

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2018

№ 56

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Кыров В.А. О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий	5
Тожибоев И.Т. Краевые задачи в специальной области для уравнения смешанного типа	17
Shishkova A.A. The hedging strategy for Asian option	29
Юнусова Д.И. О продолжении псевдонормы и метрики на полугрупповое кольцо	42

МЕХАНИКА

Колесников Г.Н., Гаврилов Т.А. Моделирование условий появления низкотемпературных трещин в асфальтобетонном слое автомобильной дороги.....	57
Лун-Фу А.В., Бубенчиков М.А. Методика определения собственных частот тупиковых ответвлений газопроводов	67
Моисеева К.М., Крайнов А.Ю. Численное определение критических условий искрового зажигания и выхода на устойчивый режим горения бедной метано-воздушной смеси	79
Мусакаев Н.Г., Хасанов М.К., Бородин С.Л., Бельских Д.С. Численное исследование процесса разложения гидрата метана при закачке теплого газа в гидратонасыщенную залежь	88
Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид	102
Степанов К.А., Тимченко С.В. Исследование устойчивости процесса оптимизации крыла беспилотного летательного аппарата к его начальной форме.....	120
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	128

CONTENTS

MATHEMATICS

Kyrov V.A. On the embedding of two-dimetric phenomenologically symmetric geometries	5
Tojiboev I. T. Boundary problems in a special domain for an equation of mixed type	17
Shishkova A.A. The hedging strategy for Asian option	29
Yunusova D. I. On the extension of pseudonorm and metrics to the semigroup ring	42

MECHANICS

Kolesnikov G.N., Gavrilov T.A. Simulation of the conditions for a low-temperature crack appearance in the asphalt concrete layer of a road	57
Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A. A method for determining natural frequencies of the dead-end branches of gas pipelines	67
Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. A numerical determining of the critical conditions for spark ignition and yielding of a stable combustion of a lean methane-air mixture	79
Musakaev N.G., Khasanov M.K., Borodin S.L., Belskikh D.S. Numerical investigation of the methane hydrate decomposition in the process of warm gas injection into a hydrate-saturated reservoir	88
Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Stress components and loading restrictions at the vertices of regular triangular and quadrangular pyramids	102
Stepanov K.A., Timchenko S.V. Investigation of the stability of an unmanned aerial vehicle wing optimizing in terms of its initial shape	120
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	128

МАТЕМАТИКА

УДК 512.816

DOI 10.17223/19988621/56/1

MSC 54H15

В.А. Кыров

О ВЛОЖЕНИИ ДВУМЕТРИЧЕСКИХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Известна полная классификация двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(n+1, 2)$, где $n = 1, 2, \dots$. Функции, задающие эти геометрии, локально изотопны почти n -транзитивным действиям некоторых групп на двумерном многообразии. Доказывается, что функция, задающая двуметрическую ФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$, содержит как аргумент функцию, задающую некоторую двуметрическую ФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$. Доказательство сводится к исследованию групп преобразований. В конце доказывается, что все рассматриваемые здесь группы преобразований являются почти n -транзитивными.

Ключевые слова: *двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств, группа преобразований, вложение геометрий, почти n -транзитивная группа преобразований.*

Г.Г. Михайличенко в 80-х годах прошлого века было дано определение двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n+1, 2)$. Им же была построена полная классификация таких геометрий и доказано, что они локально изотопны некоторым транзитивным группам Ли преобразований двумерного многообразия [1]. Исследования ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, с групповой точки зрения проводились автором данной статьи [2] и Сибиновым А.А. [3]. В работах [4–6] исследовался геометрический смысл некоторых ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$. Эти исследования в данной статье продолжаются.

Основные понятия и постановка задачи

ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, где $n \in \mathbb{N}$, задается на двумерном и $2n$ -мерном дифференцируемых многообразиях M и N дифференцируемой функцией $f : M \times N \rightarrow \mathbb{R}^2$ с открытой и плотной областью определения в $M \times N$, сопоставляющей паре точек два действительных числа [1]. Если x, y и $\xi^1, \eta^1, \dots, \xi^n, \eta^n$ – локальные координаты в многообразиях M и N , то для двухкомпонентной функции $f = (f^1, f^2)$ можно записать ее координатное представление

$$f = f(x, y, \xi^1, \eta^1, \dots, \xi^n, \eta^n). \quad (1)$$

Предполагается выполнение следующих естественных аксиом:

Аксиома 1. Координатное представление (1) функции f невырождено относительно двух координат x и y и относительно $2n$ координат $\xi^1, \eta^1, \dots, \xi^n, \eta^n$.

Невырожденность функции f в ее координатном представлении (1) выражается необращением в нуль якобианов:

$$\partial(f^1(i, \alpha), f^2(i, \alpha)) / \partial(x_i, y_i) \neq 0$$

и $\partial(f^1(i_1, \alpha), f^2(i_1, \alpha), \dots, f^1(i_n, \alpha), f^2(i_n, \alpha)) / \partial(\xi_\alpha^1, \eta_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n, \eta_\alpha^n) \neq 0$,

где (x_i, y_i) – координаты точки i , а $(\xi_\alpha^1, \eta_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n, \eta_\alpha^n)$ – координаты точки α .

Основной аксиомой, определяющей ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, является следующая:

Аксиома 2. Для плотного и открытого в $M^{n+1} \times N^2$ множества кортежей $\langle i_1, i_2, \dots, i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ длины $n+3$ все $4(n+1)$ значений функции f связаны уравнением

$$\Phi(f^1(i_1, \alpha_1), f^2(i_1, \alpha_1), \dots, f^1(i_{n+1}, \alpha_2), f^2(i_{n+1}, \alpha_2)) = 0, \quad (2)$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ – двухкомпонентная функция $4(n+1)$ переменных с $\text{rang } \Phi = 2$.

В работе [1] проведена полная классификация ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$. С точностью до замены координат в многообразиях и преобразования $\chi(f) \rightarrow f$ имеем следующие ДФС ГДМ:

для $n = 1$:

$$f^1 = x + \xi, \quad f^2 = y + \eta; \quad (3)$$

$$f^1 = (x + \xi)y, \quad f^2 = (x + \xi)\eta; \quad (4)$$

для $n = 2$:

$$f^1 = x\xi^1 + \varepsilon y\eta^1 + \xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y\xi^1 + \eta^2, \quad \varepsilon = -1, 0, 1; \quad (5)$$

$$f^1 = x\xi^1 + \xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y(\xi^1)^\gamma + \nu, \quad \gamma \neq 1; \quad (6)$$

$$f^1 = x\xi^1 + \xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y\xi^2 + x^2(\xi^1)^2 \ln \xi^1 + \eta^2; \quad (7)$$

$$f^1 = x\xi^1 + y\xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y\eta^2; \quad (8)$$

для $n = 3$:

$$\left. \begin{aligned} f^1 &= \frac{(x\xi^1 + \varepsilon y\eta^1 + \xi^2)(x + \xi^3) - \varepsilon(x\eta^1 + y\xi^1 + \eta^2)(y + \eta^3)}{(x + \xi^3)^2 - \varepsilon(y + \eta^3)^2}, \\ f^2 &= \frac{(x\xi^1 + \varepsilon y\eta^1 + \xi^2)(y + \eta^3) - (x\eta^1 + y\xi^1 + \eta^2)(x + \xi^3)}{(x + \xi^3)^2 - \varepsilon(y + \eta^3)^2}; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$f^1 = \frac{x\xi^1 + \xi^2}{x + \xi^3}, \quad f^2 = \frac{x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3}{x + \xi^3}; \quad (10)$$

$$f^1 = x\xi^1 + y\xi^2 + \xi^3, \quad f^2 = x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3; \quad (11)$$

для $n = 4$:

$$f^1 = \frac{x\xi^1 + y\xi^2 + \xi^3}{x\xi^4 + y + \eta^4}, \quad f^2 = \frac{x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3}{x\xi^4 + y + \eta^4}; \quad (12)$$

для $n > 4$ двухкомпонентная невырожденная функция $f = (f^1, f^2)$ не существует.

Формулы (3), (5) и (9) можно записать компактно, используя комплексные, дуальные и двойные числа:

$$\tilde{f} = z + \tilde{\xi}; \quad (3')$$

$$\tilde{f} = z\tilde{\xi} + \tilde{\mu}; \quad (5')$$

$$\tilde{f} = \frac{z\tilde{\xi} + \tilde{\mu}}{z + \tilde{\rho}}, \quad (9')$$

где $\tilde{f} = f^1 + if^2$, $z = x + iy$, $\tilde{\xi} = \xi^1 + i\eta^1$, $\tilde{\mu} = \xi^2 + i\eta^2$, $\tilde{\rho} = \xi^3 + i\eta^3$, i – мнимая комплексная, дуальная или двойная единица, то есть $i^2 = -1, 0, 1$. Умножение определяется покомпонентно, а деление определяется так: $\frac{w}{z} = \frac{wz^*}{|z|^2}$, где $z^* = x - iy$ – со-

пряженное число; $|z|^2 = zz^* = x^2 - i^2y^2$ – квадрат модуля числа [7]. Множества комплексных, дуальных и двойных чисел обозначаются C , Du и D соответственно и называются еще комплексными, даульными и двойными прямыми. Комплексные, дуальные и двойные проективные прямые будем обозначать: PC , PDu и PD . Последние проективные прямые определяются как и комплексная проективная прямая.

В монографии [1] доказывается, что функция (1) ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ локально изотопна действию λ некоторой группы Ли G^{2n} в M , т. е. существуют три локальных диффеоморфизма $\omega: R^2 \rightarrow R^2$, $v: M \rightarrow M$, $w: N \rightarrow G^{2n}$, что $f(X, \Xi) = \omega(\lambda(v(X), w(\Xi)))$, причем $X = (x, y)$, $\Xi = (\xi^1, \eta^1, \dots, \xi^n, \eta^n)$. Группа преобразований обозначается $G^{2n}(M)$. Тогда будем иметь:

функция (3) локально изотопна группе сдвигов в C , Du или D :

$$z' = z + A, A = a_1 + ia_2; \quad (13)$$

функция (4) локально изотопна группе преобразований арифметической плоскости R^2 :

$$x' = a_1x + a_2, y' = \frac{y}{a_1}; \quad (14)$$

функция (5) локально изотопна группе аффинных преобразований в C , Du и D :

$$z' = A_1z + A_2, A_1 = a_1 + ia_2, A_2 = a_3 + ia_4; \quad (15)$$

функции (6) и (7) локально изотопны группам преобразований в R^2 :

$$x' = a_1x + a_3, y' = a_2x + a_1^2y + a_4; \quad (16)$$

$$x' = a_1x + a_3, y' = a_2x + a_1^2y + x^2a_1^2 \ln a_1 + a_4; \quad (17)$$

функция (8) локально изотопна центрально-аффинной группе преобразований в R^2 :

$$x' = a_1x + a_2y, y' = a_3x + a_4y; \quad (18)$$

функция (9) локально изотопна группе проективных преобразований проективных прямых PC , PDu и PD :

$$z' = \frac{A_1 z + A_2}{A_3 z + A_4}, A_1 = a_1 + ia_2, A_2 = a_3 + ia_4, A_3 = a_5 + ia_6, A_4 = a_7 + ia_8, \quad (19)$$

причем в однородных координатах

$$\rho z_1' = A_1 z_1 + A_2 z_2, \rho z_2' = A_3 z_1 + A_4 z_2; \quad (19)$$

функция (10) локально изотопна группе центрально-проективных преобразований действительной проективной плоскости $\mathbb{P}R^2$:

$$x' = \frac{a_1 x + a_3}{a_7 x + a_9}, y' = \frac{a_4 x + a_5 y + a_6}{a_7 x + a_9}, \quad (20)$$

в однородных координатах

$$\rho x' = a_1 x + a_3 w, \rho y' = a_4 x + a_5 y + a_6 w, \rho w' = a_7 x + a_9 w; \quad (20')$$

функция (11) локально изотопна аффинной группе в \mathbb{R}^2 :

$$x' = a_1 x + a_2 y + a_5, y' = a_3 x + a_4 y + a_6; \quad (21)$$

функция (12) локально изотопна группе проективных преобразований в $\mathbb{P}R^2$:

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{a_7 x + a_8 y + a_9}, y' = \frac{a_4 x + a_5 y + a_6}{a_7 x + a_8 y + a_9}, \quad (22)$$

в однородных координатах

$$\rho x' = a_1 x + a_2 y + a_3 w, \rho y' = a_4 x + a_5 y + a_6 w, \rho w' = a_7 x + a_8 y + a_9 w. \quad (22')$$

Пусть функция $g = (g^1, g^2) = g(x, y; \xi^1, \dots, \xi^{2n})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, а функция $f = (f^1, f^2) = f(x', y'; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

Определение. Будем говорить, что ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ вложена в ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$, если имеет быть место функциональное соотношение

$$f(x', y'; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2}) = \chi(g(x, y; \xi^1, \dots, \xi^{2n}), \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}),$$

где

$$\chi, x' = \lambda^1(x, y), y' = \lambda^2(x, y),$$

$$\eta^1 = \tau^1(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \dots, \eta^{2n} = \tau^n(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}),$$

$$\eta^{2n+1} = \tau^{2n+1}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \eta^{2n+2} = \tau^{2n+2}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$$

– дифференцируемые функции, причем выполняются неравенства

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\eta^1, \dots, \eta^{2n+2})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^{2n+2})} \neq 0. \quad (23)$$

Основная задача данной работы – доказательство следующей теоремы.

Теорема. В каждую ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$ вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

Доказательство теоремы. Эта теорема доказывается групповым методом. Рассмотрим произвольную точку $u \in M$. Множество всех преобразований из группы Ли преобразований $G^{2n}(M)$, оставляющих неподвижными точку u , обо-

значается G_u . Это подмножество является стационарной подгруппой в $G^{2n}(M)$ [8]. Найдем все стационарные подгруппы вышевыписанных групп преобразований.

Рассмотрим сначала группу проективных преобразований действительной проективной плоскости $\mathbb{P}R^2$, в однородных координатах задаваемую уравнениями (22'). Найдем её стационарную подгруппу $G_{(0,y,0)}$ с неподвижной точкой $(0,y,0)$.

Используем условие неподвижности точки: $0 = a_2y, \rho y = a_5y, 0 = a_8y$, поэтому $a_2 = 0, a_8 = 0$. Найденное подставляя в (22'), получаем (20'), то есть группа преобразований (20) является стационарной подгруппой проективной группы (24).

Далее рассмотрим аффинную группу (21). Найдем ее стационарную подгруппу $G_{(0,0)}$. Тогда $0 = a_5, 0 = a_6$, следовательно, получаем центрально-аффинную группу (18).

Запишем стационарную подгруппу $G_{(x,0,0)}$ центрально-проективной группы (20'), для которой $a_4 = 0, a_7 = 0$. Переходя к неоднородным координатам, получаем группу преобразований

$$x' = a_1x + a_3, y' = a_6y + a_7,$$

локально изоморфную группе преобразований (15) при $i^2 = 1$.

Далее рассмотрим группу (19'). Ее стационарная подгруппа с неподвижной точкой $(z_1, 0)$ в неоднородных координатах совпадает с аффинной группой (15).

Рассмотрим теперь группы преобразований (15), (16) и (17). Их стационарные подгруппы $G_{(0,0)}$ следующие:

$$z' = A_1z; \tag{15'}$$

$$x' = a_1x, y' = a_2x + a_1^\gamma y, \gamma \neq 1; \tag{16'}$$

$$x' = a_1x, y' = a_2x + a_1^2 y + x^2 a_1^2 \ln a_1. \tag{17'}$$

Стационарная подгруппа $G_{(1,0)}$ группы преобразований (18) следующая:

$$x' = x + a_2y, y' = a_4y. \tag{18'}$$

Отметим, что группа преобразований (15') локально изоморфна группе (13), а группы (16'), (17') и (18') локально изоморфны группе (14). Локальный изоморфизм групп Ли преобразований означает совпадение структурных констант, которые в перечисленных выше группах Ли преобразований легко вычисляются, что продемонстрируем на примере (18'). Сначала вычисляем базисные операторы:

$$X = \left(\frac{\partial x'}{\partial a_2} \right) \Big|_{a_2=a_4=0} \partial_x + \left(\frac{\partial y'}{\partial a_2} \right) \Big|_{a_2=a_4=0} \partial_y = y \partial_x,$$

$$Y = \left(\frac{\partial x'}{\partial a_4} \right) \Big|_{a_2=a_4=0} \partial_x + \left(\frac{\partial y'}{\partial a_4} \right) \Big|_{a_2=a_4=0} \partial_y = y \partial_y,$$

следовательно, их коммутатор $[X, Y] = -X$. Аналогично вычисляем базисные операторы группы преобразований (14): $X = x \partial_x - y \partial_y, Y = \partial_x$, следовательно $[X, Y] = -X$. Видно, что для этих групп преобразований структурные константы совпадают, поэтому они локально изоморфны. Подобным образом проверяется локальный изоморфизм для остальных групп Ли преобразований.

Приступим теперь к построению вложений. Сначала рассмотрим группу преобразований (15). Очевидно, любое преобразование из этой группы является композицией преобразований подгрупп (15') и (13):

$$z'' = A_1 z' + A_2 = C(z + B),$$

одна из которых стационарная. Тогда

$$A_1 = C, \quad A_2 = CB.$$

Переходя к явным записям, имеем:

$$a_1 = c_1, a_2 = c_2, a_3 = c_1 b_1 + \varepsilon c_2 b_2, a_4 = c_1 b_2 + c_2 b_1.$$

Теперь рассмотрим группу преобразований (16). Любое преобразование из этой группы является композицией преобразований подгрупп (16') и (13):

$$x'' = a_1 x' + a_3 = b_1(x + c_1), y'' = a_2 x' + a_1^\gamma y' + a_4 = b_2(x + c_1) + b_1^\gamma(y + c_2).$$

Тогда

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_1 c_1, a_4 = b_1^\gamma c_2 + b_2 c_2.$$

Рассмотрим группу преобразований (17). Очевидно, любое преобразование из этой группы является композицией преобразований подгрупп (17') и (13):

$$\begin{aligned} x'' &= a_1 x' + a_3 = b_1(x + c_1), \\ y'' &= a_2 x' + a_1^\gamma y' + x'^2 a_1^2 \ln a_1 + a_4 = \\ &= b_2(x + c_1) + b_1^\gamma(y + c_2) + (x + c_1)^2 b_1^2 \ln b_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_1 c_1 + 2c_1 b_1^2 \ln b_1, a_4 = b_1^\gamma c_2 + b_2 c_1 + c_1^2 b_1^2 \ln b_1.$$

Преобразование из группы (18) является композицией преобразований подгруппы (18') $x'' = x' + c_1 y', y'' = c_2 y'$ и ей локально изоморфной группы $x' = b_1 x, y' = y + b_2 x$, поэтому

$$x'' = b_1 x + c_1(y + b_2 x), y'' = c_2(y + b_2 x).$$

Тогда

$$a_1 = b_1 + c_1 b_2, a_2 = c_1, a_3 = c_2 b_2, a_4 = c_1.$$

Далее, любое преобразование из группы (19) является композицией преобразований подгруппы (15) $z'' = B_1 z' + B_2$ и следующей: $z' = \frac{z}{C_1 z + C_2}$. Тогда

$$z'' = \frac{B_1 z}{C_2 z + C_2} + B_2,$$

поэтому

$$A_1 = B_1 + B_2 C_1, A_2 = B_2 C_2, A_3 = C_1, A_4 = C_2.$$

Теперь возьмем группу преобразований (20). Преобразование из этой группы является композицией преобразований подгрупп $x'' = b_1 x' + b_2, y'' = b_3 y' + b_4$ и

$x' = \frac{c_1 x}{c_3 x + c_4}, y' = \frac{c_2 y}{c_3 x + c_4}$, одна из которых стационарная:

$$x'' = b_1 \frac{c_1 x}{c_3 x + c_4} + b_2, y'' = b_3 \frac{c_2 y}{c_3 x + c_4} + b_4,$$

тогда

$$a_1 = b_1c_1 + b_2c_3, a_3 = b_2c_4, a_4 = b_4c_3, a_5 = b_3c_2, a_6 = b_4c_4, a_7 = c_3, a_9 = c_4.$$

Еще рассмотрим группу преобразований (21). Произвольное преобразование из этой группы является композицией преобразований подгрупп $x'' = b_1x' + b_2y', y'' = b_3x' + b_4y'$ и $x' = x + c_1, y' = y + c_2$, одна из которых стационарная. Тогда

$$x'' = b_1(x + c_1) + b_2(y + c_2), y'' = b_3(x + c_1) + b_4(y + c_2),$$

поэтому

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_4 = b_3, a_5 = b_4, a_3 = b_1c_1 + b_2c_2, a_6 = c_1b_3 + c_2b_4.$$

Наконец, рассмотрим группу преобразований (22). Всякое преобразование из этой группы является композицией преобразований подгрупп

$$x'' = \frac{b_1x' + b_2}{b_6x' + b_7}, y'' = \frac{b_3x' + b_4y' + b_5}{b_6x' + b_7} \text{ и } x' = c_1x + c_2y, y' = y. \text{ Явный вид композиции}$$

$$x'' = \frac{b_1(c_1x + c_2y) + b_2}{b_6(c_1x + c_2y) + b_7}, y'' = \frac{b_3(c_1x + c_2y) + b_4y + b_5}{b_6(c_1x + c_2y) + b_7},$$

поэтому

$$a_1 = b_1c_1, a_2 = b_1c_2, a_3 = b_2, a_7 = b_6c_1, a_8 = b_6c_2, a_9 = b_7, \\ a_4 = b_3c_1, a_5 = b_3c_2 + b_4, a_6 = b_5.$$

Для всех вышеполученных результатов выполняется неравенство (23). Теорема доказана полностью. ■

Из доказательства теоремы вытекает.

Следствие. *Всякое преобразование группы преобразований $G^{2n}(M)$, задающее ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$, является композицией преобразования стационарной подгруппы G_u , задающей ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, и некоторого преобразования подгруппы G_1 .*

Следует отметить, что представленные при доказательстве теоремы вложения не являются единственными. Так, в работе [9] приводятся аддитивные и мультипликативные вложения ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ в ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$, многие из которых негрупповые:

Аддитивные вложения ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ в ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$:
для ДФС ГДМ (5):

$$\bar{x}\bar{\xi} + \varepsilon\bar{y}\bar{\eta} + \bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{\nu} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu),$$

$$\bar{x} = x, \bar{y} = y, \bar{\xi} = \mu, \bar{\eta} = \nu, \bar{\mu} = \xi\mu + \varepsilon\eta\nu, \bar{\nu} = \xi\nu + \eta\mu,$$

$$\chi^1 = (x + \xi)\mu + \varepsilon(y + \eta)\nu, \chi^2 = (x + \xi)\nu + (y + \eta)\mu;$$

для ДФС ГДМ (6):

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^c + \bar{\nu} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu),$$

$$\bar{x} = x, \bar{y} = y, \bar{\xi} = \mu, \bar{\eta} = \nu, \bar{\mu} = \xi\mu, \bar{\nu} = \xi\nu + \eta\mu^c,$$

$$\chi^1 = (x + \xi)\mu, \chi^2 = (x + \xi)\nu + (y + \eta)\mu^c;$$

для ДФС ГДМ (7):

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^2 + \bar{x}^2\bar{\xi}^2 \ln \bar{\xi} + \bar{\nu} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu),$$

$$\bar{x} = x, \bar{y} = y, \bar{\xi} = \mu, \bar{\eta} = 2\mu^2\xi/l\eta\mu, \bar{\mu} = \xi\mu, \bar{\nu} = \xi\nu + \eta\mu^2 + \xi^2\mu^2/l\eta\mu,$$

$$\chi^1 = (x + \xi)\mu, \chi^2 = (x + \xi)^2\mu^2/l\eta\mu + (x + \xi)\nu + (y + \eta)\mu^2;$$

для ДФС ГДМ (8):

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu),$$

$$\bar{x} = \exp x, \bar{y} = \exp y, \bar{\xi} = \mu \exp \xi, \bar{\eta} = \mu^2 \exp \xi, \bar{\mu} = \nu \exp \eta, \bar{\nu} = \nu^2 \exp \eta,$$

$$\chi^1 = \mu \exp(x + \xi) + \nu \exp(y + \eta), \chi^2 = \mu^2 \exp(x + \xi) + \nu^2 \exp(y + \eta).$$

Мультипликативные вложения ДФС ГДМ ранга (2, 2) в ДФС ГДМ ранга (3, 2):

для ДФС ГДМ (5):

$$\bar{x}\bar{\xi} + \varepsilon\bar{y}\bar{\eta} + \bar{\mu} = \chi^1((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu), \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{\nu} = \chi^2((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu),$$

$$\bar{x} = x, \bar{y} = 1/y, \bar{\xi} = \eta, \bar{\eta} = \eta\mu, \bar{\mu} = \xi\eta, \bar{\nu} = \xi\eta\mu + \nu,$$

$$\chi^1 = (x + \xi)\eta + \frac{\varepsilon\mu\eta}{y}, \chi^2 = (x + \xi)\eta\mu + \frac{\eta}{y} + \nu;$$

для ДФС ГДМ (6):

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu), \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^c + \bar{\nu} = \chi^2((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu),$$

при $c \neq 0$:

$$\bar{x} = x, \bar{y} = 1/y^c, \bar{\xi} = \eta, \bar{\eta} = \eta\mu, \bar{\mu} = \xi\eta, \bar{\nu} = \xi\eta\mu + \nu,$$

$$\chi^1 = (x + \xi)\eta, \chi^2 = (x + \xi)\eta\mu + \left(\frac{\eta}{y}\right)^c + \nu;$$

при $c = 0$:

$$\bar{x} = x, \bar{y} = -\ln y, \bar{\xi} = \eta, \bar{\eta} = \eta\mu, \bar{\mu} = \xi\eta, \bar{\nu} = \xi\eta\mu + \ln \eta + \nu,$$

$$\chi^1 = (x + \xi)\eta, \chi^2 = (x + \xi)\eta\mu + \ln \eta - \ln y + \nu;$$

для ДФС ГДМ (7):

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu),$$

$$\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^2 + \bar{x}^2\bar{\xi}^2 \ln \bar{\xi} + \bar{\nu} = \chi^2((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu),$$

$$\bar{x} = \frac{1}{y}, \bar{y} = \frac{x}{y} - \frac{\ln y}{y^2}, \bar{\xi} = \eta, \bar{\eta} = \xi\eta^2, \bar{\mu} = \mu, \bar{\nu} = \nu,$$

$$\chi^1 = \frac{\eta}{y}, \chi^2 = (x + \xi)\eta \frac{\eta}{y} + \left(\frac{\eta}{y}\right)^2 (\ln \eta - \ln y) + \nu;$$

для ДФС ГДМ (8):

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} = \chi^1((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu), \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} = \chi^2((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu),$$

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = xy, \quad \bar{\xi} = \frac{\mu}{\eta} + \xi v, \quad \bar{\eta} = \frac{v}{\eta} + \xi \mu, \quad \bar{\mu} = v, \quad \bar{v} = \mu,$$

$$\chi^1 = (x + \xi)y \left(\frac{\mu}{(x + \xi)\eta} + v \right), \quad \chi^2 = (x + \xi)y \left(\frac{v}{(x + \xi)\eta} + \mu \right).$$

ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ как почти n -транзитивные группы Ли преобразований

Известно определение близко точно n -транзитивной группы Ли преобразований, $n \in \mathbb{N}$ [3]. В данной работе используется термин почти n -транзитивная группа Ли преобразований.

Определение. Группа преобразований $G(M)$ называется почти n -транзитивной, если для любых двух упорядоченных множеств из n различных элементов $(x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^1) \in \Omega(M), x^k, y^k \in M, \Omega(M)$ – открытое и плотное подмножество в M^n , существует единственное преобразование λ , такое, что $y^k = \lambda(x^k)$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Предложение. Группы преобразований (13) – (22) почти n -транзитивны, $n = 1, 2, 3, 4$.

Доказательство. Рассмотрим две произвольные совокупности (x^1, \dots, x^n) и (y^1, \dots, y^n) из открытого и плотного подмножества $\Omega(M)$ в M^n . Из определения близко точно n -транзитивности следует, существование единственного преобразования многообразия M , которое каждую точку первой совокупности переводит в соответствующую точку второй совокупности. В процессе доказательства для преобразований (13) – (22) по этим совокупностям находим параметры соответствующего преобразования, которые его однозначно определяют. Подробные рассуждения проводим для групп преобразований (14), (17), (21) и (22). Для остальных групп преобразований рассуждения аналогичны.

Рассмотрим сначала группу преобразований (14). Здесь $n = 1$, поэтому совокупности берутся по одной точке. Записываем равенства по (14):

$$y_1 = a_1 x_1 + a_2, y_2 = \frac{x_2}{a_1}.$$

Полученная система однозначно разрешается относительно параметров при условии $x_2 \neq 0, y_2 \neq 0$:

$$a_1 = \frac{x_2}{y_2}, \quad a_2 = y_1 - \frac{x_1 x_2}{y_2}.$$

Рассмотрим теперь группу преобразований (17). В данном случае $n = 2$, поэтому берем две совокупности по две точки и для них записываем равенства по системе (17):

$$y_1^1 = a_1 x_1^1 + a_3, \quad y_2^1 = a_2 x_1^1 + a_1^2 x_2^1 + (x_1^1)^2 a_1^2 \ln a_1 + a_4,$$

$$y_1^2 = a_1 x_1^2 + a_3, \quad y_2^2 = a_2 x_1^2 + a_1^2 x_2^2 + (x_1^2)^2 a_1^2 \ln a_1 + a_4.$$

Полученная система однозначно разрешается относительно параметров при условии $\frac{y_1^2 - y_1^1}{x_1^2 - x_1^1} > 0$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{y_1^2 - y_1^1}{x_1^2 - x_1^1}, \quad a_3 = y_1^1 - \frac{y_1^2 - y_1^1}{x_1^2 - x_1^1} x_1^1, \\ a_2 &= \frac{y_2^2 - y_2^1}{x_1^2 - x_1^1} - \frac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1} a_1^2 - (x_1^2 + x_1^1) a_1^2 \ln a_1, \\ a_4 &= y_2^1 - a_2 x_1^1 + a_1^2 x_2^1 + (x_1^1)^2 a_1^2 \ln a_1. \end{aligned}$$

Далее рассматриваем группу аффинных преобразований (21). Здесь $n = 3$, поэтому берем две совокупности по три точки:

$$\begin{aligned} y_1^1 &= a_1 x_1^1 + a_2 x_2^1 + a_5, \quad y_2^1 = a_3 x_1^1 + a_4 x_2^1 + a_6, \\ y_1^2 &= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_5, \quad y_2^2 = a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2 + a_6, \\ y_1^3 &= a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_5, \quad y_2^3 = a_3 x_1^3 + a_4 x_2^3 + a_6. \end{aligned}$$

Полученная система однозначно разрешима относительно параметров a_1, \dots, a_6 , если невырождена матрица коэффициентов.

И, наконец, рассматриваем группу проективных преобразований (22). Здесь $n = 4$, поэтому берем две совокупности по четыре точки и для них записываем равенства по системе (22), записанные в неоднородных параметрах:

$$\begin{aligned} y_1^1 &= \frac{b_1 x_1^1 + b_2 x_2^1 + b_3}{b_7 x_1^1 + x_2^1 + b_8}, \quad y_2^1 = \frac{b_4 x_1^1 + b_5 x_2^1 + b_6}{b_7 x_1^1 + x_2^1 + b_8}, \\ y_1^2 &= \frac{b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3}{b_7 x_1^2 + x_2^2 + b_8}, \quad y_2^2 = \frac{b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2 + b_6}{b_7 x_1^2 + x_2^2 + b_8}, \\ y_1^3 &= \frac{b_1 x_1^3 + b_2 x_2^3 + b_3}{b_7 x_1^3 + x_2^3 + b_8}, \quad y_2^3 = \frac{b_4 x_1^3 + b_5 x_2^3 + b_6}{b_7 x_1^3 + x_2^3 + b_8}, \\ y_1^4 &= \frac{b_1 x_1^4 + b_2 x_2^4 + b_3}{b_7 x_1^4 + x_2^4 + b_8}, \quad y_2^4 = \frac{b_4 x_1^4 + b_5 x_2^4 + b_6}{b_7 x_1^4 + x_2^4 + b_8}. \end{aligned}$$

Очевидно, полученная система однозначно разрешима относительно параметров b_1, \dots, b_8 , если совокупности точек берутся из открытого и плотного подмножества точек $\Omega(M)$ в M^4 . ■

Заключение

В данной статье установлены связи ДФС ГДМ разного ранга, то есть доказано, что ДФС ГДМ меньшего ранга вложены в ДФС ГДМ большего ранга. Здесь эта задача решена групповым методом, но можно ее решить и не прибегая к понятию группы преобразований. Так, в работе [9] ставится задача о вложении для ДФС ГДМ в общем виде как решение особых функциональных уравнений, правда, там они не решаются, а приводятся некоторые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003. 204 с.
2. Кыров В.А. Феноменологически симметричные локальные группы Ли преобразований пространства R^S // Изв. вузов. Математика. 2009. № 7. С. 10–21.
3. Симонов А.А. Обобщение точно транзитивных групп // Изв. РАН. Серия математ. 2014. Т. 78. № 6. С. 153–178. DOI: 10.4213/im8214.
4. Кыров В.А. Проективная геометрия и теория физических структур // Изв. вузов. Математика. 2008. № 11. С. 48–59.
5. Кыров В.А. Аффинная геометрия как физическая структура // Журн. Сиб. федер. ун-та. Серия: Математика и физика. 2008. Т. 1. № 4. С. 460–464.
6. Кыров В.А. Проективная геометрия и феноменологическая симметрия // Журн. Сиб. федер. ун-та. Серия: Математика и физика. 2012. Т. 5. № 1. С. 82–90.
7. Kurov V.A. and Bogdanova R.A. The groups of motions of three-dimensional maximal mobility geometries // Siberian Mathematical J. 2018. V. 59. No. 2. P. 323–331. DOI: 10.1134/S0037446618020155.
8. Горбачевич В.В., Онищук А.Л. Группы Ли преобразований // Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1988. № 20. С. 108–248.
9. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. К вопросу о вложении двуметрических ФС ГДМ ранга (2,2) в двуметрические ФС ГДМ ранга (3, 2) // Сб. научных статей Международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования». 2017. Барнаул: ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет», 2017. С. 299–304.

Статья поступила 28.06.2018 г.

Kurov V.A. (2018) ON THE EMBEDDING OF TWO-DIMETRIC PHENOMENOLOGICALLY SYMMETRIC GEOMETRIES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 5–16

DOI 10.17223/19988621/56/1

Keywords: two-dimetric phenomenologically symmetric geometry of two sets, transformation group, embedding geometries, nearly n -transitive group transformations

The two-dimetric phenomenologically symmetric geometry of two sets (TPS GTM) of rank $(n + 1, 2)$, where $n = 1, 2, \dots$, is defined on a two-dimensional and $2n$ -dimensional differentiable manifolds M and N by a differentiable nondegenerate function $f : M \times N \rightarrow R^2$ with an open and dense domain and the axiom of phenomenological symmetry. There is a complete classification of the TPS GTM of rank $(n + 1, 2)$, and the functions that define these geometries are locally isotopic to n -transitive actions of certain Lie groups on a two-dimensional manifold. From this classification, it can be seen that functions of some TPS GTM of rank $(n + 1, 2)$ contain functions of the TPS GTM of rank $(n, 2)$ as an argument.

In this paper, we introduce the definition of an embedding according to which the TPS GTM of rank $(n, 2)$, given by the function $g = (g^1, g^2)$, is embedded in the TPS GTM of rank $(n + 1, 2)$ with the function $f = (f^1, f^2)$ if the function f contains the function g as an argument. The problem is to find the embeddings for the TPS GTM of rank $(n + 1, 2)$. As a result, an important theorem is proved, according to which at least one of the TPS GTM of rank $(n, 2)$, where $n = 2, 3, 4$, is embedded in each of the TPS GTMs of rank $(n + 1, 2)$. The problem is solved by the group method and is reduced to distinguishing the stationary subgroups of the transformation groups to which the previously known TPS GTMs are locally isotopic. In the process of proving the theorem, it is established that the transformation group defining the TPS GTM of rank $(n + 1, 2)$ is a composition of the stationary subgroup defining the TPS GTM of rank $(n, 2)$ and some subgroup. It is also proved that transformation groups that are locally isotopic to a TPS

GTM of rank $(n + 1, 2)$ are nearly n -transitive. The last property means that parameters of such a group of transformations can be expressed in terms of coordinates of a certain number of points.

AMS Mathematical Subject Classification: 54H15

KYROV Vladimir Alexandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russian Federation). E-mail: kyrovVA@yandex.ru

REFERENCES

1. Mikhailichenko G.G. (2003) *Gruppovaya simmetriya fizicheskikh struktur* [Group symmetry of physical structures]. Barnaul: Barnaul State Pedagogical University Publ.
2. Kyrov V.A. (2009). Phenomenologically symmetric local Lie groups of transformations of the space R^s . *Russian Mathematics*. 53(7). pp. 7–16. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X09070020>.
3. Simonov A.A. (2014). On generalized sharply n -transitive groups. *Izvestiya: Mathematics*. 78(6). pp. 1207–1231. <http://dx.doi.org/10.1070/IM2014v078n06ABEH002727>.
4. Kyrov V.A. (2008). Projective geometry and the theory of physical structures. *Russian Mathematics*. 52(11). pp. 42–53. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X08110054>.
5. Kyrov V.A. (2008). Affinnaya geometriya kak fizicheskaya struktura [Affine geometry as a physical structure]. *J. Siberian Federal University. Math. and Phys.* 1(4). pp. 460–464.
6. Kyrov V.A. (2012). Proyektivnaya geometriya i fenomenologicheskaya simmetriya [Projective Geometry and Phenomenological Symmetry]. *J. Siberian Federal University. Math. and Phys.* 5(1). pp. 82–90.
7. Kyrov V.A. and Bogdanova R.A. (2018). The groups of motions of three-dimensional maximal mobility geometries. *Siberian Mathematical J.* 2018. 59(2). pp. 323–331. DOI: 10.1134/S0037446618020155.
8. Gorbatshevich V.V., Onishchik A.L. (1988). Gruppy Li preobrazovaniy [Lie transformation groups]. *The Results of Science and Technology*. Moscow: VINITI. 20. pp. 108–248.
9. Kyrov V.A., Mikhailichenko G.G. (2017). K voprosu o vlozhenii dvumetricheskikh FS GDM ranga $(2, 2)$ v dvumetricheskiye FS GDM ranga $(3, 2)$ [On the question of the embedding of the double-metric GDMs of rank $(2, 2)$ in the double-metric DS GDMs of rank $(3, 2)$]. *Collection of scientific articles of the international conference "Lomonosov Readings in the Altai: Fundamental Problems of Science and Education"*. Barnaul: Altai State University Publ. pp. 299–304.

УДК 517.956
DOI 10.17223/19988621/56/2

MSC 35M10, 35M12

И.Т. Тожибоев

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Сформулированы краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в области, состоящей из двух секторов круга и двух характеристических треугольников, доказана однозначная разрешимость поставленных задач. Объектом исследования являются краевые задачи для дифференциальных уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Цель работы – постановка и исследование краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа со спектральным параметром в специальных областях. Используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и теории сингулярных интегральных уравнений, методы интегралов энергии и принцип экстремума, а также метод разделения переменных и теория бесселевых функций. Сформулированы краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в области, состоящей из двух секторов круга и двух характеристических треугольников, а также доказана однозначная разрешимость поставленных задач.

Ключевые слова: *уравнения смешанного типа, спектральный параметр, краевая задача, единственность решения, существование решения, интегральное уравнение.*

Со второй половины семидесятых годов прошлого века начато изучение краевых задач для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Первые фундаментальные результаты в этом направлении получены в работе Т.Ш. Кальменова [1], где доказано существование хотя бы одного положительного собственного значения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе, в работе Е.И.Моисеева [2], в которой указаны секторы, где нет собственного значения задачи Трикоми для ряда уравнений смешанного типа, и в работе С.М. Пономарева [3], где найдены собственные значения и собственные функции задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром в одной специальной области. Впоследствии по этой тематике появились многочисленные работы, среди которых следует отметить [4–17, 25, 26] и т.д. До настоящего времени научные исследования по этой тематике развивались в двух направлениях. Первое из них – это доказательство теорем единственности решения краевых задач для уравнений смешанного типа со спектральным параметром, т.е. определение множества тех значений спектрального параметра, при которых справедлива теорема единственности, а второе – нахождение собственных значений и собственных функций краевых задач для уравнений смешанного типа и исследование на полноту системы найденных собственных функций.

Методология

В этой статье для конечной односвязной области $\Delta = \Omega \cap (x - y > 0)$, где область Ω плоскости xOy , ограниченной при $y \geq 0$, $x \geq 0$ и $x \leq 0$, $y \leq 0$ дугами σ_1 и σ_2 окружности $x^2 + y^2 = 1$, с концами в точках $A_1(0,1)$, $B_1(1,0)$ и $B_2(-1,0)$, $A_2(0,-1)$ и отрезками $\overline{OA_1}$ и $\overline{OB_2}$ прямых $x=0$ и $y=0$ соответственно, а при $x \geq 0$, $y \leq 0$ отрезком $\overline{B_1A_2}$ прямой $x - y = 1$, поставлены краевые задачи для уравнения

$$\text{sign } y u_{xx} + \text{sign } x u_{yy} - \mu^2 \text{sign}(x + y)u = 0 \quad (1)$$

и изучена однозначная разрешимость поставленных задач. При этом используются следующие обозначения: $\Delta^+ = \Delta \cap (x + y > 0)$, $\Omega_2^+ = \Delta^+ \cap (y < 0)$, $\Omega_3^+ = \Delta^+ \cap (y > 0)$; $\Delta^- = \Delta \cap (x + y < 0)$, $\Omega_2^- = \Delta^- \cap (x > 0)$, $\Omega_3^- = \Delta^- \cap (x < 0)$; $\sigma_3 = \sigma_1 \cap (x - y > 0)$, $\sigma_4 = \sigma_2 \cap (x - y > 0)$; OA_3 (OA_4), OB_1 , OA_2 , OD – отрезки прямых $x - y = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 0$ соответственно, где $O(0,0)$, $D(1/2, -1/2)$, $A_3(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $A_4(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

В области Δ рассмотрим уравнение (1), причем предположим, что $\mu = \mu_1$ в областях Ω_3^\pm и $\mu = \mu_2$ в областях Ω_2^\pm , где $\mu_1, \mu_2 \in R$ – заданные числа.

Задача L. Найти в области Δ решение

$$u(x, y) \in C(\bar{\Delta}) \cap C^1((\Delta \cup OA_3 \cup OA_4) \setminus OD) \cap C^2(\Delta \setminus (OB_1 \cup OA_2 \cup OD))$$

уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y) = \varphi_3(x, y), \quad (x, y) \in \sigma_3; \quad (2)$$

$$u(x, y) = \varphi_4(x, y), \quad (x, y) \in \sigma_4; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x, y) = \psi_3(x), \quad (x, y) \in OA_3; \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x, y) = \psi_4(x), \quad (x, y) \in OA_4; \quad (5)$$

$$u(0, -y) + u(y/\sqrt{2}, y/\sqrt{2}) = f_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (6)$$

где $\varphi_j(x, y)$, $\psi_j(x)$, $f_1(y)$ – заданные функции, причем

$$\varphi_3(x, y) = [y(x - y)]^\alpha \varphi_3^0(x, y), \quad \varphi_4(x, y) = [x(y - x)]^\alpha \varphi_4^0(x, y), \quad \varphi_j^0(x, y) \in C(\bar{\sigma}_j), \quad \alpha > 1;$$

$$\psi_3(x), \psi_4(-x) \in C(0, 1/\sqrt{2}] \cap C^{(1, \varepsilon)}(0, 1/\sqrt{2}) \cap L(0, 1/\sqrt{2});$$

$$f_1(y) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1] \cap C^{(2, \varepsilon)}(0, 1), \quad f_1'(y) \in L(0, 1), \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad f_1(1) = 0;$$

n – внутренняя нормаль к OA_j , $j = \overline{3, 4}$.

Так как условие (6) связывает значения искомого решения в граничных и внутренних точках области Δ , то задача L является задачей, предложенной в [18].

При исследовании задачи L используются следующие вспомогательные задачи, которые также представляют самостоятельный интерес.

