УДК 519.17

ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА НА ДВОЙНОМ ЦИРКУЛЯНТЕ С РАЗНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ВЕРШИНАХ

А. М. Нажмиденова

Исследована структура функционального графа дискретной динамической системы, состоящей из двух циркулянтов $G_{n,k}$ с различной ориентацией и мультипликативным отображением на одном циркулянте и аддитивным на другом. Описаны неподвижные точки, выведено рекуррентное соотношение для числа неподвижных точек и получена асимптотика этого числа, а также описаны висячие вершины и их число для частного случая $k = 2$.

Ключевые слова: *генная сеть, дискретная модель, регуляторный контур, циркулянт, функциональный граф, циклы, неподвижные точки, висячие вершины.*

Работа посвящена анализу функционирования дискретной модели генной сети. Характерной особенностью организации генных сетей является способность к саморегулированию через регуляторные контуры с положительными и отрицательными обратными связями. Процесс перераспределения концентраций веществ в регуляторном контуре может быть описан дискретной моделью, а строение регуляторных контуров может быть сформулировано в терминах ориентированных графов. В данной работе моделью является граф-носитель, состоящий из двух циркулянтов $G_{n,k}$ [1–3] противоположной ориентации, соответствующие вершины которых попарно сопряжены. Вершины графа-носителя имеют веса $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ из конечного поля F_2, где x_i соответствуют вершинам первого циркулянта, а y_i — вершинам второго. Набор $\tilde{w} = (x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in F_2^{2n}$ назовем *состоянием системы.* В каждый момент времени состояние системы меняется и динамика его изменения определяется отображением

$$Func_{Mult,Add} : F_2^{2n} \to F_2^{2n},$$

где $Mult$ — мультипликативное отображение, действующее на вершинах первого циркулянта, и Add — аддитивное на вершинах второго, принимающие значения из F_2 в каждой вершине в зависимости от весов в тех k вершинах, дуги из которых входят в данную вершину.

Функциональным графом $G_{Mult,Add}$ называется орграф, вершинами которого являются наборы из F_2^{2n}, причём дуга из вершины $\tilde{w}$ идёт в вершину $\tilde{v}$ тогда и только тогда, когда $Func_{Mult,Add}(\tilde{w}) = \tilde{v}$.

Описаны неподвижные точки для произвольных n и k, а также выведено рекуррентное соотношение и асимптотика числа неподвижных точек.

Теорема 1. Число неподвижных точек S_n выражается рекуррентной формулой

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-k}. \qquad (1)$$

Для асимптотического поведения S_n справедливо

$$S_n \sim c_k R^n,$$

где c_k — константа, зависящая только от k, а $1 < R < 2$ — наибольший по модулю корень характеристического уравнения

$$\lambda^k - \lambda^{k-1} - 1 = 0$$

рекуррентного соотношения (1).

Для случая $k = 2$ доказана

Теорема 2. Число висячих вершин функционального графа равно $2^{2n} - 3^n$.

Получены необходимые и достаточные условия принадлежности набора циклу длины не более двух.

Теорема 3 (необходимое условие). В графе функционирования для цикла длины не более двух вида $(\alpha, \beta) \to (\gamma, \delta) \to (\alpha, \beta)$ выполнены условия $\gamma = \bar{\beta}$, $\delta = \bar{\alpha}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — наборы длины n.

Теорема 4 (достаточное условие). Если в наборе $\tilde{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1})$ для всех $i = 0, \ldots, n-1$ выполняются условия

1) если $x_i = 0$, то $y_{(i-1) \bmod n} = y_{(i+1) \bmod n} = 0$;
2) если $y_i = 1$, то $x_{(i-1) \bmod n} = x_{(i+1) \bmod n} = 1$,

и при этом $x_j = y_j$ для некоторого j, то $\tilde{x}$ принадлежит циклу длины два.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.* Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 206–212.
2. *Evdokimov A. A. and Kutumova E. O.* The discrete model of the gene networks regulatory loops with the threshold functions // Proc. 7th Int. Conf. on bioinformatics of genom regulation and structure. Novosibirsk, June 20–27, 2010. P. 155.
3. *Харари Ф.* Теория графов М.: Наука, 2003.

УДК 519.17

О Т-НЕПРИВОДИМЫХ РАСШИРЕНИЯХ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Д. Ю. Осипов

Рассматривается один из способов построения оптимального расширения графа — Т-неприводимого расширения (ТНР). Приводится способ построения всех неизоморфных ТНР для подкласса сверхстройных деревьев — равнолучевых звезд.

Ключевые слова: *граф, Т-неприводимое расширение, сверхстройные деревья, равнолучевые звезды.*

Все понятия и определения взяты из работы [1].

Определение 1. Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $(n + 1)$ вершинами, такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H.

Простейшим примером расширения графа является его тривиальное расширение — соединение с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется новая вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Возникает вопрос о получении такого расширения графа G, которое не содержит «лишних» ребер. Один из способов — конструкция минимального расширения графа [2], другой — его Т-неприводимого расширения [3].

Определение 2. Минимальным расширением графа G называется его расширение с минимальным количеством ребер.