УДК 164
DOI: 10.17223/1998863Х/45/11

К.А. Родин

КОНСТРУКТИВИЗМ В ЛОГИКЕ И МАТЕМАТИКЕ (ВИТГЕНШТЕЙН ПРОТИВ ГЁДЕЛЯ: НЕКОТОРЫЕ СОВРЕМЕННЫЕ ПРОЧТЕНИЯ)[1]

Рассматриваются некоторые современные интерпретации заметок Л. Витгенштейна о Гёделе (о первой теореме о неполноте) в контексте решающего для Витгенштейна в философии математики различия между алгоритмическим и конструктивным (метаматематическим) типом доказательства. В рамках недавнего прочтения Т. Ламперта демонстрируется возможность соотнести соответствующие заметки Витгенштейна непосредственно с доказательством первой теоремы о неполноте.
Ключевые слова: *Витгенштейн, первая теорема о неполноте, алгоритмическое доказательство, конструктивное доказательство, теория моделей, семантика.*

В последние годы вокруг заметок Л. Витгенштейна о Гёделе ведутся многочисленные споры. Дискуссия вышла за рамки историко-философского исследования и непосредственно затрагивает целый ряд проблем – смежных с доказательством первой теоремы о неполноте. После публикации в 1956 г. «Заметок по основаниям математики» (ЗОМ) [1] (Гёделю посвящены фрагменты RFM App. III и RFM Part 5, § 18–22) Крайзель и Бернайс приписали Витгенштейну тотальное непонимание Гёделя [2, 3]. Были и апологетические прочтения (см. работу Гудстейна [4]). На сегодняшний день почти все дружественные или враждебные интерпретации рассматривают заметки Витгенштейна безотносительно к математическому (чисто синтаксическому) доказательству первой теоремы о неполноте (заметки Витгенштейна якобы следует понимать в контексте семантических и философских следствий теоремы). Среди таких интерпретаций можно выделить историко-философские изыскания Флойд (доказательство недоказуемости рассматривается в контексте общей позиции Витгенштейна относительно доказательства невозможности определенных геометрических построений) [5]. Встречаются и попытки записать Витгенштейна в пионеры паранепротиворечивой логики (см.: [6–8]). Несомненно, семантические и общефилософские следствия теоремы имеют сегодня огромное значение (см.: [9]) и в контексте заметок Витгенштейна могут быть лучше поняты. В статье мы рассматриваем дружественное прочтение Витгенштейна Патнэмом и Флойд [10] (с учетом критических замечаний Т. Бейса [11]) (этому посвящены I и II части статьи) и новаторское прочтение Т. Ламперта [12] (III часть). Ламперт примечателен тем, что он первым предложил апологетическое прочтение Витгенштейна при условии соотнесения заметок непосредственно с доказательством первой теоремы о неполноте (здесь учитывается и подход Витгенштейна к алгоритмическому и метаматематическому (конструктивному) доказательству). В заключительной

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-18-359).

части мы коротко останавливаемся на различии двух избранных прочтений Витгенштейна и на общем контексте прохладного отношения Витгенштейна к Гёделю.

I. Дружественная интерпретация Х. Патнема и Д. Флойд основана на достаточно экстравагантном понимании небольшого отрывка из восьмого параграфа III приложения ЗОМ. Там Витгенштейн утверждает: если допустить (или пусть такой результат фактически получен) доказуемость ¬P (P – Гёделево предложение G: $\neg\exists y \mathrm{Proof}(y, \ulcorner G \urcorner)$), тогда придется отказаться от прочтения P через предложение русского языка «P недоказуемо». Х. Патнем и Д. Флойд понимают идею Витгенштейна так:

пусть доказательство ¬P фактически найдено,

предположим непротиворечивость системы PM,

тогда согласно первой теореме Гёделя о неполноте система PM оказывается ω-противоречивой. Следовательно, для системы PM не существует такой модели, где бы расширение для предиката, который мы прочитываем как «x – натуральное число», было бы изоморфно натуральным числам.

И действительно, запишем гёделево предложение G через: $\neg(\exists x)$ (NaturalNo. (x). Proof (x, t)) (где значением t оказывается гёделев номер всего предложения G). Выражение может быть прочитано: «не существует такого x (x – натуральное число), которое оказывается гёделевым номером доказательства предложения с гёделевым номером t. Proof (n, m) есть, соответственно, сокращение для предиката, который задает алгоритмически вычислимое отношение между двумя натуральными числами n и m (при этом обязательно n есть гёделев номер доказательства, последней строкой в котором записано предложение с гёделевым номером m). И тогда приходим к двум положениям:

1. NaturalNo. (x) нельзя интерпретировать как «x – натуральное число». Во всех допустимых интерпретациях PM будут встречаться элементы – не натуральные числа (если x может не быть натуральным числом, x может не быть и гёделевым номером доказательства).