Задача N . Найти функцию

$$u(x, y) \in C(\bar{\Delta}^+) \cap C^1(\Delta^+ \cup OA_3) \cap C^2(\Delta^+ \setminus OB_1),$$

удовлетворяющую в области $\Delta^+ \setminus OB_1$ уравнению (1) и условиям

$$u(x, y) = \tilde{\varphi}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_3; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x, y) = \tilde{\psi}(x), \quad (x, y) \in OA_3; \quad (8)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{OD}, \quad (9)$$

где $\tilde{\varphi}(x, y)$, $\tilde{\psi}(x)$ – заданные функции, причем

$$\tilde{\varphi}(x, y) = [y(x-y)]^\alpha \tilde{\varphi}^0(x, y), \quad \alpha > 1, \quad \tilde{\varphi}^0(x, y) \in C(\bar{\sigma}_3); \quad (10)$$

$$\tilde{\psi}(x) \in C(0, 1/\sqrt{2}] \cap C^{(1, \varepsilon)}(0, 1/\sqrt{2}) \cap L(0, 1/\sqrt{2}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (11)$$

Задача M . Найти в области $\bar{\Omega}_3^\pm$ решение

$$u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_3^+) \cap C^1(\Omega_3^+ \cup OA_3) \cap C^2(\Omega_3^+)$$

уравнения (1), удовлетворяющее условиям (7), (8) и

$$u(x, 0) + u(x/\sqrt{2}, x/\sqrt{2}) = \tilde{\gamma}(x), \quad (x, 0) \in \overline{OB}_1, \quad (12)$$

где $\tilde{\varphi}(x, y)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\gamma}(x)$ – заданные функции, обладающие свойствами (10), (11), и $\tilde{\gamma}(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1) \cap C^{(2, \varepsilon)}(0, 1)$, $\tilde{\gamma}' \in L(0, 1)$.

Так как в условии (12) участвуют значения искомой функции в точках отрезков OA_3 и OB_1 , то задача M является нелокальной краевой задачей [19].

В этом параграфе докажем однозначную разрешимость задач L , N и M , причем сначала изучим задачу M , затем – задачу N , а в последнем – задачу L .

Результаты и исследования

Исследование задачи M

Сначала докажем единственность решения задачи.

Теорема 1. Задача M не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи M . Предположим, что $u(x, y) \not\equiv const$ в $\bar{\Omega}_3^+$. Тогда на основании принципа экстремума для эллиптических уравнений [20] и $u|_{\bar{\sigma}_3} = 0$ положительный максимум и отрицательный минимум функции $u(x, y)$ не достигаются в $\Omega_3^+ \cup \bar{\sigma}_3$. Так как $(\partial u / \partial n)|_{OA_3} = 0$, то в силу принципа Заремба – Жиро [20] они не достигаются и на отрезке OA_3 . Если учесть это и при условии, что $u(x, 0) = -u(x/\sqrt{2}, x/\sqrt{2})$,

$0 \leq x \leq 1$, то эти значения не достигаются и на $OB_1 \cup \{O\}$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $u(x, y) \equiv const$ в $\bar{\Omega}_3^+$. Так как $u(x, y)|_{\sigma_3} = 0$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_3^+$. Отсюда следует, что задача M не может иметь более одного решения. Теорема 1 доказана.

Переходим к доказательству существования решения задачи M .

При этом нам понадобится решение задачи \tilde{N} для уравнения (1) в области Ω_3 об определении решения

$$u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_3^+) \cap C^1(\Omega_3^+ \cup OB_1 \cup OA_3) \cap C^2(\Omega_3^+)$$

уравнения (1), удовлетворяющего краевым условиям (7), (8) и $u_y(x, 0) = v(x)$, $0 < x < 1$.

Применяя метод отражения [21, 24], нетрудно убедиться, что функция Грина в этой задаче имеет вид

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \ln \left| \frac{(1 - \zeta_1^2 z^2)(1 - \zeta_1^2 \bar{z}^2)}{(\zeta_1^2 - z^2)(\zeta_1^2 - \bar{z}^2)} \right| + \ln \left| \frac{(1 - \zeta_2^2 z^2)(1 - \zeta_2^2 \bar{z}^2)}{(\zeta_2^2 - z^2)(\zeta_2^2 - \bar{z}^2)} \right| \right\},$$

где $\zeta_1 = \xi + i\eta$, $\zeta_2 = \eta + i\xi$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Используя метод функций Грина, нетрудно убедиться, что решение задачи \tilde{N} определяется формулой

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \iint_{\Omega_3^+} u_0(\xi, \eta) R(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_3^+, \quad (13)$$

где

$$u_0(x, y) = \int_{\bar{\sigma}_3} \tilde{\varphi}(\xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial n_\xi} ds - \int_0^1 v(\xi) G(\xi, 0; x, y) d\xi - \int_0^{1/\sqrt{2}} \tilde{\psi}(\xi) G(\xi, \xi; x, y) d\xi; \quad (14)$$

$\tilde{R}(\xi, \eta; x, y)$ – резольвента ядра $(-\mu_1^2) \tilde{G}(\xi, \eta; x, y)$; n – внутренняя нормаль к σ_3 , а s – длина дуги, отсчитываемая от точки B_1 .

Пусть теперь $u(x, y)$ – решение задачи M . Введем обозначения $u_y(x, 0) = v(x)$, $0 < x < 1$, и предположим, что $v(x) \in C^{(1, \varepsilon)}(0, 1) \cap L(0, 1)$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Тогда функция $u(x, y)$ в области Ω_3^+ как решение задачи \tilde{N} для уравнения (1) с краевыми условиями (7), (8) и $u_y(x, 0) = v(x)$, $0 < x < 1$, представима в виде (13).

Подставляя функцию (13) в условие (12), получим

$$\int_0^1 v(t) \left[\tilde{G}(t, 0; x, 0) + \tilde{G}\left(t, 0; \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K_1(x, t) \right] dt = F_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (15)$$

где

$$K_1(x, t) = \iint_{\Omega_3^+} \tilde{G}(t, 0; \xi, \eta) \left[\tilde{R}(\xi, \eta; x, 0) + \tilde{R}\left(\xi, \eta; \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] d\xi d\eta,$$

$$\begin{aligned}
 F_1(x) = & -\tilde{\gamma}(x) - \int_0^{1/\sqrt{2}} \tilde{\psi}(t) \left[\tilde{G}(t, t; x, 0) + \tilde{G}\left(t, t; \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] dt - \\
 & - \int_0^{1/\sqrt{2}} \tilde{\psi}(t) \left[\iint_{\Omega_3^+} \tilde{G}(t, t; \xi, \eta) \left[\tilde{R}(\xi, \eta; x, 0) + \tilde{R}\left(\xi, \eta; \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] d\xi d\eta \right] dt + \\
 & + \int_{\bar{\sigma}_3} \tilde{\varphi}(\xi, \eta) \left\{ \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \left[\tilde{G}(\xi, \eta; x, 0) + \tilde{G}\left(\xi, \eta; \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] + \right. \\
 & \left. + \iint_{\Omega_3^+} \frac{\partial \tilde{G}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial n_\zeta} \left[\tilde{R}(\xi_1, \eta_1; x, 0) + \tilde{R}\left(\xi_1, \eta_1; \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] d\xi_1 d\eta_1 \right\} ds. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Следовательно, задача M в смысле разрешимости эквивалентна уравнению (15) относительно $v(x)$. Если, пользуясь свойствами заданных функций, однозначно найдём функцию $v(x)$ из уравнения (15), то решение задачи M определяется формулой (13). Поэтому теперь займемся решением уравнения (15). С этой целью, дифференцируя равенство (15) по x и проведя рассуждения, аналогичные при получении равенств

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 v_1(t) \ln(1-t^4 x^4) dt = -4x^3 \int_0^1 \frac{t^4 v_1(t)}{1-t^4 x^4} dt$$

и

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 v_1(t) \ln(t^4 - x^4) dt = -4x^3 \int_0^1 \frac{v_1(t)}{t^4 - x^4} dt,$$

имеем

$$\frac{8x^7}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t^8 - x^8} - \frac{t^8}{1 - t^8 x^8} \right) v(t) dt + \int_0^1 v(t) \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) dt = F_1'(x), \quad 0 < x < 1.$$

Пользуясь условиями (10), (11), условием на $\tilde{\gamma}(x)$ и равенством (16), как и в [10], можно показать, что $F_1(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1] \cap C^{(2, \varepsilon)}(0, 1)$, $F_1'(x) \in L(0, 1)$.

Выполняя замену $\theta = 2x^8/(1+x^{16})$, $v = 2t^8/(1+t^{16})$ и введя обозначения $\rho(\theta) = x^{-7}(1+t^{16})v(x)$, получим сингулярное интегральное уравнение типа Коши первого рода нормального типа

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\rho(v)}{v - \theta} dv = N_1(\theta), \quad 0 < \theta < 1, \quad (17)$$

где $N_1(\theta) = x^{-7}(1+x^{16}) \left[F_1'(x) - \int_0^1 v(t) \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) dt \right]$.

Из постановки задачи и введенных обозначений следует, что решение уравнения (17) надо искать в классе функций $\rho(\theta) \in C^{(1, \varepsilon)}(0, 1)$, ограниченных при $\theta \rightarrow 1$ и неограниченных при $\theta \rightarrow 0$. Индекс уравнения (17) в этом классе равен нулю.

Учитывая это и свойства функции $N_1(\theta)$, однозначно находим решение уравнения (17) в виде [22]

$$\rho(\theta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-\theta)v}{\theta(1-v)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{N_1(v)}{v-\theta} dv. \quad (18)$$

Переходя в правой части равенства (17) к переменным θ, v и функции $\rho(\theta)$ и подставляя полученное выражение $N_1(\theta)$ в правую часть (18), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\rho(\theta)$, эквивалентное задаче M (в смысле разрешимости). Однозначная и безусловная разрешимость полученного интегрального уравнения, в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи M .

Исследование задачи N

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи N . Причем обозначения и предположения $u(x, 0) = \tau(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $u_y(x, 0) = v(x)$, $0 < x < 1$, $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $v(x) \in C^1(0, 1) \cap L(0, 1)$. Тогда функция $u(x, y)$ как решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2^+ представима в виде [10]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{2} [\tau(x+y) + \tau(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v(t) J_0 \left[\mu \sqrt{(x-t)^2 - y^2} \right] dt + \\ & + \frac{1}{4} \mu^2 y \int_{x-y}^{x+y} \tau(t) \bar{J}_1 \left[\mu \sqrt{(x-t)^2 - y^2} \right] dt, \quad (x, y) \in \Omega_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Удовлетворив функцию (19) условию (9), находим функциональное соотношение

$$\tau(x) = \int_0^x v(t) J_0[\mu(x-t)] dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (20)$$

между $\tau(x)$ и $v(x)$ на OB_1 , получаемое из того условия, что решение задачи N должно удовлетворит условию (9). Поэтому справедливо и неравенство

$$\int_0^1 \tau(x)v(x) dx \geq 0. \quad (21)$$

Теорема 2. Задача N не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи N . Умножая обе части уравнения (1) на функцию $u(x, y)$ и интегрируя полученное тождество по области Ω_3^+ , а затем применяя формулу Грина и учитывая, что $u|_{\sigma_3} \equiv 0$, $(\partial/\partial n)u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in OA_3$, получим равенство

$$\iint_{\Omega_3^+} [(u_x)^2 + (u_y)^2 + \mu^2 u^2] dx dy + \int_0^1 \tau(x)v(x) dx = 0.$$

Если учесть (21), то из последнего равенства следует, что $u(x, y) \equiv const$ в Ω_3^+ . Так как $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_3^+)$ и $u|_{\bar{\sigma}_3} = 0$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_3^+$. Отсюда следует, что $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $u_y(x, 0) = 0$, $0 < x < 1$. Поэтому, согласно формуле (19), $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_2^+$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{\Delta}^+$. Теорема 2 доказана.

Переходим к доказательство существование решения задачи N .

В обозначениях и предположениях (13) решение задачи N в области Ω_3^+ , как решение задачи \tilde{N} для уравнения (1) с краевыми условиями (7), (8) и $u_y(x, 0) = v(x)$, $0 < x < 1$, представимо в виде (13).

Полагая $y = 0$ в (13), находим соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$ на OB_1 , получаемое из того условия, что решение задачи N должно удовлетворять условиям (7) и (8):

$$\tau(x) = u_0(x, 0) + \iint_{\Omega_3^+} u_0(\xi, \eta) \tilde{R}(\xi, \eta; x, 0) d\xi d\eta, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (22)$$

Подставляя функции $\tau(x)$ и $u_0(x, 0)$ соответственно из (20) и (14) в равенство (22), а затем дифференцируя по x , как и в задаче M , имеем

$$v(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x^3(1-t^8)v(t)}{(t^4-x^4)(1-t^4x^4)} dt + \int_0^1 K_2(x, t)v(t) dt = F_2(x), \quad 0 < x < 1,$$

где
$$K_2(x, t) = \begin{cases} \iint_{\Omega_3^+} \tilde{G}(t, 0; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{R}(\xi, \eta; x, 0) d\xi d\eta + \mu_2 J_1[\mu_2(x-t)], & t \leq x; \\ \iint_{\Omega_3^+} \tilde{G}(t, 0; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{R}(\xi, \eta; x, 0) d\xi d\eta, & t \geq x, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \int_{\bar{\sigma}_3} \tilde{\varphi}(\xi, \eta) \frac{\partial^2}{\partial x \partial n_\zeta} \left[\tilde{G}(\xi, \eta; x, 0) + \iint_{\Omega_3^+} \tilde{R}(\xi, \eta_1; x, 0) \tilde{G}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 \right] ds - \\ - \int_0^{1/\sqrt{2}} \tilde{\psi}(t) \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{G}(0, t; x, 0) + \iint_{\Omega_3^+} \tilde{R}(\xi, \eta; x, 0) \tilde{G}(0, t; \xi, \eta) d\xi d\eta \right] dt.$$

Выполним замену $\theta = 2x^4/(1+x^8)$, $\vartheta = 2t^4/(1+t^8)$, отсюда получим сингулярное интегральное уравнение второго рода нормального типа

$$\rho(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\rho(\vartheta)}{\vartheta - \theta} d\vartheta = N_2(\theta), \quad 0 < x < 1, \quad (23)$$

где
$$\rho(\theta) = x^{-3}(1+x^8)v(x), \quad N_2(\theta) = x^{-3}(1+x^8) \left[F_2(x) - \int_0^1 v(t)K_2(x, t) dt \right], \quad (24)$$

$$N_2(\theta) \in C(0, 1] \cap C^{(1, \varepsilon)}(0, 1) \cap L(0, 1).$$

На основании постановки задачи N и свойства функции $N_2(\theta)$ решение уравнения (23) надо искать в классе функций $\rho(\theta) \in C^{(1,\varepsilon)}(0,1)$, ограниченных при $\theta \rightarrow 1$ и неограниченных при $\theta \rightarrow 0$. Индекс уравнения (23) в этом классе равен нулю. Поэтому решение уравнения (23) в этом классе существует, единственно и дается формулой

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2} N_2(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-\theta)\vartheta}{\theta(1-\vartheta)} \right]^{\frac{3}{4}} \frac{N_2(\vartheta)}{\vartheta - \theta} d\vartheta. \quad (25)$$

Переходя в правой части выражения $N_2(\theta)$ к переменным θ, ϑ и функции $\rho(\theta)$, а затем подставляя полученное выражения $N_2(\theta)$ в правой части равенства (25), относительно $\rho(\theta)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное задаче N (в смысле разрешимости). Разрешимость полученного интегрального уравнения, в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи N . После того как найдена функция $\rho(\theta)$, решения задачи N в областях Ω_3^+ и Ω_2^+ определяется формулами (13) и (19) соответственно, где $v(x) = x^3(1+x^8)^{-1}\rho(\theta)$, $\theta = 2x^4/(1+x^8)$.

Исследование задачи L

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи L . Введем обозначения $\xi = \xi(x, y) = -y$, $\eta = \eta(x, y) = -x$ и

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y), & (x, y) \in \Delta^+; \\ u^-(x, y), & (x, y) \in \Delta^-. \end{cases}$$

Очевидно, что если $(x, y) \in \bar{\Delta}^+$, то $(\xi, \eta) \in \bar{\Delta}^-$. Учитывая это, в области Ω^+ введем в рассмотрение функцию

$$v(x, y) = u^+(x, y) - u^-(\xi, \eta), \quad (x, y) \in \Delta^+. \quad (26)$$

Пользуясь свойствами функций $u^+(x, y)$ и $u^-(\xi, \eta)$, краевых условий (2) – (5) и $u^+(x, -x) = u^-(x, -x)$, $0 \leq x \leq 1/2$, нетрудно убедиться в том, что функция $v(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} v(x, y) &\in C(\bar{\Delta}^+) \cap C^1(\Delta^+ \cup OA_3) \cap C^2(\Delta^+ \setminus OB_1); \\ \text{sign } y v_{xx} + v_{yy} - \mu^2 v &= 0, \quad (x, y) \in \Delta^+ \setminus OB_1; \\ v(x, y) &= \varphi_3(x, y) - \varphi_4(-y, -x), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_3; \\ v_x(0, y) &= \psi_3(y) - \psi_4(-y), \quad (0, y) \in OA_3; \\ v(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \overline{OD}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

На основании исследования задачи M заключаем, что функция $v(x, y)$ является единственным решением задачи M при $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi_3(x, y) - \varphi_4(-y, -x)$, $\tilde{\psi}(y) = \psi_3(y) - \psi_4(-y)$. После того как найдена функция $v(x, y)$ с помощью условий (27), подставляя её в (26), имеем

$$u^+(x, y) - u^-(y, -x) = v(x, y), \quad (x, y) \in \Delta^+, \quad (28)$$

откуда при $y = 0$ следует, что $u^+(x, 0) - u^-(0, -x) = v(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$.

Принимая во внимание условие (6), получим

$$u^+(x, 0) + u^+(0, x) = v(x, 0) + f_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (29)$$

Следовательно, функция $u^+(x, y)$ в области Ω_3^+ удовлетворяет уравнению (1), а на её границе – условиям (2), (4) и (29). На основании исследования задачи N заключаем, что функция $u^+(x, y)$ однозначно находится как решение задачи N при $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi_3(x, y)$, $\tilde{\psi}(y) = \psi_3(y)$, $\tilde{\gamma}(x) = v(x, 0) + f_1(x)$.

После того как найдена функция $u^+(x, y)$ в области Ω_3^+ , функция $u^-(x, y)$ в области Ω_3^- находится из равенства (28). Решение задачи L в областях в Ω_2^+ и Ω_2^- определяется как решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными $u^+(x, 0)$, $u_y^+(x, 0)$, $0 < x < 1$ и $u^-(0, y)$, $u_x^-(0, y)$, $-1 < y < 0$, соответственно. Этим завершено доказательство однозначной разрешимости задачи L .

Выводы

Рассматриваются крайевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром в смешанных областях, состоящих из двух секторов круга и двух характеристических треугольников. Существование и единственность исследуемых краевых задач доказаны с использованием методов интегральных уравнений, принципа экстремума и интегралов энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 8. С. 1718–1725.
2. Моисеев Е.И. Некоторые теоремы единственности для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Доклады АН СССР. 1978. Т. 238. № 3. С. 531–533.
3. Пономарев С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева – Бицадзе: дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1981. 139 с.
4. Алимов Ш.А. Об одной спектральной задаче типа задачи Бицадзе – Самарского // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1289–1290.
5. Бердышев А.С. О существовании собственных значений одной краевой задачи для парабола-гиперболического уравнения третьего порядка // Узбекский математический журнал. 1998. № 2. С. 19–25.
6. Джураев Т.Д. О спектральных задачах для уравнений третьего порядка составного типа // Доклады АН РУз. 2006. № 2. С. 5–8.
7. Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 2. С. 354–356.
8. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с.
9. Моисеев Е.И., Аббаси Н. О полноте собственных функций задачи Франкля с условием нечетности // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 390–393.
10. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997. 166 с.

11. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // *Узбекский математический журнал.* 2006. № 3. С.68–78.
12. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // *Сибирский математический журнал.* 2007. С. 882–893.
13. *Сабитов К.Б.* О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром // *Дифференциальные уравнения.* 1986. Т. 22. № 11. С. 1977–1984.
14. *Сабитов К.Б., Карамова А.А.* Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения // *Известия АН. Сер. матем.* 2001. Т. 65. № 4. С. 133–150.
15. *Таширзаев Ю.У.* О задаче на собственные значения для уравнений смешанного типа с негладкой линией вырождения // *Известия АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук.* 1979. № 4. С. 17–24.
16. *Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа с негладкими линиями вырождения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ташкент: ИМ им. В.И.Романовского, 1983. 123 с.
17. *Уринов А.К.* Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // *Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук.* Нальчик, 2005. Т. 7. № 2. С. 62–67.
18. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // *Доклады АН СССР.* 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
19. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
20. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
21. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
22. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
23. *Уринов А.К., Тожибоев И.Т.* О решении одной задачи для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // *Узбекский математический журнал.* 2007. № 4.
24. *Тожибоев И.Т.* Об одной внутренне-краевой задаче для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с негладкой линией изменения типа // *Доклады АМАН.* Нальчик, 2008. Т. 10. № 1.
25. *Тожибоев И.Т.* Об одной спектральной задаче для уравнения смешанного типа // *Научный вестник ФерГУ.* 2011. № 2. С. 5–7.
26. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Мумтоз суз, 2015. 356 с.

Статья поступила 11.06.2018 г.

Tojiboev I.T. BOUNDARY PROBLEMS IN A SPECIAL DOMAIN FOR AN EQUATION OF MIXED TYPE *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 17–28

DOI 10.17223/19988621/56/2

Keywords: equations of mixed type, spectral parameter, boundary problem, uniqueness of solution, existence of solution, integral equation.

Boundary value problems for a mixed type equation with a spectral parameter in a region consisting of two sectors of a circle and two characteristic triangles are formulated; the unique solvability of the problems posed is proved. The objects of study are boundary value problems for differential equations of mixed type with a spectral parameter. The purpose of the study is the formulation and study of boundary value problems for differential equations of mixed type with a spectral parameter in special domains. Methods of the theory of partial differential equations and the theory of singular integral equations, energy integrals, and the principle of extremum, as well as the method of separation of variables and the theory of Bessel functions, were used. The results

include the formulation of boundary-value problems for a mixed type equation with the spectral parameter in a region consisting of two sectors of a circle and two characteristic triangles. It has been proved that the problems are uniquely solvable.

AMS Mathematical Subject Classification: 35M10, 35M12

TOJIBOEV Ibrokhimjon Tojalievich (Ferghana branch of Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Ferghana, Republic of Uzbekistan). E-mail: ibroxim@gmail.com

REFERENCES

1. Kal'menov T.Sh. (1977) O spektre zadachi Trikomii dlya uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze [The spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent'ev – Bitsadze equation]. *Differ. Uravn.* 13(8). pp. 1718–1725.
2. Moiseev E.I. (1978) Nekotorye teoremy edinstvennosti dlya uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze [On Uniqueness Theorems for Nonlocal Boundary Value Problems for the Lavrent'ev – Bitsadze Equation]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 238(3). pp. 531–533.
3. Ponomarev S.M. (1981) *Spektral'naya teoriya osnovnoi kraevoi zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa Lavrent'eva – Bitsadze*: [Spectral theory of the main boundary-value problem for the mixed Lavrent'ev–Bitsadze equation]. *Doct. Sci. (Math.)*. Moscow State University.
4. Alimov Sh.A. (1986) Ob odnoy spektral'noy zadache tipa zadachi Bitsadze – Samarskogo [On a spectral problem of the Bitsadze–Samarskii type]. *Dokl. Acad. Nauk SSSR.* 287(6). pp. 1289–1290.
5. Berdyshev A.S. (1998) O sushchestvovanii sobstvennykh znachenii odnoy kraevoy zadachi dlya parabol-giperbolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka [On the existence of eigenvalues of a boundary-value problem for the parabolic-hyperbolic equation of the third order]. *Uzbekskii Matematicheskii Zhurnal.* 2. pp.19–25.
6. Dzhuraev T.D. (2006) O spektral'nykh zadachakh dlya uravnenii tret'ego poryadka sostavnogo tipa [On spectral problems for compound type equations of the third order]. *Dokl. Akad. Nauk Rep. Uzb.* 2. pp. 5–8.
7. Kal'menov T.Sh. (1979) O spektre zadachi Trikomii dlya odnogo uravneniya smeshannogo tipa chetvertogo poryadka [On the spectrum of the Tricomi problem for a mixed type equation of the fourth order]. *Differ. Uravn.* 15(2). pp. 354–356.
8. Moiseev E.I. (1988) *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nyim parametrom* [Equations of mixed type with the spectral parameter]. Moscow: Moscow University Publ.
9. Moiseev E.I., Abbasi N. (2008) O polnote sobstvennykh funktsii zadachi Franklya s uslovien nechetnosti [On completeness of eigenfunctions of the Frankl problem with the unevenness condition]. *Differ. Uravn.* 44(3). pp. 390–393.
10. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (1997) *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektral'nyim parametrom* [Boundary-value problems for mixed type equations with the spectral parameter]. Tashkent: Fan. 166 p.
11. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (2006) Ob odnoy zadache na sobstvennye znacheniya dlya uravneniya smeshannogo tipa s dvumya singulyarnymi koeffitsientami [On a problem for eigenvalues for a mixed type equation with two singular coefficients]. *Uzbek Math. J.* 3. pp. 68–78.
12. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (2007) Eigenvalue problems for a mixed-type equation with two singular coefficients *Sib. Math. J.* 48. pp. 707. <https://doi.org/10.1007/s11202-007-0072-7>.
13. Sabitov K.B. (1986) O zadache Trikomii dlya uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze so spektral'nyim parametrom [On Tricomi's problem for the Lavrent'ev – Bitsadze equation with the spectral parameter]. *Differ. Uravn.* 22. 11. pp. 1977–1984.
14. Sabitov K.B., Karamova A.A. (2001) Spectral properties of solutions of the Tricomi problem for equations of mixed type with two lines of degeneracy, and their applications *Izvestiya: Mathematics.* 65(4). pp. 769–785.

15. Tashmirzaev Yu.U. (1979) O zadache na sobstvennyye znacheniya dlya uravneniy smeshannogo tipa s negladkoy liniy vyrozhdeniya [On a problem for eigenvalues for mixed type equations with a nonsmooth degeneracy lines]. *Izv. Akad. Nauk Uzbek SSR*. 4. pp. 17–24.
16. Urinov A.K. (1983) *Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo tipa s negladkimi liniyami vyrozhdeniya* [Boundary-value problems for with nonsmooth degeneracy lines]. Cand. Sci. (Math.). Tashkent Institute of Mathematics.
17. Urinov A.K. (2005) Zadachi na sobstvennyye znacheniya dlya uravneniya smeshannogo tipa s singulyarnym koeffitsientom [Problems for eigenvalues for a mixed type equation with a singular coefficient]. *Dokl. Adyg (Cherkes) Int. Akad. Nauk*. 7(2). pp. 62–67.
18. Bitsadze A.V., Samarskii A.A. (1969) O nekotorykh prosteishikh obobshcheniyakh lineinykh ellipticheskikh kraevykh zadach [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 185(4). pp. 739–740.
19. Nakhshiev A.M. (1995) *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow: Vysshaya Shkola. 301 p.
20. Bitsadze A.V. (1981) *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Nauka. 448 p.
21. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. (1966) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka. 724 p.
22. Muskhelishvili N.I. (1968) *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka. 512 p.
23. Urinov A.K., Tozhiboev I.T. (2007) O reshenii odnoy zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa s singulyarnym koeffitsientom [On solving a problem for a mixed type equation with a singular coefficient]. *Uzbek Math. J.* 4.
24. Tozhiboev I.T. (2008) Ob odnoy vnutrenne-kraevoy zadache dlya uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze s negladkoy liniy izmeneniya tipa [On an inner-boundary problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with a nonsmooth type change line]. *Dokl. AMAN*. 10(1).
25. Tozhiboev I.T. (2011) Ob odnoy spektral'noy zadache dlya uravneniya smeshannogo tipa [On a spectral problem for a mixed type equation]. *Vestnik FerGU*. 2. pp. 5–7.
26. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (2015) *K spektral'noi teorii uravnenii smeshannogo tipa* [A contribution to the spectral theory of mixed type equations]. Tashkent: Mumtoz suz. 356 p.

УДК 519.81, 519.21
DOI 10.17223/19988621/56/3

MSC: 60H10, 60G44, 60J65

A.A. Shishkova

THE HEDGING STRATEGY FOR ASIAN OPTION¹

The article deals with the problem of portfolio investment in the Black-Scholes model with several risky assets. The hedging strategy for Asian option is found using the martingale method. The analytical properties (differentiability) of the densities of exponential random variables are studied.

Keywords: *hedging strategy, Asian option, stochastic differential equations, Brownian motion, Black and Scholes model.*

Introduction

The world financial system is continuously developing, which causes its ever increasing fragmentation. The derivatives market as one of the elements of the system develops even more rapidly. The first derivatives were currency futures and forwards, emerged in the early 70's a little later there were options [1].

After the first option transaction, which took place in 1973 on the Chicago Board of Options Exchange [2], a revolution in the development of option trading began. By the end of the 1970's options were well studied on stock exchange and then new exotic options appeared. In the late 1980's and early 1990's exotic options became more in demand and their trade became more active in the over-the-counter market. Soon in the commodity and currency markets Asian options are becoming popular.

Geman and Yor have considered Asian options in their work [3], such derivatives are based on the average prices of underlying assets. Using the Bessel processes authors found the value of the Asian option. Moreover, applying simple probabilistic methods they obtained the following results about these options: calculated moments of all orders of the arithmetic average of the geometric Brownian motion; obtained simple, closed form expression of the Asian option price when the option is "in the money".

The exact pricing of fixed-strike Asian options is a difficult task, since the distribution of the average arithmetic of asset prices is unknown when its prices are distributed lognormally. The study of this problem is divided into three groups. A large number of works are connected with the numerical approach. Kemna and Vorst were among the first who solved the task [4]. In their work the pricing strategy includes Monte Carlo simulation with elements of dispersion reduction and improves the pricing method. Furthermore, the authors showed that the price of an option with an average value will always be lower than of a standard European option. Carverhill and Clewlow [5] used a fast Fourier transform to calculate the density of the sum of random variables, as convolution of individual densities. Then the payoff function is numerically integrated against the density. In this direction other authors continued to work, applying to the calculations improved methods of numerical simulation [6–8]. Unfortunately, these methods do not provide information on the hedging portfolio.

¹ This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, state assignment No.2.3208.2017/4.6.

The second approach, used by Ruttiens [9] and Vorst [10], is to change the geometric average price of the option. The third approach proposed by Levy [11] and accepted by some practitioners, suggests that the distribution of the arithmetic average is well approximated at least in some markets by a lognormal distribution, and therefore the problem is reduced to determining the necessary parameters. This problem is less complicated since the first two moments of the arithmetic mean are relatively simple.

For a trader or an investor the main task is not only the saving but also the multiplication of its capital. Many risks can be avoided with the help of one popular and very effective technique – hedging. The option is hedged to protect its value from the risk of price movement of the underlying asset in an unfavorable direction. To solve the hedging problem stochastic calculus methods are used which became a powerful tool used in practice in the financial world. Stochastic calculus is a well-developed branch of modern mathematics with a “correct” approach to analyzing complex phenomena occurring on world stock markets. Book of A.N. Shiryaev [12] provides a complete and systemic view of ideas and techniques in stochastic finance. It should be noted that the task of options pricing and the construction of a hedging strategy is well studied for American and European options, for such derivatives there is a so-called delta strategy. But this technique is not developed for Asian options.

In this paper we consider the financial portfolio with several risky assets. Based on the results presented in the article [14] we have solved the hedging problem for the Asian option using martingale methods. The main result of the paper is the formulas for the hedging strategy $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t))$ which are obtained with the help of the martingale representation and Ito’s formula and is defined as

$$\gamma_i(t) = \partial_{y_i} G(t, \xi(t), S(t)), \quad i = \overline{1, d} \quad \xi(t), S(t) \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

where

$$G(t, x, y) = \mathbf{E} \left[\frac{\sum_{i=1}^d x_i + \sum_{i=1}^d y_i \tilde{\eta}_i(v) - K}{d} \right]_+. \quad (2)$$

In solving the problem we found the densities for the following random exponential variables

$$\tilde{\eta}_i(v) = \int_0^v \exp\{\sigma_i W_i(u) - u\sigma_i^2/2\} du, \quad v = 1-t. \quad (3)$$

Also we proved that the function $G(t, x, y)$ is a unique solution of the elliptic differential equation and has continuous derivatives with respect to all variables.

The article is structured as follows. In section 1 we define the model, construct the strategy, find the densities for random variables (3). In section 2 we prove uniqueness of the solution $G(t, x, y)$. In section 3 we prove the theorem on the differentiability of the function (2). In section 4 we formulate the auxiliary theorems.

1. Statement of the problem and main results

Consider a market consisting of d risky assets with the price process $S(t) = (S_1(t), \dots, S_d(t))$ driven by the following system of SDEs

$$dS_i(t) = \sigma_i S_i(t) dW_i(t), \quad i = 1, \dots, d, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4)$$

where $W = (W_1, \dots, W_d)$ is a d -dimensional standard Brownian process with correlation matrix $R = (\rho_{i,j})_{d \times d}$, where $\rho_{i,j} = \chi_{\{i=j\}}$.

We assume that the riskless asset is a constant over time, i.e.

$$B(t) = 1.$$

The payoff function f_1 is given by

$$f_1 = \left(\frac{1}{Td} \int_0^T \sum_{i=1}^d S_i(t) dt - K \right)_+, \quad T = 1.$$

Let $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ be the natural filtration generated by all random sources, i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), s \leq t\}$ and denote by $(\Omega, \mathcal{F}_1, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ the corresponding probability space which represents market fundamental elements.

Remark that the asset processes $S_i(t)$, $i = 1, \dots, d$, admit the following explicit form

$$S_i(t) = S_i(0) \exp\left\{ \sigma_i W_i(t) - t\sigma_i^2 / 2 \right\}, \quad i = 1, \dots, d.$$

The procedure for obtaining the strategy is the same as in the article [14]. To construct a hedging strategy in the case of model (4) apply the representation Theorem 2 to the following martingale

$$M(t) = \mathbf{E}(f_1 | \mathcal{F}_t).$$

To this end is we will find square integrable processes $(\alpha_i(t))_{0 \leq t \leq 1}$ adapted w.r.t. \mathcal{F}_t such that for all $t \in [0, 1]$

$$M(t) = M(0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \alpha_i(s) dW_i(s).$$

Clearly that

$$dM(t) = \sum_{i=1}^d \alpha_i(t) dW_i(t). \tag{5}$$

For coefficients $\alpha_i(t)$ we use the following formula

$$\langle M, W_i \rangle_t = \int_0^t \alpha_i(s) ds.$$

Therefore

$$\alpha_i(t) = \frac{d}{dt} \langle M, W_i \rangle_t. \tag{6}$$

Also the portfolio value satisfies the equality

$$dX(t) = \sum_{i=1}^d \gamma_i(t) dS_i(t) = \sum_{i=1}^d \gamma_i(t) \sigma_i S_i(t) dW_i(t). \tag{7}$$

Then equating the equalities (5) and (7) we obtain the strategy given by on the formulas

$$\gamma_i(t) = \frac{\alpha_i(t)}{\sigma_i S_i(t)},$$

$$\beta(t) = M(0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \alpha_i(s) dW_i(s) - \sum_{i=1}^d \gamma_i(t) S_i(t),$$

where $\gamma_i(t)$ and $\beta(t)$ are the quantities of risky assets and riskless asset respectively. In our case the martingale has the following form

$$M(t) = \mathbf{E} \left(\left(\frac{1}{d} \int_0^1 \sum_{i=1}^d S_i(v) dv - K \right) \middle| \mathcal{F}_t^+ \right). \quad (8)$$

If $t \leq v \leq 1$ then we have

$$S_i(v) = S_i(t) \exp \left\{ \sigma_i (W_i(v) - W_i(t)) - \frac{\sigma_i^2}{2} (v-t) \right\}.$$

We obtain

$$\sum_{i=1}^d \int_0^1 S_i(v) dv = \sum_{i=1}^d \int_0^t S_i(v) dv + \sum_{i=1}^d S_i(t) \int_t^1 \exp \left\{ \sigma_i (W_i(v) - W_i(t)) - \frac{\sigma_i^2}{2} (v-t) \right\} dv.$$

It means that we can represent the integral in the equality (8) as

$$\frac{1}{d} \int_0^1 \sum_{i=1}^d S_i(v) dv = \frac{\sum_{i=1}^d \xi_i(t) + \sum_{i=1}^d S_i(t) \eta_i(t)}{d},$$

where

$$\xi_i(t) = \int_0^t S_i(v) dv$$

and

$$\eta_i(t) = \int_t^1 \exp \left\{ \sigma_i (W_i(v) - W_i(t)) - \frac{\sigma_i^2}{2} (v-t) \right\} dv.$$

Note that $\xi_i(t)$ are measurable w.r.t. \mathcal{F}_t^- and $\eta_i(t)$ are independent on \mathcal{F}_t^- . Hence

$$M(t) = G(t, \xi(t), S(t)).$$

Here $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_d(t))$, $S(t) = (S_1(t), \dots, S_d(t))$, and

$$G(t, x, y) = \mathbf{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^d x_i + \sum_{i=1}^d y_i \eta_i(t)}{d} - K \right)_+,$$

where $x = (x_1, \dots, x_d)$ and $y = (y_1, \dots, y_d)$. After some transformation we come to the random variables

$$\tilde{\eta}_i(v) = \int_0^v \exp \left\{ \sigma_i W_i(u) - \frac{\sigma_i^2}{2} u \right\} du, \quad v = 1-t.$$

Since $\tilde{\eta}_i(v)$ are independent random variables therefore the following proposition holds

Proposition 1. For all t the random variables $\tilde{\eta}_i(v)$, $i = 1, \dots, d$, have the following distribution densities

$$q_{\tilde{\eta}_i(v)}(t, z_i) = \mathbf{E} \frac{\varphi_{0,1}(a_i)}{K_i(t, a_i(t, z_i))}, \quad i = \overline{1, d}, \quad (10)$$

where

$$z_i = F_i(t, a_i(t, z_i)) = \int_0^v \exp\{\sigma_i \tilde{B}_i(u) + \sigma_i u a_i\} du, \quad \tilde{B}_i(u) = W_i(u) - u W_i(1) - \frac{\sigma_i^2 u}{2},$$

$$K_i(t, a_i(t, z_i)) = \frac{dF_i(t, a_i)}{da_i}, \quad \varphi_{0,1}(\cdot) \sim N(0, 1).$$

The proof is carried out in the same way as in the article [14].

Represent martingale $M(t) = G(t, \xi(t), S(t))$ by Ito's formula. The existence of the continuous derivatives of the function $G(t, x, y)$ is proved in section 3. In our case processes $\xi_i(t)$ and $S_i(t)$ have the following stochastic differentials

$$d\xi_i(t) = S_i(t) dt,$$

$$dS_i(t) = \sigma_i S_i(t) dW_i(t).$$

By Theorem 4 we have

$$\begin{aligned} dG(t, \xi(t), S(t)) = & \\ \left[G'_t(t, \xi(t), S(t)) + \sum_{i=1}^d G'_{x_i}(t, \xi(t), S(t)) S_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d G''_{y_i y_i}(t, \xi(t), S(t)) \sigma_i^2 S_i^2(t) \right] dt + & \\ + \sum_{i=1}^d G'_{y_i}(t, \xi(t), S(t)) \sigma_i S_i(t) dW_i(t). & \end{aligned}$$

Then

$$M(t) = f_t + \tilde{M}_t,$$

where

$$\begin{aligned} f_t = M(0) + \int_0^t \left[G'_t(v, \xi(v), S(v)) + \sum_{i=1}^d G'_{x_i}(v, \xi(v), S(v)) S_i(v) + \right. & \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d G''_{y_i y_i}(v, \xi(v), S(v)) \sigma_i^2 S_i^2(v) \right] dv & \end{aligned}$$

and

$$\tilde{M}_t = \sum_{i=1}^d \hat{M}_j(t), \quad \hat{M}_j(t) = \int_0^t G'_{y_i}(v, \xi(v), S(v)) \sigma_i S_i(v) dW_j(v).$$

Since f_t is continuous martingale with finite variation, then

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[G'_t(v, \xi(v), S(v)) + \sum_{i=1}^d G'_{x_i}(v, \xi(v), S(v)) S_i(v) + \right. & \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d G''_{y_i y_i}(v, \xi(v), S(v)) \sigma_i^2 S_i^2(v) \right] dv = 0. & \end{aligned}$$

So far as $\langle \hat{M}_j, W_i \rangle_t = 0$ when $i \neq j$ then

$$\langle M, W_i \rangle_t = \langle \tilde{M}, W_i \rangle_t = \sum_{i=1}^d \langle \hat{M}_j, W_i \rangle_t = \langle \hat{M}_i, W_i \rangle_t = \int_0^t G'_{y_i}(v, \xi(v), S(v)) \sigma_i S_i(v) dv.$$

Hence, we obtain that

$$\langle M, W_i \rangle_t = \int_0^t G'_{y_i}(v, \xi(v), S(v)) \sigma_i S_i(v) dv.$$

So, remark that the function $G(t, x, y)$ is a solution of the following equation

$$\begin{cases} G_t(t, x, y) + \sum_{i=1}^d G_{x_i}(t, x, y) y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sigma_i^2 y_i^2 G''_{y_i y_i}(t, x, y) = 0, \\ G(1, x, y) = (x - K)_+. \end{cases} \quad (13)$$

The equation (13) has the unique solution, see proof in the section 2. Then the coefficients in (6) are equal to

$$\alpha_i(t) = G'_{y_i}(t, \xi(t), S(t)) \sigma_i S_i(t).$$

Thus the option can be hedged by the strategy

$$\gamma = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t)),$$

with the components

$$\gamma_i(t) = \partial_{y_i} G(t, \xi(t), S(t)), \quad i = 1, \dots, d.$$

2. Uniqueness of the solution $G(t, x, y)$

Definition 1. A $[0, T) \times \mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}$ function G is called of uniform polynomial growth if there exist some constants $m > 0$ and $L > 0$ such that

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |G(t, x, y)| \leq L(1 + |x|^m + |y|^m).$$

Theorem 1. The equation

$$\begin{cases} G_t(t, x, y) + \sum_{i=1}^d G_{x_i}(t, x, y) y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sigma_i^2 y_i^2 G''_{y_i y_i}(t, x, y) = 0, \\ G(1, x, y) = \varphi(x) \end{cases} \quad (15)$$

has a unique solution in the class of uniform polynomial growth functions.

Remark 1. The equation (15) is a particular form of the following equation

$$\begin{cases} u_t(t, x, y) + u_x(t, x, y) y + \frac{a(y)}{2} u_{yy}(t, x, y) = 0, \\ u(1, x, y) = \varphi(x). \end{cases} \quad (16)$$

In the theory of elliptic equations in order to prove that (16) has a unique solution it is necessary that the following condition holds

$$\inf_y |a(y)| > 0.$$

In our case this condition does not hold since $a(y) = \sigma^2 y^2$ and $\inf_y |\sigma^2 y^2| = 0$. We obtain the degeneracy of the coefficient, thus u_{yy} disappears and there is a singularity. The theory of differential equations does not answer the question of the uniqueness of a solution of such an equation. Therefore, for proving this fact we will use a probability representation of the function G .

Proof. Without loss of generality we give the proof for $d = 1$. We will prove by the rule of contraries. Suppose that there exists another solution $\tilde{G}(t, x, y)$ which satisfies the equation (15) that is

$$\begin{cases} \tilde{G}_t(t, x, y) + \tilde{G}_x(t, x, y)y + \frac{\sigma^2}{2}y^2\tilde{G}_{yy}(t, x, y) = 0, \\ \tilde{G}(1, x, y) = \varphi(x). \end{cases}$$

We will prove uniqueness in the class of classical solutions. Represent $\tilde{G}(u, \xi_u, S_u)$ by Ito's formula

$$d\tilde{G}(u, \xi_u, S_u) = \left[\tilde{G}'_u(u, \xi_u, S_u) + \tilde{G}'_x(u, \xi_u, S_u)S_u + \frac{\sigma^2}{2}S_u^2\tilde{G}''_{yy}(u, \xi_u, S_u) \right] du + \sigma S_u \tilde{G}'_y(u, \xi_u, S_u) dW_u.$$

And first of all we seek a solution in the class where the derivative w.r.t. y is bounded. Next we apply the Ito formula on the interval $t \leq u \leq 1$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(1, \xi_1, S_1) &= \tilde{G}(t, \xi_t, S_t) \\ &+ \int_t^1 \left[\tilde{G}'_u(u, \xi_u, S_u) + \tilde{G}'_x(u, \xi_u, S_u)S_u + \frac{\sigma^2}{2}S_u^2\tilde{G}''_{yy}(u, \xi_u, S_u) \right] du \\ &+ \sigma \int_t^1 S_u \tilde{G}'_y(u, \xi_u, S_u) dW_u. \end{aligned}$$

The second term is equal to zero by the assumption of the theorem. Since we suppose that \tilde{G}'_y is bounded then $M_u = \int_t^1 S_u \tilde{G}'_y(u, \xi_u, S_u) dW_u$ is square integrable martingale.

