ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика и механика № 55

УДК 512.553+512.541 MSC: 19A49, 13D15, 18F30
DOI 10.17223/19988621/55/4

Е.А. Тимошенко

# ГРУППА ГРОТЕНДИКА $K_0$ ПРОИЗВОЛЬНОГО csp-КОЛЬЦА[1]

Доказывается критерий конечной порождённости проективного модуля над csp-кольцом. Также показано, что группа Гротендика $K_0$ всякого csp-кольца есть свободная группа счётного ранга.

**Ключевые слова:** *csp-кольцо*, *проективный модуль*, *группа Гротендика.*

Цель настоящей работы – выяснить, как функтор $K_0$ действует на csp-кольца и на гомоморфизмы между ними. Для этого используются свойства проективных модулей над csp-кольцами, установленные автором ранее.

Через $\mathbf{Z}$ будет обозначаться кольцо целых чисел. Символ ■ обозначает конец доказательства или его отсутствие.

Пусть $L$ – некоторое бесконечное множество простых чисел. Для числа $p \in L$ зафиксируем кольцо $R_p$, совпадающее либо с кольцом целых $p$-адических чисел, либо с некоторым кольцом вычетов $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ (для разных $p$ число $k > 0$ может быть разным). Обозначим

$$K = \prod_{p\in L} R_p \quad \text{и} \quad T = \bigoplus_{p\in L} R_p \subset K\,;$$

ясно, что $T$ является идеалом кольца $K$.

Будем называть csp-*кольцом* каждое подкольцо $R$ кольца $K$, такое, что $T \subset R$ и $R/T$ является полем. Заметим, что мощность этого поля не превышает мощности континуума; из результатов статей [1–3] вытекает, что поле $R/T$ может оказаться несчётным.

Если $L$ совпадает с множеством всех простых чисел и каждое $R_p$ есть кольцо целых $p$-адических чисел, а $R/T$ изоморфно полю рациональных чисел, то соответствующее csp-кольцо (оно определено однозначно) называют *кольцом псевдорациональных чисел*. Это кольцо было независимо введено в работах Фомина [4] и Крылова, Пахомовой и Подберезиной [5] для исследования ряда важных классов смешанных абелевых групп (в частности, sp-групп). Позже Крылов предложил рассматривать csp-кольца (как обобщение кольца псевдорациональных чисел).

Кольцо $R_p$ и его единичный элемент $e_p$ можно естественным образом отождествить с соответствующими идеалом и идемпотентом в кольце $R$, в этом случае $R_p = Re_p$. Можно заметить, что кольцо $R_p$ допускает в точности одну модульную структуру как над самим собой, так и над кольцом $R$; поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать все $R_p$ как $R$-модули, не оговаривая это дополнительно.

Напомним основные понятия, которые понадобятся в дальнейшем.

**Определение.** Пусть $\langle \Phi, +\rangle$ – коммутативный моноид. Введём на множестве $\Phi\times\Phi$ отношение эквивалентности: положим $(\xi,\eta)\approx(\mu,\nu)$ в том и только в том случае, когда $\xi+\nu+\zeta=\mu+\eta+\zeta$ хотя бы для одного $\zeta\in\Phi$. Далее, будем считать, что суммой класса эквивалентности, содержащего пару $(\xi,\eta)$, и того класса экви-

[1] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (госзадание № 1.12877.2018/12.1).

валентности, который содержит $(\mu, \nu)$, является класс, содержащий $(\xi+\mu, \eta+\nu)$. Относительно указанной операции множество всех классов эквивалентности пар из $\Phi\times\Phi$ образует группу, которая называется *группой Гротендика* моноида $\Phi$.

Если $R$ – некоторое кольцо, то через $K_0(R)$ обозначается группа Гротендика моноида классов изоморфных конечно порождённых проективных $R$-модулей с операцией взятия прямой суммы (см. [6]).

Для описания группы $K_0$ произвольного csp-кольца $R$ нам потребуются некоторые дополнительные сведения. Как отмечено в [7], элемент кольца $R$ является идемпотентом тогда и только тогда, когда он совпадает с элементом вида

$$e_X = \sum_{p\in X} e_p \quad \text{или} \quad 1-e_X = 1-\sum_{p\in X} e_p \ ,$$

где $X$ – конечное (возможно, пустое) подмножество множества $L$. В дальнейшем, используя обозначение $e_X$, мы будем автоматически полагать, что множество $X$ является конечным. В работе [7] также показано, что подмножество из $R$ будет идеалом в $R$ тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством одного из следующих двух типов:

$$J = \bigoplus_{p\in L} J_p \ ; \tag{1}$$

$$J = (1-e_X)R \oplus \Bigl(\bigoplus_{p\in X} J_p\Bigr), \tag{2}$$

где $J_p$ – произвольные идеалы соответствующих колец $R_p$.

С помощью матриц и определителей с элементами из csp-колец автором ранее была доказана

**Теорема 1 [8].** Каждый проективный $R$-модуль разлагается в прямую сумму подмодулей, изоморфных идеалам кольца $R$. ■

Следующий факт для удобства приведём вместе с доказательством.

**Предложение 2 [8].** Модуль $M_R$ проективен тогда и только тогда, когда

$$M \cong \Bigl(\bigoplus_{i\in I} M_i\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{p\in L} F_p\Bigr), \tag{3}$$

где $F_p$ – некоторые свободные $R_p$-модули, а все $M_i$ – некоторые идеалы кольца $R$ вида $(1-e_X)R$ (множество $X$, вообще говоря, зависит от индекса $i$).

***Доказательство.*** Пусть $M$ – проективный $R$-модуль, тогда в силу теоремы 1 этот модуль будет изоморфен прямой сумме идеалов кольца $R$, которые, как мы знаем, имеют вид (1) или (2). Ясно, что все входящие в прямое разложение проективного модуля идеалы тоже должны быть проективными. Если $R_p$ есть кольцо целых $p$-адических чисел, то всякий ненулевой идеал $J_p \subset R_p$ как $R$-модуль будет изоморфен $R_p$. Если же $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, то из всех идеалов кольца $R_p$ проективными как $R$-модули будут лишь 0 и $R_p$ (поскольку только эти идеалы являются проективными $R_p$-модулями). Это означает, что любой проективный идеал кольца $R$ обязательно изоморфен как $R$-модуль идеалу $J$ вида (1) или (2), такому, что для всякого $p$ идеал $J_p$ совпадает либо с 0, либо с $R_p$. Группируя прямые слагаемые вида $R_p$, получаем, что имеет место изоморфизм (3).

Обратно, любой $R$-модуль вида (3) является проективным, так как он изоморфен прямой сумме семейства идеалов, каждый из которых служит для кольца $R$ прямым слагаемым. ■

Для всякого модуля $M_R$ размерность $r(M)$ фактор-модуля $M/MT$ как пространства над полем $R/T$ назовём *псевдорангом* модуля $M$. Очевидно, что псевдоранг прямой суммы всякого семейства $R$-модулей равняется сумме псевдорангов этих модулей. Идеалы вида (1) и (2) имеют псевдоранги, равные соответственно 0 и 1; отсюда, в частности, следует, что для модуля вида (3) выполнено $r(M) = |I|$.

Пусть для $R$-модуля $M$ имеет место изоморфизм (3). Тогда для любых $i \in I$ и $p \in L$ идеал $M_i e_p$ либо совпадает с $R_p$, либо равен 0. Это означает, что при любом $p \in L$ модуль $Me_p$ является свободным $R_p$-модулем; ранг этого свободного модуля (определяемый однозначно) далее будем обозначать через $r_p(M)$. Таким образом, всякому проективному модулю $M_R$ можно сопоставить кардинальные числа $r(M)$ и $\{r_p(M)\}_{p\in L}$. Полученный набор кардиналов мы назовём *системой инвариантов* проективного модуля $M$ (в статье [9] было впервые предложено использовать эту систему инвариантов для описания проективных модулей).

**Предложение 3 [8].** Пусть $A$ и $M$ – проективные $R$-модули, причём модуль $A$ вкладывается в $M$. Тогда $r(A) \le r(M)$ и $r_p(A) \le r_p(M)$ при всех $p \in L$. ■

В статьях [8, 10] был доказан ряд важных структурных теорем о проективных модулях над csp-кольцами.

**Теорема 4 [8, 10].** Два проективных $R$-модуля изоморфны в том и только в том случае, когда они имеют одинаковые системы инвариантов. ■

Следующий результат показывает, какие условия должны быть наложены на набор кардинальных чисел, чтобы он служил системой инвариантов некоторого проективного $R$-модуля.

**Теорема 5 [8, 10].** Пусть $\lambda$ и $\{\lambda_p\}_{p\in L}$ – произвольные кардинальные числа, и пусть $W = \{ p \in L \mid \lambda_p < \lambda\}$. Проективный $R$-модуль $M$, одновременно удовлетворяющий всем равенствам $r(M) = \lambda$ и $r_p(M) = \lambda_p$, существует в том и только в том случае, когда

(A) множество $W$ конечно

или

(B) множество $W$ счётно и последовательность $\{\lambda_p\}_{p\in W}$ сходится к $\lambda$. ■

При помощи приведённых результатов можно получить критерий конечной порождённости проективного $R$-модуля.

**Теорема 6.** Для проективного $R$-модуля $M$ равносильны следующие условия:

1) модуль $M$ конечно порождён;

2) все кардинальные инварианты модуля $M$ конечны и $r_p(M) = r(M)$ почти для всех $p \in L$.

***Доказательство.*** Обозначим $\lambda = r(M)$ и $\lambda_p = r_p(M)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Из условия 2) вытекает, что множество $W = \{ p \in L \mid \lambda_p < \lambda\}$ конечно, т.е. выполнено условие (A) теоремы 5. Проективный модуль $A$ зададим условием

$$A = \Big(\bigoplus_{\lambda}(1-e_W)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in L} F_p\Big),$$

где $F_p$ – это свободный $R_p$-модуль ранга

$$r_p(F_p) = \begin{cases} \lambda_p, & \text{если } p \in W, \\ \lambda_p - \lambda, & \text{если } p \in L \setminus W. \end{cases}$$

Тогда $r(A) = \lambda\, r((1-e_W)R) = \lambda$; далее, если $p \in W$, то

$$r_p(A) = \lambda\, r_p((1-e_W)R) + r_p(F_p) = 0 + \lambda_p = \lambda_p,$$

а если выполнено $p \in L \setminus W$, то справедливы равенства

$$r_p(A) = \lambda \cdot r_p((1 - e_W)R) + r_p(F_p) = \lambda + (\lambda_p - \lambda) = \lambda_p,$$

т.е. все инварианты модулей $M$ и $A$ совпадают. Так как строение проективного модуля $M_R$ однозначно определяется его системой инвариантов, получаем, что $M \cong A$. Все кардиналы $\lambda_p$ конечны, поэтому все свободные $R_p$-модули $F_p$ имеют конечный ранг и, значит, являются конечно порождёнными $R$-модулями. Из 2) следует, что множество тех $p \in L$, для которых $F_p \neq 0$, конечно; отсюда получаем, что $M$ – конечно порождённый $R$-модуль.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $M_R$ обладает конечной системой образующих, которая состоит из $s$ элементов. В силу проективности модуля $M$ можно считать, что $M$ – прямое слагаемое свободного модуля $R^s$; пусть $R^s = M \oplus A$. Ввиду предложения 3 инварианты модулей $M$ и $A$ не могут оказаться больше соответствующих инвариантов модуля $R^s$, т.е. они не превышают числа $s$. Из $\lambda < \aleph_0$ следует, что условие (B) из теоремы 5 не выполнено, а значит, выполнено условие (A). Таким образом, почти для всех $p \in L$ имеем $r_p(M) \geq r(M)$. Применяя аналогичные рассуждения к проективному модулю $A$, получаем, что при почти всех $p \in L$ справедливы неравенства $r_p(M) \geq r(M)$ и $r_p(A) \geq r(A)$. Для всех таких $p$ выполнено

$$s = r(R^s) = r(M) + r(A) \leq r_p(M) + r_p(A) = r_p(R^s) = s,$$

откуда, в частности, следует равенство $r_p(M) = r(M)$. ■

Через $\Phi$ обозначим множество всех функций $\xi\colon L \to \mathbf{Z}$, имеющих неотрицательные значения и таких, что $\xi(p)$ равно одному и тому же числу почти для всех $p \in L$. Очевидно, что $\Phi$ будет коммутативным моноидом относительно операции поточечного сложения.

Для всякого конечно порождённого проективного модуля $M_R$ и всякого $p \in L$ положим $\xi^M(p) = r_p(M)$, тогда ввиду теоремы 6 выполнено $\xi^M \in \Phi$. Очевидно, что $\xi^{M \oplus A} = \xi^M + \xi^A$ и что из $M \cong A$ всегда следует $\xi^M = \xi^A$. Обратно, если $\xi^M = \xi^A$, то по теореме 6 будет справедливо равенство $r(M) = r(A)$, а значит (в силу теоремы 4), выполнено $M \cong A$.

Зафиксируем функцию $\mu \in \Phi$. Для всякого $p \in L$ положим $\lambda_p = \mu(p)$; через $\lambda$ обозначим то неотрицательное число, которое совпадает со значением $\mu(p)$ при почти всех $p \in L$. Кардинальные числа $\lambda$ и $\{\lambda_p\}_{p \in L}$ удовлетворяют условию (A) теоремы 5, поэтому из теорем 5 и 6 следует, что $\mu = \xi^M$ для некоторого конечно порождённого проективного $R$-модуля $M$. Таким образом, $\Phi$ есть моноид классов изоморфных конечно порождённых проективных $R$-модулей.

**Теорема 7.** Для всякого csp-кольца $R$ группа Гротендика $K_0(R)$ представляет собой свободную группу счётного ранга.

***Доказательство.*** Определим отображение $h$ из $\Phi \times \Phi$ в группу $\mathbf{Z}^L$ всех функций $L \to \mathbf{Z}$, полагая $h(\xi, \eta) = \xi - \eta$ (вычитание осуществляется поточечно). Так как в $\Phi$ справедлив закон сокращения, то для произвольных $\xi, \eta, \mu, \nu \in \Phi$ следующие три условия будут равносильны:

1) $\xi + \nu + \zeta = \mu + \eta + \zeta$ для некоторого $\zeta \in \Phi$;
2) $\xi + \nu = \mu + \eta$;
3) $h(\xi, \eta) = h(\mu, \nu)$.

Если задать на $\Phi \times \Phi$ операцию покоординатного сложения, получим

$$h((\xi, \eta) + (\mu, \nu)) = h(\xi + \mu, \eta + \nu) = \xi + \mu - \eta - \nu = h(\xi, \eta) + h(\mu, \nu)$$

для произвольных $\xi, \eta, \mu, \nu \in \Phi$. С учётом равносильности условий 1) и 3) отсюда можно заключить, что образ $h(\Phi \times \Phi)$ отображения $h$ служит группой Гротендика моноида $\Phi$. Остаётся лишь показать, что этот образ представляет собой прямую сумму счётного числа копий группы $\mathbf{Z}$.

В самом деле, рассмотрим множество функций $\Lambda = \{\mu_0\} \cup \{\mu_p \mid p \in L\} \subset \boldsymbol{Z}^L$, где $\mu_0(p) = \mu_p(p) = 1$ для любого $p \in L$ и $\mu_p(q) = 0$ для любых различных $p, q \in L$. Для всякого $p \in L \cup \{0\}$ имеем $\mu_p \in \Phi$ и, следовательно, $\mu_p = h(\mu_p, 0) \in h(\Phi \times \Phi)$. Ясно также, что входящие в множество $\Lambda$ функции являются линейно независимыми и порождают свободную группу. Заметим, что для произвольной функции $\mu \in h(\Phi \times \Phi)$ значение $\mu(p)$ при почти всех $p \in L$ равно одному и тому же числу $m \in \mathbf{Z}$, т.е. множество $Y = \{p \in L \mid \mu(p) \neq m\}$ конечно. Тогда

$$\mu = m \cdot \mu_0 + \sum_{p \in Y} (\mu(p) - m)\mu_p .$$

Таким образом, $h(\Phi \times \Phi)$ есть свободная группа с базисом $\Lambda$. ■

Мы показали, что группу $K_0(R)$ можно отождествить с подгруппой $h(\Phi \times \Phi)$ группы $\mathbf{Z}^L$. Известно (см. [6, 11]), что всякому кольцевому гомоморфизму $R \to S$ соответствует гомоморфизм абелевых групп $K_0(R) \to K_0(S)$, индуцируемый функтором $- \otimes_R S\colon$ mod-$R \to$ mod-$S$ (последний, как легко видеть, переводит конечно порождённые проективные модули категории mod-$R$ в модули, которые конечно порождены и являются проективными в mod-$S$). Выясним, как этот гомоморфизм групп действует в случае, когда $R$ и $S$ – csp-кольца.

Пусть, помимо csp-кольца $R$, задано ещё одно csp-кольцо $S$, причём

$$U = \bigoplus_{p \in Z} S_p \subset S \subset \prod_{p \in Z} S_p = H$$

($Z$ – некоторое бесконечное множество простых чисел). Обозначим через $f_p$, где $p \in Z$, идемпотент кольца $S$, лежащий в $S_p$.

Как обычно, мы считаем, что кольцевой гомоморфизм обязательно переводит единичный элемент кольца в единичный элемент.

**Предложение 8.** Пусть $\varphi\colon R \to S$ – некоторый кольцевой гомоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) $Z \subset L$;

(б) при любом $p \in Z$ существует единственный сюръективный гомоморфизм колец $\varphi_p\colon R_p \to S_p$;

(в) для всякого элемента $x = (x_p)_{p \in L} \in R$ выполнено $\varphi(x) = (\varphi_p(x_p))_{p \in Z}$;

(г) поле $R/T$ вкладывается в $S/U$ в качестве подполя.

***Доказательство.*** (а) Пусть $p \in Z$. Тогда элемент $1_S = \varphi(1_R)$ не делится на $p$, из чего вытекает, что и $1_R$ не делится на число $p$. С другой стороны, аддитивная группа $R^+$ кольца $R$ является $p$-делимой при всех $p \notin L$. Таким образом, $Z \subset L$.

(б) Зафиксируем число $p \in Z$. Если $R_p$ – кольцо целых $p$-адических чисел, то требуемое утверждение очевидно. Допустим теперь, что $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. Из того, что $1_S = \varphi(1_R)$, следует, что $1_S$ есть сумма идемпотентов $\varphi(e_p)$ и $\varphi(1_R - e_p)$; при этом ввиду равенства $p^k\varphi(e_p) = 0$ идемпотент $\varphi(e_p)$ совпадает с 0 или с $f_p$. Идемпотент $\varphi(1_R - e_p)$ не может совпадать с $1_S$, так как $1_R - e_p$ делится на $p$ в кольце $R$, но $1_S$ не делится на $p$ в кольце $S$. Таким образом, имеем $\varphi(e_p) = f_p$. Из равенства $p^k f_p = 0$ легко вывести, что существует единственный сюръективный гомоморфизм колец $R_p \to S_p$.

(в) Зададим аддитивный гомоморфизм $\psi\colon R \to H$, полагая $\psi(x) = (\varphi_p(x_p))_{p \in Z}$ для всех $x = (x_p)_{p \in L} \in R$. Тогда $\varphi - \psi \in \mathrm{Hom}(R, H)$, причём порождённая единичным элементом $1_R$ кольца $R$ циклическая группа $\langle 1_R \rangle$ лежит в ядре гомоморфизма $\varphi - \psi$. Легко убедиться, что группа $R/\langle 1_R \rangle$ делима, а $H$ – редуцированная группа. Поэтому $\mathrm{Hom}(R/\langle 1_R \rangle, H) = 0$, а значит, $\varphi = \psi$, что и требовалось.

(г) Из пункта (в), в частности, вытекает, что $\varphi(T) = U$. Тогда гомоморфизм $\varphi$ индуцирует вложение $R/T \to S/U$. Предложение доказано. ■

В ситуации, описанной в предложении 8, обозначим через $\alpha$ тот гомоморфизм $\mathbf{Z}^L \to \mathbf{Z}^Z$, который сопоставляет всякой функции $L \to \mathbf{Z}$ её ограничение на множество $Z$. Ясно, что $R \otimes_R S \cong S$; кроме того, $R_p \otimes_R S \cong S_p$, если $p \in Z$, и $R_p \otimes_R S = 0$, если $p \in L \setminus Z$. Пусть $\{\delta_0\} \cup \{\delta_p \mid p \in Z\} \subset \boldsymbol{Z}^Z$ есть базис свободной группы $K_0(S)$, построенный так же, как строился базис группы $K_0(R)$. Нетрудно убедиться, что проективному модулю $R$ соответствует функция $\mu_0$, а проективным модулям $R_p$, где $p \in L$, – функции $\mu_p$; аналогичные утверждения справедливы и для проективных $S$-модулей $S$ и $S_p$. Заметим, что $\alpha(\mu_0) = \delta_0$, а функция $\alpha(\mu_p)$ равна $\delta_p$, когда $p \in Z$, и равна 0, когда $p \in L \setminus Z$. Поэтому из изоморфизмов, приведённых выше, следует, что групповой гомоморфизм $K_0(R) \to K_0(S)$, индуцируемый кольцевым гомоморфизмом $\varphi$, представляет собой ограничение отображения $\alpha$: $\mathbf{Z}^L \to \mathbf{Z}^Z$ на подгруппу $K_0(R)$ группы $\mathbf{Z}^L$.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Тимошенко Е.А.* О базовых полях csp-колец // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. № 4. С. 555–565.
2. *Тимошенко Е.А.* Чисто трансцендентные расширения поля рациональных чисел как базовые поля csp-колец // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 30–39.
3. *Тимошенко Е.А.* О базовых полях csp-колец. II // Фундам. и прикл. математика. 2015. Т. 20. № 5. С. 149–156.
4. *Fomin A.A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Basel et al.: Birkhäuser, 1999. P. 87–100. DOI: 10.1007/978-3-0348-7591-2.
5. *Крылов П.А.*, *Пахомова Е.Г.*, *Подберезина Е.И.* Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 47–51.
6. *Rosenberg J.* Algebraic K-theory and its Applications. New York: Springer, 1994. DOI: 10.1007/978-1-4612-4314-4.
7. *Зиновьев Е.Г.* Об одном обобщении колец псевдорациональных чисел // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 46–47.
8. *Тимошенко Е.А.* Проективные модули над csp-кольцами // Журнал СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5. № 4. С. 581–585.
9. *Царев А.В.* Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. 2006. Т. 80. № 3. С. 437–448. DOI: 10.4213/mzm2830.
10. *Тимошенко Е.А.* Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Журнал СФУ. Математика и физика. 2011. Т. 4. № 4. С. 541–550.
11. *Bass H.* Algebraic K-theory. New York; Amsterdam: W.A. Benjamin, 1968.


Статья поступила 07.06.2018г.

Timoshenko E.A. (2018) THE GROTHENDIECK GROUP $K_0$ OF AN ARBITRARY CSP-RING *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 38–44

DOI 10.17223/19988621/55/4

Keywords: csp-ring, projective module, Grothendieck group.

Fix an infinite set $L$ of primes. For every $p \in L$, let $R_p$ be either the ring of $p$-adic integers or the residue class ring $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ (the number $k > 0$ may depend on $p$). Define

$$K = \prod_{p \in L} R_p \text{ and } T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset K \text{ ;}$$

it is clear that $T$ is an ideal of the ring $K$. By a csp-ring we mean any subring $R$ of the ring $K$ such that $T \subset R$ and the quotient ring $R/T$ is a field. The symbol $K_0(R)$ denotes the Grothendieck group of the monoid of isomorphism classes of finitely generated projective modules over $R$ (with direct sum as the operation).

We find necessary and sufficient conditions for a module over $R$ to be a finitely generated projective module. These conditions enable us to prove the following theorem.

**Theorem 7.** For every csp-ring $R$, the Grothendieck group $K_0(R)$ is a free group of countable rank.

If we have two csp-rings $R$ and $S$, then every ring homomorphism $R \to S$ induces a group homomorphism $K_0(R) \to K_0(S)$. We describe this group homomorphism for arbitrary csp-rings $R$ and $S$.

AMS Mathematical Subject Classification: 19A49, 13D15, 18F30

*TIMOSHENKO Egor Aleksandrovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Timoshenko E.A. (2010) Base fields of csp-rings. *Algebra and Logic*. 49(4). pp. 378–385. DOI: 10.1007/s10469-010-9102-9.
2. Timoshenko E.A. (2013) Chisto transtsendentnye rasshireniya polya ratsional'nykh chisel kak bazovye polya csp-kolets [Purely transcendental extensions of the field of rational numbers as base fields of csp-rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(25). pp. 30–39.
3. Timoshenko E.A. (2018) Base fields of csp-rings. II. *J. Math. Sci.* (*New York*). 230(3). pp. 451–456. DOI: 10.1007/s10958-018-3753-9.
4. Fomin A.A. (1999) Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers. *Abelian Groups and Modules*. Basel et al.: Birkhäuser. pp. 87–100. DOI: 10.1007/978-3-0348-7591-2.
5. Krylov P.A., Pakhomova E.G., Podberezina E.I. (2000) Ob odnom klasse smeshannykh abelevykh grupp [On a class of mixed abelian groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 47–51.
6. Rosenberg J. (1994) *Algebraic K-theory and its applications*. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-4314-4.
7. Zinoviev E.G. (2006) Ob odnom obobshchenii kolets psevdoratsional'nykh chisel [On a generalization of rings of pseudorational numbers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 290. pp. 46–47.
8. Timoshenko E.A. (2012) Proektivnye moduli nad csp-kol'tsami [Projective modules over csp-rings]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Matematika i fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 5(4). pp. 581–585.
9. Tsarev A.V. (2006) Projective and generating modules over the ring of pseudorational numbers. *Math. Notes*. 80(3). pp. 417–427. DOI: 10.1007/s11006-006-0155-y.
10. Timoshenko E.A. (2011) Proektivnye moduli nad kol'tsom psevdoratsional'nykh chisel [Projective modules over the ring of pseudorational numbers]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Matematika i fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 4(4). pp. 541–550 .
11. Bass H. (1968) *Algebraic K-theory*. New York; Amsterdam: W.A. Benjamin.