2. (Бесконечные) расширения для предикатов в системе PM (Proof (x, t)) неизбежно содержат в качестве элементов нечто помимо подмножества натуральных чисел.

И поэтому прочтение (интерпретация) P через «P недоказуемо в системе PM» невозможно.

Интерпретацию Патнема и Флойд подверг серьезной критике Т. Бейс. Сначала он кратко воспроизводит аргумент Гёделя.

Гёдель определяет формулы (Proof (x, y) и Subst (x, y, z)) – они обладают следующим свойством:

Нумерическая выразимость: пусть m кодирует предложение φ и n – натуральное число. Тогда:

1. Если n кодирует доказательство φ, тогда (Бейс использует систему Пеано PA. Но это никак не влияет на его аргументацию: аналогичные рассуждения могут быть приведены и для системы PM) PA ⊢ Proof ($\widehat{\mathbf{n}}$, $\widehat{\mathbf{m}}$).

2. Если n не кодирует доказательство φ, тогда PA ⊢ ¬ Proof ($\widehat{\mathbf{n}}$, $\widehat{\mathbf{m}}$).

Аналогично пусть $\varphi(\upsilon_0)$ – формула с одной свободной переменной и пусть p кодирует φ, а n и m – натуральные числа. Тогда получаем:

1. Если m кодирует φ($\widehat{\mathbf{n}}$), тогда PA ⊢ Subst ($\widehat{\mathbf{p}}$, $\widehat{\mathbf{n}}$, $\widehat{\mathbf{m}}$).

2. Если m не кодирует $\varphi(\hat{\mathbf{n}})$, тогда PA $\vdash \neg$ Subst $(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{n}}, \widehat{\mathbf{m}})$.

С использованием данных формул Гёдель и определил предложение, которое Л. Витгенштейн называет P (и которое мы обозначаем через G). Сначала конструируется следующая формула:

$\varphi(\upsilon_0) = \exists$ y [Subst $(\upsilon_0, \upsilon_0, y)$ & $\neg\exists$ z Proof (z, y)].

Пусть e_0 кодирует $\psi(\upsilon_0)$.

G = $\psi(\hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}) = \exists$ y [Subst $(\hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}, \hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}, y)$ & $\neg\exists$ z Proof (z, y)].

При допущении обоснованности (soundness) PA – при допущении N $\vDash$ PA (логический символ $\vDash$ означает «семантически влечет») – нумерическая выразимость вышеопределенных формул Proof (x, y) и Subst (x, y, z) приводит к другому свойству:

Арифметическая выразимость: для любых двух чисел n и m N $\vDash$ Proof $(\hat{\mathbf{n}}, \widehat{\mathbf{m}})$ если и только если m кодирует предложение φ, а n кодирует доказательство предложения φ. Аналогично: для любых трех чисел n, m и r N $\vDash$ Subst $(\hat{\mathbf{n}}, \widehat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{r}})$ если и только если n кодирует формулу $\varphi(\upsilon_0)$, а r кодирует предложение $\varphi(\widehat{\mathbf{m}})$.

G = $\psi(\hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes})$ прочитывается следующим образом: {элемент $\hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}$ кодирует $\psi(\upsilon_0)$} подставим в $\psi(\upsilon_0)$ вместо υ_0 и получим, что, согласно определению Subst (x, y, z) и определением самой функции $\psi(\upsilon_0)$ при замене $\hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}$ на y (теперь y кодирует $\psi(\hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes})$) одновременно не существует значения z, которое кодировало бы закодированное через y предложение. Арифметическая выразимость позволяет говорить, что G «принадлежит» теории чисел (а использованная кодировка или нумерация изоморфна подмножеству натуральных чисел). Приходим к прочтению:

$\neg\exists$ z Proof (z, y) говорит: предложение с гёделевым номером y недоказуемо.

Subst $(\hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}, \hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}, y)$ говорит: y – гёделев номер предложения G.

Поэтому и можно интерпретировать G через «G недоказуемо».

Нетрудно объяснить и семантическое прочтение первой теоремы о неполноте «G истинно и недоказуемо» (мы продолжаем следовать за статьей Т. Бейса). С учетом арифметической выразимости N $\vDash$ G, если и только если существует n, что N $\vDash$ Subst $(\hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}, \hat{\mathbf{e}}_{\boxtimes}, \hat{\mathbf{n}})$ и N $\vDash \neg\exists$ zProof $(z, \hat{\mathbf{n}})$, если и только если существует n, который кодирует G, и N $\vDash \neg\exists$ z Proof $(z, \hat{\mathbf{n}})$, если и только если не существует m, который кодирует доказательство G, если и только если PA $\nvdash$ G.

Подобная эквивалентность диктует выбор: N $\vDash$ G и PA $\nvdash$ G или N $\nvDash$ G и PA $\vdash$ G. Вторая альтернатива противоречит обоснованности (soundness) PA (N $\nvDash$ G и, следовательно, N $\nvDash$ PA). Поэтому мы вынуждены предпочесть первую. Поэтому «G истинно и недоказуемо».

Вернемся к интерпретации Патнема и Флойд (ПиФ). Предположим непротиворечивость PA и одновременно предположим PA $\vdash \neg$ G. Это влечет N $\nvDash$ PA. (N $\vDash$ PA è N $\vDash \neg$ G è N $\nvDash$ G è PA $\vdash$ G è PA противоречива). Отсюда следует, что только нестандартные (неизоморфные натуральным числам) модели теории чисел удовлетворяют системе PA. И поэтому PA ω-противоречива (хотя требование ω-противоречивости и более сильное в сравнении с утверждением о существовании для PA только нестандартных моделей). Действительно, ω-противоречивость подразумевает существование некоторой определенной формулы $\varphi(x)$, такой что для любого n PA $\vdash \neg\ \varphi(\hat{\mathbf{n}})$ и одновременно PA $\vdash \exists\ x\ \varphi(x)$. Для PA $\vdash \neg$ G для любого n PA $\vdash \neg$ Proof $(\hat{\mathbf{n}}, \ulcorner\widehat{\mathbf{G}}\urcorner)$ и одновременно PA $\vdash \exists$ x Proof $(x, \ulcorner\widehat{\mathbf{G}}\urcorner)$.

Теперь аргумент ПиФ можно продолжить. Рассмотрим специфическую модель PA – M. Поскольку PA $\vdash \neg$ G, справедливо M $\vDash \exists x$ Proof (x, $[\ulcorner\mathbf{G}\urcorner\,)\urcorner$. А значит, существует элемент m $\in$ M, такой что M $\vDash$ Proof (m, $\ulcorner\widehat{\mathbf{G}}\urcorner$). Однако согласно нумерической выразимости M $\vDash \neg$ Proof (n, $\ulcorner\widehat{\mathbf{G}}\urcorner$) для любого натурального числа n. Отсюда соответствующий элемент m не является обычным натуральным числом (m один из «нестандартных» элементов M). Но тогда непонятно, в каком смысле m все еще кодирует доказательство G (и вообще кодирует что угодно). И поэтому нет оснований полагать, что (при интерпретации в рамках модели M) формула Proof (x, y) отображает понятие «y кодирует предложение – x кодирует доказательство данного предложения».

Интерпретация G через «G недоказуемо» на интуитивном уровне предполагает интерпретацию G на множестве натуральных чисел. «+» понимается как сложение. $\exists x$ определяется на множестве натуральных чисел и т.д. Но если предположить, что доказано ¬G, такая интерпретация становится несовместимой с PA (PA в данном случае имеет только нестандартные модели). Аналогично интерпретация G через «G недоказуемо» обязана интерпретации Proof (x, y) в рамках свойства арифметической выразимости. Но интерпретация Proof (x, y) через нестандартные модели несовместима с арифметической выразимостью. Таким образом, при допущении PA $\vdash \neg$ G необходимо отказаться от исходной интерпретации G и одновременно от исходного понимания Proof (x, y). Однако в подобном заключении нет ничего необычного: синтаксическое доказательство Гёделя и показывает (посредством нумерической выразимости), что при ω-непротиворечивости системы PA: PA $\nvdash$ G (что с учетом арифметической выразимости соответствует первому из двух возможных обозначенных выше вариантов). Здесь вообще (поскольку доказательство чисто синтаксическое) возможно не принимать никакую интерпретацию.

Интерпретация ПиФ Витгенштейна на деле оказывается малоинтересной и бесперспективной (даже если согласиться с возможным прозрением Л. Витгенштейна в теории моделей). Представленный Т. Бейс теоретико-модельный аргумент вместе с экспликацией интерпретации ПиФ неизбежно ставит перед выбором: следует либо модифицировать интуитивную стандартную интерпретацию и, стало быть, перестать рассматривать N в качестве подходящей модели для нашего формального языка PA (в таком случае придется отказаться от интерпретации G через «G недоказуемо»), либо считать неудовлетворительной аксиоматизацию арифметики в формальной системе PA и сохранить при этом «релевантность» стандартной интерпретации. Патнем и Флойд автоматически предпочли первый вариант. Но при PA $\vdash \neg$ G сообщество математиков предпочло бы второй вариант и занялось бы поиском более подходящей для аксиоматизации арифметики системы (или принялось бы за модификацию существующей). По справедливому замечанию Бейса, математики предпочли бы пересмотр PA и исключение приведших к подобному доказательству принципов аксиоматизации (хотя подобное и может привести к отказу от стандартной интерпретации G). В любом случае никто не станет принимать нестандартные модели с целью сохранить ω-непротиворечивость PA. И если доказательство ¬G будет фактически найдено, предпочтительным станет не отказ от стандартной интерпретации G и признание существования только нестандартных моделей для PA. Наоборот, стандартная модель скорее будет сохранена путем поиска более подходящей аксиоматизации для натуральных чисел.

II. Допустим – несмотря на соображения Т. Бейс – релевантность интерпретации ПиФ. Интерпретация имеет смысл только благодаря известной асимметрии в доказательстве Гёделя «между» G и ¬G. Гёдель доказал недоказуемость G при условии непротиворечивости системы PM и недоказуемость ¬G при условии ω-непротиворечивости PM (более сильное допущение). Поэтому стало возможным при условии непротиворечивости PM предположить доказуемость ¬G и прийти к ω-противоречивости. Однако в 1936 г. Дж. Баркли Россер продемонстрировал необязательность подобной асимметрии в доказательстве неполноты системы PM. Так называемая уловка Россера демонстрирует: если доказуемо R (предложение Россера отличается от G), тогда за меньшее число шагов доказуемо и ¬R. Таким образом, интерпретация ПиФ (и позиция Витгенштейна – совпадай она с данной интерпретацией) перестают иметь какое бы то ни было существенное значение. Предположение $PM \vdash \neg G$ остается возможным, однако не имеет никаких последствий для общего результата ввиду своей экстравагантности и фактической невероятности.

Патнем и Флойд рассматривают только первую часть «аргумента» Витгенштейна: если допустить (или пусть такой результат фактически получен) доказуемость ¬G, тогда придется отказаться от прочтения G через «G недоказуемо». Однако Витгенштейн (так кажется при первом прочтении) сразу же распространяет подобное соображение и на доказуемость G: «If you assume that the proposition is provable in Russell’s system, that means it is true in the Russell sense, and the interpretation «P is not provable» again has to be given up». Если под «the proposition» Витгенштейн продолжает подразумевать G, тогда интерпретация ПиФ оказывается несостоятельной (потому что нельзя предположить по аналогии непротиворечивость PM и одновременно $PM \vdash G$). Поэтому есть основания не только отвергнуть интерпретацию ПиФ изнутри (что сделал Бейс), но и продемонстрировать безынтересность вообще и нерелевантность подобной интерпретации относительно текста Витгенштейна «извне».

III. Теперь обратимся к интерпретации Т. Ламперта. Ламперт в 2017 г. первым предложил подойти к заметкам Витгенштейна о Гёделе как если бы заметки имели отношение к математическому доказательству 1-й теоремы о неполноте непосредственно. Предложенные ранее дружественные или враждебные прочтения Витгенштейна, напротив, почти всегда заранее исключали такой подход и опирались на семантический (не оригинальный) вариант теоремы. Так, при воспроизведении интерпретации ПиФ мы должны были обращаться к семантическому свойству арифметической выразимости и использовать понятие обоснованности системы PA (все аксиомы PA истинны в стандартной интерпретации N: $N \models PA$). На деле никакое понятие истины в доказательстве 1-й теоремы о неполноте не фигурирует. Доказательство не требует полной формальной интерпретации символов избранного языка и не привлекает понятие истины. Однако доказательство Гёделя нуждается в корреляции между натуральными числами и формальными выражениями (между натуральными числами и терминами избранного формального языка). В противном случае невозможно было бы доказать свойство нумерической выразимости.

Тим Ламперт отталкивается от такой формулировки:

При допущении доказуемости G (¬G) вместо признания некорректности или противоречивости (ω-противоречивости) PM (PA) возможно отказаться от метаматематической интерпретации G {ничто не мешает принять данную формулировку за оригинальный тезис Витгенштейна}.

Под метаматематическим прочтением можно понимать одновременно «G недоказуемо» и «G истинно и недоказуемо» (в интерпретации ПиФ признание ω-противоречивости вследствие допущения PM ⊢ ¬G, напротив, и приводило к отказу от прочтения G через «G недоказуемо»). Данная формулировка кажется на первый взгляд не связанной непосредственно с доказательством Гёделя.

Ламперт проводит ключевое для Витгенштейна различие между алгоритмическим и метаматематическим доказательством. Последнее (в случае доказательства недоказуемости) основано на представлении понятия «доказуемости» внутри языка избранной аксиоматической системы. Алгоритмическое же доказательство не требует никакой метаматематической интерпретации. В рамках доказательства геометрической невозможности (частые примеры Витгенштейна: невозможность трисекции угла с помощью циркуля и линейки, невозможность построения семиугольника) проблема некоторого геометрического построения редуцируется к проблеме разрешимости определенного алгебраического уравнения. И одними синтаксическими средствами демонстрируется неразрешимость уравнения при таких-то числах. Витгенштейн признает только алгоритмическое (чисто синтаксическое) доказательство невозможности (или недоказуемости). Нетрудно видеть, что доказательство Гёделя не является алгоритмическим доказательством: негде не демонстрируется невозможность с помощью определенных «синтаксических средств» прийти к G или ¬G. Доказательство Гёделя основано на метаматематическом представлении в рамках языка избранной системы (метаматематического) понятия «доказуемости». Здесь ключевым в различении алгоритмического и метаматематического доказательства оказывается критерий недоказуемости: для Витгенштейна критерием должен быть синтаксический аргумент вне какой бы то ни было зависимости от метаматематической интерпретации формул (и наоборот, только на основании синтаксического аргумента мы можем перейти к метаматематическому утверждению о «невозможности построения…» или «недоказуемости…»). Тогда как (повторим) вывод Гёделя о противоречивости (или ω-противоречивости) PM при допущении доказуемости G (¬G) основывается на представлении «доказуемости» внутри формального языка системы PM. Уже после принятия такого допущения приводится вывод о неразрешимости G при условии непротиворечивости (ω-непротиворечивости) PM. Доказательство основано на полностью гипотетическом предположении доказуемости G. И «доказуемость» G не связана ни с какими конкретными способами доказательства определенных формул внутри системы PM. В рамках аргументации Ламперта учитывается также специфическое отношение Витгенштейна к доказательству от противного (через противоречие). Пусть некоторое неявно ошибочное утверждение противоречит алгоритмически доказанному математическому положению. Далее утверждение просто редуцируется к абсурду. И такой способ доказательства от противного Витгенштейн принимает. Однако противоречие между доказуемостью формулы и интерпретацией формулы в качестве основы для доказательства от противного отбрасывается.

Перейдем непосредственно к дружественному прочтению Витгенштейна Лампертом (Л).

Пусть:

$\Im$A (φ) – стандартная арифметическая интерпретация некоторой формулы РМ φ.

$\Im$M (φ) – метаматематическая интерпретация формулы φ.

Метаматематическая интерпретация – только частный случай (способ) сокращения формулы φ. Здесь не предполагается (в отличие от стандартной арифметической интерпретации $\Im$A (φ)) парафраз логических и арифметических констант (при подстановке значений такая интерпретация не затрагивает элементов предложения φ). Соответствующее метаматематическое предложение просто должно быть представимо внутри языка системы РМ):

$$\Im M(\varphi) = T, \text{ если и только если } \Im A(\varphi) = T. \quad (1)$$

Метаматематическую интерпретацию G «G недоказуемо» (точнее: «не существует такого y, который был бы гёделевым номером формулы с номером $\ulcorner G \urcorner$») как частный случай $\neg\exists y \mathrm{Proof}(y, \ulcorner G \urcorner$)) можно допустить только при соблюдении условия (1).

Витгенштейн не отвергает $\Im$A (G) (допускается корректность РМ). Но Витгенштейн отвергает $\Im$M (G) (по словам Витгенштейна, ведь только номер (код) G, а не формула G фигурирует в G). Витгенштейн в действительности отрицает определимость понятия доказуемости внутри системы РМ и, соответственно, отрицает:

$$\Im M(G) = T, \text{ если и только если } \Im A(G) = T. \quad (2)$$

Грубо говоря, условия (2) самого по себе недостаточно (или оно требует доказательства).

Для доказательства 1-й теоремы о неполноте (при условии корректности РМ) необходимо только:

$$\Im A(G) = T, \text{ если и только если } \nvdash G. \quad (3)$$

Данное равенство нужно доказать. Возникает вопрос, возможно ли доказательство без условия (2). Гёдель изначально предполагает определимость понятия доказуемости внутри РМ и поэтому допускает условие (2) (разница между семантической и синтаксической версией доказательства исчерпывается в данном случае заменой условия корректности на условие непротиворечивости).

Итак, определение доказуемости играет ключевую роль. Однако нам потребуется различать рекурсивно определенные функции (отношения) и репрезентацию данных функций (отношений) внутри языка РМ. Рекурсивные функции (и отношения) (заданы чисто синтаксически и поэтому) связаны с цифрами – не с числами. Привычная теоретико-числовая (арифметическая) интерпретация рекурсивных функций выходит за пределы машинального (компьютерного) выполнения рекурсивно заданных определений. Автоматически приравнивать компьютерные операции с цифрами и оперирование с числами в арифметике не обязательно. В гёделевом рекурсивном определении доказательства гёделев номер (цифра) исходно присваивается заданным формулам или последовательности формул. Пусть характеристическая функция рекурсивного отношения B* (m, n) определяет для номера m некоторой последовательности формул и для номера n некоторой формулы, является ли m номером доказательства формулы с номером n. Тогда метаматематическая интерпретация рекурсивного отношения B* (m, n) ($\Im$M(B*)) может быть задана предложением «последовательность формул с номером m есть доказательство формулы с номером n». Определимость «x есть доказательство y» в рамках языка избранной системы требует доказательства следующего утверждения: метаматематическую интерпретацию рекурсивного отношения B* (m, n) внутри PM можно представить с помощью предиката B (m, n). Или: для всех m и n должно выполняться

$$\Im M(B^*(m, n)) = T, \text{ если и только если } \Im A(B\ (m, n)) = T. \qquad (4)$$

Фактически Гёдель доказал, что любая рекурсивная функция представима в рамках языка PM. Однако доказательство относится к арифметической, а не к метаматематической интерпретации рекурсивных функций. Гёдель доказал для любых m и n

$$\Im A(B^*(m, n)) = T, \text{ если и только если } \Im A(B\ (m, n)) = T. \qquad (5)$$

Чтобы из (5) вывести (4), необходимо соотнести $\Im$M(B*(m, n)) и $\Im$A(B*(m, n)). Необходимо предположить, что любые случайные номера m и n отсылают не только к формулам и последовательностям формул, но также и к числам в B*(m, n) (предположение П). Тогда, принимая (4) и, соответственно, П, возможно доказать эквивалентность (2) и (3). Если не принять (4), придется отказаться и от (2). Тогда безосновательным станет и (3). Соответствия между $\Im$A(G) = T и $\nvdash$ G не будет.

Совершенно упрощая аргументацию Ламперта: рекурсивная функция B*(m, n) определяет (вычисляет). Метаматематическая же интерпретация $\Im$M(B*(m, n)) нечто утверждает. Так, на основании компьютерного вычисления результата сложения некоторых (символов) цифр мы можем утверждать, что «сумма … и … чисел равняется …». Любые случайные символы (гёделевы номера) отсылают к формулам и последовательностям формул в рамках рекурсивно заданного отношения B*(m, n). Подобное отношение вычисляется (имеет место интерпретация $\Im$A). Согласно арифметической интерпретаций получается: в B*(, ) (представим, что каракули суть гёделевы номера) первые каракули отсылают к некоторой последовательности формул, вторые – к формуле. А при метаматематической интерпретации каракули должны будут отсылать одновременно и к числам, которые мы видим на месте каракулей. Подобная метаматематическая интерпретация необязательна, необязательно и (4). Отсюда Гёдель не доказал (2) – не доказал 1-ю теорему о неполноте (остается недоказанным: «G истинно, если и только если недоказуемо»). Корректность PM влечет только взаимосвязь доказуемости G и $\Im$A(G) (и не влечет взаимосвязь доказуемости G и $\Im$M(G)).

Синтаксический вариант доказательства 1-й теоремы о неполноте предполагает более слабое (взамен корректности) допущение непротиворечивости. Последнее влечет кроме определимости рекурсивных функций внутри PM еще и следующее положение (6):

Для любых n и m:

если $\Im A(B^*(m, n)) = T$, тогда $\vdash B(m, n)$;

если $\Im A(B^*(m, n)) = F$, тогда $\vdash \neg B(m, n)$.

Доказательство положения (6) основывается на доказательстве (5). И поэтому критика Витгенштейна применима также и к синтаксической версии доказательства. Доказательство Гёделя считается конструктивным, что предполагает возможность перевести рекурсивные отношения в предикаты PM чисто механическим способом. Однако доказательство переводимости исходно предполагает эквивалентность $\Im M(B^*)$ и $\Im A(B^*)$ во всех случаях.

Вернемся к семантической версии доказательства. Из возражения Витгенштейна в интерпретации (Л) получается: из предположения $\vdash G$ при допущении корректности PM ($\Im A(G) = T$) возможно заключить $\Im M(G) = F$ (вместо заключения о некорректности PM из гипотетического предположения $\vdash G$ возможно прийти к заключению: в системе PM гёделев номер $\ulcorner \mathbf{G} \urcorner$ формулы G отсылает не к формуле PM G, к числу, тогда как рекурсивное отношение $B^*(k, \ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$, напротив, отсылает к формуле и не отсылает к числу).

IV. В интерпретации (Л) доказательство G влечет выполнение $B^*(k, \ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ и, следовательно, $B(k, \ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$, но из $\Im A(B(k, \ulcorner \mathbf{G} \urcorner)) = T$ не следует доказуемость $B(k, \ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ (не следует $\Im M(B(k, \ulcorner \mathbf{G} \urcorner)) = T$). А если из доказательства не следует доказуемость, при доказательстве G (как и говорит Витгенштейн) необходимо отказаться от (метаматематической) интерпретации G через «G недоказуемо» (стало быть, доказательство G не будет в противоречии с метаматематической интерпретацией G). Нетрудно видеть, что (Л) и ПиФ по-разному понимают «интерпретацию». Во втором случае (абсолютно вне контекста Витгенштейна) «интерпретация» понимается в современном теоретико-модельном смысле: ω-противоречивость PM как следствие допущения доказуемости $\neg G$ влечет существование только нестандартных моделей для рассматриваемой аксиоматизации арифметики. В прочтении (Л) интерпретация (метаматематическая интерпретация) увязывается с «концепцией» доказательства Витгенштейна. Прочтение (Л) хорошо согласуется и с представлением Витгенштейна о непредставимости понятия «доказуемости» внутри избранной системы («метаматематики не существует»). Для Витгенштейна результат Гёделя изначально опирается на двусмысленность между арифметической и метаматематической интерпретацией и поэтому не является в строгом смысле математической теоремой.

Литература

1. *Wittgenstein L.* Remarks on the Foundations of Mathematics. Oxford: Blackwell, 1978.

2. *Kreisel G.* Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics // British Journal for the philosophy of Science. 1958. № 9. P. 135–137.

3. *Bernays P.* Comments on Ludwig Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics // Ratio. 1959. Vol. 2, № 1. P. 1–22.

4. *Goodstein R.L.* Wittgenstein's philosophy of mathematics // Ludwig Wittgenstein: Philosophe and Language. London : Allen&Unwin, 1972. P. 271–286.

5. *Floyd J.* On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle // Essays on the Development on the Foundations of Mathematics. 1995. P. 373–425.

6. *Priest G.* Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem // Wittgenstein's Lasting Significance. London, 2010. P. 206–225.

7. *Berto F.* The Gödel Paradox and Wittgenstein's Reasons// Philosophia Mathematica. 2009. № 3 (17). P. 208–219.

8. *Berto F.* There's Something About Gödel: The Complete Guide to The Incompleteness Theorem. New Jersey: Blackwell, 2009.

9. *Целищев В.В.* Об интуитивной интерпретации оснований доказательства первой теоремы Гёделя о неполноте // Сибирский философский журнал. 2017. № 2. С. 5–17.

10. *Floyd J., Putnam H.* A Note on Wittgenstein's 'Notorious Paragraph' about the Gödel Theorem // The Journal of Philosophy. 2000. № 97 (11). P. 624–632.

11. *Bays T.* On Floyd and Putnam on Wittgenstein on Gödel // Journal of Philosophy. 2004. № 4. P. 197–210.

12. *Lampert T.* Wittgenstein and Gödel: An Attempt to Make "Wittgenstein's Objection" Reasonable // Philosophia Mathematica. 2017. August.

Kirill A. Rodin, Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: rodin.kir@gmail.com

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2018. 45. pp. 103–113.

DOI: 10.17223/1998863X/45/11

CONSTRUCTIVISM IN LOGIC AND MATHEMATICS (WITTGENSTEIN V. GÖDEL: SOME SELECTED CONTEMPORARY READINGS)

Keywords: Wittgenstein; first incompleteness theorem; algorithmic proof; constructive proof; model theory; semantics.

In recent years, Wittgenstein's remarks on Gödel have produced many disputes and publications. The discussion overcame the framework of historical and philosophical research, and directly touches upon series of problems adjacent to the proof of the first incompleteness theorem. After the publication in 1956 of Remarks on the Foundations of Mathematics, Kraisel and Bernays attributed a total misunderstanding of Gödel to Wittgenstein. There were also apologetic readings. To date, almost all friendly or hostile interpretations consider Wittgenstein's remarks irrespective of the mathematical (purely syntactic) proof of the first incompleteness theorem (Wittgenstein's notes must allegedly be understood in the context of the semantic and philosophical implications of the theorem). Among such interpretations it is important to point out the historical and philosophical studies of Floyd (proofs of unprovability are considered here in the context of Wittgenstein's general position regarding the proof of the impossibility of certain geometric constructions). Or there are attempts to see Wittgenstein as the pioneer of paraconsistent logic. Undoubtedly, the semantic and general philosophical consequences of the theorem are of great importance today, and can be better understood in the context of Wittgenstein's remarks. In the article, the author considers the friendly reading of Wittgenstein by Putnam and Floyd (also considering Bays' criticism) (Parts I and II of the article) and the ground-breaking reading by Lampert (Part III). Lampert is notable for the following: he was the first to propose an apologetic reading of Wittgenstein under the condition of correlating the remarks directly with the proof of the first incompleteness theorem (Wittgenstein's approach to algorithmic and metamathematical (constructive) kinds of proof is also considered). In the final part, the author briefly dwells on the difference between two selected interpretations of Wittgenstein's remarks and on the general context of Wittgenstein's attitude toward Gödel.

References

1. Wittgenstein, L. (1978) *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Oxford: Blackwell.

2. Kreisel, G. (1958) Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science*. 9. pp. 135–137. DOI: 10.1093/bjps/IX.34.135

3. Bernays, P. (1959) Comments on Ludwig Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics. *Ratio*. 2(1). pp. 1–22.

4. Goodstein, R.L. (1972) Wittgenstein's philosophy of mathematics. In: *Ludwig Wittgenstein: Philosophe and Language*. London: Allen&Unwin. pp. 271–286.

5. Floyd, J. (1995) On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle. In: Hintikka, Ja. (ed.) *Essays on the Development on the Foundations of Mathematics*. Springer Netherlands. pp. 373–425.

6. Priest, G. (2010) Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem. In: Kölbel, M. & Weiss, B. (eds) *Wittgenstein's Lasting Significance*. London: Routledge. pp. 206–225.

7. Berto, F. (2009) The Gödel Paradox and Wittgenstein's Reasons. *Philosophia Mathematica*. 3(17). pp. 208–219. DOI: 10.1093/philmat/nkp001

8. Berto, F. (2009) *There's Something About Gödel: The Complete Guide to The Incompleteness Theorem*. New Jersey: Blackwell.

9. Tselishchev, V.V. (2017) Ob intuitivnoy interpretatsii osnovaniy dokazatel'stva pervoy teoremy Godelya o nepolnote [On the intuitive interpretation of the grounds of the proof of Goedel's first incompleteness theorem]. *Sibirskiy filosofskiy zhurnal – The Siberian Journal of Philosophy*. 2. pp. 5–17.

10. Floyd, J. & Putnam, H. (2000) A Note on Wittgenstein's 'Notorious Paragraph' about the Gödel Theorem. *The Journal of Philosophy*. 97(11). pp. 624–632. DOI: 10.2307/2678455

11. Bays, T. (2004) On Floyd and Putnam on Wittgenstein on Gödel. *Journal of Philosophy*. 4. pp. 197–210. DOI: 10.5840/jphil2004101422

12. Lampert, T. (2017) Wittgenstein and Gödel: An Attempt to Make "Wittgenstein's Objection" Reasonable. *Philosophia Mathematica*. August. DOI: 10.1093/philmat/nkx017