Hence

$$\tilde{G}(1, \xi_1, S_1) = \tilde{G}(t, \xi_t, S_t) + \sigma M_u. \tag{17}$$

Next consider the conditional expectation which on the one hand is equal to

$$\mathbf{E}(\tilde{G}(1, \xi_1, S_1) | \xi_t = x, S_t = y) = \mathbf{E}(\varphi(\xi_1) | \xi_t = x, S_t = y).$$

On the other hand we have by (17) the equality

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\tilde{G}(1, \xi_1, S_1) | \xi_t = x, S_t = y) \\ &= \mathbf{E}(\tilde{G}(t, \xi_t, S_t) | \xi_t = x, S_t = y) + \mathbf{E}\left(\sigma \int_t^1 S_u \tilde{G}'_y(u, \xi_u, S_u) dW_u | \xi_t = x, S_t = y\right), \end{aligned}$$

where $\mathbf{E} \left(\sigma \int_t^1 S_u \tilde{G}'_y(u, \xi_u, S_u) dW_u \mid \xi_t = x, S_t = y \right) = 0$, because M_u is a martingale.

Then we equate the right parts of both equalities

$$\mathbf{E}(\varphi(\xi_1) \mid \xi_t = x, S_t = y) = \mathbf{E}(\tilde{G}(t, \xi_t, S_t) \mid \xi_t = x, S_t = y) = \tilde{G}(t, x, y).$$

Finally we obtain

$$\tilde{G}(t, x, y) = \mathbf{E}(\varphi(\xi_1) \mid \xi_t = x, S_t = y) = G(t, x, y).$$

Now we will study the case when $G_y(t, x, y)$ is not bounded. Introduce the stopping time

$$\tau_n = \inf \left\{ t \leq u \leq 1 : \int_t^u \theta_s^2 ds \geq n \right\},$$

where $\theta_u = \sigma S_u \tilde{G}'_y(u, \xi_u, S_u)$. Consider

$$\tilde{G}(\tau_n, \xi_{\tau_n}, S_{\tau_n}) = \tilde{G}(t, \xi_t, S_t) + \int_t^{\tau_n} \theta_u dW_u.$$

Since θ_u is a continuous function, it is bounded and $\tau_n \rightarrow 1$. In this case $\mathbf{E} \int_t^{\tau_n} \theta_u^2 du \leq n$ and hence $\mathbf{E} \left(\int_t^{\tau_n} \theta_u^2 dW_u \mid \mathcal{F}_t \right) = 0$. Then

$$\mathbf{E}(\tilde{G}(\tau_n, \xi_{\tau_n}, S_{\tau_n}) \mid \mathcal{F}_t) = G(t, x, y), \quad \forall n \geq 1.$$

Now we need to go to the limit. Suppose that function $\tilde{G}(t, x, y)$ belongs to the class of function of polynomial growth, that is

$$|\tilde{G}(t, x, y)| \leq L(1 + x^m + y^m), \quad \forall m \geq 1.$$

Therefore, we can write

$$\tilde{G}(t, x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\tilde{G}(\tau_n, \xi_{\tau_n}, S_{\tau_n}) \mid \mathcal{F}_t).$$

One can prove that

$$\mathbf{E}(\xi_{\tau_n})^m \leq \mathbf{E} \left(\int_0^1 S_u du \right)^m \leq \mathbf{E} \int_0^1 S_u^m du = \int_0^1 \mathbf{E} S_u^m du.$$

Since ξ_t is a monotone function then $\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_t|^m < +\infty$. Also we have

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} S_t^m \leq S_0^m \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} \exp \left\{ m\sigma W_t - m\sigma^2 t / 2 \right\} \leq \mathbf{E} \exp \left\{ \sigma \sup_{0 \leq t \leq 1} W_t \right\} < +\infty.$$

The last inequality was proved in [14]. Then we obtain

$$\left| \tilde{G}(\tau_n, \xi_{\tau_n}, S_{\tau_n}) \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |\tilde{G}(t, \xi_t, S_t)| \leq L \left(1 + \sup_{0 \leq t \leq 1} \xi_t^m + \sup_{0 \leq t \leq 1} S_t^m \right) \leq L \left(1 + \xi_1^m + \sup_{0 \leq t \leq 1} S_t^m \right).$$

Denoting

$$\psi_n = \tilde{G}(\tau_n, \xi_{\tau_n}, S_{\tau_n}) \text{ and } \psi^* = \left| \sup_{0 \leq t \leq 1} \tilde{G}(t, \xi_t, S_t) \right|$$

we get

$$|\psi_n| \leq \psi^*, \quad \forall n \text{ and } \mathbf{E} \psi^* < +\infty.$$

Next we apply Lebesgue's theorem on majorized dominated convergence to obtain

$$\begin{aligned}\tilde{G}(t, x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\psi_n \mid \xi_t = x, S_t = y) = \mathbf{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \mid \xi_t = x, S_t = y\right) = \\ &= \mathbf{E}(\varphi(\xi_1) \mid \xi_t = x, S_t = y) = G(t, x, y).\end{aligned}$$

The theorem has been proved.

3. Investigation of the function $G(t, x, y)$ on differentiability

Earlier we used the fact that the function $G(t, x, y)$ is continuously differentiable w.r.t. all variables to represent the martingale by the Ito formula. This result is presented in the following theorem.

Theorem 2. Let $x, y \in \mathbb{R}^d$ and $\tilde{\eta}_i(v) = \int_0^v \exp\{\sigma_i W_i(u) - \sigma_i^2 u / 2\} du$. The function

$$G(t, x, y) = \mathbf{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^d x_i + \sum_{i=1}^d y_i \tilde{\eta}_i(v)}{d} - K\right)_+$$

has the continuous derivatives

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} G(t, x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y_i} G(t, x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} G(t, x, y), \quad i = \overline{1, d}.$$

Proof. Represent function $G(t, x, y)$ as

$$G(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^d x_i + \sum_{i=1}^d y_i z_i - Kd\right)_+ \prod_{i=1}^d q_i(t, z_i) dz_1 \dots dz_d,$$

where $q_i(t, z_i)$ are densities defined in Proposition 1. Denote $l(x) = Kd - \sum_{i=1}^d x_i$, then

$$\begin{aligned}G(t, x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^d} \chi_{\{\sum_{i=1}^d y_i z_i > l(x)\}} \left(\sum_{i=1}^d y_i z_i - l(x)\right) \prod_{i=1}^d q_i(t, z_i) dz_1 \dots dz_d \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} \prod_{i=2}^d q_i(t, z_i) \left(\int_0^\infty \chi_{\{\sum_{i=1}^d y_i z_i > l(x)\}} \left(\sum_{i=1}^d y_i z_i - l(x)\right) q_1(t, z_1) dz_1\right) dz_2 \dots dz_d \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} \prod_{i=2}^d q_i(t, z_i) \left(\int_{a(x, y, z)}^\infty \left(\sum_{i=1}^d y_i z_i - l(x)\right) q_1(t, z_1) dz_1\right) dz_2 \dots dz_d,\end{aligned}$$

where $a(x, y, z) = \left(\frac{Kd - \sum_{i=1}^d x_i - \sum_{i=2}^d y_i z_i}{y_1}\right)_+$.

By the Leibniz formula (18) we obtain

$$\begin{aligned}G'_{x_i}(t, x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} \prod_{i=2}^d q_i(t, z_i) \\ &\times \left(\int_{a(x, y, z)}^\infty q_1(t, z_1) dz_1 + q_1(t, a(x, y, z)) \left(y_1 a(x, y, z) + \sum_{i=1}^d y_i z_i - l(x)\right)\right) dz_2 \dots dz_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{a(x, y, z)}^\infty \prod_{i=2}^d q_i(t, z_i) dz_1 \dots dz_d.\end{aligned}$$

Analogously we find derivatives w.r.t. y_i

$$G'_{y_i}(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} \prod_{i=2}^d q_i(t, z_i) \times \left(\int_{a(x, y, z)}^{\infty} z_i q_1(t, z_1) dz_1 - f(a(x, y, z), x, y) a'_{y_i}(x, y, z) \right) dz_2 \dots dz_d.$$

We use the function $f(z_1, x, y) = \left(\sum_{i=1}^d y_i z_i - l(x) \right) q_1(t, z_1)$ which is equal to zero when $z_1 = a(x, y, z)$. Hence

$$G'_{y_i}(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} \prod_{i=2}^d q_i(t, z_i) \left(\int_{a(x, y, z)}^{\infty} z_i q_1(t, z_1) dz_1 \right) dz_2 \dots dz_d.$$

Note that

$$a'_{y_i}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{l(x) - \sum_{i=2}^d y_i z_i}{y_1^2}, & \text{when } i = 1, \\ -z_i, & \text{when } i = 2 \dots d. \end{cases}$$

Then

$$G''_{y_i y_i}(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} \prod_{i=2}^d q_i(t, z_i) \left(-a(x, y, z) q_1(t, a(x, y, z)) a'_{y_i}(x, y, z) \right) dz_2 \dots dz_d.$$

Analyzing the obtained derivatives we conclude about its continuity.

Now we consider the partial derivative w.r.t. t . Introduce the notation

$$H(x, y, z) = \left(\sum_{i=1}^d x_i + \sum_{i=1}^d y_i z_i - Kd \right)_+ \quad \text{and} \quad \rho(t, z) = \prod_{i=1}^d q_i(t, z_i).$$

Then $G(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}_+^d} H(x, y, z) \rho(t, z) dz_1 \dots dz_d$. By the definition of a derivative we can write

$$\frac{G(t + \delta, x, y) - G(t, x, y)}{\delta} = \int_{\mathbb{R}_+^d} H(x, y, z) \varsigma_{\delta}(t, z) dz_1 \dots dz_d,$$

where

$$\varsigma_{\delta}(t, z) = \frac{\rho(t + \delta, z) - \rho(t, z)}{\delta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, z) = \sum_{j=1}^d \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d q_i(t, z_i) \right) \frac{\partial}{\partial t} q_j(t, z_j).$$

Note, taking into account of Proposition 2 in [14], that

$$\frac{\partial}{\partial t} q_i(t, z_i) \leq b(z_i) \quad \text{and} \quad q_i(t, z_i) \leq b_i.$$

Then

$$\begin{aligned} |\varsigma_{\delta}(t, z)| &= \frac{1}{\delta} \left| \int_t^{t+\delta} \frac{\partial}{\partial t} \rho(u, z) du \right| \leq \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} \left| \frac{\partial}{\partial t} \rho(u, z) \right| du \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} \sum_{j=1}^d \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d |q_i(u, z_i)| \right) \left| \frac{\partial}{\partial t} q_j(u, z_j) \right| du < +\infty. \end{aligned}$$

Therefore, by Lebesgue's theorem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(t, x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^d} H(x, y, z) \lim_{\delta \rightarrow 0} \zeta_\delta(t, z) dz_1 \dots dz_d \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^d} H(x, y, z) \sum_{j=1}^d \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d q_i(t, z_i) \right) \frac{\partial}{\partial t} q_j(t, z_j) dz_1 \dots dz_d. \end{aligned}$$

The continuity of the derivative $G'_t(t, x, y)$ follows from the smoothness of densities $q_i(t, z_i)$, which was proved in Proposition 2 of the article [14].

4. Appendix

4.1. Representation theorem

Theorem 3. If $W_t = (W_1(t), \dots, W_n(t))$ – n -dimensional Wiener process and $X = (x_t, \mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ is a quadratic integrable martingale with $\mathcal{F}_t = \sigma\{\omega : W_1(s), \dots, W_n(s), s \leq t\}$ then

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t \alpha_i(s, \omega) dW_i(s),$$

where $\alpha_i(s, \omega) - \mathcal{F}_t$ adapted and $\sum_{i=1}^n \int_0^T \mathbf{E} \alpha_i^2(s, \omega) ds < +\infty$.

4.2. Ito's formula. Multidimensional version

Let $\xi = (\xi(t), \mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ and $S = (S(t), \mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ are vector random processes $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_d(t))$ and $S(t) = (S_1(t), \dots, S_d(t))$ which have the following stochastic differentials

$$d\xi_i = a_i^{(x)}(t, \omega) dt + b_i^{(x)}(t, \omega) dW_i^{(x)}(t), \quad i = \overline{1, d},$$

$$dS_i = a_i^{(y)}(t, \omega) dt + b_i^{(y)}(t, \omega) dW_i^{(y)}(t), \quad i = \overline{1, d}.$$

Theorem 4. Let function $f(t, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)$ is continuous and has derivatives $f'_t, f'_{x_i}, f'_{y_i}, f''_{x_i x_j}, f''_{x_i y_j}, f''_{y_i y_j}$. Then with probability 1 the process $f(t, \xi(t), S(t))$ has the following stochastic differential

$$\begin{aligned} df(t, \xi(t), S(t)) &= \left[f'_t(t, \xi(t), S(t)) \right. \\ &+ \sum_{i=1}^d f'_{x_i}(t, \xi(t), S(t)) a_i^{(x)}(t, \omega) + \sum_{i=1}^d f'_{y_i}(t, \xi(t), S(t)) a_i^{(y)}(t, \omega) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d f''_{x_i x_i}(t, \xi(t), S(t)) (b_i^{(x)}(t, \omega))^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d f''_{y_i y_i}(t, \xi(t), S(t)) (b_i^{(y)}(t, \omega))^2 \left. \right] dt \\ &+ \sum_{i=1}^d f'_{x_i}(t, \xi(t), S(t)) b_i^{(x)}(t, \omega) dW_i^{(x)}(t) + \sum_{i=1}^d f'_{y_i}(t, \xi(t), S(t)) b_i^{(y)}(t, \omega) dW_i^{(y)}(t). \end{aligned}$$

4.3. Leibniz's formula

Let a function $f(x, z)$ and its partial derivative $f'_x(x, z)$ be continuous on $[\alpha, \beta] \times [c, d]$ (a segment $[\alpha, \beta]$ contains a set of values $a(x), b(x)$ and functions $a(x)$ and $b(x)$ are differentiable on $[c, d]$). Then the integral

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz$$

is differentiable w.r.t. x on $[c, d]$ and the following equality holds

$$I'_x(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x). \quad (18)$$

Conclusions

In the paper, the hedging problem for the Asian option on a multidimensional financial market was considered. The main result is the hedging strategy for the Asian option. For this we have obtained a differential equation of elliptic type have proved the uniqueness of its solution. In addition, we have established that the obtained solution is a continuous differentiable function. This property allows us to apply Ito's formula for finding the coefficients in the martingale representation (5).

REFERENCES

1. Kozhin K. (2002) Vse ob ekzoticheskikh opsionakh [All about exotic options]. *Rynok tsennykh bumag* [Stocks and bonds market]. 1(15). pp. 53–57. (In Russian).
2. Zang P.G. (1995) An introduction to exotic options. *European Financial Management*. 1(1). pp. 87–95.
3. Geman H., Yor M. (1993) Bessel processes, Asian options, and perpetuities. *Mathematical Finance*. 3(4). pp. 35–38.
4. Kemna A.G.Z., Vorst A.C.F. (1990) Pricing method for options based on average asset values. *Banking Finance*. 14. pp. 113–129.
5. Carverhill A.P., Clewlow L.J. (1990) Valuing average rate (Asian) options. *Risk*. 3. pp. 25–29.
6. Lapeyre B., Temam E. (2001) Competitive Monte Carlo methods for the pricing of Asian options. *J. Computational Finance*. 5(1). pp. 39–57. DOI: 10.21314/JCF.2001.061.
7. Fu M., Madan D., Wang T. (1998) Pricing continuous Asian options: a comparison of Monte Carlo and Laplace transform inversion methods. *J. Computational Finance*. 2(2). pp. 49–74. DOI: 10.21314/JCF.1998.024.
8. Seghieur H., Lidouh A., Nqi F.Z. (2008) Pricing Asian options by Monte Carlo Method under MPI Environment. *Int. J. Math. Analysis*. 2(27). pp. 1301–1317.
9. Ruttiens A. (1990) Average rate options, classical replica. *Risk*. 3. pp. 33–36.
10. Vorst T. (1992) Prices and hedge ratios of average exchange rate options. *Int. Review of Financial Analysis*. 1(3). pp. 179–193. DOI: 10.1016/1057-5219(92)90003-M.
11. Levy E. (1992) Pricing European Average Rate Currency Options. *Int. Money Finance*. 11. pp. 474–491.
12. Shiryayev A.N. (1999) *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*. Hackensack New Jersey: World Scientific Publishing Company. 834 p.
13. Liptser R.S., Shiryayev A.N. (2001) *Statistics of random processes*. 2nd rev. and exp. ed. Springer Verlag: Berlin. 425 p.
14. Shishkova A.A. (2018) Calculation of Asian options for the Black–Scholes model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 48–63. DOI 10.17223/19988621/51/5.

Shishkova A.A. (2018) THE HEDGING STRATEGY FOR ASIAN OPTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 29–41

Шишкова А.А. (2018) ХЕДЖИРУЮЩАЯ СТРАТЕГИЯ ДЛЯ АЗИАТСКОГО ОПЦИОНА. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. № 56. С. 29–41

DOI 10.17223/19988621/56/3

Ключевые слова: хеджирующая стратегия, Азиатский опцион, стохастические дифференциальные уравнения, Броуновское движение, модель Блэка – Шоулса.

Рассматривается задача портфельного инвестирования в модели Блэка – Шоулса с несколькими рисковыми активами. Хеджирующая стратегия для Азиатского опциона найдена с использованием мартингалных методов. Изучены аналитические свойства (дифференцируемость) плотности случайной экспоненциальной величины.

AMS Mathematical Subject Classification: 60H10, 60G44, 60J65

SHISHKOVA Alena Andreevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alshishkovatomsk@gmail.com

Д.И. Юнусова

О ПРОДОЛЖЕНИИ ПСЕВДОНОРМЫ И МЕТРИКИ НА ПОЛУГРУППОВОЕ КОЛЬЦО

Основным результатом работы является теорема, устанавливающая достаточные условия возможности продолжения псевдонормы кольца R и метрики пространства X до такой групповой нормы на полугрупповом кольце RF кольца R и свободного моноида F , порожденного множеством X , что топология, задаваемая этой групповой нормой, является кольцевой.

Ключевые слова: псевдонорма, топология, полугрупповое кольцо, групповая норма.

При изучении алгебраических систем с дополнительными структурами (топология, порядок, норма и др.) иногда возникает необходимость продолжать эти дополнительные структуры с кольца на их надкольца. В частности, возникает вопрос о возможности продолжения заданных дополнительных структур группы и кольца на их групповое кольцо.

Настоящая работа посвящена изучению вопроса о возможности продолжения действительнозначной псевдонормы и метрики на полугрупповое кольцо свободного моноида.

Этот результат обобщает теорему 1 из [1].

Примем следующие обозначения:

\mathbb{N} – множество всех натуральных чисел;

$|A|$ – мощность множества A ;

RF – полугрупповое кольцо моноида F и кольца R ;

$\langle X \rangle_F$ – подмоноид (подгруппа) моноида (группы) F , порожденный множеством X ;

\mathfrak{M} – нетривиальное многообразие моноидов (групп), т.е. многообразие, не содержащее одноэлементного моноида (группу);

$F = F(\mathfrak{M}, X)$ – свободный моноид (свободная группа) с свободными образующими из X ;

τ_ξ – топология, задаваемая нормой ξ на группе;

R – поле действительных чисел с обычным порядком;

R^+ – множество неотрицательных действительных чисел;

Определение 1. Пусть F – моноид. отображение $\eta: F \rightarrow R^+$ называется действительнозначной псевдополунормой, если выполнены следующие условия:

1. $\eta(g) > 0$ для любого $g \in F$.
2. $\eta(e) = 1$, где e – единица в F .
3. $\eta(g \cdot h) \leq \eta(g) \cdot \eta(h)$ для любых $g, h \in F$.

Определение 2. Говорим, что на кольце R задана групповая норма ξ , если отображение $\xi: R \rightarrow R^+$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$.

2. $\xi(-r) = \xi(r)$ для любого $r \in R$.
3. $\xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$.

Определение 3. Кольцо R называется псевдонормированным, если на R определена неотрицательно действительная функция ξ , удовлетворяющая следующим условиям:

- A. $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$.
- B. $\xi(-r) = \xi(r)$ для любого $r \in R$.
- C. $\xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$.
- D. $\xi(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$.

Лемма. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $F = F(\mathfrak{M}, X)$ – свободный в многообразии \mathfrak{M} моноид (группа) с множеством свободных образующих X , (R, ξ) – псевдонормированное кольцо с помощью действительной псевдонормы ξ , $m, p \in N$, $p \geq 2$; $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p \in X$; $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m \in \langle \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p \rangle_F$ причем $\tilde{z}_i \neq \tilde{z}_j$ при $1 \leq i < j \leq m$; $0 \neq \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_m \in R$.

Если $f = \sum_{j=1}^m \tilde{r}_j \tilde{z}_j$, то для любого разложения $f = \sum_{k=1}^s r_k z_k + \sum_{l=1}^{s'} f_l(x_l - y_l)g_l$, где $r_k \in R$; $z_k \in F$; $1 \leq k \leq s$; $f_l, g_l \in RF$; $x_l, y_l \in X$, $1 \leq l \leq s$; $s, s' \in N$ имеем

$$\sum_{k=1}^s \xi(r_k) + \sum_{l=1}^{s'} \rho(x_l, y_l) \geq \min \{ \xi(\tilde{r}_i), \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \}.$$

Доказательство. Допустим противное, то есть, что

$$\sum_{k=1}^s \xi(r_k) + \sum_{l=1}^{s'} \rho(x_l, y_l) < \min \{ \xi(\tilde{r}_i), \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \}.$$

Зададим на множестве X отношение эквивалентности δ , определенное множеством пар $\{(x_l, y_l) \mid l = 1, \dots, s'\}$, следующим образом:

$x \delta y$ тогда и только тогда, когда $x = y$ либо существует такая конечная последовательность чисел l_1, \dots, l_t где $1 \leq l_i \leq s'$ для $i = 1, \dots, t$, что $\{x_{l_i}, y_{l_i}\} \cap \{x_{l_{i+1}}, y_{l_{i+1}}\} \neq \emptyset$ для $1 \leq i < t - 1$ и $x \in \{x_{l_1}, y_{l_1}\}, y \in \{x_{l_t}, y_{l_t}\}$.

Покажем, что для любых $i, j \in \{1, \dots, p\}$ из $(\tilde{x}_i \delta \tilde{x}_j)$ следует, что $i = j$. Допустим противное, то есть что $(\tilde{x}_i \delta \tilde{x}_j)$ и $i \neq j$. Выберем набор пар $(x_{l_1}, y_{l_1}), \dots, (x_{l_t}, y_{l_t})$ минимальной из возможных длин такой, что $\tilde{x}_i \in (x_{l_1}, y_{l_1}), \tilde{x}_j \in (x_{l_t}, y_{l_t})$ и $\{x_{l_i}, y_{l_i}\} \cap \{x_{l_{i+1}}, y_{l_{i+1}}\} \neq \emptyset$ для $1 \leq i < t - 1$.

Можем считать, что $\tilde{x}_i = x_{l_1}, \tilde{x}_j = y_{l_t}$. Тогда $\rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \rho(x_{l_1}, x_{l_t}) \leq \sum_{l=1}^t \rho(x_{l_i}, y_{l_i})$.

Так как набор пар $(x_{l_1}, y_{l_1}), \dots, (x_{l_t}, y_{l_t})$ имеет минимальную длину, то в нем нет повторяющихся пар, и поэтому,

$$\sum_{i=1}^t \rho(x_{l_i}, y_{l_i}) \leq \sum_{l=1}^{s'} \rho(x_l, y_l) < \min \{ \xi(\tilde{r}_i), \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \} \leq \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j).$$

Полученное противоречие показывает, что из $(\tilde{x}_i \delta \tilde{x}_j)$ следует, что $i = j$.

Рассмотрим отображение $\gamma : X \rightarrow X$, где $\gamma(x) = \begin{cases} \tilde{x}_i, & \text{если } x \delta x_i, i = 2, \dots, p; \\ \tilde{x}_1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Поскольку для $i \neq j$ элемент x_i не эквивалентен элементу x_j , то отображение γ определено корректно. Продолжим γ до эндоморфизма (который будем обозначать также через γ) свободного моноида (свободной группы) F , полагая $\gamma(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_p^{\varepsilon_p}) = \gamma(x_1)^{\varepsilon_1} \dots \gamma(x_p)^{\varepsilon_p}$, а затем продолжим полученный эндоморфизм до эндоморфизма полугруппового кольца RF , который будем обозначать через $\hat{\gamma}$, полагая $\hat{\gamma}(\sum_{i=1}^n r_i h_i) = \sum_{i=1}^n r_i \gamma(h_i)$.

Так как $\tilde{z}_j \in \langle \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p \rangle_F$ для $1 \leq j \leq m$ и $\gamma(\tilde{x}_i) = \tilde{x}_i$ для $i = 1, \dots, p$, то $\gamma(\tilde{z}_j) = \tilde{z}_j$ для любого $j \leq m$ и, значит, $\hat{\gamma}(f) = f$.

Из определения отношения δ и отображения $\hat{\gamma}$ имеем $\hat{\gamma}(x_i - y_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, s'$ и, поэтому, $\sum_{j=1}^m \tilde{r}_j \tilde{z}_j = f = \hat{\gamma}(f) = \sum_{k=1}^s r_k \gamma(z_k)$.

Тогда $\tilde{r}_i = \sum_{\gamma(z_k) = \tilde{z}_i} r_k$ и, значит,

$$\xi(\tilde{r}_i) \leq \sum_{\gamma(z_k) = \tilde{z}_i} \xi(r_k) \leq \sum_{k=1}^s \xi(r_k) < \min \{ \xi(r_1), \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \} < \xi(\tilde{r}_i).$$

Получили противоречие. Этим лемма полностью доказана.

Предложение. Пусть X – множество, \mathfrak{M} – нетривиальное многообразие моноидов (групп), F – свободный моноид (свободная группа) в многообразии \mathfrak{M} , $x, x_1, \dots, x_n \in X$. Если $x = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, то существует такой индекс $i \in \{1, \dots, n\}$, что $x_i = x$.

Доказательство. Допустим противное, то есть что $x_i \neq x$ для $i = 1, \dots, n$. Так как \mathfrak{M} – нетривиальное многообразие, то существует такая группа (моноид) $A \in \mathfrak{M}$, что $|A| \geq 2$. Пусть $a \in A$. Так как $|A| \geq 2$, то существует такой $b \in A$, что $b \neq a^n$ (определение числа n смотрите выше). Рассмотрим гомоморфизм $\hat{\psi} : F(\mathfrak{M}, X) \rightarrow A$ являющейся продолжением отображения $\psi : X \rightarrow A$, определенного следующим образом:

$$\hat{\psi}(x) = b \text{ и } \hat{\psi}(x_i) = a \text{ для } i = 1, \dots, n. \text{ Тогда } b = \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(x_1) \cdots \hat{\psi}(x_n) = \underbrace{a \cdots a}_n = a^n.$$

Получили противоречие. Этим предложение полностью доказано.

Теорема. Пусть (R, ξ) – псевдонормированное кольцо, (X, ρ) – метрическое пространство, \mathfrak{M} – нетривиальное многообразие моноидов (групп), F – свободный моноид (свободная группа) в многообразии \mathfrak{M} , порожденный множеством X . Тогда на полугрупповом кольце RF существует такая групповая норма $\hat{\xi}$, что:

1. $\hat{\xi}(r \cdot e) = \xi(r)$ для любого $r \in R$.
2. $\hat{\xi}(x - y) = \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.
3. $\tau_{\hat{\xi}}$ – кольцевая топология.
4. X является замкнутым подмножеством кольца $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$.

5. Если $f = \sum_{i=1}^n r_i h_i \in RF$, где не все элементы τ_i являются левыми топологическими делителями нуля в R , то подгруппа $R \cdot f = \{r \cdot f \mid r \in R\}$ аддитивной группы кольца RF топологически изоморфна аддитивной группе кольца R .

6. Для любого элемента $x \in X$ подмножество $R \cdot x = \{r \cdot x \mid r \in R\}$ является замкнутым в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$.

Доказательство. Зафиксируем некоторый элемент $x_0 \in X$ и определим на F неотрицательно действительную функцию η , полагая

$$\eta(g) = 1 + \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(x_0, x_i) \mid g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in Z \right\}.$$

Проверим, что η – мультипликативная псевдополунорма на F , удовлетворяющая следующим условиям:

- A. $\eta(g) \geq 1$ для любого $g \in F$.
- B. $\rho(x, y) \leq \eta(x) + \eta(y)$ для любых $x, y \in X$.
- C. $\eta(x) \leq \rho(x, y) + \eta(y)$ для любых $x, y \in X$.
- D. $\eta(x_0) = 1$.

В самом деле, из определения функции η следует выполнение условий A, D, а также условий 1 и 2 из определения 1.

Проверим, что $\eta(g \cdot h) \leq \eta(g) \cdot \eta(h)$ для любых $g, h \in F$.

Пусть g, h – произвольные элементы из F и ε – любое положительное число. Существуют положительное число ε_0 и такие разложения: $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ и $h = x_1^{\varepsilon'_1} \cdots x_k^{\varepsilon'_k}$, что

$$\eta(g) \cdot \varepsilon_0 + \eta(h) \cdot \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 < \varepsilon,$$

$$1 + \sum_{i=1}^n \rho(x_0, x_i) \leq \eta(g) + \varepsilon_0, \quad 1 + \sum_{i=1}^k \rho(x_0, x'_i) \leq \eta(h) + \varepsilon_0.$$

Тогда

$$g \cdot h = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \cdot x_1^{\varepsilon'_1} \cdots x_k^{\varepsilon'_k},$$

причем

$$\begin{aligned} \eta(g \cdot h) &\leq 1 + \sum_{i=1}^n \rho(x_0, x_i) + \sum_{i=1}^k \rho(x_0, x'_i) \leq \\ &\leq (1 + \sum_{i=1}^n \rho(x_0, x_i))(1 + \sum_{i=1}^k \rho(x_0, x'_i)) \leq (\eta(g) + \varepsilon_0) \cdot (\eta(h) + \varepsilon_0) = \\ &= \eta(g) \cdot \eta(h) + \eta(g) \cdot \varepsilon_0 + \eta(h) \cdot \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 \leq \eta(g) \cdot \eta(h) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Из произвольности числа ε получим, что $\eta(g \cdot h) \leq \eta(g) \cdot \eta(h)$.

Этим проверено, что η является мультипликативной псевдополунормой.

Теперь покажем, что $\eta(x) = 1 + \rho(x_0, x)$ для любого $x \in X$.

В самом деле, из задания функции η следует, что $\eta(x) = 1 + \rho(x_0, x)$.

Допустим, что $\eta(x) < 1 + \rho(x_0, x)$. Тогда существует такое разложение

$$x = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \quad (\text{где } x_i \in X, \varepsilon_i \in Z \text{ для } 1 \leq i \leq n, \text{ что } 1 + \sum_{i=1}^n \rho(x_0, x_i) < 1 + \rho(x_0, x)).$$

Согласно предложению $x = x_{i_0}$ для некоторого $1 \leq i_0 \leq n$, и, значит,

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_0, x_i) \geq \rho(x_0, x) > \sum_{i=1}^n \rho(x_0, x_i).$$

Получили противоречие. Следовательно, $\eta(x) = 1 + \rho(x_0, x)$.

Теперь проверим выполнение условий В и С.

Пусть $x, y \in X$. Тогда

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leq (1 + \rho(x_0, x)) + (1 + \rho(x_0, y)) = \eta(x) + \eta(y)$$

$$\text{и} \quad \eta(x) = 1 + \rho(x_0, x) \leq 1 + \rho(x_0, y) + \rho(y, x) = \eta(y) + \rho(x, y)$$

для любых $x, y \in X$.

Определим теперь на RF неотрицательно действительнoзначную функцию $\hat{\xi}$ следующим образом:

Для любого $f \in RF$ положим

$$\hat{\xi}(f) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \xi(r_i) \eta(h_i) + \sum_{k=1}^m \rho(x_k, y_k) \mid f = \sum_{i=1}^n r_i h_i + \sum_{k=1}^m \varphi_k (x_k - y_k) \varphi_k'; \varphi_k, \varphi_k' \in RF \right\}.$$

Покажем, что $\hat{\xi}$ является групповой нормой на RF .

Ясно, что $\hat{\xi}(0) = 0$.

Допустим противное, то есть что $\hat{\xi}(f) = 0$ для некоторого $f \neq 0$. Если $f = \sum_{i=1}^n r_i h_i \in RF$ (где $h_i \neq h_j$ при $1 \leq i < j \leq n$ и $r_k \neq 0$ для $k = 1, \dots, n$), то существуют такие попарно различные элементы $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p \in X$, что $h_i \in \langle \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p \rangle_F$ для $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\varepsilon = \min \{ \xi(r_i), \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \}$. Тогда $\varepsilon > 0$ и, значит, найдется

такое разложение $f = \sum_{j=1}^{n'} r_j' h_j' + \sum_{t=1}^m \varphi_t (x_t - y_t) \varphi_t'$ что

$$\sum_{j=1}^{n'} \xi(r_j') \eta(h_j') + \sum_{t=1}^m \rho(x_t, y_t) < \varepsilon. \quad (1)$$

Так как $\eta(g) \geq 1$ для любого $g \in F$, то из неравенства (1) и леммы следует, что

$$\varepsilon \leq \min \{ \xi(r_i), \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \} \leq \\ \leq \sum_{j=1}^{n'} \xi(r'_j) + \sum_{t=1}^m \rho(x_t, y_t) \leq \sum_{j=1}^{n'} \xi(r'_j) \eta(h'_j) + \sum_{t=1}^m \rho(x_t, y_t) < \varepsilon.$$

Получили противоречие, следовательно, $\hat{\xi}(f) \neq 0$.

Этим проверено выполнение условия 1 из определения 2.

Пусть f, φ – произвольные элементы из RF , ε – положительное число. Тогда существуют такие разложения:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i h_i + \sum_{k=1}^{n'} f_k (x_k - y_k) f'_k, \quad \varphi = \sum_{j=1}^m b_j g_j + \sum_{t=1}^{m'} \varphi_t (x'_t - y'_t) \varphi'_t,$$

что

$$\sum_{i=1}^n \xi(a_i) \eta(h_i) + \sum_{k=1}^{n'} \rho(x_k, y_k) < \hat{\xi}(f) + \varepsilon/2, \quad \sum_{j=1}^m \xi(b_j) \eta(g_j) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x'_t, y'_t) < \hat{\xi}(\varphi) + \varepsilon/2.$$

Рассмотрим разложение

$$f + \varphi = \sum_{i=1}^n a_i h_i + \sum_{j=1}^m b_j g_j + \sum_{k=1}^{n'} f_k (x_k - y_k) f'_k + \sum_{t=1}^{m'} \varphi_t (x'_t - y'_t) \varphi'_t.$$

Из определения $\hat{\xi}$ следует, что

$$\hat{\xi}(f + \varphi) \leq \sum_{i=1}^n \xi(a_i) \eta(h_i) + \sum_{j=1}^m \xi(b_j) \eta(g_j) + \sum_{k=1}^{n'} \rho(x_k, y_k) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x'_t, y'_t) < \hat{\xi}(f) + \hat{\xi}(\varphi) + \varepsilon.$$

Из произвольности числа ε следует, что $\hat{\xi}(f + \varphi) \leq \hat{\xi}(f) + \hat{\xi}(\varphi)$.

Этим проверено выполнение условия 2 из определения 2.

Так как $\hat{\xi}(-f) = \hat{\xi}(f)$ для любого $f \in RF$, то $\hat{\xi}$ удовлетворяет и условию 3 из определения 2 и, значит, $\hat{\xi}$ – групповая норма.

Проверим выполнение свойств 1–6.

Пусть r – любой элемент кольца R . Тогда из задания функции $\hat{\xi}$ следует, что $\hat{\xi}(r \cdot e) \leq \xi(r) \cdot \eta(e) = \xi(r)$, то есть $\hat{\xi}(r \cdot e) \leq \xi(r)$. Допустим, что $\hat{\xi}(r \cdot e) < \xi(r)$. Тогда существует такое разложение

$$r \cdot e = \sum_{i=1}^n r_i h_i + \sum_{j=1}^{n'} f_j (x_j - y_j) f'_j,$$

что

$$\sum_{i=1}^n \xi(r_i) \eta(h_i) + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) < \xi(r).$$

Рассмотрим отображение $\hat{\psi}: RF \rightarrow R$, определенное по правилу

$$\hat{\psi}(\sum_{i=1}^n r_i h_i) = \sum_{i=1}^n r_i.$$

Тогда $r = \hat{\psi}(r \cdot e) = \sum_{i=1}^n r_i$.

Так как ξ – псевдонорма на кольце R , и $\eta(h) \geq 1$ и $\rho(x, y) \geq 0$ для любых $h \in F, (x, y) \in X$, то $\xi(r) \leq \sum_{i=1}^n \xi(r_i) \leq \sum_{i=1}^n \xi(r_i)\eta(h_i) + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j)$.

Получили противоречие с допущением, следовательно, $\hat{\xi}(r \cdot e) = \xi(r)$ для любого $r \in R$.

Пусть теперь x, y – произвольные элементы из X . Из задания функции $\hat{\xi}$ следует, что $\hat{\xi}(x - y) \leq \rho(x, y)$.

Допустим, что $\hat{\xi}(x - y) < \rho(x, y)$. Тогда существует такое разложение

$$x - y = \sum_{i=1}^n r_i h_i + \sum_{j=1}^{n'} f_j(x_j - y_j) f_j' \quad (2)$$

что $\sum_{i=1}^n \xi(r_i)\eta(h_i) + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) < \rho(x, y)$ (2')

Как и при доказательстве леммы рассмотрим отношение эквивалентности δ , задаваемое совокупностью

$$\{(x_1, y_1), \dots, (x_{n'}, y_{n'})\}.$$

Вначале покажем, что x и y не эквивалентны относительно этого отношения эквивалентности.

В самом деле, в противном случае, согласно определения отношения δ , должен существовать такой конечный набор пар $(x_{j_1}, y_{j_1}), \dots, (x_{j_t}, y_{j_t})$, что $x \in (x_{j_i}, y_{j_i}), y \in (x_{j_i}, y_{j_i})$ и $(x_{j_i}, y_{j_i}) \cap (x_{j_{i+1}}, y_{j_{i+1}}) \neq \emptyset$ для $1 \leq i \leq t-1$. Можем считать, что $x_{j_i} = x, y_{j_i} = y$. Тогда

$$\rho(x, y) = \rho(x_{j_i}, y_{j_i}) \leq \sum_{i=1}^t \rho(x_{j_i}, y_{j_i}) \leq \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) < \rho(x, y).$$

Получили противоречие. Следовательно, x и y не находятся в отношении эквивалентности δ .

Определим отображение $\gamma: X \rightarrow X$ следующим образом:

$$\gamma(\bar{x}) = \begin{cases} x, & \text{если } \bar{x}\delta x, \\ y, & \text{если } \bar{x}\delta y, \\ x_0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что отображение γ определено корректно. Тогда $\gamma(x_j) = \gamma(y_j)$ для любого $j = 1, \dots, n'$.

Так как F – свободный моноид (свободная группа) в многообразии \mathfrak{M} , то γ можно продолжить до гомоморфизма γ F в себя.

Пусть $A = \{i \mid 1 \leq i \leq n, \gamma(h_i) = x\}, B = \{i \mid 1 \leq i \leq n, \gamma(h_i) = y\}$.

Так как $x - y = \gamma(x) - \gamma(y) = \sum_{i=1}^n r_i \gamma(h_i)$, то $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. Можем считать, что $A = \{1, \dots, m\}, B = \{m+1, \dots, m'\}$ где $1 \leq m < m' \leq n$, причем

$$\eta(h_i) \geq \eta(h_j) \text{ для } i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

$$\eta(h_{m+1}) \geq \eta(h_i) \text{ для } i = m+1, \dots, m' \quad (3')$$

(в противном случае провели бы перенумерацию h_i). Тогда разложение (2) примет вид

$$x - y = \gamma(x - y) = \sum_{i=1}^n r_i \gamma(h_i) = \sum_{i=1}^m r_i x + \sum_{i=m+1}^{m'} r_i y + \sum_{i=m'+1}^n r_i x_0.$$

Следовательно,
$$\sum_{i=1}^m r_i = 1, \quad \sum_{i=m+1}^{m'} (-r_i) = 1. \quad (4)$$

Пусть ε – такое положительное число, что

$$\sum_{i=1}^n \xi(r_i) \eta(h_i) + \sum_{j=1}^m \rho(x_j, y_j) + 2\varepsilon < \rho(x, y)$$

(из неравенства (2^б) следует существование числа ε).

Существуют такие разложения $h_1 = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_s^{\varepsilon_s}, h_{m+1} = y_1^{\varepsilon_1} \dots y_p^{\varepsilon_p}$, что

$$1 + \sum_{i=1}^s \rho(x_0, x_i) < \eta(h_1) + \varepsilon; \quad (5)$$

$$1 + \sum_{i=1}^p \rho(x_0, y_i) < \eta(h_{m+1}) + \varepsilon. \quad (5')$$

Тогда $x = \gamma(h_1) = \gamma(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_s^{\varepsilon_s})$ и $y = \gamma(h_{m+1}) = \gamma(y_1^{\varepsilon_1} \dots y_p^{\varepsilon_p})$.

По предложению существуют такие числа q_1 и q_2 , что $\gamma(x_{q_1}^{\varepsilon_1}) = x, \gamma(y_{q_2}^{\varepsilon_2}) = y$.

Из определения отображения γ следует, что существуют такие последовательности попарно различных чисел $l_1, \dots, l_s \in \{1, \dots, n\}$ и $k_1, \dots, k_p \in \{1, \dots, n\}$, что

$$x \in \{x_{l_1}, y_{l_1}\}, x_{q_1}^{\varepsilon_1} \in \{x_{l_s}, y_{l_s}\}, \{x_{l_i}, y_{l_i}\} \cap \{x_{l_{i+1}}, y_{l_{i+1}}\} \neq \emptyset \text{ для } i = 1, \dots, s'-1,$$

$$y \in \{x_{k_1}, y_{k_1}\}, y_{q_2}^{\varepsilon_2} \in \{x_{k_p}, y_{k_p}\}, \{x_{k_i}, y_{k_i}\} \cap \{x_{k_{i+1}}, y_{k_{i+1}}\} \neq \emptyset \text{ для } i = 1, \dots, p'-1.$$

Можем считать, что

$$x = x_{l_1}, y_{l_1} = y_{l_{i+1}} \text{ для } 1 \leq i \leq s', x_{q_1}^{\varepsilon_1} = y_{l_s}$$

и

$$y = x_{k_1}, y_{k_1} = x_{k_{i+1}}, y_{q_2}^{\varepsilon_2} = y_{l_p} \text{ для } 1 \leq i \leq p'.$$

Из определения множеств A и B следует, что

$$\{l_1, \dots, l_s\} \subseteq A, \{k_1, \dots, k_p\} \subseteq B. \quad (6)$$

Тогда последовательно применяя B , C , (5), (5'), (4), (6), (3) и (3'), получим, что

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \eta(x) + \eta(y) \leq \eta(x'_{q_1}) + \rho(x, x'_{q_1}) + \eta(y'_{q_2}) + \rho(y, y'_{q_2}) = \\ &= 1 + \rho(x_0, x'_{q_1}) + 1 + \rho(x_0, y'_{q_2}) + \rho(x_{l_1}, y_{l_s}) + \rho(x_{k_1}, y_{l_p}) \leq \\ &\leq \eta(h_1) + \varepsilon + \sum_{i=1}^{s'} \rho(x_{l_i}, y_{l_i}) + \eta(h_{m+1}) + \varepsilon + \sum_{i=1}^{p'} \rho(x_{k_i}, y_{k_i}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \xi(r_i) \eta(h_1) + \varepsilon + \sum_{i=m+1}^{m'} \xi(r_i) \eta(h_{m+1}) + \varepsilon + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \xi(r_i) \eta(h_i) + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Получили противоречие с выбором числа ε , следовательно, $\hat{\xi}(x - y) = \rho(x, y)$.

