. \quad (1)$$

Существуют конечные пределы выражений (1) при стремлении точки $M(x_1, x_2, x_3)$ к вершине конуса вдоль его образующей. В точках поверхности конуса вводится тройка единичных взаимно ортогональных векторов $\vec{n}, \vec{m}, \vec{l}$. Вектор $\vec{n}$ является нормальным к поверхности, а векторы $\vec{m}$ и $\vec{l}$ лежат в ее касательной плоскости (рис. 1).

Эти векторы в базисе $\vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \sin \alpha \vec{e}_1 - \cos \alpha \sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \alpha \cos \varphi \vec{e}_3, \\ \vec{m} &= -\cos \alpha \vec{e}_1 - \sin \alpha \sin \varphi \vec{e}_2 + \sin \alpha \cos \varphi \vec{e}_3, \\ \vec{l} &= -\cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Принимается, что на поверхности конуса задана нагрузка, причем непосредственно в вершине (в особой точке) нагрузка осесимметрична и задана равенством

$$\vec{p}_n = p_n \vec{n} + \tau_m \vec{m} + \tau_l \vec{l}. \quad (3)$$

Напряжения σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) в особой точке удовлетворяют заданным условиям

(3). Это обстоятельство записывается тремя соотношениями:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \sigma_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi + \\ &\quad + \sigma_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \sigma_{23} \sin 2\varphi \cos^2 \alpha = p_n, \\ &-\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varphi + \\ &\quad + \sigma_{12} \cos 2\alpha \sin \varphi - \sigma_{13} \cos 2\alpha \cos \varphi - \sigma_{23} \sin 2\alpha \sin \alpha \cos \varphi = \tau_m, \\ &\sigma_{22} \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha - \sigma_{33} \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha - \sigma_{12} \cos \varphi \sin \alpha - \\ &\quad - \sigma_{13} \sin \alpha \sin \varphi - \sigma_{23} \sin \alpha \sin^2 \varphi - \sigma_{32} \cos \alpha \cos^2 \varphi = \tau_l. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенства (4) должны выполняться при любых значениях φ . Из этого условия следует, что они совместны лишь в случае, когда компонента нагрузки τ_l обращается в нуль, а компоненты напряжений σ_{ij} подчиняются условиям

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33}; \quad (5)$$

$$\sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha = p_n, \quad (6)$$

$$-\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha = \tau_m.$$

Система уравнений (6) имеет решение

$$\sigma_{11} = p_n - \tau_m \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = p_n + \tau_m \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Равенства (5), (7) полностью определяют напряженное состояние в вершине конуса. Задано шесть ограничений на компоненты напряжений. Задача механики деформируемого тела оказывается неклассической, так как в обычной (не особой точке) задаются три ограничения.

Формулы (7) для вычисления напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ могут быть получены также и методом сечений, примененным к элементу конуса с центром в его вершине. Это обстоятельство подтверждает согласованность используемого авторами подхода с классическими приемами исследования напряжений в деформируемых телах.

2. Круговой конус, боковая поверхность которого вблизи вершины скользит без трения вдоль жесткой поверхности

Принимается, что боковая поверхность конуса вблизи вершины A скользит без трения вдоль жесткой поверхности. Для элементарного объема в вершине конуса (особой точки) выполняются условия:

1) сдвиг между линейными элементами, исходящими из вершины в направлении образующих конуса в любом его осевом сечении, обращается в нуль;

2) задаваемые касательные усилия τ_m и τ_n равны нулю.

Сдвиг γ между указанными в п. 1 направлениями выражается равенством

$$\gamma = \sin 2\alpha (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{33} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{23} \sin 2\varphi). \quad (8)$$

При построении равенства (8) использовалась формула

$$\gamma \sin \beta = [2\varepsilon_{rp} - (\eta_k + \eta_p)\delta_{rp}]k_r t_p, \quad (9)$$

определяющая сдвиг γ в произвольной точке сплошной среды между направлениями $\vec{k}$, $\vec{t}$ и углом β между ними. В формуле (9) обозначено η_k , η_t – относительные удлинения в точке сплошной среды в направлении ортов $\vec{k}$, $\vec{t}$ соответственно, δ_{rp} – координаты метрического тензора. В рассматриваемой задаче $\sin 2\alpha \neq 0$, поэтому из равенства (8) следует зависимость между компонентами деформаций:

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{33} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{23} \sin 2\varphi = 0, \quad (10)$$

которая должна выполняться независимо от φ , вследствие чего справедливы соотношения

$$\varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}. \quad (11)$$

Обратимся к касательным напряжениям τ_m и τ_n . Эти компоненты через напряжения в вершине выражаются формулами (4). Так как $\varepsilon_{23} = 0$, то из физических уравнений следует, что и $\sigma_{23} = 0$. Второе из равенств (4) примет вид

$$0.5 \sin 2\alpha (-\sigma_{11} + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + \sigma_{33} \cos^2 \varphi) + \cos 2\alpha (\sigma_{12} \sin \varphi - \sigma_{13} \cos \varphi) = 0. \quad (12)$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях φ , вследствие чего получаем

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}. \quad (13)$$

Третье равенство (4) при выполнении равенств (13) удовлетворяется тождественно. Равенства (13) и (11) задают пять независимых ограничений в вершине конуса. Задача механики деформируемого тела является неклассической.

Первое из условий (4) определяет компоненты вектора напряжений

$$p_n = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}.$$

Пример. Рассматривается круговой конус, закрепленный так, что его боковая поверхность и основание могут скользить без трения вдоль жесткой поверхности. Конус подвергается однородной температурной нагрузке ΔT . Приняты обозначения E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ω – коэффициент температурной деформации. Перемещения $u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ (u_i – компоненты вектора перемещений) и значения напряжений

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - 2\nu} \quad (14)$$

во всех точках конуса, включая вершину, удовлетворяют всем уравнениям линейной термоупругости и граничным условиям, т.е. являются решением данной задачи, что согласуется с приведенными выше результатами.

3. Круговой конус с заземленной боковой поверхностью

Пусть боковая поверхность кругового конуса вблизи вершины жестко заземлена. Тогда в представительном объеме (особой точке) выполняются условия:

1) относительное удлинение линейного элемента вдоль любой образующей конуса обращается в нуль;

2) сдвиг между линейными элементами в направлении образующих в любом осевом сечении конуса равен нулю.

Условие 1) запишется равенством

$$\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \\ + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi - \varepsilon_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \varepsilon_{23} \sin^2 \alpha \sin 2\varphi = 0. \quad (15)$$

Равенство (15) должно выполняться независимо от значения φ , что возможно лишь при условиях

$$\varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0. \quad (16)$$

Условие 2) совпадает с равенством (10), из которого следует выполнение зависимости (11). Из равенств (11) и (16) получаем, что в особой точке выполняются соотношения

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, деформированное состояние в вершине конуса полностью определено. Задача механики деформируемого тела является неклассической. В частности, при температурной нагрузке из физических уравнений получаем напряжения в особой точке:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - 2\nu}, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \quad (18)$$

4. Составной конус (внутренняя коническая точка)

Рассматриваются два конуса 1 и 2 с общей вершиной A (рис. 2). Конусы скреплены по боковым поверхностям. Приняты обозначения: $\sigma_{ij}^{(k)}, \dots, E_k, \dots$ ($k = 1, 2$).

Индекс « k » указывает конус, которому отвечает данный параметр.

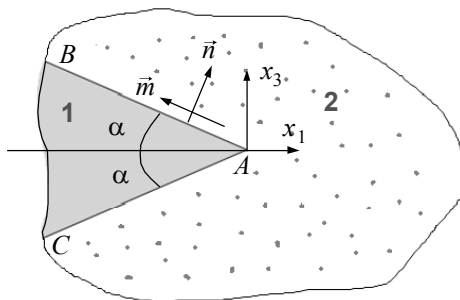


Рис. 2. Осевое сечение составного конуса
Fig. 2. Axial section of the composite cone

Параметры состояния представительных объемов (особых точек) в вершинах конусов подчиняются ограничениям:

1) относительные удлинения линейных элементов, исходящих из точки A в направлении общей образующей конусов, совпадают при любом φ (вводится на рис. 1, б):

$$\eta_m^{(1)} = \eta_m^{(2)}; \quad (19)$$

2) суммарное изменение углов BAC (острого γ_1 и тупого γ_2) в любом осевом сечении конуса равно нулю:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0; \quad (20)$$

3) касательные и нормальные напряжения на площадках, ориентируемых ортом $\vec{n}$, совпадают при любом значении φ :

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_m^{(1)} = \tau_m^{(2)}, \quad \tau_l^{(1)} = \tau_l^{(2)}. \quad (21)$$

Далее вводятся обозначения:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} = \xi_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = \zeta_{ij}, \quad (22)$$

с использованием которых условие (19) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \xi_{11} \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \xi_{33} \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \\ & + \xi_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi - \xi_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \xi_{23} \sin^2 \alpha \sin 2\varphi = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Равенство (23) должно выполняться при любых значениях угла φ , вследствие чего из него следуют условия для деформаций:

$$\xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0, \quad \xi_{22} = \xi_{33}, \quad \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 0. \quad (24)$$

Условие (20) с использованием формулы (9) и обозначений (22) запишется равенством

$$\xi_{11} - \xi_{22} \sin^2 \varphi - \xi_{33} \cos^2 \varphi + \xi_{23} \sin 2\varphi = 0. \quad (25)$$

Это равенство должно выполняться независимо от φ , поэтому из него дополнительно к (24) следует

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33}. \quad (26)$$

Из равенств (24) и (26) получаем, что в вершине конуса все параметры ξ_{ij} обращаются в нуль. Это означает, что все компоненты деформаций в вершине конуса непрерывны.

Первые два условия (21) с использованием обозначений (22) приводятся к виду

$$\begin{aligned} & \zeta_{11} \sin^2 \alpha + \zeta_{22} \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \zeta_{33} \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \\ & - \zeta_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi + \zeta_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \zeta_{23} \sin 2\varphi \cos^2 \alpha = 0, \\ & -\zeta_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{22} \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{33} \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varphi - \\ & - \zeta_{12} \cos 2\alpha \sin \varphi - \zeta_{13} \cos 2\alpha \cos \varphi - \zeta_{23} \sin 2\alpha \sin \alpha \cos \varphi = 0, \end{aligned}$$

Вследствие того, что эти равенства должны выполняться при любых значениях φ , из них следует

$$\zeta_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (27)$$

т.е. напряжения в вершине конуса непрерывны так же, как и деформации. Третье из равенств (21) не накладывает новых ограничений на компоненты напряжений.

С применением физических уравнений условия непрерывности деформаций в особых точках запишем через напряжения:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} = Q, \\ & - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} = Q, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{33} = Q, \\ & \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{12} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{13} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{23} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

В этих равенствах G_k , ω_k ($k = 1, 2$) – модули сдвига скрепляемых конусов и коэффициенты температурной деформации, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) вследствие непрерывности напряжений в вершине конусов, $Q = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T$.

Изучим решения систем уравнений (28), (29). Определитель матрицы системы уравнений (28) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{E_1 E_2} \right)^3 [E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2)]^2 [E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)]. \quad (30)$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

1. $\Delta \neq 0$. Из этого условия следует, что $G_1 \neq G_2$, поэтому уравнения (28), (29) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{QE_1 E_2}{E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (31)$$

При этом напряженное состояние в вершине конусов полностью определено. Видим, что в дополнение к условиям (27), вытекающим из принимаемых в классической постановке условий непрерывности (21), дополнительно в вершине составного конуса должны выполняться равенства (31). Следовательно, рассматриваемая задача механики деформируемого тела является неклассической.

Из решения (31) видно, что сочетание параметров

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0 \quad (32)$$

является критическим, так как в этом случае напряжения σ_{ij} ($i = 1, 2, 3$) обращаются в бесконечность.

2. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) \neq 0. \quad (33)$$

Ранг системы уравнений (28) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если $Q = 0$, и трем, если $Q \neq 0$. Поэтому реализуются варианты:

а) $Q = 0$. Напряжения σ_{ij} ($i = 1, 2, 3$) подчинены ограничениям (так как в данном случае $G_1 \neq G_2$)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (34)$$

Эти ограничения на компоненты напряжений оказываются дополнительными к ограничениям (27), поэтому задача механики деформируемого тела в данном случае является неклассической.

б) $Q \neq 0$. Уравнения (28) несовместны. При температурной нагрузке выполнение равенств (33) обуславливает сингулярное поведения решения в вершине конусов.

3. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) \neq 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \quad (35)$$

Ранг матрицы системы уравнений (28) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}.$$

Это ограничение на компоненты напряжений является дополнительным к ограничениям (27), задача механики деформируемого тела неклассическая.

В данном случае $G_1 = G_2$, поэтому каких-либо ограничений на компоненты σ_{ij} ($i \neq j$) не накладывается.

4. $\Delta = 0$. Причем,

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \quad (36)$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона конусов совпадают. Ранг системы уравнений (28) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если материалы конусов идентичны, особая точка отсутствует. Дополнительных условий на компоненты напряжений не существует. Задача механики деформируемого тела является классической. Когда ранг расширенной матрицы равен единице, уравнения (28) несовместны. Особая точка является точкой сингулярного поведения решения.

Заключение

На основе представления точки сплошной среды в виде малой частицы, определяемой точкой континуума и присоединенным объемом, изучены ограничения на компоненты напряжений в вершине кругового конуса. Рассмотрены случаи, когда конус проскальзывает без трения вдоль жесткой поверхности, контактирует с жесткой поверхностью без проскальзывания или подвергается силовому воздействию вблизи вершины. Показано, что во всех случаях количество ограничений на параметры состояния в вершине конуса превышает количество ограничений в обычных граничных точках. В частности, при любой поверхностной нагрузке на

пряжения в вершине полностью определены. Это означает, что задачи механики деформируемого тела для кругового конуса должны рассматриваться как неклассические. Установлены ограничения на компоненты нагрузки, обеспечивающие корректность постановки таких задач. Изучены особенности напряженного состояния в вершине конуса, когда она является внутренней особой точкой среды. Показано, что параметры состояния во внутренней особой точке непрерывны. Приведенные результаты найдут применение при постановке неклассических задач в исследованиях напряженного состояния вблизи вершины кругового конуса. В частности, при изучении взаимодействия конических инденторов с образцами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // *J. App. Mech.* 1952. V. 19. P. 526–528.
2. *Bogy D.B.* Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // *Trans. ASME. Ser.E.* 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3408786>.
3. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
4. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
5. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
6. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
7. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
8. *Андреев А.В.* Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* 2014. № 1. С. 5–30.
9. *Рязанцева Е.А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Липецк, 2015. 215 с.
10. *Коваленко М.Д., Галаджиев С.В., Гоголева О.С., Трубников Д.В.* Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2011. Т. 17. № 1. С. 53–60.
11. *He Z., Kotousov A.* On evaluation of stress intensity factor from in-plane and transverse surface displacements // *Experim. Mech.* 2016. V. 56. No. 8. P. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8
12. *Koguchi H., Muramoto T.* The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints // *Int. J. Solids and Struc.* 2000. V. 37. No. 35. P. 4737–4762. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00159-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00159-6)
13. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *Int. J. Solid and Struc.* 2001. V. 38. No. 50-51. P. 9077–9109.
14. *Федоров А.Ю.* Исследование и оптимизация напряженного состояния в окрестности особых точек упругих тел : дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Пермь, 2016. 157 с.
15. *Lee Y., Jeon I., Im S.* The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite // *Int. J. Solids and Struc.* 2006. V. 43. No. 9. P. 2710–2722. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050>.
16. *Xu W., Tong Z., Leung A.Y.T., Xu X., Zhou Z.* Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending // *Eng. Frac. Mech.* 2016. V. 168. P. 11–25. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.09.009>.

17. Wu Z. A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // Eng. Fract. Mech. 2006. V. 73. No. 7. P. 953–962. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.10.010>.
18. Hideo Koguchi, Joviano Antonio da Costa. Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // Int. J. Solids and Structures. 2010. V. 47. P. 3131–3140. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015>.
19. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
20. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // ДАН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С.33–36.
21. Parihar K.S., Keer L.M. Elastic stress singularities at conical inclusions // Int. J. Solids Struct. 1978. V. 14. P. 261–263.
22. Будаев Б.В., Морозов Н.Ф., Нарбут М.А. Кручение кругового конуса при статическом и динамическом нагружении // ПММ. 1994. Т. 58. № 6. С. 152–156.
23. Picu C.R. Stress singularities at vertices of conical inclusions with freely sliding interfaces // Int. J. Solids Structures. 1996. V. 33. No. 17. P. 2453–2457.
24. Денисюк И.Т. Напряжения вблизи конической точки поверхности раздела сред // МТТ. 2001. № 3. С. 68–77.
25. Nkemzi B. On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points // Math. Methods Appl. Sciences. 2005. V. 28. No. 1. P. 29–41.
26. Корепанова Т.О., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические построения собственных решений для изотропных конических тел и их приложения для оценки сингулярности напряжений // ДАН. 2014. Т. 457. № 3. С. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105.
27. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 78–87.
28. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 95–109.
29. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Итерационный конечно-элементный алгоритм исследования напряженного состояния элементов конструкций с особыми точками и его реализация // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2015. № 4. С. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11.
30. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины составного клина с жестко защемленными образующими // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 3. С. 131–147. DOI:10.15593/perm.mech/2016.3.09.
31. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // Mechanics of Composite Materials. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504.
32. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // Mechanics of Composite Materials. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI 10.1007 / s11029-017-9644-1.
33. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 576 с.
34. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
35. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // Latin American J. Solids and Structures. 2017. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253826>.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) RESTRICTIONS ON STRESS COMPONENTS IN THE TOP OF ROUND CONE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 89–101

DOI 10.17223/19988621/52/9

The stress state at a vertex of homogeneous or composite cone is studied using the concept of the point of deformed body considered as an elementary volume contractible to this point. Elementary volume represents an assembly of continuum points with a linear characteristic dimension equal to that of representative volume element of the material of modeled body. Elementary volume is a carrier of physical properties and state characteristics of continuous medium. The state characteristics are uniform in such a volume and, therefore, the values retain constant while the volume is being contracted to the vertex of the cone. The accepted concepts about singular point – the vertex of a cone – allow one to formulate restrictions on the state parameters in it. These restrictions are imposed in the cases when the cone is under an axisymmetric load, its generator slides without friction along a rigid surface or it is clamped, and also when the vertex of the cone is an internal point. The number of restrictions at a singular point is more than that imposed at typical surface points in the classical problem. This circumstance makes it necessary to consider the problem for a body containing singular point as non-classical problem. The proposed concept was used to define the conditions for material and geometric parameters under which the stress state at the vertex of the cone is completely determined. The cases of singular behavior of stresses in the vicinity of the cone vertex are found. The limits for load components providing a correctness of considered problem formulation are obtained. It is shown that the stresses and strains are continuous at the internal singular point.

The presented results will find an application in the formulation of non-classical problems of studying state parameters near the cone vertex. In particular, they will be useful in researching interaction of conical indenters with a test sample.

Keywords: singular points, composite cone, internal singular point, stress concentration, non-classical problems, representative volume element.

PESTRENIN Valery Mikhaylovich (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: pestreninVM@mail.ru

PESTRENINA Irena Vladimirovna (Candidate of Technical Science, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

LANDIK Lidiya Vladimirovna (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

REFERENCES

1. Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. *J. of App. Mech.* 19. pp. 526–528.
2. Bogy D.B. (1971) Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Trans. ASME. Ser.E.* 38(2). pp. 87–96. DOI: 10.1115/1.3408786.
3. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity–I: Removal, interpretation and analysis. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 251–297. DOI: 10.1115/1.1762503.
4. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity–II: Asymptotic identification. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 385–439. DOI: 10.1115/1.1767846.
5. Parton V.Z., Perlin P.I. (1984) *Mathematical Methods of the Theory of Elasticity*. Moscow: Mir.
6. Chobanyan K.S. (1987) *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stress state in compound elastic bodies]. Erevan: Armenian Academy of Sciences Press.
7. Uflyand Ya.S. (1967) *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transforms in problems of the theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: AN SSSR Publ.

8. Andreev A.V. (2014) Superpozitsiya stepenno-logarifmicheskikh i stepennykh singulyarnykh resheniy v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Superposition of power-logarithmic and power singular solutions in two-dimensional elasticity problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 5–30.
9. Ryazantseva E.A. (2015) *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera* [Method of boundary conditions in the problems of elasticity theory with physical and geometrical singularities]. Dissertation. Lipetsk.
10. Kovalenko M.D., Galadzhiev S.V., Gogoleva O.S., Trubnikov D.V. (2011) Osobennosti napryazhennogo sostoyaniya v konechnykh oblastiakh vblizi uglovyykh tochek granitsy [Features of stress condition for finite regions near to angular points of a boundary]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Mechanics of composite materials and structures*. 17(1). pp. 53–60.
11. He Z., Kotousov A. (2016) On evaluation of stress intensity factor from in-plane and transverse surface displacements. *Experim. Mech.* 56(8). pp. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
12. Koguchi H., Muramoto T. (2000) The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints. *Int. J. Solids and Structures*. 37(35). pp. 4737–4762. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00159-6.
13. Barut A., Guven I., Madenci E. (2001) Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *Int. J. Solids and Structures*. 38(50,51). pp. 9077–9109. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00206-2.
14. Fedorov A.Yu. (2016) *Issledovanie i optimizatsiya napryazhennogo sostoyaniya v okrestnosti osobykh tochek uprugikh tel* [Investigation and optimization of the stress state near singularities of elastic bodies]. Dissertation. Perm.
15. Lee Y., Jeon I., Im S. (2006) The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite. *Int. J. Solids and Structures*. 43(9). pp. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
16. Xu W., Tong Zh., Leung A.Y.T., Xu X., Zhou Zh. (2016) Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending. *Eng. Frac. Mech.* 168(A). pp. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2016.09.009.
17. Wu Zh. (2006) A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity. *Eng. Fract. Mech.* 73(7). pp. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2005.10.010.
18. Koguchi H., da Costa J.A. (2010) Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface. *Int. J. Solids and Structures*. 47(22-23). pp. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
19. Kondrat'ev V.A. (1967) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points]. *Tr. Mosk. Mat. Obs.* 16. pp. 209–292.
20. Maz'ya V.G., Plamenevskiy B.A. (1976) O koeffitsientakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach vblizi rebra [About coefficients in the solution asymptotic for elliptic boundary value problems near the edge]. *DAN SSSR*. 229(1). pp. 33–36.
21. Parihar K.S., Keer L.M. (1978) Elastic stress singularities at conical inclusions. *Int. J. Solids and Structures*. 14(4). pp. 261–263. DOI: 10.1016/0020-7683(78)90036-7.
22. Budaev B.V., Morozov N.F., Narbut M.A. (1994) Torsion of a circular cone with static and dynamic loading. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 58(6). pp. 1097–1100. DOI: 10.1016/0021-8928(94)90128-7.
23. Picu C.R. (1996) Stress singularities at vertices of conical inclusions with freely sliding interfaces. *Int. J. Solids Structures*. 33(17). pp. 2453–2457. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00164-6.
24. Denisyuk I.T. (2001) Napryazheniya vblizi konicheskoy tochki poverkhnosti razdela sred [Stress values near conical point of an interface]. *MTT*. 3. pp. 68–77.

25. Nkemzi B. (2005) On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points. *Math. Methods Appl. Sciences*. 28(1). pp. 29–41. DOI: 10.1002/mma.547.
26. Korepanova T.O., Matveenkov V.P., Shardakov I.N. (2014) Analiticheskie postroeniya sobstvennykh resheniy dlya izotropnykh konicheskikh tel i ikh prilozheniya dlya otsenki singulyarnosti napryazheniy [Analytical constructions of eigensolutions for isotropic conical bodies and their applications for estimating stress singularity]. *DAN*. 457(3). pp. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105.
27. Pestrenin V. M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2013) The stress state near a singular point of a flat composite design. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 24(4). pp. 78–87.
28. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2014) Non-standard problems of homogeneous structural elements with wedge shape features in the plane case. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 27(1). p. 95–109.
29. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Iterative finite element algorithm and its implementation for stress state of structural elements with singular points. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11.
30. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2016) Stress-strain state near the wedge top with rigidly fastened sides. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
31. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandard problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
32. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
33. Sedov L.I. (1973) *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. V.1. Moscow: Nauka.
34. Rabotnov Yu.N. (1979) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka.
35. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American J. Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.

УДК 536.46
DOI 10.17223/19988621/52/10

В.Г. Прокофьев, О.В. Лапшин, В.К. Смоляков

МАКРОКИНЕТИКА ГОРЕНИЯ СЛОЕВЫХ КОМПОЗИЦИЙ С ЛЕГКОПЛАВКИМ ИНЕРТНЫМ СЛОЕМ

Рассматривается модель безгазового горения вертикального слоевого пакета, один из слоев которого состоит из инертного легкоплавкого металла, другие части пакета – высокоэкозотермичный безгазовый состав, в пористый продукт горения которого втекает расплавленный металл. Определены характерные режимы горения и синтеза композиционных материалов. Рассмотрена динамика формирования макроструктуры продуктов от стадии зажигания до выхода на устойчивый режим распространения фронта.

Ключевые слова: *самораспространяющийся высокотемпературный синтез, пористая среда, капиллярное течение, композиционный материал, моделирование.*

Горение гетерогенных систем – один из экономичных и эффективных способов получения композиционных материалов. Для получения композиционных материалов методом горения формуется образец из смеси реагирующих и инертных порошков. После синтеза продукт представляет собой материал из продуктов реакции, заключенных в матрицу инертного вещества. Ограничением этого способа является выполнение необходимых и достаточных условий самораспространяющегося режима синтеза [1].

Дополнительные возможности получения композиционных материалов дает специальное формование исходной структуры образца путем чередования слоев из реагирующей смеси порошков и инертных веществ. Инертные вещества могут быть в виде порошков или пластин из легкоплавких элементов или сплавов. После синтеза образуется слоистый композит. В зависимости от исходных толщин слоев и их пористости слои синтезированного продукта, пропитанные инертным веществом, могут этим веществом разделяться (избыток инерта). В противоположном случае (недостаток инерта) – слои композиционного материала разделены пористыми слоями синтезированного продукта, не содержащего легкоплавкого вещества. В частном случае при определенном соотношении исходных параметров (толщина слоев, пористость) композиционный материал будет макроскопически однородным, то есть не иметь слоистой структуры.

Экспериментальные исследования фронтального синтеза в слоистых системах проводились авторами [2–4]. Рассматривалось горение, как в направлении вдоль слоев (горизонтальный слоевой пакет), так и перпендикулярно к ним (вертикальный слоевой пакет). В [5] представлены результаты экспериментов по взаимодействию фольги из вольфрама с расплавом на основе Ni–Al в режиме самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС). При соединении W-подложки с интерметаллидом NiAl в процессе СВС происходило образование сварного соединения толщиной 400 мкм. Математическое моделирование синтеза и формирование макроструктуры в направлении вдоль слоев (горизонтальный слоевой пакет) исследовалось в двухмерной постановке рассматривается в [6–10].

Следует отметить, что одномерный или двухмерный характер задачи определяется ориентацией слоев относительно направления распространения волны горения.

В настоящей работе анализируется горение в перпендикулярном направлении слоевой композиции из двух пористых реакционных слоев, разделенных слоем легкоплавкого инертного вещества, и формирование макроскопической структуры продукта. Этот частный случай горения многослойной системы можно рассматривать как горение вертикального по терминологии [2, 3] слоевого пакета. Отметим, что на практике такая трехслойная композиция может быть использована для сварки синтезируемых тугоплавких продуктов, в том числе разных по обе стороны слоя инертного вещества. Математическое моделирование безгазового горения вертикального многослойного пакета рассматривалось в [11, 12].

Математическая модель

Сделаем следующие предположения:

1. Горючая смесь стехиометрическая. Реакция проходит с образованием одного продукта и описывается простой брутто-схемой. При горении смесь А образует тугоплавкий продукт F, пористость которого равна пористости исходной смеси.

2. Плотности и теплоемкости смеси и продукта предполагаются равными. Равными также полагаются плотности и теплоемкости твердого инертного вещества и его расплава.

3. Капиллярное течение расплава в пористых каналах ограничено температурой каркаса, равной температуре плавления. При падении температуры расплава в зоне пропитки ниже температуры плавления жидкость кристаллизуется и течение в порах прекращается.

4. Втекающий в пористую реагирующую смесь расплав не влияет на кинетику синтеза продукта F.

Рассмотрим образец, образованный двумя слоями горючей смеси, между которыми находится слой легкоплавкого инертного вещества. На рис. 1. представлены области, которые возможны в ходе синтеза и формирования конечного продукта.

Уравнения теплопроводности в различных участках получим аналогично [13].

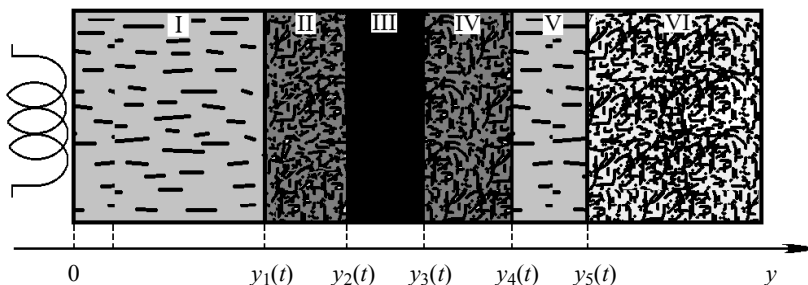


Рис. 1. Структура образца: I – продукты горения безгазовой смеси, II – композиционный материал, III – слой металла, IV – композиционный материал, V – продукты горения безгазовой смеси, VI – свежая безгазовая смесь

Fig. 1. Scheme of the sample: I, combustion products of gasless mixture; II, composite material; III, layer of metal; IV, composite material; V, combustion products of gasless mixture; and VI, fresh gasless mixture

Исходная толщина слоя инертного вещества – $y_i(0) = y_3(0) - y_2$, толщина слоя горючей смеси, расположенного слева от инертного слоя – y_2 , границы правого слоя горючей смеси удовлетворяют неравенству $y_3(t) < y < \infty$ – полуограниченный слой. Движение границы $y_3(t)$ обусловлено втеканием расплава в пористые слои.

В области I ($0 < y_1(t)$) перед слоем инертного вещества, где проходит синтез тугоплавкого продукта F, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$(1-m)\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) + (1-m)Q\rho_2 \frac{d\alpha}{dt} - \chi_e(T_2 - T_0) \quad (1)$$

и уравнение химической кинетики

$$\frac{d\alpha}{dt} = k(T_2)f(\alpha). \quad (2)$$

В (1), (2) использованы обозначения: T_2 – температура реагирующей смеси; T_0 – начальная температура и температура окружающей среды; t – время; $f(\alpha)$ – кинетический закон, который в расчетах принимался в виде $f(\alpha) = 1 - \alpha$; α – глубина превращения (массовая доля продукта в реагирующей смеси); $k(T_2) = k_0 \exp(-E/RT_2)$, k_0 , E – константа скорости реакции, предэкспонент и энергия активации химической реакции; Q – тепловой эффект реакции; c_2 , ρ_2 , λ_2 – теплоемкость, плотность и теплопроводность смеси; m – пористость; χ_e – коэффициент внешнего теплообмена; R – газовая постоянная.

В области II ($y_1(t) < y < y_2$) в общем случае находится реагирующая смесь и втекающий в нее расплав. Граница y_2 , определяющая исходную длину участка пористого слоя до слоя металла, не меняется со временем. Уравнения теплового баланса в смеси и расплаве имеют вид

$$(1-m)c_2\rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + (1-m)\rho_2 Q \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \chi(T_2 - T_1) - \chi_e(T_2 - T_0); \quad (3)$$

$$m\rho_1[c_1 + Q_L\delta(T_1 - T_L)] \left[\frac{\partial T_1}{\partial t} - V_- \frac{\partial T_1}{\partial y} \right] = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \chi(T_2 - T_1) - \chi_e(T_1 - T_0), \quad (4)$$

где T_1 – температура инертного вещества; V_- – скорость течения расплава в области $y_1(t) < y_2(t)$; $\delta(T_1 - T_L)$ – дельта-функция Дирака; ρ_1, c_1, λ_1 – плотность, теплоемкость и теплопроводность инерта; T_L , Q_L – температура и теплота плавления инерта. Величину скорости капиллярного течения определяет формула [14]

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{\sigma d_c}{8\mu l}, \quad (5)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения; d_c – диаметр капилляра; μ – вязкость расплава; l – длина пути, пройденная жидкостью в капилляре, или глубина пропитки расплавом пористого каркаса. Интегрируя (5), получим

$$l^2 = \frac{\sigma d_c}{4\mu} (t - t_s), \quad (6)$$

где t_s – время начала затекания расплава в поры.

В общем случае, наряду с капиллярным течением, возможно термокапиллярное, вызванное градиентом температуры. Оценим его величину. Скорость термокапиллярного течения в неравномерно нагретых капиллярах [15]

$$V_{\text{тс}} \approx \frac{1}{2\mu} \frac{d\sigma}{dT_2} \frac{dT_2}{dy} d_c, \quad (7)$$

где $\frac{dT_2}{dy}$ – градиент температуры в направлении y . Зависимость поверхностного натяжения от температуры удовлетворительно описывается формулой Этвеша, которая имеет вид [16]

$$\sigma = K(T_{\text{к}} - T_1) \left(\frac{\rho_1}{M} \right)^{2/3}, \quad (8)$$

где $T_{\text{к}}$ – критическая температура, при которой $\sigma = 0$ (температура кипения); M – молекулярная масса; K – константа, равная практически для всех систем $2.1 \cdot 10^{-7}$ Дж/К. Как следует из (8), с ростом температуры поверхностное натяжение уменьшается линейно.

В то же время вязкость уменьшается с температурой экспоненциально:

$$\mu = \mu_0 \exp(E_{\mu} / RT), \quad (9)$$

где μ_0 – предэкспонента; E_{μ} – энергия активации вязкого течения.

Из анализа (7), принимая во внимание (8), (9), следует, что повышение или понижение температуры действует на скорость термокапиллярного течения разнонаправлено, то есть они частично компенсируют друг друга.

Определим вклад капиллярного и термокапиллярного течений в общую скорость движения жидкости в капилляре. Суммарная скорость течения

$$V_{\Sigma} = V + V_{\text{тс}}. \quad (10)$$

Подставляя в (10) (5), (7) и полагая $\frac{d\sigma}{dT_2} \approx \frac{d\sigma}{dT_1}$, имеем

$$V_{\Sigma} = \frac{d_c \sigma}{8\mu l} \left(1 + \frac{4l}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT_1} \frac{dT_2}{dy} \right) = V \left(1 + \frac{4l}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT_1} \frac{dT_2}{dy} \right). \quad (11)$$

Проведем оценки второго члена в круглых скобках формулы (11) для типичных значений величин. Поверхностное натяжение $\sigma = 1$ Н/м; в соответствии с (8) величина $|d\sigma/dT_1|$ для $\rho_1 = 4 \cdot 10^3$ кг/м³, $M = 4 \cdot 10^{-2}$ кг примерно равна $4.3 \cdot 10^{-4}$ Дж/(К·м²). Градиент температуры

$$\left| \frac{dT_2}{dy} \right| \approx \frac{\Delta T_2}{\Delta y} = \frac{2000 \text{ К}}{10^{-3} \text{ м}} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{К}}{\text{м}}.$$

За длину капиллярного растекания l примем размер реакционной ячейки, примерно равный диаметру легкоплавкого реагента $l \approx 10^{-4}$ м. Подставляя приведенные значения в (11), получим оценку второго члена 0.35. Таким образом, термокапиллярным растеканием можно пренебречь и в дальнейшем полагать $V_{\Sigma} = V$.

В области III ($y_2 < y < y_3(t)$) может существовать расплав или твердый металл. Исходная толщина инертного слоя $y_3(0) - y_2 = y_{i0}$ – один из основных параметров задачи. Закон движения границы y_3 определяется суммарной скоростью течения расплава $y_3(t) = (V_- + V_+)mt$, где V_+ – скорость течения жидкой фазы в порах правой части образца. Для этой области уравнение теплопроводности в силу допущения п. 2 имеет вид

$$\rho_1[c_1 + Q_L \delta(T_1 - T_L)] \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - \chi_e(T_1 - T_0). \quad (12)$$

В области IV ($y_3(t) < y < y_4(t)$), где расплав растекается в направлении холодной границы в порах реагирующей смеси, уравнения теплопроводности для двухфазной среды имеют вид (3) и (4), а уравнение кинетики – (2). В уравнении теплопроводности для расплава (4) скорость V_- следует заменить на скорость течения в противоположном направлении $-V_+$. Отметим, что V_- и V_+ несмотря на то, что определяются из уравнения (5), отличаются по абсолютной величине, так как время начала (окончания) течения t_s в поры левой и правой частей отличаются.

Наконец, в областях V и VI ($y_4(t) < y < y_5(t)$, $y_5(t) < y < \infty$, $y_5(t)$ – координата фронта горения), где находятся продукты горения и свежая смесь, нет расплава, температура и глубина превращения определяются уравнениями вида (1) и (2).

Возможна ситуация, когда слои композитов II и IV не образуются, например при высокой температуре плавления или низкой калорийности смеси. И наоборот, полное плавление внутреннего слоя с последующим втеканием расплава в продукты горения безгазовой смеси может привести к исчезновению металлического слоя III и образованию единого композиционного слоя в результате объединения областей II и IV.

Предполагая скорости движения фронтов капиллярного течения $y_1(t)$ и $y_4(t)$ равными, можно оценить значение пористости, необходимое для получения однородного композита на участке образца длиной $2\Delta y$. Пористость смеси m и толщина инертного слоя y_{i0} должны удовлетворять баланскому соотношению $m = y_{i0} / (2\Delta y)$. В этом случае в процессе формирования композита существуют области I, II, III, IV, V. Тогда конечная пористость на рассматриваемом участке $2\Delta y$ будет равна $m_k = 0$.

Если пористость смеси $m > m^*$, инерта недостаточно, чтобы заполнить все поры образца длиной $2y_0$. В конечном продукте существуют слои тугоплавкого продукта F, не содержащего инерта. При относительно большой толщине плавящегося слоя и условии $m < m^*$ объем пор меньше объема инерта. Часть инерта в конечном продукте остается в виде слоя, разделяющего композиционный материал. Наконец, если инертное вещество не плавится, то композиционный материал не формируется, а горение слоистого образца описывается уравнениями (1), (2), (12). Такая задача рассмотрена в [17]. Влияние инертной преграды на распространение волны горения также рассматривалось в [18].

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В области II, куда затекает расплав с температурой, меньшей (большей), чем температура пористой смеси, в уравнении (4) учитывается возможность кристаллизации. Так может происходить в неустойчивых (автоколебательных) режимах горения, когда в период депрессий температура может опускаться ниже температуры плавления. Если температура пористого каркаса T_2 в зонах пропитки становится меньше температуры плавления T_L , течение расплава прекращается. Координаты движущихся границ раздела слоев и расчетных областей находятся в процессе вычисления с учетом условий затекания в поры расплава в соответствии с формулой (6).

На левой границе образца моделируется действие источника зажигания – накаливаемой стенки $y = 0$: $T_2 = T_W$ ($t < t_W$), $\partial T_2 / \partial y = 0$ ($t > t_W$). На подвижных границах $y_1(t)$ и $y_4(t)$ для температуры жидкой фазы задаются условия, отражающие межфазный теплообмен, соответственно $\lambda_1 \partial T_1 / \partial y - \chi(T_1 - T_2) = 0$ и

$\lambda_1 \partial T_1 / \partial y - \chi(T_2 - T_1) = 0$. На межслоевых границах $y = y_2$ и $y = y_3(t)$ до начала течения расплава в порах левой и правой частях образца задаются условия сопряжения: $T_1 = T_2$, $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = (1-m)\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}$.

Начальные условия $-t = 0$: $T_1 = T_2 = T_0$, $\alpha = 0$.

Равновесная адиабатическая температура горения системы при равенстве объемов инертного и горючего материала слоевой композиции может быть рассчитана по формуле

$$T_* = T_0 + \frac{\rho_2 Q(1-m) - \rho_1 Q_L m}{\rho_2 c_2(1-m) + \rho_1 c_1 m}. \quad (13)$$

Результаты расчетов

Для удобства вычислений и анализа результатов математическая постановка приводилась к безразмерному виду с помощью следующих величин:

$$\begin{aligned} Td &= \frac{cRT_*^2}{QE}, \quad \theta_1 = \frac{(T_1 - T_*)E}{RT_*^2}, \quad \theta_2 = \frac{(T_2 - T_*)E}{RT_*^2}, \quad \theta_L = \frac{(T_L - T_*)E}{RT_*^2}, \quad \theta_0 = -Td^{-1}, \\ Ar &= \frac{RT_*}{E}, \quad \xi = \frac{y}{y_*}, \quad y_* = \sqrt{\frac{\lambda_{20} t_*}{c\rho}}, \quad t_* = \frac{cRT_*^2}{QEK(T_*)}, \quad K(T_*) = k_0 \exp(-E/RT_*), \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \\ \tau_W &= \frac{t_W}{t_*}, \quad \Lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_{20}}, \quad C = \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}, \quad A_{\text{cap}} = \frac{c_2 \rho_2 d_c \sigma}{4\mu\lambda_{20}}, \quad Ph = \frac{Q_L}{QTd}, \quad \lambda_2 = \lambda_{20}(1-m)^n, \\ \alpha_e &= \frac{\chi_e y_*}{\lambda_{20}}, \quad \alpha_i = \frac{\chi y_*}{\lambda_{20}}, \quad L_{i0} = \frac{y_{i0}}{y_*}, \quad L_2 = \frac{y_2}{y_*}. \end{aligned}$$

Параметр, определяющий скорость и глубину пропитки смежных пористых слоев расплавом, $-A_{\text{cap}}$, представляет собой отношение характерного времени капиллярного течения ко времени кондуктивного теплопереноса. В зависимости от характерного размера пор, теплофизических свойств пористой среды и вязкости жидкой фазы величина A_{cap} может изменяться в широких пределах. В предельном случае $A_{\text{cap}} = 0$ расплав в поры не затекает. Ограничим параметрическое исследование задачи безразмерными величинами, которые определяют структуру получаемого композиционного материала: A_{cap} , m , L_i , Λ , α_e . Значения других параметров принимали равными: $Td = 0.16$; $Ar = 0.12$; $Ph = 0.5$; $\theta_L = -2$; $\alpha_i = 0.1$; $L_2 = 100$; $C = 1$.

Численное решение системы уравнений (1), (3), (4), (12), приведенной к безразмерному виду, получено методом прогонки с использованием неявной схемы. Проводился контроль объема жидкой фазы, втекающей в поры

$$m \left(\int_0^t \int_{y_1(t)}^{y_2} dy + \int_0^t \int_{y_3(t)}^{y_4(t)} dy \right) = \int_0^t \int_{y_2}^{y_3(t)} dy. \quad (14)$$

Погрешность выполнения условия (14) не превышала 1 %. Линейные скорости фронта горения в левой и правой частях слоевой композиции определялись численно по перемещению точки $\alpha = 0.5$.

В зависимости от параметров инертного слоя возможны два варианта горения образца, разделяемые критическими условиями. В первом образец реагирует полностью с определенным временем задержки на преодоление слоя и всплеском скорости горения в момент воспламенения правой части. Во втором волна горения не проходит через слой. В адиабатических условиях $\chi_e = 0$ реализуется только первый вариант, т.е. волна горения вне зависимости от параметров преодолевает слой [18]. При учете теплоотдачи появляются критические условия, разделяющие варианты горения образца. Эти условия зависят от размера и физико-химических параметров инертного слоя: с увеличением толщины слоя и уменьшением его теплопроводящих свойств время зажигания правой части образца нелинейно растет (рис. 2). Для легкоплавкого инерта ($\theta_L \ll 0$) увеличение числа фазового перехода Ph , характеризующего теплоту плавления, приводит к увеличению времени задержки, а вблизи критических условий – и к срыву горения. Уменьшение температуры плавления сужает зону прогрева в инертном слое, при этом уменьшаются потери тепла на преодоление волной горения преграды. Режим горения до и после инертного слоя определяется параметрами активной среды. Параметры инертного слоя определяют только время выхода волны на устойчивый режим с характеристиками горения, соответствующими активной среде. Чем больше время задержки фронта при преодолении инертного слоя, тем больше зона прогрева в активной части образца за ним. Влияние затекания расплава в поры на воспламенение и преодоление волной горения инертной преграды незначительно.

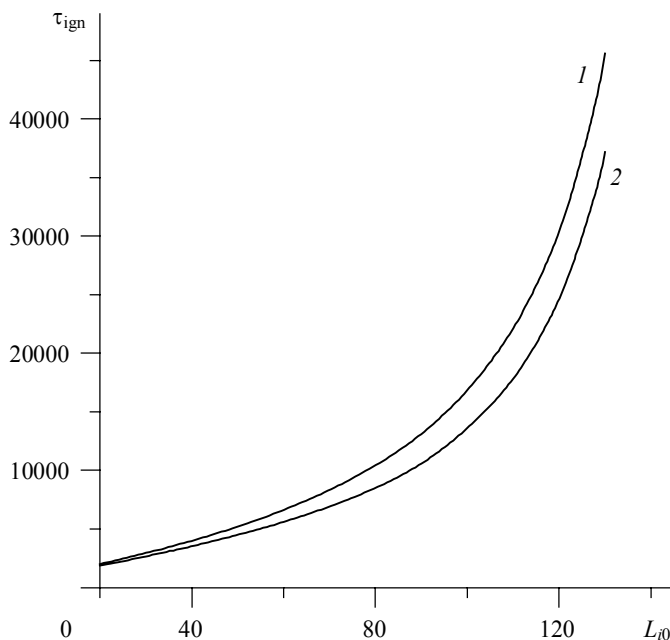


Рис. 2. Зависимость времени зажигания правой части образца ($y > y_3(t)$) от толщины металлического слоя III: 1 – $\Lambda = 3$, 2 – $\Lambda = 10$; $m = 0.5$, $A_{\text{cap}} = 1$, $\alpha_e = 0$

Fig. 2. Ignition time of the right part of sample as a function of metal layer thickness III: $\Lambda = (1) 3$, $(2) 10$; $m = 0.5$, $A_{\text{cap}} = 1$, and $\alpha_e = 0$

Распространение волны горения в слоевой композиции зависит от тепловых, химических и гидродинамических факторов. Действие первых определено интенсивностью теплообмена, температурой плавления инертного слоя, теплопроводностью и теплоемкостью веществ композиции. В число химических факторов следует отнести скорость, кинетику и тепловой эффект химической реакции. Гидродинамические факторы определяют скорость и глубину капиллярного впитывания расплава в поры и зависят от структурных параметров m и A_{cap} . Эти факторы в первую очередь определяют особенности формирования структуры композиционного материала.

Динамика уменьшения толщины внутреннего слоя в адиабатическом режиме горения $\chi_e = 0$ представлена на рис. 3. Первая точка излома кривых 1–3 соответствует началу проникновения расплава в правую часть образца. Следующая по времени точка излома кривых соответствует началу течения в левую часть. Такая очередность в пропитке обусловлена тем фактом, что капиллярное течение расплава становится возможным только после полного проплавления внутреннего слоя, которое происходит только после воспламенения правой пористой части образца. С увеличением толщины внутреннего слоя процесс пропитки замедляется, но при отсутствии внешнего теплоотвода расплав внутреннего слоя полностью затекает в поры с образованием композиционного материала.

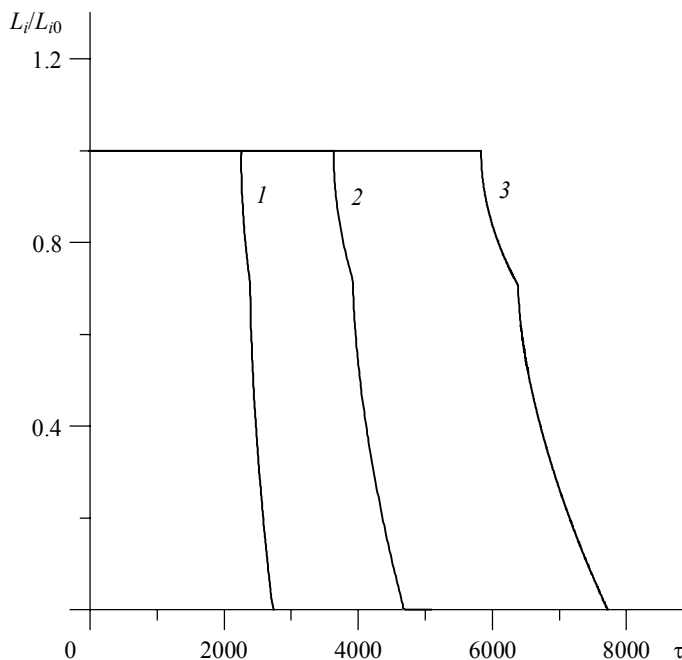


Рис. 3. Изменение относительной толщины внутреннего слоя в адиабатическом режиме горения: 1 – $L_{i0} = 20$, 2 – $L_{i0} = 30$, 3 – $L_{i0} = 40$; $\Lambda = 3$, $m = 0.5$, $A_{\text{cap}} = 1$, $\alpha_e = 0$

Fig. 3. Variation in the relative thickness of inner layer in adiabatic combustion regime: $L_{i0} = (1) 20$, (2) 30, and (3) 40; $\Lambda = 3$, $m = 0.5$, $A_{\text{cap}} = 1$, and $\alpha_e = 0$

В неадиабатических условиях $\chi_e \neq 0$ возможно формирование слоевой структуры с инертным слоем толщиной меньше, чем начальное значение y_L . Изменение по времени толщины инертного слоя в этом случае в зависимости от параметра капиллярного течения A_{cap} иллюстрирует рис. 4. Более интенсивное впитывание расплава в правую часть композиции с ростом A_{cap} приводит к увеличению скорости движения границы капиллярного течения $y_d(t)$, определяющей текущую толщину инертного слоя. Соответственно время начала пропитки расплавом левой части слоевой композиции уменьшается. Падение температуры пористого каркаса ниже температуры плавления приводит к остановке капиллярного течения и кристаллизации расплава. Часть металла внутреннего слоя III (рис. 1), не затекшая в поры, так и остается в виде слоя, разделяющего слои композиционного материала.

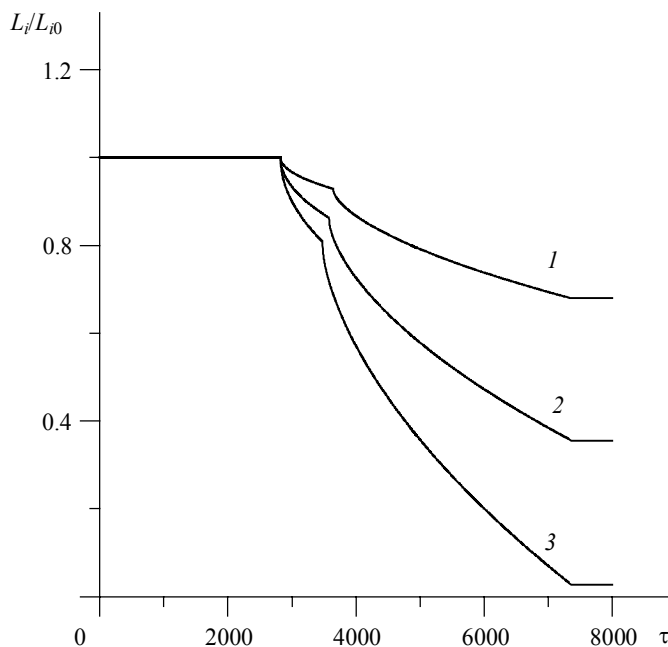


Рис. 4. Изменение относительной толщины внутреннего слоя в неадиабатическом режиме горения: 1 – $A_{\text{cap}} = 1$, 2 – $A_{\text{cap}} = 2$, 3 – $A_{\text{cap}} = 3$, $\Lambda = 3$, $m = 0.5$, $L_{i0} = 20$, $\alpha_e = 3 \cdot 10^{-5}$

Fig. 4. Variation in the relative thickness of inner layer in non-adiabatic combustion regime: $A_{\text{cap}} = (1)$ 1, (2) 2, and (3) 3; $\Lambda = 3$, $m = 0.5$, $L_{i0} = 20$, and $\alpha_e = 3 \cdot 10^{-5}$

Таким образом, в результате организации горения в трехслойном пакете можно реализовать различные технологические процессы: пропитку, наплавку. Практическим приемом регулирования структуры конечного продукта является варьирование толщин внутреннего слоя, пористости, дисперсности (изменяющей эффективный диаметр капилляров и теплопроводность), соотношения реагентов, дополнительный подогрев или охлаждение слоевого пакета, замена металлической фольги слоем порошка для уменьшения теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мержанов А.Г., Мукасян А.С. Твердопламенное горение. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2007.
2. Байдельдинова А.Н., Ксандопуло Г.И. Квазиadiaбатический самораспространяющийся высокотемпературный синтез материалов в композициях из сопряженных слоев // Неорганические материалы. 2003. Т. 39. № 10. С.1204–1207.
3. Ксандопуло Г.И., Байдельдинова А.Н. Горение в системе сопряженных слоев и высокотемпературный синтез материалов // Журнал прикладной химии. 2004. Т. 77. Вып. 3. С. 370–374.
4. Sytshev A.E., Vrel D., Boyarchenko O.D., Roshchupkin D.V., Sachkova N.V. Combustion synthesis in bi-layered (Ti–Al)/(Ni–Al) system // J. Materials Processing Technology. 2017. V. 240. P. 60–67.
5. Shchukin A.S., Sytshev A.E. Fine structure of transition layer formed between NiAl melt and W substrate during self-propagating high-temperature synthesis // Letters on Materials. 2017. V. 7 (3). P. 244–248.
6. Писклов А.В., Прокофьев В.Г., Смоляков В.К. Безгазовое горение слоевого пакета в неadiaбатических условиях // Изв. вузов. Цветная металлургия. 2006. № 5. С. 102–108.
7. Прокофьев В.Г., Смоляков В.К. К теории процессов самораспространяющегося синтеза в слоевых системах // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48. № 5. С. 160–166.
8. Prokof'ev V. G., Smolyakov V. K. Gasless combustion in two-layer structures: A theoretical model // Intern. J. of SHS. 2013. V. 22. No. 1. P. 5–10.
9. Прокофьев В.Г., Смоляков В.К. Безгазовое горение системы термически сопряженных слоев // Физика горения и взрыва. 2016. Т. 52. № 1. С. 70–75.
10. Алигожина К.А., Князева А.Г. Моделирование распространения твердофазной реакции в условиях сопряженного теплообмена // Физика горения и взрыва. 2017. Т. 53. № 4. С. 48–57.
11. Фирсов А.Н., Шкадинский К.Г. Нестационарные режимы горения безгазовых конденсированных веществ, периодически разбавленных инертными добавками // Физика горения и взрыва. 1988. Т. 24. № 6. С. 93–98.
12. Кришеник П.М., Мержанов А.Г., Шкадинский К.Г. Режимы фронтального превращения высокоэнергетических структурированных гетерогенных систем // Физика горения и взрыва. 2005. Т. 41. № 2. С. 51–61.
13. Прокофьев В.Г., Смоляков В.К. К теории горения и синтеза композиционных материалов в поле массовых сил // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. № 4. С. 22–28.
14. Хейфиц Л.И., Неймарк А.В. Многофазные процессы в пористых средах. М.: Химия, 1982.
15. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959.
16. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. М.: Наука, 1975.
17. Smolyakov V.K., Prokof'ev V.G. The theory of self-propagating high-temperature-synthesis of functionally gradient materials // Int. J. SHS. 2003. V.12. No. 1. P. 1–10.
18. Крайнов А.Ю. Влияние теплофизических характеристик инертной преграды и теплопотерь на распространение волны горения // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23. № 6. С. 16–19.

Статья поступила 26.02.2018 г.

Prokof'ev V.G., Lapshin O.V., Smolyakov V.K. (2018) MACROKINETICS OF COMBUSTION OF LAYERED COMPOSITIONS WITH A LOW-MELTING INERT LAYER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 102–113

DOI 10.17223/19988621/52/10

The mathematical model of gasless combustion of a layered composition is considered. Inner layer of the composition consists of an inert low-melting metal. Other layers consist of a highly exothermic gasless mixture. In the inner layer, metal melts during combustion of the adjacent layers. Affected by surface tension forces, the melt flows into the porous combustion products of gasless mixture to form a composite material. The capillary flow of melt in the porous channels is

limited by skeleton temperature equal to the melting point. The time spent for passing through an inert layer by combustion wave is found depending on the thickness and thermal conductivity of the layer. The modes of synthesis for layered composite materials in combustion regime are determined. The dynamics of structure formation of the composite materials is considered depending on the thickness of inner metal layer and on the external heat exchange coefficient.

Keywords: self-propagating high-temperature synthesis, porous medium, capillary flow, composite material, modeling

PROKOF'EV Vadim Gennad'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk Research Center, Russian Federation). E-mail: pvg@ftf.tsu.ru

LAPSHIN Oleg Valentinovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Research Center, Russian Federation). E-mail: ovlap@mail.ru

SMOLYAKOV Victor Kuz'mich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Research Center, Russian Federation)

REFERENCES

1. Merzhanov A.G., Mukas'yan A.S. (2007) *Tverdoplamennoe gorenie* [Solid-flame combustion]. Moscow: Torus Press.
2. Baideldinova A.N., Ksandopulo G.I. (2003) Quasi-adiabatic self-propagating high-temperature synthesis in layered systems. *Inorganic Materials*. 39(10). pp. 1039–1042. DOI: 10.1023/A:1026082924037.
3. Baideldinova A.N., Ksandopulo G.I. (2004) Combustion in a system of conjugated layers and high-temperature synthesis of materials. *Russian Journal of Applied Chemistry*. 77(3). pp. 364–368. DOI: 10.1023/B:RJAC.0000031272.43669.c0.
4. Sytshev A.E., Vrel D., Boyarchenko O.D., Roshchupkin D.V., Sachkova N.V. (2017) Combustion synthesis in bi-layered (Ti–Al)/(Ni–Al) system. *Journal of Materials Processing Technology*. 240. pp. 60–67. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2016.09.010.
5. Shchukin A.S., Sytshev A.E. (2017) Fine structure of transition layer formed between NiAl melt and W substrate during self-propagating high-temperature synthesis. *Letters on materials*. 7 (3). pp. 244–248. DOI: 10.22226/2410-3535-2017-3-244-248.
6. Pisklov A.V., Prokof'ev V.G., Smolyakov V.K. (2006) Bezgazovoe gorenie sloevogo paketa v neadiabatcheskikh usloviyakh [Gasless combustion of layered package under nonadiabatic conditions]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Tsvetnaya metallurgiya – Proceedings of Higher Schools. Nonferrous Metallurgy*. 5. pp. 102–108.
7. Prokof'ev V.G., Smolyakov V.K. (2012) On the theory of self-propagating high-temperature synthesis in layered systems. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 48(5). pp. 636–641. DOI: 10.1134/S0010508212050152.
8. Prokof'ev V.G., Smolyakov V.K. (2013) Gasless combustion in two-layer structures: A theoretical model. *Int. J Self-Propag. High-Temp. Synth*. 22(1). pp. 5–10. DOI: 10.3103/S1061386213010093.
9. Prokof'ev V.G., Smolyakov V.K. (2016) Gasless combustion of a system of thermally coupled layers. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 52(1). pp. 62–66. DOI: 10.1134/S0010508216010081.
10. Aligozhina K.A., Knyazeva A.G. (2017) Modeling the solid phase reaction distribution in the case of conjugate heat exchange. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 53(4). pp. 411–419. DOI: 10.1134/S0010508217040050.
11. Firsov A.N., Shkadinskiy K.G. (1988) Nonstationary combustion regimes of gasless condensed substances periodically diluted by inert admixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 24(6). pp. 726–730. DOI: 10.1007/BF00740418.
12. Krishenik P.M., Merzhanov A.G., Shkadinskiy K.G. (2005) Frontal transformation modes of structured energetic heterogeneous systems. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 41(2). pp. 164–173. DOI: 10.1007/s10573-005-0019-x.

13. Prokof'ev V.G., Smolyakov V.K. (2014) On the theory of combustion and synthesis of composite materials in the field of mass forces. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 50(4). pp. 387–392. DOI: 10.1134/S0010508214040042.
14. Heyfits L.I., Neymark A.V. (1982) *Mnogofaznye protsessy v poristyykh sredakh* [Multiphase processes in porous media]. Moscow: Chemistry.
15. Levich V. (1962) *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice Hall.
16. Frenkel J. (1955) *Kinetic Theory of Liquids*. Dover Publications.
17. Smolyakov V.K., Prokof'ev V.G. (2003) The theory of self-propagating high-temperature-synthesis of functionally gradient materials. *Intern. J. of SHS*. 12(1). pp.1–10.
18. Krainov A.Yu. (1987) Influence of thermophysical characteristics of an inert obstacle and heat losses on combustion wave propagation. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 23(6). pp. 676–679. DOI: 10.1007/BF00742519.

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

УДК 51(091)

DOI 10.17223/19988621/52/11

В.Н. Берцун, Н.И. Савина, Р.И. Бедная

К 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА В.Г. ПРЯЖИНСКОЙ

Представлены основные этапы научной деятельности выпускницы механико-математического факультета Томского университета, заслуженного деятеля науки Российской Федерации Валентины Гавриловны Пряжинской, основателя нового научного направления по оптимизации водопользования и планирования деятельности по охране вод.

Ключевые слова: выпускники Томского университета, математическое моделирование водохозяйственных систем.



Валентина Гавриловна Пряжинская (Кононова) родилась 26 августа 1933 г. в селе Исилюль Исилюльского района Омской области. Мать, Мария Васильевна, окончила Исилюльский педтехникум. Работала учительницей, заведующей детским садом. Отец, Кононов Гавриил Ефимович, работал бухгалтером колхоза. Они были из тех, кого на селе называли «интеллигенция».

В детстве Вале пришлось вместе с родителями много раз переезжать с места на место: с. Исилюль, г. Новокузнецк, с. Алексеевка, с. Полтавка Карагандинской области, г. Петропавловск.



Фото 1. Исилькуль, 1939 г. (Валя крайняя справа)
Fig. 1. Isikul, 1939 (Valya is the first from the left side)

В 1940 г. семья переехала в с. Ново-Сухотино Красноармейского района Северо-Казахстанской области. В этом селе Валя училась в средней школе №1. Младший брат Владимир вспоминает: «Валя рассказывала историю про библиотеку. Читать она научилась ещё до школы. В первом классе решила записываться в библиотеку. Библиотекарь спросила, в каком она классе? И сказала, что после первого полугодия, если будут хорошие отметки, можно будет записаться. Как только выдали табели за 1-е полугодие, Валя с этим табелем пришла в библиотеку и её записали».

Закончив 7-й класс, Валя собиралась поступать в геолого-разведочный техникум. Но спустя многие годы, она с благодарностью вспоминала директора школы Тена Якова Александровича, который не выдал ей документы и убедил в том, что у нее есть склонность к точным наукам, поэтому надо окончить школу и получить высшее образование. В 1951 г. Валя окончила среднюю школу с золотой медалью и без экзаменов была принята на механико-математический факультет Томского университета (ММФ ТГУ) на специальность «Математика» [1, 2].

Уже с первого курса Валентина стала активно заниматься научно-исследовательской работой и за доклад на 8-й студенческой конференции в 1952 г. была отмечена благодарностью в приказе ректора. Во время учебы она, как и большинство студентов ММФ, проживала в общежитии ТГУ на ул. Никитина 4.



Фото 2. В общежитии на Никитина, 4. Комната 2-39; октябрь 1953 г.
(Валя в нижнем ряду, справа)

Fig. 2. In the dormitory on Nikitina, 4, room 2-39; October, 1953
(Valya is in the lower row, on the right side)

Во время летних каникул всегда приезжала домой в с. Ново-Сухотино, чтобы навестить маму, побыть в кругу семьи, встретиться с одноклассниками.



Фото 3. На каникулах в с. Ново-Сухотино
с одноклассницей Омаровой Дарьей, 1953 г.
Fig. 3. On the holidays in Novo-Sukhotino Village,
together with a classmate Darya Omarova, 1953



Фото 4. На каникулах с мамой и сестрой Наташей, 1953 г.

Fig. 4. On the holidays together with mother and sister Natalya, 1953

На втором и третьем курсе курсовые работы Валентина выполняла под руководством доцента ММФ Н.Г. Туганова. На четвертом курсе под руководством доцента А.И. Фета выполнила курсовую работу на тему «Теорема Брауэра о неподвижной точке». Дипломная работа была подготовлена под руководством доцента Г.А. Бюлера на тему «Пять Сибирских математических олимпиад», которую она защитила на оценку «хорошо». В августе 1955 г. Валентина Гавриловна вышла замуж за односельчанина Пряжинского Ивана Васильевича, который в это время учился на 5 курсе в Томском политехническом институте. Через всю жизнь они пронесли любовь и уважение друг к другу, являясь образцом для детей и окружающих.

Летом 1956 г. Валентина Гавриловна успешно окончила университет и поступила в аспирантуру ММФ ТГУ к известному уже тогда специалисту по комплексному анализу и его применению к задачам механики сплошной среды профессору



Фото 5. В.Г. Пряжинская, 1956 г.

Fig. 5. V.G. Pryazhinskaya, 1956

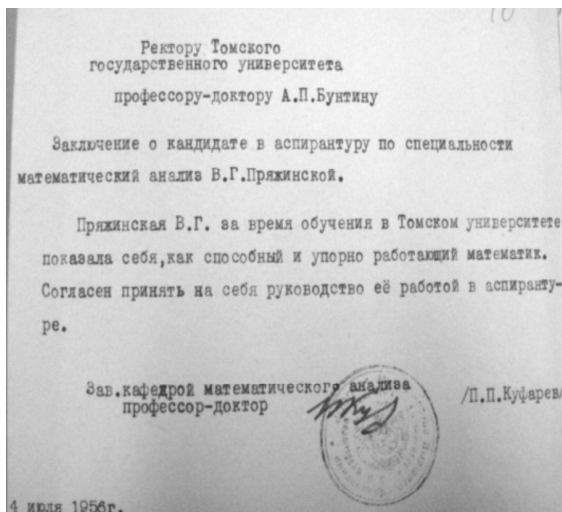


Фото 6. Рекомендация в аспирантуру

Fig. 6. Recommendation to the postgraduate

П.П. Куфареву [3]. Кроме экзаменов, при поступлении в аспирантуру ею был написан реферат на тему «Плоские задачи фильтрации», где в списке литературы цитировались работы П.П. Куфарева, П.Я. Кочиной и Л.А. Галина.

Окончив аспирантуру без защиты диссертации в 1960 г., Валентина Гавриловна стала работать ассистентом на кафедре общей математики ММФ ТГУ и продолжила работу над диссертацией [4].

Завершение работы над диссертацией в 1961 г. совпало с проведением в г. Тбилиси Всесоюзного совещания по применению методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики. На совещание Павел Парфеньевич направил Валентину Гавриловну для представления материалов диссертации. При этом он говорил о важности для защиты диссертации и дальнейшей научной работы знакомства и общения во время конференции с академиком Пелагеей Яковлевной Кочиной и чл.-корр. РАН Львом Александровичем Галиным, которые были участниками этой конференции. Как отмечала Валентина Гавриловна, «эта поездка и представление материалов диссертации на конференции привели к кардинальным изменениям в моей жизни».

В мае 1961 г. она защитила кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые задачи фильтрации», в которой были рассмотрены три задачи о плоском неустановившемся движении идеальной несжимаемой жидкости. Оппонентами по диссертации были профессор В. А. Шваб и доцент Ю. С. Завьялов, а Московский институт прикладной математики и механики был назначен ведущей организацией [5].

После защиты диссертации Валентина Гавриловна, по приглашению Пелагеи Яковлевны Кочиной, вместе с семьей (муж учился в аспирантуре в Новосибирске, сын Валентин – 4 года, дочь Лена – 2.5 года) переехала в г. Новосибирск. Здесь она стала работать в Институте гидродинамики СО АН СССР в должности младшего научного сотрудника. С 1965 г. получила должность старшего научного



Фото 7. День рождения П.Я. Кочиной. На переднем плане Пряжинская В.Г и Кочина П.Я., 13.05.1964 г., г. Новосибирск
Fig. 7. Birthday of P.Ya. Kochina. V.G. Pryazhinskaya and P.Ya. Kochina on the front row. May, 13, 1964

сотрудника, а с 1967 г. – заведующей лабораторией в отделе теории фильтрации академика П.Я. Кочиной. Валентина Гавриловна возглавляла эту лабораторию более восьми лет. Под её руководством получило развитие новое в то время направление, связанное с задачами линейного программирования и приложением задач стационарной фильтрации для оптимизации орошения, поддержанное академиком Л. В. Канторовичем.

В отпускное время Валентина Гавриловна любила путешествовать. В период работы в СО АН СССР Пряжинские с друзьями-однокурсниками (семья Арнольда Михайлова и Владимира Шепеленко) часто бывали на Байкале, Иссык-Куле, Алтае.

В 1969 г. по настоянию академика П.Я. Кочиной она приступила к оформлению диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по теме: «Оптимальные модели орошения», защита которой состоялась в 1971 г.

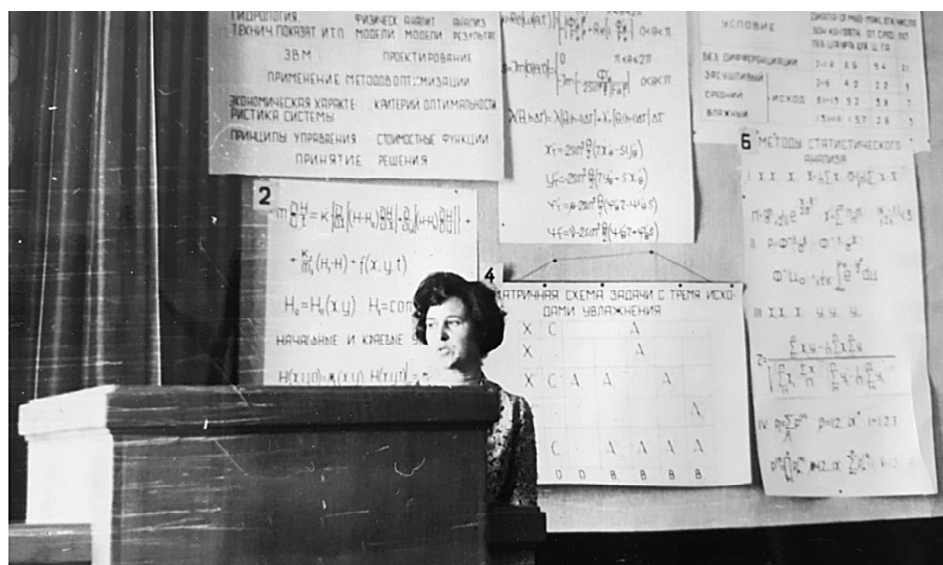


Фото 8. На защите докторской диссертации. Новосибирск, 30 апреля 1971 года

Fig. 8. On the defense of the doctor's thesis. Novosibirsk, April, 30, 1971

В 1975 г. В.Г. Пряжинская была избрана по конкурсу на должность заведующего сектором системного анализа Института водных проблем Академии наук СССР (ныне – ИВП РАН), которому она посвятила более 40 лет своей жизни.

Валентина Гавриловна – известный специалист в области системного анализа водных проблем [6,7]; основатель нового научного направления – оптимизация водопользования и планирование водоохранной деятельности в речных бассейнах. Ее научная деятельность связана с теоретическими разработками и практическим применением математических моделей для поддержки принятия решений в управлении водными ресурсами к конкретным водным объектам. Разработки В.Г. Пряжинской были использованы при проектировании нескольких отечественных и зарубежных оросительных систем, расположенных в зонах рискованного земледелия (Алейской в Алтайском крае, Верхне-Сальской в Ростовской об-

ласти, а также оросительной системы в центральной части Бирмы). Под ее руководством подготовлен раздел в «Схеме комплексного использования и охраны водных ресурсов в бассейне р. Терек». Деятельность Валентины Гавриловны получила международное признание: она работала в Комитете по управлению водно-ресурсными системами Международной ассоциации гидравлических исследований (МАГИ), являлась экспертом UNEP по проблеме рационального использования водных ресурсов р. Евфрат, участвовала в разработке схемы комплексного использования и охраны водных ресурсов Республики Куба и других стран.



Фото 9. В.Г. Пряжинская – участник Международного конгресса по теоретической и прикладной механике. Москва, 1972 год
Fig. 9. V.G. Pryazhinskaya – a participant of the International Kongress on the theoretic and applied mechanics. Moskow, 1972

В.Г. Пряжинская – автор и соавтор более 160 научных работ, в том числе 11 монографий:

1. Математические методы в вопросах орошения (1969 г.)
2. Математическое моделирование в водном хозяйстве (1985 г.)
3. Совершенствование использования водных и земельных ресурсов в орошаемом земледелии (1986 г.)
4. Математическое моделирование в управлении водными ресурсами (1988 г.)
5. Моделирование водохозяйственных систем (эколого-экономические аспекты) (1992 г.)
6. Water Resources Management in the Face of Climatic / Hydrologic Uncertainties/ (1996 г.)
7. ВОДА РОССИИ, Математическое моделирование в управлении водопользованием (2001 г.)

8. Компьютерное моделирование в управлении водными ресурсами (2002 г.)
9. Обоснование стратегий управления водными ресурсами (2006 г.)
10. Водные ресурсы и качество вод, состояние и проблемы управления (2010 г.)
11. Экономические и территориальные аспекты управления водохозяйственным комплексом России (2013 г.).

Валентина Гавриловна проявила себя и как опытный руководитель и организатор науки: в 1975–1986 гг. возглавляла сектор системного анализа; с 1986 по 1989 г. являлась главным научным сотрудником лаборатории экономики водопользования; с 1989 по 1994 г. – заместителем директора института по научной работе; с 1994–2003 г. – заведующей лабораторией управления водными ресурсами, а с 2004 г. – главным научным сотрудником института.

Валентина Гавриловна уделяла большое внимание подготовке научных кадров, в течение многих лет возглавляла Всероссийскую школу-семинар «Системные исследования водных проблем». Под её руководством защищено 15 кандидатских диссертаций.

Дети Валентины Гавриловны и Ивана Васильевича окончили Московский государственный университет. Валентин стал математиком, Елена – психолог. Появились и внуки...



Фото 10. В.Г. Пряжинская (1933–2017 гг.) – главный научный сотрудник Института водных проблем РАН, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, академик Российской экологической академии

Fig. 10. V.G. Pryazhinskaya (1933–2017) – Chief Researcher of the Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Academician of the Russian Ecological Academy

Валентина Гавриловна была мудрым, выдержанным, корректным и доброжелательным человеком, глубоко преданным науке. Ее статьи и монографии пользуются признанием специалистов, способствуют укреплению науки. Указом Президента РФ от 11.11.2004 г. №1433 Валентине Гавриловне Пряжинской присвоено звание заслуженного деятеля науки РФ. Она награждена двумя медалями и почетными грамотами Президиума РАН, а с 2007 г. являлась действительным членом Российской экологической академии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берцун В.Н., Косова Е.С. О первом центре высшего математического образования в Сибири // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 102–112.
2. Архив ТГУ. Ф. Р-815. Оп. 69. Ед. 258. (студ.)
3. Пряжинская В.Г. Воспоминания о П.П. Куфареве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 4(8). С. 118–120.
4. Архив ТГУ. Ф. Р-815. Оп. 28. Ед. 154.
5. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 23. Д. 26.
6. Пряжинская В.Г. Математические модели управления качеством природных вод // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 4(8). С. 53–64.
7. К юбилею Валентины Гавриловны Пряжинской // Водное хозяйство России. 2013. № 5. С. 99–102.

Статья поступила 01.03.2018 г.

Bertsun V.N., Savina N.I., Bednaya R.I. (2018) TO THE 85-TH ANNIVERSARY OF V.G. PRYAZHINSKAYA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 114–123

DOI 10.17223/19988621/52/11

Keywords: alumni of Tomsk State University, mathematical modeling of water management systems

This work presents main stages of the scientific activity of Valentina Gavrilovna Pryazhinskaya, the alumnus of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Honored Scientist of Russian Federation, the founder of the new scientific direction of optimization of water use and planning of water protection activities

BERTSUN Vladimir Nikolaevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvn@math.tsu.ru

SAVINA Natalya Ivanovna (Candidate of Geology and Mineralogy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: savina@ggf.tsu.ru

BEDNAYA Raisa Ilyinichna (Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: lya-44@mail.ru

REFERENCES

1. Bertsun V.N., Kosova E.S. (2017) O pervom tsentre vysshego matematicheskogo obrazovaniya v Sibiri [About the first center of higher mathematical education in Siberia]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 102–112. DOI 10.17223/19988621/46/12.
2. Archives of Tomsk State University. F. P-815. Op. 69. Ed. 258. (stud.)

3. Pryazhinskaya V.G. (2009) Vospominaniya o P.P. Kufareve [Memoirs of P.P.Kufarev] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(8). pp. 118–120.
4. Archives of Tomsk State University. F. P-815. Op. 28. Ed. 154.
5. State Archives of the Tomsk Region. F. P-815. Op. 23. D. 26.
6. Pryazhinskaya V.G. (2009) Matematicheskie modeli upravleniya kachestvom prirodnikh vod [Mathematical models of water quality management] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika –Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(8). pp. 53–64.
7. K yubileyu Valentiny Gavrilovny Pryazhinskoy [To the anniversary of V.G. Pryazhinskaya] (2013) *Vodnoe khozyaystvo Rossii – Water Economy of Russia*. 5. pp. 99–102.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНДРИАСЯН Алина Валерьевна – студентка Томского государственного архитектурно-строительного университета, г. Томск. E-mail: alina-andriasyan@yandex.ru

АНДРОПОВА Антонина Олеговна – аспирантка Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: a.o.andropova@gmail.com

БАРАННИКОВА Светлана Александровна – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН; профессор Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: bsa@ispms.tsc.ru.

БЕДНАЯ Раиса Ильинична – главный специалист лаборатории управления водными ресурсами Института водных проблем РАН, г. Москва. E-mail: lya-44@mail.ru

БЕРЦУН Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: bvn@math.tsu.ru

БИМАТОВ Владимир Исмагилович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: vbimatov@mail.ru

БОРЗЕНКО Евгений Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

БОРОДАЧЕВА Ирина Александровна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: vbimatov@mail.ru

ЗУЕВ Лев Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией физики прочности Института физики прочности и материаловедения СО РАН, профессор Томского государственного университета. E-mail: lbz@ispms.tsc.ru

КОЧЕТКОВ Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института механики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород. E-mail: kochetkov@mech.unn.ru

ЛАВРОНОВИЧ Алексей Николаевич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: vbimatov@mail.ru

ЛАНДИК Лидия Владимировна – инженер кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. Email: LidiaLandik@gmail.com

ЛАПШИН Олег Валентинович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела структурной макрокинетики Томского научного центра СО РАН, г. Томск. E-mail: ovlap@mail.ru

ЛЕДКОВ Александр Сергеевич – кандидат технических наук, доцент Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева, г. Самара. E-mail: ledkov@inbox.ru

ЛЕОНТЬЕВ Николай Васильевич – кандидат технических наук, доцент Научно-исследовательского института механики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород. E-mail: tam015@mail.ru

ЛИ Юлия Владимировна – аспирантка Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. E-mail: jul2207@mail.ru

МАМАДРАИМОВА Назира Абдираимовна – студентка Томского государственного архитектурно-строительного университета, г. Томск. E-mail: mamadraimova96@mail.ru

МАТВИЕНКО Олег Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного архитектурно-строительного университета, г. Томск. E-mail: matvolegv@mail.ru

МОДИН Иван Александрович – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород. E-mail: mianet@mail.ru

НОРБОСАМБУЕВ Цырендоржи Дашацыренович – аспирант кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

ПЕСТРЕНИН Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: PestreninVM@mail.ru

ПЕСТРЕНИНА Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: IPestrenina@gmail.com

ПРОКОФЬЕВ Вадим Геннадьевич – доктор физико-математических наук, профессор физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: pvg@ftf.tsu.ru

ПЧЕЛИНЦЕВ Валерий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент Томского политехнического университета, г. Томск. E-mail: vpchelintsev@vtomske.ru

ПЧЕЛИНЦЕВ Евгений Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: evgen-pch@yandex.ru

САВИНА Наталья Ивановна – кандидат геолого-минералогических наук, доцент кафедры палеонтологии и исторической геологии геолого-географического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: savina@ggf.tsu.ru

САВИХИН Андрей Олегович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород. E-mail: andrey-savikhin@yandex.ru

САВКИНА Надежда Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

СМОЛЯКОВ Виктор Кузьмич – доктор физико-математических наук, отдел структурной макрокинетики Томского научного центра.

СОБОЛЕВ Руслан Геннадьевич – студент Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева, г. Самара. E-mail: rus7522@yandex.ru

ШРАГЕР Геннадий Рафаилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: shg@ftf.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 17.04.2018. Выпуск в свет 26.04.2018.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.16. Уч.-изд. л. 11.38. Тираж 250 экз. Заказ № 9. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 3139.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru