

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

DOI 10.17223/20710410/20/12

УДК 519.8

ИНВЕСТИЦИОННАЯ БУЛЕВА ЗАДАЧА МАРКОВИЦА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ, МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ И РИСКА¹

В. А. Емеличев, Р. П. Шацов

*Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь***E-mail:** emelichev@bsu.by, roshats@gmail.com

Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости парето-оптимального решения многокритериального варианта задачи Марковица с минимальными критериями рисков Сэвиджа в случае, когда в пространстве портфелей задана произвольная метрика Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, а в пространствах рисков и состояний рынка — метрика Чебышева.

Ключевые слова: многокритериальная инвестиционная задача, парето-оптимальный портфель, критерий риска Сэвиджа, радиус устойчивости портфеля, метрика Гельдера.

Введение

В работе [1] на основе теории Марковица сформулирована многокритериальная булева задача выбора инвестиционных портфелей с максиминимальными критериями эффективности (доходности) Вальда и паретовским принципом оптимальности. Проведён анализ устойчивости парето-оптимального портфеля, который позволит учесть неопределённость исходной информации путём указания пределов надёжности инвестиционных решений в случае, когда в пространствах портфелей и состояний рынка задана линейная метрика l_1 , а в критериальном пространстве — метрика Гельдера l_p .

В настоящей работе в рамках той же модели Марковица рассматривается многокритериальная инвестиционная булева задача формирования портфеля инвестора с другими целевыми функциями, а именно с критериями минимизации рисков упущенных возможностей, которым подвергается инвестор при выборе инвестиционных проектов. При этом перманентная хрупкость и непредсказуемость состояний рынка учитывается путём использования минимаксных критериев Сэвиджа (критериев крайнего пессимизма). В результате проведённого параметрического анализа найдены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости портфеля, оптимального по Парето, при условии, что в пространстве решений задана произвольная метрика Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, а в критериальном пространстве рисков и пространстве состояний финансового рынка — чебышевская метрика l_∞ . Полученные результаты обобщают некоторые ранее известные оценки.

¹Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф11К-095.

1. Постановка задачи и определения

Рассмотрим многокритериальный дискретный вариант задачи Марковица управления инвестициями [2–5], основанной на диверсификации как методе снижения риска. Для этого введём ряд обозначений.

Пусть i — номер возможного состояния финансового рынка (рыночной ситуации, сценария развития), $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$; $j \in N_n$ — номер альтернативного инвестиционного проекта (актива); $k \in N_s$ — вид риска; r_{ijk} — мера экономического риска вида $k \in N_s$, которому подвергается инвестор, выбирая проект номер $j \in N_n$ в предположении, что рынок находится в состоянии номер $i \in N_m$; $R = [r_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{E}^n$ — инвестиционный портфель, где $\mathbb{E} = \{0, 1\}$, $x_j = 1$, если инвестор выбирает проект с номером j , $x_j = 0$ в противном случае; $X \subset \mathbb{E}^n$ — множество всех допустимых инвестиционных портфелей, т. е. тех, реализация которых обеспечивает инвестору ожидаемый суммарный доход и не превосходит имеющегося у него начального капитала.

Фактор риска — неотъемлемый атрибут функционирования финансового рынка. Методам количественной оценки экономических рисков, их классификации и характеристике посвящена обширная литература (см., например, [6–9]). Последнее время эксперты предлагают осуществлять квантификацию рисков через призму пяти «R»: Robustness (прочность), Redundancy (избыточность), Resourcefulness (изобретательность), Response (реагирование) и Recovery (восстановление). Разнообразие видов рисков приводит к постановке многокритериальной инвестиционной задачи.

Пусть эффективность выбираемого портфеля (булева вектора) $x \in X$, $|X| \geq 2$, оценивается векторной целевой функцией

$$f(x, R) = (f_1(x, R_1), f_2(x, R_2), \dots, f_s(x, R_s)),$$

компонентами которой являются минимаксимальные критерии рисков Сэвиджа [10]

$$f_k(x, R_k) = \max_{i \in N_m} R_{ik}x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ijk}x_j \rightarrow \min, \quad k \in N_s,$$

где $R_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — k -е сечение матрицы R со строками $R_{ik} = (r_{i1k}, r_{i2k}, \dots, r_{ink}) \in \mathbb{R}^n$, $i \in N_m$.

Тем самым, следуя критерию Сэвиджа (критерию «узкого места»), инвестор в условиях экономической нестабильности проявляет крайнюю осторожность, оптимизируя суммарный риск портфеля в самом невыгодном для него состоянии, а именно когда риск максимальный. Подобная осторожность уместна, поскольку инвестиции — это обмен определённой сегодняшней стоимости на возможно неопределённый будущий доход. Очевидно, что такой подход может быть продиктован лишь крайним пессимизмом и его использование целесообразно только тогда, когда речь идет о необходимости достижения гарантированного результата. Отметим, что в теории оптимизации задачи с минимаксимальными и максиминимальными критериями занимают видные места [11–14]. К таким задачам, в частности, относится и задача о наилучшем равномерном приближении функций многочленами, поставленная П. Л. Чебышевым.

Под векторной (s -критериальной) инвестиционной булевой задачей $Z^s(R)$, $s \in \mathbb{N}$, с критериями Сэвиджа будем понимать задачу поиска множества парето-оптимальных (эффективных) инвестиционных портфелей (множества Парето)

$$P^s(R) = \{x \in X : \nexists x' \in X \ (g(x, x', R) \geq 0_{(s)} \ \& \ g(x, x', R) \neq 0_{(s)})\},$$

где

$$\begin{aligned} g(x, x', R) &= (g_1(x, x', R_1), g_2(x, x', R_2), \dots, g_s(x, x', R_s)), \\ g_k(x, x', R_k) &= f_k(x, R_k) - f_k(x', R_k) = \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{ik}x - R_{i'k}x'), \quad k \in N_s, \\ 0_{(s)} &= (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^s. \end{aligned}$$

Легко видеть, что в частном случае при $m = 1$ векторная инвестиционная задача $Z^s(R)$ превращается в s -критериальную задачу линейного булева программирования.

Для всякого натурального числа d в действительном пространстве $\mathbb{R}^d$ определим метрику Гельдера l_p , $1 \leq p < \infty$, т.е. нормой вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ считаем число

$$\|a\|_p = \left(\sum_{j \in N_d} |a_j|^p \right)^{1/p}.$$

Будем также использовать метрику Чебышева l_∞ :

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_j| : j \in N_d\}.$$

Известно, что метрика l_p , заданная в пространстве $\mathbb{R}^d$, порождает метрику l_q в сопряжённом пространстве $(\mathbb{R}^d)^*$, причём числа p и q связаны условиями

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty. \quad (1)$$

Как обычно, полагаем $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$. Поэтому в дальнейшем считаем, что областью изменений чисел p и q является интервал $[1, \infty]$, а сами числа связаны условием (1).

Легко видеть, что из (1) вытекает равенство

$$\|z\|_p \|z\|_q = \|z\|_1 \quad \text{при } z \in \{-1, 0, 1\}^n, \quad p \in [1, \infty]. \quad (2)$$

В пространстве портфелей $\mathbb{R}^n$ зададим метрику l_p , $p \in [1, \infty]$, а в пространстве состояний рынка $\mathbb{R}^m$ и критериальном пространстве рисков $\mathbb{R}^s$ — чебышевскую метрику l_∞ . Тем самым под нормой k -го сечения $R_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ матрицы $R = [r_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$ будем понимать число

$$\|R_k\|_{p\infty} = \|(\|R_{1k}\|_p, \|R_{2k}\|_p, \dots, \|R_{mk}\|_p)\|_\infty, \quad k \in N_s,$$

а под нормой самой матрицы R — число

$$\|R\|_{p\infty\infty} = \|(\|R_1\|_{p\infty}, \|R_2\|_{p\infty}, \dots, \|R_s\|_{p\infty})\|_\infty = \max_{k \in N_s} \|R_k\|_{p\infty}.$$

Очевидно, что

$$\|R_{ik}\|_p \leq \|R_k\|_{p\infty} \leq \|R\|_{p\infty\infty}, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s.$$

Кроме того, в силу известного неравенства Гельдера

$$ab \leq \|a\|_p \|b\|_q,$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^s$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_s)^T \in \mathbb{R}^s$, для любых $x, x^0 \in X$ получаем

$$\begin{aligned} R_{ik}x - R_{i'k}x^0 &\geq -(\|R_{ik}\|_p \|x\|_q + \|R_{i'k}\|_p \|x^0\|_q) \geq \\ &\geq -\|R_k\|_{p\infty} (\|x\|_q + \|x^0\|_q), \quad i, i' \in N_m, \quad k \in N_s. \end{aligned} \quad (3)$$

Следуя [1, 15–19], радиусом устойчивости парето-оптимального инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(R)$ к изменениям параметров задачи $Z^s(R)$ назовём число

$$\rho = \rho^s(x^0, p, m) = \begin{cases} \sup \Xi_p, & \text{если } \Xi_p \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi_p = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_p &= \{\varepsilon > 0 : \forall R' \in \Omega_p(\varepsilon) \quad (x^0 \in P^s(R + R'))\}; \\ \Omega_p(\varepsilon) &= \{R' \in \mathbb{R}^{m \times n \times s} : \|R'\|_{p\infty\infty} < \varepsilon\} \end{aligned}$$

— множество возмущающих матриц; $P^s(R + R')$ — множество Парето возмущённой задачи $Z^s(R + R')$. Тем самым радиус устойчивости задаёт предельный уровень возмущений исходных данных задачи (элементов матрицы R), сохраняющих парето-оптимальность портфеля.

Методом от противного легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $x^0 \in P^s(R)$, $\gamma > 0$ и $1 \leq p \leq \infty$. Если при любом портфеле $x \in X \setminus \{x^0\}$ и каждой возмущающей матрице $R' \in \Omega_p(\gamma)$ найдётся такой индекс $l \in N_s$, что справедливо неравенство $g_l(x, x^0, R_l + R'_l) > 0$, то x^0 является парето-оптимальным портфелем любой возмущённой задачи $Z^s(R + R')$, т. е. $x^0 \in P^s(R + R')$ при $R' \in \Omega_p(\gamma)$.

2. Основной результат

Введём в рассмотрение оператор проектирования вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^s$ на неотрицательный ортант:

$$[a]^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_s^+),$$

где знак $+$ над вектором означает положительную срезку этого вектора, т. е. $a_k^+ = \max\{0, a_k\}$, $k \in N_s$.

Для портфеля x^0 задачи $Z^s(R)$ введём обозначения

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^s(x^0, p, m) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\|[g(x, x^0, R)]^+\|_\infty}{\|x\|_q + \|x^0\|_q}, \\ \psi &= \psi^s(x^0, p, m) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\|[g(x, x^0, R)]^+\|_\infty}{\|x - x^0\|_q}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\psi \geq \varphi \geq 0$.

Теорема 1. При любых $m, s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$ для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, p, m)$ парето-оптимального инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(R)$ задачи $Z^s(R)$ справедливы следующие оценки:

$$\varphi^s(x^0, p, m) \leq \rho^s(x^0, p, m) \leq \psi^s(x^0, p, m).$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(R)$. Сначала докажем справедливость неравенства $\rho \geq \varphi$, которое очевидно при $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ , для любого портфеля $x \in X \setminus \{x^0\}$ верно неравенство

$$\|[g(x, x^0, R)]^+\|_\infty \geq \varphi(\|x\|_q + \|x^0\|_q). \quad (4)$$

Далее методом от противного докажем, что справедлива формула

$$\forall R' \in \Omega_p(\varphi) \quad \exists l \in N_s \quad (g_l(x, x^0, R'_l) > 0).$$

Пусть, напротив, существует такая возмущающая матрица $R^0 \in \Omega_p(\varphi)$ с сечениями R_k^0 , $k \in N_s$, что $g_k(x, x^0, R_k + R_k^0) \leq 0$, $k \in N_s$. Тогда, согласно неравенствам (3), для любого индекса $k \in N_s$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &\geq g_k(x, x^0, R_k + R_k^0) = \max_{i \in N_m} (R_{ik} + R_{ik}^0)x - \max_{i \in N_m} (R_{ik} + R_{ik}^0)x^0 = \\ &= \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{ik}x - R_{i'k}x^0 + R_{ik}^0x - R_{i'k}^0x^0) \geq g_k(x, x^0, R_k) - \|R_k^0\|_{p\infty}(\|x\|_q + \|x^0\|_q) \geq \\ &\geq g_k(x, x^0, R_k) - \|R^0\|_{p\infty}(\|x\|_q + \|x^0\|_q) > g_k(x, x^0, R_k) - \varphi(\|x\|_q + \|x^0\|_q). \end{aligned}$$

Отсюда выводим неравенство $\|[g(x, x^0, R)]^+\|_\infty < \varphi(\|x\|_q + \|x^0\|_q)$, которое противоречит (4).

Наконец, применяя лемму 1, убеждаемся, что портфель $x^0 \in P^s(R + R')$ при любой возмущающей матрице $R' \in \Omega_p(\varphi)$. Следовательно, $\rho \geq \varphi$.

Теперь докажем неравенство $\rho \leq \psi$. Согласно определению числа $\psi > 0$, существует такой портфель $x^* \in X \setminus \{x^0\}$, что справедливы соотношения

$$g_k(x^*, x^0, R_k) \leq [g_k(x^*, x^0, R_k)]^+ \leq \|[g(x^*, x^0, R)]^+\|_\infty = \psi\|x^* - x^0\|_q, \quad k \in N_s. \quad (5)$$

Полагая $\varepsilon > \psi$, рассмотрим возмущающую матрицу $R^0 = [r_{ijk}^0] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$, элементы которой зададим формулой

$$r_{ijk}^0 = \delta \frac{x_j^0 - x_j^*}{\|x^* - x^0\|_p}, \quad i \in N_m, \quad j \in N_n, \quad k \in N_s,$$

где $\psi < \delta < \varepsilon$. Так как все строки R_{ik}^0 , $i \in N_m$, любого сечения $R_k^0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in N_s$, одинаковы, то, обозначив такую строку через A , имеем

$$A = \delta \frac{(x^0 - x^*)^T}{\|x^* - x^0\|_p}. \quad (6)$$

Поэтому $\|R^0\|_{p\infty} = \|R_k^0\|_{p\infty} = \|R_{ik}^0\|_p = \|A\|_p = \delta$, $i \in N_m$, $k \in N_s$, и, следовательно, $R^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > \delta$.

Далее, благодаря (2) и (6), для любого числа $p \in [1, \infty]$ справедлива цепочка равенств

$$A(x^* - x^0) = -\delta \frac{\|x^* - x^0\|_1}{\|x^* - x^0\|_p} = -\delta\|x^* - x^0\|_q.$$

Наконец, используя эти равенства и соотношения (5), заключаем, что для любого индекса $k \in N_s$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g_k(x^*, x^0, R_k + R_k^0) &= \max_{i \in N_m} (R_{ik} + A)x^* - \max_{i \in N_m} (R_{ik} + A)x^0 = g_k(x^*, x^0, R_k) + A(x^* - x^0) = \\ &= g_k(x^*, x^0, R_k) - \delta\|x^* - x^0\|_q < g_k(x^*, x^0, R_k) - \psi\|x^* - x^0\|_q \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому $x^0 \notin P^s(R + R^0)$. Следовательно, $\rho \leq \psi$. ■

При $m = 1$, как уже отмечалось выше, задача $Z^s(R)$ превращается в s -критериальную задачу булева программирования с линейными критериями. Запишем её в удобном виде:

$$Z_B^s(R) : \quad Rx \rightarrow \min_{x \in X},$$

где $X \subseteq \mathbb{R}^n$; $R = [r_{kj}] \in \mathbb{R}^{s \times n}$ — матрица со строками $R_k = (r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kn}) \in \mathbb{R}^n$, $k \in N_s$. Такой случай ($m = 1$) можно интерпретировать как ситуацию, при которой состояние финансового рынка стабильно и не вызывает сомнений. В этом контексте, как и прежде, считаем, что в пространстве портфелей $\mathbb{R}^n$ задана метрика Гельдера, а в критериальном пространстве рисков $\mathbb{R}^s$ — метрика Чебышева.

Следующий известный результат свидетельствует о том, что верхняя оценка радиуса устойчивости инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(R)$ задачи $Z^s(R)$ является достижимой при $m = 1$.

Теорема 2 [19]. Для радиуса устойчивости инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(R)$ задачи линейного булева программирования $Z_B^s(R)$, $R \in \mathbb{R}^{s \times n}$, при любых $p \in [1, \infty]$ и $s \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$\rho^s(x^0, p, 1) = \psi^s(x^0, p, 1) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\| [R(x - x^0)]^+ \|_\infty}{\| x - x^0 \|_q}.$$

3. Следствия

Все приведенные ниже следствия, вытекающие из теоремы 1, очевидны и верны при любом числе критериев $s \in \mathbb{N}$.

Следствие 1 [20]. При любом числе $m \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\| [g(x, x^0, R)]^+ \|_\infty}{\| x + x^0 \|_1} \leq \rho^s(x^0, \infty, m) \leq \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\| [g(x, x^0, R)]^+ \|_\infty}{\| x - x^0 \|_1}. \quad (7)$$

Отметим, что в [20] построены конкретные классы многокритериальных инвестиционных задач с критериями Сэвиджа, для которых эти оценки достигаются, т. е. становятся формулами. О достижимости оценок (7) свидетельствует также следующее утверждение.

Следствие 2. Если для всякого инвестиционного портфеля $x \neq x^0$ множество $\{j \in N_n : x_j^0 = x_j = 1\}$ пусто, то при любом $m \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$\rho^s(x^0, \infty, m) = \varphi^s(x^0, \infty, m) = \psi^s(x^0, \infty, m).$$

Следствие 3 [21]. При любом числе $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие оценки:

$$\frac{1}{2} \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \| [g(x, x^0, R)]^+ \|_\infty \leq \rho^s(x^0, 1, m) \leq \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \| [g(x, x^0, R)]^+ \|_\infty.$$

В [21] доказана достижимость этих оценок путём построения соответствующих классов задач, для которых эти оценки превращаются в формулы.

Заключение

Желания инвестора минимизировать различные виды рисков при выборе инвестиционного портфеля служат веским основанием необходимости применения многокритериального подхода к экономико-математическому моделированию рисков. Этот подход позволяет использовать методы теории выбора и принятия решений в условиях многокритериальности [22, 23]. В данной работе при построении многокритериальной модели управления инвестиционными рисками использованы целевые функции «узкого места» Сэвиджа, которые в условиях нестабильности и неопределённости финансового рынка позволяют выбирать тот портфель, при котором величина суммарного

риска принимает минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации, а именно тогда, когда риск максимален. Другой тип неопределённости появляется в связи с применением в качестве исходной информации статистических и экспертных оценок различных видов рисков, точность и достоверность которых всегда вызывает сомнение. В этой связи возникает потребность в проведении постоптимального анализа, состоящего в выявлении радиуса устойчивости, т.е. предельного уровня изменений (возмущений) параметров исходной задачи, сохраняющих оптимальность выбранного портфеля. В работе получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля в случае произвольной метрики Гельдера, заданной в пространстве решений задачи. Результаты могут быть использованы при конструировании оптимальных портфелей инвестора, желающего учитывать неопределённость различных видов рисков при наличии возможных (прогнозных) состояний финансового рынка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В. А., Коротков В. В. Исследование устойчивости решений векторной инвестиционной булевой задачи в случае метрики Гельдера в критериальном пространстве // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4. С. 61–72.
2. Markowitz H. Portfolio selection // J. Finance. 1952. V. 7. No. 1. P. 77–91.
3. Markowitz H. M. Portfolio selection: efficient diversification of investments. New York: Wiley, 1991. 400 p.
4. Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бейли Д. В. Инвестиции. М.: Инфра-М, 2003. 1028 с.
5. Portfolio decision analysis: improved methods for resource allocation (International Series in Operations Research and Management Science) / eds. A. Salo, J. Keisler, A. Morton. New York: Springer, 2011. 424 p.
6. Тэпман Л. Н. Риски в экономике. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. 380 с.
7. Шапкин А. С. Экономические и финансовые риски. М.: Дашков и К°, 2003. 544 с.
8. Бронштейн Е. М., Качкаева М. М., Тулупова Е. В. Управление портфелем ценных бумаг на основе комплексных квантильных мер риска // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1. С. 178–183.
9. Деревянко П. М. Оценка проектов в условиях неопределенности // Корпоративный менеджмент [Электронный ресурс]. 2006. http://www.cfin.ru/finanalysis/invest/fuzzy_analysis.shtml/. Дата доступа: 06.02.13.
10. Savage L. J. The foundations of statistics. New York: Dover Publ., 1972. 310 p.
11. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
12. Федоров В. В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
13. Minimax and applications / eds. D.-Z. Du, P. M. Pardalos. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. 308 p.
14. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. М.: Либроком, 2009. 304 с.
15. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гельдера // Кибернетика и системный анализ. 2006. № 4. С. 175–181.
16. Емеличев В. А., Коротков В. В., Кузьмин К. Г. Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределенности и риска // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 6. С. 157–164.

17. Емеличев В. А., Коротков В. В. О радиусе устойчивости эффективного решения многокритериальной задачи портфельной оптимизации с критериями Сэвиджа // Дискретная математика. 2011. Т. 23. Вып. 4. С. 33–38.
18. Емеличев В. А., Коротков В. В. Постоптимальный анализ векторной инвестиционной задачи с максиминными критериями Вальда // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. № 6. С. 23–36.
19. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискретная математика. 2007. Т. 19. Вып. 3. С. 79–83.
20. Emelichev V., Korotkov V., and Kuzmin K. On stability of a Pareto-optimal solution of a portfolio optimization problem with Savage's minimax risk criteria // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. 2010. No. 3 (64). P. 35–44.
21. Емеличев В. А., Коротков В. В. Об устойчивости эффективного решения векторной инвестиционной булевой задачи с минимаксными критериями Сэвиджа // Труды Института математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 3–10.
22. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2002. 392 с.
23. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 144 с.