Теперь покажем, что $\tau_{\hat{\xi}}$ – кольцевая топология. Согласно предложению 1.2.2 из [2], нужно проверить, что совокупность $\mathfrak{B}_0 = \{V_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ удовлетворяет условиям (БО.1) – (БО.6). Так как $\hat{\xi}$ – групповая норма, то условия (БО.1) – (БО.4) выполнены.

Проверим выполнение условий (БО.5) и (БО.6).

Пусть ε – произвольное положительное число и $\varepsilon_1 > 0$ такое число, что $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Если $f, \varphi \in V_{\varepsilon_1}$, то существуют такие разложения:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i h_i + \sum_{k=1}^{n'} f_k (x_k - y_k) f'_k, \quad \varphi = \sum_{j=1}^m b_j g_j + \sum_{t=1}^{m'} \varphi_t (x'_t - y'_t) \varphi'_t,$$

$$\text{что} \quad \sum_{i=1}^n \xi(a_i) \eta(h_i) + \sum_{k=1}^{n'} \rho(x_k, y_k) < \varepsilon_1; \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^m \xi(b_j) \eta(g_j) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x'_t, y'_t) < \varepsilon_1. \quad (7')$$

Если обозначить элемент $\sum_{i=1}^n a_i h_i$ через ψ , то

$$f \cdot \varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j h_i g_j + \sum_{t=1}^{m'} \psi \varphi_t (x'_t - y'_t) + \sum_{k=1}^{n'} f_k (x_k - y_k) f'_k \varphi,$$

$$\begin{aligned} \text{причем} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi(a_i b_j) \eta(h_i g_j) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi(a_i) \xi(b_j) \eta(h_i) \eta(g_j) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \xi(a_i) \eta(h_i) \cdot \sum_{j=1}^m \xi(b_j) \eta(g_j) < \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Кроме того, из неравенств (7) и (7') следует, что

$$\sum_{k=1}^{n'} \rho(x_k, y_k) < \varepsilon_1 \text{ и } \sum_{t=1}^{m'} \rho(x'_t, y'_t) < \varepsilon_1 .$$

Тогда

$$\hat{\xi}(f \cdot \varphi) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi(a_i b_j) \eta(h_i g_j) + \sum_{k=1}^{n'} \rho(x_k, y_k) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x'_t, y'_t) < \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 < \varepsilon ,$$

то есть $f \cdot \varphi \in V_\varepsilon$. Из произвольности элементов f, φ следует, что $V_{\varepsilon_1} \cdot V_{\varepsilon_1} \subseteq V_\varepsilon$ и, значит, выполнено условие (БО.5).

Пусть $f = \sum_{i=1}^n a_i h_i$ (где $h_i \neq h_j$ для $1 \leq i < j \leq n$) – произвольный элемент из RF и ε – положительное число.

Если $f = 0$, то $f \cdot V_\varepsilon = \{0\} \subseteq V_\varepsilon$.

Если же $f \neq 0$, то рассмотрим число $s = \sum_{i=1}^n \xi(a_i) \eta(h_i)$.

Существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что $s \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 < \varepsilon$.

Пусть теперь φ – любой элемент из V_{ε_1} . Существует такое разложение

$$\varphi = \sum_{j=1}^m b_j g_j + \sum_{t=1}^{m'} \varphi_t (x_t - y_t) \varphi'_t ,$$

что
$$\sum_{j=1}^m \xi(b_j) \eta(g_j) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x_t, y_t) < \varepsilon_1 .$$

Тогда
$$f \cdot \varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j h_i g_j + \sum_{t=1}^{m'} f \varphi_t (x_t - y_t) \varphi'_t ,$$

причем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi(a_i b_j) \eta(h_i g_j) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi(a_i) \xi(b_j) \eta(h_i) \eta(g_j) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \xi(a_i) \eta(h_i) \cdot \sum_{j=1}^m \xi(b_j) \eta(g_j) < s \cdot \varepsilon_1 \end{aligned}$$

и
$$\sum_{t=1}^{m'} \rho(x_t, y_t) < \varepsilon_1 .$$

Из задания функции следует, что

$$\hat{\xi}(f \cdot \varphi) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi(a_i b_j) \eta(h_i g_j) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x_t, y_t) < s \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 < \varepsilon ,$$

то есть $f \cdot \varphi \in V_\varepsilon$. Из произвольности φ следует, что $f \cdot V_{\varepsilon_1} \subseteq V_\varepsilon$.

Аналогично проверяется, что $V_{\varepsilon_1} \cdot f \subseteq V_\varepsilon$, то есть выполнено условие (БО.6).

Итак, $\tau_{\hat{\xi}}$ – кольцевая топология.

Покажем, что X – замкнутое подмножество в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$.

Допустим противное и пусть $f_0 \in [X] \setminus X$. Тогда найдутся такие конечные подмножества $\{z_1, \dots, z_n\} \subseteq F$, $\{x_1, \dots, x_p\} \subseteq X$, что $z_i \neq z_j$ при $1 \leq i < j \leq n$, $f_0 = \sum_{i=1}^n r_i h_i$ (где $0 \neq r_i \in R$), $z_i \in \langle x_1, \dots, x_p \rangle_F$, $1 \leq i \leq n$.

Пусть $\varepsilon = \min \{ \hat{\xi}(1), \hat{\xi}(-1), \hat{\xi}(-r_i), \hat{\xi}(r_i - 1), \rho(x_j, x_k) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \neq r_i, 1 \leq i < k \leq p \}$.

Тогда $W_{\frac{\varepsilon}{4}} = \left\{ \varphi \in RF \mid \hat{\xi}(\varphi) < \frac{\varepsilon}{4} \right\}$ – окрестность нуля в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$ и, значит, $(f_0 + W_{\frac{\varepsilon}{4}}) \cap X \neq \emptyset$.

Пусть $x \in (f_0 + W_{\frac{\varepsilon}{4}}) \cap X$. Тогда $x - f_0 \in W_{\frac{\varepsilon}{4}}$ и, значит,

$$\hat{\xi}(x - f_0) < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (*)$$

Возможны следующие 3 случая:

1. Существует $i_0 \in \{1, \dots, p\}$, такое, что $x = x_{i_0}$. Тогда $x - f_0 = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \bar{z}_i$, где $r_i \neq 0$ для $1 \leq i \leq n$ и $\{\bar{r}_i \mid i = 1, \dots, k\} \subseteq \{1, -1, -r_i, 1 - r_i \mid i = 1, \dots, n; r_i \neq 1\}$, $z_i \neq z_j$ для $1 \leq i < j \leq k$ и $\{\bar{z}_i \mid i = 1, \dots, k\} \subseteq \{z_i, x \mid i = 1, \dots, n\}$, причем $\bar{z}_i \in \langle x_1, \dots, x_p \rangle_F$ для $1 \leq i \leq k$.

Так как $\eta(z) \geq 1$ для любого $z \in F$, то из леммы получим, что $\hat{\xi}(x - f_0) \geq \varepsilon > \frac{\varepsilon}{4}$.

Получили противоречие с неравенством (*).

2. $x \neq x_i$ и $\rho(x, x_i) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ для $i = 1, \dots, p$. Тогда $x - f_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{r}_i \bar{z}_i$, где $\bar{r}_i = \begin{cases} r_i, & \text{если } i \leq n, \\ 1, & \text{если } i = n+1 \end{cases}$ и $\bar{z}_i = \begin{cases} z_i, & \text{если } i \leq n, \\ x, & \text{если } i = n+1 \end{cases}$, причем $\bar{z}_i \in \langle x_1, \dots, x_{p+1} \rangle_F$, где $x_{p+1} = x$ для любого $1 \leq i \leq n+1$. Так как $\eta(z) \geq 1$ для любого $z \in F$, то из леммы

получим, что $\hat{\xi}(x - f_0) \geq \min \{ \hat{\xi}(r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \leq i < j \leq p+1 \} \geq \frac{\varepsilon}{4}$.

Получили противоречие с неравенством (*).

3. $x = x_i$ для $i = 1, \dots, p$, но существует $i_0 \leq p$, такое, что $\rho(x, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Тогда $\hat{\xi}(x_{i_0} - f_0) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ и, значит, $\hat{\xi}(x_{i_0} - f_0) \leq \hat{\xi}(x_{i_0} - x) + \hat{\xi}(x - f_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так же как и в случае 1, получим, что $x_{i_0} - f_0 = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \bar{z}_i$, где $\bar{r}_i \neq 0$ для $1 \leq i \leq k$ и $\{\bar{r}_i \mid i=1, \dots, k\} \subseteq \{1, -1, -r_i, 1-r_i \mid i=1, \dots, n; r_i \neq 1\}$, $\bar{z}_i \neq \bar{z}_j$ для $1 \leq i < j \leq k$ и $\{\bar{z}_i \mid i=1, \dots, k\} \subseteq \{z_i, x \mid i=1, \dots, n\}$, причем $\bar{z}_i \in \langle x_1, \dots, x_p \rangle_F$ для $1 \leq i \leq k$.

Так как $\eta(z) \geq 1$ для любого $z \in F$, то из леммы получим, что $\hat{\xi}(x_{i_0} - f_0) \geq \varepsilon$.

Получили противоречие с тем, что $\hat{\xi}(x_{i_0} - f_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Итак, показали, что X – замкнутое подмножество в (RF, τ_ξ) .

Теперь проверим, что подгруппа $R \cdot f = \{r \cdot f \mid r \in R\}$ аддитивной группы кольца RF топологически изоморфна аддитивной группе кольца R для любого элемента $f = \sum_{i=1}^n r_i z_i$, где $z_i \neq z_j$ для $1 \leq i < j \leq n$ и для некоторого $i_0 \leq n$ элемент r_{i_0} (можем считать, что r_1) не является левым топологическим делителем нуля в R .

Из предложения 1.8.7 из [2] следует, что отображение $\varphi_f : R \rightarrow R \cdot f$ действует по правилу $\varphi_f(r) = r \cdot f$. Проверим, что φ_f – открытое отображение.

Пусть V_0 – произвольная окрестность нуля в R . Так как r_1 не является левым топологическим делителем нуля в R , то согласно предложению 1.8.7 из [2], существует такая окрестность V_1 нуля в R , что $r \cdot r_1 \notin V_1$ для любого элемента $r \notin V_0$.

Пусть ε – такое положительное число, что $\{r \in R \mid \xi(r) < \varepsilon\} \subseteq V_1$.

Если $\{x_1, \dots, x_p\}$ такое конечное подмножество в X , что $z_i \in \langle x_1, \dots, x_p \rangle_F$, $1 \leq i \leq n$ и $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \rho(x_i, x_j) \mid 1 \leq i < j \leq p\}$, то покажем, что $W_{\varepsilon_1} \cap R \cdot f \subseteq V_0 \cdot f$.

Допустим противное, то есть что существует такой элемент $f_0 \in W_{\varepsilon_1} \cap R \cdot f$, что $f_0 \notin V_0 \cdot f$. Тогда существует такой элемент $r \in R$, что $f_0 = r \cdot f = \sum_{i=1}^n (r \cdot r_i) z_i$, $\hat{\xi}(f_0) < \varepsilon_1$, а $r \notin V_0$.

Из выбора окрестности V_1 следует, что $r \cdot r_1 \notin V_1$ и, значит, $\xi(r \cdot r_1) \geq \varepsilon > \varepsilon_1$. Тогда согласно лемме, $\hat{\xi}(f_0) \geq \min\{\xi(r \cdot r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \leq i < j \leq p\} \geq \varepsilon_1$ и, значит, $f_0 \notin W_{\varepsilon_1}$. Получили противоречие с выбором элемента f_0 . Следовательно, $W_{\varepsilon_1} \cap R \cdot f \subseteq V_0 \cdot f$.

Итак, мы показали, что подгруппы $R \cdot f(+)$ и $R(+)$ топологически изоморфны.

Проверим, что $R \cdot x$ замкнутое подмножество в (RF, τ_ξ) для любого $x \in X$.

Допустим противное, то есть что $f_0 \in [R \cdot x] \setminus R \cdot x$.

Существуют такие подмножества $\{z_1, \dots, z_p\} \subseteq F$ и $\{x_1, \dots, x_p\} \subset X$, что

$$f_0 = \sum_{j=1}^n r_j z_j, \text{ где } r_j \neq 0 \text{ и } z_j \in \langle x_1, \dots, x_p \rangle_F \text{ при } 1 \leq j \leq n.$$

Если $\varepsilon = \min \{ \xi(-r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \}$, то $(f_0 + W_\varepsilon) \cap R \cdot x \neq \emptyset$ для окрестности нуля $W_\varepsilon = \{ \varphi \in RF \mid \hat{\xi}(\varphi) < \varepsilon \}$ в (RF, τ_ξ) .

Пусть $rx \in (f_0 + W_\varepsilon) \cap R \cdot x$. Тогда $rx - f_0 \in W_\varepsilon$, то есть

$$\hat{\xi}(rx - f_0) < \varepsilon. \quad (**)$$

Возможны следующие 2 случая:

1. $n = 1$. Так как $f_0 \notin R \cdot x$, то $z_1 \neq x$. Полагая в лемме $\tilde{r}_1 = -r_1$, $\tilde{z}_1 = z_1$, получим, что $\hat{\xi}(rx - r_1 z_1) \geq \min \{ \xi(-r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \} \geq \varepsilon$. Получили противоречие с неравенством (**).

2. $n \geq 2$. Так как $z_i \neq z_j$, то $i \neq j$, тогда существует такой индекс $i_0 \leq n$, что $z_{i_0} \neq x$. Можем считать, что $z_1 \neq x$. Тогда $rx - f_0 = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \bar{z}_i$, где $\bar{r}_1 = -r_1$,

$$\{ \bar{r}_i \mid i = 2, \dots, k \} \subseteq \{ -r_j, r, r - r_j \mid j = 1, \dots, n \}, \{ \bar{z}_i \mid i = 1, \dots, k \} \subseteq \{ z_j, x \mid j = 1, \dots, n \}.$$

Полагая в лемме $\tilde{r}_j = \bar{r}_j$, $\tilde{z}_j = \bar{z}_j$, для $j = 1, \dots, m$ получим, что $\hat{\xi}(rx - f_0) \geq \min \{ \xi(-r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \leq i < j \leq p \} \geq \varepsilon$.

Получили противоречие с неравенством (**).

Этим теорема полностью доказана.

Следующий пример показывает, что в общем случае подмножество $R \cdot f$ не является замкнутым в (RF, τ_ξ) , даже если $f = \sum_{i=1}^n r_i z_i$ (где $z_i \neq z_j$ для $1 \leq i < j \leq n$) и все элементы r_i не являются левыми топологическими делителями нуля в R .

Пример. Пусть R – кольцо целых чисел, $p = 3$ и норма ξ_p является p -адической нормой на R .

Рассмотрим множество $X = \{x_0, x_1\}$ с метрикой ρ , где $\rho(x_0, x_1) = 1$.

Ясно, что ρ – равнобедренная метрика.

Пусть F – свободный моноид, порожденный множеством X , и $\hat{\xi}$ – групповая норма на кольце RF , построенная в теореме для псевдонормы ξ и метрики ρ .

Если $f = 2x_0 + 2x_1$ и $f_0 = x_0 + x_1$, то $f_0 \notin R \cdot f$.

Покажем, что $f_0 \in [R \cdot f]_{RF}$.

В самом деле, пусть ε – произвольное положительное число и n – такое натуральное число, что $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Так как числа 2 и 3^n взаимно просты, то существуют такие целые числа k и m , что $2k - 3^n \cdot m = 1$. Тогда $\xi_p(2k - 1) = \xi_p(3^n \cdot m) \leq \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}$ и $kf - f_0 = (2k - 1)x_0 + (2k - 1)x_1$. Из построения нормы $\hat{\xi}$ следует, что

$$\hat{\xi}(kf - f_0) \leq \max \{ \xi_p(2k - 1), \xi_p(2k - 1) \cdot 2 \} \leq \max \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3} \cdot 2 \right\} < \varepsilon.$$

Из произвольности числа ε следует, что $f_0 \in [R \cdot f]_{RF}$, причем поскольку ξ_p – норма на кольце R , то элемент 2 не является левым топологическим делителем нуля в R .

Также приведем пример, показывающий, что теорема не может быть усилена в том смысле, что псевдонорму ξ кольца R вообще говоря нельзя продлить до такой псевдонормы $\hat{\xi}$ кольца RF , чтобы $\hat{\xi}(x - y) = \rho(x, y)$, то есть вместо утверждений: $\hat{\xi}$ – групповая норма и $\tau_{\hat{\xi}}$ – кольцевая топология, получить что $\hat{\xi}$ – псевдонорма.

Пример. Пусть \mathfrak{M} – многообразие коммутативных идемпотентных моноидов, то есть коммутативных моноидов в которых выполняется тождество $g^2 = g$; (X, ρ) – такое метрическое пространство, что $|X| \geq 2$ и $\rho(x, y) = 1/2$ для любых $x, y \in X$, $x \neq y$; F – свободный моноид, порожденный множеством X , R – двухэлементное поле с обычной нормой ξ , то есть $\xi(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r = 0, \\ 1, & \text{если } r = 1. \end{cases}$

Покажем, что норму ξ и метрику ρ нельзя продлить до кольцевой псевдонормы $\hat{\xi}$.

Допустим противное, то есть что существует такая псевдонорма $\hat{\xi}$ на полугрупповом кольце RF , что $\hat{\xi}(x - y) = \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

Зафиксируем некоторую пару различных элементов $x, y \in X$. Так как $F \in \mathfrak{M}$, то $x^2 = x$ и $y^2 = y$. Тогда из того, что $2r = 0$, следует, что

$$\frac{1}{2} = \rho(x, y) = \hat{\xi}(x - y) = \hat{\xi}(x^2 - y^2) = \hat{\xi}((x - y)^2) \leq (\hat{\xi}(x - y))^2 = (\rho(x, y))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Получили противоречие с допущением, следовательно, норму ξ и метрику ρ нельзя продлить до кольцевой псевдонормы $\hat{\xi}$ на кольце RF .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бельнов В.К. О метризации колец многочленов // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sci. Math., Astr. et Phys. 1974. V. XXII. No. 12. P. 1217–1233.
2. Арнаутков В.И., Водичар М.И., Михалев А.В. Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1981. 175 с.

Статья поступила 24.05.2018 г.

Yunusova D. I. (2018) ON THE EXTENSION OF PSEUDONORM AND METRICS TO THE SEMIGROUP RING. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 42–56

DOI 10.17223/19988621/56/4

Keywords: pseudonorm, topology, semigroup ring, group norm.

In connection with the study of algebraic systems with additional structures (topology, order, norm, etc.), it sometimes becomes necessary to continue these additional structures from the ring to their over-rings. In particular, the question arises of the possibility to extend the given additional structures of a group and a ring to their group ring.

This paper is devoted to the study of the possibility of extending a real-valued pseudonorm and a metric to the semigroup ring of a free monoid.

The main result of the paper is a theorem that establishes sufficient conditions for the possibility of extending the pseudonorm of the ring R and the metric of the space X to such a group norm on the semigroup ring RF of the ring R and the free monoid F generated by the set X such that the topology given by this group norm is annular.

AMS Mathematical Subject Classification: 16S36, 16W80, 22A30

YUNUSOVA Dilfuza Israilovna (Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Republic of Uzbekistan) E-mail: dilfuzaisrailovna@gmail.com

REFERENCES

1. Bel'nov V.K. (1974) O metrizatsii kolets mnogochlenov [On metrization of polynomial rings]. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Série des Sci. Math. Astr. et Phys.* XXII(12). pp. 1217–1233.
2. Arnautov V.I., Vodincear M.I., Mikhalev A.V. (1981) *Vvedeniye v teoriyu topologicheskikh kolets i moduley* [Introduction to the theory of topological rings and modules]. Chişinău: Ştiinţa.

МЕХАНИКА

УДК 539.42
DOI 10.17223/19988621/56/5

Г.Н. Колесников, Т.А. Гаврилов

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ ПОЯВЛЕНИЯ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ТРЕЩИН В АСФАЛЬТОБЕТОННОМ СЛОЕ АВТОМОБИЛЬНОЙ ДОРОГИ

Низкотемпературные (морозобойные) трещины образуются в верхних слоях автомобильных дорог при их промерзании. Предложена механико-математическая модель условий образования таких трещин. Установлено, что распределение растягивающих сил в сегменте асфальтобетонного слоя описывается полиномом второго порядка с максимумом в середине длины сегмента. По условию прочности на растяжение определена наибольшая длина сегмента без трещин.

Ключевые слова: *низкотемпературные трещины, асфальтобетон, автомобильные дороги, условия появления трещин, механико-математическая модель.*

Низкотемпературные трещины, называемые также морозобойными трещинами, образуются в верхних слоях грунтов при их промерзании [1], в асфальтобетонных покрытиях автомобильных дорог [2] и аэродромов [3]. С точки зрения механики такие трещины «относятся к типу трещин нормального отрыва при растяжении, характерного для упруго-хрупкого разрушения» [1].

Рассматриваются низкотемпературные трещины в асфальтобетонных покрытиях автомобильных дорог. Особенность таких трещин заключается в том, что они появляются через несколько лет после завершения строительства дороги и ориентированы перпендикулярно ее продольной оси. Шаг трещин составляет от нескольких до десятков метров, в наибольшей степени зависит от физико-механических свойств асфальтобетона, от амплитуды и скорости изменений температуры [2], а также от толщины асфальтобетонного слоя и других параметров [4]. Свойства асфальтобетона с течением времени изменяются, поскольку «амплитуда колебаний температур слоев покрытия существенно выше перепада температур воздуха. Например, в зимнее время температура покрытия в дневное время ниже температуры воздуха, а в летнее время наоборот. Колебание температуры внешней среды является источником непрекращающихся структурных превращений в асфальтобетоне, следовательно, под влиянием этих явлений практически непрерывно изменяется число вязких и упругих (с разной жесткостью) элементов в механической модели асфальтобетона» [3].

То обстоятельство, что низкотемпературные трещины параллельны друг другу и перпендикулярны продольной оси дороги, позволяет провести аналогию с осевой деформацией стержня и использовать одномерные модели участка асфальтобетонного покрытия автомобильной дороги. Такой подход использован в работах [5, 6] для прогнозирования расстояния между трещинами в покрытиях автомо-

бильных дорог. Однако остались нераскрытыми закономерности влияния отрицательной температуры на распределение растягивающих напряжений и деформаций в асфальтобетонном слое. Необходимость продолжения исследований в данной области подчеркивается также в работе [2].

Механизм влияния толщины и физико-механических характеристик асфальтобетонного слоя на его трещиностойкость исследован в работе [3]. В данной работе сформулированы предложения по предотвращению так называемых «отраженных» трещин. В частности, установлено, что целесообразно уменьшение сцепления между слоем асфальтобетона и плитами основания в области шва, а также увеличение толщины асфальтобетонного слоя.

В ряде публикаций по затронутой теме отмечается, что полностью исключить появление трещин практически невозможно. Однако трещины появляются через несколько лет после завершения строительства [2], поэтому реалистичны задачи уменьшения количества трещин, приходящихся на единицу длины дороги, а также задачи увеличения срока службы асфальтобетонного покрытия до появления трещин [3]. При этом необходимым условием поиска решения задач является применение современных механико-математических моделей и компьютерных технологий их реализации.

Цель работы: разработать механико-математическую модель условий образования низкотемпературных трещин на участке асфальтобетонного слоя и выполнить анализ закономерностей влияния отрицательной температуры на распределение растягивающих сил в асфальтобетонном слое и сил сдвига в области его контакта с основанием.

Модель взаимодействия сегмента асфальтобетонного слоя с основанием дороги

Рассмотрим физические и геометрические характеристики сегмента асфальтобетонного слоя дорожной конструкции при изменении температуры, необходимые для его моделирования (рис. 1).

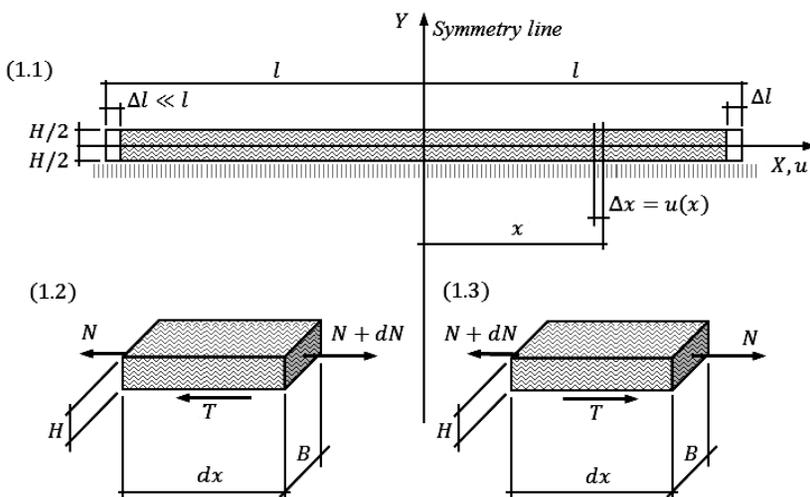


Рис. 1. Расчетная схема слоя (1.1) и симметричные элементы (1.2 и 1.3)
Fig. 1. Schematic description of the layer (1.1) and symmetric elements (1.2 and 1.3)

Асфальтобетон рассматриваем как однородный изотропный материал, для которого модуль упругости равен E , коэффициент Пуассона ν , коэффициент теплового расширения α . Слой асфальтобетона постоянной толщины H опирается на упругий базовый слой толщиной H_0 . По аналогии с [6], сегмент асфальтобетонного слоя рассмотрим как стержень шириной B , толщиной H и длиной $L = 2l$ (рис. 1).

Предполагается, что температура одинакова для всех точек на дневной поверхности асфальтобетонного слоя. Предполагается также, что величина H достаточно мала для того, чтобы пренебречь неравномерностью распределения температуры, деформаций и напряжений по толщине данного слоя.

Осевая деформация, продольные силы и напряжения

При отрицательной температуре длина участка асфальтобетонного слоя уменьшается. Однако деформациям асфальтобетонного слоя препятствуют силы трения и сцепления с нижележащим слоем. В рассматриваемой модели линии действия этих сил расположены в плоскости контакта слоев. Эти силы пропорциональны жесткости k упругого базового слоя. Жесткость k зависит от ряда факторов, может быть определена экспериментально или по литературе. Например, для одного из вариантов асфальтобетонного покрытия $k = 416 \text{ МН/м}^3$ [6]. С физической точки зрения величина k может рассматриваться как жесткость K обычной пружины (размерность Н/м), распределенной по площади a контакта слоев: $k = K / a$. Тогда для отрезка длиной dx и шириной B (рис. 1) запишем

$$K = kBdx. \tag{1}$$

При уменьшении температуры, когда растягивающие напряжения в слое асфальтобетона достигают предела прочности, происходит его разрушение и появляется трещина, ширина которой растет с увеличением сдвига верхнего слоя. Сдвигу противодействуют касательные силы T , которые распределены по площади контакта слоев и зависят от трения и адгезии слоев.

Изменение температуры стержня на Δt градусов связано с перемещением точки i соотношением $u = \Delta x$, где $\Delta x = \alpha x \Delta t$. Продольная деформация du элемента длиной dx (рис. 1), для которого площадь поперечного сечения равна $A = BH$ и модуль упругости материала равен E , вызывается двумя факторами, а именно: изменением температуры Δt и продольной силой Kdu . Тогда $du = \alpha \Delta t dx + Kdu dx / (EA) \approx \alpha \Delta t dx$. Так как $u = 0$ при $x = 0$ (рис. 1), то интегрируя, получим

$$u = \alpha x \Delta t. \tag{2}$$

Как следствие симметрии физических и геометрических параметров модели (рис. 1), внутренние силы и перемещения зеркально симметричны относительно оси Y : $u(-x) = -u(x)$. Из условия равновесия отрезка длиной dx следует

$$dN = dT. \tag{3}$$

Здесь $dT = Ku$, где K и u определяются по (1) и (2): $dT = (kBdx)u$. Принимая во внимание (3) запишем

$$dN = kB\alpha \Delta t x dx. \tag{4}$$

Интегрируя обе части равенства (4), получим

$$N = kB\alpha \Delta t x^2 / 2 + C_1. \tag{5}$$

В физической модели сегмента (рис. 1) на торцевых гранях продольных сил нет: если $x = \pm l$, то $N = 0$. Таким образом, $C_1 = -kB\alpha\Delta t^2 / 2$,

$$N = kB\alpha\Delta t(x^2 - l^2) / 2. \quad (6)$$

Здесь $x \leq l$; если $\Delta t < 0$, то $N \geq 0$.

Зная N (6), определим нормальные напряжения σ . При этом, пренебрегая случайными отклонениями размеров поперечного сечения от их идеальных значений, считаем, что поперечное сечение имеет форму прямоугольника (рис. 1):

$$\sigma = N / A = N / (BH) = kB\alpha\Delta t(x^2 - l^2) / (2BH) = k\alpha\Delta t(x^2 - l^2) / (2H). \quad (7)$$

Вследствие того, что экстремум растягивающей силы (6) имеет место при $x = 0$, новая трещина при достаточно низкой температуре будет локализована в середине длины рассматриваемого сегмента (рис. 1).

Пример 1. Пусть $L = 2l = 12$ м (рис. 1); $B = 10$ м, $H = 0.2$ м; $k = 416$ МН/м³ [6]; $\alpha = 2.2 \cdot 10^{-5}$ (1/°C) [7]. Температура уменьшается от нуля до $t = -20$ °C, то есть $\Delta t = t$; $E = 12500$ МПа при $t = -20$ °C [8]. Прочность асфальтобетона при растяжении (в МПа) зависит от температуры и определяется по известной формуле [9]:

$$\sigma_t = 4.015 \exp(-0.042t). \quad (8)$$

Вопрос: появится ли трещина при уменьшении температуры асфальтобетонного слоя?

Ответ: очевидно, условие прочности можно записать в виде $\sigma_{\text{extr}} = N_{\text{extr}} / A \leq \sigma_t$, где $A = BH$ и N_{extr} определяется по формуле (6) при $x = 0$ (рис. 1): $N_{\text{extr}} = 32.947 \cdot 10^6$ Н. Соответственно $\sigma_{\text{extr}} = 16.474$ МПа, что больше $\sigma_t = 4.015 \exp(-0.042(-20)) = 9.300$ МПа. Поэтому появление трещины неизбежно. Однако трещина появится прежде, чем температура достигнет значения $t = -20$ °C.

Определим наименьшую температуру t^* , при которой условие прочности в рассматриваемой модели будет выполнено и трещина не появится. Напряжение σ_{extr} прямо пропорционально изменению температуры t : температуре $t = t^* < 0$ соответствует $\sigma_{\text{extr}}^* = 16.474t^* / (-20)$. Однако, согласно формуле (8), прочность асфальтобетона σ_t при увеличении температуры экспоненциально уменьшается. С учетом соотношения (8) условие прочности $\sigma_{\text{extr}}^* \leq \sigma_t$ запишем в виде нестрогого неравенства $16.474t^* / (-20) \leq 4.015 \exp(-0.042t^*)$. Решение данного неравенства $t^* \geq -6.37$ °C прогнозирует критическое значение температуры. Если $t > -6.37$ °C, то трещина не появится.

Соответственно при $t = t^* = -6.37$ °C находим $\sigma_{\text{extr}} = 16.474t^* / (-20) = 5.247$ МПа, $N_{\text{max}} = 10.49$ МН. Правая часть неравенства, т.е. прочность асфальтобетона при $t = -6.37$ °C по формуле (8) равна $\sigma_t = 5.247$ МПа. Таким образом, моделируемый сегмент распадается на два новых сегмента длиной по 6 м каждый, если температура опустится ниже критического значения $t^* = -6.37$ °C.

Наибольшая длина сегмента без трещин при отрицательной температуре

Формулы (6) и (7) прогнозируют локализацию низкотемпературной трещины в середине длины однородного стержня с постоянной площадью поперечного сечения, так как экстремум продольной силы имеет место при $x = 0$ (рис. 1). Соответственно напряжение σ_{extr} (7):

$$\sigma_{\text{extr}} = -k\alpha\Delta t l^2 / (2H). \quad (9)$$

Здесь $\Delta t < 0$. Очевидно, с учетом (8) и (9) условие прочности можно записать в виде $\sigma_{\text{extr}} \leq \sigma_t$. Из соотношения (9) следует, что σ_{extr} быстро возрастает с увеличением $l = L/2$, а именно: $\sigma_{\text{extr}} = -k\alpha\Delta t L^2 / (8H)$. Это означает, что при достаточно большом значении L появится низкотемпературная трещина. Практический интерес представляет зависимость наибольшей длины сегмента без низкотемпературных трещин от характеристик асфальтобетонного слоя.

Определение: критическая длина сегмента равна наибольшей его длине, превышение которой вызывает появление низкотемпературной трещины при отрицательной температуре. Соответственно критическое растягивающее напряжение равно напряжению, превышение которого вызывает появление низкотемпературной трещины при отрицательной температуре.

Используя выражение σ_{extr} (9), найдем критическую длину $L = L_{\text{cr}} = 2l_{\text{cr}}$, ($\Delta t < 0$):

$$L_{\text{cr}} = \sqrt{-8H\sigma_{\text{extr}} / (k\alpha\Delta t)}. \quad (10)$$

В критическом состоянии $\sigma_{\text{extr}} = \sigma_t$ (8). Тогда, используя полученную в работе [9] формулу (8), перепишем (10) в виде

$$L_{\text{cr}} = \sqrt{-32.12H \exp(-0.042t) / (k\alpha\Delta t)}. \quad (11)$$

Пример 2. В условиях примера 1 определить L_{cr} при $t = -20$ °С.

Решение. По формулам (8) и (9) найдем соответственно $\sigma_{\text{extr}} = 9.300$ МПа и $L_{\text{cr}} = 9.016$ м.

Если $t < -20$ °С, то в середине длины данного сегмента появится новая трещина и, соответственно, два новых сегмента длиной по $L_{\text{cr}} / 2 \approx 4.5$ м каждый. В новых сегментах напряжение σ_{extr} (9) уменьшится в четыре раза.

Пример 3. Вычислить L_{cr} для трех значений k , равных 416, 104 и 26 МН/м³, в интервале температур от -1 °С до -40 °С. Остальные исходные данные принимаются по примеру 1.

Решение. Результаты вычислений по формуле (11) приведены в графической форме на рис. 2.

Результаты моделирования (рис. 2) показывают, что при температуре от -40 °С до -10 °С длина сегмента асфальтобетонного слоя без трещин почти не зависит от температуры, однако существенно увеличивается с уменьшением коэффициента сцепления k с базовым слоем.

Для практики важно увеличить расстояние между трещинами, т.е. увеличить L_{cr} . Из соотношений (10) и (11) следует, что длина сегмента асфальтобетонного слоя автомобильной дороги без трещин будет возрастать, если:

- увеличить толщину асфальтобетонного слоя H ;
- повысить прочность материала асфальтобетонного слоя при растяжении, например армированием;
- уменьшить коэффициент сцепления k асфальтобетонного слоя с нижележащим слоем;
- уменьшить коэффициент α материала асфальтобетонного слоя.

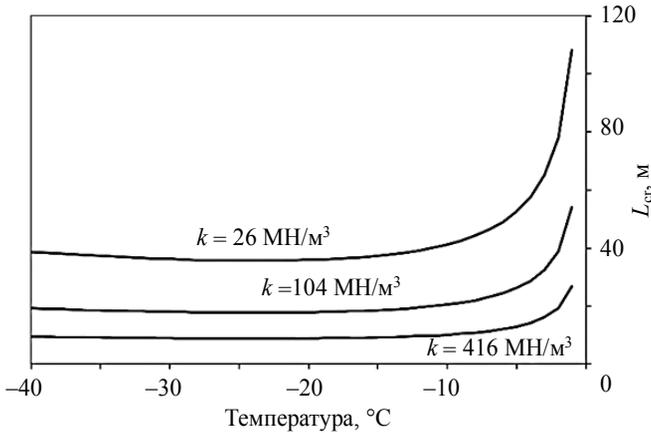


Рис. 2. Зависимость критической длины L_{cr} от температуры
 Fig. 2. Critical length L_{cr} as a function of temperature

Силы сдвига и касательные напряжения в области контакта асфальтобетонного слоя с основанием

Найдем интенсивность сил сдвига $T_{int} = dT / dx$. С учетом (3) и (4) получим

$$T_{int} = dT / dx = dN / dx = kB\alpha\Delta tx. \quad (12)$$

Следовательно, наибольших по модулю значений силы сдвига достигают при $x = \pm 1$ (рис. 1).

Определим силы сдвига T , которые действуют в области контакта асфальтобетонного слоя с нижележащим слоем. Принимая во внимание (3) и (12), получим

$$dT = kB\alpha\Delta txdx. \quad (13)$$

Интегрируя обе части равенства (13), получим $T = kB\alpha\Delta tx^2 / 2 + C_2$. Константу интегрирования C_2 найдем, используя (11): если $x = 0$, то $T_{int} = 0$, а значит, и $T = 0$. Таким образом, $C_2 = 0$,

$$T = kB\alpha\Delta tx^2 / 2. \quad (14)$$

Учитывая (6) и (14), заметим, что разность $N - T = -kB\alpha\Delta tl^2 / 2$; так как $\Delta t < 0$, то $N - T > 0$.

Найдем касательные напряжения τ в области контакта асфальтобетонного слоя с основанием (рис. 1). Так как $dA = Bdx$, то с учетом (13) получим

$$\tau = dT / dA = kB\alpha\Delta txdx / (Bdx) = k\alpha\Delta tx. \quad (15)$$

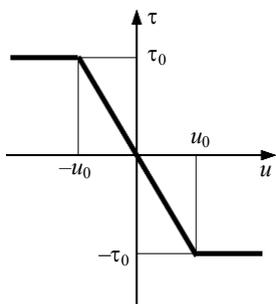


Рис. 3. Напряжения и перемещения при сдвиге бетонного слоя при $\Delta t \leq 0$

Fig. 3. Stresses and displacements due to a concrete layer shearing at $\Delta t \leq 0$ данной работы.

Известные по литературе [10] экспериментальные данные показывают, что с уменьшением температуры касательные напряжения (15) линейно возрастают по модулю до определенного значения τ_0 (рис. 3).

Величины τ_0 и u_0 весьма переменны, например, могут принимать значения из интервалов соответственно [0.010, 0.024] МПа и [0.5, 1.4] мм [10]. Принимая во внимание рис. 3 и известные по литературе данные по трибологии [11], можно предположить, что если в рассматриваемом случае $\tau = \tau_0$, то имеет место скольжение с трением; однако если $|\tau| < \tau_0$, то основную роль играет адгезия. Более детальное обсуждение данного вопроса выходит за рамки

Обсуждение и сравнение с результатами других авторов

Адекватность результатов моделирования по разработанной методике подтверждается известными по литературе экспериментальными данными. Например, анализ большого объема экспериментальных и теоретических данных представил В. Teltayev [2]. Рассмотрим один из примеров, подробно описанный в статье [2]: дорога с асфальтобетонным слоем толщиной 0.15 м построена в Казахстане в 2008–2009 гг.; по состоянию на 19.07.2015 среднее число трещин на 1 км дороги равно 57.

Таким образом, среднее расстояние между трещинами 17.6 м, что согласуется с представленными на рис. 2 результатами моделирования для $k = 104 \text{ МН/м}^3$ в интервале температур от -40 до -10 °С, в котором L_{cr} принимает значения от 18 до 20 м. Соответственно расхождение составляет от 2 до 12 %, если $H = 0.2$ м.

Однако если $H = 0.15$ м, то по формуле (10) получим для L_{cr} интервал значений от 15.6 до 17.3 м. Расхождения объясняются тем, что в представленных на рис. 2 результатах вычислений не учтены случайные отклонения характеристик технологических процессов, климатических условий и физико-механических свойств от их нормируемых значений. Для оценки влияния этих факторов необходимо продолжение исследований.

Тем не менее детерминированные формулами (10) и (11) закономерности влияния характеристик асфальтобетонного слоя на L_{cr} согласуются с независимо полученными по другим методикам данными исследований аналогичных объектов [3, с. 72]. А именно, как и в [3], подтверждено, что сопротивление появлению трещин возрастает с увеличением толщины асфальтобетонного слоя H и уменьшением коэффициента k , т.е. сцепления слоя асфальтобетона с основанием.

Можно предположить, что увеличение коэффициента k в формулах (10) и (11) эквивалентно повышению жесткости основания, т.е. увеличению модуля упругости. Тогда в литературе находим экспериментально обоснованное подтверждением нашего теоретически полученного вывода о том, что с уменьшением коэффициента k уменьшается количество трещин на единицу длины дороги: «... покрытия с высокомодульными асфальтобетонными основаниями имеют в 2,45 раза

больше шансов оказаться в группе трещиноватых покрытий, чем покрытия с обычными асфальтобетонными основаниями» [12]. В цитируемой работе толщина слоев асфальта варьируется на разных участках дороги от 11 до 31 см, а толщина основания – от 15 до 25 см. Возраст различных участков дорог от одного года до 12 лет, общая протяженность исследованных в 2014 г. участков дорог 1300 км. При этом модуль упругости более жесткого асфальтобетона равен 14000 МПа при 15 °С, и менее жесткого – также 14000 МПа, но при 10 °С [12].

Таким образом, разработанная модель условий появления низкотемпературных трещин физически адекватна, а расчетные формулы определения критической длины асфальтобетонного слоя (10) и (11) приводят к реалистичным результатам (рис. 2), что подтверждается их согласованностью с экспериментальными и теоретическими результатами исследований других авторов [2, 3, 12]. Разработанная модель и расчетные формулы (10) и (11) могут быть использованы как при анализе мониторинга существующих автомобильных дорог, так и в исследованиях дорожных конструкций из новых материалов [4, 13].

Заключение

В результате выполненного исследования разработана механико-математическая модель условий образования низкотемпературных трещин на участке асфальтобетонного слоя. С применением разработанной модели выполнен анализ закономерностей влияния отрицательной температуры на распределение растягивающих напряжений в асфальтобетонном слое, взаимодействующим с основанием.

Установлено, что силы сдвига в середине длины сегмента равны нулю и достигают наибольших по модулю значений в окрестности торцевых сечений сегмента асфальтобетонного слоя.

Установлено, что распределение растягивающих сил в сегменте асфальтобетонного слоя описывается полиномом второго порядка (6); растягивающая сила имеет максимум в середине длины сегмента. Соответственно новая трещина при понижении температуры появится в середине длины сегмента.

Получены расчетные формулы (10) и (11) для определения наибольшей длины сегмента асфальтобетонного слоя автомобильной дороги без трещин L_{cr} . Адекватность результатов моделирования подтверждена их согласованностью с опубликованными в литературе экспериментальными и теоретическими данными независимо выполненных исследований других авторов.

С применением разработанной модели показано, что сопротивление появлению трещин будет возрастать, если: увеличить толщину асфальтобетонного слоя H ; уменьшить коэффициент сцепления k асфальтобетонного слоя с нижележащим слоем; повысить прочность материала асфальтобетонного слоя при растяжении, в том числе армированием; уменьшить коэффициент α асфальтобетонного слоя при отрицательных температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Merzlyakov V.P.* Physical and mechanical conditions for primary frost crack formation // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2016. V. 53. No. 4. P. 221–225. DOI: 10.1007/s11204-016-9389-1.
2. *Teltayev B.* Regularities of increasing of temperature cracks number in asphalt pavement of highway // Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. 2015. No. 5. P. 35–57.

3. Попов А.Н., Кочетков А.В., Масалькин А.Н. Математическая модель деформирования асфальтобетонного слоя усиления сборного аэродромного покрытия под воздействием температуры // Научный журнал строительства и архитектуры. 2015. № 2 (38). С. 65–74.
4. Zavyalov M.A., Kirillov A.M. Evaluation methods of asphalt pavement service life // Magazine of Civil Engineering. 2015. No. 2 (54). P. 70–76. DOI: 10.18720/MCE.70.5.
5. Shen W., Kirkner D.J. Distributed thermal cracking of AC pavement with frictional constraint // J. Engineering Mechanics. 1999. V. 125. No. 5. P. 554–560.
6. Chen G., Baker G. One-dimensional nonlinear model for prediction of crack spacing in concrete pavements // Advances in Structural Engineering. 2005. V. 8. No. 6. P. 595–602.
7. Pszczola M., Judycki J. Comparison of calculated and measured thermal stresses in asphalt concrete // Baltic J. Road & Bridge Engineering. 2015. V. 10. No. 1. P. 39–45. DOI: 10.3846/bjrbe.2015.05.
8. Judycki J. A new viscoelastic method of calculation of low-temperature thermal stresses in asphalt layers of pavements // Int. J. Pavement Engineering. 2018. V. 19. Issue 1. P. 24–36. DOI: 10.1080/10298436.2016.1199883.
9. Левашиов Г.М., Сиротюк В.В. Об определении предела прочности асфальтобетона на растяжение при изгибе // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. 2011. № 22. С. 23–26.
10. Zhang J., Li V.C. Influence of supporting base characteristics on shrinkage-induced stresses in concrete pavements // J. Transportation Engineering. 2001. V. 127. No. 6. P. 455–462.
11. Myshkin N.K., Goryacheva I.G. Tribology: trends in the half-century development // Journal of Friction and Wear. 2016. V. 37. No. 6. P. 513–516. DOI: 10.3103/S106836661606009X.
12. Rys D., Judycki J., Pszczola M., Jaczewski M., Mejlun L. Comparison of low-temperature cracks intensity on pavements with high modulus asphalt concrete and conventional asphalt concrete bases // Construction and Building Materials. 2017. V. 147. P. 478–487. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.04.179>.
13. Sirotyuk V.V., Lunev A.A. Strength and deformation characteristics of ash and slag mixture // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 6 (74). P. 3–16. DOI: 10.18720/MCE.74.1.

Статья поступила 25.04.2018

Kolesnikov G.N., Gavrilov T.A. (2018) SIMULATION OF THE CONDITIONS FOR A LOW-TEMPERATURE CRACK APPEARANCE IN THE ASPHALT CONCRETE LAYER OF A ROAD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennougouniversiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 57–66

DOI 10.17223/19988621/56/5

Keywords: low-temperature crack, asphalt concrete, automobile roads, cracking conditions, mechanical-mathematical model.

Low-temperature cracks are formed in the upper layers of roads during freezing of the latter. The methods used for predicting the distance between cracks on the road surfaces are well known. However, the patterns of negative temperature influence on the distribution of tensile stresses in an asphalt concrete layer are still undefined.

The purpose of the work is to develop a mechanical and mathematical model of the conditions for the low-temperature cracks arising in the asphalt layer and to analyze the effect of subzero temperature on the distribution of both tensile forces in the asphalt layer and shear forces in the contact area between the layer and the base.

As a result, it is found that the distribution of tensile forces in the segment of asphalt concrete layer is described by a second order polynomial whose maximum is in the middle of the segment length. The maximum (critical) length of the segment without cracks is determined by means of tensile strength condition. It is revealed that the shear forces in the middle of the segment length are equal to zero and reach the highest absolute values in the vicinity of end faces of asphalt layer segment.

The adequacy of simulation results is confirmed by their consistency with experimental and theoretical data published by other authors.

KOLESNIKOV Gennady Nikolaevich (Doctor of Technical Science, Professor, Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russian Federation).

E-mail kolesnikovgn@yandex.ru

GAVRILOV Timmo Aleksandrovich (Candidate of Technical Science, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, Saint Petersburg, Russian Federation).

E-mail gavrilov@petrsu.ru

REFERENCES

1. Merzlyakov V.P. (2016) Physical and mechanical conditions for primary frost crack formation. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 53(4). pp. 221–225. DOI: 10.1007/s11204-016-9389-1.
2. Teltayev B. (2015) Regularities of increasing of temperature cracks number in asphalt pavement of highway. *Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*. 5. pp. 35–57.
3. Popov A.N., Khatuntsev A.A. (2015) Computing experimental factor model of the multi-layered airfield pavements taking into account physical non-linearity of materials of constructive layers. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2(26). pp. 74–87.
4. Zavyalov M.A., Kirillov A.M. (2015) Evaluation methods of asphalt pavement service life. *Magazine of Civil Engineering*. 2(54). pp. 70–76. DOI: 10.18720/MCE.70.5.
5. Shen W., Kirkner D.J. (1999) Distributed thermal cracking of AC pavement with frictional constraint. *Journal of Engineering Mechanics*. 125(5). pp. 554–560. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:5(554).
6. Chen G., Baker G. (2005) One-dimensional nonlinear model for prediction of crack spacing in concrete pavements. *Advances in Structural Engineering*. 8(6). pp. 595–602. DOI: 10.1260/136943305776318338.
7. Pszczoła M., Judycki J. (2015) Comparison of calculated and measured thermal stresses in asphalt concrete. *Baltic Journal of Road & Bridge Engineering*. 10(1). pp. 39–45. DOI: 10.3846/bjrbe.2015.05.
8. Judycki J. (2018) A new viscoelastic method of calculation of low-temperature thermal stresses in asphalt layers of pavements. *International Journal of Pavement Engineering*. 19(1). pp. 24–36. DOI: 10.1080/10298436.2016.1199883.
9. Levashov G.M., Sirotuk V.V. (2011) Ob opredelenii predela prochnosti asfal'tobetona na rastyazhenie pri izgibe [About definition ultimate tensile strength bending a beam of asphalt concrete]. *Vestnik Sibirskoy gosudarstvennoy avtomobil'no-dorozhnoy akademii – The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. 4(22). pp. 23–26.
10. Zhang J., Li V.C. (2001) Influence of supporting base characteristics on shrinkage-induced stresses in concrete pavements. *Journal of Transportation Engineering*. 127(6). pp. 455–462. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-947X(2001)127:6(455).
11. Myshkin N.K., Goryacheva I.G. (2016) Tribology: trends in the half-century development. *Journal of Friction and Wear*. 37(6). pp. 513–516. DOI: 10.3103/S106836661606009X.
12. Rys D., Judycki J., Pszczoła M., Jaczewski M., Mejlun L. (2017) Comparison of low-temperature cracks intensity on pavements with high modulus asphalt concrete and conventional asphalt concrete bases. *Construction and Building Materials*. 147. pp. 478–487. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.04.179.
13. Sirotuk V.V., Lunev A.A. (2017) Strength and deformation characteristics of ash and slag mixture. *Magazine of Civil Engineering*. 6(74). pp. 3–16. DOI: 10.18720/MCE.74.1.

УДК 534.2
DOI 10.17223/19988621/56/6

А.В. Лун-Фу, М.А. Бубенчиков

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ТУПИКОВЫХ ОТВЕТВЛЕНИЙ ГАЗОПРОВОДОВ

На базе волнового уравнения распространения звуковых колебаний в газе и нестационарной модели динамики жидкости рассмотрен акустический резонанс во фрагменте газотранспортной сети, содержащем тупиковое ответвление. Найдены минимальные частоты автоколебательного процесса пульсаций давления, а также частоты образования вихрей, составляющих дорожку Т. Кармана. Оценивается возможность проявления резонансных явлений.

Ключевые слова: *трубопроводные тупики, акустический резонатор, собственные частоты, пульсации давления, звуковые колебания, механические колебания, резонанс.*

При штатной работе компрессорных станций часть отводов коллектора отключается. Это приводит к образованию трубопроводных тупиков, что, в свою очередь, порождает интенсивные механические колебания, частотой порядка 10 Гц. Также, при установке датчиков перепада давления в импульсные трубки на участках технологических трубопроводов, регистрируют колебания, имеющие более высокую выраженную частоту [1, 2]. Эти процессы могут быть объяснены явлениями срыва вихрей с геометрических границ области течения [3]. Срыв вихрей порождает пульсации давления столба газа в тупике, которые, в свою очередь, вызывают акустические колебания, входящие в резонанс с собственными частотами «тупика».

Рассмотрим типичную схему входной коллекторной системы цеха КС МГ с 5 агрегатами мощностью 16 МВт (рис. 1). В этой схеме нас будут интересовать только коллекторы (как правило, Ду 1000) и отводные трубопроводы к ГПА (как правило, Ду 700).

Необходимо заметить, что в такой системе возможно два вида резонанса: акустический и механический. Первый возникает вследствие совпадения частоты пульсаций давления с собственными частотами столба газа в тупиковом ответвлении, представляющем собой акустический резонатор. Второй – вследствие совпадения частоты пульсаций давления с собственной частотой металлических конструкций. Практический интерес представляет первый случай, так как он лежит в области порядка 10 Гц. Во втором случае собственная частота конструкции газопровода (обвязки) является слишком высокой (она измеряется в кГц), и практически, частота пульсаций давления автоколебательного процесса к ней не приближается. Условие кратности частот в этом случае не рассматривается, так как кратность составляет более трех порядков.

Собственные частоты столба газа в возникающих акустических резонаторах (тупиках) рассчитываются по методике, представленной ниже, и для тупиков, представленных на рис. 1, имеют значение около 60 Гц.

Расчеты в ANSYS показали [4], что явления срыва вихрей в местах сочленения коллектора и отводных трубопроводов к ГПА, происходят с частотой 15–30 Гц.

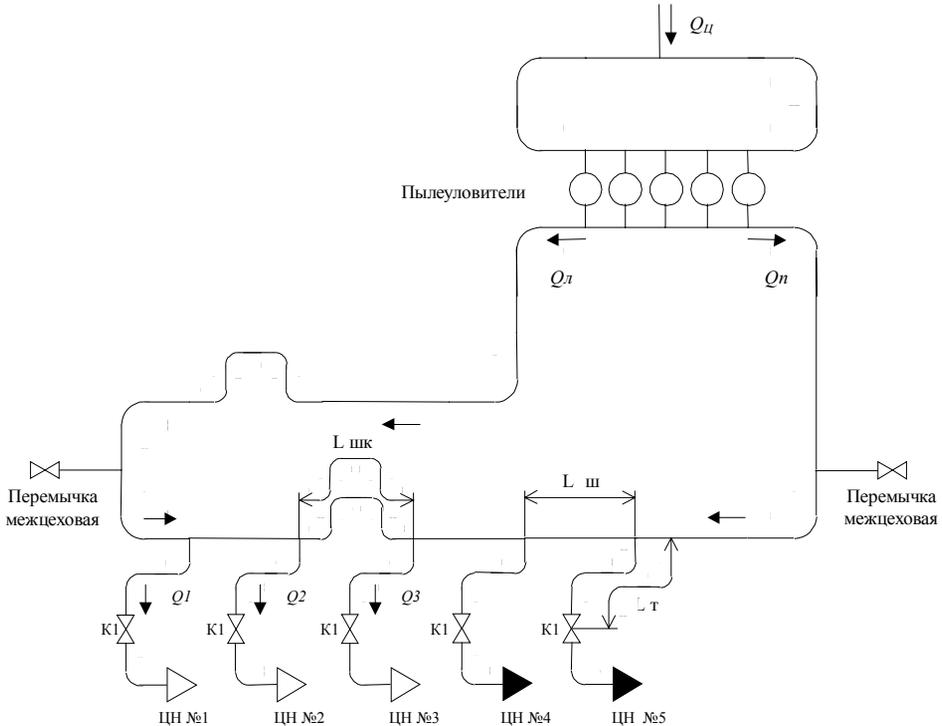


Рис. 1. Схема входной коллекторной системы цеха КС МГ с 5-ю ГПА. ЦН № 1 – ЦН № 5 – нагнетатели давления; затемненные ЦН №4; ЦН №5 характеризуют их отключенное состояние; К1 – кран шаровой, $Q_{ц}$ – цеховой расход газа; $Q_{л}$, $Q_{п}$ – расходы по левой и правой ветвям коллектора соответственно; Q_1 , Q_2 , Q_3 – расходы нагнетателей

Fig. 1. Scheme of the input collector system of the production facility of a cross-country pipeline compressor station with five gas compressor units. ЦН №1 – ЦН №5 are the pressure superchargers; filled symbols of ЦН №4 and ЦН №5 characterize their disconnected state; К1 is the ball valve; $Q_{ц}$ is the gas consumption of the production facility; $Q_{л}$, $Q_{п}$ are the consumptions of collector's left and right branches, respectively; Q_1 , Q_2 , and Q_3 are the consumptions of superchargers

Таким образом, в сложившейся ситуации возможен резонанс. Рассмотрим методику расчета собственных частот трубопроводных тупиков.

Вообще задача об определении собственных частот имеет счетное множество решений, но нас будет интересовать минимальная собственная частота или основной тон акустического резонатора (тупика).

Основной тон акустической системы равен минимальной частоте стоячей волны, образующейся в тупике. Сама стоячая волна есть результат взаимодействия бегущей и отраженной от стенки волн.

Рассмотрим одномерное уравнение распространения звуковых колебаний в трубе (волновое уравнение):

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{zz}. \quad (1)$$

Здесь z – пространственная координата, t – время, c – скорость звука в газе, $u = p - p_0$ – избыточная плотность, p_0 – плотность газа в отсутствие звуковых ко-

лебаний. Кроме этого введены обозначения:

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Общее решение уравнения (1) записывается в виде двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях оси z :

$$u = f_1(z + ct) + f_2(z - ct), \quad (2)$$

где f_1, f_2 – произвольные непрерывные дважды дифференцируемые функции своих аргументов. Конкретный вид этих функций определяется граничными условиями. По теории Фурье каждая из этих функций может быть представлена в виде разложения по ортогональным гармоническим функциям, каждая из которых определяет основной тон или свой обертон. В задаче о нахождении минимальных акустических частот нас интересует только основной тон. Минимальная частота определяется первыми слагаемыми в разложении Фурье. Это будет либо синус, либо косинус угла $2\pi z/\lambda$. Чтобы удовлетворить граничному условию на стенке тупика: $u_z = 0$ при $z = \lambda$, выбираем косинус, поэтому

$$u = \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right). \quad (3)$$

Причем λ – длина волны – должна быть максимальна и равна длине тупика h .

Рассмотрим случай интерференции бегущей волны и волны, отраженной от стенки тупика, накладывающейся на бегущую (с одинаковой амплитудой и частотой) [5, 6].

Пусть две волны распространяются вдоль оси z в противоположных направлениях:

$$u_1(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi_1); \quad (4)$$

$$u_2(z, t) = A \cos(\omega t + kz + \varphi_2). \quad (5)$$

Если аргументы у косинусов в (4) и (5) представить как

$$\omega t - kz + \varphi_1 = \omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} - \left(kz + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right); \quad (6)$$

$$\omega t + kz + \varphi_2 = \omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \left(kz + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \quad (7)$$

и воспользоваться формулами для косинуса разности и косинуса суммы двух углов, то после суммирования выражений (4) и (5) получим

$$u = u_1 + u_2 = 2A \cos\left(kz + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right). \quad (8)$$

В целях упрощения выберем начало отсчета по продольной координате так, чтобы разность $\varphi_2 - \varphi_1$ стала равной нулю, а начало отсчета по оси времени таким образом, чтобы оказалась равной нулю сумма $\varphi_2 + \varphi_1$. Тогда с учетом введенного обозначения $k = 2\pi/\lambda$ (волновое число), получим стоячую волну в виде

$$u = 2A \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \cos(\omega t), \quad (9)$$

что, в свою очередь, согласуется с (3).

Примем, что тупик расположен вертикально и ее нижний конец заглушен (рис. 2).

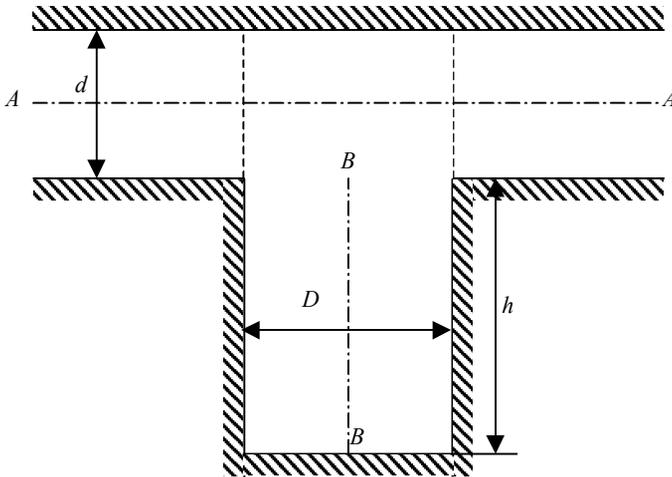


Рис. 2. Схематическое изображение газопроводного тупика $A-A$ – основной канал; $B-B$ – резонатор; h – длина резонатора, d – диаметр трубопровода, D – диаметр тупика

Fig. 2. Schematic representation of a dead leg of pipeline. $A-A$ is the main channel; $B-B$ is the resonator; h is the resonator length; d is the pipeline diameter; and D is the dead leg diameter

На этом конце должно выполняться условие отсутствия проникновения массы через непроницаемую стенку трубы. Так как мы уже приняли, что u есть плотность, а по закону Фика поток массы пропорционален градиенту плотности, то на дне тупика имеем

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Для нахождения собственных частот и условий резонанса достаточно использовать нормированное распределение избыточной плотности. Таким образом, вместо (9) можем записать

$$u = \cos\left(2\pi\frac{z}{\lambda}\right)\cos\omega t. \quad (11)$$

Заметим, что в этом случае условие (10) удовлетворяется автоматически. Как видно из дальнейшего (см. рис. 3–5), точки по длине тупика, определяемые условием (10), остаются неизменными для любых мгновенных значений волновых функций. В этих точках градиент избыточной плотности равен нулю. Поэтому такие точки называются узлами стоячих волн. Другими стационарными точками стоячих волн градиента плотности являются пучности. В них величина градиента максимальна. В этих точках реализуется максимальный переток массы из одной области пространства в другую. Естественно, что на свободной границе, определяющей вход в тупик, целесообразно поставить условие, отвечающее наличию пучности:

$$|u_z| = |u_z|_{\max}.$$

Тогда с учетом распределения (11) это эквивалентно выполнению следующего соотношения:

$$\left| \sin \left(2\pi \frac{h}{\lambda} \right) \right| = 1, \quad 2\pi \frac{h}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Таким образом, для возникновения стоячей волны в трубе с заглушенным концом на ее длине должно укладываться нечетное число четвертей волн градиента плотности:

$$h = \frac{\lambda}{4}(2n + 1). \quad (13)$$

На рис. 3–5 изображены стоячие волны, возникающие в трубе с одним заглушенным концом. В дальнейшем нас будут интересовать наиболее длинные по протяженности, т.е. минимальные по частоте волны. Поэтому на рис. 4 показаны волны, имеющие наряду с другими размерами длину $\lambda/4$.

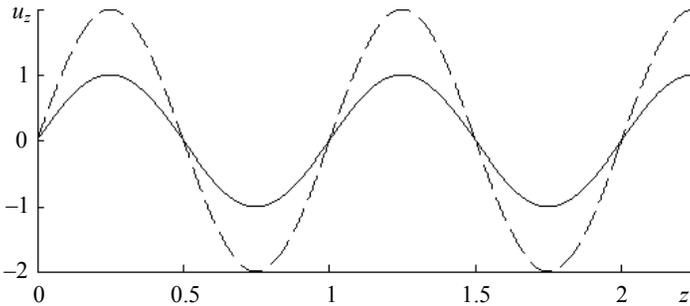


Рис. 3. Изображение падающей волны градиента плотности (сплошная линия) и стоячей волны (пунктир) для заглушенной с левого конца трубы. Продольный размер стоячей волны – 5/4 длины волны
Fig. 3. Illustration of the incident wave of density gradient (solid line) and standing wave (dashed line) for the pipe whose left end is blanked off. A longitudinal size of standing wave is of 5/4 wavelength

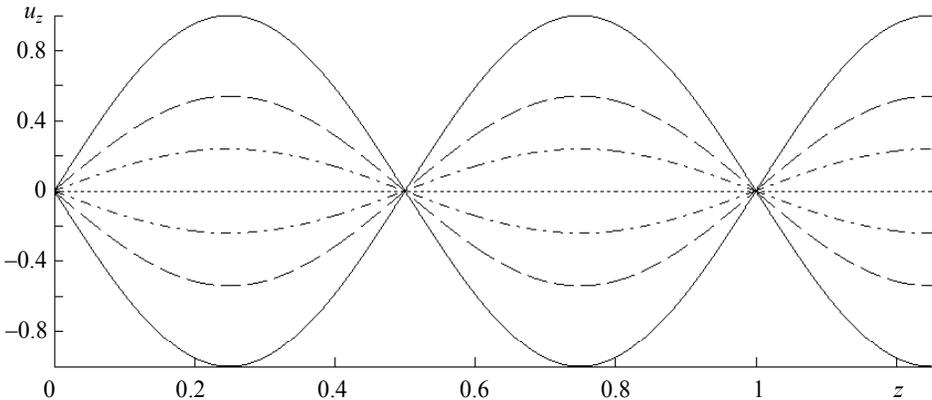


Рис 4. Стоячие волны градиента плотности в полузакрытой трубе, отвечающие семи различным моментам времени
Fig. 4. Standing waves of density gradient in a semi-closed pipe at seven different time instants

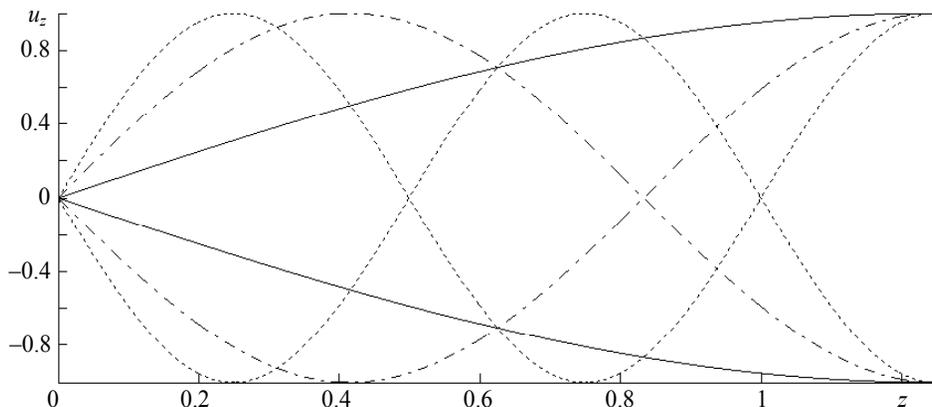


Рис 5. Стоячие волны в трубе размером 1.25 м, имеющие 1/4 длины волны (сплошная линия), 3/4 длины волны (пунктир) и 5/4 длины волны (точки)

Fig. 5. Standing waves of 1/4 (solid line), 3/4 (dashed line), and 5/4 (dotted line) wavelength in the pipe of 1.25 m long

Строго говоря, стоячая волна может существовать только при отсутствии потерь в среде и полном отражении волн от границы. Обычно кроме стоячих волн в среде присутствуют и бегущие волны, подводящие энергию к местам её поглощения или излучения.

В нашем случае полуоткрытой трубы при существовании в ней стоячих волн создаются условия перераспределения энергии таким образом, что часть ее может эффективно излучаться во внешнее пространство с открытого конца трубы.

Определение собственных частот плоского резонатора

Уравнение распространения акустических колебаний (или волновое уравнение) в декартовых координатах на плоскости (x, z) имеет вид

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{xx} + u_{zz} . \quad (14)$$

Здесь c – скорость звука; u может быть смещением частиц среды, их скоростью, плотностью, давлением, но мы по-прежнему будем рассматривать плотность.

Из курса общей физики известно, что звуковые колебания представляют собой продольные волны сжатия и растяжения среды и имеют периодическую структуру. В соответствии с известным методом разделения переменных, будем искать нормированное решение уравнения (14) в виде $u = u_1(t) \cdot u_2(x) \cdot u_3(z)$ или в случае распространения гармонических колебаний в форме

$$u = \cos \omega t \cdot \cos \alpha x \cdot \cos \beta z . \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем после сокращения на u так называемое частотное уравнение:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \alpha^2 + \beta^2 . \quad (16)$$

В задаче о распространении акустических колебаний положение физических границ имеет определяющее значение. На твердых стенках обычно ставятся усло-

вия равенства нулю производной по нормали к стенке, выражающие собой условие непроницаемости стенки. Таким образом, на горизонтальных гранях резонатора (см. рис. 2) для производной от плотности мы должны записать

$$u_x(t, 0, z) = 0, \quad u_x(t, d, z) = 0. \quad (17)$$

Первое из двух условий (17) при выборе решения в виде (15) удовлетворяется автоматически, второе дает

$$\sin \alpha d = 0, \quad \alpha d = \pi m. \quad (18)$$

На дне каверны, при $z = 0$, имеем также условие материального баланса, которое, как и в предыдущем случае, удовлетворяется автоматически. При $z = h$, т.е. на открытой границе каверны, должно быть выставлено условие, определяющее пучности волн:

$$|u_z| = |u_z|_{\max}$$

или, имея в виду (15),

$$|\sin \beta h| = 1.$$

Откуда получаем

$$\beta h = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Подставляя α и β из (18) и (19) в (16), для круговой частоты найдем

$$\omega = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{d^2} + \frac{(2n+1)^2}{4h^2}}. \quad (20)$$

Тогда для линейной частоты получим

$$v = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{d^2} + \frac{(2n+1)^2}{4h^2}}. \quad (21)$$

Минимум в (21) достигается при $m = 0, n = 0$, так что

$$v_{\min} = \frac{c}{4h}. \quad (22)$$

Определение собственных частот цилиндрического резонатора

Волновое уравнение в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеет вид

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz}. \quad (23)$$

В этих переменных решение будет периодическим по всем координатам, кроме r . Учитывая это и разделяя переменные, можно записать

$$u = \cos \omega t \cdot \cos n\varphi \cdot \cos \beta z \cdot R(r). \quad (24)$$

Причем в (24) n равно нулю или целое, поскольку в окружность по φ должно укладываться целое число волн. Подставляя (24) в (23), сокращая результат на $\cos \omega t \cdot \cos n\varphi \cdot \cos \beta z$ и умножая его на r^2 , получим уравнение Бесселя:

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0. \quad (25)$$

Здесь введено обозначение

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2. \quad (26)$$

Решениями этого уравнения будут функции Бесселя первого и второго рода. Функции Бесселя второго рода имеют особенность в нуле и поэтому не годятся для описания физических процессов во внутренности цилиндра. Таким образом, с точностью до константы можно записать

$$R(r) = J_n(\lambda r), \quad (27)$$

где J_n – функция Бесселя первого рода n -го порядка.

Конечная цель проводимого анализа – нахождение минимальной акустической частоты цилиндрического резонатора. Как и в плоском случае, этот результат будет достигаться при $n = 0$. Поэтому в дальнейшем будем работать с функцией $J_0(\lambda r)$, тогда

$$R(r) = J_0(\lambda r). \quad (28)$$

По смыслу задачи функция $R(r)$ на боковой стенке цилиндра должна отвечать условию ее непроницаемости $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$, которое приводит к условию

$$R'(\rho) = \lambda J_0'(\lambda \rho) = 0. \quad (29)$$

Здесь ρ – радиус цилиндра.

Откуда находим

$$\lambda_k = \frac{\gamma_k}{\rho}, \quad (30)$$

где $\gamma_k, k = 0, 1, 2, \dots$ – корни уравнения

$$J_0'(\gamma) = 0. \quad (31)$$

Решение (24) автоматически удовлетворяет условию непроницаемости при $z = 0$. Условия существования пучностей при $z = h$ в волновом распределении (24) эквивалентно соотношениям

$$|\sin \beta h| = 1, \quad \beta h = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

Отсюда

$$\beta = \frac{\pi(2n+1)}{2h}. \quad (33)$$

Подставляя (30) и (32) в (26), для круговой частоты найдем

$$\omega = c \sqrt{\frac{\gamma_k^2}{\rho^2} + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4h^2}}. \quad (34)$$

Тогда частота, выраженная в герцах, будет

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{\gamma_k^2}{\pi^2 \rho^2} + \frac{(2n+1)^2}{4h^2}}. \quad (35)$$

Минимальная частота будет достигаться для случая, когда $k = 0$ ($\gamma_0 = 0$) и $n = 0$ и составит величину

$$v_{\min} = \frac{c}{4h}. \quad (36)$$

Как видим, эта частота совпадает с минимальной частотой полуоткрытого плоского резонатора.

Теория вихревых дорожек Кармана

Наблюдения, относящиеся к исследованию вихревых явлений позади обтекаемого тела, начиная с работы Бенара [7], приводят к следующим результатам. При некоторой достаточно большой скорости, зависящей от вязкости жидкости и размера обтекаемого тела, позади тела начинают образовываться вихри с устанавливающимся определенным расстоянием между ними. При этом расстояние между нижним и верхним рядами вихрей не зависит от скорости течения, а зависит лишь от ширины тела. Т. Карман [8, 9] в 1912 г. дал теорию таких вихревых цепочек, их устойчивости и рассмотрел вопрос о лобовом сопротивлении тел. С тех пор теория Кармана нашла широкое применение для объяснения многих явлений, таких как раскачивание деревьев и проводов ветром, неустойчивость колебаний подвесных мостов и теория машущего крыла [10]. Очевидно, теория вихревых дорожек Кармана применима и к течению газа по трубам, поскольку они могут возникать не только при обтекании выступов, рассмотренном в литературе, но так же и при обтекании каверн (участков разветвлений), что является гораздо менее освещенной областью.

Эта теория применена для случая обтекания плоской каверны. Она показала результаты, хорошо согласующиеся с данными вычислений по пакету ANSYS FLUENT [4]. Результаты сопоставления приведены в табл. 1. Расчеты проводились для тупикового ответвления газопровода диаметром 700 мм, высотой 1400 мм. Решалась нестационарная задача, неявным методом с использованием разностей второго порядка, с шагом по времени $t = 10^{-6}$ с, модель турбулентности – DES, с предустановленными в ANSYS FLUENT настройками.

Таблица 1

Частоты автоколебательного процесса

Частота зарождения и срыва вихрей	Теория Кармана	Пакет ANSYS
Вихри основного потока	34.6 с^{-1}	33.5 с^{-1}
Вихри каверны	17.3 с^{-1}	16.7 с^{-1}

Расчетами выявлено существование двух частот автоколебаний: для вихрей, уносимых основным потоком, и вихрей, падающих в каверну. Эти данные обобщены в виде следующих зависимостей для частот:

$$v_1 = \alpha_1 V_\infty; \quad (37)$$

$$v_2 = \alpha_2 V_\infty, \quad (38)$$

где $\alpha_1 = 1.73 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 0.83 \text{ м}^{-1}$ – размерные константы, V_∞ – скорость набегающего потока. При этом избыточное давление определяется соотношением

$$\Delta p = |p_\infty - p| = \beta \rho V_\infty^2, \quad \beta = 7.44. \quad (39)$$

Условия резонанса между акустическими и автоколебаниями

Резонанс возникает в результате действия вынуждающей силы, если ее частота равна одной из собственных частот системы. В нашем случае вынуждающей силой является переменное давление, возникающее в результате наличия автоколебаний, а собственные частоты системы – это акустические частоты каверны. Условия резонанса разберем на примере плоской каверны. Для этого возьмем минимальную линейную частоту, определяющуюся формулой (36). Это будет величина

$$\nu_{\min} = \frac{c}{4h}. \quad (40)$$

При сопоставлении ее с частотами автоколебаний, найденными из расчетов по пакетным технологиям: $\nu_1 = \alpha_1 V_\infty$, $\nu_2 = \alpha_2 V_\infty$ ($\alpha_1 = 1.73 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 0.83 \text{ м}^{-1}$) условия кратности частот будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\nu_{\min}}{\nu_1} = k, \quad \frac{\nu_{\min}}{\nu_2} = m, \quad (41)$$

где k, m – натуральные числа.

Подставляя в (40) значения частот из (37) и (38), найдем условия на h – высоту каверны:

$$h_k = \frac{c}{4k\alpha_1 V_\infty}, \quad h_m = \frac{c}{4m\alpha_2 V_\infty}. \quad (42)$$

Последние формулы дают значения h , отвечающие различным числам кратности, которые могут приводить к резонансным явлениям в системе.

Т а б л и ц а 2

Критические высоты каверны

Критические высоты каверны, кратные первой частоте автоколебаний						
k кратность	1	2	3	4	5	6
$h_k(\text{м})$	3.16	2.08	1.05	0.79	0.63	0.52
Критические высоты каверны, кратные второй частоте автоколебаний						
k кратность	1	2	3	4	5	6
$h_k(\text{м})$	6.32	3.16	2.11	1.58	1.26	1.05

Вероятность резонансных явлений с повышением кратности существенно снижается, поэтому наиболее критичными являются высоты, отвечающие первой кратности.

Выводы

Анализ решений уравнений акустики в плоском и осесимметричном случаях показал одинаковые результаты в отношении минимальных частот полуоткрытых плоского и цилиндрического резонаторов.

При сближении собственных частот тупиков (акустических резонаторов) с частотой колебаний среды, вызванных вихревой дорожкой Кармана, может наступить акустический резонанс, способный вызвать нарушения в работе узлов и агрегатов газотранспортных систем.

Найдены формулы, определяющие собственные акустические частоты тупикового ответвления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишняков В.А., Засецкий В.Г., Каравосов Р.К., Прозоров А. Г., Соколинский Л.И. Генерирование и демпфирование колебаний потока в области сопряжения трубопровода со слепым отростком // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71. № 6. С. 1099–1106.
2. Вишняков В.А., Засецкий В.Г., Каравосов Р.К., Прозоров А.Г., Соколинский Л.И. Возникновение узкополосных пульсаций давления и их предотвращение в трубе с тупиковой полостью // Труды ЦАГИ. 2001. Вып. 2643. С. 92–101.
3. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М. : Наука, 1991. Ч. 1. 600 с.
4. Лун-Фу А.В., Бубенчиков М.А. Низкочастотные колебания давления в газотранспортных системах // Наука и техника газовой промышленности. 2015. № 3 (63). С. 58–64.
5. Красильников В.А. Звуковые и ультразвуковые волны в газе, воде и твердых телах. М.: Физматгиз, 1960. 561 с.
6. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Высшая школа, 1973. Т. 3. 511 с.
7. Denard H. Formation de centres de gyration á l'arriere d'un obstacle en mouvement // C.R. Acad. Sci. Paris. 1908. V. 147. P. 839–847.
8. Karman Th. und Rubach H. Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes // Physikalische Zeitschrift. 1912. Bd. 13. S. 49–59.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1. 584 с.
10. Голубев В.В. Труды по аэродинамике. М.; Л.: Гостехиздат, 1957. 980 с.

Статья поступила 05.08.2018 г.

Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A. (2018) A METHOD FOR DETERMINING NATURAL FREQUENCIES OF THE DEAD-END BRANCHES OF GAS PIPELINES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics] 56. pp. 67–78

DOI 10.17223/19988621/56/6

Keywords: pipeline dead legs, acoustic resonator, natural frequencies, pressure pulsations, sound oscillations, mechanical oscillations, resonance.

The frequency spectra for the dead-end branches of gas pipelines, representing the acoustic resonators in a typical collector of a compressor station, are obtained using the methods of the classical theory of vibrations and waves. The half- and quarter-wave resonances of flat and cylindrical semi-open resonators are studied solving the wave equation by the method of separation of variables in an analytical form. Primarily, the qualitative theory of sound wave propagation is considered on the basis of a one-dimensional wave equation. The conclusions made are used for determining the natural frequencies in the two-dimensional problems with various types of symmetry. Minimum frequencies of flat and cylindrical resonators are found to be the same. By means of the numerical simulation methods applying the ANSYS FLUENT software package, the frequencies of vortex shedding at the edges of gas pipeline connections are determined. The obtained frequencies appear to be converging. Minimum self-oscillating frequencies of pressure pulsation during the vortex shedding or the Karman vortex street formation are potentially dangerous for technological systems of gas pipelines as they may resonate with natural frequencies of pipeline dead legs. The fundamental tone of such systems is characterized by minimum excitation energy and, consequently, by maximum amplitude. These resonance phenomena may cause a mechanical destruction of the pipeline manifolds.

LUN-FU Aleksandr Viktorovich (Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.lunfu@gtt.gazprom.ru

BUBENCHIKOV Mikhail Alekseevich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

REFERENCES

1. Vishnyakov V.A., Zasetkiy V.G., Karavosov R.K., Prozorov A.G., Sokolinskiy L.I. (1998) Generirovanie i dempfirovanie kolebaniy v oblasti sopryazheniya truboprovoda so slepym otrostkom [Generation and damping of oscillations of flow in area of junction between pipe-line and blind pipe branch]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal – Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 71(6). pp. 1099–1106.
2. Vishnyakov V.A., Zasetkiy V.G., Karavosov R.K., Prozorov A.G., Sokolinskiy L.I. (2001) Vozniknovenie uzkopolosnykh pul'satsiy davleniya i ikh predotvrashchenie v trube s tupikovoy polost'yu [Occurrence of narrowband pressure pulsations and their prevention in a pipe with a dead-end cavity]. *Trudy TsAGI – Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute*. 2643. pp. 92–101.
3. Abramovich G.N. (1991) *Prikladnaya gazovaya dinamika* [Applied gas dynamics]. Moscow: Nauka.
4. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A. (2015) Nizkochastotnye kolebaniya davleniya v gazotransportnykh sistemakh [Low-frequency pressure oscillations in gas-transport systems]. *Nauka i tekhnika gazovoy promyshlennosti – Science and Technology in the Gas Industry*. 3(63). pp. 58–64.
5. Krasilnikov V.A. (1960) *Zvukovye i ul'trazvukovye volny v gaze, vode i tverdykh telakh* [Sound and ultrasonic waves in gas, water, and solids]. Moscow: Fizmatgiz.
6. Detlaf A.A., Yavorskiy B.M. (1973) *Kurs fiziki* [A course of physics]. Moscow: Vysshaya Shkola.
7. Benard H. (1908) Formation de centres de gyration á l'arriere d'un obstacle en mouvement [Formation of gyration centers behind a moving obstacle]. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences – Proceedings of the Academy of Sciences*. 147. pp. 839–847.
8. Karman Th., Rubach H. (1912) Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes [On the mechanism of fluid and air resistance]. *Physikalische Zeitschrift – Physical Journal*. 13. pp. 49–59.
9. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. (1963) *Teoreticheskaya gidrodinamika* [Theoretical hydrodynamics]. Moscow: Fizmatgiz.
10. Golubev V.V. (1957) *Trudy po aerodinamike* [Works on aerodynamics]. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat.

УДК: 536.46+662.61
DOI 10.17223/19988621/56/7

К.М. Моисеева, А.Ю. Крайнов

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ИСКРОВОГО ЗАЖИГАНИЯ И ВЫХОДА НА УСТОЙЧИВЫЙ РЕЖИМ ГОРЕНИЯ БЕДНОЙ МЕТАНО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ

Представлена математическая модель и результаты решения задачи искрового зажигания бедной метано-воздушной смеси. В задаче определялась минимальная энергия искры, при которой было возможно инициирование процесса горения бедной метано-воздушной смеси с выходом на устойчивый режим распространения фронта горения. Задача решалась численно с использованием алгоритма распада произвольного разрыва методом С.К. Годунова. Из решения задачи определены зависимости минимальной энергии искрового зажигания, а также видимой и нормальной скорости распространения фронта горения метано-воздушной смеси от содержания горючей компоненты в газе.

Ключевые слова: *скорость горения, искровое зажигание, бедная метано-воздушная смесь, устойчивость горения, математическое моделирование.*

Задача инициирования устойчивого горения реагирующей газовой или газодисперсной смеси искровым разрядом является актуальной и исследована в работах ряда авторов. Основная цель проводимых работ – определение минимальной энергии разряда, необходимой для инициирования процесса горения. Одной из причин широкого исследования задачи искрового зажигания в газах являются требования техники безопасности на производстве. В [1] указано, что минимальная энергия зажигания является критерием оценки способности газа воспламениться. Под минимальной энергией зажигания подразумевается наименьшая величина энергии искры электрического разряда, достаточная для воспламенения газа. Таким образом, оценка зависимости минимальной энергии зажигания газа от состава необходима для прогнозирования пожаро-взрывоопасности горючих газовых смесей.

В работах [2 – 4] выполнено численное исследование задачи о минимальной энергии зажигания смеси реагирующего газа и частиц. Получены условия инициирования горения для двухфазной, двухтемпературной теплодиффузионной модели горения [2], а также условия для моделей, учитывающих термическое расширение газа [3], лучистый теплоперенос [4]. Из решения задач определено влияние параметров смеси, а также движения газа и лучистого теплопереноса от частиц на критические условия инициирования горения.

Оценка энергии зажигания и энергии инициирования детонации в углеводородно-воздушных смесях приведена в работах [5, 6]. В работе [5] приведена оценка перехода от режима горения к режиму детонации для водородо-воздушной смеси. В работе [6] показано, что при высоких энергиях искрового заряда возможен переход от режима зажигания с устойчивым распространением фронта горения метано-воздушной смеси к детонационному режиму. Согласно [6], энергия зажигания метано-воздушной смеси лежит в диапазоне $E_3 = 10^{-4} - 11$ Дж в зависимости

от молярной доли метана в газе. Известно, что минимальная энергия искрового зажигания метано-воздушной смеси составляет 0.28 мДж [7].

Под искровым зажиганием классически принято понимать зажигание с выходом на устойчивый режим распространения пламени. В случае зажигания с выходом на устойчивый режим горения после инициирования процесса тепловая волна должна продвигаться по пространству с постоянными значениями видимой и нормальной скорости горения. Зависимость нормальной скорости горения метано-воздушной смеси от состава, определенная экспериментально, представлена в работе [8].

Целью настоящей работы является численное определение критических условий инициирования зажигания с последующим устойчивым распространением фронта горения метано-воздушной смеси (МВС), а также определение нормальной и видимой скорости распространения горения.

Построение математической модели

Математическая модель зажигания МВС формулируется на основе моделей [3, 9] при следующих допущениях: МВС с объемной концентрацией метана a_{vol} находится в бесконечном объеме. Нитевидный мгновенный источник зажигания расположен в центре. Внешняя граница расчетной области полагается бесконечно удаленной от источника зажигания. Потери тепла на электроды пренебрегаются. Теплоотдача излучением от продуктов сгорания не учитывается. Диссоциация молекул продуктов сгорания при высокой температуре также не учитывается. Коэффициенты диффузии и теплопроводности зависят от температуры [9]. Газовая постоянная определяется составом газовой смеси. Константа скорости химической реакции зависит от температуры по закону Аррениуса, скорость реакции зависит от концентрации метана и кислорода и описывается кинетикой первого порядка по метану и первого порядка по кислороду. Учитывается движение газа, обусловленное тепловым расширением газа при повышении температуры.

Математическая постановка задачи при сформулированных допущениях имеет вид:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial r \rho u}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса:

$$\frac{\partial r \rho u}{\partial t} + \frac{\partial r (\rho u^2 + p)}{\partial r} = p. \quad (2)$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial r \rho (\varepsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial r [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + pu]}{\partial r} = \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + r Q k_0 \rho_{CH_4} \rho_{O_2} \exp \left(-\frac{E}{R_u T} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение баланса массы метана в смеси:

$$\frac{\partial r \rho_{CH_4}}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_{CH_4} u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r D(T) \rho_g \frac{\partial a_{CH_4}}{\partial r} \right) - r k_0 \rho_{CH_4} \rho_{O_2} \exp \left(-\frac{E}{R_u T} \right). \quad (4)$$

Уравнение баланса массы кислорода в смеси:

$$\frac{\partial r \rho_{O_2}}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_{O_2} u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r D(T) \rho_g \frac{\partial a_{O_2}}{\partial r} \right) - r \alpha_1 k_0 \rho_{CH_4} \rho_{O_2} \exp \left(-\frac{E}{R_u T} \right). \quad (5)$$

Уравнение состояния идеального газа:

$$p = \rho R T. \quad (6)$$

Начальные условия:

$$T(r, t_z) = T_b + \frac{Q_z}{4\pi\lambda_b t_z} \exp \left(-\frac{r^2}{4\chi_b t_z} \right), \\ \rho_{CH_4}(r, t_z) = \rho_{CH_4, b}, \rho_{O_2}(r, t_z) = \rho_{O_2, b}, u(r, t_z) = 0, \rho_g(r, t_z) = \rho_b. \quad (7)$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial \rho(0, t)}{\partial r} = \frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_{CH_4}(0, t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_{O_2}(0, t)}{\partial r} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial T(\infty, t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_{CH_4}(\infty, t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_{O_2}(\infty, t)}{\partial r} = 0. \quad (9)$$

Здесь u – скорость, t – время, r – координата по радиусу, p – давление, k_0 – константа скорости химической реакции, T – температура, E_a – энергия активации, R_u – универсальная газовая постоянная, ρ – плотность, ρ_{CH_4} , ρ_{O_2} – парциальные плотности метана и кислорода в газе, Q – тепловой эффект реакции, Q_z – энергия искрового разряда, $\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ – внутренняя энергия газа, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель

адиабаты, $\alpha_1 = \frac{\mu_{O_2} \nu_{O_2}}{\mu_{CH_4} \nu_{CH_4}}$ – стехиометрический коэффициент расхода кислорода в реакции с метаном. Переменные ρ_{CH_4} и ρ_{O_2} определяют значения парциальных плотностей метана и кислорода в смеси, $\rho_{CH_4} = a_{CH_4} \rho$, $\rho_{O_2} = a_{O_2} \rho$, где a_{CH_4} , a_{O_2} – относительные массовые концентрации метана и кислорода. Связь между относительной массовой концентрацией метана и кислорода и объемным содержанием метана a_{vol} в смеси определяется из соотношений:

$$a_{O_2} = a_{air, O_2} \frac{(100 - a_{vol}) \mu_{air}}{(100 - a_{vol}) \mu_{air} + a_{vol} \mu_{CH_4}}, \quad a_{CH_4} = \frac{a_{vol} \mu_{CH_4}}{(100 - a_{vol}) \mu_{air} + a_{vol} \mu_{CH_4}}.$$

Здесь a_{vol} – объемная процентная концентрация метана в смеси, μ_{CH_4} – молярная масса метана, μ_{air} – молярная масса воздуха, a_{air, O_2} – массовое содержание кислорода в воздухе. Зависимости коэффициентов диффузии и теплопроводности от температуры определяются выражениями [9]

$$\lambda = \lambda_{st} \left(\frac{T}{T_b} \right)^{2/3}, \quad D = \frac{\lambda(T)}{c_p \rho},$$

λ_{st} – значение коэффициента теплопроводности при $T = 300$ К. Газовая постоянная рассчитывалась в зависимости от состава смеси из соотношения $R = R_u / (a_{O_2} \mu_{O_2} + a_{CH_4} \mu_{CH_4} + (1 - a_{O_2} - a_{CH_4}) \mu_{N_2})$, где μ_{N_2} , μ – молярная масса азо-

та и кислорода. Индексом z отмечены характеристики параметров искры, b – начальные параметры смеси при температуре $T_b = 300$ К.

Метод решения и результаты

Для численного решения задачи (1) – (9) был использован метод Годунова [10]. Слагаемые в правых частях уравнений, описывающие процессы переноса за счет механизмов теплопроводности и диффузии, аппроксимировались явно на трехточечном шаблоне. Шаг по пространству в области источника зажигания (до координаты $r = 2 \cdot 10^{-3}$ м) задавался равным $\Delta h_{\text{const}} = 10^{-5}$ м. После координаты $r = 2 \cdot 10^{-3}$ м шаг по пространству увеличивался в направлении правой границы по правилу $\Delta h_{i+1} = 1.005 \cdot \Delta h_i$. Координата правой границы определялась из условий (9). Величина схемной диффузии при выбранном шаге Δh была много меньше коэффициента диффузии D . Шаг по времени выбирался минимальный из двух условий устойчивости Куранта: $\Delta t < \Delta h_{\text{const}} / \max[|u_g| + c_g]$, где c_g – скорость звука в газе, и $\Delta t < \Delta h_{\text{const}}^2 / (2\chi_g)$, где $\chi_g = \lambda_g / (c_v \rho_g)$ – коэффициент температуропроводности газа.

Решение задачи (1) – (9) выполнено при следующих значениях размерных величин [9]:

$$\begin{aligned} Q &= 55.7 \text{ МДж/кг}, k_0 = 1.125 \cdot 10^{12} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}), p_b = 0.1 \text{ МПа}, \\ E &= 239 \text{ кДж/моль}, c_p = 1065 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), c_v = 768.2 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \\ \lambda_{\text{st}} &= 0.025 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), R_u = 8.31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), T_b = 300 \text{ К}. \end{aligned}$$

В расчетах варьировалась объемная доля метана в метано-воздушной смеси в диапазоне $a_{\text{vol}} = 5 - 9.5\%$, что соответствует диапазону значений коэффициента

избытка горючего $\phi = 0.55 - 1$, $\phi = \frac{a_{\text{CH}_4}/a_{\text{O}_2}}{(a_{\text{CH}_4}/a_{\text{O}_2})_{\text{стех}}}$, где $(a_{\text{CH}_4}/a_{\text{O}_2})_{\text{стех}}$ – соотно-

шение между относительными массовыми концентрациями метана и кислорода для стехиометрического состава метано-воздушной смеси. Для каждого состава смеси проводилась серия параметрических расчетов, в которой определялась минимальная энергия искры Q_z , при которой было возможно возникновение зажигания МВС с последующим выходом на устойчивый режим горения. Минимальная энергия искры, аналогично работе [11], определялась в размерности Дж/м. Для нахождения величины минимальной энергии в размерности Дж необходимо умножить Q_z на величину межэлектродного расстояния, составляющую $r_{\text{sp}} = 3 - 6$ мм [8, 12, 13]. Результаты расчета представлены на рис. 1 – 4.

На рис. 1 представлена динамика зажигания и выхода на устойчивый режим горения метано-воздушной смеси с объемным содержанием метана 6%. Температура газа показана на рис. 1, *a*, скорость газа представлена на рис. 1, *b*. Энергия искрового зажигания равнялась $Q_z = 0.05$ Дж/м и соответствовала минимальному значению, при котором было возможно инициирование искрового зажигания газа с последующим устойчивым распространением волны горения.

На рис. 2 представлена зависимость минимальной энергии искрового зажигания метано-воздушной смеси от коэффициента избытка горючего ϕ . Минимальная энергия зажигания, выраженная в [Дж/м], представлена на рис. 2, *a*. Минимальная энергия зажигания в размерности [Дж], для межэлектродного расстояния 4 мм (сплошная кривая) и 6 мм (пунктир) представлена на рис. 2, *b*.

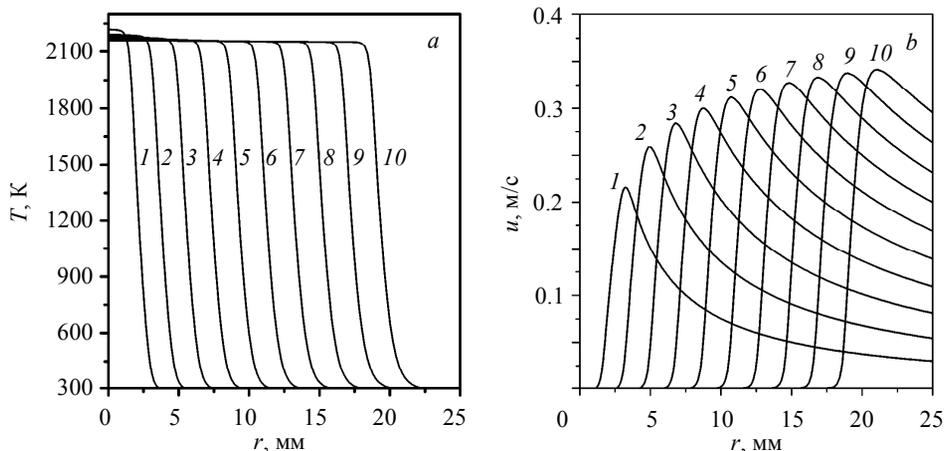


Рис. 1. Профили температуры (а) и скорости движения (b) 6 %-й метано-воздушной смеси при искровом зажигании с энергией искры $Q_z = 0.05$ Дж/м. Кривые: $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с (1), 10^{-2} (2), $1.5 \cdot 10^{-2}$ (3), $2 \cdot 10^{-2}$ (4), $2.5 \cdot 10^{-2}$ (5), $3 \cdot 10^{-2}$ (6), $3.5 \cdot 10^{-2}$ (7), $4 \cdot 10^{-2}$ (8), $4.5 \cdot 10^{-2}$ (9), $5 \cdot 10^{-2}$ с (10)
Fig. 1. Profiles of the (a) temperature and (b) velocity of a 6% methane-air mixture at spark ignition with a spark energy $Q_z = 0.05$ J/m. Curves: $t = (1) 5 \cdot 10^{-3}$ s, (2) 10^{-2} s, (3) $1.5 \cdot 10^{-2}$ s, (4) $2 \cdot 10^{-2}$ s, (5) $2.5 \cdot 10^{-2}$ s, (6) $3 \cdot 10^{-2}$ s, (7) $3.5 \cdot 10^{-2}$ s, (8) $4 \cdot 10^{-2}$ s, (9) $4.5 \cdot 10^{-2}$ s, and (10) $5 \cdot 10^{-2}$ s

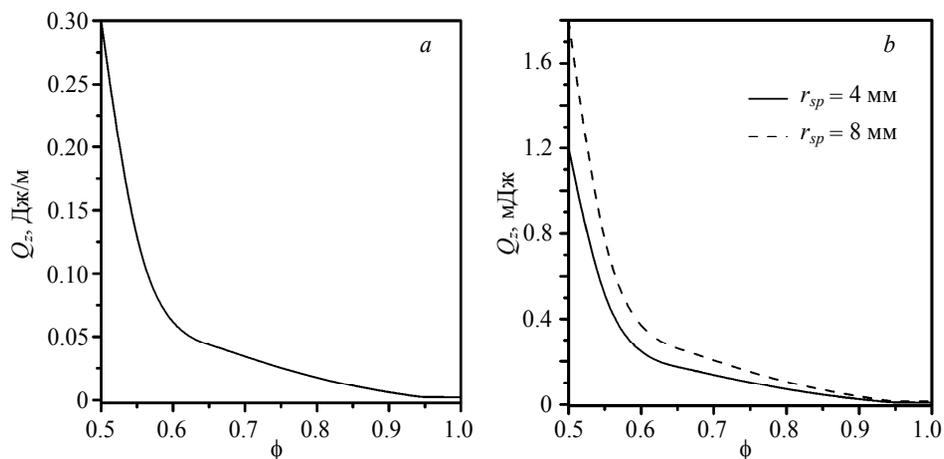


Рис. 2. Зависимость минимальной энергии искрового зажигания метано-воздушной смеси от коэффициента избытка горючего: а – энергия зажигания в размерности [Дж/м], b – энергия зажигания в размерности [мДж]
Fig. 2. Minimum energy of the spark ignition of methane-air mixture as a function of fuel-air equivalence ratio. Dimension of the ignition energy: (a) [J / m] and (b) [mJ]

Указанная в научной литературе величина минимальной энергии искрового зажигания для стехиометрического состава метано-воздушной смеси 0.28 мДж получена экспериментально и учитывает тепловые потери на электроды. Минимальная энергия искрового зажигания, приведенная на рис. 2, b, получена без учета тепловых потерь, но при этом для состава смеси $\phi = 0.65-1$ ($a_{vol} = 6.5-9.5\%$) минимальная энергия искрового зажигания близка к экспериментальному значению.

нию. Аналогично работе [5] для смеси, состав которой близок к стехиометрическому, минимальная энергия искрового зажигания практически не меняется с увеличением доли горючего в газе. Для смесей с содержанием горючего, близким к нижнему пределу воспламеняемости метано-воздушных смесей (эта величина по разным данным соответствует $a_{vol} = 3.8 - 5.4 \%$ [5]), наблюдается резкое увеличение минимальной энергии, необходимой для инициирования искрового зажигания с последующим устойчивым режимом распространения фронта горения. Это соответствует как работе [5], так и результатам экспериментов [8].

Полученные в ходе параметрического исследования результаты были использованы для определения нормальной и видимой скорости распространения фронта горения в зависимости от состава смеси. Видимая скорость горения определялась по скорости изменения координаты, соответствующей выгоранию с массовой концентрации метана до 0.1 от начального значения, $a_{CH_4} = 0.1 a_{CH_4, b}$. Нормальная скорость горения определялась как разность между видимой скоростью перемещения фронта горения и скоростью движения газа. Результаты расчета представлены на рис. 3. Согласно рисунку, видимая скорость горения зависит от коэффициента избытка горючего линейным образом, и для смесей с составом, близким к нижнему пределу воспламеняемости, видимая скорость горения МВС стремится к нулю. Зависимость нормальной скорости горения МВС от коэффициента избытка горючего близка к данным [8].

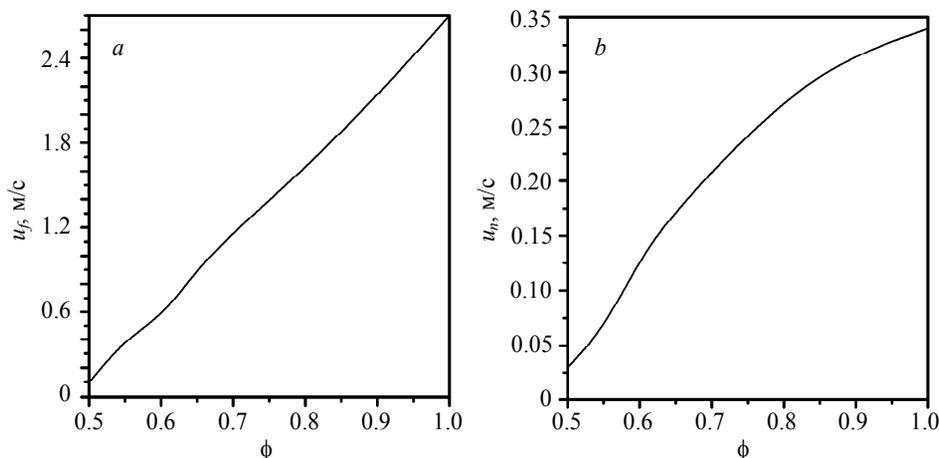


Рис. 3. Зависимость видимой (а) и нормальной (б) скорости горения метано-воздушной смеси от коэффициента избытка горючего

Fig. 3. Dependence of the (a) apparent and (b) normal burning velocity of methane-air mixture on fuel-air equivalence ratio

На рис. 4 для сравнения представлены результаты наших расчетов и результаты экспериментов [8] (точечная линия), а также результаты, взятые из работы [14] (сплошная линия и символы). Эксперимент [8] был воспроизведен нами с некоторой долей погрешности по рисунку, помещенному в книгу. Результаты работы [14] были скопированы из статьи с максимальным повторением масштабов рисунка. Результаты расчета [14] показаны сплошной кривой. Символами отмечены

экспериментальные точки из [15–18], описанные в работе [14]. Наши результаты на рис. 4 показаны жирной штриховой линией. Наблюдается хорошее согласие между данными наших расчетов и результатами [14].

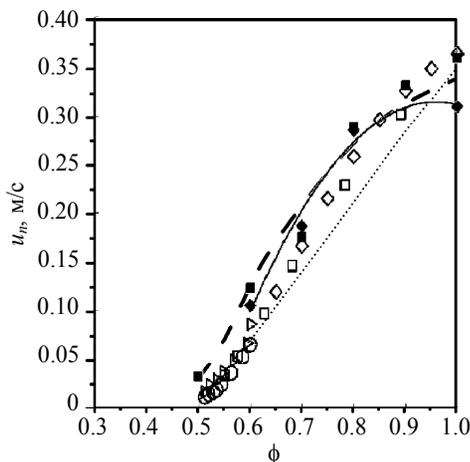


Рис. 4. Зависимость нормальной скорости распространения фронта горения метано-воздушной смеси от коэффициента избытка топлива. Пунктирная кривая – результаты расчета по модели (1) – (9), сплошная кривая – результаты [14], символы – результаты [15–18], точечная кривая – результаты [8]

Выводы

Разработана физико-математическая постановка задачи искрового зажигания бедной метано-воздушной смеси, проведено численное исследование зависимости критических условий инициирования искрового зажигания метано-воздушной смеси с выходом на устойчивый режим распространения горения. Определены зависимости видимой и нормальной скорости распространения фронта горения метано-воздушной смеси в зависимости от коэффициента избытка горючего в газе. Показано, что для смесей с содержанием метана, близким к нижней границе воспламеняемости метано-воздушных смесей, энергия искрового зажигания на 1–2 порядка превышает энергию искрового зажигания смесей с составом, близким к стехиометрическому значению. Нормальная и видимая скорость горения таких смесей стремится к нулю и на порядок меньше нормальной и видимой скоростей горения стехиометрической газовой смеси. Полученные результаты хорошо согласуются с известными работами других авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесчастнов М.В., Соколов В.М., Кац М.И. Аварии в химических производствах и меры их предупреждения. М.: Химия, 1976. 368 с.
2. Крайнов А.Ю., Баймлер В.А. Критические условия воспламенения искрой смеси газообразных окислителя и горючего с реагирующими частицами // Физика горения и взрыва. 2002. Т. 38. № 3. С. 30–36.
3. Крайнов А.Ю., Баймлер В.А. Влияние термического расширения на минимальную энергию искрового зажигания газа // Физика горения и взрыва. 2002. Т. 38. № 4. С. 9–13.
4. Крайнов А.Ю. Влияние лучистого теплопереноса на минимальную энергию искрового зажигания газозвесей // Физика горения и взрыва. 2001. Т. 37. № 3. С. 16–24.
5. Васильев А.А. Оценка критических условий перехода горения в детонацию // Физика горения и взрыва. 2006. Т. 42. № 2. С. 91–96.
6. Васильев А.А., Васильев В.А. Расчетные и экспериментальные параметры горения и детонации смесей на основе метана и угольной пыли // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. 2016. № 2. С. 8–39.

7. Ведерников М.И. Техника безопасности при производстве, хранении и транспортировании аммиака. М.: Химия, 1977. 128 с.
8. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах / пер. с англ. под ред. К.И. Щелкина, А.А. Борисова. М.: Мир, 1968.
9. Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Моделирование горения метано-воздушной смеси в замкнутом сферическом объеме // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 4. С. 977–983.
10. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
11. Моисеева К.М., Крайнов А.Ю. Численное моделирование искрового зажигания аэрозвеси угольной пыли // Физика горения и взрыва. 2018. Т. 54. № 2. С. 61–70.
12. Корольченко А.Я. Пожаровзрывобезопасность промышленной пыли. М.: Химия, 1986.
13. Шетинков Е.С. Физика горения газов. М.: Наука, 1965.
14. Трошин К.Я., Борисов А.А., Рахметов А.Н., Арутюнов В.С., Политенкова В.С. Скорость горения метанводородных смесей при повышенных давлениях и температурах // Химическая физика. 2013. Т. 32. № 5. С. 76–87.
15. Hassan M.I., Aung K.T., Faeth G.M. Measured and predicted properties of laminar premixed methane/air flames at various pressures// Combust. and Flame. 1998. V. 115. No. 4. P. 539–550.
16. Ronney P.D., Wachman H.Y. Effect of gravity on laminar premixed gas combustion I: Flammability limits and burning velocities // Combust. and Flame. 1985. V. 62. P. 107.
17. Taylor S.C. Burning Velocity and the Influence of Flame Stretch. Ph.D. Thesis. University of Leeds, 1991.
18. Hermans R.T.E. Laminar Burning Velocities of Methane-Hydrogen-Air Mixtures. Proefschrift. Technische Universiteit Eindhoven, 2007. ISBN: 978-90-386-1127-3.

Статья поступила 30.08.2018 г.

Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. (2018) A NUMERICAL DETERMINING OF THE CRITICAL CONDITIONS FOR SPARK IGNITION AND YIELDING OF A STABLE COMBUSTION OF A LEAN METHANE-AIR MIXTURE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 79–87

DOI 10.17223/19988621/56/7

Keywords: combustion rate, spark ignition, lean methane-air mixture, stable combustion, mathematical modeling.

A mathematical model and solution to the problem of spark ignition of a lean methane-air mixture are presented. The work is aimed to find a minimum value of the spark ignition energy which makes it possible to initiate a combustion of the lean methane-air mixture followed by a stable mode of flame front propagation. The problem is numerically solved using the algorithm of the decay of an arbitrary discontinuity by Godunov's method. Based on the problem solution, the dependence of a minimum energy of spark ignition on the content of a combustible component in the gas is determined. The apparent and normal velocity of flame front of methane-air mixture are obtained as functions of fuel-air equivalence ratio. The calculated results are in a good agreement with data from scientific literature.

KRAINOV Aleksey Yurievich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

MOISEEVA Kseniya Mikhaylovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

REFERENCES

1. Beschastnov M.V., Sokolov V.M., Kats M.I. (1976) *Avarii v khimicheskikh proizvodstvakh i mery ikh preduprezhdeniya* [Accidents at chemical plants and their prevention]. Moscow: Khimiya.
2. Krainov A.Yu., Baimler V.A. (2002) Critical conditions of spark ignition of a mixture of gases (oxidizer and fuel) and reactive particles. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 38(3). pp. 278–283. DOI: 10.1023/A:1015645601538.
3. Krainov A.Yu., Baimler V.A. (2002) Effect of thermal expansion on the minimum energy of gas spark ignition. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 38 (4). pp. 387–390. DOI: 10.1023/A:1016294712346.
4. Krainov A.Yu. (2001) Effect of radiant heat transfer on the minimum spark-ignition energy of gas suspensions. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 37(3). pp. 259–266. DOI: 10.1023/A:1017515720961.
5. Vasil'ev A.A. (2006) Estimation of critical conditions for the detonation-to-deflagration transition. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 42(2). pp. 205–209. DOI: 10.1007/s10573-006-0039-1.
6. Vasil'ev A.A. Vasil'ev V.A. (2016) Raschetnye i eksperimental'nye parametry gorenija i detonatsii smesey na osnove metana i ugol'noy pyli [Calculated and experimental parameters of combustion and detonation of mixtures based on methane and coal dust]. *Vestnik Nauchnogo tsentra po bezopasnosti rabot v ugol'noy promyshlennosti – Bulletin of Research Center for Safety in Coal Industry*. 2. pp. 8–39.
7. Vedernikov M.I. (1977) *Tekhnika bezopasnosti pri proizvodstve, khranении i transportirovanii ammiaka* [Safety arrangements for production, storage, and transportation of ammonia]. Moscow: Khimiya.
8. Lewis B., Von Elbe G. (1987) *Combustion, Flames, and Explosions of Gases*. Academic Press.
9. Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. (2018) Modeling of the combustion of a methane–air mixture in an enclosed spherical volume. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 91(4). pp. 918–924. DOI 10.1007/s10891-018-1817-9.
10. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
11. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. (2018) Numerical simulation of spark ignition of a coal dust–air mixture. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 54(2). pp. 179–188. DOI: 10.1134/S0010508218020077.
12. Korolchenko A.Ya. (1986) *Pozharovzryvobezopasnost' promyshlennoy pyli* [Fire and explosion hazard of industrial dusts]. Moscow: Khimiya.
13. Shchetinkov E.S. (1965) *Fizika gorenija gazov* [Physics of gase combustion]. Moscow: Nauka.
14. Troshin K.Ya., Borisov A.A., Rakhmetov A.N., Arutyunov V.S., Politenkova G.G. (2013) Burning velocity of methane-hydrogen mixtures at elevated pressures and temperatures. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 7(3). pp. 290–301. DOI: 10.1134/S1990793113050102.
15. Hassan M.I., Aung K.T., Faeth G.M. (1998) Measured and predicted properties of laminar premixed methane/air flames at various pressures. *Combustion and Flame*. 115 (4). pp. 539–550. DOI: 10.1016/S0010-2180(98)00025-X.
16. Ronney P.D., Wachman H.Y. (1985) Effect of gravity on laminar premixed gas combustion I: Flammability limits and burning velocities. *Combustion and Flame*. 62(2). pp. 107–119. DOI: 10.1016/0010-2180(85)90139-7.
17. Taylor S.C. (1991) *Burning Velocity and the Influence of Flame Stretch*. Ph.D. Thesis. University of Leeds.
18. Hermanns R.T.E. (2007) *Laminar Burning Velocities of Methane-Hydrogen-Air Mixtures*. Ph.D. Thesis Eindhoven University of Technology.

УДК 532.546, 519.63
DOI 10.17223/19988621/56/8

Н.Г. Мусакаев, М.К. Хасанов, С.Л. Бородин, Д.С. Бельских

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗЛОЖЕНИЯ ГИДРАТА МЕТАНА ПРИ ЗАКАЧКЕ ТЕПЛОГО ГАЗА В ГИДРАТОНАСЫЩЕННУЮ ЗАЛЕЖЬ

В плоскорадиальном приближении приведена постановка задачи о закачке теплого (с температурой выше исходной температуры пласта) газа в пористый пласт, насыщенный в исходном состоянии метаном и его гидратом. Численно исследовано влияние параметров нагнетаемого газа и исходной гидратонасыщенности пласта на темпы диссоциации гидрата метана в пласте, а также на режим протекания данного процесса (фронтальный режим фазового перехода или разложение газогидрата происходит в протяженной зоне). Показано, что для данного вида воздействия характерным является фронтальный режим диссоциации газового гидрата.

Ключевые слова: *газовый гидрат, пористая среда, неизотермическая фильтрация, разложение гидрата.*

В настоящее время углеводороды являются одним из важнейших источников для энергетики и практически незаменимым сырьем для химической промышленности. В связи с этим ведутся исследования в области поиска и разработки новых, нетрадиционных источников углеводородов, среди которых особый интерес представляют гидраты природного газа [1, 2]. Благодаря своей клатратной структуре единичный объем газового гидрата может содержать до 160 – 180 объемов свободного газа [3, 4]. Одним из аспектов применения газогидратных технологий является возможность организации газогидратных хранилищ газа в равновесных условиях (под давлением) вблизи крупных потребителей газа, что связано со способностью гидратов концентрировать газ при относительно низком давлении [5]. Так, например, при температуре +4 °С и давлении 4 МПа концентрация метана в гидрате соответствует его концентрации в сжиженном состоянии при давлении в 150 – 160 атм. На данный момент уже приведены характеристики залежей и месторождений газовых гидратов [6], а также имеются национальные программы нескольких стран по работе с ними и возможной добыче природного газа из гидратов [2, 7].

Основным отличием разработки газогидратных залежей является необходимость разложения в пласте газогидратов с последующим отбором свободного газа с использованием традиционных технологий [2]. Газовые гидраты могут разлагаться, если температура и давление находятся за пределами зоны стабильности гидратов, или химическое равновесие системы «газогидрат – окружающая среда» нарушается [8]. С учетом данного обстоятельства было предложено несколько методов для извлечения метана из газогидратных залежей: депрессионное воздействие на пласт (снижение давления на забое скважины), термическая стимуляция с целью повышения температуры в пласте выше равновесной температуры разложения гидрата метана, закачка в пласт диоксида углерода, инъекция ингибиторов, способствующих диссоциации газогидрата, или комбинация вышеуказанных спо-

собов. Теоретическое исследование отбора газа из гидратонасыщенного пласта представлено в ряде работ, например [9–16].

Авторами [16] в плоскопараллельной постановке была рассмотрена задача нагнетания в пласт, насыщенный в исходном состоянии метаном и его гидратом, газа (метана), температура которого выше начальной температуры пласта. Построена математическая модель и предложен алгоритм решения задачи неизотермической фильтрации газа в пласте, который включает в себя оригинальный метод расчета гидратонасыщенности. Расчет этого параметра является весьма нетривиальным, поскольку на сегодняшний день расчетных схем для процесса неизотермической фильтрации газа без учета фазовых переходов существует достаточное количество, а вот учет образования и/или диссоциации газогидратов создает значительные вычислительные сложности. Похожая задача решалась ранее в случае калорически совершенного газа, т.е. без учета коэффициента сверхсжимаемости [17]. Значения гидратонасыщенности в пористой среде рассчитывались с помощью метода ловли фронта в узел сетки. Этот метод является достаточно эффективным для подобной задачи, однако его невозможно использовать в двумерном или трехмерном случае, а также при наличии нескольких фронтов [18].

В настоящей работе в плоскорадиальном приближении представлены результаты численного исследования процесса закачки в гидратонасыщенный пласт теплого (с температурой выше исходной температуры пласта) газа.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим процесс закачки газа (метана) в однородный горизонтальный пористый пласт постоянной толщины. Данная залежь в исходном состоянии заполнена метаном и его гидратом, давление p_0 и температура T_0 которых соответствуют термодинамическим условиям их существования в свободном состоянии. Исходная гидратонасыщенность S_{h0} известна. Пусть кровля и подошва пласта непроницаемы. Примем, что пласт является однородным и изотропным, а также пренебрежем влиянием верхней и нижней границ. В этой связи можно считать, что задача является одномерной и параметры процесса зависят только от пространственной координаты и времени [19].

Пусть в некоторый момент времени через скважину радиуса r_w , вскрывшую пласт на всю толщину, начинается закачка газа (метана) с постоянным массовым расходом Q_e (на единицу высоты скважины). Температура нагнетаемого в пласт газа T_e является постоянной величиной ($T_e > T_0$), она выше равновесной температуры разложения газового гидрата, т.е. в пласте может происходить диссоциация гидрата метана на газ и воду. Поэтому в пласте в общем случае могут возникнуть три характерные области (рис. 1): первая (ближняя к границе нагнетания метана, $r = r_w$), где поры заполнены газом и водой, вторая (промежуточная), в которой газ, вода и гидрат находятся в равновесии, и третья (дальняя), незатронутая тепловым воздействием. Одной из задач настоящего исследования является выявление условий, при которых либо будет возникать протяженная зона фазового перехода, либо разложение газового гидрата будет происходить на скачке (фронте), разделяющем ближнюю и дальнюю зоны пористой среды (т.е. в этом случае вторая область отсутствует).

Примем следующие допущения: гидрат метана является двухкомпонентной системой с постоянной массовой концентрацией газа G ; температуры пористой среды, газа, гидрата метана и воды в каждой точке пласта совпадают (однотемпе-

ратурная модель); пористость пласта m постоянна; скелет пористой среды, газовый гидрат и вода несжимаемы и неподвижны.

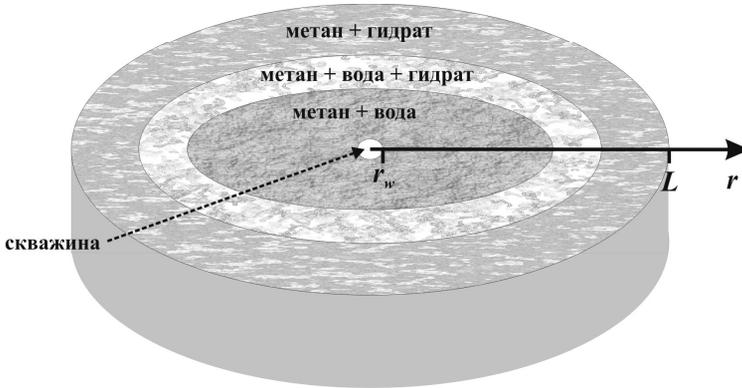


Рис. 1. Схема процесса нагнетания метана в гидратонасыщенный пласт
Fig. 1. Diagram of the process of methane injection into a hydrate-saturated stratum

Система основных уравнений, описывающая процессы фильтрации и теплопереноса в пористой среде, представляет собой законы сохранения масс и энергии, закон Дарси и уравнение состояния для газа. Эта система в плоскорadiaльном случае при сделанных допущениях имеет вид [10, 15, 19, 20]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g S_g + \rho_h S_h G) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho_g S_g v_g) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w S_w + (1-G)\rho_h S_h) = 0; \quad (2)$$

$$m S_g v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (3)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + m \rho_h L_h \frac{\partial S_h}{\partial t} - m \rho_g c_g S_g v_g \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial r} \right) + m \rho_g c_g S_g \eta \frac{\partial p}{\partial t}; \quad (4)$$

$$p = z_g \rho_g R_g T; \quad (5)$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{\rho_g c_g} \frac{T}{z_g} \left(\frac{\partial z_g}{\partial T} \right)_p, \quad \eta = \frac{1}{\rho_g c_g} - \varepsilon, \quad k_g = k S_g^3,$$

$$\rho c = (1-m) \rho_{sk} c_{sk} + m \sum_{j=g,w,h} S_j \rho_j c_j,$$

$$\lambda = (1-m) \lambda_{sk} + m \sum_{j=g,w,h} S_j \lambda_j, \quad \sum_{j=g,w,h} S_j = 1,$$

где ρ_j и c_j ($j = g, w, h$) – плотность и удельная теплоемкость j -й фазы (w – вода, h – гидрат, g – газ); S_j ($j = w, h, g$) – насыщенность пор j -й фазой; ρ_{sk} , λ_{sk} и c_{sk} – плотность, коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость скелета пористой

среды; v_g и μ_g – скорость и динамическая вязкость газовой фазы; k – абсолютная проницаемость пласта; ε и η – коэффициент дросселирования и адиабатический коэффициент; L_h – теплота разложения гидрата метана; ρ_s и λ – удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы «пласт – насыщающее вещество».

Коэффициент сверхсжимаемости для газа z_g будем находить на основе уравнения Латонова – Гуревича [20, 21]:

$$z_g = \left[0.17376 \cdot \ln \left(\frac{T}{T_c} \right) + 0.73 \right]^{p/p_c} + \frac{0.1p}{p_c}, \quad (6)$$

где T_c и p_c – эмпирические критические параметры для газа.

Начальное и граничные условия запишем в следующем виде:

$$t = 0, r_w \leq r \leq L: \quad p = p_0, \quad T = T_0, \quad S_h = S_{h0}, \quad S_g = 1 - S_{h0}, \quad S_w = 0; \quad (7)$$

$$t > 0: \quad \begin{cases} r = r_w: & Q = Q_e = \text{const}, \quad T = T_e = \text{const}, \\ r = L: & \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь r_w – радиус скважины; L – протяженность (радиус) пласта; S_{h0} – исходная гидратонасыщенность пласта.

Условие на левой границе пласта с учетом закона Дарси (3) можно переписать в виде

$$t > 0, r = r_w: \quad r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_e \mu_g}{2\pi \rho_g k_g}, \quad T = T_e.$$

Система уравнений (1) – (6) с начальными и граничными условиями (7), (8) описывает процесс неизотермической фильтрации закачиваемого в пласт газа с учетом разложения гидрата метана, который изначально заполняет часть порового пространства.

Результаты расчетов

Численная реализация математической модели была осуществлена с использованием неявной разностной схемы, метода прогонки, метода простых итераций и авторского метода для расчета гидратонасыщенности [16]. Этот метод заключается в расчете гидратонасыщенности в пласте, исходя из следующих лимитирующих условий: при разложении газогидрата давление повышается, пока не достигнет равновесного давления или не разложится весь гидрат; при диссоциации гидрата температура понижается, пока не достигнет равновесной температуры или не разложится весь гидрат; при образовании газового гидрата давление уменьшается, пока не достигнет равновесного давления или не закончатся все фазы образователи гидрата; при образовании газогидрата температура повышается, пока не достигнет равновесной температуры или не закончатся все фазы образователи гидрата.

На основе данного алгоритма был разработан программный продукт, для тестирования которого было проведено сравнение результатов численного эксперимента с результатами расчетов, проведенных с учетом построенных в диссертационной работе М.К. Хасанова автомоделейных решений задачи о закачке теплого

газа в гидратонасыщенный пласт (рис. 2). Из рисунка видно хорошее согласие результатов численного и аналитического исследований.

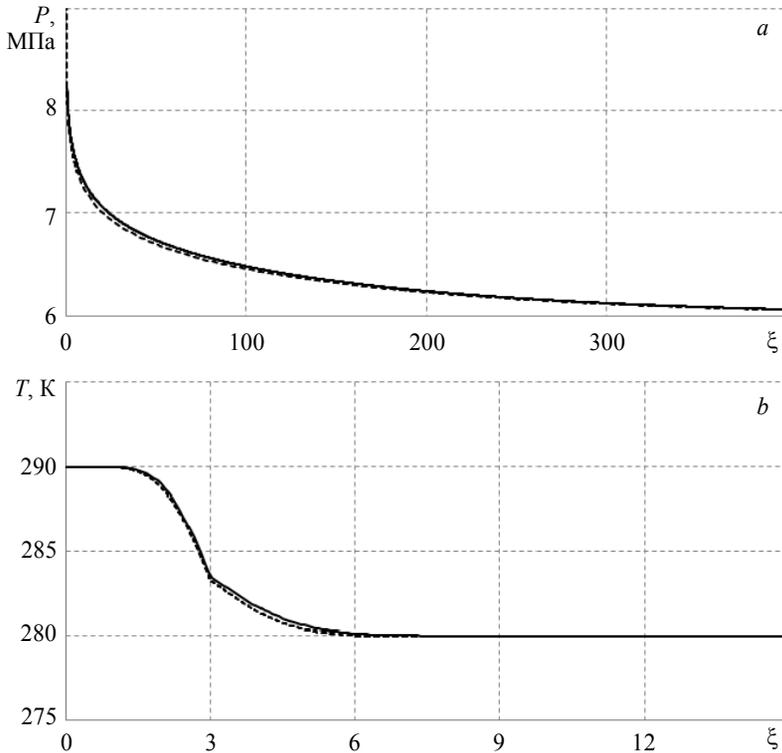


Рис. 2. Сравнение результатов расчета и автомодельного решения для давления (а) и температуры (б). Пунктирная линия – автомодельное решение, сплошная – расчет

Fig. 2. Comparison of the calculated results and self-similar solution for (a) pressure and (b) temperature. The dashed line indicates the self-similar solution; the solid line, the calculated results

Были проведены вычислительные эксперименты с целью выявления значений параметров нагнетаемого газа и исходных параметров пласта, при которых могла бы возникнуть протяженная (объемная) зона разложения газового гидрата, т.е. область пористой среды, где газ, вода и гидрат находились бы в состоянии термодинамического равновесия.

При проведении расчетов были приняты следующие значения используемых параметров: $Q_e = 0.02$ кг/(м·с); $T_e = 293$ К; $L = 100$ м; $T_0 = 281$ К; $p_0 = 6$ МПа. $S_{h0} = 0.2$; $p_c = 4.599$ МПа; $T_c = 190.56$ К; $k_0 = 10^{-15}$ м²; $m = 0.1$; $\rho_{sk} = 2300$ кг/м³; $\rho_w = 1000$ кг/м³; $\rho_h = 910$ кг/м³; $c_{sk} = 1000$ Дж/(кг·К); $c_w = 4200$ Дж/(кг·К); $c_h = 2000$ Дж/(кг·К); $\lambda_{sk} = 1.5$ Вт/(м·К); $\lambda_w = 0.56$ Вт/(м·К); $\lambda_h = 4 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К); $R_g = 519$ Дж/(кг·К); $L_h = 4.37 \cdot 10^5$ Дж/кг; $G = 0.12$ [3, 5, 10, 22-24]. Значения c_g , λ_g , μ_g определялись путем интерполяции табличных данных для метана; равновесная температура образования газового гидрата $T_s(p)$ – на основе интерполяционных соотношений, предложенных в одной из работ авторов [25].

На рис. 3 представлены поля давления, температуры и гидратонасыщенности в различные моменты времени после начала закачки теплого ($T_e > T_0$) газа в пласт, изначально содержащий метан и его гидрат. Как и следовало ожидать, протяженность первой (ближней) области пласта, насыщенной газом и водой, со временем растет, но темпы увеличения зоны, в которой газогидрат уже разложился, падают. Для всех моментов времени температура в ближней зоне выше равновесной температуры образования газового гидрата $T_s(p)$, а в дальней (в этой зоне поровое пространство заполнено метаном и его гидратом) – ниже. То есть фронтальная схема диссоциации газогидрата адекватно описывает процесс.

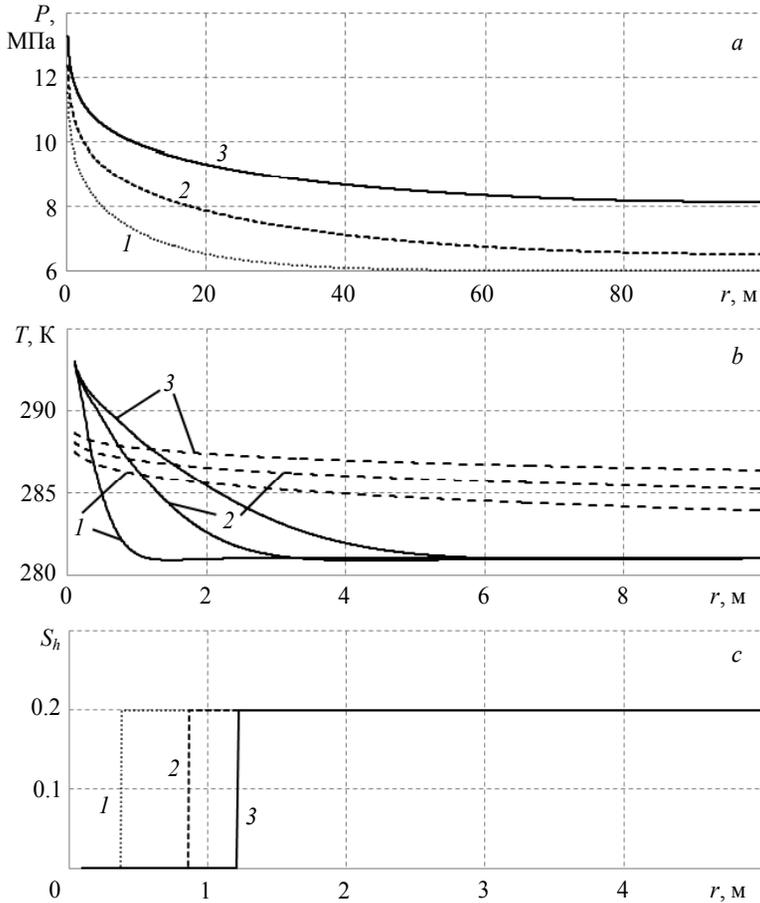


Рис. 3. Изменение по координате r давления (а), температуры (б) и гидратонасыщенности (с) в различные моменты времени после начала эксплуатации нагнетательной скважины t . Линии 1, 2 и 3 соответствуют $t = 1, 10$ и 30 сут; на рис. 3, б сплошные линии соответствуют температуре в пласте, штриховые – равновесной температуре разложения газового гидрата $T_s(p)$

Fig. 3. Distribution of the (a) pressure, (b) temperature, and (c) hydrate saturation along r -coordinate at different time instants t after the start of injection well operating. Lines 1, 2, and 3 correspond to $t = 1, 10$, and 30 days, respectively; the solid lines in Fig. 3b indicate the temperature of stratum; the dashed lines, the equilibrium temperature of gas hydrate decomposition $T_s(p)$

Параметрами процесса закачки метана в гидратонасыщенную залежь можно управлять, меняя массовый расход нагнетаемого газа и его температуру на входе в пласт. Вычислительные эксперименты с различной температурой закачки метана в пласт, насыщенный в исходном состоянии метаном и его гидратом, показали, что диссоциация газового гидрата происходит на фронтальной поверхности при любом значении T_e из приведенного диапазона температур (рис. 4). Проведенные авторами расчеты с большими значениями T_e (вплоть до 373 К) не выявили тех температур, при которых в пласте возникает протяженная зона фазового перехода (т.е. зона смеси газа, воды и гидрата метана). Это можно объяснить тем, что для возникновения протяженной области диссоциации газогидрата равновесная температура разложения гидрата должна опускаться ниже температуры пласта. Поскольку для природных пластов значение коэффициента пьезопроводности $\chi^{(p)} = k_g p / \mu_g m$ всегда на несколько порядков превышает значение коэффициента температуропроводности $\chi^{(T)} = \lambda / \rho c$, то температура от границы диссоциации гидрата к внешней границе пласта убывает быстрее, чем давление и однозначно связанная с ним равновесная температура разложения газогидрата. Поэтому при закачке теплого газа температура пласта в любой точке дальней области опускается ниже равновесной температуры разложения газогидрата, что препятствует диссоциации газогидрата в дальней области.

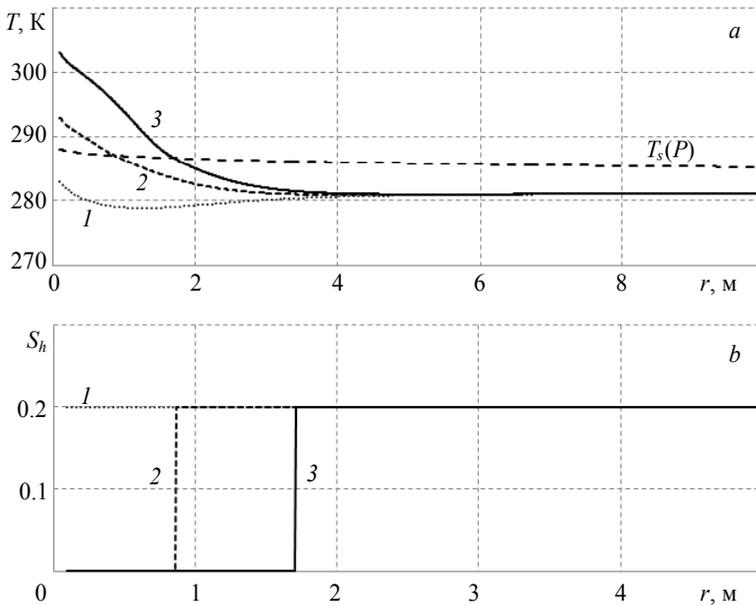


Рис. 4. Распределение по координате r температуры (а) и гидратонасыщенности (б) при различной температуре T_e закачиваемого в пласт газа. Линии 1, 2 и 3 соответствуют $T_e = 283, 293$ и 303 К. Время нагнетания газа $t = 10$ сут

Fig. 4. Distribution of the (a) temperature and (b) hydrate saturation along r -coordinate at various temperatures T_e of gas injected into the stratum. Lines 1, 2, and 3 correspond to $T_e = 283, 293,$ and 303 K, respectively. Gas injection time is $t = 10$ days

Из данных, приведенных на рис. 4, видно, что при $T_e = 283$ К (при этой температуре нагнетаемого газа не происходит диссоциации гидрата метана, рис. 4, *b*) температура в пласте на некотором участке становится меньше исходной температуры пласта. Данное обстоятельство обусловлено действием эффекта Джоуля – Томсона.

На рис. 5 представлены поля давления, температуры и гидратонасыщенности при различных массовых расходах Q_e на 10-е сутки после начала нагнетания газа.

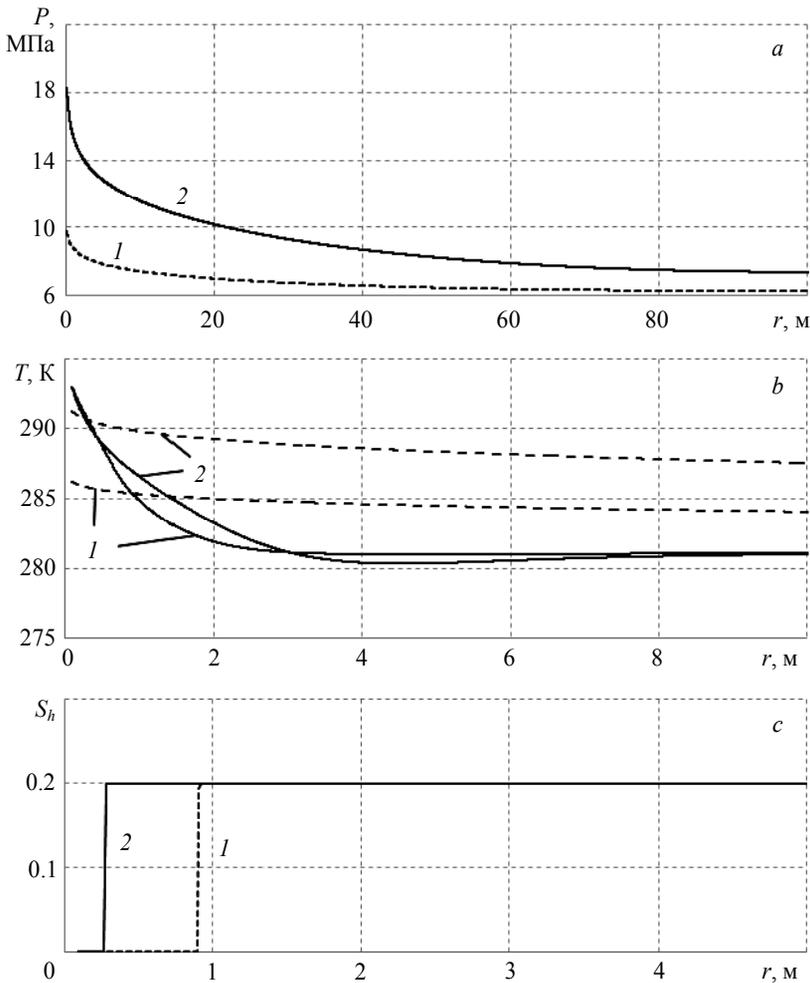


Рис. 5. Распределение по координате r давления (*a*), температуры (*b*) и гидратонасыщенности (*c*) при различных массовых расходах на скважине: линия 1 – 0.01 кг/(м·с); линия 2 – 0.05 кг/(м·с); на рис. 5, *b* сплошные линии соответствуют температуре в пласте, штриховые – равновесной температуре образования газового гидрата $T_s(p)$

Fig. 5. Distribution of the (*a*) pressure, (*b*) temperature, and (*c*) hydrate saturation along r -coordinate at various mass flow rates in the well: 1, 0.01 and 2, 0.05 kg/(m·s); the solid lines in Fig. 5*b* indicate the stratum temperature; the dashed lines, the equilibrium temperature of gas hydrate formation $T_s(p)$

Из данных, представленных на данном рисунке, видно, что реализуется фронтальная схема разложения газового гидрата. Также из рис. 5 следует, что с повышением массового расхода газа Q_e уменьшается протяженность области пористой среды (первая зона), в которой газовый гидрат уже разложился. Данное обстоятельство связано с тем, что с ростом величины Q_e повышается давление в пласте и соответственно увеличивается равновесная температура разложения гидрата, что и приводит к смещению границы фазовых переходов к левой границе.

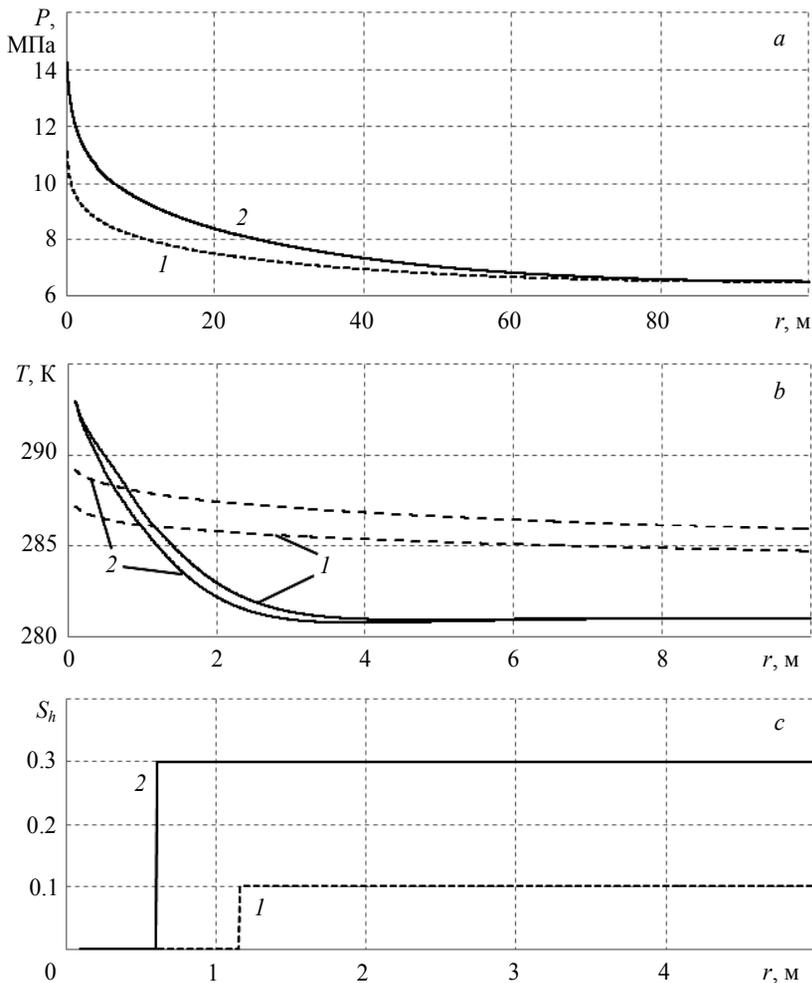


Рис. 6. Распределение давления (а), температуры (б) и гидратонасыщенности (с) при различной начальной гидратонасыщенности S_{h0} . Линии 1 и 2 соответствуют $S_{h0} = 0.1$ и 0.3 ; на рис. 6, б сплошные линии соответствуют температуре в пласте, штриховые – равновесной температуре образования газового гидрата $T_s(p)$

Fig. 6. Distribution of the (a) pressure, (b) temperature, and (c) hydrate saturation for various initial hydrate saturation S_{h0} . Lines 1 and 2 correspond to $S_{h0} = 0.1$ and 0.3 , respectively; the solid lines in Fig. 6b indicate the stratum temperature; the dashed lines, the equilibrium temperature of gas hydrate formation $T_s(p)$

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что увеличение массового расхода закачиваемого в гидратонасыщенный пласт газа не приводит к росту темпов разложения газогидрата.

На рис. 6 представлено распределение по длине пласта температуры и гидратонасыщенности при различных значениях исходной гидратонасыщенности пласта S_{h0} . Как следует из этого рисунка, чем больше значение S_{h0} , тем меньше протяженность первой зоны пласта, насыщенной газом и водой. Это обусловлено тем, что скорость движения границы диссоциации газогидрата определяется подводом тепла, поглощаемого при разложении гидрата, величина которого растет с повышением гидратонасыщенности. Разложение газового гидрата при всех взятых значениях начальной гидратонасыщенности происходит на фронтальной поверхности. Также стоит отметить, что большему значению S_{h0} соответствует меньшее значение температуры пласта. Данное обстоятельство обусловлено ростом величины охлаждения пласта за счет поглощения скрытой теплоты диссоциации гидрата метана.

Из данных, приведенных на рис. 6, видно, что большему значению начальной гидратонасыщенности в пласте соответствует большее значение давления на скважине и соответственно больший градиент давления. Это объясняется тем, что с ростом гидратонасыщенности уменьшается значение проницаемости для газа. А уменьшение проницаемости при неизменном заданном массовом расходе нагнетаемого в пласт газа требует повышения давления на скважине.

Заключение

Проведено численное исследование процесса закачки в залежь, насыщенную в начальном состоянии метаном и его гидратом, теплого (с температурой, большей исходной температуры пласта) газа. На основе уравнений механики многофазных сред предложена в плоскорадиальном приближении математическая модель, в которой учтены основные физические особенности этого процесса: неизотермическая фильтрация газа, разложение газового гидрата, реальные свойства газа, эффекты адиабатического охлаждения и Джоуля – Томсона. Проведен анализ влияния начальной гидратонасыщенности, массового расхода и температуры закачиваемого газа на характер распределения давления, температуры и гидратонасыщенности в пласте. Проведенное численное исследование процесса закачки теплого газа в гидратонасыщенную залежь не выявило таких значений параметров нагнетаемого газа и исходных параметров пласта, при которых могла бы возникнуть протяженная (объемная) зона разложения газового гидрата. То есть для изучаемой задачи характерным является фронтальный режим фазовых переходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макогон Ю.Ф. Гидраты природных газов. М.: Недра, 1974. 208 с.
2. Makogon Y.F., Holditch S.A., Makogon T.Y. Natural gas-hydrates – A potential energy source for the 21st Century // J. Petroleum Science and Engineering. 2007. V. 56. P. 14–31. DOI: 10.1016/j.petrol.2005.10.009.
3. Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992. 236 с.
4. Shagapov V.Sh., Musakaev N.G., Khasanov M.K. Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 84. P. 1030–1039. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.105.

5. Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа. М.: Наука, 2016. 238 с.
6. Koh A.C., Sum A.K., Sloan E.D. State of the art: Natural gas hydrates as a natural resource // J. Natural Gas Science and Engineering. 2012. V. 8. P. 132–138. DOI: 10.1016/j.jngse.2012.01.005
7. Makogon Y.F. Natural gas hydrates – A promising source of energy // J. Natural Gas Science and Engineering. 2010. V. 2. Issue 1. P. 49–59. DOI: 10.1111/j.1540-4560.1945.tb01990.x
8. Yang J., Okwananke A., Tohidi B., Chuvilin E., Maerle K., Istomin V., Bukhanov B., Chermisin A. Flue gas injection into gas hydrate reservoirs for methane recovery and carbon dioxide sequestration // Energy Conversion and Management. 2017. V. 136. P. 431–438. DOI: 10.1016/j.enconman.2017.01.043.
9. Васильев В.И., Попов В.В., Цыткин Г.Г. Численное исследование разложения газовых гидратов, сосуществующих с газом в природных пластах // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 127–134. DOI: 10.1007/s10697-006-0078-z.
10. Musakaev N.G., Borodin S.L., Khasanov M.K. The mathematical model of the gas hydrate deposit development in permafrost // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 118. P. 455–461. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.127.
11. Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G., Ngoc Hai Duong Theoretical research of the gas hydrate deposits development using the injection of carbon dioxide // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2017. V. 107. P. 347–357. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.034.
12. Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Мусакаев Н.Г. Инжекция жидкого диоксида углерода в частично насыщенный гидратом метана пласт // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 6. С. 139–149. DOI: 10.15372/PMTF20160616.
13. Moridis G.J. Numerical studies of gas production from methane hydrates // SPE 75691, presented at the SPE gas technology symposium. Calgary, 2002. DOI: 10.2118/75691-MS.
14. Musakaev N.G., Khasanov M.K. The self-similar solutions of the problem of carbon dioxide injection into the reservoir saturated with methane and its hydrate // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1770. 030106. DOI: 10.1063/1.4964048.
15. Шагапов В.Ш., Чиглицева А.С., Русинов А.А. Теоретическое моделирование процесса извлечения газа из пористого газогидратного пласта, частично насыщенного газом, с учетом теплового взаимодействия с окружающими породами // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, № 4. С. 452–462. DOI: 10.7868/S004035711604014X.
16. Мусакаев Н.Г., Бородин С.Л., Бельских Д.С. Математическая модель и алгоритм решения задачи неизотермической фильтрации газа в пласте с учетом разложения гидрата // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2017. Т. 9. № 2. С. 22–29. DOI: 10.14529/mmph170203.
17. Столповский М.В., Щеглова Е.П. О нагреве пористой среды при образовании газовых гидратов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2. № 2. С. 23–35. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-23-35
18. Бородин С.Л. Численные методы решения задачи Стефана // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1. № 3. С. 164–175.
19. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
20. Аргунова К.К., Бондарев Э.А., Рожин И.И. Влияние неизотермических эффектов на добычу газа в северных районах с учетом возможного гидратообразования в призабойной зоне скважин // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12. № 4. С. 9–15.
21. Shagapov V.Sh., Urazov R.R., Musakaev N.G. Dynamics of formation and dissociation of gas hydrates in pipelines at the various modes of gas transportation // Heat and Mass Transfer. 2012. V. 48. Issue 9. P. 1589–1600. DOI 10.1007/s00231-012-1000-3.

22. Chernov A.A., Pil'nik A.A. Analytical solution of the problem of dissolved gas segregation in melt by the plain crystallization front // J. Crystal Growth. 2018. V. 483. P. 291–296. DOI: 10.1016/j.jcrysgro.2017.12.019.
23. Musakaev N.G., Borodin S.L. Mathematical model of the two-phase flow in a vertical well with an electric centrifugal pump located in the permafrost region // Heat and Mass Transfer. 2016. V. 52. Issue 5. P. 981–991. DOI: 10.1007/s00231-015-1614-3.
24. Sloan E.D., Koh A.C. Clathrate Hydrates of Natural Gases. Third Edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2008. 730 p.
25. Musakaev N.G., Borodin S.L. To the question of the interpolation of the phase equilibrium curves for the hydrates of methane and carbon dioxide // MATEC Web of Conferences. 2017. V. 115. 05002. DOI: 10.1051/mateconf/201711505002.

Статья поступила 12.03.2018 г.

Musakaev N.G., Khasanov M.K., Borodin S.L., Belskikh D.S. (2018) NUMERICAL INVESTIGATION OF THE METHANE HYDRATE DECOMPOSITION IN THE PROCESS OF WARM GAS INJECTION INTO A HYDRATE-SATURATED RESERVOIR. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 88–101

DOI 10.17223/19988621/56/8

Keywords: gas hydrate, porous medium, non-isothermal filtration, hydrate decomposition.

Currently, natural reservoirs of the gas hydrates represent a serious alternative to the conventional sources of the natural gas due to a significant amount of hydrates and concentrated state of gas in them. The main methods for methane extraction from such reservoirs are the pressure reduction, heating hydrate-containing rocks, injecting carbon dioxide into the bed, injecting organic or saline solutions contributing to a gas hydrates' decomposition. A mathematical model in a flat-radial approximation is proposed in the paper, and the properties of warm gas (methane), whose temperature is higher than that of bed at the initial state, injecting into a natural stratum initially saturated with methane and its hydrate are investigated. The developed mathematical model considers the main physical particularities of a thermal effect on the hydrate-saturated reservoir, such as non-isothermal gas filtration, gas hydrate decomposition, real gas properties, adiabatic cooling effects, and the Joule-Thomson effect. The numerical solution to a one-dimensional problem describing distributions of the main parameters in the reservoir is obtained. An influence of the injected gas parameters and initial hydrate saturation of the bed on the intensity of methane hydrate decomposition is studied. It is shown that the gas hydrate decomposition during the process of a warm gas injection into the hydrate-saturated reservoir is characterized by a frontal mode of phase transitions.

MUSAKAEV Nail Gabsalyamovich (Doctor of Physics and Mathematics, Industrial University of Tyumen, Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Tyumen, Russian Federation). E-mail: musakaev@ikz.ru

KHASANOV Marat Kamilovich (Candidate of Physics and Mathematics, Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation). E-mail: hasanovmk@mail.ru

BORODIN Stanislav Leonidovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Tyumen, Russian Federation). E-mail: borodin@ikz.ru

BELSKIKH Denis Sergeevich (Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation). E-mail: bedeser@yandex.ru

REFERENCES

1. Makogon Yu.F. (1974) *Gidraty prirodnykh gazov* [Hydrates of natural gases]. Moscow: Nedra.
2. Makogon Yu.F., Holditch S.A., Makogon T.Yu. (2007) Natural gas-hydrates – A potential energy source for the 21st Century. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 56. pp. 14–31. DOI: 10.1016/j.petrol.2005.10.009.
3. Istomin V.A., Yakushev V.S. (1992) *Gazovye gidraty v prirodnykh usloviyakh* [Gas hydrates in the natural environment]. Moscow: Nedra.
4. Shagapov V.Sh., Musakaev N.G., Khasanov M.K. (2015) Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 84. pp. 1030–1039. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.105.
5. Shagapov V.Sh., Musakaev N.G. (2016) *Dinamika obrazovaniya i razlozheniya gidratov v sistemakh dobychi, transportirovki i khraneniya gaza* [Dynamics of the formation and decomposition of hydrates in the systems of gas production, transportation, and storage]. Moscow: Nauka.
6. Koh A.C., Sum A.K., Sloan E.D. (2012) State of the art: Natural gas hydrates as a natural resource. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 8. pp. 132–138. DOI: 10.1016/j.jngse.2012.01.005.
7. Makogon Y.F. (2010) Natural gas hydrates – A promising source of energy. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 2(1). pp. 49–59. DOI: 10.1111/j.1540-4560.1945.tb01990.x.
8. Yang J., Okwananke A., Tohidi B., Chuvilin E., Maerle K., Istomin V., Bukhanov B., Chermisin A. (2017) Flue gas injection into gas hydrate reservoirs for methane recovery and carbon dioxide sequestration. *Energy Conversion and Management*. 136. pp. 431–438. DOI: 10.1016/j.enconman.2017.01.043.
9. Vasil'ev V.I., Popov V.V., Tsyppin G.G. (2006) Numerical investigation of the decomposition of gas hydrates coexisting with gas in natural reservoirs. *Fluid Dynamics*. 41(4). pp. 599–605. DOI: 10.1007/s10697-006-0078-z.
10. Musakaev N.G., Borodin S.L., Khasanov M.K. (2018) The mathematical model of the gas hydrate deposit development in permafrost. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 118. pp. 455–461. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.127.
11. Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G., Ngoc Hai Duong (2017) Theoretical research of the gas hydrate deposits development using the injection of carbon dioxide. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 107. pp. 347–357. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.034.
12. Shagapov V.S., Khasanov M.K., Musakaev N.R. (2016) Injection of liquid carbon dioxide into a reservoir partially saturated with methane hydrate. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(6). pp. 1083–1092. DOI: 10.1134/S002189441606016X.
13. Moridis G.J. (2002) Numerical studies of gas production from methane hydrates. *Society of Petroleum Engineers Journal*. 8(4). DOI: 10.2118/75691-MS.
14. Musakaev N.G., Khasanov M.K. (2016) The self-similar solutions of the problem of carbon dioxide injection into the reservoir saturated with methane and its hydrate. *AIP Conference Proceedings*. 1770(1). 030106. DOI: 10.1063/1.4964048.
15. Shagapov V.S., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. (2016) Theoretical modeling of gas extraction from a partially gas-saturated porous gas-hydrate reservoir with respect to thermal interactions with surrounding rocks. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 50(4). pp. 449–458. DOI: 10.1134/S004057951604045X.
16. Musakaev N.G., Borodin S.L., Belskikh D.S. (2017) Matematicheskaya model' i algoritm resheniya zadachi neizotermicheskoy fil'tratsii gaza v plaste s uchetom razlozheniya gidrata [Mathematical model and algorithm for solving the problem of non-isothermal gas filtration in reservoir in case of hydrate decomposition]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*. 9(2). pp. 22–29. DOI: 10.14529/mmph170203.

17. Stolpovskiy M.V., Shcheglova E.P. (2016) O nagreve poristoy sredy pri obrazovanii gazovykh gidratov [On heating the porous media under gas hydrates formation]. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft', gaz, energetika – Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy.* 2(2). pp. 23–35. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-2-23-35.
18. Borodin S.L. (2015) Chislennyye metody resheniya zadachi Stefana [Numerical solution of the Stefan's problem]. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft', gaz, energetika – Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy.* 1(3). pp. 164–175.
19. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. (1993) *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground hydromechanics]. Moscow: Nedra.
20. Argunova K.K., Bondarev E.A., Rozhin I.I. (2012) Vliyaniye neizotermicheskikh effektov na dobychu gaza v severnykh rayonakh s uchedom vozmozhnogo gidratoobrazovaniya v pri-zaboynoy zone skvazhin [Influence of non-isothermal effects on gas production in northern regions with account for possibility of hydrate formation at the well bottom hole]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika – Journal of Mathematical Sciences.* 12(4). pp. 9–15.
21. Shagapov V.Sh., Urazov R.R., Musakaev N.G. (2012) Dynamics of formation and dissociation of gas hydrates in pipelines at the various modes of gas transportation. *Heat and Mass Transfer.* 48(9). pp. 1589–1600. DOI 10.1007/s00231-012-1000-3.
22. Chernov A.A., Pil'nik A.A. (2018) Analytical solution of the problem of dissolved gas segregation in melt by the plain crystallization front. *Journal of Crystal Growth.* 483. pp. 291–296. DOI: 10.1016/j.jcrysgro.2017.12.019.
23. Musakaev N.G., Borodin S.L. (2016) Mathematical model of the two-phase flow in a vertical well with an electric centrifugal pump located in the permafrost region. *Heat and Mass Transfer.* 52(5). pp. 981–991. DOI: 10.1007/s00231-015-1614-3.
24. Sloan E.D., Koh A.C. (2008) *Clathrate Hydrates of Natural Gases. Third Edition.* CRC Press, Taylor & Francis Group.
25. Musakaev N.G., Borodin S.L. (2017) To the question of the interpolation of the phase equilibrium curves for the hydrates of methane and carbon dioxide. *MATEC Web of Conferences.* 115. 05002. DOI: 10.1051/mateconf/201711505002.

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/56/9

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик**КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА НАГРУЗКУ
В ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНОЙ
И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИД**

На основе представления точки деформируемого твердого тела в виде стягиваемого к ней элементарного объема изучены напряжения в вершине многогранников при поверхностных нагрузках на их боковых гранях. Показано, что все компоненты напряжений оказываются заданными, что обуславливает неклассическую постановку задач механики. Сформулированы условия на нагрузку, обеспечивающие корректность постановок рассматриваемых задач.

Ключевые слова: *многогранник, особые точки, сингулярность, элементарный объем, неклассические задачи.*

Особые точки упругих тел – это вершины трещин, клиньев, конусов, многогранников, точки края поверхностей соединения, линии пересечения образующих поверхностей (ребра) и т.п. Особые точки являются потенциальными концентраторами напряжений, вблизи них зарождается разрушение. Поэтому изучение особенностей поведения параметров состояния (напряжений и деформаций) тела в окрестностях таких точек актуально и ему посвящено большое число публикаций [1–33 и др.]. В настоящее время для исследования полей напряжений в окрестности особых точек применяются два подхода. Первый из них (далее классический или асимптотический) характерен тем, что особая точка в нем исключается из рассмотрения посредством помещения в нее полюса криволинейной системы координат (в полюсе отсутствует однозначное соответствие между точкой тела и ее координатами, поэтому такая точка не входит в область построения решения, в ней имеют смысл лишь асимптотические значения искомых параметров). Обзоры публикаций по применению классического подхода приведены в работах [14, 19, 24, 25]. Решение в классическом случае строится различными методами: операционного исчисления [1, 5, 6, 14], функций комплексного переменного [8], функций Эри [9], интегральных уравнений [3, 6, 23], разделения переменных [2], разложения в ряды по различным функциям [13, 15, 22, 27] и др. Авторы, применяющие численные методы (метод конечных элементов [11, 12, 16, 18, 25, 26, 28], метод конечных элементов в сочетании с поиском собственных значений методом Арнольда [29], метод граничных элементов [17, 21], метод граничных состояний [24]), реализуют асимптотическую идею посредством неограниченного измельчения КЭ-сетки области вблизи особой точки или конструированием специальных конечных элементов. Многие авторы асимптотических решений при изучении напряженного состояния вблизи особых точек разыскивают показатели сингулярности [1, 5, 11, 20, 21, 25, 27] – параметры решения характеристических уравнений соответствующих однородных задач. Полагается, что при выполнении определенных критериев, формулируемых для таких параметров, решение для напряже-

ний может иметь сингулярный характер при стремлении расстояния до особой точки к нулю.

Исключение в классическом подходе особой точки из области построения решения приводит к неадекватному определению напряжений в ее окрестности, так как при этом не рассматриваются условия (например, граничные), задаваемые непосредственно в самой точке. Такое исключение объясняется невозможностью формулировки граничных условий в особой точке, так как она принадлежит одновременно нескольким поверхностям (в точках пространственного ребра – двум поверхностям, в вершине многогранника – всем его граням). Второй (неклассический) подход к исследованию параметров состояния вблизи особой точки связан с преодолением указанного недостатка классического подхода. В альтернативном подходе, согласно представлению о точке сплошной среды, разработанному учеными XVIII века (Даниил и Иоганн Бернулли, Ж.Л. Д’Аламбер и Л. Эйлер [30]) и признаваемому современными исследователями, особая точка (как и любая другая точка тела) считается стягиваемым к ней элементарным объемом. Рассматривается элементарный объем, содержащий особую точку. Такой объем имеет характерный (линейный) размер, равный представительному объему моделируемого тела, и обладает его механическими свойствами. Параметры состояния элементарного объема однородны, так как они являются осредненными по представительному объему тела значениями параметров более низкого структурного уровня. При стягивании элементарного объема к точке его параметры состояния остаются неизменными. Вследствие сказанного, за ограничения, задаваемые в особой точке, принимаются ограничения, задаваемые для элементарного объема, содержащего эту точку. Впервые такой подход к изучению параметров состояния в особой точке и ее окрестности применялся в работах [31, 32], где показано, что необычность (уникальность) особой точки проявляется в избыточном количестве (по сравнению с обычной граничной точкой) задаваемых в ней ограничений. Это обстоятельство делает задачу механики деформируемого твердого тела с особой точкой неклассической. Неклассические (в указанном смысле) задачи рассматривались в работах [31] (однородные плоские клинья), [32, 33] (составные плоские клинья), [34] (составные пространственные ребра), [35] (внутренние особые точки в плоских элементах конструкций), [36] (круговой и составной конус).

В настоящей статье неклассический подход используется для изучения компонент напряжений в вершинах многогранников – правильных треугольной и четырехугольной пирамид. Построенные решения являются задаваемыми ограничениями в особых точках и должны использоваться в постановках задач механики деформируемых твердых тел, содержащих рассматриваемые элементы.

1. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершине тетраэдра

1.1. Постановка задачи

Рассматривается упругое тело, содержащее конструктивный элемент в виде части объема правильной треугольной пирамиды. Вблизи вершины A строится ее виртуальное основание – правильный треугольник BCD (рис. 1). Угол между высотой пирамиды и высотой треугольника BAC обозначается через ψ . С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат O, x_1, x_2, x_3 . Начало координат (т.О) совпадает с центром основания пирамиды, а координат-

ная плоскость x_1, x_2 содержит ребро AC (рис. 1.1). Базисные векторы введенной системы координат обозначаются \bar{e}_i ($i = 1, 2, 3$).

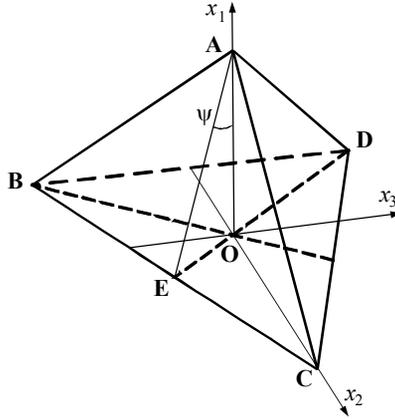


Рис. 1. Часть правильной треугольной пирамиды вблизи вершины
Fig. 1. Part of a regular triangular pyramid near the vertex

На гранях ACD, ABC и ADB вводятся ортонормированные трехгранники. Эти трехгранники в координатах x_1, x_2, x_3 записываются равенствами:

на грани ACD:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \bar{e}_3, \\ \bar{n}' &= \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \bar{e}_3, \quad \bar{n}'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{e}_2 - \frac{1}{2} \bar{e}_3, \end{aligned} \quad (1.1)$$

на грани ABC:

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \bar{e}_3, \\ \bar{m}' &= \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \bar{e}_3, \quad \bar{m}'' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{e}_2 - \frac{1}{2} \bar{e}_3, \end{aligned} \quad (1.2)$$

на грани ADB:

$$\bar{l} = \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2, \quad \bar{l}' = \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2, \quad \bar{l}'' = \bar{e}_3. \quad (1.3)$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины A образующего грань треугольника. Вблизи вершины A поверхностную нагрузку на гранях пирамиды представим разложениями по базисам (1.1), (1.2), (1.3)

$$\bar{P}_n = p_n \bar{n} + \tau_n \bar{n}' + \vartheta_n \bar{n}'', \quad \bar{P}_m = p_m \bar{m} + \tau_m \bar{m}' + \vartheta_m \bar{m}'', \quad \bar{P}_l = p_l \bar{l} + \tau_l \bar{l}' + \vartheta_l \bar{l}'' \quad (1.4)$$

Здесь $\bar{P}_n, \bar{P}_m, \bar{P}_l$ – задаваемые векторы напряжений соответственно на гранях ACD, ABC и ADB. Вершина пирамиды (особая точка) отождествляется со стяги-

ваемым к ней элементарным объемом тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями в этой точке для рассматриваемого упругого тела. Поэтому в ней оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p_n, \quad \tau_{n'} = \tau_n, \quad \tau_{n''} = \vartheta_n, \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_{m'} = \tau_m, \quad \tau_{m''} = \vartheta_m, \\ \sigma_l &= p_l, \quad \tau_{l'} = \tau_l, \quad \tau_{l''} = \vartheta_l.\end{aligned}\quad (1.5)$$

В этих равенствах $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l$ – нормальные напряжения на гранях пирамиды, $\tau_{n'}, \tau_{n''}, \tau_{m'}, \tau_{m''}, \tau_{l'}, \tau_{l''}$ – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (1.1), (1.2), (1.3). Компоненты тензора напряжений в вершине пирамиды в координатах x_1, x_2, x_3 упорядочим списком $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$. Для вычисления векторов напряжений на площадках, ориентированных ортами $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}$, в точке A используется формула Коши (например $\bar{P}_n = \bar{n} \cdot \mathbf{P}$, где \mathbf{P} – тензор напряжений). Проектируя векторы напряжений на направления ортов (1.1), (1.2), (1.3), приходим к системе девяти уравнений относительно шести компонент напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \sigma_{33} \cos^2 \psi + \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi + \\ + \sqrt{3} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \cos^2 \psi = p_n;\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{4} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \frac{3}{4} \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = \tau_n;\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{33} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{12} \sin \psi - \frac{1}{2} \sigma_{13} \sin \psi + \frac{1}{2} \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_n;\quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \sigma_{33} \cos^2 \psi + \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi - \\ - \sqrt{3} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \cos^2 \psi = p_m;\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{4} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \frac{3}{4} \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi - \\ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = \tau_m;\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{33} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{12} \sin \psi - \frac{1}{2} \sigma_{13} \sin \psi + \frac{1}{2} \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_m;\quad (1.11)$$

$$\sigma_{11} \sin^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi - \sigma_{12} \sin 2\psi = p_l;\quad (1.12)$$

$$\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{12} \cos 2\psi = \tau_l;\quad (1.13)$$

$$\sigma_{13} \sin \psi - \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_l.\quad (1.14)$$

Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрических параметров и заданной нагрузки) условий существования решения системы уравнений (1.6) – (1.14), и его построения. Условия существования решения образуют ограничения на параметры нагрузки, обеспечивающие корректность постановки рассматриваемой задачи механики. Решение системы уравнений (1.6) – (1.14) формирует задаваемые ограничения на компоненты напряжений в вершине пирамиды. В случае, когда количество таких ограничений окажется больше трех, рассматриваемая задача механики деформируемого тела становится неклассической.

1.2. Исследование системы уравнений (1.6) – (1.14)

Посредством эквивалентных преобразований уравнения (1.6) – (1.14) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает четыре уравнения относительно двух компонент напряжений σ_{13}, σ_{23} :

$$2\sqrt{3}\sigma_{13}\sin\psi\cos\psi + \sqrt{3}\sigma_{23}\cos^2\psi = p_n - p_m; \quad (1.15)$$

$$\sqrt{3}\sigma_{13}\cos 2\psi - \sqrt{3}\sigma_{23}\sin\psi\cos\psi = \tau_n - \tau_m; \quad (1.16)$$

$$-\sigma_{13}\sin\psi + \sigma_{23}\cos\psi = \vartheta_n - \vartheta_m; \quad (1.17)$$

и (1.14)
$$\sigma_{13}\sin\psi - \sigma_{23}\cos\psi = \vartheta_l.$$

Вторая система состоит из пяти уравнений относительно четырех компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$:

$$2\sigma_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos^2\psi + \frac{3}{2}\sigma_{33}\cos^2\psi + \sigma_{12}\sin 2\psi = p_n + p_m; \quad (1.18)$$

$$\sigma_{11}\sin 2\psi - \frac{1}{4}\sigma_{22}\sin 2\psi - \frac{3}{4}\sigma_{33}\sin 2\psi + \sigma_{12}\cos 2\psi = \tau_n + \tau_m; \quad (1.19)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{33}\cos\psi + \sqrt{3}\sigma_{12}\sin\psi = \vartheta_n - \vartheta_m; \quad (1.20)$$

и (1.12), (1.13)
$$\sigma_{11}\sin^2\psi + \sigma_{22}\cos^2\psi - \sigma_{12}\sin 2\psi = p_l,$$

$$\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{12}\cos 2\psi = \tau_l.$$

Изучим систему уравнений (1.15) – (1.17) и (1.14). Ранг этой системы равен двум. Чтобы она была совместна, ранг расширенной матрицы также должен равняться двум. Это условие приводит к двум ограничениям на компоненты вектора нагрузки

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l = 0; \quad (1.21)$$

$$(p_n - p_m)(1 - 3\sin^2\psi) - 3(\tau_n - \tau_m)\cos\psi\sin\psi - \sqrt{3}(\vartheta_n + \vartheta_m)\cos\psi = 0. \quad (1.22)$$

При выполнении ограничений (1.21), (1.22) компоненты σ_{13}, σ_{23} тензора напряжений имеют значения

$$\sigma_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}[(p_n - p_m)t_g\psi + (\tau_n - \tau_m)]; \quad (1.23)$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{\sqrt{3}}[(p_n - p_m)(1 - t_g^2\psi) - 2(\tau_n - \tau_m)t_g\psi]. \quad (1.24)$$

Обратимся к системе уравнений (1.18)–(1.20) и (1.12), (1.13). Ранг матрицы этой системы равен четырем. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен четырем. Это требование приводит к еще одному ограничению на нагрузку:

$$(p_n + p_m - 2p_l)(3\sin^2 \psi - 1) + 3(\tau_n + \tau_m - 2\tau_l)\cos \psi \sin \psi - \sqrt{3}(\vartheta_n - \vartheta_m)\cos \psi = 0. \quad (1.25)$$

При выполнении условия (1.25) рассматриваемая система имеет решение

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{18}(p_n + p_m)(\operatorname{ctg}^2 \psi - 8) + \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)\operatorname{ctg} \psi - \frac{1}{6\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{\cos \psi}{\sin^2 \psi} + \frac{1}{9}p_l\frac{1}{\sin^2 \psi}; \quad (1.26)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{36}(p_n + p_m)\left(\frac{1 + 9\cos 2\psi}{\cos^2 \psi}\right) - \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)\operatorname{tg} \psi + \frac{5}{6\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\cos \psi} + \frac{4}{9}p_l\frac{1}{\cos^2 \psi}; \quad (1.27)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(p_n + p_m) - \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)\operatorname{tg} \psi - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\cos \psi}; \quad (1.28)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{9}(p_n + p_m - 2p_l)\frac{1}{\sin \psi \cos \psi} + \frac{1}{3\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\sin \psi}. \quad (1.29)$$

Если условия (1.21), (1.22), (1.25) не выполняются, рассматриваемая задача становится некорректной в том смысле, что она не может быть решена в рамках рассматриваемой теории напряжений.

Из приведенного исследования видно, что в случае, когда на гранях пирамиды задаются нагрузки, напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известны все шесть компонент тензора напряжений. Это означает, что при построении решения задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в вершине пирамиды необходимо согласовать его с этими шестью условиями. В обычной точке границы тела задаются три ограничения, следовательно, задача МДТТ для пирамиды является неклассической.

1.3. Частные случаи

1.3.1. Отсутствие нагрузки на боковых гранях тетраэдра

Ограничения (1.21), (1.22), (1.25) выполняются. В соответствии с формулами (1.23), (1.24), (1.26)–(1.29) все компоненты напряжений в вершине пирамиды обращаются в нуль.

1.3.2. Грани тетраэдра нагружены нормальными поверхностными нагрузками

В рассматриваемом случае $p_n \neq 0, p_m \neq 0, p_l \neq 0, \vartheta_n = 0, \vartheta_m = 0, \vartheta_l = 0$. Ограничение (1.21) выполняется, а ограничения (1.22), (1.25) приводятся к виду

$$(p_n - p_m)(1 - 3\sin^2 \psi) = 0; \quad (1.30)$$

$$(p_n + p_m - 2p_l)(1 - 3\sin^2 \psi) = 0. \quad (1.31)$$

Возможны варианты:

$$1) (1 - 3 \sin^2 \psi) = 0$$

В этом случае углы CAD, DAB, BAC при вершине пирамиды равны $\pi/2$ (например, вершина пирамиды является вершиной прямоугольного параллелепипеда). Напряжения в вершине вычисляются по формулам

$$\sigma_{13} = \frac{1}{\sqrt{6}}(p_n - p_m) \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(p_n - p_m) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{3}(p_n + p_m + p_l),$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{6}(p_n + p_m + 4p_l), \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2}(p_n + p_m), \quad \sigma_{12} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(p_n + p_m - 2p_l). \quad (1.32)$$

$$2) (1 - 3 \sin^2 \psi) \neq 0$$

Из равенств (1.30), (1.31) следует, что в данном случае нагрузка должна удовлетворять условию

$$p_n = p_m = p_l = p. \quad (1.33)$$

Напряженное состояние в вершине пирамиды описывается равенствами

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (1.34)$$

Это решение согласуется с хорошо известным решением о напряженном состоянии тела, нагруженного по всей поверхности равномерным давлением.

1.3.3. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l$

Ограничения (1.21), (1.22), (1.25) принимают вид

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l = 0, \quad \vartheta_n + \vartheta_m = 0, \quad \vartheta_n - \vartheta_m = 0. \quad (1.35)$$

Равенства (1.35) совместны лишь при условии, когда все компоненты нагрузки обращаются в нуль. Следовательно, в случае отличных от нуля параметров нагрузки $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l$ в рамках механики деформируемого твердого тела данная задача корректно не может быть поставлена.

1.3.4. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями τ_n, τ_m, τ_l

Ограничения на компоненты нагрузки приводятся к двум равенствам

$$\tau_n - \tau_m = 0, \quad \tau_n + \tau_m - 2\tau_l = 0, \quad (1.36)$$

из которых следует, что нагрузка должна удовлетворять условиям

$$\tau_n = \tau_m = \tau_l = \tau. \quad (1.37)$$

При выполнении ограничений (1.37) напряжения в вершине пирамиды имеют значения

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{ctg} \psi, \quad \sigma_{22} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (1.38)$$

2. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершине правильной четырехугольной пирамиды

2.1. Постановка задачи

Рассматривается деформируемое твердое тело, содержащее конструктивный элемент в виде части объема правильной четырехугольной пирамиды. Вблизи вершины G строится ее виртуальное основание – квадрат $ABCD$ (рис. 2). Угол между высотой пирамиды и высотой боковой грани обозначается через ψ . С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат O, x_1, x_2, x_3 . Начало координат (т. O) совпадает с центром основания пирамиды, а оси x_1, x_2 направляются по его диагоналям. Базисные векторы введенной системы координат обозначаются \bar{e}_i ($i = 1, 2, 3$).

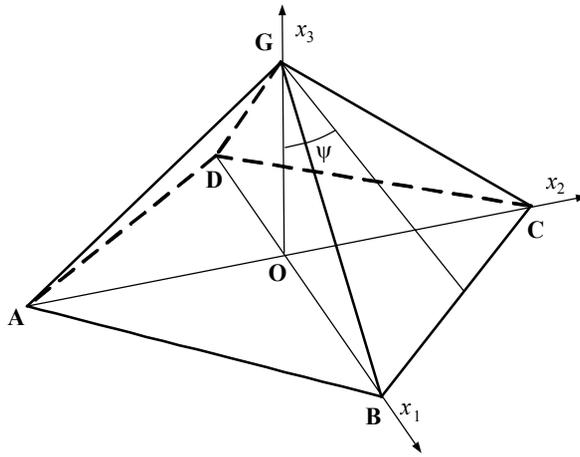


Рис. 2. Часть правильной четырехугольной пирамиды вблизи вершины
Fig. 2. Part of a regular quadrangular pyramid near the vertex

На боковых гранях пирамиды вводятся левоориентированные ортонормированные тройки векторов:

на грани BCG:

$$\bar{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3,$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2; \quad (2.1)$$

на грани CDG:

$$\bar{m} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3,$$

$$\bar{\xi}_m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2; \quad (2.2)$$

на грани DAG:

$$\begin{aligned}\bar{l} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_l &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_l = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2;\end{aligned}\quad (2.3)$$

на грани ABG:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_k &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины G треугольника, образующего грань. Вблизи вершины G поперхностную нагрузку на гранях пирамиды представим разложениями по базисам (2.1) – (2.4)

$$\begin{aligned}\bar{P}_n &= p_n \bar{n} + \tau_n \bar{\xi}_n + \vartheta_n \bar{\zeta}_n, \quad \bar{P}_m = p_m \bar{m} + \tau_m \bar{\xi}_m + \vartheta_m \bar{\zeta}_m, \\ \bar{P}_l &= p_l \bar{l} + \tau_l \bar{\xi}_l + \vartheta_l \bar{\zeta}_l, \quad \bar{P}_k = p_k \bar{k} + \tau_k \bar{\xi}_k + \vartheta_k \bar{\zeta}_k.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Здесь $\bar{P}_n, \bar{P}_m, \bar{P}_l, \bar{P}_k$ – задаваемые векторы напряжений соответственно на гранях BCG, CDG, DAG, ABG. Вершина пирамиды (особая точка) отождествляется со стягиваемым к ней элементарным объемом тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями в этой точке для рассматриваемого деформируемого тела. Поэтому в ней оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p_n, \quad \tau_{\xi_n} = \tau_n, \quad \tau_{\zeta_n} = \vartheta_n, \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_{\xi_m} = \tau_m, \quad \tau_{\zeta_m} = \vartheta_m, \\ \sigma_l &= p_l, \quad \tau_{\xi_l} = \tau_l, \quad \tau_{\zeta_l} = \vartheta_l, \quad \sigma_k = p_k, \quad \tau_{\xi_k} = \tau_k, \quad \tau_{\zeta_k} = \vartheta_k.\end{aligned}\quad (2.6)$$

В этих равенствах $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \sigma_k$ – нормальные напряжения на гранях пирамиды, $\tau_{\xi_n}, \tau_{\zeta_n}, \tau_{\xi_m}, \tau_{\zeta_m}, \tau_{\xi_l}, \tau_{\zeta_l}, \tau_{\xi_k}, \tau_{\zeta_k}$ – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (2.1)– (2.3). Компоненты тензора напряжений в вершине пирамиды в координатах x_1, x_2, x_3 упорядочим списком $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$. С использованием формулы Коши для вычисления векторов напряжений на гранях пирамиды условия (2.6) представляются двенадцатью уравнениями относительно шести компонент напряжений:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi + \\ + \sqrt{2} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi + \sqrt{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = p_n, \\ \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi - \\ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{23} \cos 2\psi = \tau_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sigma_{11} \cos \psi - \frac{1}{2}\sigma_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} \sin \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_n, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2}\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \cos^2 \psi - \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi - \\
& \quad - \sqrt{2}\sigma_{13} \sin \psi \cos \psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = p_m, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2}\sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{2}\sigma_{12} \sin \psi \cos \psi + \\
& \quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \cos 2\psi = \tau_m, \\
& -\frac{1}{4}\sigma_{11} \cos \psi + \frac{1}{2}\sigma_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_m, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2}\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos \psi - \\
& \quad - \sqrt{2}\sigma_{13} \cos \psi \sin \psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \cos \psi \sin \psi = p_l, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2}\sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi + \\
& \quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \cos 2\psi = \tau_l, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11} \cos \psi - \frac{1}{2}\sigma_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_l, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2}\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{12} \cos \psi + \\
& \quad + \sqrt{2}\sigma_{13} \cos \psi \sin \psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \cos \psi \sin \psi = p_k, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2}\sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi - \\
& \quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \cos 2\psi = \tau_k, \\
& -\frac{1}{2}\sigma_{11} \cos \psi + \frac{1}{2}\sigma_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} \sin \psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_k.
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрических параметров и заданной нагрузки) условий существования решения системы уравнений (2.7) и его построения. Условия существования решения образуют ограничения на параметры нагрузки, обеспечивающие корректность постановки рассматриваемой задачи механики. Решение системы уравнений (2.7) формирует задаваемые ограничения на компоненты напряжений в вершине пирамиды. В случае, когда количество таких ограничений окажется больше трех, задача механики деформируемого тела для рассматриваемого тела становится неклассической.

2.2. Исследование системы уравнений (2.7)

Посредством эквивалентных преобразований уравнения (2.7) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает шесть уравнений относительно четырех компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \cos^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi + 2\sigma_{12} \cos^2 \psi &= p_n + p_l, \\ \sigma_{11} \cos^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi - 2\sigma_{12} \cos^2 \psi &= p_m + p_k, \\ \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + 2\sigma_{12} \sin \psi \cos \psi &= \tau_n + \tau_l, \\ \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{33} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{12} \sin \psi \cos \psi &= \tau_m + \tau_k, \\ \sigma_{11} \cos \psi - \sigma_{22} \cos \psi &= \vartheta_n + \vartheta_l, \\ -\sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{22} \cos \psi &= \vartheta_m + \vartheta_k.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Вторая система состоит из шести уравнений относительно двух компонент напряжений σ_{13}, σ_{23}

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sigma_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2}\sigma_{23} \sin 2\psi &= p_n - p_l, \quad \sqrt{2}\sigma_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \cos 2\psi = \tau_m - \tau_k, \\ -\sqrt{2}\sigma_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2}\sigma_{23} \sin 2\psi &= p_m - p_k, \quad \sqrt{2}\sigma_{13} \sin \psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_n - \vartheta_l, \\ -\sqrt{2}\sigma_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \cos 2\psi &= \tau_n - \tau_l, \quad \sqrt{2}\sigma_{13} \sin \psi + \sqrt{2}\sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_m - \vartheta_k.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Изучим систему уравнений (2.8). При изменении угла ψ в интервале $0 < \psi < \pi/2$ ранг этой системы равен четырем. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен четырем. Это требование приводит к двум ограничениям на нагрузку

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l + \vartheta_k = 0, \quad (2.10)$$

$$(p_m + p_k - p_n - p_l) \sin \psi + (\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k) \cos \psi = 0. \quad (2.11)$$

При выполнении ограничений (2.10), (2.11) уравнения (2.8) имеют решение

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{4 \cos^2 \psi} [(p_n + p_l) \cos 2\psi + (p_m + p_k) + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi + 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi], \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{4 \cos^2 \psi} [(p_n + p_l) \cos 2\psi + (p_m + p_k) + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi - 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi], \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2} [p_n + p_l - (\tau_n + \tau_l) \operatorname{ctg} \psi], \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{4 \cos^2 \psi} [p_n + p_l - p_m - p_k]\end{aligned}\quad (2.12)$$

Обратимся к системе уравнений (2.9). Ранг матрицы этой системы равен двум. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен двум. Это требование накладывает еще четыре ограничения на компоненты нагрузки:

$$\begin{aligned}(p_n - p_l) \cos 2\psi + (\tau_n - \tau_l) \sin 2\psi &= 0, \quad (p_m - p_k) \cos 2\psi + (\tau_m - \tau_k) \sin 2\psi = 0, \\ (p_m - p_k) + 2(\vartheta_n - \vartheta_l) \cos \psi &= 0, \quad -(p_n - p_l) + 2(\vartheta_m - \vartheta_k) \cos \psi = 0.\end{aligned}\quad (2.13)$$

При выполнении условия (2.13) уравнения (2.9) имеют решение

$$\sigma_{13} = \frac{\sqrt{2}}{4 \sin 2\psi} [p_n - p_l - p_m + p_k], \quad \sigma_{23} = \frac{\sqrt{2}}{4 \sin 2\psi} [p_n - p_l + p_m - p_k]. \quad (2.14)$$

Из приведенного исследования видно, что в случае, когда на гранях пирамиды задаются нагрузки, согласованные с ограничениями (2.10), (2.11), (2.13), напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известны все шесть компонент тензора напряжений. Это означает, что при построении решения задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в вершине пирамиды необходимо согласовать его с этими шестью условиями. В обычной точке границы тела задаются три ограничения. Следовательно, задача МДТТ для пирамиды является неклассической. В случае, когда нагрузка, приложенная к граням пирамиды в ее вершине, не согласуется с условиями (2.10), (2.11), (2.13), компоненты напряжений в особой точке оказываются несовместными с такой нагрузкой. Поэтому задача МДТТ оказывается некорректной.

2.3. Частные случаи

2.3.1. Отсутствие нагрузки на боковых гранях пирамиды

В данном случае все компоненты векторов напряжений (2.5) в вершине пирамиды обращаются в нуль. Ограничения (2.10), (2.11), (2.13) выполняются. В соответствии с формулами (2.12), (2.14) все шесть компонент тензора напряжений в вершине равны нулю. Постановка задачи механики деформируемого твердого тела с рассматриваемой особенностью должна быть неклассической.

2.3.2. Грани пирамиды нагружены нормальными поверхностными нагрузками

В рассматриваемом случае отличны от нуля компоненты $p_n \neq 0$, $p_m \neq 0$, $p_l \neq 0$, $p_k \neq 0$ векторов нагрузки (2.5). Ограничения (2.10), (2.11), (2.13) приводятся к виду

$$p_n = p_m = p_l = p_k = p. \quad (2.15)$$

Напряжения в вершине находим по формулам (2.12), (2.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} &= p, \\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Замечание 1. Решение (2.16) согласуется с известным аналитическим решением о напряженном состоянии упругого тела, нагруженного по всем поверхностям давлением p .

Замечание 2. Решение (2.16) при нагрузке (2.15) в вершине пирамиды может быть получено методом сечений.

2.3.3. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l, \vartheta_k$

В этом случае ограничения (2.10) принимают вид

$$\vartheta_n = \vartheta_l = \vartheta, \quad \vartheta_m = \vartheta_k = -\vartheta. \quad (2.17)$$

При выполнении условий (2.17) напряжения в вершине находятся по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\vartheta}{\cos \psi}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\vartheta}{\cos \psi}, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (2.18)$$

Рассматриваемый случай отвечает кручению пирамиды усилиями, приложенными в вершине. Напряжения σ_{11} и σ_{22} неограниченно возрастают, если угол ψ стремится к значению $\pi/2$. Это связано с тем, что площади сечений, на которых действуют эти напряжения, стремятся к нулю. Решение (2.18) получается и с использованием метода сечений.

2.3.4. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\tau_n, \tau_m, \tau_l, \tau_k$

Ограничения на компоненты нагрузки (2.10), (2.11), (2.13) приводятся к двум равенствам

$$\tau_n = \tau_m = \tau_l = \tau_k = 0. \quad (2.19)$$

Если равенства (2.19) выполняются, напряжения в вершине имеют значения

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{22} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{ctg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (2.20)$$

При стремлении ψ к нулю напряжение σ_{33} неограниченно возрастает. Также ведут себя напряжения σ_{11}, σ_{22} при стремлении ψ к $\pi/2$. Это объясняется тем, что площади, на которых действуют эти напряжения, при указанных условиях стремятся к нулю, в то время как площади, на которых приложена нагрузка, остаются конечными. Решение (2.20) согласуется с решением, получаемым методом сечений.

Заключение

Общепринятое исследователями представление о точке сплошной среды в виде стягиваемого к ней элементарного объема распространяется на особую точку – вершину многогранника. Компоненты напряжений в вершине многогранника отождествляются с напряжениями в содержащем ее элементарном объеме тела. В результате анализа напряженного состояния такого элементарного объема:

- получены формулы для вычисления всех компонентов тензора напряжений в вершине многогранника;
- установлено, что задачи механики для тел, содержащих особые точки в виде многогранников, являются неклассическими;
- сформулированы условия на компоненты векторов нагрузки, обеспечивающие корректность постановок рассматриваемых задач.

Приведенные результаты найдут применение в изучении напряженного состояния деформируемых тел с особыми точками в виде вершин многогранников, в частности, при исследовании взаимодействия инденторов Берковича и Виккерса с образцами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. P. 526–528.
2. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. 1967. № 1. С. 178–186.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
4. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.

5. *Bogy D.B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // *Trans. ASME. Ser. E.* 1971. V. 38. No. 2. P. 377–386.
6. *Cook T.S., Erdogan F.* Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface // *Int. J. Eng. Sci.* 1972. V. 10. No. 8. P. 677–696.
7. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // *ДАН СССР.* 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
8. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
9. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
10. *Шемякин Е.И.* О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // *Докл. АН.* 1996. Т. 347. № 3. С. 342–345.
11. *Hideo Koguchi, Takashi Muramoto.* The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints // *Int. J. Solids and Structures.* 2000. V. 37(35). P. 4737–4762. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00159-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00159-6).
12. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *Int. J. of Solid and Structures.* 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
13. *Shannon S., Peron V. and Yosibash Z.* Singular asymptotic solution along an elliptical edge for the Laplace equation in 3-D // *Engineering Fracture Mechanics.* 2015. No. 134. P. 174–185.
14. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
15. *Shannon S., Peron V. and Yosibash Z.* The Laplace equation in 3-D domains with cracks: Dual singularities with log terms and extraction of corresponding edge flux intensity functions // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2016. V. 34. P. 4951–4963.
16. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // *Experimental Mechanics.* 2004. V. 44. No. 6. P. 616–621.
17. *Christian Mittelstedt, Wilfried Becker.* Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method // *Int. J. Solids and Structures.* 2006. V. 43(10). P. 2868–2903. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059.
18. *Yongwoo Lee, Insu Jeon, Seyoung Im.* The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite // *Int. J. Solids and Structures.* 2006. V. 43(9). P. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
19. *Paggi M., Carpinteri A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Mech. Rev.* 2008. V. 61. 22 p. DOI: 10.1115/1.2885134.
20. *Zhixue Wu.* A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // *Engineering Fracture Mechanics.* 2005. V. 73(7). P. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010.
21. *Hideo Koguchi, Joviano Antonio da Costa.* Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // *Int. J. Solids and Structures.* 2010. V. 47. P. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
22. *Коваленко М.Д., Галаджиев С.В., Гоголева О.С., Трубников Д.В.* Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2011. Т. 17. № 1. С. 53–60.
23. *Андреев А.В.* Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* 2013. № 1. С. 5–30.
24. *Рязанцева Е.А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Липецк, 2015. 215 с.

25. Федоров А.Ю. Исследование и оптимизация напряженного состояния в окрестности особых точек упругих тел : дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Пермь, 2016. 157 с.
26. Xu W., Tong Z., Leung, A.Y.T., Xu X., Zhou Z. Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending // *Engineering Fracture Mechanics*. 2016. V. 168. P. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.09.009.
27. He Z., Kotousov A. On Evaluation of Stress Intensity Factor from In-Plane and Transverse Surface Displacements // *Experimental Mechanics*. 2016. V. 56(8). P. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
28. Dimitrov A., Andra H., Schnack E. Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3D-elasticity // *Int. J. Num. Meth. Engng*. 2001. V. 52(8). P. 805–827.
29. Apel T., Mehrmann V., Watkins D. Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*. 2002. No. 191. P. 4459–4473.
30. Ковалев Б.Д. Формирование Эйлеровой гидродинамики // *Исследования по истории механики: сб. статей*. М.: Наука, 1983. С. 146–167.
31. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 1(27). С. 95–109.
32. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины составного клина с жестко заземленными образующими // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 3. С. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
33. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // *Latin American J. Solids and Structures*. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
34. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504.
35. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
36. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 52. С. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/52/9.

Статья поступила 22.04.2018 г.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) STRESS COMPONENTS AND LOADING RESTRICTIONS AT THE VERTICES OF REGULAR TRIANGULAR AND QUADRANGULAR PYRAMIDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56 pp. 102–119

DOI 10.17223/19988621/56/9

Keywords: polyhedron, singular points, singularity, elementary volume, non-classical problems.

A special point of structural element (the vertex of a polyhedron) is considered as an ordinary point of deformable body representing an infinitely small particle obtained by contracting elementary volume to a point. Using this concept, the stress state at the vertices of regular triangular and quadrangular pyramids is studied in the case of a surface loading of the lateral faces of pyramids. It is shown that the stress state at the vertices of polyhedra is fully known for any loading. This fact leads to a non-classical formulation of the problem of solid mechanics for such structural elements. The conditions for load vector components are proposed, which provide the correct problem statements within the solid mechanics. The particular cases of the loading of

considered structural elements are introduced. The obtained solutions are found to be in a good agreement with known analytical results.

The reported results will find application in the formulation of solid mechanics problems containing vertices (recesses) in the shape of polyhedra, in particular, when studying the interaction of the Berkovich and Vickers indenters with samples.

PESTRENIN Valery Mihaylovich (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

PESTRENINA Irena Vladimirovna (Candidate of Engineering Sciences, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

LANDIK Lidia Vladimirovna (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

REFERENCES

1. Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. *J. App. Mech.* 19. pp. 526–528.
2. Aksentyan O.K. (1967) Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra [Features of the stress-strain state of plate in the vicinity of the rib]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1. pp. 178–186.
3. Ufyand Ya.S. (1967) *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in the problems of the theory of elasticity]. Moscow: Izd. AN SSSR.
4. Kondrat'ev V.A. (1967) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points]. *Tr. Mosk. Mat. Obs.* 16. pp. 209–292.
5. Bogy D.B. (1971) Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *J. Appl. Mech.* 38(2). pp. 377–386. DOI:10.1115/1.3408786.
6. Cook T.S., Erdogan F. (1972) Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. *Int. J. Eng. Sci.* 10(8). pp. 677–697. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90063-8.
7. Maz'ya V.G., Plamenevskiy B.A. (1976) O koeffitsientakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach vblizi rebra [On the coefficients in the asymptotics of the solutions of elliptic boundary value problems near the edge]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 229(1). pp. 33–36.
8. Parton V.Z., Perlin P.I. (1981) *Metody matematicheskoy teorii uprugosti* [Methods of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
9. Chobanyan K.S. (1987) *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stresses in the composite elastic bodies]. Yerevan: Izd-vo AN ArmSSR.
10. Shemyakin E.I. (1996) O kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya oblastey s uglovymi tochkami (ploskaya deformatsiya) [On the boundary-value problems of the theory of elasticity for the domains with angular points (plane deformation)]. *Dokl. Akad. Nauk.* 347(3). pp. 342–345.
11. Koguchi H., Muramoto T. (2000) The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints. *Int. J. of Solid and Structures.* 37(35). pp. 4737–4762. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00159-6.
12. Barut A., Guven I., Madenci E. (2001) Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *Int. J. of Solid and Structures.* 38(50-51). pp. 9077–9109. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00206-2.
13. Shannon S., Peron V., Yosibash Z. (2015) Singular asymptotic solution along an elliptical edge for the Laplace equation in 3-D. *Engineering Fracture Mechanics.* 134. pp. 174–185. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.12.018.
14. Sinclair G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 251–298. DOI: 10.1115/1.1762503.
15. Shannon S., Peron V., Yosibash Z. (2016) The Laplace equation in 3D domains with cracks: dual singularities with log terms and extraction of corresponding edge flux intensity functions. *Math. Methods in the Applied Sciences.* 34. pp. 4951–4963. DOI: 10.1002/mma.3562.

16. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. (2004) Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis. *Experimental mechanics*. 44(6). pp. 616–621. DOI: 10.1007/BF02428251.
17. Mittelstedt C., Becker W. (2006) Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method. *Int. J. of Solid and Structures*. 43(10). pp. 2868–2903. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059.
18. Lee Y., Jeon I., Im S. (2006) The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite. *Int. J. of Solid and Structures*. 43(9). pp. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
19. Paggi M., Carpinteri A. (2008) On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.* 61(2). 020801. DOI: 10.1115/1.2885134.
20. Wu Z. (2005) A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity. *Engineering Fracture Mechanics*. 73(7). pp. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.10.010.
21. Koguchi H., Joviano Antonio da Costa (2010) Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface. *Int. J. of Solid and Structures*. 47(22-23). pp. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
22. Kovalenko M.D., Galadzhiev S.V., Gogoleva O.S., Trubnikov D.V. (2011) Osobennosti napryazhennogo sostoyaniya v konechnykh oblastiakh vblizi uglovykh tochek granitsy [Features of the stress state for finite regions near to angular points of a boundary]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 17(1). pp. 53–60.
23. Andreev A.V. (2013) Superpozitsiya stepenno-logarifmicheskikh i stepennykh singulyarnykh resheniy v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Superposition of power-logarithmic and power singular solutions in two-dimensional elasticity problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 5–30.
24. Ryazantseva E.A. (2015) *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera* [The method of boundary states in problems of the theory of elasticity with singularities of physical and geometric nature]. Dissertation. Lipetsk.
25. Fedorov A.Yu. (2016) *Issledovanie i optimizatsiya napryazhennogo sostoyaniya v okrestnosti osobykh tochek uprugikh tel* [Investigation and optimization of the stress state in the vicinity of singular points of the elastic bodies]. Dissertation. Perm.
26. Xu W., Tong Z., Leung, A.Y.T., Xu X., Zhou Z. (2016) Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending. *Engineering Fracture Mechanics*. 168A. pp. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.09.009.
27. He Z., Koutosov A. (2016) On evaluation of stress intensity factor from in-plane and transverse surface displacements. *Experimental Mechanics*. 56 (8). pp. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
28. Dimitrov A., Andra H., Schnack E. (2001) Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3D-elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng*. 52(8). pp. 805–827. DOI: 10.1002/nme.230.
29. Apel T., Mehrmann V., Watkins D. (2002) Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191(39-40). pp. 4459–4473. DOI: 10.1016/S0045-7825(02)00390-0.
30. Kovalev B.D. (1983) *Formirovanie Eylerovoy gidrodinamiki* [Formation of Euler hydrodynamics]. Moscow: Nauka. pp. 146–167.
31. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2014) Nestandartnye zadachi dlya odnorodnykh elementov konstruksiy s osobennostyami v vide klin'ev v usloviyakh ploskoy zadachi [Non-standard problems of homogeneous structural elements with wedge shape features in the plane case]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 27(1). pp. 95–109.

32. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2016) Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti verkhiny sostavnogo klina s zhestko zashchemlennymi obrazuyushchimi [Stress-strain state near the wedge top with rigid fastening of sides]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
33. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
34. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
35. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
36. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Ogranicheniya na parametry napryazhennoy sostoyaniya v vershine krugovogo konusa [Restrictions on stress components in the top of round cone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/52/9.

УДК 533.69
DOI 10.17223/19988621/56/10

К.А. Степанов, С.В. Тимченко

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА ОПТИМИЗАЦИИ КРЫЛА БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА К ЕГО НАЧАЛЬНОЙ ФОРМЕ¹

Рассматривается новая технология оптимального аэродинамического проектирования трехмерного крыла беспилотного летательного аппарата среднего класса. Оптимальная форма крыла, обладающая минимальным полным сопротивлением при фиксированном коэффициенте подъемной силы и отвечающая заданным геометрическим и аэродинамическим ограничениям, определяется при помощи эвристического метода глобального поиска на основе численных решений полных уравнений Навье – Стокса. Предложенный подход позволяет обеспечить снижение сопротивления крыла в зоне крейсерского режима полета и позволяет значительно снизить материальные и временные затраты на аэродинамическое проектирование летательного аппарата. Показано, что рассматриваемый метод оптимизации устойчив по отношению к начальным данным (форме начального крыла).

Ключевые слова: *оптимальное проектирование, полные уравнения Навье – Стокса, нелинейные ограничения, коэффициент сопротивления, момент тангажа, устойчивость процесса оптимизации.*

При разработке технологии оптимального аэродинамического проектирования одним из важнейших вопросов является вопрос о том, насколько результат применения такой технологии проектирования зависит от начальной формы оптимизируемой поверхности.

С практической точки зрения очень важно, чтобы технология давала хорошие результаты не только в случае, когда начальная геометрия обладает приемлемыми аэродинамическими характеристиками, но и в случае, когда исходная форма в точках проектирования имеет высокий уровень полного сопротивления.

С математической точки зрения возникает вопрос об устойчивости алгоритма автоматического оптимального проектирования к начальной форме. Иными словами, если мы проведем две оптимизации с одинаковыми условиями и ограничениями, но для двух сильно отличающихся друг от друга начальных геометрий, то насколько будут отличаться друг от друга две полученные оптимальные геометрии?

В связи с этим были проведены исследования устойчивости предложенной нами ранее технологии автоматического оптимального проектирования [1, 2] к начальной форме изолированного трехмерного крыла беспилотного летательного аппарата.

Были рассмотрены 2 варианта задания начальных форм крыла. В 1-м варианте секционные профили совпадали с исходной геометрией беспилотного летательного аппарата среднего класса [1].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке прикладных научных исследований Министерства образования и науки РФ: уникальный идентификатор работ RFMEFI57617X0094.

Во втором варианте начальная геометрия была намеренно выбрана абсолютно непригодной с аэродинамической точки зрения.

В частности, вместо суперкритического профиля на 2-й промежуточной секции крыла был поставлен симметричный профиль, в котором верхняя поверхность совпадала с верхней поверхностью исходного профиля. Дополнительно полученный симметричный профиль был откалиброван, чтобы он отвечал всем требуемым ограничениям: имел максимальную относительную толщину 19.2% и относительную толщину 16.0 % (при $X/C = 0.16$) и 11.0 % (при $X/C = 0.65$).

Сравнение данных начальных профилей для двух вариантов оптимизации представлено на рис. 1 (линии 1 и 3).

Данная технология проектирования основана на системном применении:

- Математических моделей высокого уровня достоверности
- Численных методов высокого порядка точности решения осредненных по числу Рейнольдса уравнений Навье – Стокса на структурированных вычислительных сетках
- Вычислительно-эффективных глобальных методов оптимального поиска с учетом нелинейных ограничений на оптимальное решение различного типа
- Глобальной аппроксимации оптимизируемых поверхностей летательного аппарата на основе кривых Безье и поверхностей Безье
- Параллельных вычислений с высоким уровнем параллельной эффективности, позволяющих использовать наилучшим образом вычислительные мощности многопроцессорных суперкомпьютерных вычислительных кластеров

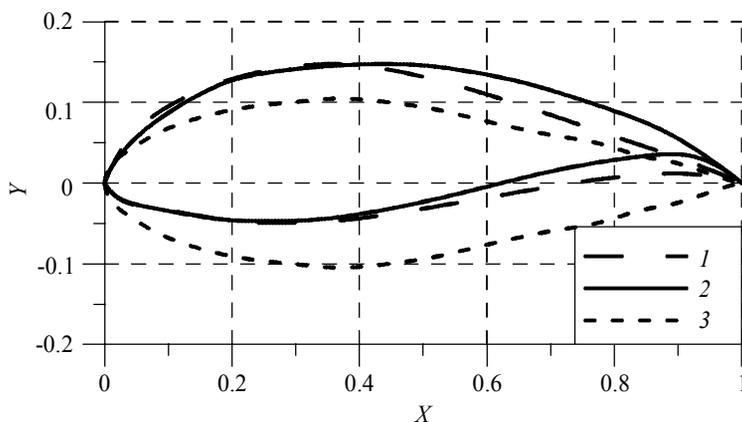


Рис. 1. Сравнение профилей средней секции базового (1), оптимального (2) и базового «симметричного» (3) крыла
Fig. 1. Comparison of the middle section profiles for the original (1), optimal (2), and original “symmetric” (3) wings

В данной работе новая технология [1] применена для дальнейшего исследования процесса оптимального аэродинамического проектирования беспилотного летательного аппарата (БПЛА) самолетного типа среднего класса.

В результате, такой подход к аэродинамическому проектированию позволил:

- 1) сократить время цикла дизайна и число таких циклов (за счет эффективного использования вычислительных мощностей и суперкомпьютерных вычислительных технологий);

2) значительно уменьшить материальные затраты на дизайн (за счет сокращения количества персонала, занятого в проектировании и сокращения времени проектирования);

3) улучшить качество аэродинамического дизайна (за счет использования высокоточной математической модели для расчета основных аэродинамических характеристик);

4) уменьшить эксплуатационные расходы на БПЛА (за счет улучшения его аэродинамических характеристик).

1. Постановка задачи

С математической точки зрения задача аэродинамического проектирования может быть сформулирована как задача определения оптимальной формы летательного аппарата, которая:

- обладает минимально возможным сопротивлением на крейсерских режимах полета при заданном коэффициенте подъемной силы;

- обладает достаточным для необходимой грузоподъемности самолета коэффициентом подъемной силы на режиме взлета;

- отвечает заданным габаритным и аэродинамическим ограничениям.

Отметим, что используемая технология не имеет аналогов в мире, поскольку:

- расчет основной целевой функции (полного аэродинамического сопротивления C_x) базируется на численном решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса с использованием конечноразностной схемы повышенного порядка точности [3, 4];

- оптимальная форма ищется с использованием генетических алгоритмов [5–8], при этом количество учитываемых нелинейных ограничений на оптимальное решение произвольно [9];

- технология обладает высокой вычислительной эффективностью, позволяющей получать решение в сжатые сроки.

Прежде чем перейти к решению задачи оптимального аэродинамического проектирования БПЛА среднего класса, отметим, что такие аппараты имеют взлетную массу около 500 кг и массу полезной нагрузки около 100 кг. Поскольку типичная высота полета составляет 5–6 км, скорость – 150–200 км/ч, а C_y крейсерского полета составляет порядка 1.0–1.2, тогда при $V = 50$ м/с и $H = 5000$ м имеем $G/S = 80$ кг/м². Таким образом, при взлетной массе 500 кг площадь крыла должна составлять 5–6 м².

Основным требованием, определяющим эффективность БПЛА такого класса, является большая продолжительность полета. Типовое полетное задание состоит из подготовки к полету, взлета/набора высоты, крейсерского полета, снижения, посадки, причем практически всё полетное время занимает именно крейсерский режим.

При установившемся горизонтальном полете сила тяжести уравновешена подъемной силой Y , сопротивление X – тягой двигателя, при этом потребная мощность определяется как произведение сопротивления на скорость полета. Отсюда получаем, что потребная для полета мощность обратно пропорциональна величине $C_y^{3/2}/C_x$, так называемому планерному качеству. Соответственно для достижения максимальной продолжительности полета требуется увеличение данного параметра. Максимальный коэффициент подъемной силы крыла без механизации $C_y^{\max} \sim 1.7 - 1.8$, с учетом запаса по скорости сваливания 1.2 получаем, что $C_y^{\text{крей}}$ имеет порядок 1.18 – 1.25.

2. Результаты расчетов

Анализ секционных распределений давления в основной точке проектирования при $M = 0.20$, $C_Y = 1.20$, а также распределений давления при более высоком коэффициенте подъемной силы $C_Y = 1.50$ подтвердил предположение, что симметричный профиль в середине крыла абсолютно непригоден для данных условий обтекания. Об этом же говорит и значение коэффициента полного сопротивления в основной точке проектирования при $M = 0.20$, $C_Y = 1.20$, $C_X = 445.7$ каунта – рост более чем на 10 % по сравнению с 1-й формой начального крыла. На рис. 2. приведены распределения коэффициента давления C_P для двух начальных форм крыла в одном из сечений.

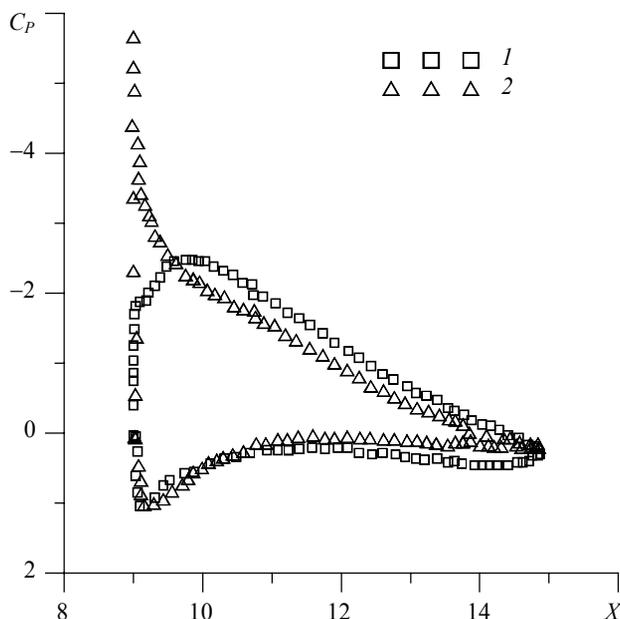


Рис. 2. Сравнение распределений давления в бортовом сечении $Z = 2.15$ м по размаху крыла при $C_Y = 1.50$ для $M = 0.20$ для базового (1) и «симметричного» (2) крыла

Fig. 2. Comparison of the pressure distributions in the cross section $Z = 2.15$ m over the wingspan at $C_Y = 1.50$ and $M = 0.20$ for the original (1) and “symmetric” (2) wings

Все это говорит о том, что с аэродинамической и геометрической точек зрения 2-й вариант начальной геометрии крыла находится очень далеко как от оптимального решения, так и от начальной формы крыла, предложенной в работе [1].

Перейдем теперь к сравнениям результатов этих двух оптимизаций. Для получения оптимального решения как для 1-го, так и для 2-го варианта задания начальной формы было необходимо 15 шагов. Соответствующая картина сходимости оптимизационного процесса приведена на рис. 3.

Результаты оптимизации оказались очень близкими и в широком диапазоне условий полета практически идентичными. В частности, в основной точке проектирования $M = 0.20$, $C_Y = 1.20$ сопротивление оптимального крыла для 1-го вари-

анта составило 376.4 аэродинамических каунта против 376.9 для 2-ого варианта задания формы начального крыла. Форма оптимального крыла представлена на рис. 1 (линия 2).

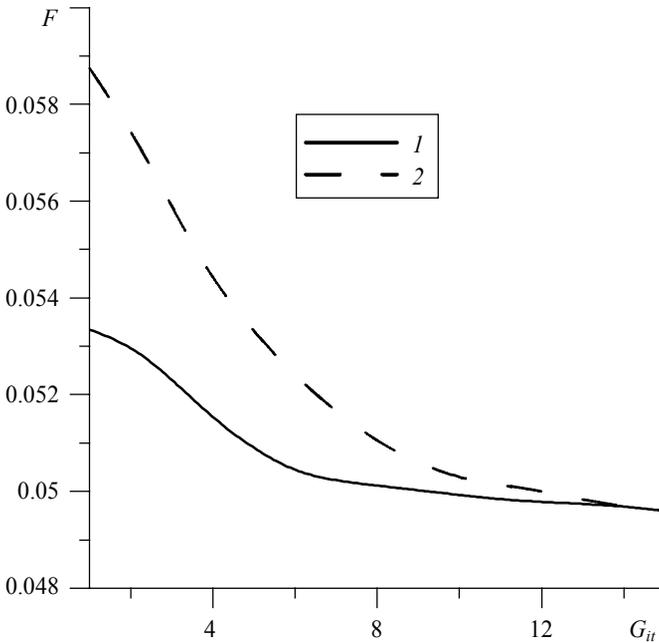


Рис. 3. Сравнение сходимости 1-го и 2-го вариантов оптимизации крыла БПЛА

Fig. 3. Comparison of the convergence of the 1st and 2nd variants of wing optimization for UAV (unmanned aerial vehicle)

Дополнительная информация о локальных характеристиках течения около оптимального крыла может быть получена из рис. 4, на котором приведены сравнения секционных распределений коэффициента давления C_p для начального и оптимального крыла для одного из сечений.

Из анализа сравнений соответствующих распределений давления между начальным и оптимальным крылом видно, что изменение формы крыла привело к благоприятному в аэродинамическом смысле перераспределению нагрузки по всему размаху крыла и значительному улучшению интегральных аэродинамических характеристик.

Это благоприятно отразилось на значении коэффициента сопротивления крыла при значении $C_y = 1.20$, причем сопротивление понизилось для достаточно большой окрестности основной точки проектирования как по числу Маха, так и по коэффициенту подъемной силы. Это означает, что улучшения, полученные при проектировании носят не локальный характер и устойчивы к малым изменениям условий полета, что является необходимым условием для практического использования этих результатов.

В заключение приведем сравнение поляр сопротивления для двух рассмотренных оптимальных крыльев (рис. 5), из которого видно незначительное влияние начального приближения на качество полученного решения.

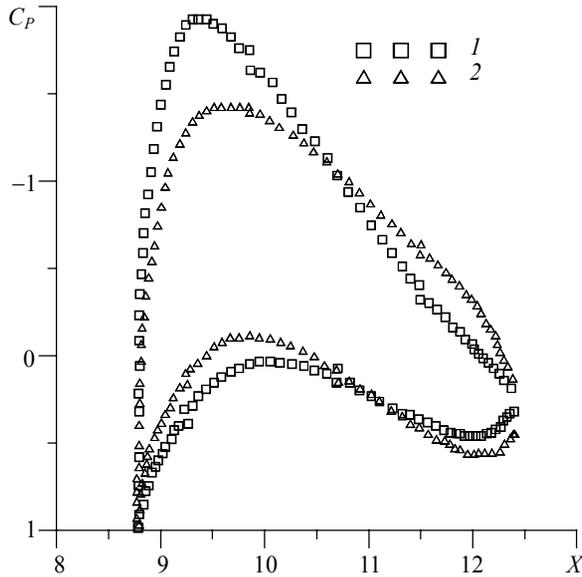


Рис. 4. Сравнение распределений давления в бортовом сечении $Z = 0.0$ м по размаху крыла при $C_Y = 1.20$ для $M = 0.20$ для базового (1) и оптимального (2) крыла

Fig. 4. Comparison of the pressure distributions in the cross section $Z = 0.0$ m over the wingspan at $C_Y = 1.20$ and $M = 0.20$ for the original (1) and optimal (2) wings

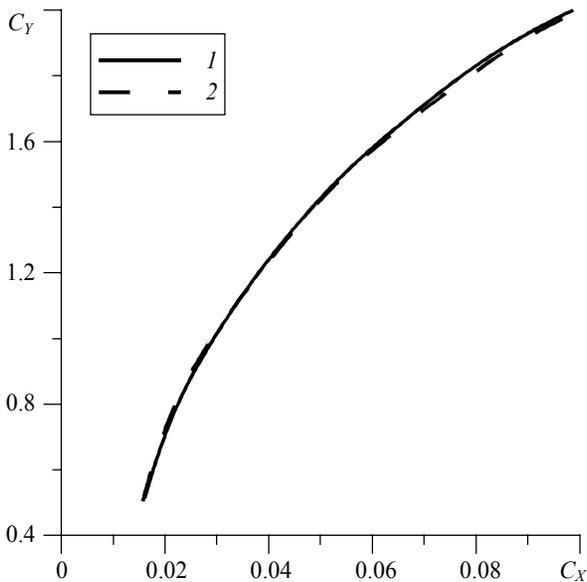


Рис. 5. Сравнение поляры сопротивления двух вариантов оптимизации крыла БПЛА для $M = 0.20$

Fig. 5. Comparison of the drag polars for two variants of UAV wing optimization at $M = 0.20$

Заключение

Таким образом, анализ полученных аэродинамических характеристик оптимальных крыльев беспилотного летательного аппарата среднего класса для 2 вариантов задания начальной формы крыла показывает, что предлагаемая технология оптимального аэродинамического проектирования является устойчивой к заданию начальной формы, поскольку

1. Оптимальные крылья обладают практически одним и тем же сопротивлением в основной точке проектирования $C_Y = 1.20$, $M = 0.20$ ($C_X = 376.4$ каунта и $C_X = 376.9$ каунта).

2. Формы оптимальных крыльев очень близки друг к другу.

3. Оптимальные крылья обладают очень близкими (практически идентичными) интегральными аэродинамическими характеристиками в широком диапазоне изменения условий полета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов К.А. Тимченко С.В. Аэродинамическое проектирование изолированного трехмерного крыла беспилотного летательного аппарата среднего класса на базе программного продукта нового поколения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 118–130.
2. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO // Source of the Document 52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA Science and Technology Forum and Exposition, SciTech 2014.
3. Epstein B, Averbuch A. and Yavneh I. An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // Journal of Computational Physics. 2001. V. 168. P. 316–328.
4. Epstein B., Peigin S.V. Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations // Int. J. CFD. 2004. V. 18. No. 3.
5. Пейгин С.В., Перiaux J., Тимченко С.В. Применение генетических алгоритмов для оптимизации формы тела по тепловому потоку // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 9. С. 111–122.
6. Казаков В.Ю., Пейгин С.В., Тимченко С.В. Оптимизация траектории входа в атмосферу земли по интегральному тепловому потоку // ЖПМТФ. 2000. Т. 41. No. 4. С. 112–121.
7. Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs. New York: Springer-Verlag, 1992, Artificial Intelligence.
8. Тимченко С.В. Параллельный генетический алгоритм для решения задач многокритериальной оптимизации // Ползуновский вестник. 2012. № 2/1. С. 103–107.
9. Орлов С.А., Пейгин С.В., Степанов К.А. Тимченко С.В. Эффективная реализация нелинейных ограничений при оптимизации трехмерных трансзвуковых крыльев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1. С. 72–81.

Статья поступила 25.10.2018 г.

Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2018) INVESTIGATION OF THE STABILITY OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE WING OPTIMIZING IN TERMS OF ITS INITIAL SHAPE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 120–127

DOI 10.17223/19988621/56/10

Keywords: optimal design, full Navier-Stokes equations, non-linear constraints, drag coefficient, pitch moment, stability of optimizing.

A new technology for optimal aerodynamic design of a three-dimensional wing of a middle-class unmanned aerial vehicle (UAV) is considered. An optimal wing shape, which is characterized by minimum drag at a fixed lift coefficient and meeting the specified geometric and

aerodynamic constraints, is determined using the heuristic global search method based on the numerical solutions of the full Navier-Stokes equations. The paper shows that the applied optimization method is stable with respect to the initial data (the initial wing shape). An analysis of the obtained aerodynamic characteristics of the optimum wings for a middle-class UAV in two variants of specifying the initial wing shape shows that the proposed technology of optimal aerodynamic design is resistant to the initial shape due to the following aspects: optimal wings are characterized by the same drag coefficient at the main design point; the shapes of optimal wings are very similar to each other; optimal wings have very close (almost identical) integral aerodynamic characteristics in a wide range of flight conditions.

THE WORK WAS CARRIED OUT WITH THE FINANCIAL SUPPORT OF APPLIED RESEARCH OF THE MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE RUSSIAN FEDERATION: THE UNIQUE IDENTIFIER OF THE WORK RFMEFI57617X0094.

STEPANOV Kirill Aleksandrovich (OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation). E-mail: kirill.stepanov.90@mail.ru

TIMCHENKO Sergey Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation). E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2018) Aerodynamicheskoe proektirovanie izolirovannogo trekhmernogo kryla bespilotnogo letatel'nogo apparata na baze programmnoy produkta novogo pokoleniya [Aerodynamic design for an isolated three-dimensional wing of an unmanned aerial vehicle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 118–130. DOI: 10.17223/19988621/54/10.
2. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. (2014) Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
3. Epstein B., Averbuch A., Yavneh I. (2001) An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*. 168(2). pp. 316–328. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
4. Epstein B., Peigin S.V. (2004) Application of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) approach to Navier-Stokes computations. *International Journal of CFD*. 18(3). pp. 289–293. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.
5. Peygin S.V., Periaux J., Timchenko S.V. (1998) Primenenie geneticheskikh algoritmov dlya optimizatsii formy tela po teplovomu potoku [Application of genetic algorithms in a body shape optimization in terms of a heat flux]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 10(9). pp. 111–122.
6. Kazakov V.Yu., Peygin S.V., Timchenko S.V. (2000) Optimizatsiya traektorii vkhoda v atmosferu zemli po integral'nomu teplovomu potoku [Optimization of the trajectory of the earth atmosphere entry according to the integral heat flux]. *Zhurnal prikladnoy matematiki i tekhnicheskoy fiziki – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 41(4). pp. 112–121.
7. Michalewicz Z. (1992) *Genetic algorithms + Data structures = Evolution programs*. New York: Springer-Verlag.
8. Timchenko S.V. (2012) Parallelnyy geneticheskyy algoritm dlya resheniya zadach mnogokriterial'noy optimizatsii [A parallel genetic algorithm for solving multicriterion optimization problems]. *Polzunovskiy vestnik*. 2(1). pp. 103–107.
9. Orlov S.A., Peygin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2015) Effektivnaya realizatsiya nelineynykh ogranicheniy pri optimizatsii trekhmernykh transzvukovykh kryl'ev [Effective implementation of nonlinear constraints in optimization of three-dimensional transonic wings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(33). pp. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕЛЬСКИХ Денис Сергеевич – аспирант кафедры фундаментальной математики и механики Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, г. Тюмень. E-mail: bedeser@yandex.ru

БОРОДИН Станислав Леонидович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории гидродинамики многофазных сред Тюменского филиала института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень. E-mail: borodin@ikz.ru

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: michael121@mail.ru

ГАВРИЛОВ Тиммо Александрович – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики факультета транспортных и энергетических систем Петербургского государственного университета путей сообщения, г. Санкт-Петербург. E-mail: gavrilovta@yandex.ru

КОЛЕСНИКОВ Геннадий Николаевич – доктор технических наук, заведующий кафедрой общетехнических дисциплин Института лесных, горных и строительных наук Петрозаводского государственного университета, Республика Карелия, г. Петрозаводск. E-mail: kolesnikovgn@yandex.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

КЫРОВ Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики Горно-Алтайского государственного университета. E-mail: kyrovVA@yandex.ru

ЛАНДИК Лидия Владимировна – инженер кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: LidiaLandik@gmail.com

ЛУН-ФУ Александр Викторович – главный инженер – первый заместитель генерального директора ООО «Газпром трансгаз Томск», аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: a.lunfu@gtt.gazprom.ru

МОИСЕЕВА Ксения Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

МУСАКАЕВ Наиль Габсалямович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории гидродинамики многофазных сред Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, профессор кафедры разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений Тюменского индустриального университета, г. Тюмень. E-mail: musakaev@ikz.ru

ПЕСТРЕНИН Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: PestreninVM@mail.ru

ПЕСТРЕНИНА Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: IPestrenina@gmail.com

СТЕПАНОВ Кирилл Александрович – специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва.
E-mail: kirill.stepanov.90@mail.ru

ТИМЧЕНКО Сергей Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, ведущий специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

ТОЖИБОЕВ Иброхимжон Тожалиевич – доцент Ферганского филиала Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммад аль-Хорезми, г. Фергана, Республика Узбекистан. E-mail: ibroxim@gmail.com

ХАСАНОВ Марат Камилевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и программирования Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак. E-mail: hasanovmk@mail.ru

ШИШКОВА Алёна Андреевна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: alshishkovatomsk@gmail.com

ЮНУСОВА Дилфуза Израилевна – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры математики и методики ее преподавания Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами, г. Ташкент, Республика Узбекистан. E-mail: dilfuzaisrailovna@gmail.com

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 12.12.2018. Выпуск в свет 21.12.2018.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.48. Уч.-изд. л. 11.74. Тираж 250 экз. Заказ № 32. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 3579.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru