

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2013

№ 5(25)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербаков Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики); Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Губин В.Н., Травкина В.В. Две задачи динамического резервирования.....	5
Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии.....	12
Полухина А.В., Хмылёва Т.Е. Непрерывность выпуклых функций.....	26
Тимошенко Е.А. Чисто трансцендентные расширения поля рациональных чисел как базовые поля csr -колец.....	30
Трофименко Н.Н., Хмылева Т.Е. О гомеоморфизмах пространств $I \times [1, \alpha]$ с топологией Зоргенфрея.....	40

МЕХАНИКА

Диль Д.О., Бубенчиков А.М. Двухфазная фильтрация в трубе, заполненной пористым материалом.....	45
Иванова О.В., Зелепугин С.А. Выбор параметров взрывного нагружения цилиндрической ампулы.....	52
Липанов А.М., Васенин И.М., Шрагер Э.Р., Крайнов А.Ю. Метод прямого численного моделирования турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в криволинейных каналах.....	59
Миньков Л.Л., Степанова Ю.О. Влияние циркуляционной зоны на скорость оседания мелких частиц бидисперсной суспензии.....	70
Смолин И.Ю., Еремин М.О., Макаров П.В., Буякова С.П., Кульков С.Н., Евтушенко Е.П. Численное моделирование механического поведения модельных хрупких пористых материалов на мезоуровне.....	78
Старченко А.В., Данилкин Е.А., Нутерман Р.Б., Терентьева М.В. Применение микромасштабной метеорологической модели для исследования структуры течения над взлетно-посадочной полосой аэропорта.....	91
Цыденов Б.О., Старченко А.В. Численная модель взаимодействия систем «река – озеро» на примере весеннего термобара в озере Камлупс.....	102

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

МИХАИЛ РОМАНОВИЧ КУБАЕВ. К 90-летию со дня рождения.....	116
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ.....	122

CONTENTS

MATHEMATICS

Gubin V.N., Travkina V.V. Two problems of dynamic redundancy.....	5
Emel'yanova T.V., Konev V.V. On the sequential estimation of parameters in a continuous autoregression model	12
Polukhina A.V., Khmyleva T.E. Continuity of convex functions	26
Timoshenko E. A. Purely transcendental extensions of the field of rational numbers as base fields of csp-rings	30
Trofimenko N.N., Khmyleva T.E. On homeomorphisms of spaces $I \times [1, \alpha]$ with the Sorgenfrey topology.....	40

MECHANICS

Dil' D.O., Bubenchikov A.M. Two-phase filtration in a pipe filled with a porous material	45
Ivanova O.V., Zelepugin S.A. Selection of parameters for explosive loading of cylindrical ampoules	52
Lipanov A.M., Vasenin I.M., Shrager E.R., Krainov A.Y. A method of direct numerical simulation of turbulent flows of viscous heat-conducting gas in curved channels	59
Minkov L.L. , Stepanova Y.O. Influence of the circulation zone on settling velocity of fine particle in bidisperse suspension	70
Smolin I.Yu., Eremin M.O., Makarov P.V., Buyakova S.P., Kul'kov S.N., Evtushenko E.P. Numerical modelling of mechanical behaviour of model brittle porous materials.....	78
Starchenko A.V., Danilkin E.A., Nuterman R.B., Terenteva M.V. Application of a micro-scale meteorological model for studying the airflow pattern above the airport runway	91
Tsydenov B.O., Starchenko A.V. Numerical model of river–lake interaction in the case of a spring thermal bar in Kamloops lake.....	102

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

M.R. KUYAEV. To the 90 th anniversary	116
---	-----

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	122
--	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 519.873

В.Н. Губин, В.В. Травкина

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ

Рассмотрены две модели оптимального резервирования на бесконечном промежутке времени по критерию среднего времени безотказной работы.

Ключевые слова: *резервирование, система, надёжность, стратегия, среднее время безотказной работы, модель, сигма-оператор.*

Задача повышения надёжности аппаратуры остаётся актуальной, несмотря на значительный прогресс в технологии изготовления отдельных блоков и усовершенствование структуры различных устройств.

В данной работе анализируются поведение и свойства оптимальных стратегий включения резервных элементов по критерию среднего времени безотказной работы системы на бесконечном промежутке времени для элементов, характеристики которых остаются постоянными. Другой подход к теории резервированных систем рассматривается в [1–3].

Модель 1

Постановка задачи

В работе используется модель системы с управляемым резервом, описанная в работах [4–7]. Пусть система состоит из конечного числа параллельно включенных (в смысле надежности) идентичных элементов. Через фиксированный промежуток времени Δ в моменты $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta$, $t_2 = 2\Delta, \dots$ производится проверка исправности включенных в работу элементов. Время на проверку и на включение новых элементов считается пренебрежимо малым и в дальнейшем не учитывается. К моменту начала работы системы имеется r исправных элементов.

Часть элементов находится в холодном резерве. Выход из строя элемента, включенного в работу, не влияет на исправность других элементов. Отказ системы наступает, если в промежутке между проверками выйдут из строя все элементы, включенные в работу.

Обозначим через q вероятность отказа элемента на интервале длиной Δ , через $p = 1 - q$ – вероятность безотказной работы элемента на этом же интервале Δ . Всюду в дальнейшем принимаем $p \geq 0,5$.

Функцию $K(r)$, определённую на множестве натуральных чисел, принимающую натуральные значения и удовлетворяющую неравенству $1 \leq K(r) \leq r$, назовём *стратегией резервирования*. Функция $K(r)$ имеет простой смысл: если в момент проверки имеется в наличии r исправных элементов, то в работу следует включить $K(r)$ элементов.

Требуется найти стратегию резервирования, которая максимизирует среднее время безотказной работы системы. Такую стратегию будем называть оптимальной по критерию среднего времени безотказной работы. В дальнейшем под оптимальной стратегией будем понимать стратегию, оптимальную по критерию среднего времени безотказной работы системы.

Введём обозначения:

K_0 – стратегия, оптимальная по критерию среднего времени безотказной работы;

$K(r)$ – количество элементов, которое следует включить в работу при наличии r исправных элементов при стратегии K ;

$T(r)$ – математическое ожидание времени безотказной работы при оптимальной стратегии, если в начальный момент имеется r исправных элементов.

$T(r, k)$ – математическое ожидание времени безотказной работы при следующей стратегии: имеется r исправных элементов, в начальный момент в работу включается k элементов, в последующие моменты используется оптимальная стратегия.

Пусть в работу включено k элементов. Тогда до момента следующей проверки может произойти одно из k различных событий: $E_1, E_2, \dots, E_k$, где E_i есть событие, состоящее в том, что за время от включения системы до первой проверки выйдет из строя точно i элементов из числа включённых в работу k элементов. Вероятность наступления события E_i равна $C_k^i p^{k-i} q^i$. События $E_0, E_1, E_2, \dots, E_k$ образуют полную группу. Далее, для $0 \leq i \leq k-1$ выполнено $M(T/E_i) = (T(r-i) + 1)$. Наконец, $M(T/E_k) = 1$.

Теперь по формуле полного математического ожидания $M\xi = M[M(\xi/\eta)]$ [8, с. 123, 124], где ξ и η – случайные величины, имеем

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} M(T/E_i)P(E_i) + M(T/E_k)q^k; \quad (1)$$

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i (T(r-i) + 1) + q^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1. \quad (2)$$

Сигма-оператор

Оператор σ [1]. В работе исследуются оптимальные стратегии с помощью линейного оператора σ , который определяется соотношением $\sigma T(r) = T(r-1)$.

Используя σ -оператор, для функции $T(r, k)$ получаем равенство

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i \sigma^i T(r) + 1,$$

$$\text{откуда} \quad T(r, k) = [(p+q)^k - (q\sigma)^k] T(r) + 1. \quad (3)$$

Назовем уравнение, содержащее сигма-оператор, σ -уравнением (сигма-уравнением), а линейную комбинацию степеней σ -оператора с вещественными коэффициентами – σ -многочленом. Так, (3) является примером σ -уравнения, а правая часть этого равенства служит примером σ -многочлена.

Используя σ -оператор, можно получить многие свойства оптимальных стратегий резервирования. Основную роль при этом играет определение знаков сигма-многочленов.

Лемма 1.1 $T(r)$ монотонно возрастает с ростом r .

Лемма 1.2. При фиксированном $k < r$ функция $T(r, k)$ строго монотонно возрастает с ростом r .

Доказательство непосредственно следует из (2).

Теорема 1. При фиксированном r функция $T(r, k)$: 1) выпукла вверх по k в области $1 \leq k \leq k_0(r) + 1$, 2) принимает наибольшее значение не более чем в двух точках, 3) не возрастает при $k_0(r) \leq k \leq r$.

Доказательство. Запишем разность $\Delta = T(r, k+1) - T(r, k) - q[T(r, k) - T(r, k-1)]$, переходя к сигма-соотношениям. Получим

$$\begin{aligned} \Delta &= [(p + q\sigma)^{k+1} - (q\sigma)^{k+1}]T(r) - [(p + q\sigma)^k - (q\sigma)^k]T(r) - \\ &- q\{[(p + q\sigma)^k - (q\sigma)^k]T(r) - [(p + q\sigma)^{k-1} - (q\sigma)^{k-1}]T(r)\} = \\ &= q[(p + q\sigma)^k - (q\sigma)^k](\sigma - 1)T(r) + p(q\sigma)^k T(r) - \\ &- q^2[(p + q\sigma)^{k-1} - (q\sigma)^{k-1}](\sigma - 1)T(r) - qp(q\sigma)^{k-1}T(r). \end{aligned}$$

Раскроем квадратные скобки и добавим и вычтем слагаемое $qp(q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r)$:

$$\begin{aligned} \Delta &= q(p + q\sigma)^k(\sigma - 1)T(r) - q(q\sigma)^k(\sigma - 1)T(r) + p(q\sigma)^k T(r) - \\ &- q^2(p + q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r) + q^2(q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r) - qp(q\sigma)^{k-1}T(r) - \\ &- qp(q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r) + qp(q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r). \end{aligned}$$

Производя несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} q(p - q)[T(r - 1, k - 1) - T(r, k - 1)] + q^2[T(r - 2, k - 1) - T(r - 1, k - 1)] + \\ + 2pq^k[T(r - k) - T(r - k + 1)] \leq 0, \end{aligned}$$

так как по принятому соглашению $q < p$ и $p - q > 0$.

Итак,

$$T(r, k+1) - T(r, k) - q[T(r, k) - T(r, k-1)] < 0. \quad (4)$$

Из этого неравенства следует, что когда $T(r, k) - T(r, k-1) > 0$, то $[T(r, k+1) - T(r, k)] - [T(r, k) - T(r, k-1)] < 0$. Это означает, что $T(r, k)$ выпукла по k при $1 \leq k \leq k_0(r) + 1$, где $k_0(r)$ – значение k , при котором $T(r, k)$ достигает максимума. Из (4) вытекает, что $T(r, k) - T(r, k-1) < 0$ влечёт $T(r, k+1) - T(r, k) < 0$. Таким образом, $T(r, k)$ в области $1 \leq k \leq k_0(r) + 1$ возрастает по k , а в области $k_0(r) \leq k \leq r$ – убывает. Так как $T(r, k)$ как функция от k выпукла на участке $[1, k_0(r)]$, то она принимает максимальное значение не более чем в двух точках.

Следствие 1. Если $T(r, k-1) \leq T(r, k)$, то $k \leq k_0(r)$; если $T(r, k-1) > T(r, k)$, то $k \geq k_0(r)$.

Теорема 2. Если $K_1(r)$ и $K_2(r)$ – две оптимальные стратегии резервирования, то при всех r выполнено $|K_1(r) - K_2(r)| \leq 1$.

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 – две оптимальные стратегии резервирования. Если для некоторого r_0 имеем $K_1(r_0) = K_2(r_0)$, то $|K_1(r_0) - K_2(r_0)| \leq 1$. Пусть $K_1(r_0) \neq K_2(r_0)$ и, для определённости, $K_1(r_0) < K_2(r_0)$. Тогда по определению опти-

мальной стратегии $T(K_1(r_0), r_0) = T(K_2(r_0), r_0)$. На промежутке $[1, K_2(r_0)+1]$ функция $T(r, k)$ выпукла. Если бы $|K_1(r_0) - K_2(r_0)| > 1$, то, в силу выпуклости $T(r, k)$, между $K_1(r_0)$ и $K_2(r_0)$ нашлось бы натуральное k_3 , такое, что $T(k_3, r) > T(K_1(r_0), r_0) = T(K_2(r_0), r_0)$ – противоречие. Итак, и в этом случае $|K_1(r_0) - K_2(r_0)| \leq 1$, что и требовалось.

Теорема 3. Имеет место неравенство: $K_0(r) \geq K_0(r+1) - 1$

Доказательство. Убедимся, что разность

$$[T(r+1, k+1) - T(r+1, k)] - q[T(r, k) - T(r, k-1)]$$

отрицательна. Представим это выражение как сигма-многочлен:

$$\begin{aligned} & [T(r+1, k+1) - T(r+1, k)] - q[T(r, k) - T(r, k-1)] = \\ & = [(p+q\sigma)^{k+1} - (q\sigma)^{k+1} - (p+q\sigma)^k + (q\sigma)^k] T(r+1) - \\ & - q\sigma [(p+q\sigma)^k - (q\sigma)^k - (p+q\sigma)^{k-1} + (q\sigma)^{k-1}] T(r+1) = \\ & = [(p+q\sigma)^{k+1} - (p+q\sigma)^k] T(r+1) - q\sigma [(p+q\sigma)^k - (p+q\sigma)^{k-1}] T(r+1) = \\ & = pq(p+q\sigma)^{k-1}(\sigma-1)T(r+1) < 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$[T(r+1, k+1) - T(r+1, k)] - q[T(r, k) - T(r, k-1)] < 0. \quad (5)$$

Подставим в (5) $k = K_0(r+1) - 1$. Получим

$$[T(r+1, K_0(r+1)) - T(r+1, K_0(r+1)-1)] - q[T(r, K_0(r+1)-1) - T(r, K_0(r+1)-2)] < 0,$$

отсюда

$$T(r, K_0(r+1)-1) - T(r, K_0(r+1)-2) > 0.$$

Теперь по следствию 1 имеем

$$K_0(r) \geq K_0(r+1) - 1,$$

что и требовалось.

Теорема 4. $K_0(r)$ не убывает с ростом r .

Алгоритм поиска оптимальной стратегии

Пусть выбрана некоторая стратегия управления включением резервных элементов $K(r)$.

Найдем стратегию K_0 , которая максимизирует $T(r, k)$.

Для её нахождения воспользуемся рекуррентным соотношением

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1. \quad (6)$$

В аналогичных задачах в случае конечного промежутка для отыскания оптимальной стратегии эффективен метод динамического программирования Беллмана [9]. В случае бесконечного промежутка этот метод нуждается в модификации.

Зафиксируем значение r и обозначим $K_0(r) = k_0$. Имеем

$$T(r) = T(k_0, r) = \sum_{i=0}^{k_0-1} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i) + 1.$$

Выделим из суммы слагаемое при $i=0$:

$$T(r) = \sum_{i=1}^{k_0-1} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i) + p^{k_0} T(r) + 1, \quad (7)$$

отсюда

$$T(r) = \frac{1}{(1-p^{k_0})} \sum_{i=1}^{k_0-1} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i) + 1. \quad (8)$$

Теперь зададим **алгоритм вычисления оптимальных стратегий**.

а) Очевидно, что $K_0(1) = 1$, поэтому $T(1) = pq + 2p^2q + \dots + np^nq + \dots = \frac{p}{q}$.

б) Пусть уже вычислены $T(1), T(2), \dots, T(r-1)$. Ищем максимум правой части формулы (8) по всем натуральным $k_0 \leq r$, и этот максимум есть значение $T(r)$. То значение k_0 , $k_0 \leq r$, которое доставляет максимум правой части (8), есть $K_0(r)$.

Модель 2

Постановка задачи. Пусть задана система, в которой через фиксированный промежуток времени Δ в моменты $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ производится проверка исправности включённых в работу блоков. Часть блоков находится в холодном резерве. В моменты проверок некоторые блоки из резерва могут быть включены в работу, а блоки, включённые в работу, могут быть переведены в резерв. Элементы, находящиеся в холодном резерве, не меняют своих характеристик, иначе говоря, не расходуют своего резерва. Имеется r резервных исправных элементов, в работу может быть включено не более $(k+1)$ исправных элементов. Система функционирует, если в работу включено не менее k исправных элементов. Вероятность безотказной работы включённого в работу исправного элемента за один шаг равна p ($p > 0,5$), вероятность отказа исправного элемента за один шаг равна $q = 1 - p$. Эту модель резервирования обозначим $\mathbf{S}_{k+1}$.

Требуется: 1) найти стратегию управления резервом, оптимальную по критерию среднего времени безотказной работы системы; 2) получить оценку времени безотказной работы системы при оптимальной стратегии управления резервом.

Рассмотрим следующие две стратегии управления резервом в модели $\mathbf{S}_{k+1}$.

Стратегия 1: на первом шаге включаем $(k+1)$ исправный элемент, а на следующем шаге переходим к стратегии, оптимальной по критерию среднего времени безотказной работы. Обозначим математическое ожидание времени безотказной работы системы при стратегии 1 через $T(k+1, r)$.

Стратегия 2: на первом шаге включаем k элементов, а затем переходим к оптимальной стратегии. Обозначим математическое ожидание времени безотказной работы системы при стратегии 2 через $T(k, r)$.

Через $T(r)$ обозначим математическое ожидание времени безотказной работы системы при оптимальной по среднему времени стратегии, если в наличии имеется r исправных элементов.

Вычислим среднее время $T(k+1, r)$ работы системы $\mathbf{S}_{k+1}$ при стратегии 1.

Воспользуемся формулой полного математического ожидания [6]:

$$\begin{aligned} T(k+1, r) &= \sum_{i=0}^1 C_{k+1}^i p^{k+1-i} q^i (T(r-i) + 1) + C_{k+1}^2 p^{k-1} q^2 + C_{k+1}^3 p^{k-2} q^3 + \dots + q^{k+1} = \\ &= p^{k+1} T(r) + (k+1) p^k q T(r-1) + 1. \end{aligned}$$

Найдём среднее время работы системы в модели 2 при стратегии 2.

$$T(k, r) = p^k (T(r) + 1) + C_k^1 p^{k-1} q + C_k^2 p^{k-2} q^2 + \dots + q^k,$$

$$T(k, r) = p^k T(r) + 1$$

Теорема: Для всех k и r , таких, что $k+1 \leq r$, выполнено

$$T(k+1, r) > T(k, r)$$

Доказательство проведём от противного.

Предположим, что оптимальное время работы системы достигается при стратегии 2. Имеем

$$T(k, r) = T(r) = p^k T(r) + 1 \Rightarrow T(r) = \frac{1}{1 - p^k}.$$

Пусть $r \geq k+2$. Так как $K_0(r-1) \leq K_0(r)$, то $K_0(r-1) = k$.

Аналогично предыдущему получим

$$T(k, r-1) = T(r-1) = p^k T(r-1) + 1 \Rightarrow T(r-1) = \frac{1}{1 - p^k}.$$

Таким образом, $T(r-1) = T(r)$ для произвольного r , что неверно. Значит, предположение о том, что $K_0(r) = k$ неверно. Итак, $K_0(r) = k+1$, следовательно, $T(k+1, r) > T(k, r)$.

Таким образом, стратегия, при которой в начальный момент включено в работу $(k+1)$ элементов, предпочтительнее. Следовательно, оптимальная стратегия для модели S_{k+1} следующая: если имеется не меньше чем $(k+1)$ исправных элементов, то включаем в работу $(k+1)$ элемент, если в данный момент имеется только k исправных элементов, то все они включаются в работу.

Запишем рекуррентную формулу для $T(r)$. Имеем

$$T(r) = p^{k+1} T(r) + (k+1) p^k q T(r-1) + 1,$$

откуда

$$T(r) = \frac{(k+1) p^k q}{1 - p^{k+1}} T(r-1) + \frac{1}{1 - p^{k+1}}.$$

Обозначим

$$a = \frac{(k+1) p^k q}{1 - p^{k+1}}; \quad b = \frac{1}{1 - p^{k+1}},$$

тогда

$$T(r) = a T(r-1) + b.$$

Индукцией по r теперь легко доказать формулу

$$T(r) = a^{r-1} \frac{p}{q} + b \frac{1 - a^{r-1}}{1 - a}.$$

Подставляя значения a и b , получим

$$T(r) = \left(\frac{(k+1) p^k q}{1 - p^{k+1}} \right)^{r-1} \left(\frac{p}{q} + \frac{1}{(kq+1) p^k - 1} \right) + \frac{1}{1 - (kq-1) p^k}.$$

Легко видеть, что

$$0 < \frac{(k+1)p^k q}{1-p^{k+1}} < 1.$$

С учётом полученного результата, получим предельное значение времени.

Итак, при $r \rightarrow \infty$ значение среднего времени безотказной работы системы S_{k+1} , монотонно возрастаая, стремится к величине $\frac{1}{1-(kq-1)p^k}$ и не превышает ее даже при сколь угодно большом резерве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конев В.В. Об оптимальном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 4. С. 75–83.
2. Конев В.В. Об оптимальном программном включении резервных элементов // Там же. 1975. № 3. С. 109–117.
3. Конев В.В., Овчинников А.В. Оптимальное резервирование группы однотипных элементов // Там же. 1976. № 4. С. 75–84.
4. Пестов Г.Г., Ушакова Л.В. Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Там же. 1973. № 5.
5. Герцбах И.Б. Об оптимальном управлении включением резервных элементов // Там же. 1966. № 5.
6. Томиленко В.А. Об одной задаче динамического резервирования // Там же. 1975. № 4.
7. Райкин А.Л. Элементы теории надёжности технических систем. М.: Сов. радио, 1978.
8. Renyi A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.
9. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 458 с.

Статья поступила 08.04.2013 г.

Gubin V.N., Travkina V.V. TWO PROBLEMS OF DYNAMIC REDUNDANCY. In this paper, two models of dynamic redundancy are considered on an infinite time interval in terms of the criterion of the by mean time to system failure.

Keywords: Redundancy, system, reliability, strategy, mean time to system failure, model, sigma-operator.

GUBIN Vladimir Nikolaevich (Tomsk State University)

Email: vovantus@sibmail.com

TRAVKINA Violetta Valer'evna (Sberbank of Novosibirsk)

УДК 519.216.3

Т.В. Емельянова, В.В. Конев

**О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ
НЕПРЕРЫВНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ**

Для устойчивого процесса авторегрессии с непрерывным временем предлагается последовательная процедура оценивания неизвестных параметров, использующая специальное правило остановки наблюдений. Процедура строится на основе классических оценок по методу наименьших квадратов, но в отличие от них обеспечивает контроль за среднеквадратической точностью оценок. Получены формулы для асимптотической длительности наблюдений при увеличении среднеквадратической точности оценок. Результаты могут найти применение в задачах идентификации динамических систем, подверженных действию шумов, адаптивного прогнозирования, а также для оценивания параметров спектров гауссовских процессов с непрерывным временем.

Ключевые слова: *гарантированная среднеквадратическая точность, авторегрессионный процесс, гауссовский процесс с рациональной плотностью, последовательное оценивание, момент остановки.*

В задачах обработки временных рядов, идентификации, прогнозирования и управления в динамических системах широко используются модели с непрерывным временем, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Параметры этих уравнений во многих случаях неизвестны, и решению основных задач фильтрации, прогнозирования, управления обычно предшествует этап идентификации, заключающийся в оценивании неизвестных параметров. Для решения задач идентификации параметров стохастических динамических систем разработаны различные эффективные методы: максимального правдоподобия, стохастической аппроксимации, наименьших квадратов и др. (см., например, [1–4]). Использование этих методов усложняется, если получаемые оценки являются существенно нелинейными функциями и поддаются исследованию лишь в асимптотике при неограниченной длительности наблюдений. Однако в практических задачах объем доступных данных всегда конечен и желательно знать качество оценок, вычисленных по наблюдениям на ограниченном временном интервале. Для решения задач в неасимптотической постановке требуются методы, позволяющие контролировать точность оценок при малых и умеренных объемах данных. Один из подходов к решению задач идентификации динамических систем в неасимптотической постановке связан с использованием последовательного анализа, который характеризуется тем, что длительность наблюдений не фиксируется заранее и определяется специальными правилами накопления данных.

Пусть наблюдаемый p -мерный процесс $X_t = (X_1(t), \dots, X_p(t))'$ описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t, \quad (1)$$

в которой A и B – квадратные матрицы постоянных коэффициентов размера $p \times p$, причем все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные вещест-

венные части, W_t – стандартный p -мерный процесс броуновского движения. Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные коэффициенты матрицы $A = \|a_{ij}\|$ по наблюдениям процесса X_t . К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии p -го порядка ($AP(p)$)

$$dx_t^{p-1} = (\theta_1 x_t^{p-1} + \dots + \theta_p x_t) dt + \sigma dw_t \quad (2)$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{|Q(i\lambda)|^2}$.

Предполагается, что неизвестные параметры θ_i , $i = \overline{1, p}$, таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - \dots - \theta_p$ имеют отрицательные вещественные части. Процесс (2) представляется в виде (1), если положить

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ \vdots \\ x_t^{p-1} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_p & \theta_{p-1} & \dots & \dots & \theta_1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma \end{pmatrix}; \sigma > 0. \quad (3)$$

Одним из основных методов оценивания вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ является метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому оценка $\hat{\theta}_T$ имеет вид

$$\hat{\theta}_T = M_T^{-1} \int_0^T X_s d\langle X_t \rangle_p, \quad (4)$$

где $\langle a \rangle_i$ обозначает i -ю координату вектора-столбца $a = (a_1, \dots, a_p)'$;

$$M_T = \int_0^T X_s X_s' ds \quad (5)$$

– выборочная информационная матрица Фишера, M_T^{-1} – обратная к ней, если она не вырождена, и $M_T^{-1} = 0$ – в противном случае. Асимптотические свойства вектора оценок $\hat{\theta}_T$ по методам максимального правдоподобия и наименьших квадратов изучались в ряде работ [1, 5, 6 и др.]; они являются сильно состоятельными и асимптотически нормальными. В прикладных задачах использование асимптотических свойств оценок обычно основывается на предположении, что эти свойства сохраняются для малых и умеренных объемов данных. Однако поведение оценок при малых и умеренных длительностях наблюдений может существенно отличаться от асимптотического, и это может привести к неточным выводам при принятии решений. Изучение задач оценивания параметров диффузионных процессов в неасимптотической подстановке восходит к работам Новикова, Липцера и Ширяева [3, 7, 8], которые предложили последовательный план для оценивания неизвестного параметра диффузионного процесса

$$dx_t = \theta x_t dt + \sigma dw_t,$$

а также двумерного процесса специального вида с двумя неизвестными параметрами. В этих работах было доказано, что последовательная оценка имеет преимущества перед классической оценкой МНК: она является несмещенной и гауссовской [см. подробнее 7–9 и др.]

Этот метод, однако, оказывается непригодным в более общей ситуации, когда число неизвестных параметров превышает размерность наблюдаемого процесса. В [10] впервые была разработана общая последовательная процедура, позволяющая получать гарантированные оценки с любой заданной среднеквадратической точностью для авторегрессии с дискретным и непрерывным временем любого порядка по конечной реализации процесса. Предложенная в [10] процедура позволяет оценить неизвестные параметры с любой заданной среднеквадратической точностью и обладает хорошими асимптотическими свойствами. Эта процедура может оказаться, однако, достаточно сложной для практической реализации в случае многих неизвестных параметров, поскольку она включает два этапа и требует построения целой системы оценок МНК, вычисляемых в специальные моменты времени. На первом этапе строится последовательность модифицированных оценок МНК, каждая со своим правилом прекращения наблюдений, на втором этапе проводится процедура сглаживания оценок первого этапа, причем при сглаживании используется случайное число оценок, зависящее от требуемой точности оценивания неизвестных параметров.

Цель данной работы – предложить одноэтапную процедуру оценивания, использующую специальное правило остановки наблюдений, которая позволяет контролировать среднеквадратическую точность оценок. Эта процедура, как и в [10], является последовательной модификацией оценки МНК и может использоваться при наличии некоторой априорной информации о параметрах.

1. Построение последовательной процедуры

При построении последовательного плана будет использоваться следующая лемма, дающая оценку нормы уклонения оценки (4) от ее истинного значения.

Лемма 1. Пусть матрица M_T в (5) невырождена. Тогда квадрат нормы уклонения оценки (4) удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{\theta}_T - \theta\|^2 \leq \|M_T^{-2}\| \cdot \|m_T\|^2, \quad (6)$$

где $m_T = \int_0^T X_s dW_s$.

Доказательство. Пусть Q_T – ортогональная матрица размера $p \times p$, приводящая матрицу M_T к диагональной форме, т. е.

$$Q_T \Lambda_T Q_T' = M_T, \quad (7)$$

где $\Lambda_T = \text{diag}(\lambda_1(M_T), \dots, \lambda_p(M_T))$, $\lambda_i(M)$ – собственные числа матрицы M , занумерованные в порядке убывания: $\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \dots \geq \lambda_p(M)$.

Подставляя (1) в (4) и используя (7), получаем

$$Q_T \Lambda_T Q_T' (\hat{\theta} - \theta) = m_T.$$

Поскольку транспонированная к ортогональной матрице совпадает с обратной к

ней, то это равенство можно переписать в виде

$$\Lambda_T Q_T' (\hat{\theta}_T - \theta) = Q_T' m_T$$

или, в координатной форме,

$$\lambda_i(M_T) \langle Q_T' (\hat{\theta}_T - \theta) \rangle_i = \langle Q_T' m_T \rangle_i, \quad i = \overline{1, p}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, просуммировав по i и применив неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \langle Q_T' (\hat{\theta}_T - \theta) \rangle_i^2 &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^{-2}(M_T) \langle Q_T' m_T \rangle_i^2 \leq \|Q_T' m_T\| \sum_{i=1}^p \lambda_i^{-2}(M_T) |\langle Q_T' m_T \rangle_i| \leq \\ &\|Q_T' m_T\| \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^{-4}(M_T)} \sqrt{\sum_{i=1}^p \langle Q_T' m_T \rangle_i^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|Q_T' (\hat{\theta}_T - \theta)\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i^{-4}(M_T) \right)^{1/2} \|Q_T' m_T\|^2.$$

Так как матрица Q_T ортогональна, то

$$\|\hat{\theta}_T - \theta\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i^{-4}(M_T) \right)^{1/2} \|m_T\|^2.$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^{-4}(M_T) = \text{tr } \Lambda_T^{-4} = \text{tr } M_T^{-4} = \|M_T^{-2}\|^2,$$

приходим к утверждению леммы. Лемма 1 доказана.

Как будет показано ниже (см. лемму 3), с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_T}{T} = F, \quad (8)$$

причем матрица F является положительно определенной. Поэтому отсюда следует, что множитель $\|M_T^{-2}\|$ в правой части (6) монотонно убывает с ростом T , причем $\lim_{T \rightarrow \infty} \|M_T^{-2}\| = 0$. Для контроля среднеквадратической точности будем использовать следующий план оценивания.

Пусть $H > 0$. Определим длительность наблюдений процесса и оценку неизвестных параметров по формулам

$$\tau = \tau(H) = \inf \left\{ \tau > 0 : \|M_T^{-2}\|^{1/2} \leq \frac{1}{H} \right\}; \quad (9)$$

$$\theta^*(H) = M_{\tau(H)}^{-1} \cdot \int_0^{\tau(H)} X_s d < X_t >_p. \quad (10)$$

Используя этот план, получим верхнюю границу для среднеквадратической точности оценок.

Лемма 2. Пусть матрица (5) удовлетворяет условию (8) Тогда для любого $H > 0$ оценка $\theta^*(H)$, определенная в (9) и (10), удовлетворяет неравенству

$$E_\theta \|\theta^*(H) - \theta\|^2 \leq \frac{E_\theta \text{tr} M_{\tau(H)}}{H^2}. \quad (11)$$

Доказательство. Заменяя в лемме 1 T на $\tau(H)$, получим

$$\|\theta^*(H) - \theta\|^2 \leq \|M_{\tau(H)}^{-2}\| \cdot \left\| \int_0^{\tau(H)} X_s dW_s \right\|^2.$$

Учитывая (6), имеем $E_\theta \|\theta^*(H) - \theta\|^2 \leq \frac{1}{H^2} E_\theta \left\| \int_0^{\tau(H)} X_s dW_s \right\|^2$. Переходя к усеченным моментам и используя свойства стохастического интеграла, получаем

$$\frac{1}{H^2} \sum_{l=1}^p E_\theta \int_0^{\tau(H)} \langle X_t \rangle_l^2 dt = \frac{1}{H^2} E_\theta \text{tr} M_{\tau(H)}.$$

Отсюда приходим к (11). Лемма 2 доказана.

2. Свойства выборочной информационной матрицы Фишера

Для изучения свойств последовательного плана (9), (10) для процесса (2) нам потребуется установить некоторые свойства выборочной информационной матрицы Фишера. Наложим дополнительные условия на возможные значения параметра процесса (1).

Будем предполагать, что значения параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ таковы, что все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля известной отрицательной постоянной γ , то есть $\max_{1 \leq i \leq p} \text{Re} \lambda_i(A(\theta)) < -\gamma < 0$.

Обозначим это множество

$$\Lambda_\gamma = \left\{ \theta \in R^p : \max_{1 \leq i \leq p} \text{Re} \lambda_i(A(\theta)) < -\gamma \right\}. \quad (12)$$

Пусть $K \subset \Lambda_\gamma$ – компакт.

Лемма 3. Пусть в уравнении (1) $E \|X_0\|^4 < +\infty$. Тогда матрица (5) удовлетворяет предельному соотношению $P_\theta - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_T}{T} = F$, где F – положительно определенная матрица, являющаяся единственным решением уравнения

$$FA' + AF' + BB' = 0, \quad (13)$$

где $F = \int_0^\infty e^{As} BB' e^{A's} ds$.

Доказательство. Заметим, что матрица F в (13) является положительно определенной (см., лемму 1 в [11]). По формуле Ито имеем

$$d(XX_T') = X_T X_T' A' dt + X_T (dW_T)' B' + AX_T X_T' dt + BdW_T X_T' + BB' dt.$$

Переходя в этом равенстве к интегральному виду и учитывая, что

$$M_T = \int_0^T X_s X_s' ds,$$

получим

$$M_T A' + A M_T' + B B' t + \xi_T = 0, \quad (14)$$

где

$$\xi_T = X_0 X_0' + \int_0^T X_s (dW_s)' B' + B \int_0^T (dW_s)' X_s' - X_T X_T'. \quad (15)$$

Разделив обе части равенства (14) на T и учитывая (13), получим

$$\left(\frac{M_T}{T} - F \right) A' + A \left(\frac{M_T}{T} - F \right) + \frac{\xi_T}{T} = 0. \quad (16)$$

Разрешим это уравнение относительно матрицы $\frac{M_T}{T} - F$. Так как матрица A устойчива, то решение уравнения единственно и имеет вид (см., например, [12, с. 212])

$$\frac{M_T}{T} - F = \int_0^\infty e^{As} \frac{\xi_T}{T} e^{A's} ds.$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| \leq \left\| \int_0^\infty e^{As} e^{A's} ds \right\| \left\| \frac{\xi_T}{T} \right\| = \frac{c_\gamma}{T} \|\xi_T\|, \text{ где } c_\gamma = \sup_{\theta \in \Lambda_\gamma} \left\| \int_0^\infty e^{As} e^{A's} ds \right\|, \quad (17)$$

из которой следует, что

$$E_\theta \left\| \frac{M_T}{T} - F \right\|^2 \leq c_\gamma^2 E_\theta \left\| \frac{\xi_T}{T} \right\|^2. \quad (18)$$

Из представления (15) для ξ_T , проводя несложные арифметические преобразования, получаем

$$\begin{aligned} E_\theta \left\| \frac{\xi_T}{T} \right\|^2 &\leq 4 \left(\frac{E_\theta \|X_0 X_0'\|^2}{T^2} + \frac{E_\theta \|X_T X_T'\|^2}{T^2} \right) + \\ &+ \frac{4}{T^2} E_\theta \left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|^2 + \frac{4}{T^2} E_\theta \left\| B \int_0^T (dW_s)' X_s' \right\|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценим сверху второе слагаемое в правой части неравенства (19). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{E_\theta \|X_T X_T'\|}{T^2} &= \frac{1}{T^2} E_\theta (\text{tr}(X_T X_T') \cdot (X_T X_T')') = \\ &= \frac{1}{T^2} \text{tr} E_\theta \left(\int_0^T e^{A(T-s)} B dW_s \right) \left(\int_0^T e^{A(T-s)} B dW_s \right)' = \frac{1}{T^2} \text{tr} \int_0^T e^{A(T-s)} B B' (e^{A(T-s)})' ds = \\ &= \frac{\sigma^2}{T^2} \text{tr} \left(\int_0^T e^{A(T-s)} (e^{A(T-s)})' ds \right) = \sigma^2 \int_0^T \|e^{A(T-s)}\|^2 ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если $\max_{1 \leq i \leq p} \operatorname{Re} \lambda_i(A) < -\gamma < 0$,

то $\|e^{(T-s)A}\| \leq ce^{-\gamma(T-s)}$. Отсюда и из (20) следует, что

$$\frac{1}{T^2} E_\theta \|X_T X_T'\|^2 \leq \sigma^2 c^2 \int_0^T e^{-2\gamma(T-s)} ds \leq \frac{c^2 \sigma^2}{T^2} \cdot \frac{1}{2\gamma} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \quad (21)$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} E_\theta \left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|^2 &= \frac{1}{T^2} \sum_{k=1}^p \sigma^2 E_\theta \int_0^T \langle X_s \rangle_p^2 ds \leq \frac{1}{T^2} p \sigma^2 E_\theta \int_0^T \|X_s\|^2 ds \leq \\ &\leq \frac{p \sigma^2}{T^2} \int_0^T \sqrt{E_\theta \|X_s\|^4} ds \leq \frac{\tilde{c}}{T}, \end{aligned}$$

где $\tilde{c}$ – некоторая постоянная. Аналогично оценивается последнее слагаемое в

(19). Поскольку первое слагаемое в (19) стремится к нулю, то $\lim_{T \rightarrow \infty} E_\theta \left\| \frac{\xi_T}{T} \right\|^2 = 0$.

Отсюда и из (17) следует требуемое предельное соотношение. Лемма 3 доказана.

Оценим скорость убывания с ростом T четвертого момента нормы уклонения отношения M_T / T от предельной матрицы F .

Лемма 4. Пусть начальное условие в уравнении (2) таково, что $\sup_{\theta \in \Lambda_\gamma} E_\theta \|X_0\|^8 < +\infty$, где область Λ_γ определена в (12). Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda_\gamma$ справедлива оценка

$$\sup_{\theta \in K} E_\theta \left\| \frac{M_T}{T} - F \right\|^4 \leq \frac{L}{T^2}, \quad (22)$$

где L – некоторая постоянная.

Доказательство. Исходя из (17), (18) и проводя несложные арифметические преобразования, получим

$$E_\theta \left\| \frac{M_T}{T} - F \right\|^4 \leq C^4 4^4 E_\theta \left(\frac{\|X_0 X_0'\|^4}{T^4} + \frac{\|X_T X_T'\|^4}{T^4} + 2 \frac{\left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|^4}{T^4} \right). \quad (23)$$

По условию леммы для всех $\theta \in K$ имеем $\sup_{\theta \in K} \frac{E_\theta \|X_0 X_0'\|^4}{T^4} \leq \frac{C_1}{T^4}$. Для оценки математического ожидания второго слагаемого используем лемму 1.1.1 из [13], согласно которой X_t удовлетворяет неравенству

$$E \|X_t\|^{2m} \leq (2m-1)!! \mu^{2m} \left(\frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right)^m$$

для всякого $t \in R_+$, где μ – некоторая постоянная. Поэтому

$$\frac{E_{\theta} \|X_T X_T'\|^4}{T^4} = \frac{E_{\theta} \|X_T\|^8}{T^4} \leq 105\sigma^8 \left(\frac{1 - e^{-2\gamma T}}{2\gamma} \right)^4 \frac{1}{T^4} = \frac{C_2}{T^4}. \quad (24)$$

Заметим, что последнее слагаемое допускает следующую оценку:

$$\frac{E_{\theta} \left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|^4}{T^4} \leq \frac{1}{T^4} p \sum_{k=1}^p E_{\theta} \left(\int_0^T \langle X_s \rangle_k dW_p \right)^4.$$

Используя известное свойство стохастических интегралов (см., например, [3])

$$E \left(\int_0^T f(s, \omega) dW_s \right)^{2m} \leq [m(2m-1)]^m T^{m-1} \int_0^T E f^{2m}(s, \omega) ds, \quad (25)$$

получаем

$$\frac{E_{\theta} \left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|^4}{T^4} \leq \frac{108\sigma^8}{T^2} p^2 \left(\frac{1 - e^{-2\gamma T}}{2\gamma} \right)^2 = \frac{C_3}{T^2}. \quad (26)$$

Отсюда и из (23), (24) приходим к требуемой оценке. Лемма 4 доказана.

Следствие. Из леммы 4 имеем $P \left(\left\| \frac{M_n}{n} - F \right\| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{E \left\| \frac{M_n}{n} - F \right\|^4}{\varepsilon^4} \leq \frac{L}{\varepsilon^2 n^2}$. Отсю-

да и из леммы Бореля – Кантелли получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = F$ п.н.

Лемма 5. Для всякого $H > 0$ справедливо неравенство

$$E_{\theta} \operatorname{tr} M_{\tau(H)} \leq \operatorname{tr} F \cdot E_{\theta} \tau(H) + \int_0^{\infty} \operatorname{tr} \left(e^{As} E_{\theta} X_0 X_0' e^{A's} \right) ds. \quad (27)$$

Доказательство. Используя рассуждения из доказательства леммы 3, имеем

$$\begin{aligned} M_T - TF &= \int_0^{\infty} e^{As} \xi_s e^{A's} ds = \\ &= \int_0^{\infty} e^{As} \left(X_0 X_0' - X_T X_T' + \int_0^T X_s (dW_s)' B' + B \int_0^T dW_s X_s' \right) e^{A's} ds. \end{aligned}$$

Заменяя T на τ и учитывая, что математические ожидания третьего и четвертого слагаемых в правой части этого равенства равны нулю, получаем

$$E_{\theta} M_{\tau} - F E_{\theta} \tau = \int_0^{\infty} e^{As} E_{\theta} (X_0 X_0') e^{A's} ds - \int_0^{\infty} e^{As} E_{\theta} (X_T X_T') e^{A's} ds.$$

Поэтому $E_{\theta} \operatorname{tr} M_{\tau} \leq \operatorname{tr} F \cdot E_{\theta} \tau + \int_0^{\infty} \operatorname{tr} \left(e^{As} E_{\theta} (X_0 X_0') e^{A's} \right) ds$.

Лемма 5 доказана.

Асимптотическое поведение средней длительности процедуры дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\tau(H)$ определяется формулой (9) и выполнены условия леммы 4. Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda_\gamma$

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} \left| E_\theta \frac{\tau(H)}{H} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| = 0.$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} E_\theta \frac{\tau(H)}{H} < +\infty$. По определению $\tau(H)$ имеем

$$E_\theta \tau(H) = \int_0^\infty P_\theta(\tau(H) > T) dT = \int_0^\infty P_\theta \left(\|M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{H} \right) dT.$$

Выбирая $\delta > 0$, такое, что

$$\sup_{\theta \in K} \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\delta}, \quad (28)$$

получаем оценку

$$E_\theta \tau(H) \leq \int_0^\infty \chi(T\delta < H) dT + \int_{\frac{H}{\delta}}^\infty P_\theta \left(\|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta} \right) dT.$$

Для подынтегральной функции во втором интеграле имеем оценку

$$\begin{aligned} P_\theta \left(\|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta} \right) &\leq P_\theta \left(\|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2\delta} \right) + P_\theta \left(\left| \|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| > \frac{1}{2\delta} \right) \leq \\ &\leq P_\theta \left(\left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| \leq \eta, \left| \|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| > \frac{1}{2\delta} \right) + P_\theta \left(\left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| > \eta \right), \quad \theta \in K. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_T}{T} = F$ п.н. и функция $\|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}}$ равномерно непрерывна по θ на

компакте K , то для $\Delta < \frac{1}{2\delta}$ найдутся такие $T_0 > 0$ и $\eta > 0$, что при $T > T_0$, если

$\left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| < \eta$, то $\left| \|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| < \Delta$, поэтому первое слагаемое в правой

части (29) равно нулю и неравенство (29) принимает вид

$$P_\theta \left(\|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta} \right) \leq P_\theta \left(\left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| > \eta \right) \leq \frac{1}{\eta^4} E_\theta \left\| \frac{M_T}{T} - F \right\|^4. \quad (30)$$

Используя лемму 4, получаем требуемую асимптотическую равномерную ограни-

ченность величины $E_\theta \frac{\tau(H)}{H}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} & \left| E_0 \frac{\tau(H)}{H} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| = \left| E_0 \left\| \left(\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} \right)^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| \leq \\ & \leq \Delta + E_0 \left(\frac{\tau(H)}{H} \chi \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) \right) + \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \cdot P_0 \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right). \end{aligned}$$

Покажем, что для любого $\eta > 0$

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} P_0 \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) = 0. \quad (31)$$

Имеем

$$P_0 \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) \leq P_0 (\tau(H) < m) + \sum_{k=m}^{\infty} P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| \geq \eta \right). \quad (32)$$

Рассмотрим k -й член ряда в правой части (32). Имеем

$$\begin{aligned} & P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| \geq \eta \right) \leq \\ & \leq P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \frac{\|X_T X_T'\|}{T} > \frac{\tilde{\eta}}{4} \right) + 2P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \frac{\left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|}{T} > \frac{\tilde{\eta}}{4} \right) + \\ & + P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \frac{\|X_0 X_0'\|}{T} > \frac{\tilde{\eta}}{4} \right) = p_1(k) + 2p_2(k) + p_3(k), \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{c_\gamma}, \end{aligned} \quad (33)$$

где c_γ определено в (17).

Оценим первое слагаемое в правой части этого неравенства. Используя известное неравенство для неотрицательных субмартингалов (см., например, [3])

$$E \left(\sup_{n \leq N} X_n \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p EX_N^p \quad (34)$$

и лемму (1.1.1) из [13], получим

$$\begin{aligned} p_1(k) &= P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \frac{\|X_T X_T'\|}{T} > \frac{\tilde{\eta}}{4} \right) \leq \left(\frac{4}{\tilde{\eta}} \right)^2 \frac{1}{k^2} E_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \|X_T X_T'\|^2 \right) \\ &\leq \left(\frac{4}{\tilde{\eta}} \right)^2 \frac{1}{k^2} E_0 \sup_{k \leq T < k+1} \|X_T\|^4 \leq \frac{l_1(\gamma)}{k^2}, \quad l_1(\gamma) = \left(\frac{4}{\tilde{\eta}} \right)^2 \frac{64\sigma^4}{9} \left(\frac{1 - e^{-2\gamma(k+1)}}{2\gamma} \right)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Так как процесс $\left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|^2$, $T \geq 0$, является неотрицательным субмартингалом относительно фильтрации $F = (F_t)_{t \geq 0}$, $F_t = \sigma(W_s, s \leq t)$, порожденной винеровским процессом, то второе слагаемое допускает следующую оценку:

$$p_2(k) = P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \frac{\left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|}{T} > \frac{\tilde{\eta}}{4} \right) \leq$$

$$\leq \frac{4^4}{(\tilde{\eta}k)^4} \cdot E_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\| \right)^4 \leq \frac{l_2(\gamma)}{k^4} E_0 \left(\sum_{j=1}^p \left(\int_0^{k+1} \langle X_s \rangle_j dW_p(s) \right)^2 \right)^2.$$

Используя неравенства (34), (25) и лемму (1.1.1) из [13], получаем, что

$$P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \frac{\left\| \int_0^T X_s (dW_s)' B' \right\|}{T} > \frac{\tilde{\eta}}{4} \right) \leq \frac{l_3(\gamma)}{k^4} \cdot (k+1) \int_0^{k+1} E_0 \|X_s\|^4 ds.$$

Таким образом,

$$p_2(k) \leq \frac{(k+1)^2}{k^4} l_4(\gamma). \quad (36)$$

По условию теоремы для последнего слагаемого в (33) имеем оценку

$$p_3(k) = P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \frac{\|X_0 X_0'\|}{T} \right) \leq \frac{E_0 \|X_0\|^4}{k^2} = \frac{l_5}{k^2}. \quad (37)$$

Из (35) – (37) имеем оценку для ряда в (32)

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_0 \left(\sup_{k \leq T < k+1} \left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| \geq \eta \right) \leq l \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (38)$$

Первое слагаемое в (32) допускает оценку

$$P_0(\tau(H) < m) = P_0 \left(\frac{1}{\lambda_1^4(M_m)} + \dots + \frac{1}{\lambda_p^4(M_m)} \leq \frac{1}{H^4} \right) \leq P_0(\lambda_1(M_m) \geq H) \leq$$

$$P_0(\text{tr } M_m \geq H) = P_0 \left(\int_0^m \text{tr}(X_s X_s') ds \geq H \right) = P_0 \left(\int_0^m \|X_s\|^2 ds \geq H \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{H} E_0 \left(\int_0^m \|X_s\|^2 ds \right) \leq \frac{1}{H} \left(\frac{\mu^2}{2\gamma} \left(m + \frac{1}{2\gamma} (e^{-2\gamma m} - 1) \right) \right). \quad (39)$$

Подставляя эту оценку и оценку (38) в (32), получаем

$$\sup_{\theta \in K} \left(P_0 \left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) \leq \frac{1}{H} \left(\frac{\mu^2}{2\gamma} \left(m + \frac{1}{2\gamma} (e^{-2\gamma m} - 1) \right) \right) + l \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Переходя к пределу при $H \rightarrow \infty$, затем при $m \rightarrow \infty$, приходим к (31). Учитывая лемму (1.1.1) из [13], получим

$$P_0(\tau(H) < m) \leq \frac{1}{H} \left(\frac{\mu^2}{2\gamma} \left(m + \frac{1}{2\gamma} (e^{-2\gamma m} - 1) \right) \right) \rightarrow 0.$$

Остается убедиться в том, что для любого $\eta > 0$

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} E_{\theta} \left(\frac{\tau(H)}{H} \chi \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) \right) = 0. \quad (40)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} E_{\theta} \frac{\tau(H)}{H} \chi \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) &= E_{\theta} \frac{\tau(H)}{H} \chi \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) \chi(\tau(H) < m) + \\ &+ E_{\theta} \frac{\tau(H)}{H} \chi \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) \chi(\tau(H) \geq m) \leq \\ &\leq \frac{m}{H} P_{\theta} \left(\left\| \frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F \right\| \geq \eta \right) + E_{\theta} \frac{\tau(H)}{H} \chi(\tau(H) \geq m). \end{aligned}$$

Выбирая m из условия $m > \frac{H}{\delta}$ с δ , удовлетворяющим (28), имеем

$$E(\tau(H) \chi(\tau(H) \geq m)) = \int_m^{\infty} P_{\theta}(\tau(H) \geq T) dT = \int_m^{\infty} P_{\theta} \left(\left\| T^2 M_T^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta} \right) dT;$$

отсюда и из (30) получаем требуемое. Теорема 1 доказана.

Найдем верхнюю границу для среднеквадратической точности оценки вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ в уравнении (2) с помощью последовательного плана (9), (10).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любого компактного множества $K \subset \Lambda_{\gamma}$

$$\sup_{\theta \in K} E_{\theta} \left(\|\theta^*(H) - \theta\|^2 \right) \leq \frac{a_K}{H} (1 + o(1)),$$

где $a_K = \sup_{\theta \in K} \varphi(\theta)$, $\varphi(\theta) = \text{tr } F \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}}$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow \infty$. (41)

Доказательство. Используя оценки (11) и (27) из лемм 2 и 5, приходим к неравенству

$$E_{\theta} \left(\|\theta^*(H) - \theta\|^2 \right) \leq \frac{1}{H^2} \left(\text{tr } F \cdot E_{\theta} \tau + \int_0^{\infty} \text{tr} \left(e^{As} E_{\theta} (X_0 X_0') e^{A's} \right) ds \right). \quad (42)$$

В силу теоремы 1 отсюда следует неравенство (41). Теорема 2 доказана.

Пример. Применим полученные результаты к процессу $AP(2)$ с неизвестными параметрами $\theta = (\theta_1, \theta_2)$

$$d\dot{x}_t = (\theta_1 \dot{x}_t + \theta_2 x_t) dt + \sigma dw_t. \quad (43)$$

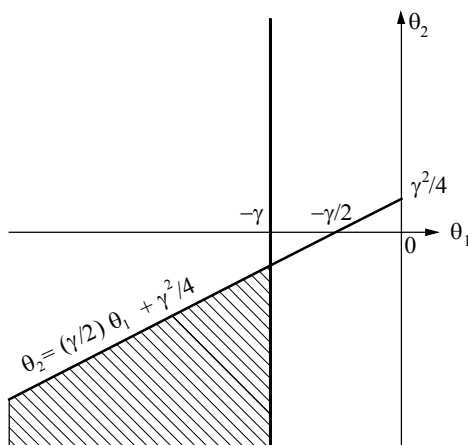
Этот процесс в матричной форме имеет вид

$$dX_t = AX_t + BdW_t,$$

где $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \theta_2 & \theta_1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$;

W_t – стандартный двумерный винеровский процесс, причем $\langle W_t \rangle_2 = w_t$. Область устойчивости Λ_{γ} процесса (43) задается равенством (см. рис. 1)

$$\Lambda_\gamma = \left\{ (\theta_1, \theta_2) : \theta_2 < \frac{\gamma}{2}\theta_1 + \gamma^2, \theta_1 < 0 \right\}, \gamma > 0.$$

Рис. 1. Область устойчивости Λ_γ

Разрешая уравнение (13) относительно F , получаем

$$F = \text{diag} \left(\frac{\sigma^2}{2\theta_2\theta_1}, \frac{\sigma^2}{2\theta_2} \right), \|F^{-2}\|_2^{\frac{1}{2}} = \frac{4\theta_2^2\sqrt{1+\theta_1^4}}{\sigma^4}.$$

Поэтому при больших H средняя длительность процедуры оценивания удовлетворяет соотношению

$$E_0\tau(H) \sim H \frac{4\theta_2^2\sqrt{1+\theta_1^4}}{\sigma^4}$$

для всех $\theta = (\theta_1, \theta_2)' \in K$, где K – компакт в параметрической области Λ_γ , $\gamma > 0$. При этом среднеквадратическая точность оценивания равномерно по компакт K определяется неравенством (41), причем

$$\varphi(\theta) = \text{tr} F \|F^{-2}\|_2^{\frac{1}{2}} = \frac{16\theta_2^4}{\sigma^8} (1 + \theta_1^2) \sqrt{1 + \theta_1^4}.$$

Подставляя полученную оценку $\hat{\theta}(H) = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)'$ в (2), получаем оценку спектральной плотности $\tilde{f}(\lambda)$ процесса (43). Теорема 2 позволяет построить доверительную область для оценки $\tilde{f}(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. М.: Наука, 1989.
2. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
4. Яглом А.М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. 1955. Т. 7. Вып. 5. С. 3–168.

5. Тараскин А.Ф. Об асимптотической нормальности стохастических интегралов в оценках коэффициента переноса диффузионного процесса // Мат. физика. Киев: Наукова думка, 1970. Вып. 8. С. 149–163.
6. Тараскин А.Ф. Об асимптотической нормальности некоторых стохастических интегралов и оценках параметров переноса многомерного диффузионного процесса // Теор. вероятн. и мат. статистика. Киев: Наукова думка, 1970. Вып. 2. С. 205–220.
7. Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов // Теор. вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16. Вып. 2. С. 394–396.
8. Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров процессов диффузионного типа // Мат. заметки. 1972. Т. 12. Вып. 5. С. 627–638.
9. Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. Об оценках параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса // ДАН СССР. 1962. Т. 156. № 4. С. 747–750.
10. Konev V.V. and Pergamenshchikov S.M. Sequential Estimation of the Parameters in a Trigonometric Regression Model with the Gaussian Coloured Noise // Statistical Inference for Stochastic Processes 6: 215-235, 2003.
11. Конев В.В. Пергаменичиков С.М. Последовательное оценивание параметров линейных неустойчивых стохастических систем с гарантированной среднеквадратической точностью // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28. № 4.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
13. Kabanov Yu.M. and Pergamenshchikov S.M. Two Scale Stochastic Systems: Asymptotic Analysis and Control // Springer, Berlin, New York, 2002.

Статья поступила 24.06.2013 г.

Emel'yanova T.V., Konev V.V. ON THE SEQUENTIAL ESTIMATION OF PARAMETERS IN A CONTINUOUS AUTOREGRESSION MODEL. In this paper, we propose a sequential procedure for estimating unknown parameters for a stable autoregressive continuous time processes. The procedure uses a special rule to stop observations and is based on the classical least squares (LS) estimates but, in contrast, provides control for the mean-square accuracy of estimates. Formulas for the asymptotic duration of observations with an increase in the mean-square accuracy of estimates are obtained. The results can be applied in a wide range of problems such as system identification, adaptive forecasting, and estimation of parameters of spectra of continuous time Gaussian processes.

Keywords: fixed-accuracy estimation, autoregressive process, gaussian process with rational density, sequential estimation, stopping time.

EMEL'YANOVA Tatiana Veniaminovna (Tomsk State University)

E-mail: tv_em@mail.ru

KONEV Victor Vasil'evich (Tomsk State University)

E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru

УДК 515.12

А.В. Полухина, Т.Е. Хмылёва

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ^{1,2}

Рассматривается множество $V(K)$ всех выпуклых вещественнозначных функций, определенных на выпуклых компактах $K \subset \mathbb{R}^n$, и находятся условия, при которых все функции $f \in V(K)$ являются разреженно непрерывными. Показано, что существуют функции $f \in V(K)$, не являющиеся борелевскими, а также для любого ординала $\alpha < \omega_1$ существуют функции $f \in V(K)$, принадлежащие в точности α -му классу Бэра.

Ключевые слова: выпуклая функция, разреженно непрерывная функция, крайние точки, борелевские множества, ординалы, компакт.

В статье А.В. Архангельского и Б.М. Бокало [1] введен класс разреженно непрерывных функций, более узкий, чем класс функций первого класса Бэра, но более широкий, чем класс непрерывных функций.

Определение 1. Пусть X, Y – топологические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется разреженно непрерывным (scattered continuous) или функцией SC , если для любого подмножества $A \subset X, A \neq \emptyset$ функция $f|_A$ имеет точку непрерывности.

Характеристика разреженно непрерывных функций приведена в [2].

Теорема 1. Пусть X – полное метрическое пространство и функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – разреженно непрерывная функция;
- (2) пространство X имеет счетное замкнутое покрытие $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, такое, что функция $f|_{F_i}$ непрерывна для любого $i \in \mathbb{N}$.

Используя данную характеристику, доказываем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть K – выпуклый компакт и $SC(K)$ – пространство всех вещественнозначных разреженно непрерывных функций, заданных на компакте K . Следующие условия эквивалентны:

- (1) $V(K) \subset SC(K)$;
- (2) множество крайних точек компакта K не более чем счетно.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $|\text{extr } K| > \aleph_0$. Тогда существует континуальное совершенное подмножество $K_0 \subset \text{extr } K$. Пусть множество $A \subset K_0$ – счетное и всюду плотное. Рассмотрим на подмножестве K_0 функ-

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

² Работа выполнена частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

цию $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$ Ясно, что функция $f|_{K_0}$ не имеет точек непрерывности и, значит, функция $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ не является разрезенно непрерывной функцией. Тем не менее, функция f является выпуклой. Действительно, для любых $0 < \alpha < 1$ и для любых точек $x, y \in K$ точка $\alpha x + (1-\alpha)y \notin K_0 \notin \text{extr } K$ и, значит, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0$. Следовательно, справедливо неравенство $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$. Таким образом, множество $V(K) \subset SC(K)$.

Достаточность. По теореме Крейна – Мильмана компакт $K = \overline{co}(\text{extr } K) = \overline{co}\{k_1, \dots, k_n, \dots\}$. Поскольку компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, то по теореме Минковского компакт $K = co(\text{extr } K) = co\{k_1, \dots, k_n, \dots\}$. Следовательно, любая точка $x \in K$ выражается в виде $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$, где $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$. Для произвольного конечного подмножества $\sigma \subset \{k_1, \dots, k_n, \dots\} \subset K$ пусть $K(\sigma) = co\sigma = co\{k_{n_1}, \dots, k_{n_p}\}$. Ясно, что $\bigcup_{\sigma \in \text{extr } K} K(\sigma) = K$. Для $p \geq 2$ определим

$$U(\sigma) = \left\{ x \in co\sigma; x = \lambda_1 k_{n_1} + \dots + \lambda_p k_{n_p}, 0 < \lambda_i < 1, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}.$$

Тогда $\left(\bigcup_{\sigma \in \text{extr } K} U(\sigma) \right) \cup \{k_1, \dots, k_n, \dots\} = K$.

Каждое $U(\sigma) = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m(\sigma)$, где

$$U_m(\sigma) = \left\{ x = \lambda_1 k_{n_1} + \dots + \lambda_p k_{n_p}, \frac{1}{m} \leq \lambda_i \leq 1 - \frac{1}{m}, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}$$

– замкнутые подмножества компакта K для любого $m \in \mathbb{N}$ и $\sigma \subset \{k_1, \dots, k_n, \dots\}$.

Пусть функция $f \in V(K)$. Покажем, что функция $f|_{U_m(\sigma)}$ непрерывна на множестве $U_m(\sigma)$. Для этого достаточно показать, что $f|_{U(\sigma)}$ непрерывна на $U(\sigma)$ для любого $\sigma \subset \{k_1, \dots, k_n, \dots\}$.

Пусть $x \in U(\sigma)$, т.е.

$$x = \lambda_1 k_{n_1} + \dots + \lambda_p k_{n_p}, \quad 0 < \lambda_i < 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1.$$

Рассмотрим конечномерное подпространство

$$L = sp\{k_{n_1} - k_{n_p}, \dots, k_{n_{p-1}} - k_{n_p}\}.$$

Ясно, что $\dim L \leq p-1$ и точка

$$x - k_{n_p} = \lambda_1 (k_{n_1} - k_{n_p}) + \dots + \lambda_{p-1} (k_{n_{p-1}} - k_{n_p}) + \lambda_p \cdot 0 \in L,$$

причем $\lambda_p \neq 0$.

Определим линейный оператор $T: \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow L$ по формуле

$$T(t_1, \dots, t_{p-1}) = t_1 (k_{n_1} - k_{n_p}) + \dots + t_{p-1} (k_{n_{p-1}} - k_{n_p}).$$

Оператор T является непрерывной линейной сюръекцией пространства $\mathbb{R}^{p-1}$ на пространство L . Применяя принцип открытости отображения, получаем, что T – открытое отображение. Следовательно, T отображает открытое множество

$$\left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) : 0 < \lambda_i < 1, i = 1, \dots, p-1, \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i < 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{p-1}$$

на открытое множество $U(\sigma) - k_{n_p}$.

Функция $f(x + k_{n_p})$ определена на открытом выпуклом множестве $U(\sigma) - k_{n_p} \subset L$ и является выпуклой на множестве $U(\sigma) - k_{n_p}$. Так как выпуклые функции непрерывны во всех внутренних точках множества, на котором они определены [3, с. 67], функция $f(x + k_{n_p})$ непрерывна на множестве $U(\sigma) - k_{n_p}$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве $U(\sigma)$ и, значит, для любого $m \in \mathbb{N}$ функция $f|_{U_m(\sigma)}$ непрерывна на множестве $U_m(\sigma)$.

Итак, компакт K представлен в виде счетного объединения замкнутых множеств

$$K = \bigcup_{\sigma} \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m(\sigma) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{k_i\},$$

и функции $f|_{U_m(\sigma)}$ и $f|_{\{k_i\}}$ непрерывны. Учитывая теорему 1, получаем, что $V(K) \subset SC(K)$. Теорема доказана. ■

Теорема 3. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, множество крайних точек которого несчетно. Тогда для любого ординала $\alpha < \omega_1$ существует выпуклая функция $f \in V(K)$, принадлежащая в точности α -му классу Бэра.

Доказательство. Известно [4, с. 15], что множество крайних точек метризуемого компакта K есть множество типа G_δ и, следовательно, является борелевским множеством. Любое несчетное борелевское множество топологически содержит канторово множество, которое, в свою очередь, топологически содержит множество иррациональных чисел J [5, с. 295]. Далее, для любого ординала $\alpha < \omega_1$ существует измеримая по Борелю функция $g: J \rightarrow (0, 1)$, принадлежащая классу α , но не принадлежащая классам β при $\beta < \alpha$ [5, с. 382]. Тогда функция $f: K \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(k) = \begin{cases} 0, & k \notin J, \\ g(k), & k \in J, \end{cases}$$

также является функцией в точности α -го класса и, следовательно, функцией α -го (или $\alpha+1$ -го, если α конечно) класса Бэра [5, с. 403]. Нетрудно проверить, что функция f выпукла. Теорема доказана. ■

Теорема 4. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, множество крайних точек которого несчетно. Тогда существует выпуклая функция $f \in V(K)$, неизмеримая по Борелю.

Доказательство. Рассмотрим канторово множество $C \subset \text{extr } K$, определенное в доказательстве предыдущей теоремы. Известно, что в канторовом множестве C существует подмножество A , неизмеримое по Борелю [5, с. 355]. Тогда функция $f = \chi_A$ неизмерима по Борелю и выпукла. Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Arkhangel'skii A., Bokalo B. Tangency of topologies and tangential properties of topological spaces // Topology. 1992. V. 54. P. 160–185.
2. Taras Banakh and Bogdan Bokalo. On scatteredly continuous maps between topological spaces // Topology and its Applications 157, 2010.
3. Половинкин Е.С., Балаиов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 416 с.
4. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке: пер. с англ. М.: Мир, 1968. 112 с.
5. Куратовский К. Топология. Том 1. М.: Мир, 1966. 594 с.

Статья поступила 25.07.2013 г.

Polukhina A.V., Khmyleva T.E. CONTINUITY OF CONVEX FUNCTIONS. In this paper, we consider the set $V(K)$ of all convex real-valued functions defined on convex compacts $K \subset \mathbb{R}^n$ and find conditions under which all functions $f \in V(K)$ are scattered continuous. It is shown that there exist functions $f \in V(K)$ that are not Borel, and, for any ordinal $\alpha < \omega_1$, there are functions $f \in V(K)$ that exactly belong to the α th Baire class.

Keywords: convex function, scattered continuous functions, extreme points, Borel sets, ordinals, compact.

POLUKHINA Anastasiya Valer'evna (Tomsk State University)
spongik@yandex.ru

Khmyleva Tatiana Evgenievna (Tomsk State University)
E-mail: TEX2150@yandex.ru

УДК 512.62+510.22

Е.А. Тимошенко

ЧИСТО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КАК БАЗОВЫЕ ПОЛЯ CSP-КОЛЕЦ^{1,2}

Получены условия, при которых чисто трансцендентное расширение поля рациональных чисел служит базовым полем некоторого csp-кольца. В работе используются свойства кардинальных характеристик континуума.

Ключевые слова: csp-кольцо, базовое поле, кардинальные характеристики континуума.

Пусть L – некоторое бесконечное множество простых чисел. Для числа $p \in L$ зафиксируем кольцо K_p , совпадающее либо с кольцом целых p -адиических чисел, либо с некоторым кольцом вычетов по модулю p^t (для разных простых p число t может быть разным). Введём обозначения

$$K = \prod_{p \in L} K_p, \quad T = \bigoplus_{p \in L} K_p \subset K.$$

Будем называть csp-кольцом каждое подкольцо R кольца K , такое, что $T \subset R$ и R/T является полем. Поле R/T , а также всякое изоморфное ему поле назовём *базовым полем* csp-кольца R . Очевидно, что всякое базовое поле (иначе говоря, поле, вкладывающееся в K/T в качестве подкольца) имеет характеристику нуль и мощность не выше мощности континуума $\mathfrak{c}$.

Всякое csp-кольцо, имеющее поле рациональных чисел своим базовым полем, называют *кольцом псевдорациональных чисел*. Кольца псевдорациональных чисел были введены А. А. Фоминым [1] и П. А. Крыловым [2] в конце 1990-х годов для изучения некоторых классов смешанных абелевых групп (в частности, sp-групп). Позже П. А. Крылов предложил рассматривать csp-кольца (как обобщение колец псевдорациональных чисел).

Изучая базовые поля csp-колец, можем воспользоваться доказанным в [3] фактом, согласно которому базовое поле csp-кольца будет также базовым полем некоторого регулярного (в смысле фон Неймана) csp-кольца. Нетрудно заметить, что csp-кольцо регулярно тогда и только тогда, когда для каждого $p \in L$ кольцо K_p есть поле вычетов $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Поэтому далее мы ограничимся ситуацией

$$K_L = \prod_{p \in L} \mathbf{Z}_p, \quad T_L = \bigoplus_{p \in L} \mathbf{Z}_p \subset K_L. \quad (1)$$

В [3] автором было доказано, что чисто трансцендентное расширение поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\leq \aleph_1$ является базовым полем некоторого регулярного csp-кольца. Данная работа посвящена улучшению оценки $\aleph_1$. Для этого введём кардинальную характеристику $\mathfrak{ie}_L$ и исследуем её свойства.

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

² Работа выполнена частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

1. Кардинальные характеристики континуума

Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, m, \dots\}$ есть множество всех натуральных чисел. Зададим отношение частичного порядка $<$ на множестве $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ всех отображений $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$: считаем, что $z' < z$ тогда и только тогда, когда почти для всех $i \in \mathbf{N}$ выполнено $z'(i) < z(i)$. Множество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ назовём *ограниченным*, если существует функция $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, для которой $z' < z$ при всех $z' \in E$; в противном случае скажем, что E – *неограниченное* множество. Назовём подмножество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ *конфинальным*, если для всякого $z' \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ найдётся функция $z \in E$, такая, что выполнено неравенство $z' < z$. Через $\mathbf{b}$ (через $\mathbf{d}$) обозначается наименьшая мощность неограниченного (соответственно конфинального) подмножества множества $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Эти кардиналы связаны соотношениями $\aleph_1 \leq \text{cf}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \leq \text{cf}(\mathbf{d}) \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{c}$ [4, 5]; через $\text{cf}(\lambda)$ здесь, как обычно, обозначена конфинальность кардинала λ .

Подмножество H вещественной прямой $\mathbf{R}$ называют *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит внутренних точек; множество вещественных чисел H называется *множеством первой категории*, если H можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств (все остальные подмножества вещественной прямой называются *множествами второй категории*).

Все множества первой категории и все множества нулевой меры образуют два σ -идеала множества всех подмножеств вещественной прямой; будем обозначать эти идеалы через M и N соответственно. Через $\text{non}(M)$ обозначим наименьшую мощность множества вещественных чисел, не принадлежащего идеалу M ; через $\text{cov}(M)$ – наименьшую возможную мощность семейства входящих в M множеств вещественных чисел, объединение которого совпадает с $\mathbf{R}$. Аналогично вводятся кардинальные числа $\text{non}(N)$ и $\text{cov}(N)$. Следующая схема, представляющая собой часть диаграммы Цихоня [4, 6], содержит полную информацию о неравенствах, связывающих указанные кардинальные характеристики континуума:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{cov}(N) & \rightarrow & \text{non}(M) & \rightarrow & \mathbf{c} & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \aleph_1 & \rightarrow & \mathbf{b} & \rightarrow & \mathbf{d} & \rightarrow & \mathbf{c} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \aleph_1 & \rightarrow & \text{cov}(M) & \rightarrow & \text{non}(N)
 \end{array} \quad (2)$$

На схеме (2) стрелка, ведущая от кардинала λ к кардиналу λ' , отражает тот факт, что справедливо неравенство $\lambda \leq \lambda'$. Известно, что если приписать каждой из рассматриваемых шести кардинальных характеристик и кардиналу $\mathbf{c}$ одно из значений $\aleph_1$ и $\aleph_2$ так, чтобы не возникало противоречия со схемой (2), то можно построить модель ZFC, в которой реализуются требуемые семь равенств [4, 6].

В этом параграфе под L будет пониматься бесконечное подмножество из $\mathbf{N}$. Множество K_L вновь зададим условием (1); в этом случае для произвольного $p \in L$ сомножитель $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ является, вообще говоря, уже не полем, а кольцом. Можно снабдить множество K_L топологией, рассматривая его как тихоновское произведение дискретных топологических пространств $\mathbf{Z}_p$. Базу этой топологии составляют множества вида

$$A = \prod_{p \in L} A_p, \quad (3)$$

где $A_p \subset \mathbf{Z}_p$ и почти для всех $p \in L$ выполнено равенство $A_p = \mathbf{Z}_p$. На K_L можно

определить полную меру ν , относительно которой будет измеримо, в частности, каждое борелевское подмножество множества K_L . Для множеств вида (3) при этом выполнено $\nu(A) = \prod_{p \in L} (p^{-1}|A_p|)$; равенство остаётся справедливым и в том случае, когда $A_p \neq \mathbb{Z}_p$ для бесконечного множества значений $p \in L$. Заметим, что мера ν является вероятностной, т. е. $\nu(K_L) = 1$.

Аналогичным образом топология и полная вероятностная мера определяются на множестве $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Как и на вещественной прямой $\mathbb{R}$, в пространствах $2^{\mathbb{N}}$ и K_L можно рассматривать σ -идеалы M и N . Известно [4, 6], что характеристики pop и cov этих σ -идеалов не зависят от того, в каком из трёх пространств ($\mathbb{R}$, K_L или $2^{\mathbb{N}}$) они рассматриваются.

Через π_p будем обозначать проекцию из K_L в $\mathbb{Z}_p$. Введём на множестве K_L отношение $\approx$, полагая $k \approx d$ в том и только в том случае, когда $\pi_p(k) = \pi_p(d)$ для бесконечного множества значений $p \in L$. Через ie_L (от слов «infinitely equal») обозначим наименьшую возможную мощность множества $B \subset K_L$, обладающего следующим свойством:

$$\text{для всякого } k \in K_L \text{ существует } d \in B, \text{ такое, что } k \approx d. \quad (4)$$

Ясно, что множество $B = K_L$ обладает указанным свойством; имеем $\text{ie}_L \leq \mathfrak{c}$. Установим некоторые свойства кардинальной характеристики ie_L .

Предложение 1.1. $\aleph_1 \leq \text{ie}_L$ для всякого $L \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $B = \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – некоторое счётное подмножество множества K_L . Выберем $k \in K_L$ так, чтобы для всякого $p \in L$ элемент $\pi_p(k)$ не совпадал с $\pi_p(d_i)$ ни для какого натурального $i < p$. В этом случае для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеем $\pi_p(k) \neq \pi_p(d_i)$ при всех $p > i$, а значит, условие $k \approx d_i$ не выполнено. Итак, множество B не обладает свойством (4), что и требовалось. ■

Через z_L обозначим возрастающую биекцию из $\mathbb{N}$ в L .

Лемма 1.2. Если бесконечные подмножества L и X множества $\mathbb{N}$ таковы, что $z_L(i) \geq z_X(i)$ при всех $i \in \mathbb{N}$, то $\text{ie}_L \geq \text{ie}_X$.

Доказательство. Из условия следует, что существует сюръекция $K_L \rightarrow K_X$, сохраняющая отношение $\approx$. Отсюда получаем требуемое утверждение. ■

Замечание. Условие леммы 1.2 можно ослабить. Например, вместо условия $z_L(i) \geq z_X(i)$ достаточно потребовать, чтобы для некоторого натурального s при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнялось $z_L(si) \geq z_X(i)$.

Для $k \in K_L$ через $D(k)$ будем обозначать множество всех $d \in K_L$, таких, что $\pi_p(k) \neq \pi_p(d)$ почти для всех $p \in L$; очевидно, что множество $B \subset K_L$ обладает свойством (4) тогда и только тогда, когда при всех $k \in K_L$ выполнено $B \not\subset D(k)$. Заметим, что множество D_i всех $d \in K_L$, таких, что $\pi_p(k) \neq \pi_p(d)$ при всех $p > i$, является замкнутым и не содержит внутренних точек, т. е. нигде не плотно в K_L . При этом $D(k)$ совпадает с объединением множеств D_i по всем $i \in \mathbb{N}$ и поэтому является множеством первой категории.

Предложение 1.3. $\text{non}(M) \geq \text{ie}_L$ для всякого $L \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $B \subset K_L$ есть множество второй категории, имеющее мощность $\text{non}(M)$. Так как $D(k)$ является множеством первой категории, имеем $B \not\subset D(k)$ для любого $k \in K_L$. Следовательно, B обладает свойством (4) и, значит, $\text{ie}_L \leq |B| = \text{non}(M)$. ■

Следующий известный факт приведём без доказательства.

Лемма Бореля – Кантелли. Пусть ν – вероятностная мера на пространстве S и $G_i \subset S$, где $i \in \mathbb{N}$, – последовательность измеримых множеств. Для множества $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} G_i$ справедливы следующие утверждения:

а) Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(G_i)$ сходится, то $\nu(G) = 0$.

б) Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(G_i)$ расходится и G_i – взаимно независимые множества, т. е.

$\nu(\bigcap_{i \in I} G_i) = \prod_{i \in I} \nu(G_i)$ для всякого непустого конечного $I \subset \mathbb{N}$, то $\nu(G) = 1$. ■

Зафиксируем произвольное $k \in K_L$ и применим лемму к пространству $S = K_L$ и последовательности множеств $G_p = \{d \in K_L \mid \pi_p(k) = \pi_p(d)\}$, где $p \in L$. Тогда получаем, что $\nu(G_p) = p^{-1}$ и $G = K_L \setminus D(k)$. Итак, если ряд

$$\sum_{p \in L} p^{-1} \quad (5)$$

сходится, то $D(k)$ имеет меру 1 для любого $k \in K_L$; если же этот ряд расходится, то $D(k)$ имеет меру 0 для любого $k \in K_L$.

Предложение 1.4. Если ряд (5) сходится, то $\text{ie}_L \geq \text{cov}(N)$.

Доказательство. Пусть множество $B \subset K_L$ имеет мощность ie_L и обладает свойством (4). В этом случае для всякого $k \in K_L$ найдётся элемент $d \in B$, такой, что $k \approx d$, т. е. $k \in K_L \setminus D(d)$. Поэтому K_L совпадает с объединением множеств $K_L \setminus D(d)$ по всем $d \in B$. Поскольку каждое из множеств $K_L \setminus D(d)$ имеет меру 0, получаем, что $\text{cov}(N) \leq |B| = \text{ie}_L$. ■

Следующее свойство было подсказано автору А. Блассом.

Предложение 1.5. Если ряд (5) расходится, то $\text{ie}_L \leq \text{non}(N)$.

Доказательство. Пусть B содержится в K_L , не является множеством меры нуль и имеет мощность $\text{non}(N)$. Так как $D(k)$ есть множество меры нуль, имеем $B \not\subset D(k)$ при любом $k \in K_L$. Следовательно, B обладает свойством (4), поэтому $\text{ie}_L \leq |B| = \text{non}(N)$. ■

Замечание. Из доказанного предложения, в частности, следует, что условие $\text{ie}_L \leq \text{non}(N)$ выполнено, если L совпадает с множеством всех простых чисел.

Будем говорить, что $\Pi = \{I_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ есть разбиение множества $\mathbb{N}$ на конечные интервалы, если $I_j = \{i_j, i_j + 1, \dots, i_{j+1} - 1\}$, где $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_m < \dots$ (здесь $i_j \in \mathbb{N}$); пусть IP обозначает множество всех таких разбиений. Говорят, что разбиение

$\{J_j | j \in \mathbf{N}\}$ мажорируется разбиением $\{I_j | j \in \mathbf{N}\}$, если почти для каждого $j \in \mathbf{N}$ существует $m \in \mathbf{N}$, такое, что $J_m \subset I_j$.

Теорема 1.6. а) Если $\mathbf{d} < \text{non}(M)$, то $\sup_{L} \text{ie}_L = \text{non}(M)$.

б) Если $\mathbf{d} < \text{cf}(\text{non}(M))$, то для некоторого $L \subset \mathbf{N}$ выполнено $\text{ie}_L = \text{non}(M)$.

Доказательство. Существует множество $\{\Pi_\xi | \xi \in \Gamma\} \subset IP$, такое, что всякое разбиение из IP мажорируется некоторым разбиением Π_ξ и выполнено $|\Gamma| = \mathbf{d}$ [4, теорема 2.10]. Не умаляя общности, можно считать, что каждое из разбиений $\Pi_\xi = \{I_{j,\xi} | j \in \mathbf{N}\}$ обладает свойством $|I_{j,\xi}| < |I_{j+1,\xi}|$ при всех $j \in \mathbf{N}$.

Через L_ξ обозначим множество всех натуральных чисел вида $2^{|I_{j,\xi}|}$, где $j \in \mathbf{N}$. Тогда существует естественная биекция δ_ξ из пространства K_{L_ξ} в пространство

$\prod_{j \in \mathbf{N}} 2^{|I_{j,\xi}|} = 2^{\mathbf{N}}$. Через B_ξ мы обозначим подмножество пространства K_{L_ξ} , имеющее мощность ie_{L_ξ} и такое, что для всякого $k \in K_{L_\xi}$ существует $d \in B_\xi$ со свойством $k \approx d$. Множество $H \subset 2^{\mathbf{N}}$ зададим как объединение множеств $\delta_\xi(B_\xi)$, где $\xi \in \Gamma$.

Зафиксируем функцию $h \in 2^{\mathbf{N}}$. Для всякого $\xi \in \Gamma$ и $k = \delta_\xi^{-1}(h) \in K_{L_\xi}$ можно найти элемент $d \in B_\xi$, такой, что $k \approx d$. Отсюда получаем, что для бесконечного множества значений $j \in \mathbf{N}$ сужения функций h и $h' = \delta_\xi(d) \in H$ на интервал $I_{j,\xi}$ совпадают. Таким образом, для произвольной функции $h \in 2^{\mathbf{N}}$ и произвольного разбиения $\Pi_\xi = \{I_{j,\xi} | j \in \mathbf{N}\}$ нашлась функция $h' \in H$, для которой сужения h и h' на $I_{j,\xi}$ совпадают для бесконечного множества значений $j \in \mathbf{N}$. Поскольку всякое разбиение из IP мажорируется подходящим разбиением Π_ξ , получаем, что для каждой функции $h \in 2^{\mathbf{N}}$ и каждого разбиения $\Pi = \{J_j | j \in \mathbf{N}\} \in IP$ можно найти функцию, принадлежащую H и такую, что её действие на интервале J_j совпадает с действием h на том же интервале для бесконечного множества значений $j \in \mathbf{N}$. Это означает, что H есть множество второй категории [4, теорема 5.2], поэтому

$$\text{non}(M) \leq |H| \leq \sum_{\xi \in \Gamma} |B_\xi| = \sum_{\xi \in \Gamma} \text{ie}_{L_\xi} \leq \mathbf{d} \cdot \sup_L \text{ie}_L.$$

Отсюда сразу получаем утверждение теоремы. ■

Следствие 1.7. Если $\mathbf{d} = \mathbf{b}$, то $\sup_L \max(\text{ie}_L, \mathbf{b}) = \text{non}(M)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{d} = \mathbf{b}$. Из диаграммы (2) и предложения 1.3 следует, что левая часть доказываемого равенства не превосходит $\text{non}(M)$.

Если выполнено $\mathbf{b} = \text{non}(M)$, то из условия $\max(\text{ie}_L, \mathbf{b}) = \text{non}(M)$ немедленно получаем нужное равенство. Если же $\mathbf{b} < \text{non}(M)$, то по теореме 1.6 имеем

$$\sup_L \max(\text{ie}_L, \mathbf{b}) \geq \sup_L \text{ie}_L = \text{non}(M),$$

что и требовалось. ■

Следствие 1.8. Неравенство $\text{ie}_L > \text{cov}(N)$ совместимо с ZFC.

Доказательство. Нужное утверждение следует из того факта, что равенства $\text{non}(M) = \aleph_2$ и $\mathbf{d} = \mathbf{b} = \text{cov}(N) = \aleph_1$ совместимы с ZFC; если они справедливы, то по следствию 1.7 имеем $\text{ie}_L = \aleph_2$ для некоторого множества L . ■

Замечание. Из леммы 1.2 можно заключить, что утверждения теоремы 1.6 и следствий 1.7 и 1.8 останутся справедливыми, если рассматривать в качестве L лишь бесконечные подмножества множества всех простых чисел.

Важное место в теории множеств занимает аксиома Мартина. Она является следствием континуум-гипотезы ($\aleph_1 = \mathfrak{c}$), но совместима и с гипотезой $\aleph_1 < \mathfrak{c}$. Имеет место такой факт: из справедливости аксиомы Мартина следует, что все кардинальные характеристики, входящие в схему (2), равны $\mathfrak{c}$ (это верно и для всех остальных характеристик из диаграммы Цихоня, см. [4]). Ниже мы увидим, что аналогичным свойством обладает и $\mathfrak{ie}_L$.

Определение 1.9. Пусть $(W, \leq)$ – частично упорядоченное множество.

Будем говорить, что W удовлетворяет условию *счётности цепей* (у. с. ц.), если для каждого несчётного подмножества $\{c_\xi \mid \xi \in \Delta\} \subset W$ можно найти различные индексы $\xi, \eta \in \Delta$ и элемент $c \in W$, такие, что $c \leq c_\xi$ и $c \leq c_\eta$.

Множество $W' \subset W$ называется *плотным* в W , если для всякого $c \in W$ можно найти элемент $c' \in W'$ со свойством $c' \leq c$.

Определение 1.10. Пусть $U = \{W_\xi \mid \xi \in \Gamma\}$ есть некоторое семейство плотных подмножеств частично упорядоченного множества W . Назовём *U-генерическим* всякое множество $W' \subset W$, обладающее следующими свойствами:

- 1) если $c' \in W'$ и $c' \leq c$, то $c \in W'$;
- 2) если $c, c' \in W'$, то для некоторого $b \in W'$ выполнено $b \leq c$ и $b \leq c'$;
- 3) для всякого $\xi \in \Gamma$ множество W' имеет непустое пересечение с W_ξ .

Аксиома Мартина. Если W – непустое частично упорядоченное множество, удовлетворяющее у. с. ц., то для всякого семейства U , состоящего из плотных подмножеств множества W и такого, что $|U| < \mathfrak{c}$, можно найти *U-генерическое* множество $W' \subset W$.

Теорема 1.11. Из аксиомы Мартина следует, что $\mathfrak{ie}_L = \mathfrak{c}$ для всякого $L \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть для всякого $p \in L$ задано множество $A_p \subset \mathbb{Z}_p$. Будем говорить, что последовательность (A_p) является *s-ограниченной*, если для всякого $p \in L$ выполнено неравенство $|A_p| \leq \min(s, p-1)$. Обозначим через W множество, состоящее из всех произведений вида $\prod_{p \in L} (\mathbb{Z}_p \setminus A_p)$, где (A_p) – это *s-ограниченная*

последовательность (для некоторого $s \in \mathbb{N}$); заметим, что $\emptyset \notin W$. Покажем, что непустое частично упорядоченное множество $(W, \subset)$ удовлетворяет у. с. ц.

Пусть $\{C_\xi \mid \xi \in \Delta\}$ – несчётное подмножество множества W . Можем записать $C_\xi = \prod_{p \in L} (\mathbb{Z}_p \setminus A_{p,\xi})$, где $(A_{p,\xi})$ – s_ξ -ограниченная последовательность. Из $|\Delta| > \aleph_0$

вытекает, что найдётся бесконечно много различных C_ξ , имеющих общее $s_\xi = s$. Поэтому существуют различные $\xi, \eta \in \Delta$, такие, что $s_\xi = s_\eta = s$ и при всех $p \leq 2s$ выполнено $A_{p,\xi} = A_{p,\eta}$. Обозначим $A_p = A_{p,\xi} \cup A_{p,\eta}$.

Если $p \leq 2s$, то $|A_p| = |A_{p,\xi}| \leq \min(s, p-1) \leq \min(2s, p-1)$. В случае $p > 2s$ можем записать $|A_p| \leq |A_{p,\xi}| + |A_{p,\eta}| \leq 2\min(s, p-1) = 2s = \min(2s, p-1)$. Таким образом, (A_p) есть $(2s)$ -ограниченная последовательность. Это означает, что

$$C_\xi \cap C_\eta = \prod_{p \in L} (\mathbb{Z}_p \setminus (A_{p,\xi} \cup A_{p,\eta})) = \prod_{p \in L} (\mathbb{Z}_p \setminus A_p) \in W$$

и, следовательно, $(W, \subset)$ удовлетворяет у. с. ц.

Пусть $B = \{d_\xi \mid \xi \in \Gamma\} \subset K_L$, причём $|\Gamma| < \mathfrak{c}$. Обозначим через W_ξ множество всех $C' \in W$, для которых $C' \subset D(d_\xi)$; положим $U = \{W_\xi \mid \xi \in \Gamma\}$. Убедимся, что каждое из множеств W_ξ плотно в W .

Пусть $C \in W$, тогда для некоторой s -ограниченной последовательности (A_p) имеем $C = \prod_{p \in L} (Z_p \setminus A_p)$. Обозначим

$$V_p = \begin{cases} A_p, & \text{если } p \leq s+1; \\ A_p \cup \{\pi_p(d_\xi)\}, & \text{если } p > s+1. \end{cases}$$

Если $p \leq s+1$, то $|V_p| = |A_p| \leq \min(s, p-1) \leq \min(s+1, p-1)$. Если же $p > s+1$, то можем записать $|V_p| \leq |A_p| + 1 \leq \min(s, p-1) + 1 = s+1 = \min(s+1, p-1)$. Итак, (V_p) есть $(s+1)$ -ограниченная последовательность. Таким образом, для произведения $C' = \prod_{p \in L} (Z_p \setminus V_p) \subset C \cap D(d_\xi)$ выполнено $C' \in W_\xi$, т. е. W_ξ плотно в W .

В силу аксиомы Мартина можно найти U -генерическое множество $W' \subset W$. Обозначим через D пересечение всех множеств, которые принадлежат W' . Для всякого индекса $\xi \in \Gamma$ найдётся множество $C_\xi \in W' \cap W_\xi$; имеем $D \subset C_\xi \subset D(d_\xi)$. Учитывая условие $\emptyset \notin W'$ и условие 2) из определения 1.10, можем заключить, что пересечение любого конечного числа принадлежащих W' множеств непусто. Поэтому ввиду компактности K_L и замкнутости всех множеств, входящих в W' , имеем $D \neq \emptyset$.

Зафиксируем некоторый элемент $k \in D$. Для каждого $\xi \in \Gamma$ имеем $k \in D(d_\xi)$, т. е. условие $k \approx d_\xi$ не выполнено. Итак, множество B не обладает свойством (4), поэтому $\mathbf{ie}_L = \mathbf{c}$. ■

2. Основные результаты

Перейдём теперь к основной цели данной статьи: убедимся, что чисто трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$ служит базовым полем подходящего регулярного csp-кольца. Снова считаем, что L – это бесконечное множество простых чисел. Заметим, что справедливо

Предложение 2.1. Каждое из следующих неравенств совместимо с ZFC:

- а) $\mathbf{ie}_L > \mathbf{ie}_X$;
- б) $\mathbf{ie}_L < \mathbf{b}$;
- в) $\mathbf{ie}_L > \mathbf{b}$.

Доказательство. а) Пусть X состоит из всех простых чисел, а бесконечное множество простых чисел L выбрано так, чтобы ряд (5) сходил. Известно, что равенства $\text{non}(N) = \aleph_1$ и $\text{cov}(N) = \aleph_2$ совместимы с ZFC; если они справедливы, то по предложениям 1.1, 1.4 и 1.5 получаем $\mathbf{ie}_L \geq \text{cov}(N) > \aleph_1 = \mathbf{ie}_X$.

б) Пусть множество L состоит из всех простых чисел. Условия $\text{non}(N) = \aleph_1$ и $\mathbf{b} = \aleph_2$ совместимы с ZFC; по предложениям 1.1 и 1.5 имеем $\mathbf{ie}_L = \aleph_1 < \mathbf{b}$.

в) Пусть L выбрано так, что ряд (5) сходится. Условия $\mathbf{b} = \aleph_1$ и $\text{cov}(N) = \aleph_2$ совместимы с ZFC; если они справедливы, то в силу предложения 1.4 получаем $\mathbf{ie}_L \geq \text{cov}(N) > \mathbf{b}$. ■

Через π обозначаем естественный эпиморфизм $K_L \rightarrow K_L/T_L$; через π_p , как и раньше, обозначается проекция из K_L в Z_p . Под π_p^x будем понимать кольцевой гомоморфизм из $K_L[x]$ в $Z_p[x]$, сопоставляющий каждому $\bar{\mu}(x) \in K_L[x]$ многочлен,

коэффициенты которого – это образы соответствующих коэффициентов многочлена $\bar{\mu}(x)$ при отображении π_p . Гомоморфизм колец π^x , индуцированный отображением π и определённый на кольце $K_L[x]$, задаётся аналогично. Можно убедиться, что для многочленов $\bar{\mu}(x) \in K_L[x]$, $\mu_p = \pi_p^x(\bar{\mu})$, $\mu = \pi^x(\bar{\mu})$ и элемента $k \in K_L$ всегда справедливы следующие равенства:

- а) $\pi_p(\bar{\mu}(k)) = \mu_p(\pi_p(k))$ для любого $p \in L$;
- б) $\mu(k + T_L) = \bar{\mu}(k) + T_L$.

Теорема 2.2. Пусть K_L/T_L содержит в качестве подполя поле F , мощность которого меньше $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$. Тогда естественное вложение $F \rightarrow K_L/T_L$ можно продолжить до вложения $F(x) \rightarrow K_L/T_L$, где $F(x)$ есть простое трансцендентное расширение поля F .

Доказательство. Пусть $\{v_\xi(x) \mid \xi \in \Gamma\}$ – множество, которое состоит из всех унитарных многочленов кольца $F[x]$; ясно, что $|\Gamma| = |F|$. Зафиксируем унитарные многочлены $\bar{v}_\xi(x) \in K_L[x]$, такие, что $\pi^x(\bar{v}_\xi) = v_\xi$. Рассмотрим два случая.

I. Допустим сначала, что $|F| < \mathbf{b}$. Ясно, что почти для всех $i \in \mathbf{N}$ выполнено $v_\xi(i) \neq 0$, т. е. элемент $v_\xi(i) = \bar{v}_\xi(i) + T_L$ поля F отличен от нуля. Из обратимости этого элемента следует, что при почти всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(\bar{v}_\xi(i)) \neq 0$.

Построим теперь функцию $z_\xi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Если $v_\xi(i) = 0$, полагаем $z_\xi(i) = 1$. Если же выполнено $v_\xi(i) \neq 0$, то выберем значение $z_\xi(i) \in \mathbf{N}$ так, чтобы для каждого $p \in L$ из условия $p > z_\xi(i)$ следовало неравенство $\pi_p(\bar{v}_\xi(i)) \neq 0$. Рассмотрим множество функций $\{z_\xi \mid \xi \in \Gamma\} \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Из $|\Gamma| < \mathbf{b}$ следует, что для некоторой функции $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ при всех $\xi \in \Gamma$ выполнено $z_\xi < z$. Будем считать, что функция z является строго возрастающей (очевидно, что её можно выбрать обладающей данным свойством). Функцию $\kappa: L \rightarrow \mathbf{N}$ зададим равенством

$$\kappa(p) = \begin{cases} i, & \text{если } z(i) \leq p < z(i+1); \\ 1, & \text{если } p < z(1). \end{cases}$$

Зафиксируем некоторое $\xi \in \Gamma$. Убедимся, что справедливы два свойства:

(i) Почти для всех $p \in L$ выполнено $v_\xi(\kappa(p)) \neq 0$.

Утверждение следует из того факта, что каждое своё значение κ принимает лишь конечное число раз, а многочлен $v_\xi(x)$ имеет конечное число корней в F .

(ii) $\pi_p(\bar{v}_\xi(\kappa(p))) \neq 0$ почти для всех $p \in L$.

Действительно, существует $i_\xi \in \mathbf{N}$, для которого при всех $i \geq i_\xi$ справедливо неравенство $z_\xi(i) < z(i)$. Пусть выполнено $p \geq z(i_\xi)$ и $v_\xi(\kappa(p)) \neq 0$ (этим условиям удовлетворяют почти все $p \in L$). Тогда для некоторого $i \geq i_\xi$ имеем неравенства $z(i) \leq p < z(i+1)$; следовательно, $z_\xi(\kappa(p)) = z_\xi(i) < z(i) \leq p$. Отсюда в силу свойств функции z_ξ получаем $\pi_p(\bar{v}_\xi(\kappa(p))) \neq 0$, что и требовалось.

Выберем $k \in K_L$ так, чтобы при любом $p \in L$ выполнялось $\pi_p(k) = \kappa(p) + p\mathbf{Z}$; положим $a = k + T_L \in K_L/T_L$. Вновь зафиксируем некоторое $\xi \in \Gamma$. Из условия $\pi_p(k) = \pi_p(\kappa(p))$ получаем $\pi_p(\bar{v}_\xi(k)) = \pi_p(\bar{v}_\xi(\kappa(p)))$; в силу свойства (ii) отсюда вытекает, что почти для всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(\bar{v}_\xi(k)) \neq 0$. Поэтому элемент

$v_\xi(a) = \bar{v}_\xi(k) + T_L$ обратим в K_L/T_L (и, в частности, не равен 0). Подмножество $F(a)$ кольца K_L/T_L зададим равенством

$$F(a) = \{u(a) \cdot (v(a))^{-1} \mid u(x), v(x) \in F[x]; v(x) - \text{унитарный}\}. \quad (6)$$

Из наших рассуждений следует, что $F(a)$ есть поле, F -изоморфное полю $F(x)$, причём элемент a является трансцендентным над F .

II. Пусть теперь выполнено неравенство $|F| < \mathbf{ie}_L$. Заметим, что для каждого $p \in L$ многочлен $\pi_p^x(\bar{v}_\xi) \in \mathbf{Z}_p[x]$ является унитарным, а его степень равна числу $s_\xi = \deg v_\xi$. В частности, многочлен $\pi_p^x(\bar{v}_\xi)$ имеет не более s_ξ корней в поле $\mathbf{Z}_p$. Поэтому можно найти состоящее из s_ξ элементов множество $B_\xi \subset K_L$, такое, что $\mathbf{Z}_p \setminus \{\pi_p(d) \mid d \in B_\xi\}$ не содержит корней многочлена $\pi_p^x(\bar{v}_\xi)$ ни при каком $p \in L$.

Зададим множество $B \subset K_L$ как объединение множеств B_ξ по всем $\xi \in \Gamma$; из $|\Gamma| < \mathbf{ie}_L$ следует, что B не обладает свойством (4). Тогда найдётся $k \in K_L$ с тем свойством, что для всякого $d \in B$ при почти всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(k) \neq \pi_p(d)$.

Фиксируя $\xi \in \Gamma$, получаем, что почти для всех простых $p \in L$ элемент $\pi_p(k)$ входит в $\mathbf{Z}_p \setminus \{\pi_p(d) \mid d \in B_\xi\}$ и поэтому не является корнем многочлена $\pi_p^x(\bar{v}_\xi)$. Поскольку $\pi_p(\bar{v}_\xi(k))$ совпадает со значением многочлена $\pi_p^x(\bar{v}_\xi)$ в точке $\pi_p(k)$, можно сделать вывод, что почти для всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(\bar{v}_\xi(k)) \neq 0$.

Обозначим $a = k + T_L \in K_L/T_L$. Для всякого $\xi \in \Gamma$ элемент $v_\xi(a) = \bar{v}_\xi(k) + T_L$ обратим в K_L/T_L . Отсюда получаем, что множество $F(a) \subset K_L/T_L$, задаваемое равенством (6), является простым трансцендентным расширением поля F . ■

В следующей теореме мы отождествляем $\mathbf{Q}$ с простым полем, содержащимся в кольце K_L/T_L .

Теорема 2.3. Кольцо K_L/T_L содержит подкольцо, являющееся чисто трансцендентным расширением поля $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$.

Доказательство. Рассмотрим множество, элементами которого служат все подкольца кольца K_L/T_L , являющиеся полями; это множество непусто, так как оно содержит $\mathbf{Q}$. Пусть F — максимальный (относительно включения) элемент рассматриваемого множества; существование такого элемента следует из леммы Цорна. Из теоремы 2.2 имеем $|F| \geq \max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$. Нетрудно видеть, что в этом случае поле F содержит некоторое чисто трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$. ■

Таким образом, каждое чисто трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$, степень трансцендентности которого не больше кардинального числа $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$, служит базовым полем некоторого регулярного csp-кольца $R \subset K_L$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fomin A.A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Basel et al.: Birkhäuser, 1999. P. 87–100.
2. Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 47–51.

3. Тимошенко Е.А. О базовых полях csp-колец // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. С. 555–565.
4. Blass A. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum // Handbook of Set Theory. V. 1. Dordrecht et al.: Springer, 2010. P. 395–489.
5. Van Douwen E.K. The integers and topology // Handbook of Set-Theoretic Topology. Amsterdam et al.: North-Holland, 1984. P. 111–167.
6. Bartoszyński T., Judah H. Set Theory: on the Structure of the Real Line. Wellesley: A.K. Peters, 1995.

Статья поступила 08.06.2013 г.

Timoshenko E.A. PURELY TRANSCENDENTAL EXTENSIONS OF THE FIELD OF RATIONAL NUMBERS AS BASE FIELDS OF CSP-RINGS. We obtain conditions under which a purely transcendental extension of the field of rational numbers is a base field of some csp-ring. In the paper, we use properties of cardinal characteristics of the continuum.

Keywords: csp-ring, base field, cardinal characteristics of the continuum.

TIMOSHENKO Egor Aleksandrovich (Tomsk State University)

E-mail: tea471@mail.tsu.ru

УДК 515.12

Н.Н. Трофименко, Т.Е. Хмылева

О ГОМЕОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВ $I \times [1, \alpha]$ С ТОПОЛОГИЕЙ ЗОРГЕНФРЕЯ^{1,2}

Проводится топологическая классификация пространств $I \times [1, \alpha]$, где α – произвольный ординал, а полуинтервал $I = (0, 1]$ наделен топологией Зоргенфрея. Доказывается, что пространство $I \times [1, \alpha]$ гомеоморфно $I \times [1, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$.

Ключевые слова: *прямая Зоргенфрея, непрерывные функции, линейные гомеоморфизмы, отрезок ординалов.*

В статье используются следующие обозначения: полуинтервал $I = (0, 1]$ рассматривается в топологии Зоргенфрея, т.е. базу окрестностей точки x образуют множества вида $(x - \varepsilon, x]$, $\varepsilon > 0$. Для произвольного ординала α интервал $[1, \alpha]$ наделяется порядковой топологией. Хорошо известно, что отрезок ординалов $[1, \alpha]$ является компактом.

Теорема 1. Пусть γ – произвольный ординал и $n \in \mathbb{N}$. Тогда пространства $I \times [1, \omega^\gamma]$ и $I \times [1, \omega^\gamma \cdot n]$ являются гомеоморфными.

Доказательство. Представим пространство $I \times [1, \omega^\gamma]$ следующим образом:

$$I \times [1, \omega^\gamma] = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \times [1, \omega^\gamma] \sim (I \amalg \dots \amalg I) \times [1, \omega^\gamma] \sim \\ \sim (I \times [1, \omega^\gamma]) \amalg (I \times [1, \omega^\gamma]) \amalg \dots \amalg (I \times [1, \omega^\gamma]).$$

Нетрудно видеть, что пространство $(I \times [1, \omega^\gamma]) \amalg (I \times [1, \omega^\gamma]) \amalg \dots \amalg (I \times [1, \omega^\gamma])$ гомеоморфно пространству $I \times [1, \omega^\gamma \cdot n]$. Теорема доказана. ■

Лемма 2. Любое открыто-замкнутое подмножество V в отрезке можно представить как

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

где $I_i = (a_i, b_i]$.

Доказательство. Для каждой точки $x \in V$ обозначим через

$$x - \varepsilon_x = \inf \{ x - \varepsilon : (x - \varepsilon, x] \subset V \} \text{ и } x + \delta_x = \sup \{ x + \delta : (x - \varepsilon_x, x + \delta] \subset V \}.$$

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

² Работа выполнена частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Нетрудно видеть, что точка $x - \varepsilon_x \notin V$, поскольку интервал $(x - \varepsilon_x, x + \delta_x]$ – наибольший, входящий в V , а точка $x + \delta_x \in V$ в силу его замкнутости. Положим $V_x = (x - \varepsilon_x, x + \delta_x]$. Ясно, что $V_x \subset V$. Заметим, что если $x \neq x'$, то $V_x = V_{x'}$ либо $V_x \cap V_{x'} = \emptyset$. Действительно, если $V_x \cap V_{x'} \neq \emptyset$ и $V_x \neq V_{x'}$, то $V_x \cup V_{x'}$ содержит точки x и x' одновременно, а это противоречит тому, что интервалы V_x наибольший, входящий в V .

Очевидно, что $V = \bigcup_{x \in I} V_x$. Семейство $\{V_x\}_{x \in I}$ содержит только счетное число непересекающихся интервалов, так как отрезок I является сепарабельным пространством. ■

Теорема 3. Пространства I и $I \times [1, \omega]$ не являются гомеоморфными.

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм

$$\varphi: I \times [1, \omega] \xrightarrow{\text{на}} I.$$

Так как $I \times \{n\}$ – открыто-замкнутое множество, то $\varphi(I \times \{n\})$ – открыто-замкнутое подмножество в отрезке I . Согласно лемме 2,

$$\varphi(I \times \{n\}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^n, \text{ где } I_i^n = (a_i^n, b_i^n] \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Для обратного отображения φ^{-1} и открыто-замкнутого подмножества $(a_i^n, b_i^n] \subset I$ по лемме 2 имеем

$$\varphi^{-1}((a_i^n, b_i^n]) = \varphi^{-1}((a_i^n, b_i^n]) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i,j}^n, \quad (1)$$

где $I_{i,j}^n = (c_{i,j}^n, d_{i,j}^n] \times \{n\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Ясно, что множество $\{c_{i,j}^n\}_{i,j,n=1}^{\infty} \cup \{d_{i,j}^n\}_{i,j,n=1}^{\infty}$ является счетным. Следовательно, существует точка $x_0 \in I$, такая, что $x_0 \notin \{c_{i,j}^n\}_{i,j,n=1}^{\infty} \cup \{d_{i,j}^n\}_{i,j,n=1}^{\infty}$. Это означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют номера i_n и j_n такие, что

$$(x_0, n) \in (c_{i_n, j_n}^n, d_{i_n, j_n}^n) \times \{n\} \subset I_{i_n, j_n}^n. \quad (2)$$

Ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_0, n) = (x_0, \omega)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi((x_0, n)) = \varphi((x_0, \omega))$. Не нарушая общности (если нужно, переходя к подпоследовательности), можно считать, что

$$\varphi(x_0, n) < \varphi(x_0, n+1) < \varphi(x_0, \omega) \quad (3)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. В силу (1) и (2), получаем

$$\varphi(x_0, n) \in \varphi(I_{i_n, j_n}^n) \subset \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i_n, j}^n\right) = I_{i_n}^n. \quad (4)$$

Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ $I_{i_n}^n \cap I_{i_{n+1}}^{n+1} = \emptyset$ и выполняется неравенство (3), то

$$I_{i_1}^1 < I_{i_2}^2 < \dots < I_{i_n}^n < \dots < \varphi(x_0, \omega).$$

Отсюда следует, что для любой последовательности точек $y_n \in I_{i_n}^n$ выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \varphi(x_0, \omega)$.

Так как точка $(x_0, n) \in (c_{i_n, j_n}^n, d_{i_n, j_n}^n)$, то существует число ε_n , такое, что $(x_0 + \varepsilon_n, n) \in (c_{i_n, j_n}^n, d_{i_n, j_n}^n) \subset I_{i_n, j_n}^n, n \in \mathbb{N}$. В силу условия (4) $\varphi(x_0 + \varepsilon_n, n) \in I_{i_n}^n$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_0 + \varepsilon_n, n) = \varphi(x_0, \omega)$. С другой стороны, очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 + \varepsilon_n, n) \neq (x_0, \omega)$. Таким образом, получаем противоречие с непрерывностью отображения φ^{-1} . ■

В работе Бурке и Мур [1] доказано, что любое замкнутое подмножество прямой Зоргенфрея, не имеющее изолированных точек, гомеоморфно ей самой. Отсюда и из теоремы 3 получаем

Следствие 4. Пространство $I \times [1, \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства I .

Теорема 5. Пусть α – произвольный ординал. Тогда пространство $I \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства $I \times [1, \omega^\alpha]$.

Доказательство. Доказательство проведем методом трансфинитной индукции.

База индукции. Пусть $\alpha = 0$. Согласно следствию 4, пространство $I \times [1, \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства I .

Предположим, что для всех $\beta < \gamma$ пространство $I \times [1, \omega^\beta \cdot \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства $I \times [1, \omega^\beta]$.

Докажем, что предположение индукции выполнено для ординала γ . Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi: I \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega] \rightarrow I \times [1, \omega^\gamma]$ такой, что $\varphi(I \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega]) = F$, где F – замкнутое подпространство в пространстве $I \times [1, \omega^\gamma]$. Пусть точка $(x, \omega^\gamma) \in I \times \{\omega^\gamma\}$ переходит в точку $(y, \delta) \in I \times \{\delta\}$, где $\delta < \omega^\gamma$. Так как отображение φ является непрерывным, то для любого $\varepsilon > 0$ и $\rho < \delta$ существует открыто-замкнутая окрестность

$$(x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma] \subset I \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega]$$

такая, что $\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma]) \subset (y - \delta, y] \times (\rho, \delta]$

как замкнутое подпространство в $I \times [1, \omega^\gamma]$ (поскольку φ – гомеоморфизм на замкнутое подпространство). Так как отрезки ординалов $(\xi, \omega^\gamma] \sim [1, \omega^\gamma]$ гомеоморфны, то

$$(x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma] \sim I \times [1, \omega^\gamma].$$

Представим ординал δ в следующем виде [2]:

$$\delta = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot n_m.$$

Тогда $[1, \delta] \sim [1, \omega^{\beta_1} \cdot n_1]$. Применяя теорему 1, получаем

$$\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma]) \subset I \times [1, \delta] \sim I \times [1, \omega^{\beta_1} \cdot n_1] \sim I \times [1, \omega^{\beta_1}].$$

Следовательно, $\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma])$ гомеоморфно вкладывается как замкнутое подпространство в $I \times [1, \omega^{\beta_1}]$. Так как $(x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma] \sim I \times [1, \omega^\gamma]$, то пространство $I \times [1, \omega^\gamma]$ гомеоморфно вкладывается в $I \times [1, \omega^{\beta_1}]$, что невозможно, поскольку $\omega^\gamma \geq \omega^{\beta_1} \cdot \omega$.

Таким образом, $\varphi(I \times \{\omega^\gamma\}) \subset I \times \{\omega^\gamma\}$. Аналогично можно доказать, что $\varphi(I \times \{\omega^\gamma \cdot n\}) \subset I \times \{\omega^\gamma\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\varphi\left(\prod_{n=1}^{\infty} I \times \{\omega^\gamma \cdot n\}\right) \Pi(I \times \{\omega^\gamma \cdot \omega\}) \subset I \times \{\omega^\gamma\}.$$

В силу того, что

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} I \times \{\omega^\gamma \cdot n\}\right) \Pi(I \times \{\omega^\gamma \cdot \omega\}) \sim I \times [1, \omega]$$

и $I \times \{\omega^\gamma\} \sim I$, получаем противоречие с теоремой 3. Теорема доказана. ■

Следствие 6. Пусть α – произвольный ординал. Тогда пространства $I \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ и $I \times [1, \omega^\alpha]$ не являются гомеоморфными.

Теорема 7. Пусть α и β произвольные ординалы и $\alpha \leq \beta$. Пространства $I \times [1, \alpha] \sim I \times [1, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$.

Доказательство. Пусть $\varphi: I \times [1, \alpha] \rightarrow I \times [1, \beta]$ – гомеоморфизм. Представим ординалы α и β в виде

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot n_m \quad \text{и} \quad \beta = \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\delta_n} \cdot n_m.$$

Из неравенства $\alpha \leq \beta$ следует, что $\gamma_1 \leq \delta_1$. Так как $[1, \alpha] \sim [1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1]$ и $[1, \beta] \sim [1, \omega^{\delta_1} \cdot m_1]$, получаем $I \times [1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1] \sim I \times [1, \omega^{\delta_1} \cdot m_1]$. Используя теорему 1, имеем $I \times [1, \omega^{\gamma_1}] \sim I \times [1, \omega^{\delta_1}]$.

В силу теоремы 5 неравенство $\omega^{\delta_1} \cdot k \geq \omega^{\gamma_1} \cdot \omega$ невозможно для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\omega^{\delta_1} \leq \omega^{\delta_1} \cdot k < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом,

$$\alpha \leq \beta < \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \omega^{\delta_1} = \omega^{\delta_1} \cdot (n_1 + 1) < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \alpha \cdot \omega.$$

Последнее равенство верно, так как

$$\begin{aligned}\omega^{\gamma_1} \cdot \omega &= (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1) \cdot \omega \leq \alpha \cdot \omega = (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 + \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot n_m) \cdot \omega \\ &\leq (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_1}) \cdot \omega = \omega^{\gamma_1} (n_1 + 1) \cdot \omega = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \alpha \cdot \omega. \quad (1)$$

Пусть теперь $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$. Используя равенство (1), получаем

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot n_m \leq \beta = \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\delta_n} \cdot n_m < \alpha \cdot \omega = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \omega^{\gamma_1+1}.$$

Из последнего неравенства видим, что $\gamma_1 \leq \delta_1 < \gamma_1 + 1$ и, следовательно, $\delta_1 = \gamma_1$.

Так как $I \times [1, \omega^{\gamma_1}] \sim I \times [1, \alpha]$ и $I \times [1, \omega^{\delta_1}] \sim I \times [1, \beta]$, то $I \times [1, \alpha] \sim I \times [1, \beta]$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burke D.K., Moore J.T.* Subspaces of the Sorgenfrey line // *Topology and Its Applications*. 1988. V. 90. P. 57–68.
2. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Статья поступила 04.07.2013 г.

Trofimenko N.N., Khmyleva T.E. ON HOMEOMORPHISMS OF SPACES $I \times [1, \alpha]$ WITH THE SORGENFREY TOPOLOGY. In this paper, a topological classification of spaces $I \times [1, \alpha]$ is presented. Here, α is an arbitrary ordinal and the semi-interval $I = (0, 1]$ is equipped with the Sorgenfrey topology. It is proved that the space $I \times [1, \alpha]$ is homeomorphic to the space $I \times [1, \beta]$ if and only if $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$.

Keywords: line of Sorgenfrey, continuous functions, linear homeomorphisms, interval of ordinals.

TROFIMENKO Nadezhda Nikolaevna (Tomsk State University)

E-mail: Trofimenko@sibmail.com

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Tomsk State University)

E-mail: TEX2150@yandex.ru.

МЕХАНИКА

УДК 532.546

Д.О. Диль, А.М. Бубенчиков

ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ТРУБЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ПОРИСТЫМ МАТЕРИАЛОМ

На основе анализа современного состояния работ по фильтрации составлена математическая модель двухфазной фильтрации в анизотропной пористой среде. Решение задачи строится с использованием метода контрольного объема и итерационной технологии Ньютона. В качестве примера рассмотрено одномерное развивающееся течение газожидкостной среды в однородном пористом материале.

Ключевые слова: пористый объем, двухфазная среда, влагонасыщенность, капиллярное давление, контрольный объем, нелинейные невязки уравнений, метод Ньютона.

Математическая модель двухфазной фильтрации в пористых пластах сформулирована на основе анализа работ [1–4]:

$$\frac{\partial \rho^G m(1-s)}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{IK k_r^G}{\mu^G} \rho^G (\bar{\nabla} p^G - \rho^G \bar{g}) \right) = q^G; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho^F ms}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{IK k_r^F}{\mu^F} \rho^F (\bar{\nabla} p^F - \rho^F \bar{g}) \right) = q^F; \quad (2)$$

$\rho^G = \rho^G(p^G) = \rho^{G,0} \frac{p^G}{p^0}$, p^0 – атмосферное давление;

$m = m(p^G)$ – пористость ($\frac{V_n}{V}$, V_n – объем пор);

s – эффективная влагонасыщенность (в принципе меняется от 0 до 1);

IK – тензор проницаемости, в общем случае полно заполненный;

$k_r^G = \sqrt{1-s}(1-s^2)$ – относительная проницаемость для газовой фазы;

μ^G – вязкость газа; q^G – источниковый член в балансе газовой фазы;

q^F – источниковый член в балансе жидкости;

$\rho^F = \rho^{F,0} \frac{p^F}{p^0}$, $\rho^{F,0}$ – плотность флюида при атмосферном давлении;

$k_r^F = \sqrt{s}(1-\sqrt{1-s^2})^2$ – относительная проницаемость для жидкой фазы;

μ^F – вязкость флюида ($\mu^F \gg \mu^G$);

$$p^F = p^G - p^c(s); \quad p^c(s) = p^d \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} \text{ – капиллярное давление; } p^d \text{ – пороговое}$$

давление, причем $p^d = \frac{\rho^F g}{\alpha}$, где α – параметр, характеризующий пористую среду. Таким образом независимыми переменными будут давление газа и влагонасыщенность. В качестве граничных условий для них будем использовать условия Дирихле. В начальный момент времени давление газа и влагонасыщенность будем считать постоянными и равными значениям на выходе.

Одномерное приближение

Предельно упростим ситуацию. Примем, что источники отсутствуют, то есть $q^G = q^F = 0$. Будем рассматривать одномерное движение, в этом случае $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x}$, $\text{div} = \frac{\partial}{\partial x}$. Кроме того, примем, что движение происходит в горизонтальном направлении: $(\vec{g})_x = 0$. В этом случае уравнения (1), (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho^G m(1-s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K k_r^G}{\mu^G} \rho^G \left(\frac{\partial p^G}{\partial x} \right) \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho^F m s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K k_r^F}{\mu^F} \rho^F \left(\frac{\partial p^F}{\partial x} \right) \right). \quad (4)$$

Здесь K – скалярный коэффициент проницаемости.

Плотность флюида будем считать неизменной, а плотность газа – линейной функцией давления:

$$\rho^G = \frac{\rho^{G,0}}{p^0} p^G.$$

В качестве независимых переменных будем рассматривать давление газа и влагонасыщенность. Поэтому давление флюида будем определять по формуле

$$p^F = p^G - p^c(s),$$

где $p^c(s) = p^d \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}$. Эта зависимость представлена на рис. 1.

В результате получим два уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial p^G m(1-s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K k_r^G(s)}{\mu^G} p^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial m s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K k_r^F(s)}{\mu^F} \frac{\partial (p^G - p^c(s))}{\partial x} \right). \quad (6)$$

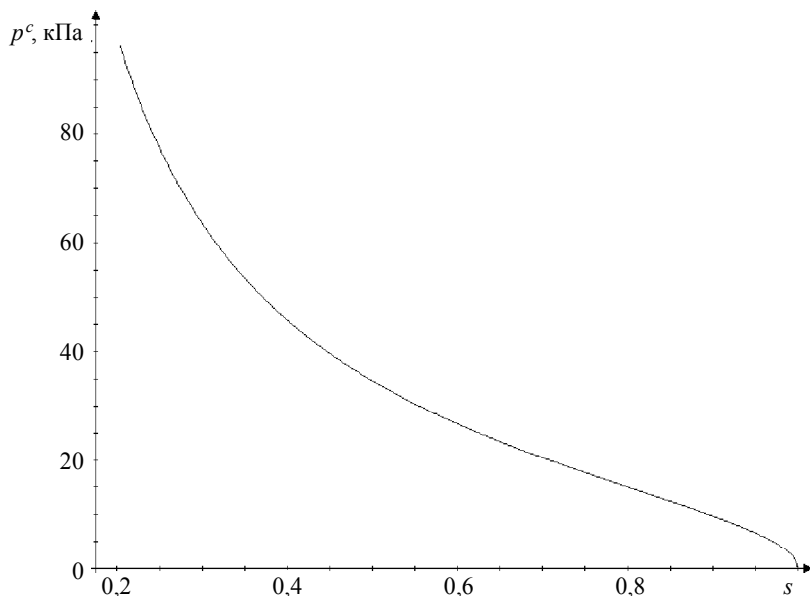


Рис. 1. Характер зависимости капиллярного давления от насыщенности

Метод контрольного объема

Для построения дискретных аналогов исходных дифференциальных уравнений разобьем область решения на контрольные объемы вдоль оси x и проинтегрируем эти уравнения, заменяя объемные интегралы поверхностными. Поскольку стенки трубы непроницаемы, при интегрировании по поверхности рассматриваются только две ее составляющие – два круга, через которые осуществляется течение. Рассматривая значения давления газа и влагонасыщенности в центрах контрольных объемов, а также учитывая все предполагаемые выше упрощения исходных дифференциальных уравнений для случая одномерного приближения, будем иметь разностные уравнения следующего вида:

$$V_i m \frac{(p_i^G (1-s_i))^{n+1} - (p_i^G (1-s_i))^n}{\Delta t} = \bar{p}_{\text{left}}^{G,n+1} \cdot Q_{\text{left}}^{G,n+1} - \bar{p}_{\text{right}}^{G,n+1} \cdot Q_{\text{right}}^{G,n+1}, \quad (7)$$

$$V_i m \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\Delta t} = Q_{\text{left}}^{F,n+1} - Q_{\text{right}}^{F,n+1}. \quad (8)$$

где
$$Q_j^{G,n+1} = \frac{K \cdot S_c \cdot k_r^G(\tilde{s}_j^{n+1})}{\mu^G} \frac{p_j^{G,n+1} - p_i^{G,n+1}}{\Delta l}, \quad (j = \text{left}, \text{right}),$$

$$Q_j^{F,n+1} = \frac{K \cdot S_c \cdot k_r^F(\tilde{s}_j^{n+1})}{\mu^F} \frac{p_j^{G,n+1} - p^c(s_j^{n+1}) - p_i^{G,n+1} + p^c(s_i^{n+1})}{\Delta l},$$

V_i – объем i -го контрольного объема, S_c – площадь сечений трубы, через которые осуществляется течение, $\bar{p}_j^{G,n+1} = (p_j^{G,n+1} + p_i^{G,n+1})/2$ – осредненное значение дав-

ления газа на j -й поверхности контрольного объема, $p_i^{G,n+1}$ – давление газа в центре i -го контрольного объема, $\tilde{s}_j^{n+1}$ – значение насыщенности на j -й поверхности, взятое против потока.

Для решения полученной системы $2N$ дискретных уравнений (N – число контрольных объемов) воспользуемся технологией Ньютона, используемой для решения систем нелинейных уравнений. Выпишем нелинейные невязки уравнений для l -го приближения к величине, изменяемой на временном шаге $n+1$ в i -м контрольном объеме:

$$R_{G,i}^l \equiv V_i m \left[p_i^{G,l} (1 - s_i^l) - p_i^{G,n} (1 - s_i^n) \right] - \Delta t \sum_{j=\text{left}}^{\text{right}} p_j^{G,l} Q_j^{G,l}; \quad (9)$$

$$R_{F,i}^l \equiv V_i m \left[s_i^l - s_i^n \right] - \Delta t \sum_{j=\text{left}}^{\text{right}} Q_j^{F,l}. \quad (10)$$

Определяя производные от невязок по значениям насыщенности и давления газа, запишем для каждого контрольного объема систему линейных алгебраических уравнений из двух уравнений для двух неизвестных приращений рассматриваемых переменных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_{G,i}^l}{\partial p_i^l} & \frac{\partial R_{G,i}^l}{\partial s_i^l} \\ \frac{\partial R_{F,i}^l}{\partial p_i^l} & \frac{\partial R_{F,i}^l}{\partial s_i^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_i^l \\ \delta s_i^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{G,i}^l \\ -R_{F,i}^l \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Благодаря тому, что для каждой ячейки записывается независимая система уравнений, легко решаемая с помощью правила Крамера, вычислительный алгоритм становится достаточно простым. Недостатком данного метода являются некоторые ограничения для шага по времени.

Вычисления проводились при следующих значениях определяющих параметров:

$L = 6$ м – длина трубы;
 $\rho^F = 1000$ кг/м³; $\rho^{G,0} = 1,27$ кг/м³;
 $K = 9,869233 \cdot 10^{-13}$ м²;
 $\mu^F = 8,9 \cdot 10^{-4}$ Па·с; $\mu^G = 1,78 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Далее будем рассматривать движение газо-жидкостной среды в трубе, заполненной пористым материалом, например песком ($m = 0,4$).

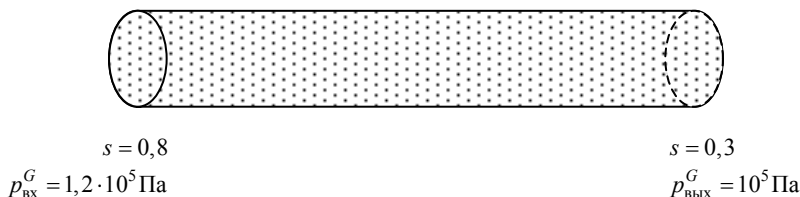


Рис. 2. Одномерная область двухфазной фильтрации

Тестирование алгоритма при постоянной насыщенности

В случае постоянной насыщенности уравнение для давления газа принимает вид квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial p^G}{\partial t} = \frac{K k_r^G(s)}{\mu^G m(1-s)} \frac{\partial}{\partial x} \left(p^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right). \quad (12)$$

На рис. 3 представлены результаты решения этого уравнения рассматриваемым численным методом. В случае установившегося течения, когда $\frac{\partial p^G}{\partial t} = 0$, решение легко находится аналитически. На графике аналитическое решение практически совпадает с численным, что говорит о корректности применения рассматриваемого численного метода для решения данных уравнений.

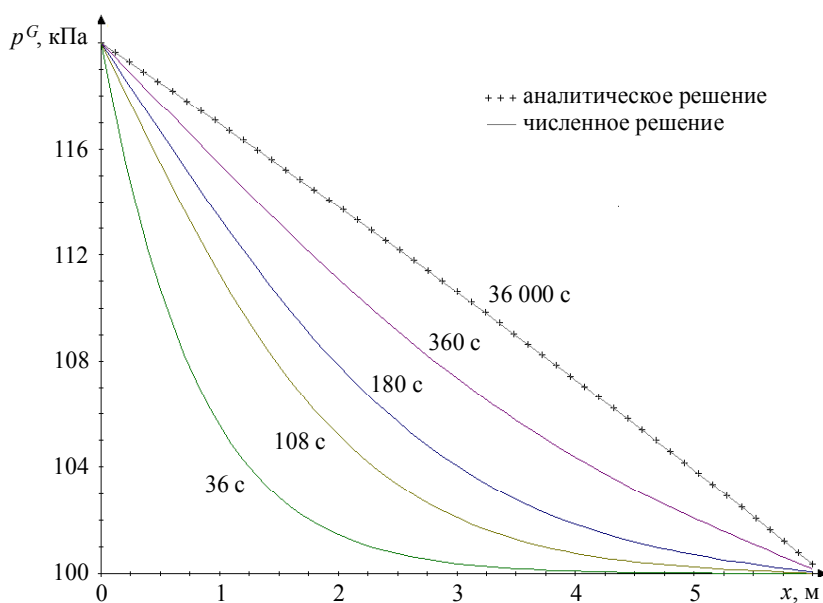


Рис. 3. Распределения давления газа по длине трубы в моменты времени 36, 108, 180, 360 и 36 000 с

В рассматриваемом примере профиль давления газа, изначально имеющий вид «левого нижнего уголка», постепенно деформируется в почти линейное распределение, что характерно для решения уравнения теплопроводности.

Численный эксперимент

Для анализа аппроксимационной сходимости были проведены вычисления с различными параметрами сетки, а именно шага вдоль оси x . На рис. 4 можно наблюдать характер сходимости решения разностной задачи. Заметной особенностью более точного решения является большая кривизна. В точках перегиба решения совпадают.

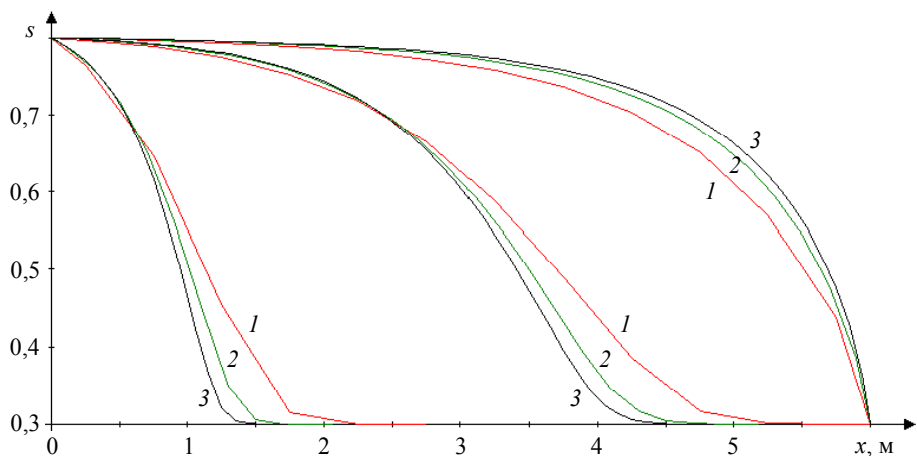


Рис. 4. Распределение насыщенности в моменты времени 10, 100, 360 часов для различных шагов вдоль оси x (1 – 0,5 м, 2 – 0,2 м, 3 – 0,1 м)

При указанных выше параметрах проводился численный эксперимент, отслеживающий динамику развития течения в трубе, заполненной пористым материалом. Шаг сетки вдоль оси x равнялся 0.1 м. В этом случае рассматриваемая область решения была покрыта 60-ю контрольными объёмами. Были получены распределения давления флюида и газа, а также распределение насыщенности флюидом пористого пространства с течением времени, представленное на рис. 5. Полученные результаты позволяют анализировать течение и характер заполнения пористого пространства.

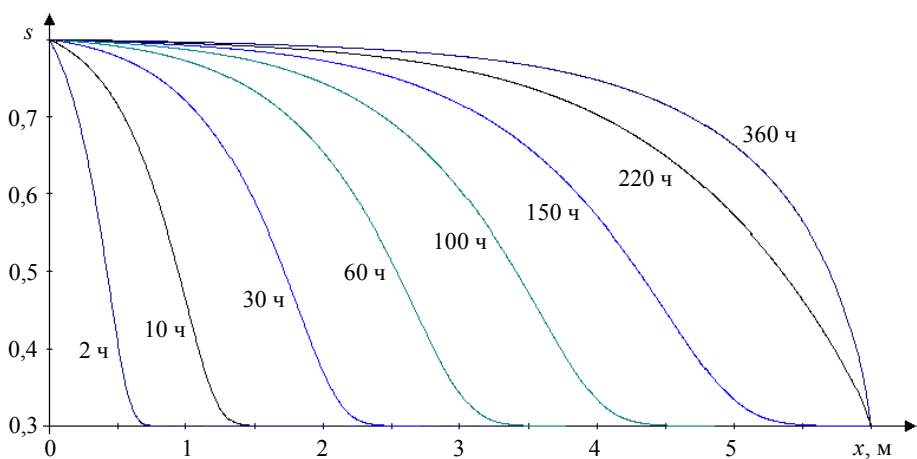


Рис. 5. Распределение насыщенности по объёму пористого пространства в моменты времени 2, 10, 30, 60, 100, 150, 220, 360 ч

Как видно из рис. 5, наблюдается волновой механизм распространения насыщенности по пористому пространству трубы. Причем зона изменения насыщенности с течением времени увеличивается. Характерная выпукло-вогнутая форма

ее распределения со временем становится более простой и к моменту, определяющему установившееся состояние течения, кривая $s = s(x)$ имеет вполне определенный знак кривизны.

В таблице приводятся данные итерационной сходимости при различных шагах по времени. Точность расчётов – 10^{-2} . Для давления газа столь высокая точность является излишней и приводит к значительному увеличению итераций. Однако эта точность необходима для значений влагонасыщенности, которые колеблются в пределах от 0 до 1.

Данные итерационной сходимости при расчёте течения с общим временем 15 дней

Шаг по времени, мин (число шагов)	Общее число итераций	Среднее число итераций на шаг	Время выполнения программы, с
6 (3600)	590 534	768	315
60 (360)	276 477	164	142

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shikuo C.* Displacement mechanism of the two-phase flow model for water and gas based on adsorption and desorption in coal seams / Chen Shikuo, Yang Tianhong, Wei Chenhui // Materials of Int. Symposium on Multi-field Coupling Theory of Rock and Soil Media and Its Applications, Chengdu City, CHINA. 2010. P. 597–603.
2. *Van Genuchten M.Th.* A Closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J. 1980. V. 44. P. 892–898.
3. *Schaap M.G.* A modified Mualem – van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation / M.G. Schaap, M.Th. van Genuchten // Vadose Zone J. 2006. V. 5. P. 27–34.
4. *Никитин К.Д.* Метод конечных объемов для задачи конвекции-диффузии и моделей двухфазных течений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2010. 105 с.

Статья поступила 30.03.2013 г.

Dil' D.O., Bubenchikov A.M. TWO-PHASE FILTRATION IN A PIPE FILLED WITH A POROUS MATERIAL. Based on the analysis of the present-day state of works on the seepage theory, a mathematical model of two-phase flow in anisotropic porous medium is established. A numerical solution using the control volume method and Newton's iteration algorithm is proposed. As an example, one-dimensional developing motion of a gas-fluid medium in a homogeneous porous material is considered.

Keywords: porous volume, two-phase medium, water saturation, capillary pressure, control volume, nonlinear residuals, Newton's method.

DIL' Denis Olegovich (Tomsk State University)

E-mail: gradpower@list.ru

BUBENCHIKOV Aleksey Mikhailovich (Tomsk State University)

E-mail: alexy121@mail.ru

УДК 539.3

О.В. Иванова, С.А. Зелепугин

**ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ВЗРЫВНОГО НАГРУЖЕНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АМПУЛЫ**

Численно моделируется процесс взрывного компактирования инертной трехкомпонентной смеси в цилиндрической ампуле сохранения. Поведение смеси описывается с помощью математической модели многокомпонентной среды. Основное внимание уделено моделированию действия продуктов взрыва на ампулу. Подобраны параметры взрывного нагружения цилиндрических ампул сохранения, проведены сравнения с экспериментом.

Ключевые слова: взрывное компактирование, модель многокомпонентной среды, численное моделирование.

Современная техника все более нуждается в высокоплотных материалах, но некоторые из них могут не поддаваться обработке традиционными методами – плавлением или статическим сжатием – из-за высоких температур плавления или жесткости. Использование взрывных технологий снимает эти ограничения. Большим преимуществом взрывного компактирования является, прежде всего, высокая и равномерно распределенная плотность получающихся материалов. Эти преимущества обеспечили взрывному компактированию широкое применение, и хотя первые работы были сделаны уже давно, возможности данного метода далеко не исчерпаны [1–3]. Здесь необходимы дальнейшие исследования параметров уплотняемых и упрочняемых материалов и используемых взрывчатых веществ (ВВ).

Для получения высокоплотных однородных материалов необходимо реализовать режим взрывного нагружения, исключаящий нежелательные последствия отраженных ударных волн и волн разрежения. Дополнительная трудность заключается в выборе типа и количества ВВ. Так, в первых опытах для уплотнения использовали ВВ с высокой скоростью детонации, поскольку они развивают и самые высокие давления, что позволяло надеяться и на самые высокие плотности компактируемых материалов [1]. Однако при этом не принималось во внимание, что высокие давления приводят к дополнительному упругому или пластическому сжатию уже спрессованного тела. В результате после прохождения детонационной волны волна разгрузки вызывает резкое увеличение объема. К тому же отраженные друг от друга (как от жесткой стенки) ударные волны достигают поверхности цилиндра, отражаются от нее и движутся обратно к оси образца уже как волны разгрузки. В результате интерференции волн разрежения возникают трещины.

Экспериментальные исследования наряду с численным моделированием таких процессов позволяют в широком диапазоне управлять структурообразованием и создавать принципиально новые материалы с ультрамелкозернистой структурой, градиентные, слоистые и другие материалы, обладающие уникальными свойствами и повышенными эксплуатационными характеристиками.

Цель данной работы заключается в численном моделировании на основе модели многокомпонентной среды взрывного компактирования трехкомпонентной

смеси алюминий – сера – углерод с учетом варьирования толщины слоя ВВ в осевом направлении.

Система уравнений, описывающая поведение инертных многокомпонентных сред в условиях динамического нагружения

Система уравнений, описывающая нестационарное адиабатическое движение каждого компонента в некотором фиксированном в пространстве объеме прочной сжимаемой смеси V , ограниченном поверхностью S , состоит из уравнений неразрывности, движения и энергии [4 – 6]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla \alpha_i \rho_i v_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i v_i}{dt} = \nabla \sigma_i + \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j R_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i E_i}{dt} = \sigma_i \varepsilon_i + \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где $\frac{d_i}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Здесь t – время, ρ_i – истинная плотность i -го компонента, равная массе i -го компонента в единице его объема, v_i – вектор скорости, E_i – удельная внутренняя энергия, ε_i – тензор скоростей деформаций, $\sigma_i = -P_i \delta_i + S_i$ – тензор напряжений, P_i – давление, S_i – девиатор напряжений, R_{ji} – интенсивность обмена импульсом между j -м и i -м компонентами, Φ_{ji} – интенсивность обмена энергией между j -м и i -м компонентами, N – число компонентов.

Доли объема смеси, занимаемые каждым компонентом [4]:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1, \quad (\alpha_i \geq 0), \quad \alpha_i = \rho_i^* / \rho_i,$$

где ρ_i^* – приведенная плотность (масса i -го компонента в единице объема среды).

Моделирование эволюции пористости в материале (как сжатия пор, так и их роста) проводится с помощью кинетической модели активного типа, определяющей непрерывное изменение удельного объема пор, непрерывно изменяющих свойства материала и вызывающих релаксацию напряжений [7]:

$$\frac{dV_{fi}}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{если } |P_{si}| \leq P_i^* \text{ или } (P_{si} > P_i^* \text{ и } V_{fi} = 0), \\ -\text{sign}(P_{si}) K_{fi} (|P_{si}| - P_i^*) (V_{2i} + V_{fi}), & \\ \text{если } P_{si} < -P_i^* \text{ или } (P_{si} > P_i^* \text{ и } V_{fi} > 0), \end{cases}$$

где $P_i^* = P_{ki} V_{1i} / (V_{fi} + V_{1i})$, P_{si} – давление в сплошной (неповрежденной) части компонента i смеси, V_{1i} , V_{2i} , P_{ki} , K_{fi} – экспериментально определяемые константы материала компонентов.

При исследовании деформирования многокомпонентных сред необходимо учитывать состояние и реакцию каждого компонента, а также, в отличие от гомогенной смеси, не только смещение внешних границ выделенного объема, но и смещение компонентов внутри выделенного объема смеси. В данной работе условие равенства давлений при взаимодействии компонентов рассматривается как

условие совместного деформирования компонентов в смеси, определяющее их объемные содержания [4]:

$$P = P_i(V_i, E_i) = P_j(V_j, E_j) = \dots = P_N(V_N, E_N).$$

Для вычисления температуры использовались соотношения [5, 8]

$$dT_i = \begin{cases} d(E_i - E_{0xi}) / c_{pi}, & \text{если } T_i < T_{mi}, \\ 0, & \text{если } T_i = T_{mi}, \\ d(E_i - E_{0xi} - \Delta H_{mi}) / c_{pi}, & \text{если } T_i > T_{mi}, \end{cases}$$

где удельная теплоемкость c_{pi} возрастает линейно с ростом температуры до температуры плавления вещества, E_{0xi} – «холодная» составляющая удельной внутренней энергии, T_{mi} – температура плавления и ΔH_{mi} – удельная теплота плавления i -го компонента.

Моделирование действия продуктов взрыва

Для математического описания процесса взрывного нагружения, помимо знания скорости детонации, необходимо знать зависимость действующего на цилиндрическую ампулу давления продуктов взрыва от времени. В данной работе предполагается, что процесс детонации стационарен, давление продуктов взрыва изменяется (падает) во времени прямолинейно.

При данных предположениях изменение давления можно описать уравнением [9–11]

$$P = P_0 - kt, t = 0 \dots \Delta t,$$

которое является уравнением прямой с угловым коэффициентом k и начальной ординатой P_0 . Угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k = \frac{P_0}{\Delta t}.$$

Тогда окончательный вид уравнения для вычисления давления продуктов взрыва на ампулу принимает вид

$$P = \begin{cases} P_0 - \frac{P_0}{\Delta t} t & \text{при } 0 \leq t < \Delta t, \\ 0 & \text{при } t \geq \Delta t, \end{cases} \quad \Delta t = \frac{\Delta}{c}, \quad c = \frac{D}{2},$$

где Δ – толщина слоя ВВ, c – средняя скорость волны разгрузки (оценка), D – скорость детонации. В [9–11] подобный подход применялся к моделированию действия продуктов взрыва на цилиндрическую ампулу с реакционноспособным наполнителем. При этом внимание уделялось воздействию ВВ на боковую поверхность ампулы, а возможное влияние осевого слоя, расположенного на верхнем торце ампулы, не рассматривалось.

Выбор параметров взрывного нагружения цилиндрической ампулы

Численно в осесимметричной постановке рассмотрена задача взрывного компактирования смеси алюминий – сера – графит в стальной цилиндрической ампуле на основе модели многокомпонентной среды. Смесь алюминий – сера разбавлялась инертном (графитом) в пропорции 2/1, где две массовые доли приходятся на графит, а одна – на смесь Al – S, для исключения реакционного взаимодействия

алюминия с серой. Экспериментальные исследования, проведенные в ИГиЛ СО РАН [9–12], показывают, что в рассмотренных условиях нагружения поведение данной смеси близко к инертному. Массовые доли компонентов в образце (смеси) брались следующие: Al – 11,5, S – 21,5, C – 67; объемные доли: Al – 9,55, S – 23,35, C – 67,1. Пористость смеси составила 0,4 (отношение объема пор к общему объему). Высота цилиндрического образца смеси составила 64 мм, диаметр 14 мм. Толщина боковых стенок ампулы – 3 мм, верхней и нижней торцевых крышек – 10 мм. Высота ампулы H составила 84 мм, внешний диаметр ампулы – 20 мм (рис. 1, а).

Воздействие продуктов детонации взрывчатого вещества, окружающего ампулу, в расчетах моделировалось действием давления на верхний торец ампулы в вертикальном (осевом) направлении и на боковую поверхность ампулы в горизонтальном (радиальном) направлении. В осевом направлении воздействие началось с начального момента процесса, а в радиальном – по мере продвижения фронта детонации сверху вниз [9, 10]. Скорость детонации задавалась $D = 2,8$ км/с на основе экспериментальных данных [11]. Значение P_0 подбиралось на основе численных и экспериментальных оценок и составило 3,2 ГПа.

В расчетах варьировалась толщина слоя взрывчатого вещества Δ_z в осевом направлении, воздействующего на верхний торец ампулы, с целью изучения влияния данного параметра на конечную форму и размеры ампулы. Величина Δ_r для ВВ, действующего в радиальном направлении на боковую стенку ампулы, была постоянной и составила 18 мм.

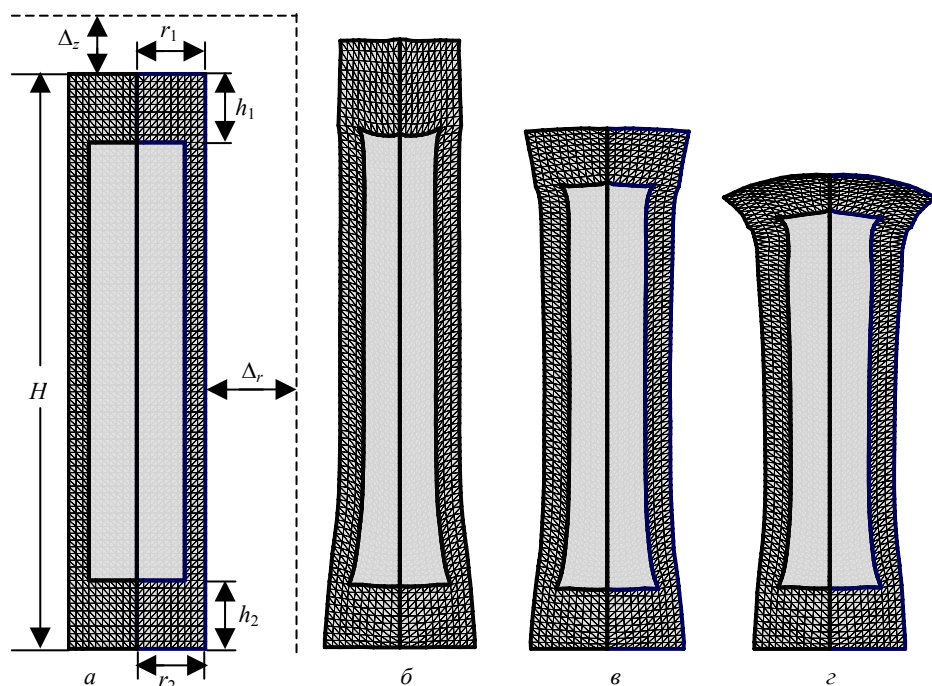


Рис. 1. Взрывное компактирование ампулы при разной толщине осевого слоя ВВ для начального момента времени (а) и для 80 мкс: $\Delta_z = 5$ мм (б); $\Delta_z = 30$ мм (в); $\Delta_z = 40$ мм (г)

На рис. 1, б–г показана динамика процесса взрывного компактирования цилиндрической ампулы с инертной смесью для различных толщин осевого слоя ВВ. Хронограммы процесса представлены для момента времени 80 мкс. Данный момент времени иллюстрирует заключительную стадию процесса взрывного компактирования инертной смеси в цилиндрической ампуле. Результаты расчетов показывают существенное влияние осевого слоя ВВ на итоговый результат взрывного нагружения. При незначительной толщине Δ_z влияние боковой нагрузки преобладает, что приводит к растягиванию ампулы в осевом направлении (рис. 1, б). При избыточной величине Δ_z имеет место дополнительная нагрузка на верхнюю область ампулы, что вызывает деформацию верхней крышки ампулы (сжатие в осевом направлении и растяжение – в радиальном) и части смеси. Анализируя рис. 1, можно сделать вывод, что для положительного результата процесса компактирования необходимо подбирать ряд параметров взрывного нагружения. Важным является выбор ВВ и его толщина. Недостаточная толщина ВВ, также как и избыточная, приведут к неудовлетворительным результатам взрывного компактирования, а именно, к недостаточно уплотненному конечному продукту либо к трещинам или его разрушению. Кроме того, избыточная толщина слоя ВВ в осевом направлении сильно искажает форму ампулы в процессе взрывного компактирования (рис. 1, г).

В таблице представлены результаты численных расчетов для нагружаемой цилиндрической ампулы с инертной смесью алюминий – сера – углерод при изменении толщины слоя ВВ в осевом направлении. Здесь Δ_z – толщина осевого слоя, H – высота ампулы после нагружения, h_1 , r_1 и h_2 , r_2 – соответственно высота и радиус верхней и нижней крышек ампулы.

Результаты расчетов

№	Δ_z , мм	H , мм	h_1 , мм	h_2 , мм	r_1 , мм	r_2 , мм
1	0	92,8	17,2	9	7,6	11,1
2	5	89	13,9	9	8,8	11,1
3	10	85,4	11,9	9	9,8	11,1
4	15	83,2	10,8	8,9	10,3	11,1
5	20	80,9	10	8,9	10,5	11,1
6	25	78,6	9,3	8,7	11	11,2
7	30	76,1	8,2	8,7	11,9	11,2
8	35	73,2	6,9	8,8	13,4	11,1
9	40	69,6	5,5	8,9	15,4	11

На рис. 2 и 3 представлены графики изменения параметров ампулы с инертной смесью, подвергаемой взрывному компактированию, в зависимости от толщины осевого слоя ВВ. Данные графики представлены для момента времени 80 мкс после начала процесса компактирования. Расчеты показывают, что волновые и деформационные процессы к данному моменту времени в целом завершаются, и полученные данные можно рассматривать как конечные после нагружения.

Результаты расчетов показывают, что изменение толщины слоя Δ_z в диапазоне 0÷13 мм не достаточно для компактирования ампулы в осевом направлении и приводит к росту конечной высоты ампулы. Кроме того, наблюдается рост высоты верхней крышки ампулы (рис. 2, кривая 1). При увеличении осевого слоя ВВ Δ_z проявляется тенденция к уменьшению конечной высоты ампулы и, как следствие, дополнительному компактированию смеси в осевом направлении. Использо-

вание толщины слоя ВВ Δ_z в диапазоне 35÷40 мм приводит к сильному искажению формы ампулы, в частности ее верхней крышки и смеси в этой области. Параметры ампулы, полученные для толщины слоя ВВ $\Delta_z = 30$ мм, хорошо согласуются с экспериментальными данными [9–12]. Результаты численных расчетов показали, что в данном случае степень компактирования пористого образца смеси составила примерно 0,97. Параметры нижней крышки ампулы изменяются незначительно для всех рассмотренных случаев.

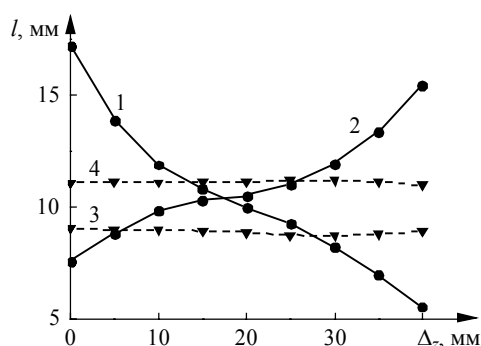


Рис. 2. Изменение высоты и радиуса крышек ампулы в зависимости от толщины осевого слоя ВВ: кр. 1, 2 – высота и радиус верхней крышки ампулы; кр. 3, 4 – высота и радиус нижней крышки ампулы

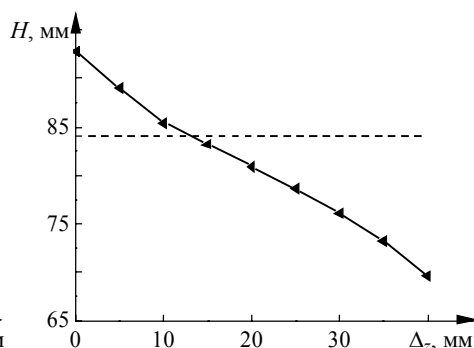


Рис. 3. Изменение высоты ампулы после нагружения в зависимости от толщины осевого слоя ВВ. Штриховая линия – начальное значение высоты ампулы

Заключение

Численно в осесимметричной постановке исследован процесс взрывного компактирования инертной трехкомпонентной смеси алюминий – сера – углерод в цилиндрической ампуле сохранения, с учетом влияния начальной толщины слоя ВВ в осевом направлении.

Установлено существенное влияние толщины рассматриваемого слоя ВВ на конечный результат взрывного компактирования. Недостаточная толщина слоя ВВ, также как и избыточная, могут являться причиной недостаточно уплотненного конечного продукта либо привести к образованию трещин или его разрушению.

Подобраны значения параметров взрывного нагружения (толщина осевого слоя при фиксированной толщине бокового слоя ВВ), при которых результаты численных расчетов соответствуют экспериментам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прюммер Р. Обработка порошковых материалов взрывом. М.: Мир, 1990. 128 с.
2. Селиванов В.В., Новиков С.А., Кобылкин И.Ф. Взрывные технологии. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. 648 с.
3. Даниленко В.В. Взрыв: физика, техника, технология. М.: Энергоатомиздат, 2010. 784 с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
5. Иванова О.В., Зелепугин С.А. Многокомпонентная модель среды для численного моделирования ударно-волнового воздействия на реагирующие пористые смеси // Изв. вузов. Физика. 2008. Т. 51. № 8/2. С. 180–189.

6. Куропатенко В.Ф. Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 1. С. 7–15.
7. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортков В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 446 с.
8. Зелепугин С.А., Никуличев В.Б. Численное моделирование взаимодействия серы и алюминия при ударно-волновом нагружении // ФГВ. 2000. Т. 36. № 6. С. 186–191.
9. Зелепугин С.А., Иванова О.В., Юношев А.С., Сильвестров В.В. Развитие реакции синтеза сульфида алюминия при взрывном нагружении цилиндрической ампулы // Докл. РАН. 2010. Т. 434. № 5. С. 643–647.
10. Иванова О.В., Зелепугин С.А., Юношев А.С., Сильвестров В.В. Экспериментально – теоретическое определение параметров взрывного нагружения цилиндрической ампулы // Изв. вузов. Физика. 2009. Т.52. № 7/2. С. 115–121.
11. Ivanova O.V., Zelepugin S.A., Yunoshev A.S., Silvestrov V.V. A multicomponent medium model for reacting porous mixtures under shock wave loading // J. Energ. Materials. 2010. V. 28. Iss. S1. P. 303–317.
12. Зелепугин С.А., Долгобородов А.Ю., Иванова О.В., Зелепугин А.С. Ударно-волновой синтез в твердых смесях. Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2012. 230 с.

Статья поступила 08.07.2013 г.

Ivanova O. V., Zelepugin S.A. SELECTION OF PARAMETERS FOR EXPLOSIVE LOADING OF CYLINDRICAL AMPOULES. We numerically simulate explosive compaction of an inert three-component mixture in a cylindrical conservation ampoule. The behavior of the mixture is described by a mathematical model of a multi-component medium. The attention is focused on simulating the action of explosion products on the ampoule. Parameters for explosive loading of cylindrical conservation ampoules were selected and the results were compared with the experiment.

Keywords: explosive compaction, model of a multicomponent medium, numerical simulation

Ivanova Oksana Vladimirovna (Department for Structural Macrokinetics TSC SB RAS)
E-mail: bliz3@yandex.ru

Zelepugin Sergey Alekseevich (Department for Structural Macrokinetics TSC SB RAS, Tomsk State University)
E-mail: szel@dsm.tsc.ru

УДК 533.65

А.М. Липанов, И.М. Васенин, Э.Р. Шрагер, А.Ю. Крайнов**МЕТОД ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА
В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ¹**

Представлен подход к прямому численному моделированию турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в криволинейных каналах. Приведены результаты прямого численного моделирования турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в канале с препятствием в виде поперечной пластины заданной высоты.

Ключевые слова: вязкий теплопроводный газ, уравнения Навье – Стокса, турбулентность, прямое численное моделирование.

Большим достижением в теории турбулентности явились прямые расчеты турбулентных течений на основе интегрирования уравнений Навье – Стокса [1]. Однако все они проводились для течений, ограниченных прямыми стенками. Из экспериментов и теоретических расчетов известно о возникновении вихрей и турбулентности за плохо обтекаемыми телами. Прямые расчеты турбулентных течений в каналах с криволинейными границами авторам не известны. Для решения задач расчета течений в каналах с переменным контуром целесообразно применять системы координат, связанные с этим контуром. Координатная сетка должна быть достаточно гладкой, чтобы не вносить ошибок в аппроксимацию дифференциальных уравнений. Оптимальной является ситуация, при которой и границы, и координатная сетка описываются аналитическими функциями.

Пусть требуется решить задачу о турбулентном течении в канале с двумя криволинейными противолежащими стенками. Будем рассматривать канал, координаты стенок которого не изменяются в направлении, перпендикулярном некоторой плоскости. В то же время сечение канала упомянутой плоскостью является криволинейным. В таком канале удобно ввести декартову координату z в направлении, перпендикулярном плоскости, и не зависящие от z ортогональные криволинейные координаты q_1 и q_2 в сечении канала плоскостью $z = const$. Если при этом каждая часть границы криволинейной области совпадает с соответствующей координатной линией, то при конформном отображении этой области в прямоугольник плоскости q_1, q_2 в силу сохранения углов при конформном отображении получим ортогональную прямоугольную систему координат. Введенная таким образом система координат q_1, q_2, z будет прямоугольной декартовой системой в трехмерном пространстве.

В качестве примера подходящего изображения рассмотрим отображение полуплоскости с выброшенным отрезком на полуплоскость. Если из полуплоскости $\text{Im } \xi > 0$ исключить отрезок $(a, a+h)$, то такое отображение дается формулой

¹ Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Кадры» на 2009–2013 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России, Государственное соглашение № 14.В37.21.0378.

$$\omega = \sqrt{(\xi - a)^2 + h^2} + a, \quad (1)$$

где $\omega = q_1 + iq_2$, $\xi = x + iy$.

При этом прямым линиям $q_2 = \text{const}$ в плоскости q_1, q_2 в плоскости x, y соответствуют линии

$$y = q_2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{(x - a)^2 + q_2^2}},$$

а прямым $q_1 = \text{const}$ в плоскости q_1, q_2 — линии

$$x = a + (q_1 - a) \sqrt{1 - \frac{h^2}{(q_1 - a)^2 + y^2}}.$$

Эти линии в плоскости q_1, q_2 образуют прямоугольную сетку, а в плоскости x, y — криволинейную ортогональную систему координат (рис. 1). При этом линии $q_2 = 0$ соответствует линия $y = 0$ в плоскости x, y .

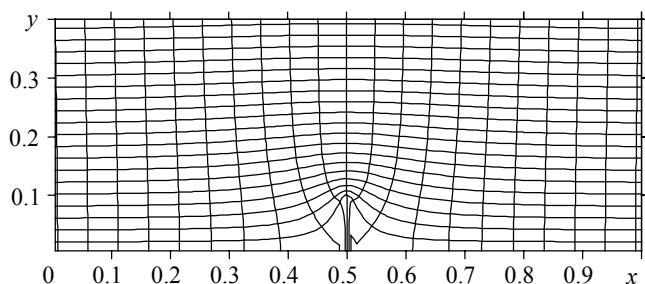


Рис. 1. Сетка координат на плоскости x, y

Производная $\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{(\xi - a)}{\sqrt{(\xi - a)^2 + h^2}}$ обращается в нуль при $\xi = a$ и в бесконеч-

ность при $\xi = a + ih$. Если рассматривать любую часть области при $q_2 > 0$, то отображение везде будет аналитическим.

Приняв за границы канала в области q_1, q_2 две прямых линии $q_{11} = \text{const} > 0$ и $q_{12} = \text{const} > q_{11}$, в области x, y получим две криволинейные границы, между которыми отображение будет аналитической функцией. Если взять $q_{12} \gg 0$, то верхняя граница в плоскости x, y будет близка к прямой линии. Меняя высоту исключенного отрезка h и величину q_{11} , можно изменять высоту и кривизну границы в области максимума, исследовать поведение решений уравнений Навье — Стокса в зависимости от параметров препятствия. Однако главное достоинство введенного отображения заключается в преобразовании криволинейного канала в прямоугольный канал в координатах q_1, q_2, z . Отметим, что рассматриваемое отображение описывает течение идеальной несжимаемой жидкости с линиями тока $q_2 = \text{const}$, которые сгущаются в области препятствия. Последнее обстоятель-

ство является немаловажным для повышения точности численного решения уравнений Навье – Стокса.

Аналогично конформное отображение можно использовать для канала прямоугольного сечения, который получается из ограничения рассмотренной выше области двумя плоскостями $z_1 = const$ и $z_2 = const$. Полученная область в результате описанного выше конформного отображения также будет прямоугольной областью в трехмерном пространстве.

Уравнения Навье – Стокса в криволинейных ортогональных координатах широко используются при решении задач гидродинамики. В наиболее общем виде они приведены в [1], где для случая вязкости, не зависящей от температуры, они записаны в дивергентной форме. В этой записи для учета преобразования координат применяются коэффициенты Ляме [2].

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \quad H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} \quad (2)$$

Запишем систему уравнений Навье – Стокса в криволинейной системе координат q_1, q_2, z , в которой координаты q_1 и q_2 задаются преобразованием (1). Выделяя в (1) действительную и мнимую части и решая полученную систему уравнений относительно x и y , найдем

$$x = a + \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left[(q_1 - a)^2 - q_2^2 - h^2 \right] + \sqrt{\left[(q_1 - a)^2 - q_2^2 - h^2 \right]^2 + 4(q_1 - a)^2 q_2^2} \right]},$$

$$y = \frac{(q_1 - a)q_2}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[\left[(q_1 - a)^2 - q_2^2 - h^2 \right] + \sqrt{\left[(q_1 - a)^2 - q_2^2 - h^2 \right]^2 + 4(q_1 - a)^2 q_2^2} \right]}}. \quad (3)$$

Уравнения (3) дают нам искомые связи $x = f_1(q_1, q_2)$, $y = f(q_1, q_2)$. С их помощью по формулам (2) можно вычислить коэффициенты Ляме. Однако последнее легче получить, если заметить, что для конформного преобразования $\xi = f(\omega)$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega}\right)^2,$$

а $z = q_3$ не зависит от q_1, q_2 . Поэтому

$$H_1 = H_2 = \left| \frac{d\xi}{d\omega} \right|, \quad H_3 = 1. \quad (4)$$

Замечая, что равенства (4) не зависят от конкретного вида конформного отображения, в дальнейшем введем обозначения

$$H_1 = H_2 = H, \quad H_3 = 1. \quad (5)$$

Для отображения (1) $\frac{d\xi}{d\omega} = \frac{\omega - a}{\sqrt{(\omega - a)^2 - h^2}}$. Откуда получаем

$$\left| \frac{d\xi}{d\omega} \right|^2 = \frac{\omega - a}{\sqrt{(\omega - a)^2 - h^2}} \cdot \frac{\bar{\omega} - a}{\sqrt{(\bar{\omega} - a)^2 - h^2}}.$$

Раскрывая обозначения ω и $\bar{\omega}$, найдем

$$\left| \frac{d\xi}{d\omega} \right|^2 = \frac{(q_1 - a)^2 + q_2^2}{\sqrt{\left[\left((q_1 - a)^2 + q_2^2 \right) \right]^2 - q \left[\left((q_1 - a)^2 + q_2^2 \right) \right]^2 \cdot h^2 + h^4}}. \quad (6)$$

Запишем уравнения Навье – Стокса в системе координат q_1, q_2, z . Запись произведем, учитывая коэффициенты Ляме (5) и не подставляя для краткости конкретных выражений для H . Такой подход позволяет получить уравнения, справедливые для произвольного конформного отображения $\xi = f(\omega)$.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho H^2 + \frac{\partial}{\partial q_1} \rho V_{q_1} H + \frac{\partial}{\partial q_2} \rho V_{q_2} H + \frac{\partial}{\partial q_3} \rho V_{q_3} H^2 = 0, \quad (7)$$

где ρ – плотность жидкости; $V_{q_1}, V_{q_2}, V_{q_3}$ – проекции скорости жидкости на оси q_1, q_2, q_3 соответственно, $q_3 = z$.

Уравнения движения запишутся в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H^2 \rho V_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} H \rho V_{q_1}^2 + \frac{\partial}{\partial q_2} H \rho V_{q_1} V_{q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \rho V_{q_1} V_{q_3} = \\ & = \rho V_{q_2}^2 \frac{\partial H}{\partial q_1} - \rho V_{q_1} V_{q_2} \frac{\partial H}{\partial q_2} + H^2 \rho F_{q_1} - H \frac{\partial P}{\partial q_1} - \frac{2}{3} H \frac{\partial}{\partial q_1} \mu \operatorname{div} \bar{\Omega} + 2H^2 (\operatorname{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H^2 \rho V_{q_2} + \frac{\partial}{\partial q_1} H \rho V_{q_1} V_{q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \rho V_{q_2}^2 + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \rho V_{q_2} V_{q_3} = \\ & = \rho V_{q_1}^2 \frac{\partial H}{\partial q_2} - \rho V_{q_1} V_{q_2} \frac{\partial H}{\partial q_1} + H^2 \rho F_{q_2} - H \frac{\partial P}{\partial q_2} - \frac{2}{3} H \frac{\partial}{\partial q_2} \mu \operatorname{div} \bar{\Omega} + 2H^2 (\operatorname{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H^2 \rho V_{q_3} + \frac{\partial}{\partial q_1} H \rho V_{q_1} V_{q_3} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \rho V_{q_2} V_{q_3} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \rho V_{q_3}^2 = \\ & = H^2 \rho F_{q_3} - H^2 \frac{\partial P}{\partial q_3} - \frac{2}{3} H^2 \frac{\partial}{\partial q_3} \mu \operatorname{div} \bar{\Omega} + 2H^2 (\operatorname{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_3}. \end{aligned} \quad (10)$$

В этих уравнениях использованы обозначения: P – давление; $F_{q_1}, F_{q_2}, F_{q_3}$ – проекции массовых сил на оси q_1, q_2, q_3 соответственно; μ – вязкость жидкости;

$$\operatorname{div} \bar{\Omega} = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} H V_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} H V_{q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 V_{q_3} \right);$$

входящие в уравнения (8) – (10) проекции вектора $\operatorname{Div} \mu \cdot \Phi$ имеют вид

$$\begin{aligned}
(\text{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_1} &= \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} H \mu \Phi_{q_1 q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \mu \Phi_{q_2 q_1} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \mu \Phi_{q_3 q_1} \right] + \frac{\mu \Phi_{q_1 q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\mu \Phi_{q_2 q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_1}, \\
(\text{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_2} &= \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} H \mu \Phi_{q_1 q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \mu \Phi_{q_2 q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \mu \Phi_{q_3 q_2} \right] + \frac{\mu \Phi_{q_1 q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\mu \Phi_{q_1 q_1}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_2}, \\
(\text{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_3} &= \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} H \mu \Phi_{q_1 q_3} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \mu \Phi_{q_2 q_3} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \mu \Phi_{q_3 q_3} \right],
\end{aligned}$$

где компоненты тензора скоростей деформации

$$\begin{aligned}
\Phi_{q_1 q_1} &= \frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{V_{q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \Phi_{q_2 q_2} = \frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_2}}{\partial q_2} + \frac{V_{q_1}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \Phi_{q_3 q_3} = \frac{\partial V_{q_3}}{\partial q_3}, \\
\Phi_{q_1 q_2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_2}}{\partial q_1} + \frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_1}}{\partial q_2} - \frac{V_{q_1}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{V_{q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_1} \right], \quad \Phi_{q_1 q_3} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_3}}{\partial q_1} + \frac{\partial V_{q_1}}{\partial q_3} \right], \\
\Phi_{q_2 q_3} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_3}}{\partial q_2} + \frac{\partial V_{q_2}}{\partial q_3} \right], \quad \Phi_{q_3 q_1} = \Phi_{q_1 q_3}, \quad \Phi_{q_3 q_2} = \Phi_{q_2 q_3}, \quad \Phi_{q_2 q_1} = \Phi_{q_1 q_2}.
\end{aligned} \quad (11)$$

В заключение запишем уравнение энергии

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \rho H^2 E + \frac{\partial}{\partial q_1} H \rho V_{q_1} E + \frac{\partial}{\partial q_2} H \rho V_{q_2} E + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \rho V_{q_3} E = \\
&= -\frac{\partial}{\partial q_1} H V_{q_1} P - \frac{\partial}{\partial q_2} H V_{q_2} P - \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 V_{q_3} P + \frac{\partial}{\partial q_3} 2 \mu H (\Phi_{q_1 q_1} V_{q_1} + \Phi_{q_2 q_1} V_{q_2} + \Phi_{q_3 q_1} V_{q_3}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial q_2} 2 \mu H (\Phi_{q_1 q_2} V_{q_1} + \Phi_{q_2 q_2} V_{q_2} + \Phi_{q_3 q_2} V_{q_3}) + \frac{\partial}{\partial q_3} 2 \mu H^2 (\Phi_{q_1 q_3} V_{q_1} + \Phi_{q_2 q_3} V_{q_2} + \Phi_{q_3 q_3} V_{q_3}) - \\
&- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial q_1} H \mu V_{q_1} \text{div} \bar{\Omega} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial q_2} H \mu V_{q_2} \text{div} \bar{\Omega} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \mu V_{q_3} \text{div} \bar{\Omega} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial q_1} \lambda_{\text{эфф}} \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \lambda_{\text{эфф}} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \lambda_{\text{эфф}} \frac{\partial T}{\partial q_3} + \rho H^2 (V_{q_1} F_{q_1} + V_{q_2} F_{q_2} + V_{q_3} F_{q_3}). \quad (12)
\end{aligned}$$

Наряду с обозначениями, использованными выше, в (12) применены обозначения: $E = e_{\text{вн}} + |\bar{\Omega}|^2/2$ – полная энергия единицы массы газа; $\lambda_{\text{эфф}}$ – эффективный коэффициент теплопроводности, записанный с учетом излучения; T – температура газа; проекции тензора напряжений на оси криволинейных координат:

$$\begin{aligned}
F_{q_1} &= (2 \mu \Phi_{q_1 q_1}, 2 \mu \Phi_{q_2 q_1}, 2 \mu \Phi_{q_3 q_1}), \\
F_{q_2} &= (2 \mu \Phi_{q_1 q_2}, 2 \mu \Phi_{q_2 q_2}, 2 \mu \Phi_{q_3 q_2}), \\
F_{q_3} &= (2 \mu \Phi_{q_1 q_3}, 2 \mu \Phi_{q_2 q_3}, 2 \mu \Phi_{q_3 q_3}).
\end{aligned}$$

Система уравнений (7) – (12) замыкается выражением для внутренней энергии идеального газа

$$e_{\text{вн}} = c_v T, \quad (13)$$

и уравнением состояния идеального газа

$$P = \rho RT. \quad (14)$$

В качестве начальных условий для решения системы (7) – (14) в начальный момент времени $t = 0$ задаются скорости

$$\begin{aligned} V_{q_1}(0, q_1, q_2, q_3) &= V_{q_1,0}(q_1, q_2, q_3), \quad V_{q_2}(0, q_1, q_2, q_3) = V_{q_2,0}(q_1, q_2, q_3), \\ V_{q_3}(0, q_1, q_2, q_3) &= V_{q_3,0}(q_1, q_2, q_3), \end{aligned} \quad (15)$$

а также давление

$$P(0, q_1, q_2, q_3) = P_0(q_1, q_2, q_3)$$

и температура

$$T(0, q_1, q_2, q_3) = T_0(q_1, q_2, q_3).$$

Рассматриваются два случая. В первом случае исследуется течение между верхней и нижней криволинейными поверхностями, неограниченными в направлении z , в качестве граничных условий на нижней и верхней границах используются условия прилипания:

$$V_{q_1}|_{\Gamma_1} = 0, \quad V_{q_2}|_{\Gamma_1} = 0, \quad V_{q_3}|_{\Gamma_1} = 0, \quad V_{q_1}|_{\Gamma_2} = 0, \quad V_{q_2}|_{\Gamma_2} = 0, \quad V_{q_3}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (16)$$

Граничные условия для температуры на этих границах задается из условия адиабатичности:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial q_2} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial q_2} \right|_{\Gamma_2} = 0. \quad (17)$$

На боковых границах задаются условия симметрии [1]:

$$\begin{aligned} V_{q_1}|_{z=0} &= V_{q_1}|_{z=h}, \quad V_{q_2}|_{z=0} = V_{q_2}|_{z=h}, \quad V_{q_3}|_{z=0} = V_{q_3}|_{z=h}, \\ p|_{z=0} &= p|_{z=h}, \quad \rho|_{z=0} = \rho|_{z=h}. \end{aligned} \quad (18)$$

В другом случае рассматривается течение в канале прямоугольного сечения при наличии стенок, перпендикулярных оси z . На этих стенках используются условия прилипания:

$$V_{q_1}|_{z=0} = V_{q_1}|_{z=h} = 0, \quad V_{q_2}|_{z=0} = V_{q_2}|_{z=h} = 0, \quad V_{q_3}|_{z=0} = V_{q_3}|_{z=h} = 0, \quad (19)$$

и условия адиабатичности для температуры:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial q_3} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial q_3} \right|_{z=h} = 0.$$

На входе в канал задаются компоненты вектора скорости и температура. Полагая $V_{q_2}|_{q_1=0} = 0$, $V_{q_3}|_{q_1=0} = 0$ и согласно рекомендации [1]

$$V_{q_1}|_{q_1=0} = f(q_2, q_3) + C_1(P_0 - \bar{P})f_1(q_2, q_3), \quad T|_{q_1=0} = f_3(q_2, q_3), \quad (20)$$

где $f(q_2, q_3)$ – заданное распределение скорости V_{q_1} во входном сечении, $f_3(q_2, q_3)$ – заданное распределение температуры. Слагаемое $C_1(P_0 - \bar{P})$ в выражении для $V_{q_1}|_{q_1=0}$ добавляется согласно [3] с целью вывода за пределы области решения возмущений, достигших левой границы. C_1 – константа порядка едини-

цы, определяемая равенством

$$C_1 = \frac{1}{k \cdot M}, \quad (21)$$

где k – показатель адиабаты, M – число Маха на входе.

Выражение $(P_0 - \bar{P})$ есть разность между текущим значением давления как функции координат q_2, q_3 на входе в канал и средним значением этого давления при $q_1 = 0$.

Поскольку $\iint P_0 dq_2 dq_3 = \bar{P}$, в среднем $P_0 - \bar{P}$ равно нулю. Однако в каждой точке (q_2, q_3) разность $P_0 - \bar{P}$ отлична от нуля и способствует выводу возмущений за пределы области решения [1].

На выходе из канала в дозвуковом потоке задаем одно условие

$$P_L = P_{\text{нар}} + C_2 (\dot{m}_{\text{ср}} - \dot{m}_L),$$

где P_L – давление на выходе из канала, $P_{\text{нар}}$ – наружное давление, $\dot{m}_{\text{ср}}$ – средний в момент времени t расход на длине канала, $\dot{m}_L = \iint_{S(L)} \rho V_{q_1} dq_2 dq_3$ – расход на выходе канала.

Эти расходы соответствуют одному и тому же моменту времени t . Для расчета коэффициента C_2 используется выражение [3]

$$C_2 = \frac{k \cdot M_L}{2D + \dot{m}_{\text{ср}} \cdot M_L},$$

в котором D – половина расстояния в направлении координаты q_2 на выходе из канала, M_L – число Маха на выходе. Все остальные параметры на выходе из канала должны определяться путем экстраполяции значений этих параметров во внутренней части области решения, примыкающей к выходной границе канала [1].

При численном решении сформулированной выше задачи использовались подходы, предложенные в [1] для интегрирования уравнений Навье – Стокса в случае турбулентных течений. В основе этих подходов лежат высокоточные аппроксимации производных от параметров потока по пространственным переменным. При этом для интегрирования по времени применяются явные схемы вида

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^n \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^n (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right)^n (\Delta t)^3 + \dots, \quad (22)$$

в которых в правые части подставляются точные выражения для производных $\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} \right)^n$, вычисленные на n -м слое по времени с помощью дифференциальных уравнений Навье – Стокса.

В настоящей работе производные от параметров потока по пространству вычислялись с 8-м порядком аппроксимации. Производные по времени от параметров потока вычислялись по соотношению (22) с точностью до второго порядка. При этом вместо использования чрезвычайно громоздких аналитических выраже-

ний для вычисления $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)^n$ применялась центральная разность

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)^n = \frac{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{n+1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{n-1}\right]}{2\Delta t},$$

что позволило существенно упростить программу ЭВМ-расчетов и сократить время вычислений.

Приведем два примера расчетов на основе применения разработанной методики.

В первом примере рассматривается течение между двумя поверхностями, координаты точек которых не зависят от направления z . На нижней поверхности была расположена перегородка (турбулизатор), высота которой составляла $0,1b$, где b – расстояние между поверхностями. Число Рейнольдса описываемого течения было выбрано равным 50. Число Маха $M = 0,5$, число Прандтля $0,7$.

На рис. 2 показано распределение давления в плоскости (x, y) , перпендикулярной оси z . На рисунке видно, что за исключением резкого падения за преградой

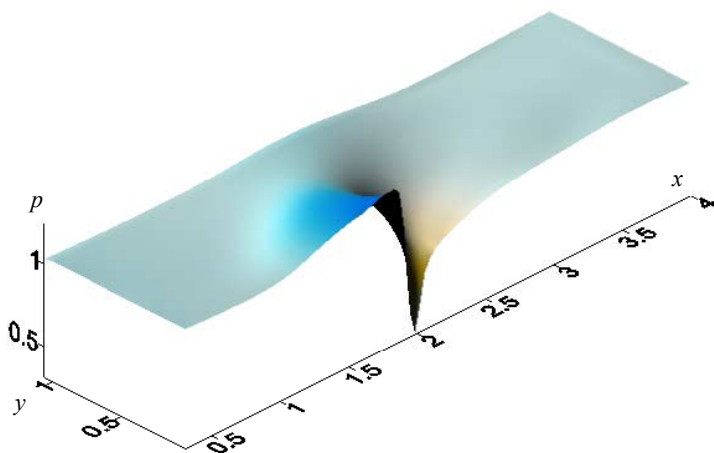


Рис. 2

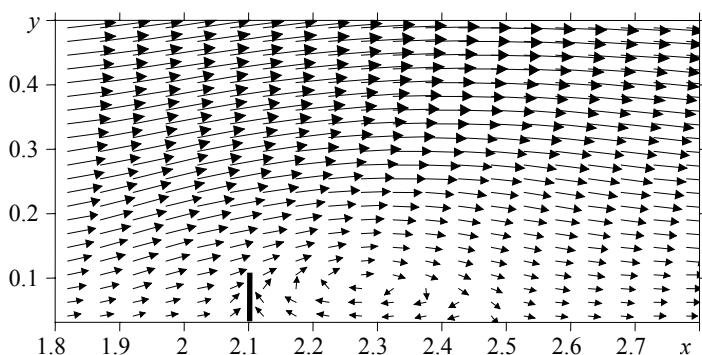


Рис. 3

изменение давления в канале носит плавный характер. На рис. 3 показаны векторы скорости в той же плоскости. Видно, что за преградой возникает вихрь. Этот вихрь является стационарным. Так как, согласно расчетам, скорости не имеют проекций на ось z , то этот вихрь представляет собой вихревую трубку с параметрами, не зависящими от z .

В другом примере рассчитывалось течение при числе $Re = 10^4$ в канале прямоугольного сечения. Высота турбулизатора составляла $0,2b$, где b – расстояние между стенками канала. На рис. 4 приведена картина мгновенного распределения давления, где наблюдаются нерегулярные колебания его величины, увеличивающиеся за турбулизатором. На рис. 5 показаны мгновенные значения проекций векторов скорости на плоскость (x, y) , а на рис. 6, а – проекции этих векторов на плоскость, параллельную турбулизатору и расположенную на расстоянии $0,5D$ позади него. Видно, что течение за турбулизатором носит нерегулярный вихревой характер. На рис. 6, б приведены проекции скорости на плоскость сечения канала, находящуюся на расстоянии D за турбулизатором. Видно, что уносимые потоком вихри распадаются. На рисунке наблюдаются вихревая пелена у дна канала и два небольших вихря у плоскости симметрии. Этот факт подтверждает гипотезу Колмогорова о распаде крупных вихрей на более мелкие [4].

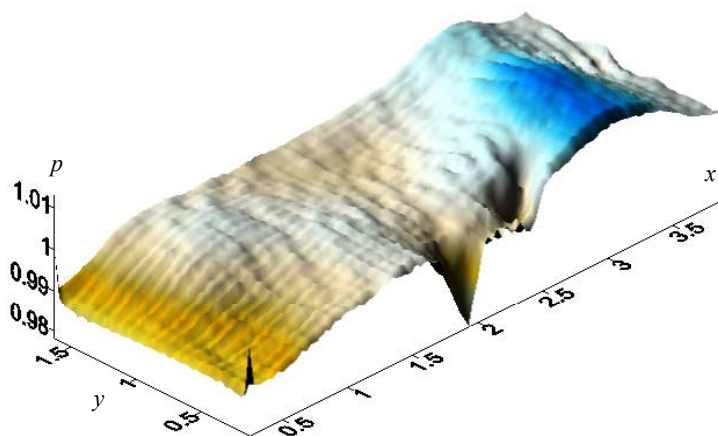


Рис. 4

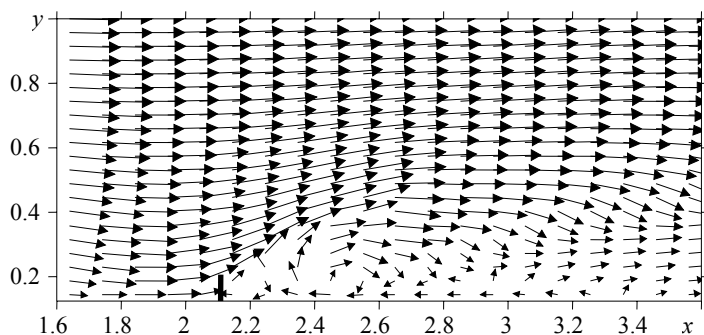


Рис. 5

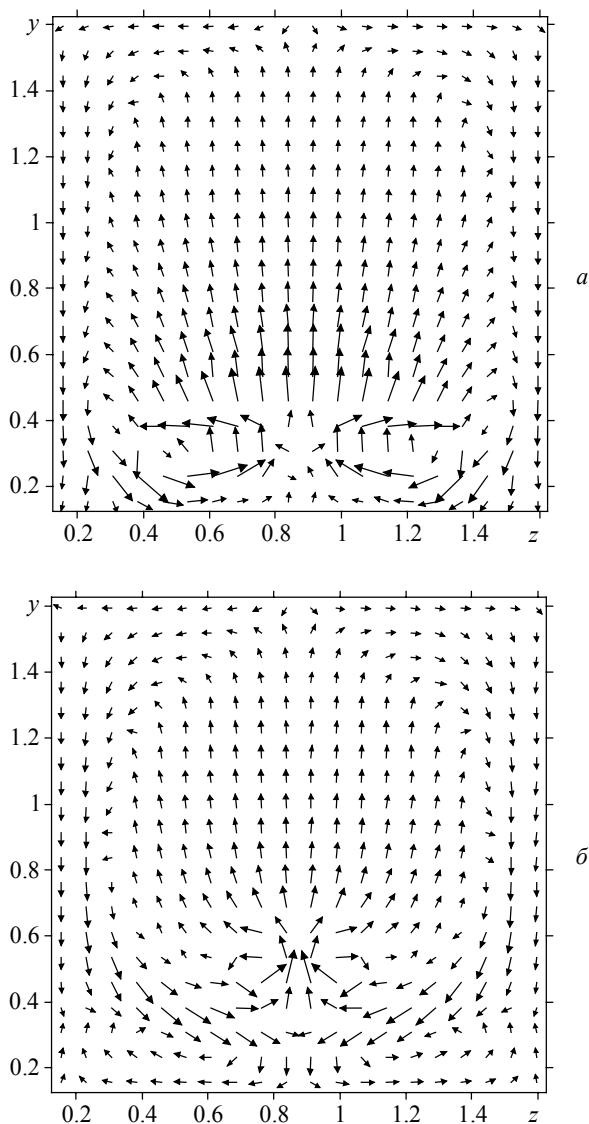


Рис. 6

Приведенные результаты рассчитывались на разностной сетке размером $64 \times 64 \times 160$. Такая сетка не позволяет рассчитывать еще более мелкие вихри, которые по теории Колмогорова обеспечивают диссипацию турбулентной энергии. Для того чтобы при $Re = 10^4$ проводить расчеты таких вихрей, необходима разностная сетка, содержащая порядка 10^9 ячеек. Сетки таких размеров можно создавать на кластере Томского государственного университета. Поэтому в качестве дальнейшего развития созданной методики в настоящее время производится ее распараллеливание на MPI.

Таким образом, разработан подход к прямому численному моделированию турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в криволинейных каналах. Представлены результаты прямого численного моделирования турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в канале с препятствием в виде поперечной пластины заданной высоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липанов А.М.* Теоретическая гидродинамика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
3. *Федорченко А.Т.* О проблеме выхода вихря через проницаемую границу расчетной области нестационарного дозвукового потока // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26. № 1. С. 114–129.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 732 с.

Статья поступила 18.09.2013г.

Liparov A. M., Vasin I. M., Shrager E. R., Krainov A. Y. A METHOD OF DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOWS OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS IN CURVED CHANNELS. An approach to direct numerical simulation of turbulent flows of viscous heat-conducting gas in curved channels is presented. Results of the direct numerical simulation of turbulent flows of viscous heat-conducting gas in a channel with an obstacle in the form of a transverse plate with a given height are presented.

Keywords: viscous heat-conducting gas, Navier-Stokes equations, turbulence, direct numerical simulation

LIPANOV Alexey Matveevich (Tomsk State University)

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

VASENIN Igor Mihailovich (Tomsk State University)

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

SHRAGER Ernst Rafailovich (Tomsk State University)

E-mail: sher@ftf.tsu.ru

KRAINOV Alexey Yurievich (Tomsk State University)

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

УДК 532.529, 519.63

Л.Л. Миньков, Ю.О. Степанова

ВЛИЯНИЕ ЦИРКУЛЯЦИОННОЙ ЗОНЫ НА СКОРОСТЬ ОСЕДАНИЯ МЕЛКИХ ЧАСТИЦ БИДИСПЕРСНОЙ СУСПЕНЗИИ¹

Методами численного моделирования исследуется циркуляционная зона за сферической частицей при ее обтекании ламинарным потоком несжимаемой жидкости. Проводится оценка увеличения скорости седиментации мелких частиц при совместном оседании мелких и крупных частиц за счет той доли мелких частиц, которые находятся в гидродинамическом следе крупных.

Ключевые слова: обтекание сферы, ламинарное течение, циркуляционная зона, бидисперсная суспензия, седиментация.

В горнодобывающей промышленности и в химическом производстве широко применяются гидроциклоны, в основе принципа работы которых лежит сепарация частиц твёрдой фазы во вращающемся потоке жидкости [1]. При работе малоразмерных гидроциклонов качество разделения частиц по размерам в области тонких фракций ухудшается, что ведет к росту сепарационной функции с уменьшением размера частиц [2, 3]. Аномальный рост сепарационной функции связывают с тем, что имеет место ускоренная седиментация мелких частиц, служащая причиной усиленного выноса мелкой фракции суспензии вместе с крупной фракцией из гидроциклона [3, 4]. Механизм процесса ускоренной седиментации мелких частиц не совсем изучен.

Для объяснения этого эффекта в работе [5] была предложена ячеистая модель, построенная на определении среднего времени пребывания мелкой частицы в ячейке, окружающей крупную частицу, и последующего определения средней скорости оседания мелкой частицы.

В [6] ускоренная седиментация мелких частиц объяснялась их удержанием в погранслое крупной частицы, которое имело место для чисел $Re < 25$. При последующем увеличении числа Рейнольдса наблюдается отрыв погранслоя, и мелкие частицы не в состоянии удерживаться в окрестности крупной частицы.

Другим объяснением ускоренного оседания можно считать захват крупной частицей мелких, попадающих в гидродинамический след, образующийся за крупной частицей при числах $Re > 25$ [7]. Целью данной работы является исследование циркуляционной зоны, возникающей при обтекании сферической частицы ламинарным потоком несжимаемой жидкости, и определение среднеобъемной скорости оседания мелких частиц при седиментации бидисперсной суспензии на основе ячеистой модели.

Математическая постановка задачи

Рассматривается задача о стационарном обтекании сферы ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости в диапазоне чисел Рейнольдса от 0 до 1000.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России 2009-2013 г.» Гос. Соглашение №14.B37.21.0872.

Система уравнений, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости для осесимметричного приближения в цилиндрической системе координат, имеет вид [8]

$$\begin{aligned} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu (\nabla^2 V_z), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Область интегрирования системы уравнений (1), представленная на рис. 1, ограничена входной границей AB, выходной границей BC, осью симметрии $AE \cup DC$, а также контуром тела ED.

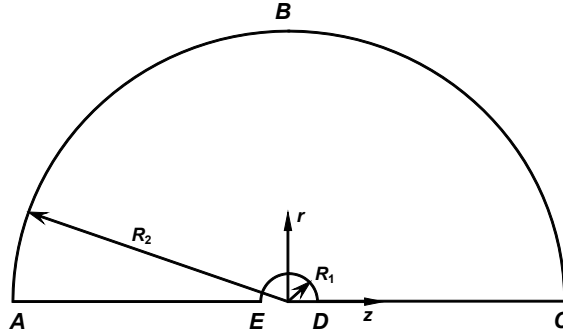


Рис. 1. Область численного интегрирования

На границе области задаются следующие граничные условия:

На твердой стенке (ED):

$$-R_1 < z < R_1, \quad r = \sqrt{R_1^2 - z^2}, \quad V_r = 0, \quad V_z = 0.$$

На входной границе (AB):

$$-R_2 < z < 0, \quad r = \sqrt{R_2^2 - z^2}, \quad V_r = 0, \quad V_z = U_0.$$

На выходной границе (BC):

$$0 < z < R_2, \quad r = \sqrt{R_2^2 - z^2}, \quad \frac{\partial V_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

На оси симметрии $AE \cup DC$:

$$-R_2 < z < -R_1, \quad R_1 < z < R_2, \quad V_r = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

Отношение радиусов границ (ABC) и (ED) задавалось постоянным, $R_2/R_1 = 14$.

Метод решения задачи

Решение системы уравнений (1) проводилось конечно-разностным методом по схеме Патанкара [9] с использованием процедуры SIMPLE для согласования поля давления и поля скоростей жидкости и противопоточной схемы второго порядка точности для определения конвективных потоков.

Реализация указанного метода осуществлялась с помощью пакета программ ANSYS-Fluent 14.5. Для построения конечно-разностной сетки использовалась программа Gambit 2.3.16.

Для исследования сходимости численного решения были проведены расчеты по определению коэффициента сопротивления сферы $C_{D,i}$ на четырех равномерных сетках, в каждой из которых количество узлов в радиальном направлении (AE), (DC) и в окружном направлении (ED), (ABC) задавалось одинаковым: сетка № 1 – 2500 ячеек, № 2 – 10 000 ячеек, № 3 – 40 000 ячеек, № 4 – 160 000 ячеек. Результаты, полученные на сетке № 4, принимались за точное значение $C_{D,t}$.

В таблице приведена относительная погрешность коэффициента сопротивления сферы

$$\frac{|C_{D,i} - C_{D,t}|}{C_{D,t}} \cdot 100 \%,$$

полученная для $Re = 1; 10; 100; 1000$. Видно, что, в целом, сгущение разностной сетки ведет к уменьшению относительной погрешности вычислений. Дальнейшие расчеты проводились на сетке № 3.

Относительная погрешность вычисления коэффициента сопротивления сферы C_D

Re	Сетка № 1	Сетка № 2	Сетка № 3
1	1,68	0,23	0,003
10	1,52	0,03	0,14
100	6,02	1,47	0,34
1000	30,60	11,20	3,40

На рис. 2 показана зависимость коэффициент сопротивления сферы в зависимости от числа Рейнольдса. Точки соответствуют результатам численного решения, а сплошная кривая – данным экспериментальной формулы Шиллера – Науманна [9]:

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}).$$

Различие в результатах численного решения и данных эксперимента не превосходит 5 % для $Re \leq 200$. При более высоких значений числа Рейнольдса это различие возрастает и достигает 23,7 % для $Re = 1000$. Такое отклонение рассчитанной зависимости коэффициента сопротивления от экспериментальной можно объяснить тем, что при высоких значениях числа Re (порядка 1000) начинает проявляться турбулизация потока и течение в окрестности сферы перестает быть осесимметричным.

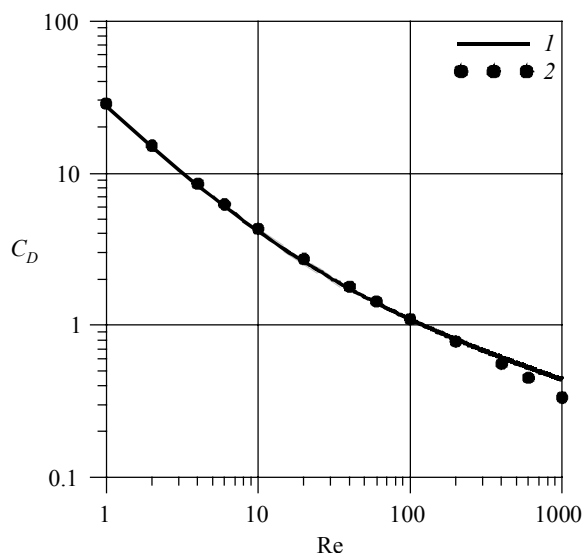


Рис. 2. Зависимость коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса.
1 – формула Шиллера – Науманна; 2 – численное решение

Зависимость размера циркуляционной зоны от чисел Рейнольдса

Известно, что при числах $Re > 25$ [7, 11] происходит образование циркуляционной зоны за кормовой частью сферы, которая обусловлена отрывом пограничного слоя от поверхности сферы. На рис. 3 приведена зависимость относительного объема циркуляционной зоны $f(Re) = v_{\text{цирк}}/v_{\text{сф}}$ от числа Рейнольдса Re . Размер циркуляционной зоны монотонно увеличивается при увеличении значения Re . Величина относительного объема циркуляционной зоны аппроксимируется полиномом второй степени в диапазоне $Re = 25 \div 1000$ с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9998$:

$$f(Re) = -0,258 + 1,017 \frac{Re}{100} - 3,78 \cdot 10^{-2} \left(\frac{Re}{100} \right)^2. \quad (2)$$

Как следует из формулы (2), циркуляционная зона начинает образовываться при $Re_* = 25,6$.

Размер циркуляционной зоны можно также характеризовать ее длиной, определяемой как расстояние от кормовой точки сферы D (рис. 1) до точки пересечения предельной линии тока циркуляционной зоны с осью симметрии, отнесенной к диаметру сферы. На рис. 4 приведена зависимость длины циркуляционной зоны $L(Re)$ от числа Рейнольдса. Результаты численного моделирования, показанные в виде кружочков, аппроксимируются с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9997$ зависимостью

$$L(Re) = 2,858 \exp \left(-\frac{28,778}{Re^{0,7}} \right).$$

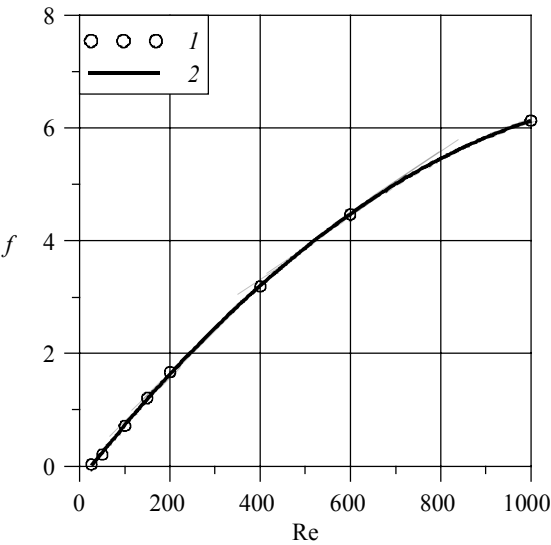


Рис. 3. Зависимость объема циркуляционной зоны от числа Рейнольдса.
1 – данные численного эксперимента; 2 – аппроксимационная кривая.

Результаты экспериментов, выполненных Танедой [12] для Re от 40 до 100, изображены на рис. 4 в виде треугольников. Видно хорошее согласование между расчетными и экспериментальными данными. С увеличением числа Рейнольдса в диапазоне от 10 до 1000 наблюдается увеличение длины циркуляционной зоны, скорость роста которой снижается при приближении значения Re к 1000.

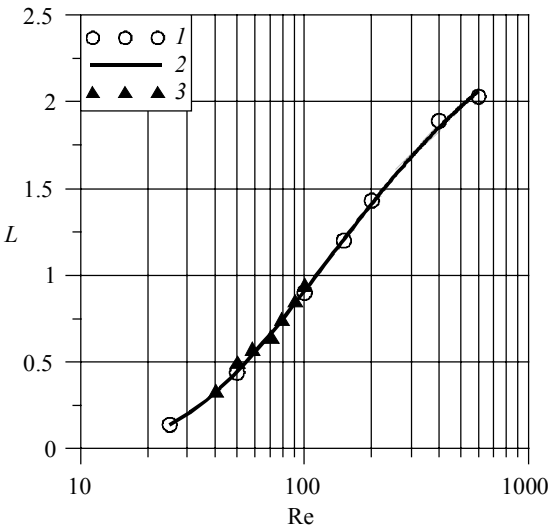


Рис. 4. Зависимость длины циркуляционной зоны от числа Рейнольдса.
1 – численный эксперимент; 2 – аппроксимационная кривая;
3 – данные эксперимента [12]

Скорость седиментации мелких частиц в бидисперсной суспензии

Рассмотрим седиментацию бидисперсной суспензии, состоящей из смеси крупных частиц диаметром d_c и мелких частиц диаметром d_f . Вокруг каждой крупной частицы построим сферическую ячейку радиуса R (рис. 5).

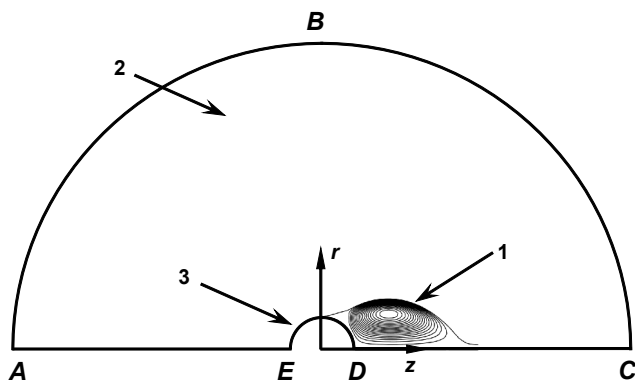


Рис. 5. Схема сферической ячейки: 1 – циркуляционная зона; 2 – свободный объем сферической ячейки; 3 – крупная частица

Предположим, что при совместном оседании мелкие частицы, попавшие в циркуляционную зону, образовавшуюся за крупной частицей, имеют скорость оседания такую же, как и крупная частица $U_c \sim (d_c)^2$, а другие мелкие частицы оседают со своей собственной скоростью $U_f \sim (d_f)^2$. Пусть рассматриваемая ячейка имеет объем $v_{яч}$, а циркуляционная зона – объем $v_{цирк} < v_{яч}$. Тогда среднеобъемная скорость оседания мелкой частицы в ячейке будет определяться выражением

$$\langle U_f \rangle = \frac{v_{сф} f(Re)}{v_{яч} - v_{сф}} U_c + \frac{v_{яч} - v_{сф} f(Re)}{v_{яч} - v_{сф}} U_f,$$

или

$$\frac{\langle U_f \rangle}{U_f} = \frac{v_{сф} f(Re)}{v_{яч} - v_{сф}} \left(\frac{d_c}{d_f} \right)^2 + \frac{v_{яч} - v_{сф} f(Re)}{v_{яч} - v_{сф}}.$$

Поскольку объемная доля крупной частицы выражается через объем ячейки и объем самой частицы соотношением: $\alpha_c = v_{сф}/v_{яч}$, то

$$\frac{\langle U_f \rangle}{U_f} = \frac{1}{1 - \alpha_c} + \frac{\alpha_c f(Re)}{1 - \alpha_c} \left(\left(\frac{d_c}{d_f} \right)^2 - 1 \right). \quad (3)$$

Как видно из формулы (3), средняя скорость оседания мелких частиц увеличивается пропорционально отношению квадратов диаметров крупной и мелкой частиц, что находится в согласии с экспериментальными данными работы [13], полученными для водо-песчаной суспензии в тарельчатой центрифуге. Из (2) и (3) также следует, что средняя скорость оседания мелких частиц будет монотонно возрастать с увеличением числа Рейнольдса и объемной доли крупных частиц.

Границы применимости формулы (3) определяются тем, что циркуляционная зона 1 (рис. 5) должна полностью находиться внутри сферической ячейки 2, т.е.

$d_c L(\text{Re}) + d_c/2 < R$, откуда следует ограничение на объемную долю крупных частиц в зависимости от числа Рейнольдса:

$$\alpha_c \leq \frac{1}{[1 + 2L(\text{Re})]^3}. \quad (4)$$

Как следует из (3), максимальный прирост скорости оседания мелких частиц при совместном их оседании с крупными частицами получается при максимально возможном значении α_c , которое определяется из (4) (знак равенства):

$\alpha_m(\text{Re}) = [1 + 2L(\text{Re})]^{-3}$. Тогда максимальное значение средней скорости седиментации мелких частиц в зависимости от Re имеет вид:

$$\frac{\langle U_f \rangle_m}{U_f} = \frac{1}{1 - \alpha_m(\text{Re})} + \frac{\alpha_m(\text{Re}) f(\text{Re})}{1 - \alpha_m(\text{Re})} k, \quad (5)$$

где $k = (d_c/d_f)^2 - 1$.

На рис. 6 показана зависимость максимального значения средней скорости седиментации мелких частиц от числа Re при различных значениях k . Видно, что зависимость носит немонотонный характер, что объясняется различной скоростью нарастания длины и объема циркуляционной зоны при увеличении числа Рейнольдса.

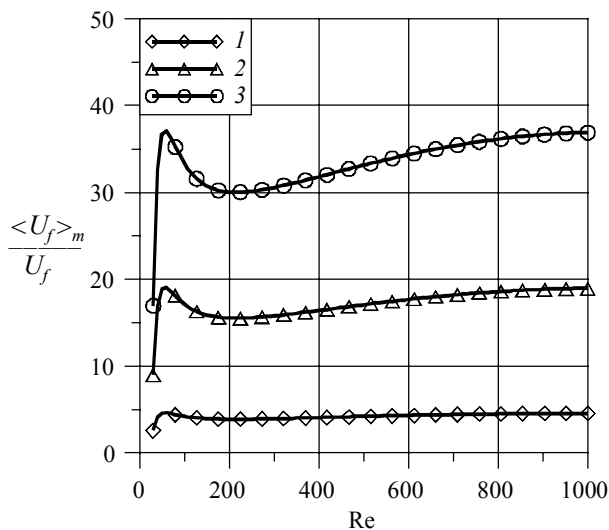


Рис. 6. Максимально возможная скорость седиментации мелких частиц при k : 1 – 100, 2 – 500, 3 – 1000

Заключение

На основе численного моделирования обтекания несжимаемой жидкостью сферической частицы получены характерные размеры (объем и длина) циркуляционной зоны, формирующейся в кормовой части сферы, в зависимости от числа Рейнольдса для $25 < \text{Re} < 1000$.

Получена формула для скорости оседания мелких частиц в присутствии оседающих крупных частиц (случай бидисперсной суспензии) в предположении, что мелкие частицы, попавшие в циркуляционную зону, оседают со скоростью крупных частиц. Получено выражение для максимального прироста скорости оседания мелких частиц в зависимости от числа Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терновский И.Г., Кутенов А.М. Гидроциклонирование. М.: Наука, 1994.
2. Heiskanen K. Particle Classification. London – Glasgow – New York – Tokyo – Melbourne – Madras: Chapman and Hall, 1993.
3. Finch J.A. Modeling a fish-hook in hydrocyclone selectivity curves // Powder Technol. 1983. No. 36. P. 127–129.
4. Neeße Th., Dück J., Kerkhoff Th. Feinstkornabscheidung im Hydrozyklon // Aufbereitungstechnik. 1996. V.37. No.9. P. 413–421.
5. Dück J., Minkov L., Neeße Th. A hydrodynamic model for enhanced sedimentation of small particles in a bidisperse suspension // Thermophysics and Aeromechanics. 2001. V. 8. No. 2. P. 259–269.
6. Schubert H. On the origin of «anomalous» shapes of the separation curve in hydrocyclone separation of fine particles // Part. Sci. Technol. 2004. V. 22. No.3. P. 219–234.
7. Ван-Дайк М. Альбом течения жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
9. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
10. Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // Z. Ver. Deutsch. Ing. 1935. V. 77. P. 318.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
12. Taneda S. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds number // J. Phys. Soc. Japan. 1956. V. 11. No. 10. P. 1104–1108.
13. Gerhart Ch., Dück J., Neeße Th. Grundlagen-untersuchungen zur behinderten Sedimentation polydisperser Suspensionen bei der Hydrostromklassierung. Teil I: Untersuchungen in einer Laborzentrifuge // Aufbereitungstechnik. 1999. B. 40. N 7. S. 328–334.

Статья поступила 17.08.2013 г.

Minkov L.L., Stepanova Y.O. INFLUENCE OF THE CIRCULATION ZONE ON SETTLING VELOCITY OF FINE PARTICLE IN BIDISPERSE SUSPENSION. The circulation zone formed behind a spherical particle under a flow around it in incompressible fluid is investigated on the base of numerical simulation. The increase in the settling velocity of fine particles in joint sedimentation of small and large particles due to the fraction of small particles that are in the hydrodynamic wake of large ones is estimated.

Keywords: flow past a sphere, laminar flow, circulation zone, bidisperse suspension, sedimentation.

Minkov Leonid Leonidovich (Tomsk State University)
E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Stepanova Yuliya Olegovna (Tomsk State University)

УДК 539.32+539.4.015

И.Ю. Смолин, М.О. Еремин, П.В. Макаров,
С.П. Буякова, С.Н. Кульков, Е.П. Евтушенко

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ХРУПКИХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ НА МЕЗОУРОВНЕ¹

Для описания механического отклика мезообъемов хрупких пористых материалов применен эволюционный подход, а сам материал рассматривается как нелинейная динамическая система. Определяющие нелинейные соотношения описывают накопление повреждений и их влияние на деградацию прочностных и упругих свойств каркаса. В рамках иерархического моделирования пористость мезомасштаба учтена явно, а на более мелких масштабах – интегрально как мера поврежденности. Этот тип мелкомасштабных повреждений учтен в определяющих уравнениях как дилатансия, в том числе сдвиговой природы. Рассмотрено два типа морфологии модельных пористых структур: перекрывающиеся сферические поры и перекрывающиеся сферические тела. Полученные результаты численного моделирования свидетельствуют о слабом влиянии морфологии пор на особенности развития поврежденности в каркасе. А усредненная диаграмма нагружения оказывается чувствительной не только к значению пористости, но и к морфологии пористой структуры. Аналогичную зависимость имеет и предел прочности.

Ключевые слова: *хрупкие пористые материалы, напряженно-деформированное состояние, поврежденность, разрушение, влияние структуры, морфология пор.*

Хрупкие пористые материалы широко встречаются как среди природных, так и среди искусственно создаваемых материалов. Большинству природных геоматериалов присуща исходная пористость или трещиноватость. Костные ткани обладают сложной пористой структурой. При изготовлении керамических материалов в результате особенностей технологических процессов они приобретают ту или иную степень пористости. Оксидные керамики находят широкое применение в разных технических устройствах, например в виде фильтров, теплоизоляционных материалов, а в биомедицинской сфере – как протезы (заменители) костной ткани.

Во многих случаях пористые керамики, костные ткани и геосреды представляют собой иерархически организованные многомасштабные системы. В полях внешних приложенных сил эволюция такой многомасштабной системы приводит к накоплению повреждений разных масштабов и формированию новых структур, т.е. усложнению самой системы. Одной из фундаментальных проблем при моделировании таких сред является построение определяющих уравнений, описывающих все аспекты механического поведения, включая деформационный отклик и особенности разрушения этих систем. Такие определяющие уравнения должны

¹ Работа выполнена в рамках проекта III.23.2.3 фундаментальных исследований СО РАН на 2013-2016 годы и частично при поддержке государственного контракта № 14.512.11.0004, соглашений № В 37.21.060 и № 8661.

учитывать как характерные черты локального накопления повреждений, так и эволюцию порового пространства в различных условиях нагружения.

Моделированию деформации пористых материалов посвящена обширная литература, например [1–8]. Ее можно разделить на несколько направлений: а) моделирование самой пористой структуры; б) определение эффективных упругих модулей пористых материалов; в) непосредственно численное моделирование процессов деформирования и разрушения пористых материалов на разных масштабных уровнях.

Эффективным подходом к изучению подобных систем является развиваемая авторами эволюционная методология [9–12]. С математической точки зрения описывающая нестационарное поведение твердых деформируемых тел полная система дифференциальных уравнений механики сплошной среды вместе с определяющими соотношениями представляет собой систему нелинейных динамических уравнений. Как показано в работах [9–12], решения этих уравнений механики деформируемого твердого тела демонстрируют все основные особенности эволюции нелинейных динамических систем, включая особенности медленной динамики, бифуркации и смену сценариев эволюции. Показано также, что разрушение на заключительной неустойчивой стадии развивается как катастрофа в режиме с обострением. С физической точки зрения, нагружаемый материал рассматривается как нелинейная динамическая многомасштабная система, в которой явно задаются нелинейные положительные и отрицательные обратные связи, регулирующие взаимодействия между формирующимся в материале напряженно-деформированным состоянием и его откликом на нагружение (накопление повреждений на разных масштабах, деградацию прочностных свойств). Подобный подход позволяет эффективно описать эволюцию свойств пористых материалов на разных уровнях, включая локализованное накопление повреждений и неупругих деформаций микро- и мезомасштаба, деградацию прочности, формирование трещин разных масштабов и макроскопическое разрушение (образование магистральных трещин).

Цель настоящей работы состоит в обсуждении подходов к моделированию пористой структуры реальных материалов (как геометрической задачи) и механического поведения (деформации, накопления повреждений и разрушения) мезообъемов пористых материалов как нелинейных систем.

Геометрические модели пористой среды

Следуя работам [1–3], рассмотрим две разные морфологии модельных пористых структур: перекрывающиеся сферические поры (ПСП) и перекрывающиеся сферические тела (ПСТ).

В первом случае модельный образец пористой среды состоит из сплошного тела, включающего в себя сферические пустоты разного радиуса в случайно выбранных точках заданного объема, и иногда называется моделью «швейцарского сыра». Согласно работе [2], поры становятся проницаемыми при пористости $p \approx 0,3$, в то время как каркас остается связанным до пористости $p \approx 0,97$. Этой морфологии соответствует в реальных материалах система изолированных пор при низкой пористости. Подобная пористая структура в керамике может быть обусловлена процессами коалесценции и сфероидизации пор на последней стадии спекания.

Во втором случае геометрическая модель строится заполнением объема сферическими частицами сплошного материала, которые располагаются в случайно

выбранных точках объема с разными радиусами и могут перекрываться. Эта модель является отражением процесса получения керамического материала спеканием идеальных сферических частиц (порошка). Поровое пространство, как указано в [2], является проницаемым, если пористость превышает $p \approx 0,03$, а каркас остается связанным до $p \approx 0,7$. Однако отметим, что создать связанные модельные структуры оказывается затруднительно уже при пористости более 60 %.

Для дальнейшего исследования методами численного моделирования были созданы модельные объекты указанных двух типов морфологии и для двух значений пористости 15 и 31,5 %. Изображения модельных структур в дискретном представлении расчетной сеткой из кубических ячеек (вокселей) представлены на рис. 1.

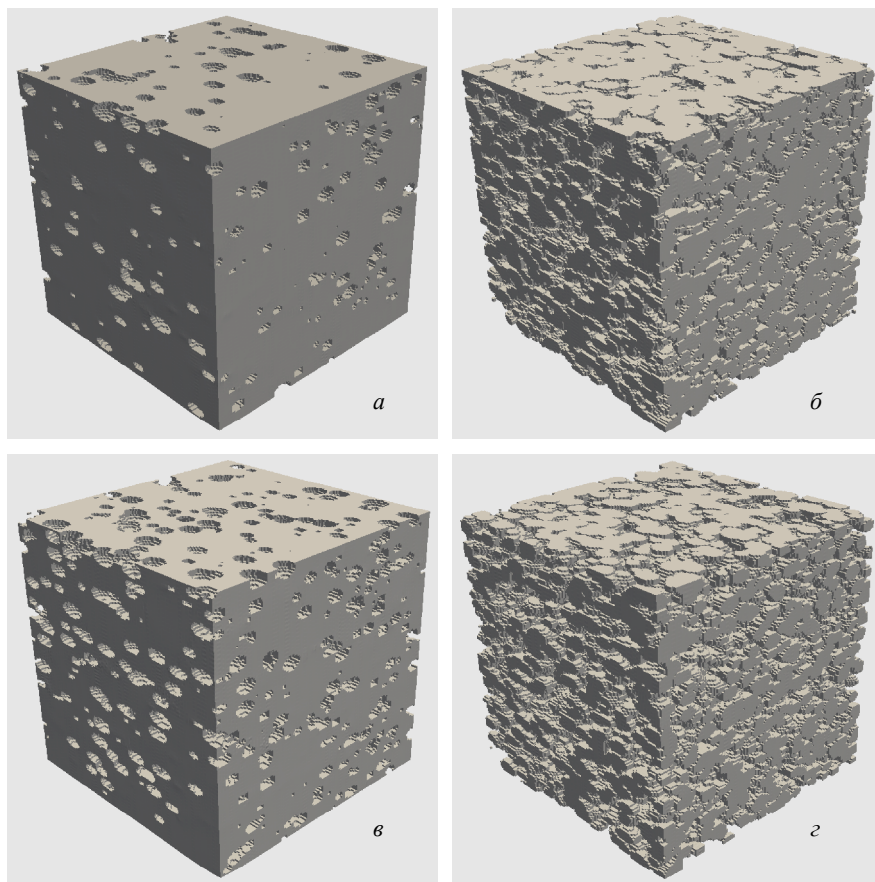


Рис. 1. Изображения модельных объемов с разной морфологией пористой структуры и пористостью: а – 15 % ПСП, б – 15 % ПСТ, в – 31,5 % ПСП, г – 31,5 % ПСТ

Насколько эти модельные структуры соответствуют реальности можно предположить, если сравнить их с фотографиями поверхностей образцов пористой циркониевой керамики, представленными на рис. 2. Керамика получена спеканием наноструктурного порошка диоксида циркония [13]. Видно, что в реальности встречаются поры разной морфологии, причем они могут присутствовать в одном

и том же материале. Это обусловлено разными факторами, например изменением режимов технологического процесса, разной формой отдельных частиц порошка и т.п. Тем больший интерес представляет изучение идеальных структур в численном эксперименте.

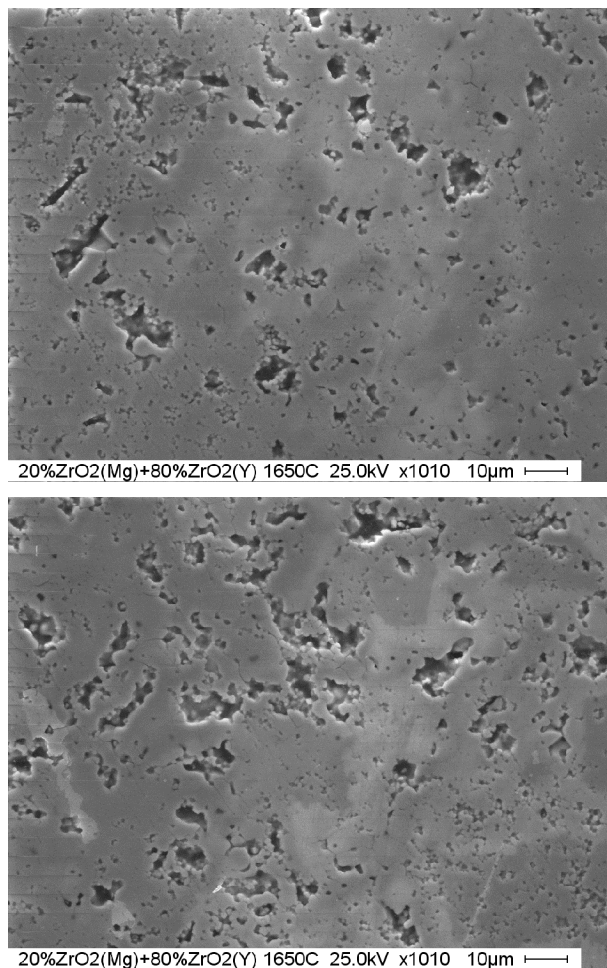


Рис. 2. Примеры пористых структур в керамике из диоксида циркония

Математическая постановка задачи в рамках эволюционного подхода

В соответствии с эволюционной концепцией описания процессов деформирования и последующего разрушения материалов [9–10] полная система уравнений при лагранжевом описании движения сплошной среды включает в себя фундаментальные законы сохранения массы (1), импульса (2) и энергии (3), геометрические соотношения (4) и две группы определяющих соотношений (5) и (6) – (9).

$$\rho V = \rho_0 V_0 ; \quad (1)$$

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ij,j} ; \quad (2)$$

$$\rho \dot{E} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}; \quad (3)$$

$$2\dot{\varepsilon}_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}, \quad 2\dot{\omega}_{ij} = v_{i,j} - v_{j,i}; \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + s_{ij}, \quad \dot{P} = -K(\dot{\theta} - \dot{\theta}^P),$$

$$\dot{s}_{ij} = 2\mu \left[(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^P) - \frac{1}{3}(\dot{\theta} - \dot{\theta}^P)\delta_{ij} \right] - s_{ik}\dot{\omega}_{kj} + s_{kj}\dot{\omega}_{ik}, \quad \theta = \varepsilon_{ii}; \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \text{если } f(\sigma_{ij}) \geq 0; \quad (6)$$

$$f(\sigma_{ij}) = -\alpha P + \sqrt{J_2} - Y; \quad (7)$$

$$g(\sigma_{ij}) = J_2 - \Lambda P(2Y + \alpha P) + const; \quad (8)$$

$$Y = Y_0(1 - D). \quad (9)$$

Здесь ρ_0 , ρ – начальное и текущее значение плотности материала; V_0 , V – начальное и текущее значение объема некоторой малой области материала; v_i – компоненты вектора скорости; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скорости деформации; E – внутренняя энергия единицы начального объема; точка над символом означает материальную производную по времени, а запятая в нижнем индексе – частную производную по соответствующей пространственной координате. В первой группе определяющих уравнений (5) содержится разложение тензора напряжений на шаровую (давление P) и девиаторную s_{ij} части, а также связь этих составляющих с параметрами деформированного состояния. При этом используется коротационная производная по времени Яуманна ($\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik}\dot{\omega}_{kj} - \sigma_{kj}\dot{\omega}_{ik}$), учитывающая поворот элемента среды как целого.

δ_{ij} означает символ Кронеккера, $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$ – второй инвариант девиатора тензора напряжений, K и μ – модули всестороннего сжатия и сдвига соответственно, α – коэффициент внутреннего трения, Λ – коэффициент дилатансии. Y обозначает сцепление (сдвиговую прочность среды при нулевом давлении), которое уменьшается от начального значения Y_0 по мере накопления поврежденности D . Пластический множитель $\dot{\lambda}$ в (6) определяется из условия удовлетворения напряжений условию текучести (7).

Эволюционные определяющие уравнения первой группы (5) задают связь между напряжениями и деформациями в релаксационной (скоростной) форме: скорости приращения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ пропорциональны скоростям приращения упругих деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^E$. Поскольку скорость полных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ складывается из скоростей упругих $\dot{\varepsilon}_{ij}^E$ и неупругих составляющих $\dot{\varepsilon}_{ij}^P$, то скоростная форма записи определяющих уравнений описывает рост напряжений, вызываемый увеличением полных деформаций, и релаксацию напряжений за счет развития неупругих деформаций. При $\dot{\varepsilon}_{ij}^P > \dot{\varepsilon}_{ij}$ в (5) $\dot{\sigma}_{ij} < 0$, идёт релаксация, реализуется отрицательная обратная связь, стабилизирующая деформационный процесс в состоянии динамического равновесия [10], определяемого текущим значением прочностных

параметров. При $\dot{\varepsilon}_{ij}^P < \dot{\varepsilon}_{ij}$ напряжения растут $\dot{\sigma}_{ij} > 0$, в этом случае непосредственно реализуется положительная обратная связь, приводящая к катастрофе – макроскопическому разрушению, в том числе в режиме с обострением, если учтена деградация прочности [12]. Определяющую роль в переходе эволюции прочности среды в сверхбыстрый катастрофический режим будут играть особенности накопления средой локализованных неупругих деформаций и соответствующая деградация физико-механических параметров.

Задачей эволюционных уравнений второй группы (6) – (9) является определение скоростей неупругих деформаций в уравнениях первой группы (5). В общем случае это кинетические уравнения, задающие скорости неупругой деформации и обеспечивающие релаксацию упругих напряжений в (5) [10]. В настоящей работе компоненты тензора скоростей неупругой деформации определены в соответствии с теорией пластического течения (6). В этом случае имеет место мгновенная релаксация напряжений на каждом временном шаге при численном решении уравнений. Предельная поверхность напряжений $f(\sigma_{ij})$ записана в форме Мизеса – Шлейхера (7) и является обобщением критерия текучести Кулона – Мора. Она позволяет учесть зависимость сдвиговой прочности от давления, что в свою очередь определяет разную прочность материала в условиях сжатия и растяжения. За основу взята модель Друккера – Прагера – Николаевского с неассоциированным законом течения, позволяющая описывать процесс дилатансии как независимый от внутреннего трения. В этом случае пластический потенциал $g(\sigma_{ij})$ не совпадает с функцией текучести и записывается в виде (8) [14, 15].

Разрушение материала в развиваемом подходе описано как процесс обвальной деградации прочности материала до нуля при формировании трещин на сверхбыстрой катастрофической стадии эволюции напряженно-деформированного состояния, следующей за стадией предразрушения, на которой постепенно копятся повреждения. Следует отметить, что среда остаётся консолидированной при $Y \rightarrow 0$. Следовательно, остаются справедливыми все уравнения неупругого деформирования (1) – (8), нет также необходимости вводить в модель прочностные параметры, определяющие «предельное» состояние материала. По развиваемым в настоящей работе представлениям предельное состояние должно формироваться в нагружаемой среде по мере накопления в ней неупругих деформаций – повреждений. Необходимо только задать величину исходной прочности материала Y_0 .

Функцию деградации среды (поврежденность) $D = D(t, \mu_\sigma, \varepsilon) \leq 1$ представим в виде зависимости от накапливаемой средой неупругой деформации $\varepsilon_{\text{тек}}$ и вида напряжённого состояния μ_σ (коэффициента Лоде – Надаи):

$$D = \int_{t_0}^t \frac{[H(\mu_\sigma)(\varepsilon_{\text{тек}} - \varepsilon_0^C)^2 + (1 - H(\mu_\sigma))(\varepsilon_{\text{тек}} - \varepsilon_0^T)^2] dt}{\varepsilon_*^2 [H(\mu_\sigma)t_*^C + (1 - H(\mu_\sigma))t_*^T]},$$

$$\varepsilon_* = \varepsilon_{0*}(1.01 + \mu_\sigma)^2, \quad \mu_\sigma = 2 \frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_3} - 1, \quad (10)$$

Здесь $H(x)$ – функция Хевисайда, $\varepsilon_{\text{тек}} = \varepsilon_{\text{инт}} + \alpha\theta$, $\varepsilon_{\text{инт}}$ – интенсивность тензора полных деформаций, ε_0^C , ε_0^T – начальные степени деформации на упругой стадии, по достижении которых в материале начинается накопление повреждений в областях сжатия и растяжения соответственно. Причём $\varepsilon_0^T \ll \varepsilon_0^C$, таким образом, повреждения в областях растяжения – сдвига ($\mu_\sigma < 0$) начинают копиться при су-

существенно меньших напряжениях, чем при $\mu_\sigma > 0$ в областях сжатия-сдвига. Скорости накопления повреждений $1/t_*^T$ для локальных областей, где $\mu_\sigma < 0$ также существенно выше, чем $1/t_*^C$ в областях сжатия-сдвига ($\mu_\sigma > 0$). Этот процесс дополнительно регулируется параметром $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\mu_\sigma)$ в (10). Таким образом, отклик среды на вид напряжённого состояния (её текущая прочность) формируется в среде в процессе её нагружения. Следовательно, прочностные параметры будут деградировать существенно быстрее в тех областях среды, где коэффициент Лоде – Надаи пониженный, $\mu_\sigma < 0$, т.е. преимущественный характер напряжённо-деформированного состояния определяется растяжениями-сдвигами. Этот отклик зависит также от истории нагружения. Если какая-то частица среды прежде испытывала, например, растяжение-сдвиг, а потом вид напряжённо-деформированного состояния изменился на сжатие-сдвиг, то процесс дальнейшего разрушения будет развиваться уже при пониженных прочностных параметрах, хотя и более медленно, в соответствии с кинетикой (10). ε_{0*} – параметр модели, t_* имеет смысл характерного времени процесса. S_1, S_2, S_3 – главные значения девиатора тензора напряжений.

Любое твёрдое тело под нагрузкой рано или поздно разрушается, причём макроскопическое разрушение обычно представляется как мгновенное, в то время как устойчивая стадия неупругого деформирования (стадия предразрушения) может быть весьма продолжительной [12]. Однако для квазихрупких сред в стеснённых условиях деформирования за счёт дилатансионных процессов сверхбыстрая закритическая стадия также может быть существенно затянута во времени [11, 12]. В модели эти процессы описаны зависимостью для меры накопления повреждений D и законом деградации.

Приведённые ниже результаты моделирования процессов неупругого деформирования и разрушения хрупких и квазихрупких сред получены решением выписанной системы уравнений в трехмерной постановке методом конечных разностей по схеме второго порядка точности, подробно описанной в работе [16].

Результаты расчётов и их обсуждение

Было проведено численное моделирование одноосного сжатия созданных модельных структур пористых материалов. Граничные условия, определяющие нагружение образцов, были выбраны следующие. На гранях, перпендикулярных оси x , задавались на начальном периоде плавно растущие и затем постоянные значения скорости, направленные в сторону образца. Другие компоненты вектора скорости не ограничивались, что позволяло этим граням расширяться при сжатии. На остальных гранях, параллельных оси x , поддерживались условия свободной поверхности (отсутствия напряжений).

Следует отметить, что такое плавное увеличение прилагаемой нагрузки, чтобы звуковая волна несколько раз прошла по образцу, позволяет в динамических задачах получить квазистатические решения [16]. Поскольку модель материала не учитывает скоростную чувствительность, то для экономии вычислительных затрат выбиралась такая скорость, чтобы при условии плавного наращивания скорости достигнуть заданной деформации за минимальное время.

Расчеты были выполнены со следующими физико-механическими свойствами модельной сплошной среды: модуль сдвига $G = 83$ ГПа, модуль объёмной упругости $K = 200$ ГПа (модуль Юнга $E = 220$ ГПа), плотность $\rho = 6$ г/см³, $Y_0 = 2200$ МПа, $\alpha = 0,4$, $\Lambda = 0,1$, что соответствует частично стабилизированному диоксиду цир-

кония в тетрагональной фазе. Значения для параметров выбранной кинетики накопления повреждений были подобраны следующие:

$$\varepsilon_0^* = 0,1, \quad t_*^T = 10^{-6}, \quad t_*^C = 10^{-4}, \quad \varepsilon_0^C = 0,005, \quad \varepsilon_0^T = 0,00125.$$

Размер расчетной области во всех случаях составил $9 \times 9 \times 9 \text{ мкм}^3$. Расчётная сетка – равномерная $150 \times 150 \times 150$ узлов. При этом в местах расположения пор задавался эффективный упругий материал, масса и упругие свойства которого были на несколько порядков меньше, чем соответствующие характеристики модельной сплошной среды.

На рис. 3 показаны усредненные диаграммы нагружения для всех четырех образцов. Видно, что для образцов с меньшей пористостью диаграммы идут выше, что согласуется с экспериментальными данными. Для одной и той же пористости ниже расположены диаграммы для ПСТ-морфологии. Эту же информацию для чисто упругого поведения сообщают авторы статей [1, 2]. Боле того, согласно [1] зависимость усредненного модуля Юнга E от пористости p для разных морфологий подчиняется степенной зависимости

$$E = E_d(1 - p)^m \quad (11)$$

где E_d – модуль Юнга плотного материала скелета, а показатель $m = 2$ для ПСП-структур и $m = 4$ для структур ПСТ. Этот показатель степени m авторы статьи называют показателем или индексом морфологии пористости. Полученные в наших расчетах значения этого показателя равны $m = 2,9$ для структур ПСП и $m = 4,0$ – для ПСТ. Отличие для случая сферических пор может быть вызвано тем, что объемы не были достаточно представительными, а также тем, что в модели поры распределены квазиравномерно, в то время как в реальности наблюдается ярко выраженная кластеризация (см. рис. 2). Хотя другие авторы для тех же пористых структур приводят иные зависимости, например [2]

$$\frac{E}{E_d} = \left(1 - \frac{p}{0,652}\right)^{2,23}, \quad \frac{E}{E_d} = \left(1 - \frac{p}{0,818}\right)^{1,65}$$

для структур ПСТ и ПСП соответственно.

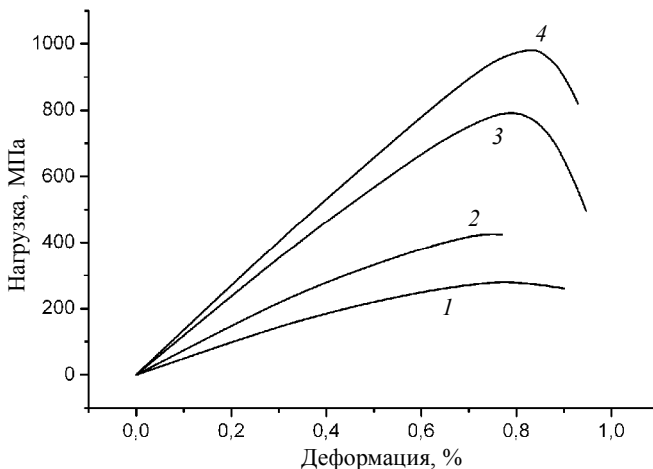


Рис. 3. Диаграммы нагружения для разных морфологий и значений пористости:
1 – 31,5 % ПСТ, 2 – 31,5 % ПСП, 3 – 15 % ПСТ, 4 – 15 % ПСП

Экспериментальные исследования на пористых материалах из диоксида циркония с различной пористостью в диапазоне 10–75 % и разным соотношением размеров пор и размеров зерна керамики свидетельствуют о том, что зависимость модуля Юнга керамических образцов от пористости лучше аппроксимируется экспоненциальной функцией $E = E_d \exp(-b \cdot p)$ [17]. Сравнение степенной и экспоненциальной аналитических зависимостей, а также полученные в наших расчетах данные изображены на рис. 4. Видно, что отличие экспоненциальной зависимости, полученной в результате аппроксимации экспериментальных данных, и степенной зависимости для ПСТ-морфологии незначительное в выбранном диапазоне пористости. Отличие экспоненциальной аппроксимации и степенной зависимости с показателем $m = 4$ для ПСТ-морфологии можно объяснить тем, что для большой и малой пористости морфология полученных образцов меньше соответствовала структуре перекрывающихся сферических тел. Полученные в наших расчетах данные также хорошо совпадают со степенной зависимостью для ПСТ-морфологии из [1].

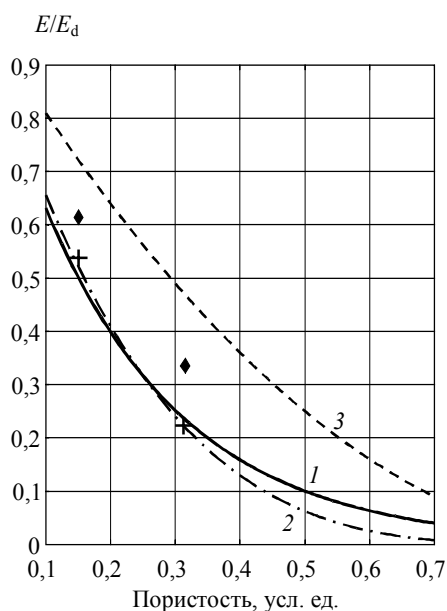


Рис. 4. Зависимость приведенного эффективного модуля упругости для пористых образцов: 1 — экспоненциальная аппроксимация для пористой керамики $ZrO_2(Y_2O_3)$ [17]; 2 — степенная аппроксимация для ПСТ ($m = 4$); 3 — степенная аппроксимация для ПСП ($m = 2$); + — данные расчетов для ПСТ; ♦ — данные расчетов для ПСП

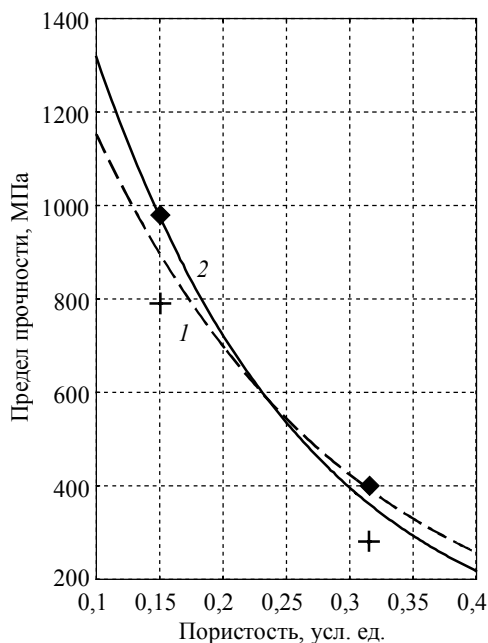


Рис. 5. Влияние пористости на предел прочности при сжатии пористых образцов: 1 — аппроксимация для керамики $ZrO_2(Y_2O_3)$ с размером пор, соизмеримым со средним размером зерна ($\sigma = 1900 \exp(-5p)$); 2 — то же с размером пор, значительно превышающим средний размер зерна ($\sigma = 2400 \times \exp(-6p)$); + — данные расчетов для ПСТ; ♦ — данные расчетов для ПСП

Представляет интерес также оценка зависимости прочностных характеристик от пористости. Экспериментальные данные для керамик из диоксида циркония в работе [17] также были аппроксимированы экспоненциальной функцией с разны-

ми параметрами в зависимости от соизмеримости размеров пор и размеров зерна. На рис. 5 показаны эти аппроксимирующие зависимости и нанесены точки, соответствующие данным, полученным в наших расчетах. Видно, что расчетные данные для ПСП-морфологии хорошо ложатся на экспериментальные кривые. Отметим, что о количественном совпадении говорить не стоит, поскольку прочностные характеристики и параметры модели накопления повреждений не подбирались из условия строгого соответствия определенным значениям прочности для беспористых образцов.

На рис. 6 представлены распределения поврежденности в разных образцах на момент, соответствующий последней точке расчетной диаграммы, т.е. непосредственно перед макроразрушением. Анализируя характер накопления повреждений в каркасе на мезоуровне, стоит отметить, что однозначных выводов о влиянии общей пористости и морфологии пор на форму и количество образующихся трещин выявить не удалось. Трещины преимущественно начинают образовываться около пор в местах высокой концентрации напряжений. Можно отметить, что в более тонком каркасе и большей кривизне пор ПСТ-структуры концентрация

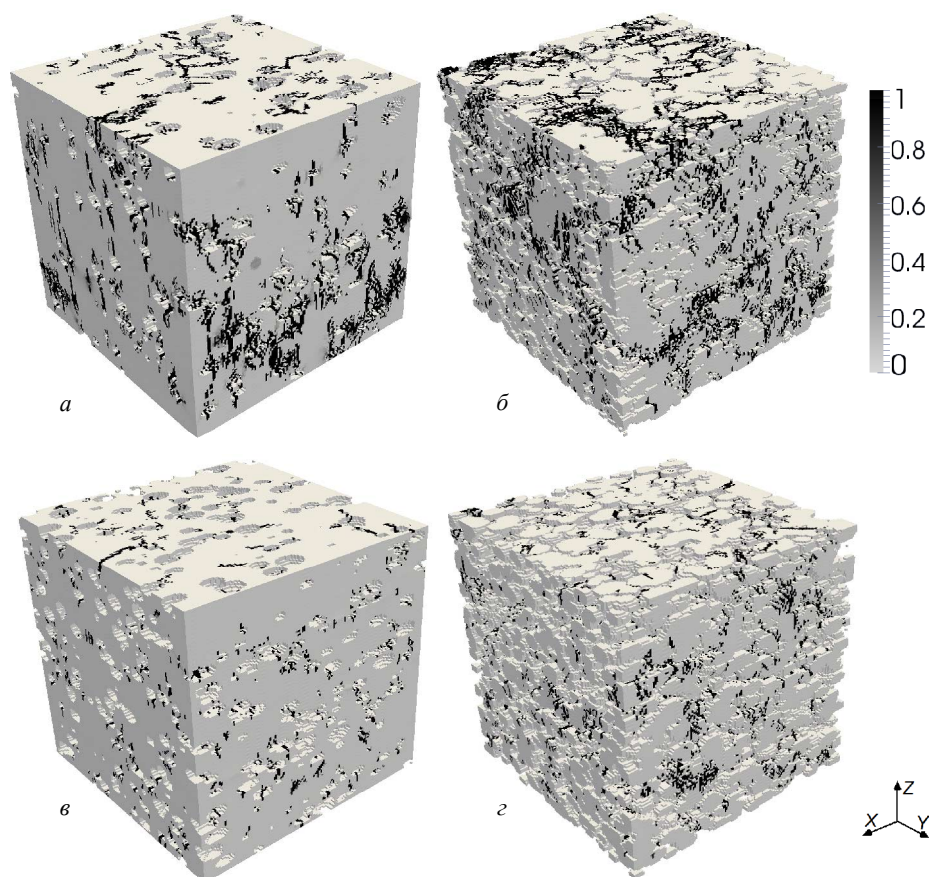


Рис. 6. Распределение поврежденности на поверхностных гранях исследуемых объемов для разных морфологий пор и пористости: а – 15 % ПСП, б – 15 % ПСТ, в – 31,5 % ПСП, г – 31,5 % ПСТ

напряжений выше. В связи с этим трещины начинают образовываться и прорастать через весь образец раньше.

Заключение

Проведенные расчеты показали, что для пористых керамических материалов, полученных спеканием наноструктурных порошков, хорошо проявили себя модельные структуры, созданные объединением перекрывающихся сферических тел. Такие геометрические модели лучше соответствуют реальным образцам пористой циркониевой керамики как по морфологии пор, так и по получаемой в моделировании механического поведения зависимости усредненного модуля Юнга от общей пористости.

Хорошее качественное и количественное совпадение расчетов с экспериментальными данными свидетельствует о том, что учет двух масштабов пористости: явный учет крупных пор на мезоуровне и интегральный учет пор и накапливаемых повреждений на микроуровне вполне достаточен в рамках иерархического моделирования. Некоторое несовпадение расчетов с данными эксперимента для случая сферических пор следует объяснить тем, что в модельных пористых структурах поры расположены квазиравномерно, в то время как в реальности наблюдается их кластеризация. Подобное моделирование с различной степенью кластеризации пор будет целью дальнейших исследований.

Применение эволюционного подхода, в рамках которого на стадии макроскопического предразрушения формируются области локализованных повреждений, позволило правильно описать образование областей повышенной поврежденности (трещин) на мезоуровне и влияние деградации в локальных областях материала на общий характер диаграммы нагружения, включая ее ниспадающую ветвь. Далее макроскопическое разрушение развивается как катастрофа в режиме с обострением.

В рассматриваемой модели отклик среды на вид напряженно-деформированного состояния формируется в среде в ходе эволюции ее локальной прочности. Нет необходимости специально задавать различные прочности для условий сжатия и растяжения.

Расчеты выполнены на высокопроизводительном кластере СКИФ-Cyberia Томского государственного университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bruno G., Efremov A.M., Levandovskyi A.N., Clausen B. Connecting the macro- and microstrain responses in technical porous ceramics: modeling and experimental validations // J. Mater. Sci. 2011. V. 46. P. 161 – 173.
2. Roberts A. Garboczi E. Elastic properties of model porous ceramics // J. Am. Ceram. Soc. 2000. V. 83. № 12. P. 3041 – 3048.
3. Torquato S. Random Heterogeneous media: microstructure and improved bounds on elastic properties // Appl. Mech. Rev. 1991. V. 44. P. 37 – 76.
4. Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. М.: МФТИ, 2007. 310 с.
5. Скрипняк Е.Г., Скрипняк В.А., Кульков С.С. и др. Моделирование механического поведения керамических композитов с трансформационно-упрочненной матрицей при динамических воздействиях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 2(10). С. 94 – 101.
6. Скрипняк В.А., Скрипняк Е.Г., Козулин А.А. и др. Влияние поровой структуры хрупкой керамики на разрушение при динамическом нагружении // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 315. № 2. С. 113 – 117.

7. Коноваленко Иг.С., Смолин А.Ю., Коростелев С.Ю., Псахье С.Г. О зависимости макроскопических упругих свойств пористых сред от параметров стохастического пространственного распределения пор // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 5. С. 155 – 158.
8. Смолин А.Ю., Коноваленко Иг.С., Кульков С.Н., Псахье С.Г. Моделирование разрушения хрупких пористых сред с различной внутренней структурой // Изв. вузов. Физика. 2006. Т. 49. № 3. С. 70–71.
9. Макаров П.В. Эволюционная природа деструкции твердых тел и сред // Физич. мезомех. 2007. Т. 10. № 3. С. 23–38.
10. Макаров П.В. Математическая теория эволюции нагружаемых твердых тел и сред // Физич. мезомех. 2008. Т. 11. № 3. С. 19–35.
11. Костандов Ю.А., Макаров П.В., Еремин М.О. и др. О разрушении хрупких тел с трещиной при сжатии // Прикладная механика. 2013. Т. 49. № 1. С. 124–132.
12. Макаров П.В., Еремин М.О. Модель разрушения хрупких и квазихрупких материалов и геосред // Физич. мезомех. 2013. Т. 16. № 1. С. 5–26.
13. Буюкова С.П., Кульков С.Н. Фазовый состав и особенности формирования структуры в нанокристаллическом ZrO_2 // Российские нанотехнологии. 2007. Т. 2. № 1–2. С. 119–132.
14. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Стефанов Ю.П. и др. Нелинейная механика геоматериалов и геосред. Новосибирск: Академич. изд-во «Гео», 2007. 235 с.
15. Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Неассоциированные законы течения и локализации пластической деформации // Успехи механики. 1989. Т. 12. № 1. С. 131–183.
16. Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 246 p.
17. Буюкова С.П., Кульков С.Н., Масловский В.И. Структура, фазовый состав и механическое поведение керамики на основе диоксида циркония // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации. 2003. № 13. С. 28–34.

Статья поступила 13.04.2013 г.

Smolin I.Yu., Eremin M.O., Makarov P.V., Buyakova S.P., Kul'kov S.N., Evtushenko E.P. NUMERICAL MODELLING OF MECHANICAL BEHAVIOUR OF MODEL BRITTLE POROUS MATERIALS AT THE MESOSCALE. To describe the mechanical response of brittle porous material mesovolumes, the evolutionary approach was applied with considering them as nonlinear dynamic systems. The nonlinear constitutive equations describe damage accumulation and their impact on the degradation of the strength properties of the elastic frame. In the framework of hierarchical modelling, the mesoscale porosity is taken into account explicitly while the smaller pores are taken into consideration integrally as a damage measure. This small scale damage enters in the constitutive equations as dilatancy, including that of the shear nature. Two types of morphology of model porous structures are considered: overlapping spherical pores and overlapping spherical solids. The obtained results of numerical simulation reveal little influence of pore morphology on the characteristics of damage in the frame. The averaged stress-strain diagram appears to be sensitive not only to the value of porosity but also to the pore morphology. The strength limit has a similar dependence.

Keywords: brittle porous materials, stress-strain state, damage, fracture, structure effect, pore morphology

SMOLIN Igor Yurievich (Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk State University)

E-mail: smolin@ispms.tsc.ru

EREMIN Mikhail Olegovich (Tomsk State University)

E-mail: bacardi@sibmail.com

MAKAROV Pavel Vasilievich (Tomsk State University, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences)

E-mail: pvm@ispms.tsc.ru

BUYAKOVA Svetlana Petrovna (Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk State University)

E-mail: sbuyakova@ispms.tsc.ru

KULKOV Serguey Nikolayevich (Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk State University)

E-mail: kulkov@ispms.tsc.ru

EVTUSHENKO Eugenii Pavlovich (Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences)

E-mail: eugene@ispms.tsc.ru

УДК 519.6

А.В. Старченко, Е.А. Данилкин, Р.Б. Нутерман, М.В. Терентьева**ПРИМЕНЕНИЕ МИКРОМАСШТАБНОЙ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ
НАД ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНОЙ ПОЛОСОЙ АЭРОПОРТА¹**

Для расчета детальной ветровой обстановки в окрестностях аэропорта с учетом влияния строений различной этажности, имеющих участки растительности и неоднородности подстилающей поверхности разработана микромасштабная метеорологическая модель. Полученные с ее использованием результаты математического моделирования помогут определить структуру потока в местах размещения аэродромных метеостанций с целью предварительной оценки степени влияния расположенных вблизи зданий аэропорта на точность измерений, а также выявить сдвиг ветра на малых высотах, воздействующий на летные характеристики воздушных судов, выполняющих взлет или посадку.

Ключевые слова: *атмосферный пограничный слой, сдвиг ветра, моделирование турбулентности.*

Процессы, происходящие в нижней части атмосферного пограничного слоя (туманы, метели, осадки, гололедно-изморозевые отложения, конвективные явления (гроза, шквал, смерч), сдвиг ветра на небольших высотах), оказывают существенное влияние на работу наземного и воздушного транспорта, на энергообеспечение хозяйственных объектов.

Поэтому одной из актуальнейших проблем как фундаментальной, так и прикладной отраслей наук о Земле является проблема создания информационных систем мониторинга и прогнозирования состояния приземного слоя атмосферы над населенными пунктами и крупными транспортными узлами. Особое значение такие исследования приобретают в связи с необходимостью обеспечения безопасности жизнедеятельности в крупных аэропортах, где возникновение локальных неблагоприятных атмосферных явлений может привести к чрезвычайным ситуациям.

Целью данной работы является построение и апробация трехмерной микромасштабной математической модели для исследования детальной ветровой обстановки в окрестностях аэропорта с учетом влияния строений различной этажности, имеющих протяженных участков растительности (лесополосы и группы отдельно стоящих деревьев) и неоднородности свойств подстилающей поверхности (асфальт или растительный покров). Назначение разрабатываемой микромасштабной метеорологической модели заключается в определении явления сдвига ветра для рассматриваемой в данной работе области над взлетно-посадочной полосой в зависимости от орографических особенностей прилегающей территории (на примере аэропорта г. Томска – Богашево). Сдвиг ветра – это изменение скорости и/или направления ветра на небольшом участке траектории полета. Очень сильным сдвигом ветра считается тот, который приводит к изменению воздушной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 (соглашение № 14.В37.21.0667) и РФФИ в рамках научных проектов № 12-05-31341, № 12-01-00433а.

скорости более чем на 15 узлов (около 8 м/с) или вертикальной скорости более чем на 500 фут/мин (2,5 м/с) [1].

Опасность сдвига ветра для авиации обусловлена его воздействием на летные характеристики воздушных судов, что выражается в потенциально неблагоприятном влиянии на безопасность полетов. Несмотря на возможность присутствия сдвига ветра в атмосфере на всех уровнях высоты, его наличие в области до 500 м особенно важно при взлете и заходе на посадку. Для воздушных судов, производящих посадку или осуществляющих набор высоты, значения относительной высоты воздушного судна и скорости близки к критическим, поэтому воздушное судно особенно восприимчиво к неблагоприятному воздействию сдвига ветра [1].

Изучению явления сдвига ветра на небольших высотах посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов [2–6], кроме того во второй редакции подготовлено Руководство от международной организации гражданской авиации [1], в котором собраны имеющиеся на настоящий момент сведения по исследованию данного вопроса.

Анализ приведенных литературных источников показывает, что для возникновения явления сдвига ветра есть целый ряд причин. Однако для области исследования в окрестностях взлетно-посадочной полосы аэропорта Богашево наиболее значимыми причинами возникновения сдвига ветра являются присутствие невысоких протяженных зданий и участков тесно расположенных деревьев с одной стороны взлетно-посадочной полосы и обширная лесополоса – с другой.

Несмотря на то, что максимальная высота строений ограничена и зависит от расстояния до взлетной полосы, для их размеров характерна довольно значимая ширина и сгруппированность в одном районе. Таким образом, весь этот комплекс зданий (аэропорт, ангары, склады) при сравнительно небольшой высоте представляет собой широкий барьер на пути приземного ветра. Потоки воздуха обтекают задания сверху и сбоку, что приводит к изменению значений скорости ветра вдоль взлетно-посадочной полосы. При этом влияние препятствий на преобладающий поток воздуха зависит от многих факторов, самым важным из которых является скорость ветра и его направление относительно препятствия, а также масштаб препятствий по отношению к размерам взлетно-посадочной полосы [2].

Физическая и математическая постановки задачи

Рассматривается трёхмерное стационарное турбулентное изотермическое движение несжимаемой среды над неоднородной подстилающей поверхностью с элементами крупномасштабной шероховатости. Элементы шероховатости представляют собой прямоугольные препятствия, размеры которых соизмеримы с размерами области исследования. Рассматривается два вида неподвижных препятствий: непроницаемые для потока здания и проницаемые массивы растительности (лесополосы) или отдельно стоящие деревья. Подстилающая поверхность: асфальт или растительный покров.

Математическая модель включает в себя осреднённые по Рейнольдсу уравнения неразрывности и уравнения Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle + F M_i, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь $\langle u_i \rangle$ – осредненные проекции вектора скорости на оси координат Ox_i , $\langle p \rangle$ – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость воздуха, $\langle u'_i u'_j \rangle$ – тензор напряжений Рейнольдса, FM_i – функция, описывающая влияние растительности на аэродинамику. Ось Ox_3 направлена вертикально вверх.

Замыкание системы уравнений (2) проводится с использованием двухпараметрической « k – ε »-модели и градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска:

$$\frac{\partial \langle u_j \rangle k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P - \varepsilon + FK; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \langle u_j \rangle \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + FE; \quad (4)$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}; \quad -\langle u'_i u'_j \rangle = \nu_T \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (5)$$

где ν_T – турбулентная вязкость, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – диссипация турбулентной кинетической энергии, $P = -\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}$ – генерация энергии турбулентности, FK , FE – функции, описывающие влияние растительности на турбулентную кинетическую энергию и диссипацию, $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $C_\mu = 0,09$.

Члены в транспортных уравнениях для моделирования воздействия растительности

Транспортное уравнение	Источниковый член
Уравнения Рейнольдса	$FM_i = -\eta C_d a \langle u_i \rangle V $
Уравнение кинетической энергии турбулентности	$FK = \eta C_d a (\beta_p V ^3 - \beta_d V k)$
Уравнение диссипации кинетической энергии турбулентности	$FE = C_{\varepsilon 4} \frac{\varepsilon}{k} FK$

Влияние растительности учитывается с помощью дополнительных источниковых членов в осредненных уравнениях Навье – Стокса и в транспортных уравнениях модели турбулентности. В таблице используются следующие обозначения [7, 8]: η – доля подстилающей поверхности, покрытой деревьями, C_d – коэффициент сопротивления, $a = a(x_3)$ – плотность растительности в лесном массиве (например, для массива сосновых деревьев $\eta = 1$, $C_d = 0,2$, $a = 0,3125 \text{ м}^2/\text{м}^3$), $\beta_p = 1$ – доля средней кинетической энергии потока, которая преобразовалась в турбулентную кинетическую энергию из-за сопротивления растительности, а коэффициент $\beta_d = 2,5$ – доля диссипации k из-за каскадного процесса переноса турбулентности в растительности, $C_{\varepsilon 4} = 1,5$ – эмпирическая постоянная, $|V|$ – модуль вектора скорости.

Для задания значений турбулентных параметров вблизи подстилающей поверхности и поверхности элементов шероховатости используется метод пристенных функций [9]. Выбор такого способа задания граничных условий для k , ε и турбулентных напряжений обусловлен тем, что турбулентные характеристики вблизи поверхности (в буферном слое и вязком подслое) имеют большие градиенты. Для описания такого поведения требуется значительное количество узловых точек при конечно-объемном (разностном) способе решения. В то же время известно, что в зоне развитой турбулентности изменение касательной компоненты скорости в зависимости от расстояния от поверхности хорошо описывается логарифмическим законом, а энергии турбулентности – линейным. Поэтому для определения значений параметров вблизи стенки в данной работе используется метод пристенных функций [9].

Краевые условия на выходе потока из расчётной области и на открытых боковых границах – это равенство нулю производных по нормали. В некоторых ситуациях, когда граничные условия на входе в расчётную область неизвестны, используются: степенной профиль для скорости ветра $u_{\text{ref}} (x_3 / z_{\text{ref}})^{0.16}$, для кинетической энергии $k = 3/2 (u_{\text{ref}} Tu)^2$, $\varepsilon = (c_\mu^{3/4} \cdot k^{3/2}) / l$, где u_{ref} – значение модуля вектора скорости на высоте z_{ref} , l – турбулентный масштаб длины, Tu – интенсивность турбулентности. Высота шероховатости над территорией с асфальтовым покрытием принималась равной 0,001 м, для остальной территории – 0,05 м.

Важно отметить, что разрабатываемая микромасштабная модель настроена на взаимодействие с имеющейся в Томском государственном университете мезомасштабной метеорологической моделью высокого разрешения [10, 11], а именно, результаты расчетов, полученные с ее применением, используются при задании граничных условий для области исследования в рамках микромасштабного моделирования.

При расчёте течений вокруг зданий использовался метод фиктивных областей, суть которого заключается в том, что значения векторных и скалярных величин в области преграды равны нулю и на границах фиктивных конечных объемов нет потоков диффузии, а учет трения обтекаемой поверхности осуществляется с помощью метода пристеночных функций.

Аппроксимация дифференциальной задачи и численный метод решения

Численное решение представленной выше системы дифференциальных уравнений в частных производных осуществляется на основе метода конечного объема с использованием разнесенной разностной сетки, когда значения компонент скорости определяются на гранях конечных объёмов, а скалярные характеристики – в центре. Для достоверного учета влияния препятствий на направление и силу приземного ветра вблизи обтекаемых поверхностей проводилось дополнительное сгущение сетки.

После разбиения расчетной области описанным способом каждое дифференциальное уравнение интегрируется по каждому конечному объему. При вычислении интегралов применяется кусочно-полиномиальная интерполяция для зависимых от x_1, x_2, x_3 величин. Аппроксимация конвективных членов уравнения переноса выполняется с использованием противопотоковой схемы MLU Ван Лира [12]. Аппроксимация диффузионных членов осуществляется с использованием

центрально-разностной схемы второго порядка. Результатом дискретизации является неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству. Для согласования полей скорости и давления использовался метод SIMPLE. Разработана итерационная вычислительная процедура для согласования поля скорости и давления и последовательного решения систем сеточных уравнений – неявных дискретных аналогов адвективно-диффузионных уравнений нелинейной задачи на основе явного метода Булеева [13].

Корректность работы построенной математической модели проверена на целом ряде тестовых примеров, среди которых: поток за обращенным назад уступом, течение за отдельно стоящим деревом, течение в каверне и обтекание куба, расположенного на плоскости [8, 14].

Результаты моделирования

Рассматриваемая микромасштабная модель была применена для расчета приземного распределения векторного поля ветра и турбулентных параметров над двумя различными участками территории аэропорта Богашево г. Томска. Первая область (рис. 1) имела размеры $1500 \times 1500 \times 200$ м, расчеты проводились на сетке $161 \times 144 \times 84$. Внутри области располагались здания аэропорта, лесополоса, часть взлетно-посадочной полосы, вблизи которой находится метеорологическая станция, где постоянно в оперативном режиме производятся измерения метеопараметров приземного слоя атмосферы, в том числе скорость и направление ветра на высоте 10 м. Для этой области была выполнена серия расчетов по исследованию влияния орографии поверхности аэропорта на наблюдаемые значения силы и направления приземного ветра. В расчетах относительная скорость ветра u_{ref} принималась равной 1 м/с, а направление ветра менялось от варианта к варианту с шагом 45 градусов (рассматривались направления ветра – СВ, В, ЮВ, Ю, ЮЗ, З, СЗ, С). На рис. 1 (слева) представлена орографическая модель поверхности рассматриваемой области с указанием высоты зданий, типа неоднородности подстилающей поверхности, расположения метеостанции. При построении модели использовались данные спутниковых снимков с сайта <http://maps.yandex.ru>. Справа на рис. 1 представлено векторное поле ветра на высоте 5 м над поверхностью Земли при основном западном направлении ветрового потока. Из рисунка видно, что здания и лесной массив оказывают влияние на направление и силу приземного ветра. Особенно это влияние проявляется за относительно высокими зданиями, вертикальный размер которых составляет около 10 м. В лесном массиве модуль скорости уменьшается вследствие сопротивления растительности. Также, анализируя полученные расчетные данные, можно отметить увеличение уровня турбулентности приземного слоя атмосферы за зданиями с подветренной стороны и в лесном массиве.

Для анализа влияния разрешаемых элементов крупномасштабной шероховатости для всех рассматриваемых направлений основного ветрового потока были построены изолинии модуля относительной скорости потока W_{12} , полученные по следующей формуле:

$$W_{12} = \left(\left(\langle u_1 \rangle - \langle u_1^0 \rangle \right)^2 + \left(\langle u_2 \rangle - \langle u_2^0 \rangle \right)^2 \right)^{0.5},$$

где компоненты скорости с верхним индексом «0» рассчитаны при условии отсутствия зданий и лесополосы.

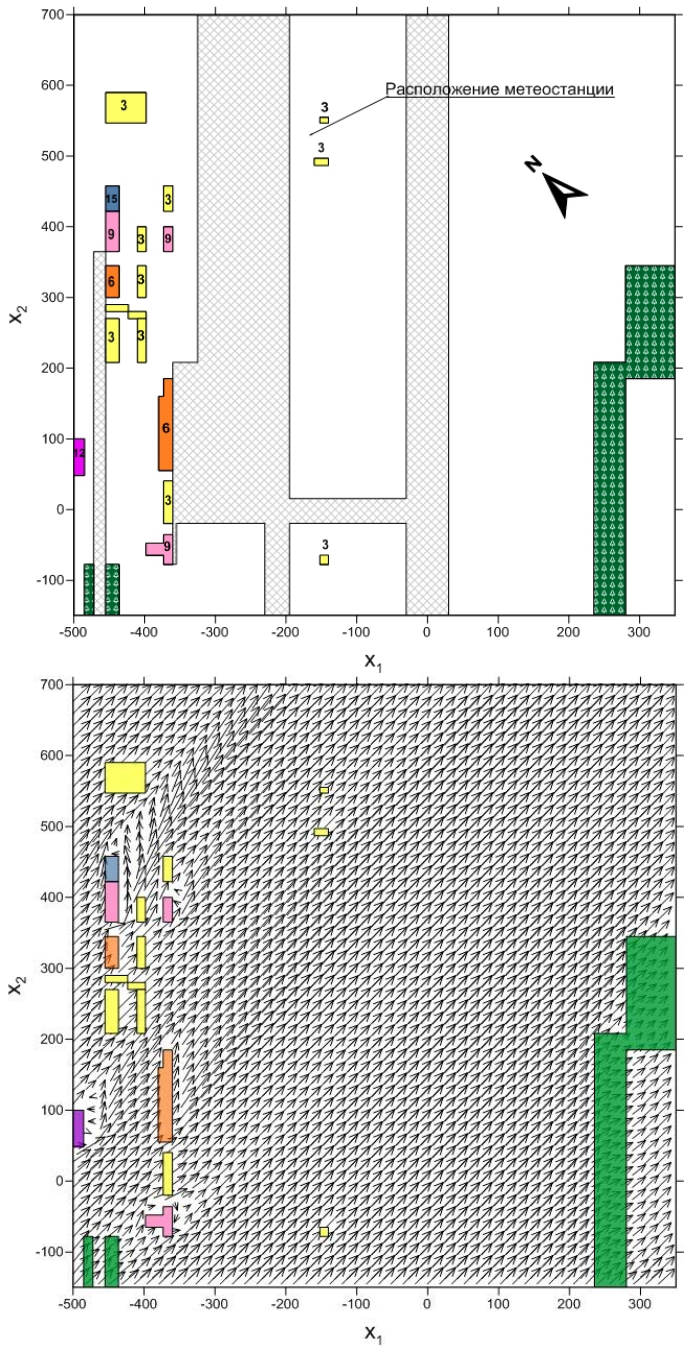


Рис. 1. Вид сверху на первую область исследования (вверху). Серым цветом отмечена асфальтированная территория, прямоугольные фигуры с цифрами представляют здания с указанием высоты (м), темным цветом отмечены участки лесополосы. Внизу представлено векторное поле горизонтальной компоненты ветра на высоте 5 м. Основное направление ветра – западное

Большие значения W_{12} соответствуют положению зон потока, где имеет место заметное влияние орографической неоднородности подстилающей поверхности. На рис. 2 для западного направления основного потока ветра представлены изолинии W_{12} на высоте 10 метров, расположение которых указывает, что при таком направлении погрешность измерения скорости приземного ветра может достигать 10 %, а при северо-западном направлении возможно увеличение погрешности за счет влияния на основной ветровой поток 15-метрового здания служб аэропорта.

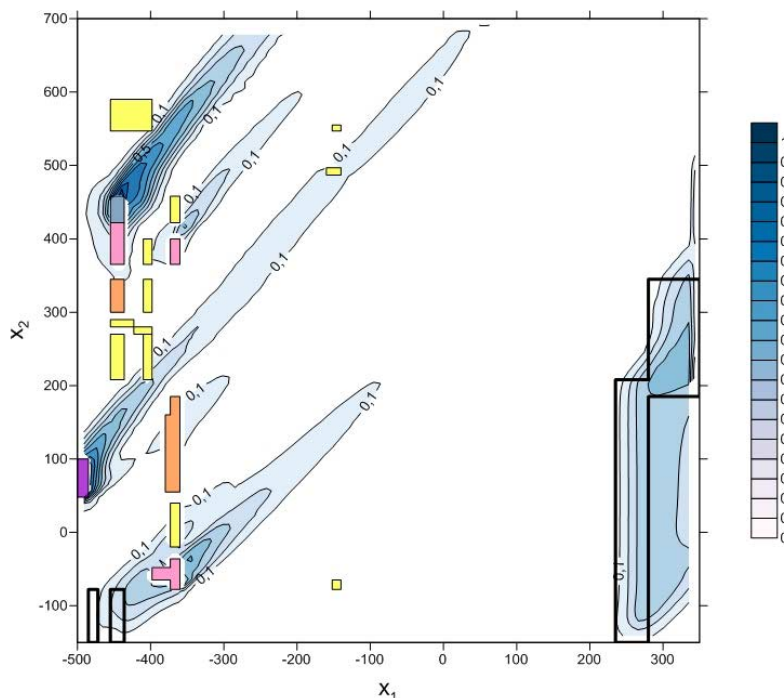


Рис. 2. Изолинии модуля вектора относительной скорости потока W_{12} (м/с) по сравнению с потоком при отсутствии зданий и лесных массивов при западном направлении ветра на высоте 10 м

Вторая расчетная область (рис. 3) была выбрана для исследования возникновения сдвига скорости ветра, вызванного элементами крупномасштабной шероховатости подстилающей поверхности на участке глиссады. Для угла наклона глиссады принято значение 3° . Направление взлетно-посадочной полосы (ВПП) ориентировано по юго-западному направлению. Размеры области составляют $4000 \times 2000 \times 150$ м. Внутри нее располагаются участки лесной растительности высотой 15 м, часть ВПП и открытая поверхность с незначительной растительностью. При расчетах выбрана сетка $144 \times 82 \times 102$. Для этой области была выполнена серия расчетов по исследованию влияния орографии поверхности аэропорта на сдвиг значения силы и направления приземного ветра. В расчетах относительная скорость ветра u_{ref} принималась равной 1 м/с, а направление ветра, так же как и для первой области, менялось от варианта к варианту с шагом 45° (рассматривались направления ветра – СВ, В, ЮВ, Ю, ЮЗ, З, СЗ, С).

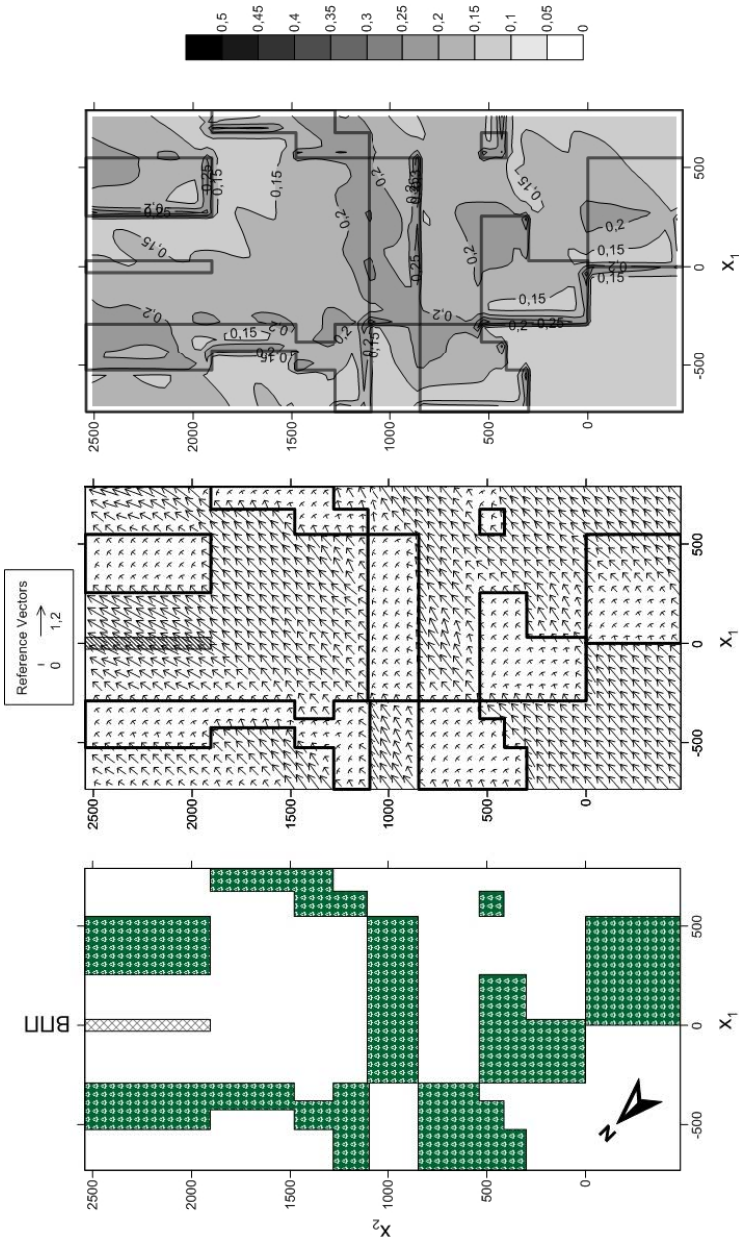


Рис. 3. Слева – вид сверху на вторую область исследования, серым цветом отмечена асфальтированная территория (ВПП), темным цветом отмечены участки лесополосы. В центре представлено векторное поле горизонтальной компоненты ветра на высоте 5 м. Основное направление ветра – западное. Справа – изолинии интенсивности турбулентности (м/с)

На рис. 3 кроме принятой модели расположения элементов растительности и части ВПП для второй области исследования также представлены векторное поле горизонтальной компоненты приземного ветра и изолинии интенсивности турбулентности $k^{1/2}$ на высоте 5 м. Анализируя полученные распределения метеорологических характеристик, можно отметить значительное влияние лесных массивов на силу и направление ветра. Внутри массивов и за ними с подветренной стороны микромасштабная модель предсказывает снижение скорости ветра, изменение его направления, увеличение уровня турбулентного перемешивания.

Рис. 4 представляет графики изменения модуля горизонтальной компоненты скорости ветра, отнесенного к величине u_{ref} , и вариации направления ветра на глиссаде в зависимости от удаления воздушного судна от точки касания ВПП. Графики построены для четырех направлений основного ветрового потока (З, В, Ю, С). Из рисунка видно, что влияние массивов лесной растительности начинает проявляться на глиссаде, когда расстояние до земной поверхности составляет 75 и менее метров. Колебания скорости ветра на относительно небольших участках

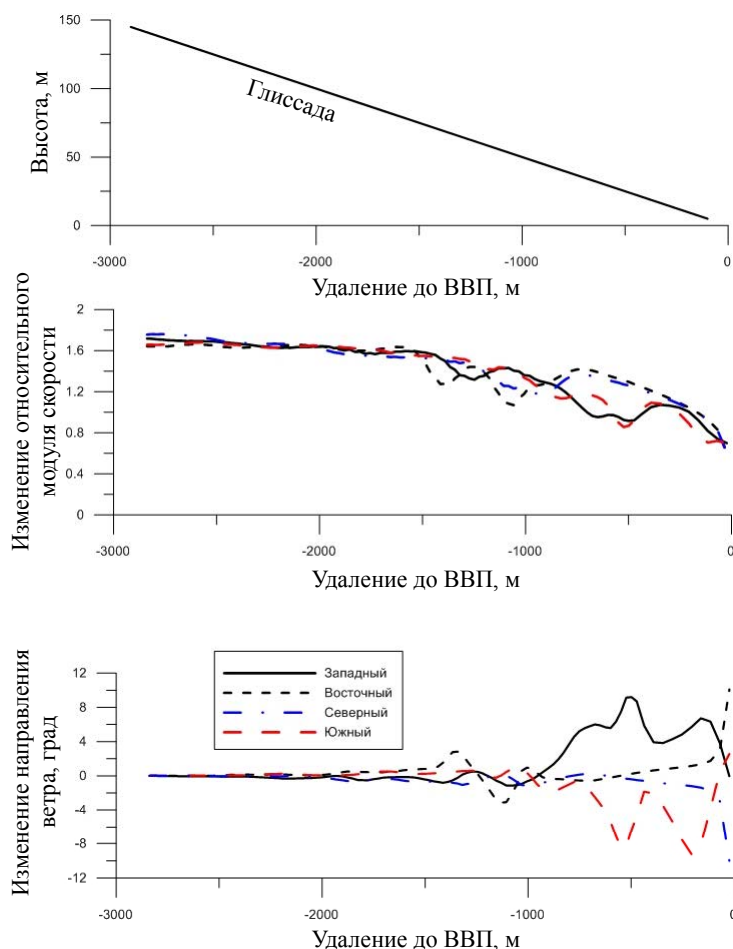


Рис. 4. Глиссада, изменение относительного модуля скорости ветра и изменение направления ветра вдоль глиссады в зависимости от удаления до ВПП

глиссады могут достигать более 0,4 u_{ref} (восточный ветер), что при больших значениях относительной скорости u_{ref} может давать величину сдвига ветра, близкую к критической. Изменение направления приземного ветра по глиссаде возможно на высотах ниже 50 м и по расчетным данным не превышает 10° от направления основного ветрового потока над рассматриваемой областью.

Заключение

Для расчета детальной ветровой обстановки в окрестностях аэропорта с учетом влияния строений различной этажности, имеющих участки растительности и неоднородности подстилающей поверхности разработана микромасштабная метеорологическая модель.

Микромасштабная модель была применена для анализа распределения приземной скорости ветра и интенсивности турбулентности над аэропортом Томска – Богашево, для этого были выбраны две области исследования, построены их цифровые модели, включающие описание расположения зданий, лесных массивов и асфальтированной территории. Одна область исследования предназначена для оценки погрешности измерений приземной скорости ветра аэродромной метеостанцией, вносимых орографическими элементами, вторая – для оценки величины сдвига приземного ветра, обусловленного имеющимся расположением лесной растительности.

Полученные с использованием микромасштабной модели результаты указывают, что при западном и северо-западном ветрах погрешность измерений параметров приземного ветра аэродромной метеостанцией может составлять около 10 %, а заметный сдвиг ветра на глиссаде ожидается на высотах ниже 75–50 м при больших значениях скорости основного ветрового потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руководство по сдвигу ветра на малых высотах* / Циркуляр ИКАО № 449-AN /9817. Монреаль, ИКАО, 2005. 258 с.
2. *Исаев С.А., Белоусова Л.Ю., Баранов П.А.* Численный анализ ветрового режима в окрестности аэропорта Пулково // ИФЖ. 1999. Т. 72. № 4. С. 672–678.
3. *Бабаскин В.В., Исаев С.А., Метов Х.Т., Чепига В.Е.* Система предупреждения опасного влияния сдвига ветра // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». 2000. № 8. С. 10–16.
4. *Вышинский В.В., Судаков Г.Г.* Вихревой след самолета и вопросы безопасности полетов // Труды МФТИ. 2009. Т. 1. № 3. –С. 78–93.
5. *Cheung J.O.P., Chan P.W., Leung D.Y.C.* Large-eddy simulation of the wind flow across a terminal building on the airfield // Int. J. Earth Sciences and Engineering. 2011. V. 04. P. 486–489.
6. *Nieuwpoort A.M.H., Gooden J.H.M., de Prins J.L.* Wind criteria due to obstacles at and around airports // National Aerospace Laboratory NLR. 2010. NLR-TP-2010-312.
7. *Katul G.G., Albertson J.D.* An investigation of high-order closure models for a forested canopy // Boundary-Layer Meteorology. 1998. V. 89. P. 47–74.
8. *Нутерман Р.Б., Старченко А.В., Бакланов А.А.* Моделирование аэродинамики и распространения выбросов от автотранспорта в городском подслое // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 4. С. 3–22.
9. *Lauder B.E., Spalding D.B.* The numerical computation of turbulent flows // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3. № 2. P. 269–289.
10. *Старченко А.В.* Численное исследование локальных атмосферных процессов // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. С. 81–89.

11. Старченко А.В., Деги Д.В. Численное моделирование локальных атмосферных процессов с использованием многопроцессорных вычислительных систем // Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений: Труды Международной суперкомпьютерной конференции (17–22 сентября 2012 г., г. Новороссийск). М.: Изд-во МГУ, 2012. С. 536–541.
12. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. monotonicity and conservation combined in a second order scheme // J. Computational Physics. 1974. V. 14. P. 361–370.
13. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995. 288 с.
14. Нутерман Р.Б., Старченко А.В., Бакланов А.А. Разработка и анализ микромасштабной метеорологической модели для исследования течений воздушных масс в городской застройке // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 3. С. 37–43.

Статья поступила 08.08.2013 г.

Starchenko A.V., Danilkin E.A., Nuterman R.B., Terenteva M.V. APPLICATION OF A MICRO-SCALE METEOROLOGICAL MODEL FOR STUDYING THE AIRFLOW PATTERN ABOVE THE AIRPORT RUNWAY. A micro-scale meteorological model has been developed for calculating wind conditions in the vicinity of an airport with buildings of different floor numbers, vegetation, and heterogeneity of the underlying surface. The modeling results will help to determine the airflow structure around weather station sites with the aim to preliminarily estimate the effect of airport buildings on measurements quality, as well as to identify near-surface wind shear affecting aircrafts during takeoff or landing.

Keywords: Atmospheric boundary layer, wind shear, turbulence modeling

STARCHENKO Alexander Vasil'evich (Tomsk State University)

E-mail: starch@math.tsu.ru

DANILKIN Evgeniy Alexandrovich (Tomsk State University)

E-mail: ugin@math.tsu.ru

NUTERMAN Roman Borisovich (Tomsk State University,

The Niels Bohr Institute at Copenhagen University)

E-mail: nutrik@math.tsu.ru

TERENTEVA Mariya Valentinovna (Tomsk State University)

E-mail: mariya-terenteva@mail.ru

УДК 519.6:532.516

Б.О. Цыденов, А.В. Старченко

**ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМ «РЕКА – ОЗЕРО»
НА ПРИМЕРЕ ВЕСЕННЕГО ТЕРМОБАРА В ОЗЕРЕ КАМЛУПС¹**

Работа посвящена описанию математической модели и численного метода для предсказания гидродинамических процессов, сопровождающих развитие весеннего термобара в глубоководном озере. Особое внимание уделено верификации построенной модели: результаты выполненных расчётов показывают хорошее качественное и количественное согласование с результатами расчётов других авторов и натурных наблюдений, проведённых на озере Камлупс. Для расчёта течений со смешанной конвекцией, когда плотность среды зависит не только от температуры, но и давления и солёности, разработан алгоритм SIMPLED, представляющий собой модификацию известного алгоритма SIMPLE Патанкара и Сполдинга.

Ключевые слова: *термобар, математическая модель, температура максимальной плотности, приближение Буссинеска, численный эксперимент, озеро Камлупс.*

Исследования естественной конвекции в гидродинамических процессах экосистемы водоёмов вызывают постоянно растущий научный и практический интерес. Особое внимание уделяется данной тематике в последние годы в связи с проблемой взаимодействия человечества с окружающей средой. К числу явлений, которое может оказать существенное влияние на процессы распространения загрязнения в водоёме, относится термобар. Под *термобаром* понимается узкая зона в глубоком озере умеренных широт, в которой происходит погружение имеющей наибольшую плотность воды от поверхности до дна.

Первые результаты по изучению термобара в озёрах были получены Ф.А. Форелем (F.A. Forel) [1], А.И. Тихомировым [2], Дж.К. Роджерсом (G.K. Rodgers) [3].

Весной образование и развитие термобара в водоёме может существенным образом зависеть от наличия речного притока с более высокой температурой, вносящего свой вклад в гидростатическую неустойчивость водных масс. Исследованием влияния притока на формирование термобара занимались авторы работ [4 – 6]. Детальные наблюдения термобара, вызванного речным стоком, проведены для нескольких канадских озёр, к числу которых относится и озеро Камлупс [7 – 9]. Оно находится на юго-западе Канады (провинция Британская Колумбия) в 340 км северо-восточнее Ванкувера и расположено между 50°26' – 50°45' с. ш. и 120°03' – 120°32' з. д. по течению реки Томпсон, имеет вытянутую форму.

В 1979 году П.Д. Киллворт и др. (Killworth P.D. et al.) [10] построили одномерную модель озера Камлупс, которая учитывает сезонные изменения температуры речного притока, и описали годовое изменение термической структуры во-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента РФ для молодых ученых и аспирантов (СП-71.2012.5), Программы развития деятельности студенческих объединений Национального исследовательского Томского государственного университета «Инновации и творчество на 2012–2013 гг.», ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013» (соглашение №14.В37.21.0667), Министерства образования и науки РФ (задание №8.4859.2011).

доёма. П.Р. Холланд и др. (Holland P.R. et al.) [11] с помощью квазидвухмерной модели, учитывающей влияние силы Кориолиса, получили достаточно реалистичную картину развития термобара в озере Камлупс, которая согласуется с натурными наблюдениями Э.К. Кармака и др. (E.C. Carmack et al.) [8].

Данные измерений гидрографических станций, расположенных в акватории озера, позволили Э.К. Кармаку и др. [8] выявить особенности формирования течений в озере Камлупс, обусловленных стоком реки Томпсон. В зависимости от времени года авторы [8] выделили следующие характерные варианты развития течений вблизи впадения реки в озеро (рис. 1):

А – «зима», когда речная водная масса, имеющая более низкую температуру по сравнению с температурой воды в озере (температура озёрной воды, в свою очередь, меньше температуры максимальной плотности), втекая в водоём, остаётся на его поверхности;

В – «ранняя весна», когда река, проникающая в озеро с температурой максимальной плотности, распространяется по склону под действием силы тяжести;

С – «середина весны», когда речная вода продвигается сначала поверхностной струёй, а затем, смешиваясь с более холодной озёрной водной массой, начинает погружаться вниз, формируя термобар;

Д – «поздняя весна», когда менее плотная вода речного притока интенсивно распространяется по поверхности озера.

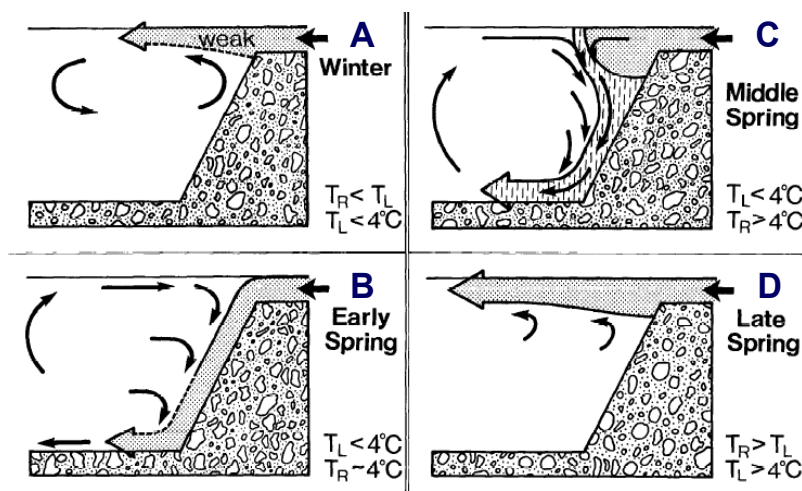


Рис. 1. Схема видов циркуляций в районе втекания р. Томпсон в оз. Камлупс, описанная Э.К. Кармаком и др. [8] на основе натурных наблюдений

Целью данной работы является моделирование вышеприведенных сценариев взаимодействия систем «река – озеро» с помощью численной модели озера высокого разрешения.

Физическая и математическая постановка задачи

Весной, после вскрытия водоёма, температура воды в озере меньше температуры максимальной плотности (ТМП). Увеличение проникающей солнечной радиации и приток тёплых речных вод приводят к тому, что прибрежные поверхно-

стные воды озера быстрее нагреваются и достигают ТМП. Более теплые и наиболее плотные водные массы опускаются до дна, образуя фронтальный раздел (термобар). Слева и справа от термобара образуются две циркуляционные ячейки с зоной опускания воды. Этот фронтальный раздел препятствует горизонтальному перемешиванию вод между двумя циркуляционными ячейками и проникновению прибрежных вод в центральную часть водоёма. По мере прогрева озера термобар смещается к центру и исчезает, когда температура всей акватории становится больше ТМП.

В качестве исследуемой области выбрано вертикальное сечение озера Камлупс, соответствующее направлению впадения р. Томпсон, начало системы координат совпадает с устьем реки (рис. 2, а). Расчётная область имеет протяженность 10 км и глубину 150 м (рис. 2, б). Открытый участок речного стока (на левой границе) и оттока (на правой границе) составляет 15 м от поверхности озера.

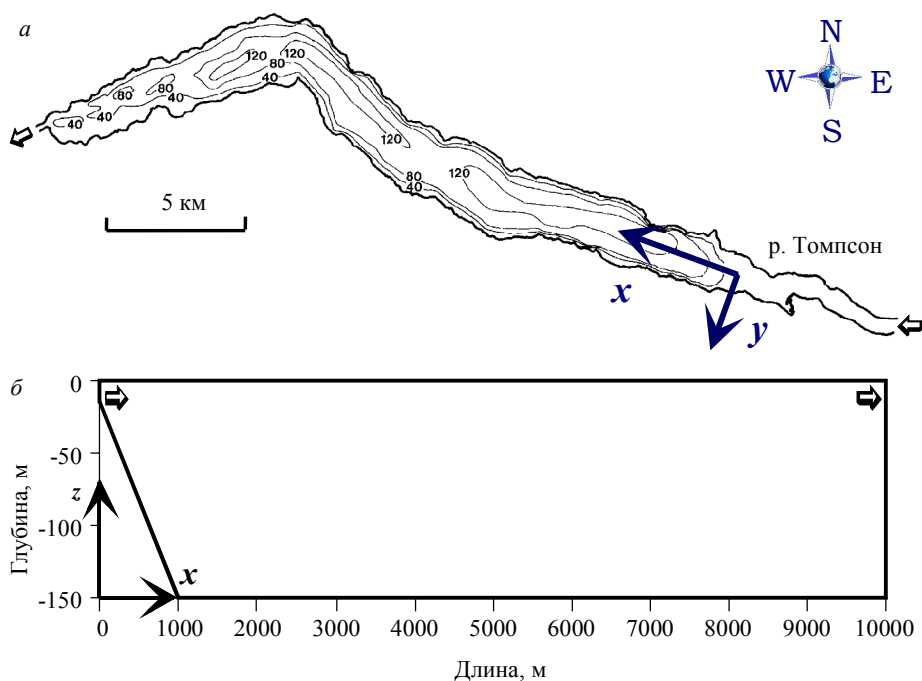


Рис. 2. Морфометрия оз. Камлупс: а – батиметрия оз. Камлупс, б – расчётная область (продольное сечение)

Натурные наблюдения показывают, что при образовании и развитии термобара основные изменения происходят в направлении от устья реки к центру озера (вдоль оси Ox на рис. 2, а). При этом характеристики в направлении, перпендикулярном оси Ox (вдоль оси Oy на рис. 2, а), достаточно однородны. Поэтому можно с большой степенью обоснованности исключить из уравнений математической модели все производные по y , тем самым рассматривая явление термобара в квазидвухмерном приближении [12]. С учётом этого допущения негидростатическая модель термобара, учитывающая влияние силы Кориолиса, связанной с вращением Земли, и записанная в приближении Буссинеска, имеет следующий вид:

а) уравнения количества движения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2\Omega_z v - 2\Omega_y w, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2\Omega_x w - 2\Omega_z u, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g \frac{\rho}{\rho_0} + 2\Omega_y u - 2\Omega_x v,\end{aligned}$$

б) уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

в) уравнение энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial wT}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial H_{\text{sol}}}{\partial z};$$

г) уравнение баланса солёности в озере:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial wS}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial S}{\partial z} \right),$$

где u , v – горизонтальные компоненты скорости; w – вертикальная компонента скорости; Ω_x , Ω_y и Ω_z – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли; g – ускорение свободного падения; c_p – удельная теплоёмкость; T – температура; S – солёность; p – давление; ρ_0 – плотность воды при стандартном атмосферном давлении, температуре T_L и солёности S_L (T_L и S_L – характерная температура и солёность озера соответственно). Коротковолновая солнечная радиация, проникающая в воду, рассчитывается по закону Бугера–Ламберта–Бэра

$$H_{\text{sol}} = Q \exp(-\varepsilon_{\text{abs}} |z|),$$

где Q – поток тепла через свободную поверхность, ε_{abs} – коэффициент поглощения.

Коэффициенты интенсивности диффузионного переноса импульса и тепла в соответствующем направлении рассчитываются следующим образом [11]:

$$K_x = 2,5 \text{ м}^2/\text{с}, \quad K_z = \begin{cases} 0,0004 + 6 \cdot 10^{-7} (N^2)^{-0,5} \text{ м}^2/\text{с}, & \text{если } N^2 > N_{\text{min}}^2, \\ 0,02 \text{ м}^2/\text{с}, & \text{если } N^2 \leq N_{\text{min}}^2, \end{cases}$$

$$D_x = K_x, \quad D_z = K_z,$$

где $N_{\text{min}}^2 = 9,371 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-2}$. Пороговое значение для условия устойчивости N_{min}^2 вводится для того, чтобы избежать больших значений K_z при $N^2 \rightarrow 0$. Для определения условия устойчивой стратификации используется частота Брента – Ваяля (частота плавучести)

$$N^2 = g\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial z} - \Gamma \right),$$

где α – коэффициент термического расширения, Γ – адиабатический градиент температуры.

В качестве уравнения состояния $\rho = \rho(T, S, p)$ выбрано уравнение Чена – Миллера [13], принятое UNESCO. Данное уравнение состояния связывает плотность воды с температурой, солёностью, давлением и справедливо в диапазоне $0 \leq T \leq 30$ °C, $0 \leq S \leq 0,6$ г/кг, $0 \leq p \leq 180$ бар.

В начальный момент времени система находится в состоянии покоя и удовлетворяет заданным полям температуры и солёности:

$$t = 0: \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad T = T_L; \quad S = S_L.$$

Граничные условия имеют следующий вид:

а) на поверхности

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0; \quad D_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q}{\rho_0 \cdot c_p},$$

б) на дне (на твёрдых границах):

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0,$$

где n – направление внешней нормали к области;

в) на левой границе (см. рис. 2, б):

$$u = u_R; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad T = T_R; \quad S = S_R,$$

где u_R – скорость речного притока, T_R и S_R – температура и солёность реки соответственно.

г) на правой границе:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Начальное поле давления определяется из решения уравнений состояния и гидростатики с граничным условием на поверхности $p = p_a$ (p_a – атмосферное давление) методом Рунге – Кутты четвёртого порядка точности. Уравнение гидростатики выводится из уравнения движения для вертикальной компоненты скорости (при условии $w = 0$ и отсутствии силы Кориолиса) и имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Численный метод решения

Решение конвективно-диффузионных уравнений основано на *методе конечных объёмов* (МКО), идея которого легко поддается прямой физической интерпретации [14]. Для получения пространственной дискретизации задачи расчётная область (см. рис. 2, б) разбивается на соприкасающиеся конечные объёмы так, чтобы каждая узловая точка содержалась в одном конечном объёме. Заданная сетка определяется множеством узлов и множеством значений сеточных функций. Дифференциальное уравнение интегрируется по каждому конечному объёму с использованием кусочно-гладких профилей, интерполирующих изменение сеточной функции между узлами сетки. Полученный дискретный аналог выражает интегральный закон сохранения для конечного объёма [14]. Следует заметить, что МКО занимает лидирующее положение по отношению к иным способам дискретизации уравнений гидрогазодинамики, к примеру, этот метод используется в

гидродинамических пакетах FLUENT, STARCCD, CFX, CFD-ACE, FINE (NUMECA) и др. [15]. Согласно МКО, скалярные величины (температура, давление, солёность) определяются в центре сеточной ячейки, в то время как компоненты вектора скорости – в средних точках на границах ячеек. В целях приближения расчётной области к прибрежному профилю озера Камлупс применяется метод блокировки фиктивных областей [14]: приравниваются нулю компоненты скорости в выключенной зоне за счёт использования больших значений коэффициентов вязкости в этой зоне.

Численный алгоритм нахождения поля течения и температуры опирается на разностную схему Кранка – Николсон. Конвективные слагаемые в уравнениях аппроксимируются по противопотоковой схеме QUICK Леонарда [16].

Для согласования рассчитываемых полей скорости и давления разработана процедура SIMPLED для течений с плавучестью, представляющая собой модификацию метода SIMPLE Патанкара и Сполдинга [14]. Алгоритм SIMPLED основан на циклической последовательности операций «предположение – коррекция»:

1. Задание приближенного поля давления p^* , температуры T^* и солёности S^* .
2. Решение уравнений количества движения для получения приближенных значений компонент скорости u^* и w^* из уравнений вида (здесь и ниже используются обозначения, принятые в [14])

$$a_e^u u_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^* + b^u + (p_P^* - p_E^*) h_z;$$

$$a_n^w w_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^w w_{nb}^* + b^w + (p_P^* - p_N^*) \Delta x - \frac{\rho_n^* g}{\rho_0} h_x \cdot h_z,$$

где $\sum_{nb}$ означает суммирование по всем соседним узлам конечного объема W, E, S и N ; h_x и h_z – шаги сетки в соответствующем направлении.

3. Решение уравнений энергии (для получения T) и солёности (для получения S) и расчёт $\rho' = \rho(p^*, T, S) - \rho(p^*, T^*, S^*)$.

4. Решение уравнения для поправки давления p' из уравнений

$$a_P p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b,$$

где $a_E = d_e h_z$, $a_W = d_w h_z$, $a_N = d_n h_x$, $a_S = d_s h_x$, $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$,

$$b = (u_w^* - u_e^*) h_z + (w_s^* - w_n^*) h_x + \frac{g}{\rho_0} (c_n \rho_n' - c_s \rho_s') h_x.$$

5. Расчёт p путём добавления p' к p^* .

6. Корректировка компонент скорости u и w из формул вида

$$u_e = u_e^* + d_e (p_P' - p_E');$$

$$w_n = w_n^* + (p_P' - p_N') d_n - \frac{\rho_n' g}{\rho_0} c_n,$$

где $d_e = \frac{h_z}{a_e^u}$, $d_n = \frac{h_x}{a_n^w}$, $c_n = \frac{h_x \cdot h_z}{a_n^w}$.

7. Решение уравнений энергии, солёности, количества движения для v и расчёт $\rho = \rho(p, T, S)$.

8. Возврат к пункту 2 и повтор расчётов до тех пор, пока не будет достигнута сходимость.

Системы сеточных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом нижней релаксации или явным методом Н.И. Булеева [17].

Результаты расчётов

В работах [18, 19] представлены результаты тестовых экспериментов для случая квадратной каверны при изотермических боковых границах, которые полностью соответствуют картине течения, приведенной в книге В.И. Полежаева и др. [20]. В настоящей работе предпринята попытка повторить численный эксперимент П.Р. Холланда и др. [11].

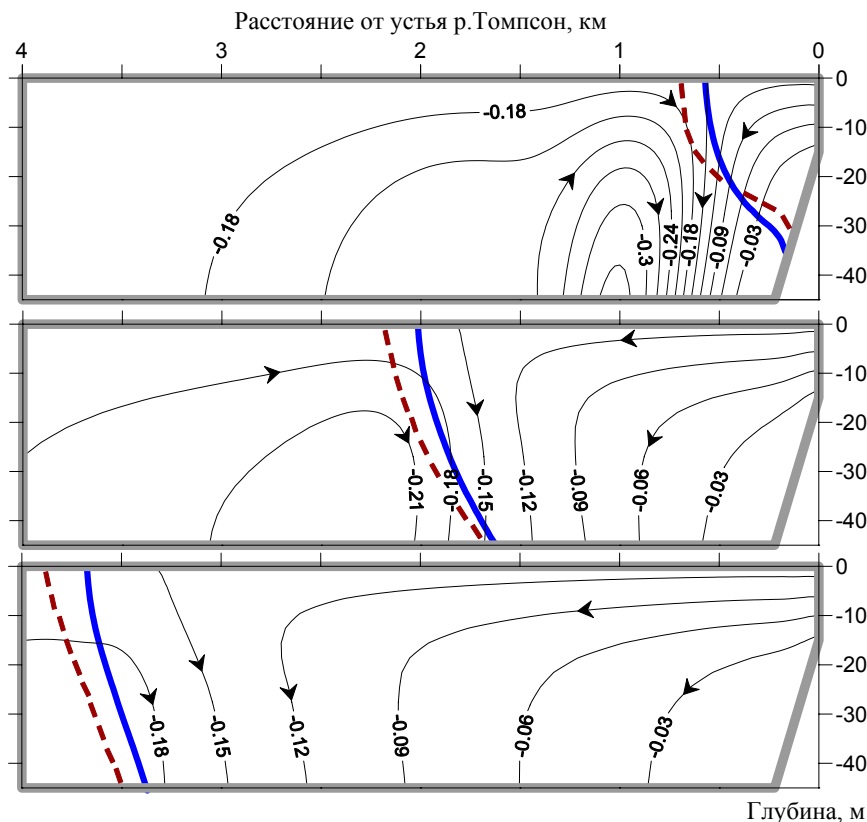


Рис. 3. Линии тока и профиль температуры максимальной плотности (жирная сплошная линия) через 8, 16 и 24 суток (сверху вниз) от начала вычислительного эксперимента. Пунктиром показано положение температуры максимальной плотности, приведенное в работе П.Р. Холланда и др. [11]

Начальное распределение температуры в озере Камлупс имеет постоянное значение, равное $2,4^{\circ}\text{C}$, в то время как температура воды в реке соответствует $3,6^{\circ}\text{C}$ и нагревается на $0,2^{\circ}\text{C}$ в день. Река Томпсон впадает в озеро со скоростью $0,01$ м/с, минерализация воды в озере и в реке составляет $0,1$ г/кг. Поток тепла,

поступающий на водную гладь, равен 170 Вт/м^2 , коэффициент поглощения проникающей в воду солнечной радиации $-0,3 \text{ м}^{-1}$.

Расчётная область (см. рис. 2, б) покрывается равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25 \text{ м}$ и $h_z = 3 \text{ м}$. Шаг по времени $\Delta t = 60 \text{ с}$. Вычисления проводились на суперкомпьютере ТГУ «СКИФ Cyberia».

На рис. 3 изображены линии тока и температура максимальной плотности (жирная сплошная линия), которые рассчитаны для тех же моментов времени, как в работе [11]. Важно заметить, что результаты проведённых расчётов (см. рис. 3) показывают хорошее качественное и количественное согласование с результатами расчётов П.Р. Холланда и др. [11, рис. 2].

Также можно сопоставить рассчитанные значения плотности воды на глубине 5 м (рис. 4) и изотермы в озере через 20 суток (рис. 5).

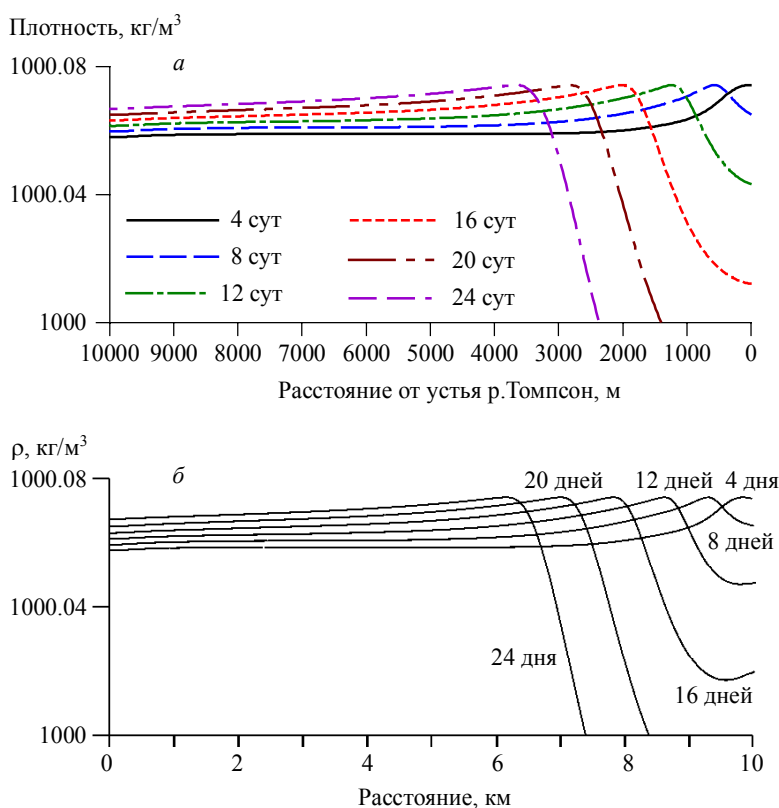


Рис. 4. Вычисленные значения плотности на глубине 5 м: результаты расчётов (а), результаты П.Р. Холланда и др. [11] (б)

Сравнивая рис. 4 и 5, видим, что физическая картина динамики развития термобара достаточно хорошо согласуется с результатами П.Р. Холланда и др. [11]. Следует заметить, что в численной модели некоторые параметры (например, солёность реки) заданы неточно ввиду отсутствия в литературе конкретных значений. Кроме того, есть отличие и в численном методе: в данной работе аппроксимация нестационарного члена осуществляется при помощи разностной схемы

Кранка – Николсона второго порядка точности. По этой причине имеет место незначительное различие результатов.

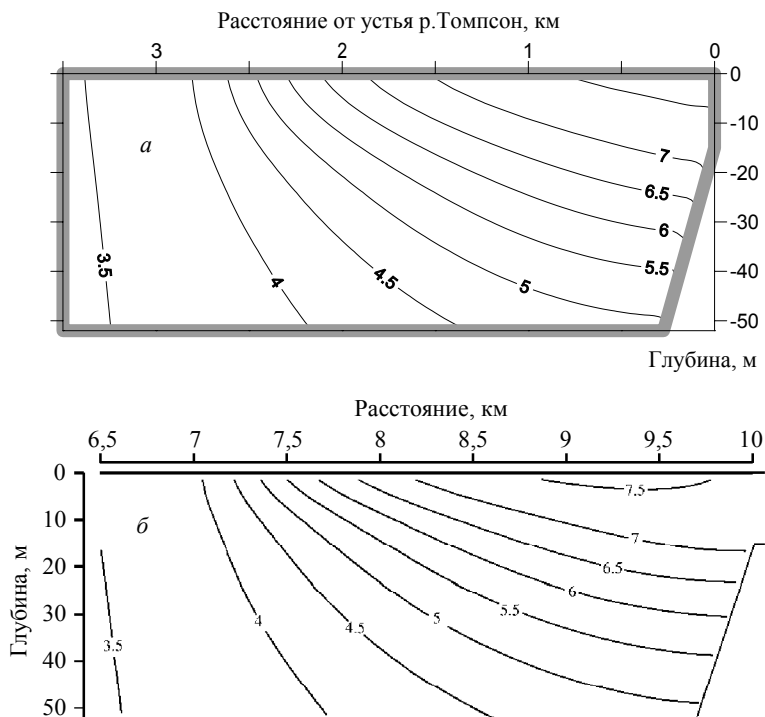


Рис. 5. Изотермы ($^{\circ}\text{C}$) через 20 сут от начала вычислительного эксперимента: результаты расчётов (а), результаты П.Р. Холланда и др. [11] (б)

С целью воспроизведения сценариев течений, соответствующих случаям «зима» (А), «ранняя весна» (В), «середина весны» (С) и «поздняя весна» (D) (см. рис. 1) проведена серия численных экспериментов. Рассмотрим эти случаи.

Случай «зима». Для моделирования данного вида циркуляции задавались следующие характеристики температуры: начальное распределение температуры в озере составляло $2,4^{\circ}\text{C}$, а температура воды втекающей реки Томпсон имела значение $0,4^{\circ}\text{C}$. На рис. 6 попарно представлены векторные поля скорости и изотермы, построенные через 8 сут от начала эксперимента.

Видно, что речная струя распространяется по поверхности озера благодаря тому, что на протяжении всего зимнего периода речная вода остаётся более холодной (следовательно, менее плотной), чем озёрная. В области впадения реки устанавливается обратная температурная стратификация с увеличением температуры воды в озере с глубиной (см. изотермы на рис. 6). За 8 суток поверхностная струя достигает расстояния 3,2 км, а затем её продвижение существенно замедляется. Целостная картина течений в зимний период заключается в том, что речная вода имеет тенденцию оставаться на поверхности озера в силу своей более низкой плотности, но при продвижении в центр озера непрерывно смешивается с водной массой водоёма. Важно также заметить, что в придонной области возникает очень слабое течение, вызванное силой Кориолиса.

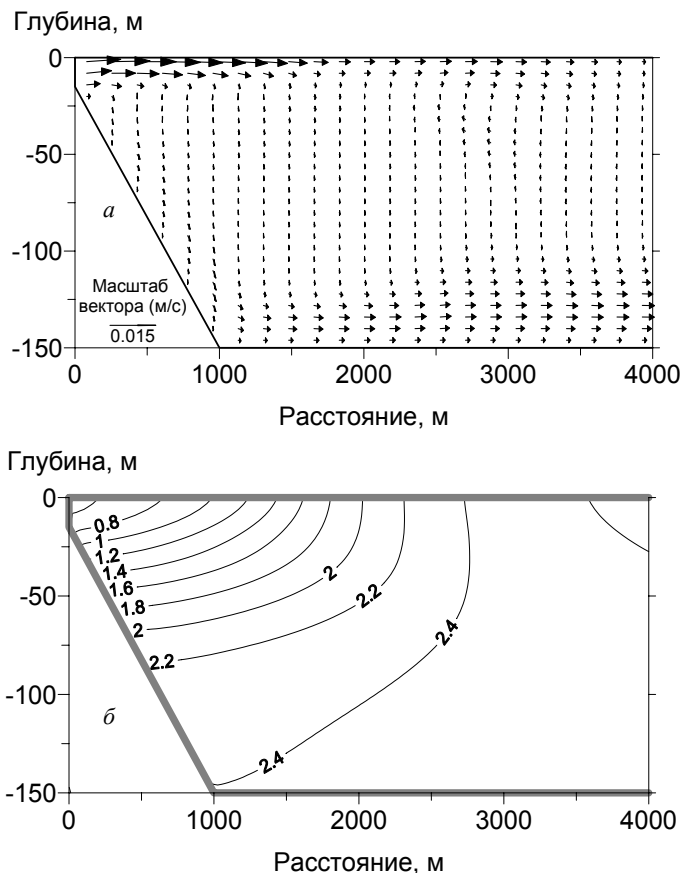


Рис. 6. Случай «зима». Векторное поле скорости (а) и изотермы (б) через 8 сут

Случай «ранняя весна». Весной циркуляционные течения в оз. Камлупс начинаются, когда температура воды притока приближается к температуре максимальной плотности. Особенность этого варианта численного эксперимента заключается в том, что речной приток поступает в озеро с температурой максимальной плотности ($T_R = 4^\circ\text{C}$). Температура озёрной воды задаётся равной $2,4^\circ\text{C}$ (как и в предыдущем случае).

Наиболее плотная речная вода под действием силы тяжести погружается в озеро по склону, индуцируя циркуляцию в прилегающей области. Циркуляционное течение отчётливо наблюдается на 8 сутки от начала эксперимента (см. рис. 7). Изотермы, изображенные на рис. 7, свидетельствуют о начале весенней гомотермии (явления однородности температуры воды по всей глубине водоёма) в озере Камлупс. Распределение температуры показывает, что процессы вертикального перемешивания достигают самого дна.

Случай «середина весны». Этот случай представляет особый интерес, поскольку он связан с возникновением и развитием термобара. Вычислительный эксперимент проводился при следующих условиях: начальная температура притока составляла 5°C и повышалась на $0,2^\circ\text{C}$ в сутки, $T_L = 2,4^\circ\text{C}$.

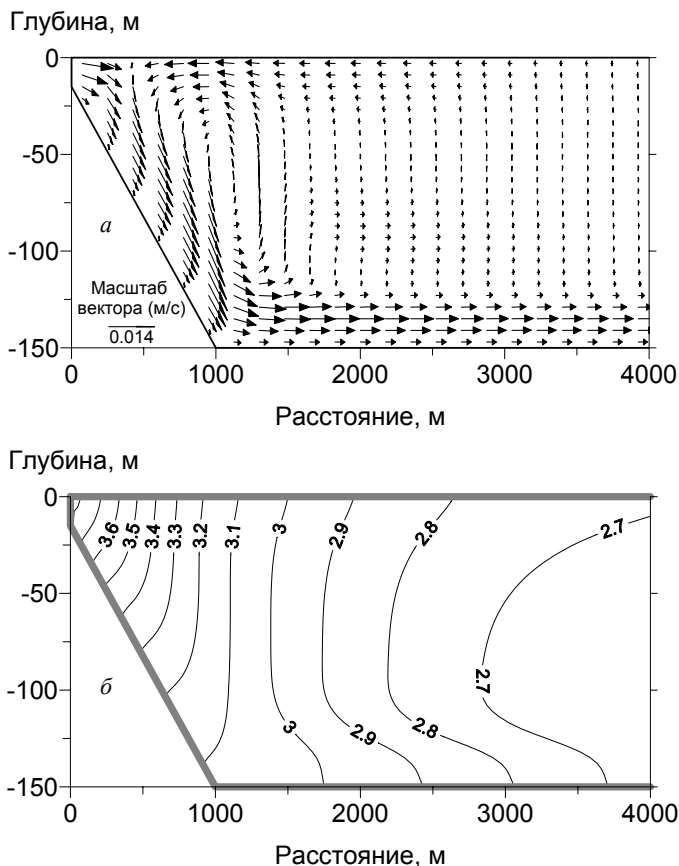


Рис. 7. Случай «ранняя весна». Векторное поле скорости (а) и изотермы (б) через 8 сут

Этот эксперимент отличается тем, что температура реки выше ТМП, а озера – ниже. По этой причине проникающий в озеро речной поток распространяется сначала поверхностной струей, а затем, смешиваясь с более холодной озёрной водной массой и достигая ТМП, начинает погружаться вниз до дна, образуя термобар (см. рис. 8). Эти опускания происходят вследствие так называемой термобарической неустойчивости столба жидкости. Для инициирования такой неустойчивости необходима внешняя сила, способная преодолеть создаваемый архимедовыми силами потенциальный барьер. Иными словами, аномальный рост сжимаемости воды при приближении её температуры к температуре максимальной плотности приводит к необратимому погружению водных масс до дна. За 8 сут фронт термобара продвигается на расстояние 1,2–1,3 км от устья реки Томпсон, формируя по обе стороны циркуляционные ячейки с зоной схождения воды. По мере прогрева озера термобар смещается в центральную часть водоёма (на 16-е сутки достигает 2,7–2,8 км) и затем исчезает (24-е сутки).

Случай «поздняя весна». Для данного случая температура воды в озере задавалась равной 5 °С, а температура реки в начальный момент составляла 8 °С и нагревалась на 0,2 °С в день.

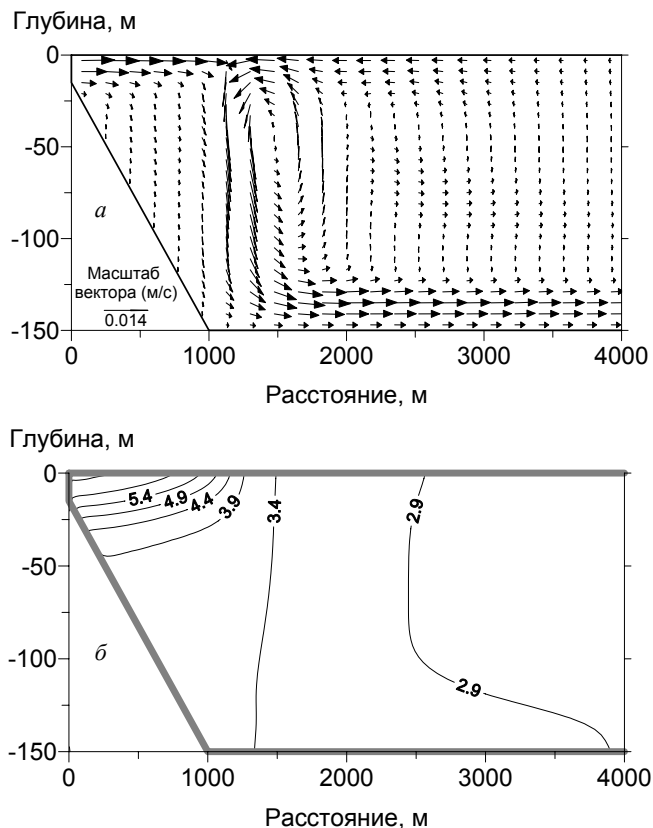


Рис. 8. Случай «середина весны». Векторное поле скорости (а) и изотермы (б) через 8 сут

Общая картина гидродинамических процессов для поздней весны аналогична случаю «зима». Однако есть и различие: рассматриваемый случай характеризуется более интенсивным распространением поверхностной струи за счёт усиления темпов теплонакопления речного притока и поверхностного слоя водоёма (см. рис. 9). В течение лета втекающая в озеро вода остаётся более тёплой (менее плотной), чем озёрная. По этой причине основная масса речной воды продвигается по поверхности водоёма, а часть, смешиваясь с озёрной, погружается вглубь. В озере устанавливается прямая температурная стратификация (см. изотермы на рис. 9). Как показывают изотермы на 24-е сутки, повышение температуры распространяется на глубину не менее 100 м.

Таким образом, рассмотренные выше случаи полностью соответствуют описаниям натурных наблюдений Э.К. Кармака и др. [8] (см. рис. 1) в озере Камлупс. Следовательно, разработанная численная модель и построенный алгоритм адекватно отражают природу взаимодействия систем «река – озеро».

Заключение

Разработан численный метод второго порядка точности, позволяющий моделировать связанные с весенним термобаром гидродинамические сценарии в озере Камлупс начиная с зимнего периода и заканчивая поздней весной.

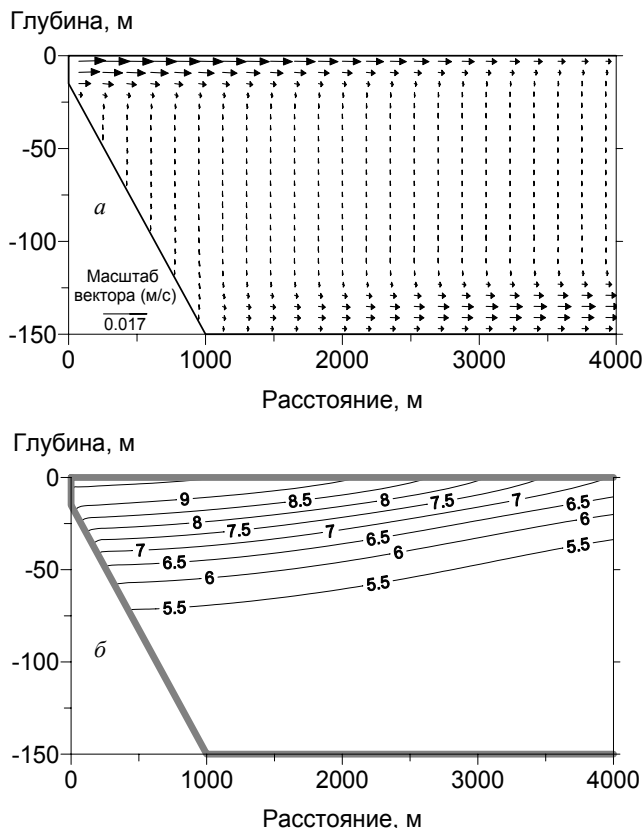


Рис. 9. Случай «поздняя весна». Векторное поле скорости (а) и изотермы (б) через 8 сут

Получено хорошее соответствие результатов вычислительных экспериментов с результатами других авторов и сведениями натурных наблюдений. Построен алгоритм согласования поля скорости и давления SIMPLD для течений с плавучестью, представляющий собой модификацию алгоритма SIMPLE Патанкара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Forel F.A. La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879-1880. Lac Léman // L'Écho des Alpes. 1880. № 3. P. 149–161.
2. Тихомиров А.И. О термическом баре в Якимварском заливе Ладожского озера // Изв. ВГО. 1959. Т. 91. № 5. С. 424–438.
3. Rodgers G.K. A Note on thermocline development and the thermal bar in Lake Ontario // Symposium of Garda, Int. Assoc. Scientific Hydrology. 1966. No. 1(70). P. 401–405.
4. Hubbard D.W., Spain J.D. The structure of the early spring thermal bar in Lake Superior // Proc. 16th Conf. Great Lakes Res., Int. Assoc. Great Lakes Res. 1973. P. 735–742.
5. Moll R.A., Brahe M. Seasonal and spatial distribution of bacteria, Chlorophyll and nutrients in nearshore Lake Michigan // J. Great Lakes Res. 1986. V. 12. No. 1. P. 52–62.
6. Bolgrien D.W., Granin N.G., Levin L. Surface temperature dynamics of Lake Baikal observed from AVHRR images // Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. 1995. V. 61. No. 2. P. 211–216.

7. Carmack E.C. Combined influence of inflow and lake temperatures on spring circulation in a riverine lake // J. Phys. Oceanogr. 1979. No. 9. P. 422–434.
8. Carmack E.C., Gray C.B.J., Pharo C.H., Daley R.J. Importance of lake-river interaction on seasonal patterns in the general circulation of Kamloops Lake, British Columbia // Limnol. Oceanogr. 1979. V. 24. No. 4. P. 634–644.
9. Wiegand R.C., Carmack E.C. Some types of temperature inversion encountered in a freshwater lake with short residence time // Limnol. Oceanogr. 1981. 26 (3). P. 565–571.
10. Killworth P.D., Carmack E.C. A filling-box model of river-dominated lakes // Limnol. Oceanogr. 1979. V. 24. No. 2. P. 201–217.
11. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // J. Mar. Sys. 2003. 43. P. 61–81.
12. Цветова Е.А. Численная модель термобара в озере Байкал // Метеорология и гидрология. 1997. № 9. С. 58–68.
13. Chen C.T., Millero F.G. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // Limnol. Oceanogr. 1986. V. 31. No. 3. P. 657–662.
14. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
15. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2004. 2(36). С. 70–81.
16. Leonard B. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1979. V. 19. P. 59–98.
17. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Наука, 1995. 288 с.
18. Цыденов Б.О. Численное моделирование конвективных течений в каверне // Перспективы развития фундаментальных наук: тр. VI Междунар. конф. Томск: Изд-во ТПУ, 2009. Т.2. С. 673–676.
19. Цыденов Б.О., Старченко А. В. Численное моделирование эффекта термобара в озере Байкал в период весенне-летнего прогрева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 120–130.
20. Полежаев В.И., Бунз А.В., Везуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.

Статья поступила 04.07.2013 г.

Tsydenov B. O., Starchenko A. V. NUMERICAL MODEL OF RIVER-LAKE INTERACTION IN THE CASE OF A SPRING THERMAL BAR IN KAMLOOPS LAKE. The paper is devoted to modeling hydrodynamic processes related to the spring thermal bar in Kamloops Lake by the second-order numerical method. The results of simulations agree with the studies made by other authors and in-situ observations. An important feature of the numerical technique is to use the SIMPLD procedure (a modification of the SIMPLE algorithm of Patankar and Spalding) for harmonization of pressure and velocity fields.

Keywords: thermal bar, mathematical model, temperature of maximum density, Boussinesq approximation, numerical experiment, Kamloops Lake.

TsYDENOV Bair Olegovich (Tomsk State University)
E-mail: btsydenov@gmail.com

STARCHENKO Alexander Vasil'evich (Tomsk State University)
E-mail: starch@math.tsu.ru

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ**МИХАИЛ РОМАНОВИЧ КУВАЕВ****К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ**

Профессор кафедры общей математики Михаил Романович Куваев родился 25 ноября 1923 года в деревне Покровка Курганского округа Тобольской губернии. По его драматической биографии можно изучать трагическую и героическую историю российского 20-го века.

Семья Куваевых, где Михаил Романович был десятым ребенком, жила очень трудно, испытывая крайнюю нужду и все перипетии и сложности периода коллективизации. Чего только не приходилось делать детям, чтобы унять голод: летом собирали травы и ягоды, продавали на рынке, занимались сбором и сдачей различного вторсырья. Как вспоминал сам Михаил Романович, впервые наелся в 14 лет. Но, видимо, эти трудности и сформировали тот удивительно стойкий характер, который позволил с достоинством вынести все испытания, выпавшие на его долю.

15 июня 1941 года Михаил Романович получил аттестат об окончании средней школы, а через неделю началась война. Подал заявление в военкомат с просьбой о направлении в военное училище. О высшем учебном заведении даже мечтать не приходилось: отец к этому времени умер, мама была серьезно больна. Поэтому еще в школьные годы Михаил Романович решил пойти в военное училище – там кормят и одевают. Трудности его не пугали. В военкомате несколько раз отказали, но через райком комсомола все-таки удалось добиться направления в училище. И 6 октября 1941 года М.Р. Куваев добровольцем (ему не было еще 18 лет) прибыл в Учебный батальон 32 запасного лыжного полка, стоявшего в Кургане. В батальоне готовили только сержантский состав, а Михаилу Романовичу так хотелось учиться на лейтенанта! После Октябрьских праздников приказом по Уральскому военному округу М.Р. Куваеву было присвоено звание замполитрука. Учеба продолжалась до 31 декабря 1941 года. За это время каждый курсант сделал по 6 выстрелов из винтовки. А затем батальон был отправлен эшелоном до Ростова Великого. Там получили оружие, продовольствие, боеприпасы и – на передовую, 200-километровым маршем на лыжах. Через три недели обороны батальон лыжников удачно прорвался в тыл врага с целью уничтожать коммуникации противника. Но атака захлебнулась, комбат и комиссар сразу погибли (как вспоминал Михаил Романович, воевать не сразу научились). В живых остались 15 бойцов с винтовками, лишь у Михаила Романовича был автомат и 3 полных диска. Сам вызвался прикрывать отход товарищей. Минометным огнем был тяжело ранен, очнулся к утру. 5 суток пролежал на снегу в полуобморочном состоянии с перебитыми ногами и правой рукой. Проходившие мимо на задание разведчики сообщили о раненом санитарам, и Михаил Романович попал в госпиталь. Хирург вскрывал раны без обезболивания, доставал осколки. На обмороженных ногах началась гангрена. В сортировочном госпитале один-два раза в день откусывали пальцы ног без обезболивания, терял сознание от боли. За это время в палате умерло 20 человек, и, по словам врачей, Михаил Романович тоже был кандидатом. Спорил с врачами, что выживет.

Четыре долгих месяца Михаил Романович пролежал в тяжелейшем состоянии. Когда температура спала, отправили долечиваться в тыл. 27 июня 1942 года привезли в Томск. Через год, в августе 1943 года М.Р. Куваев пришел на костылях поступать в Томский университет на физико-математический факультет. Приняли без экзаменов. Первые три недели ходил на занятия из госпиталя, но затем из-за открытых ран стал заниматься самостоятельно по книгам. И еще консультировал однокурсника, который так же, как и он, потерял ноги на фронте. Первую сессию (и все последующие) сдал на отлично, хотя во время сессии пришлось перенести две операции. Вообще, с операциями не везло. Минимум шесть сделали напрасно! Только 14 сентября 1945 года, пролежав 3 года и 7 месяцев, Михаил Романович выписался из госпиталя со страшными трофическими язвами на ногах. После занятий ежедневно ходил в поликлинику на перевязки. Но какое счастье было слушать лекции! Сразу же включился в общественную работу и был избран секретарем комсомольской организации физико-математического факультета. Себя не берег, и раны открылись снова, опять больница и операции.

В июне 1948 Сталинский стипендиат Михаил Романович Куваев с отличием окончил университет. Научный руководитель П.П. Куфарев пригласил его в аспирантуру, но декан уговорил поработать год преподавателем. Через год поступил в аспирантуру и был избран секретарем комсомольской организации университета. 23 марта 1953 года М.Р. Куваев защитил кандидатскую диссертацию «Об уравне-

ниях типа Лёвнера для многосвязных областей». В диссертации получено дифференциальное уравнение для функции, отображающей круг на специальное однопараметрическое семейство многосвязных областей, являющееся обобщением известного уравнения Лёвнера. Также детально изучен частный случай семейства двусвязных областей.



Михаил Романович и Зоя Семеновна Кубаевы. 1949 г.

В 1955 году М.Р. Кубаев избирается на должность доцента кафедры общей математики и секретарём партийного бюро факультета.

Михаил Романович обладал несомненным педагогическим талантом, очень любил студентов, мастерски читал лекции. Многие поколения студентов-физиков слушали в его исполнении 7-семестровый курс «Высшая математика», включающий в себя математический анализ, аналитическую геометрию, линейную алгебру, обыкновенные дифференциальные уравнения, элементы дифференциальной геометрии, теорию вероятностей и математическую статистику, комплексный

анализ с операционным исчислением, специальные функции, уравнения математической физики, интегральные уравнения, вариационное исчисление, около 900 часов лекций и практических занятий. После смерти учителя, профессора П.П. Куфарева, Михаил Романович несколько лет читал курс теории функций комплексного переменного на мехмате. Работа над лекциями продолжалась всю жизнь. В последние годы своей работы Михаил Романович предложил новый подход к построению курса «Математический анализ»: идти от общего к частному. Так, «Дифференциальное исчисление» он сразу излагал для функции многих переменных, а раздел «Ряды» начинал с рядов функциональных, числовые ряды рассматривались как частный случай.



Преподаватели механико-математического факультета ТГУ 1948–1949 гг.

А болезни не отступали, операции, в том числе и неудачные, продолжались. 16 января 1965 года очередной раз ампутировали ногу. Михаил Романович вставал на костыли и шел на занятия. Студенты ставили несколько табуреток у доски, Михаил Романович опирался на них коленом обрезанной ноги, переступал протезом на правой ноге и так читал лекции. Всегда сам выполнял не только все свои учебные поручения, но и помогал кафедре и факультету, безотказно заменяя заболевших преподавателей.

В 1956 году М.Р. Куваев становится заведующим самой большой кафедрой мехмата – кафедрой общей математики. На этой непростой должности он прослужит 22 года. В 60-е годы, с открытием физико-технического, радиотехнического факультетов, специального факультета прикладной математики кафедра стала очень многочисленной – в учебном процессе участвовало 33 преподавателя. Как заведующий кафедрой Михаил Романович предложил всем лекторам составить рабочие программы читаемых курсов с подробным изложением вопросов, предлагаемых на лекции. Под его руководством на кафедре регулярно собирался мето-

дический семинар, где рассматривались и новые программы, и учебные пособия, созданные на кафедре. В те годы были приняты регулярные взаимные посещения занятий с последующим их обсуждением. Михаил Романович делал более 100 посещений в год, считая, что это повышает педагогическое мастерство и того, кого посещают, и тех, кто присутствует на лекциях коллег. После посещений занятий молодых преподавателей всегда сначала хвалил, отмечал удачные моменты и только потом вносил критические замечания и предложения. Помогал кафедральной молодежи с удовольствием, всегда можно было обратиться с любым вопросом и получить доброжелательный, без всякого высокомерия ответ.

Многие годы Михаил Романович возглавлял методическое объединение преподавателей математики вузов Томска, и свыше 10 лет – объединение преподавателей математики вузов Западной Сибири, когда кафедра общей математики ТГУ стала центром этой работы. В 60–70 годы М.Р. Куваев выступал с лекциями по вопросам преподавания математики в 18 городах страны. Многие годы читал курс по методике преподавания математики на факультете повышения квалификации преподавателей ТГУ. На базе выполнения широчайшего по содержанию спектра лекционных курсов написал десятки методических разработок, обобщенных позже в монографию «Методика преподавания математики в вузе» (1983 г.). В апреле 1980 года получил ученое звание профессора. В 1967–1968 годах М.Р. Куваев опубликовал учебник «Дифференциальное и интегральное исчисление» в 5 частях объемом 2924 страницы. Отличительной особенностью книг является общность подходов при построении теории, которая позволила изложить огромный материал. Доступность достигается краткостью и строгостью доказательств, рассмотрением интерпретаций сначала в простейших случаях с последовательным переходом к более общим и самым общим. Наглядности изложения способствуют приведенные подробные решения и большое число рисунков. Особенно стоит отметить, что учебник знакомит студентов с правилами вывода логики и учит находить доказательства. Михаил Романович любил подчеркивать важность совета Б. Паскаля: перед началом доказательства записать, что в теореме дано и что нужно доказать, заменив при этом термины определениями.

Михаил Романович Куваев – лауреат 3-х премий Томского университета за лучшие научные работы (в 1980 г. – за трехтомник «Дифференциальное и интегральное исчисление», в 1988 г. – за учебник «Линейные дифференциальные системы», в 1992 г. – за книгу «Методика преподавания математики в вузе»), также он удостоен 2-х премий Министерства образования за помощь другим вузам. Награжден орденом Октябрьской Революции и двумя орденами Отечественной войны 1-й степени. Автор 193 работ общим объемом около 8000 страниц. Среди них 16 книг, 2 монографии, 20 сборников задач.

Никогда ему не приходило в голову отказаться от какой-либо работы или общественных поручений по причине нездоровья. Коллегам Михаил Романович рассказывал, что в юности очень переживал из-за малого роста. И тем удивительней, что этот невысокого роста, без обеих ног человек был настоящим мужчиной, не жалевшим себя, бравшимся всегда за самую трудную и сложную работу. «Сам вызвался» – это о нем. Ему выпала тяжелейшая судьба, а он не только все преодолел и превозмог, но никогда не роптал, стоически выносил все болезни и препятствия и был необыкновенно добрым, щедрым, бескорыстным и отзывчивым человеком.

2 июня 2001 года, после долгой мучительной болезни Михаил Романович Куваев скончался. Похоронен на кладбище поселка Бактин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куваев М.Р. Об уравнении типа Левнера для много связных областей: дис. ... канд. физ.-мат. наук. 1952. 84 с.
2. Куваев М.Р. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие для экономических специальностей университетов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1963. 248 с.
3. Куваев М.Р. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для студентов вузов, педагогических институтов и университетов. Часть I. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1967. 491 с.
4. Куваев М.Р. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для студентов вузов, педагогических институтов и университетов. Часть II. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 376 с.
5. Куваев М.Р. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для студентов вузов, педагогических институтов и университетов. Часть III. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977. 375 с.
6. Куваев М.Р. Активизация работы студентов на лекциях по математике: методические указания для преподавателей математики вузов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. 17 с.
7. Куваев М.Р. Лекция по математике в вузе: методические указания для преподавателей математики вузов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979. 24 с.
8. Куваев М.Р. Методически указания по теме: «Функциональные свойства рядов». Для слушателей математического отделения ФПК и студентов физических специальностей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. 25 с.
9. Куваев М.Р. О методике проведения зачетов и экзаменов: методические указания для преподавателей математики вузов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. 16 с.
10. Куваев М.Р. Методически указания по теме: «Интегралы, зависящие от параметра». Для слушателей математического отделения ФПК и студентов физических специальностей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 32 с.
11. Куваев М.Р. О наглядности обучения математике: методические указания для преподавателей математики вузов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. 28 с.
12. Куваев М.Р. Требования к учебной задаче по математике: методические указания для преподавателей вузов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. 24 с.
13. Куваев М.Р. Методика преподавания математики в вузе. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. 387 с.

О.М. Биматова, Е.Н. Пуяткина, Е.Г. Лазарева

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: michael123@mail.ru

БУЯКОВА Светлана Петровна – доктор технических наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sbuyakova@ispms.ru

ВАСЕНИН Игорь Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

ГУБИН Владимир Николаевич – аспирант кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: vovantus@sibmail.com

ДАНИЛКИН Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, программист лаборатории высокопроизводительных вычислений Томского государственного университета. E-mail: ugin@math.tsu.ru

ДИЛЬ Денис Олегович – аспирант кафедры теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: gradpower@list.ru

ЕВТУШЕНКО Евгений Павлович – программист лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук. E-mail: eugene@ispms.ru

ЕМЕЛЬЯНОВА Татьяна Вениаминовна – старший преподаватель кафедры математического анализа Томского государственного университета. E-mail: tv_em@mail.ru

ЕРЕМИН Михаил Олегович – аспирант кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: bacardi@sibmail.com

ЗЕЛЕПУГИН Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Томского научного центра Сибирского отделения Российской академии наук. E-mail: szel@dsm.tsc.ru

ИВАНОВА Оксана Владимировна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Томского научного центра Сибирского отделения Российской академии наук. E-mail: bliz3@yandex.ru

КОНЕВ Виктор Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и математического моделирования Томского государственного университета. E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

КУЛЬКОВ Сергей Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: kulkov@ispms.ru

ЛИПАНОВ Алексей Матвеевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета, академик Российской академии наук. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

МАКАРОВ Павел Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pvm@ispms.ru

МИНЬКОВ Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

НУТЕРМАН Роман Борисович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории высокопроизводительных вычислений, Томского государственного университета, научный сотрудник отдела климата и геофизики, факультета естественных наук Института Нильса Бора Университета Копенгагена. E-mail: nutrik@math.tsu.ru, nuterman@nbi.ku.dk

Полухина Анастасия Валерьевна – магистр кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: spongik@yandex.ru

СМОЛИН Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: smolin@ispms.tsc.ru

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: starch@math.tsu.ru

СТЕПАНОВА Юлия Олеговна – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

ТЕРЕНТЬЕВА Мария Валентиновна – студентка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: mariya-terenteva@mail.ru

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

ТРАВКИНА Виолетта Валерьевна – сотрудник Сбербанка России, г. Новосибирск.

ТРОФИМЕНКО Надежда Николаевна – аспирантка кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: Trofimenko@sibmail.com

ХМЫЛЕВА Татьяна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: TEX2150@yandex.ru.

ЦЫДЕНОВ Баир Олегович – аспирант кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: btsydenov@gmail.com

ШРАГЕР Эрнст Рафаилович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, декан физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sher@ftf.tsu.ru