ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 46

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.977
DOI: 10.17223/19988605/46/1

К.Б. Мансимов, М.Я. Наджафова

КВАЗИОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается задача оптимального управления дискретными процессами, описываемыми системой разностных уравнений с неразделенными нелокальными краевыми условиями. При предположении выпуклости области управления доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума. Исследован случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Установлено необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.
Ключевые слова: дискретная управляемая система; нелокальные краевые условия; линеаризованный принцип максимума; квазиособое управление; необходимое условие оптимальности.

Дискретные динамические модели управляемых систем являются очень важным в теоретическом и практическом отношении классом математических моделей, позволяющим охватить широкий круг реальных объектов и соответствующих им задач управления. Дискретные динамические модели возникают, например, при моделировании задач распределения ресурсов, обработке и передаче информации цифровыми электронными устройствами, а также при дискретизации непрерывных динамических моделей (см.: [1–6]).

К настоящему времени разработаны многочисленные точные и приближенные методы решения задач оптимального управления дискретными системами в предположении, что они описываются разностными уравнениями с локальными краевыми условиями (см.: [1–7]).

Данная работа посвящена исследованию одной дискретной задачи оптимального управления с неразделенными нелокальными краевыми условиями. С помощью модифицированного варианта метода приращений установлены необходимые условия оптимальности в предположении выпуклости области управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему управления

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), u(t)\right),\ t \in \mathrm{T}, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\Phi\left(x(t_0), x(t_1)\right) = l. \tag{2}$$

Здесь $\mathrm{T} = \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1\}$ – конечное множество последовательных натуральных чисел, причем t_0 и t_1 заданы, $\Phi(x_0, x_1)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных n-мерная вектор-функция, l – заданный постоянный вектор, $x(t)$ – вектор состояния, $u(t)$ – вектор управляющих воздействий, $f(t, x, u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно.

Пусть U – заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество из R^r. Каждую управляющую функцию $u(t)$, удовлетворяющую условию

$$u(t)\in \mathrm{U}\subset \mathrm{R}^r, \quad t\in \mathrm{T}, \tag{3}$$

назовем допустимым управлением.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big) \tag{4}$$

при ограничениях (1)–(3). Здесь $\varphi(x_0,x_1)-$ заданная дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных скалярная функция.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(t),x(t)\big)$ – оптимальным процессом.

2. Формула для приращения функционала качества

Пусть $\big(u(t),x(t)\big)$ – фиксированный, а $\big(\bar u(t)=u(t)+\Delta u(t),\bar x(t)=x(t)+\Delta x(t)\big)$ – произвольный допустимые процессы. Тогда ясно, что приращение $\Delta x(t)$ состояния $x(t)$ будет решением краевой задачи

$$\Delta x(t+1)= f\big(t,\bar x(t),\bar u(t)\big)- f\big(t,x(t),u(t)\big), \tag{5}$$

$$\Phi\big(x(t_0)+\Delta x(t_0),x(t_1)+\Delta x(t_1)\big)-\Phi\big(x(t_0),x(t_1)\big)=0\,. \tag{6}$$

Предположим, что $\psi(t)$ – пока известная n-мерная вектор-функция, а $\lambda\in \mathrm{R}^n$ – неизвестный постоянный вектор. Тогда из (5), (6) получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta x(t+1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Big[f\big(t,\bar x(t),\bar u(t)\big)- f\big(t,x(t),u(t)\big)\Big], \tag{7}$$

$$\lambda'\Big[\Phi\big(x(t_0)+\Delta x(t_0),x(t_1)+\Delta x(t_1)\big)-\Phi\big(x(t_0),x(t_1)\big)\Big]=0\,. \tag{8}$$

Положим

$$\mathrm{M}\big(x(t_0),x(t_1),\lambda\big)=\lambda'\Phi\big(x(t_0),x(t_1)\big),$$

$$H(t,x,u,\psi)=\psi' f(t,x,u)\,.$$

Ясно, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t)=\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1)-\psi'(t_0-1)\Delta x(t_0)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t)\,. \tag{9}$$

С учетом соотношений (7)–(9) приращение функционала качества (4) записывается в виде:

$$\begin{aligned}\Delta S(u)=S(\bar u)-S(u)=\varphi\big(\bar x(t_0),\bar x(t_1)\big)-\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big)+\\ +\lambda'\Big[\Phi\big(x(t_0)+\Delta x(t_0),x(t_1)+\Delta x(t_1)\big)-\Phi\big(x(t_0),x(t_1)\big)\Big]+\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1)-\psi'(t_0-1)\Delta x(t_0)-\\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[H\big(t,x(t),\bar u(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\Big].\end{aligned} \tag{10}$$

Используя формулу Тейлора, из (10) будем иметь

$$\Delta S(u)=\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_0)}\Delta x(t_0)-\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Bigg[\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x^2(t_0)}\Delta x(t_0)+$$

$$\left.+\,2\,\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x^2(t_1)}\Delta x(t_1)\right]+$$

$$+\lambda'\frac{\partial\Phi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)}\Delta x(t_0)+\lambda'\frac{\partial\Phi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1)-$$

$$-\psi'(t_0-1)\Delta x(t_0)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\Delta u(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_x'\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\Delta x(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[\Delta x'(t)H_{xx}\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\Delta x(t)+2\Delta u'(t)H_{ux}\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\Delta x(t)+$$

$$+\Delta u'(t)H_{uu}\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\Delta u(t)\Big]+o_1\left(\left[\|\Delta x(t_0)\|+\|\Delta x(t_1)\|\right]^2\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2\left(\left[\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|\right]^2\right)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x^2(t_0)}\Delta x(t_0)+\Delta x'(t_0)\times \tag{11}$$

$$\times\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x(t_1)^2}\Delta x(t_1)+o_3\left(\left[\|\Delta x(t_0)\|+\|\Delta x(t_1)\|\right]^2\right).$$

Если предполагать, что $\psi(t)$ и λ удовлетворяют соотношениям

$$\psi(t-1)=\frac{\partial H\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)}{\partial x},$$

$$\psi(t_1-1)=-\frac{\partial\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_1)}-\frac{\partial\Phi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_1)}\lambda,$$

$$\psi(t_0-1)=\frac{\partial\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)}+\frac{\partial\Phi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)}\lambda,$$

тогда формула приращения (11) примет вид:

$$\Delta S(u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\Delta u(t)+\frac{1}{2}\left[\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x^2(t_0)}\Delta x(t_0)+\right.$$

$$\left.+2\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x^2(t_1)}\Delta x(t_1)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta x'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t)+2\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)}{\partial u\,\partial x}\Delta x(t)+\right.$$

$$\left.+\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)}{\partial u^2}\Delta u(t)\right]+\frac{1}{2}\left[\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2\mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x^2(t_0)}\Delta x(t_0)+\right.$$

$$\left.+2\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2\mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\Phi\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x^2(t_1)}\Delta x(t_1)\right]+\eta_1(u:\Delta u). \tag{12}$$

Здесь по определению

$$\eta_1(u:\Delta u)=o_1\left(\left[\|\Delta x(t_0)\|+\|\Delta x(t_1)\|\right]^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2\left(\left[\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|\right]^2\right)+o_3\left(\left[\|\Delta x(t_0)\|+\|\Delta x(t_1)\|\right]^2\right).$$

По предположению множество U выпуклое. Поэтому специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=\varepsilon\left[v(t)-u(t)\right]. \tag{13}$$

Здесь $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число, а $v(t)\in\mathrm{U}$, $t\in\mathrm{T}$ – произвольное допустимое управление.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение состояния $x(t)$, отвечающее специальному приращению (13) управления $u(t)$.

Из (5)–(6) получаем, что $\Delta x_\varepsilon(t)$ является решением линеаризованной задачи

$$\Delta x_\varepsilon(t+1) = f_x\left(t, x(t), u(t)\right)\Delta x_\varepsilon(t) + f_u\left(t, x(t), u(t)\right)\Delta u_\varepsilon(t) + o_4\left(\left\|\Delta x_\varepsilon(t)\right\| + \left\|\Delta u_\varepsilon(t)\right\|\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial\Phi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)}\Delta x(t_0) + \frac{\partial\Phi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x(t_1)}\Delta x(t_1) = 0. \tag{15}$$

Используя задачу (14)–(15), доказывается справедливость разложения

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon y(t) + o(\varepsilon, t), \tag{16}$$

где $y(t)$ есть решение краевой задачи

$$y(t+1) = f_x\left(t, x(t), u(t)\right)y(t) + f_u\left(t, x(t), u(t)\right)\left(v(\tau) - u(\tau)\right), \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Phi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)}y(t_0) + \frac{\partial\Phi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x(t_1)}y(t_1) = 0. \tag{18}$$

Решение краевой задачи (17)–(18) допускает представление [8]:

$$y(t) = \Phi(t)\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} F(t_1, \tau)\, f_u\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right)\left(v(\tau) - u(\tau)\right) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau)\, f_u\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right)\left(v(\tau) - u(\tau)\right), \tag{19}$$

где по определению

$$\Phi(t) = -F(t, t_0-1)\left(\frac{\partial\Phi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)} + \frac{\partial\Phi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x(t_1)}F(t, t_0-1)\right)^{-1}\frac{\partial\Phi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x(t_1)},$$

а $F(t, \tau)$ – $(n\times n)$ матричная функция, являющаяся решением задачи

$$F(t, \tau-1) = f_x\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right), \quad \tau < t,$$

$$F(t, t-1) = E,\ (E\ –\ (n\times n)\ \text{единичная матрица}).$$

Пусть

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & t_0 \le \tau \le t-1, \\ 0, & t \le \tau \le t_1 - 1. \end{cases}$$

Тогда представление (19) записывается в виде:

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} G(t, \tau)\, f_u\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right)\left(v(\tau) - u(\tau)\right), \tag{20}$$

где по определению

$$G(t, \tau) = \Phi(t)F(t_1, \tau) + F(t, \tau)\alpha(\tau).$$

С учетом (13), (16) из (12) получаем, что вдоль оптимального процесса $\left(u(t), x(t)\right)$ выполняется неравенство

$$\begin{gathered} -\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'\left(t, x(t), u(t), \psi(t)\right)\left(v(t) - u(t)\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg\{ y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x^2(t_0)}y(t_0) + \\ + 2y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}y(t_1) + y'(t_1)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0), x(t_1)\right)}{\partial x^2(t_1)}y(t_1) - \end{gathered} \tag{21}$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Bigg[y'(t)\frac{\partial^2 H\left(t, x(t), u(t), \psi(t)\right)}{\partial x^2}y(t) + \left(v(t) - u(t)\right)'\frac{\partial^2 H\left(t, x(t), u(t), \psi(t)\right)}{\partial u\,\partial x}y(t) +$$

$$+\left(v(t)-u(t)\right)'\frac{\partial^2 H\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)}{\partial u^2}\left(v(t)-u(t)\right)\Bigg]+\Bigg[y'(t_0)\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x^2(t_0)}y(t_0)+$$

$$+2y'(t_0)\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}y(t_1)+y'(t_1)\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x^2(t_1)}y(t_1)\Bigg]\Bigg\}+o\left(\varepsilon^2\right)\geq 0.$$

Из неравенства (21) следует аналог линеаризованного условия максимума (см., напр.: [1–7]).

Теорема 1. Вдоль оптимального процесса $\left(u(t),x(t)\right)$ для всех $v(t)\in \mathrm{U}$, $t\in \mathrm{T}$, выполняется неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\left(v(t)-u(t)\right)\leq 0. \tag{22}$$

Неравенство (22) есть необходимое условие оптимальности первого порядка и нередко, вырождаясь, выполняется тривиальным образом (см., напр.: [4–7, 9]). Изучим случай вырождения необходимого условия оптимальности (22).

Определение 1. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым в задаче (1)–(4), если для всех $v(t)\in \mathrm{U}$, $t\in \mathrm{T}$,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\left(v(t)-u(t)\right)=0. \tag{23}$$

Из неравенства (21) с учетом (23) следует, что для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{gathered}
y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x^2(t_0)}y(t_0)+2y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}y(t_1)+2y'(t_1)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x^2(t_1)}y(t_1)+\\
+y'(t_0)\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x^2(t_0)}y(t_0)+2y'(t_0)\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}y(t_1)+y'(t_1)\frac{\partial^2 \mathrm{M}\left(x(t_0),x(t_1),\lambda\right)}{\partial x^2(t_1)}y(t_1)-\\
-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[y'(t)H_{xx}\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)y(t)+2\left(v(t)-u(t)\right)'H_{ux}\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)y(t)+\\
+\left(v(t)-u(t)\right)'H_{uu}\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)\left(v(t)-u(t)\right)\Big]\geq 0
\end{gathered} \tag{24}$$

выполнялось для всех $v(t)\in \mathrm{U}$, $t\in \mathrm{T}$.

Неравенство (24) есть неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Опираясь на него, удается получить необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, которое носит явный характер. Используя представление (20), убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{gathered}
y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x^2(t_0)}y(t_0)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)'f'\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)\times\\
\times G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x^2(t_0)}G(t_0,s)\,f\left(s,x(s),u(s)\right)\left(v(s)-u(s)\right),
\end{gathered} \qquad 25$$

$$\begin{gathered}
y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}y(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)'f_u'\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)\times\\
\times G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}G(t_1,s)\,f_u\left(s,x(s),u(s)\right)\left(v(s)-u(s)\right),
\end{gathered} \tag{26}$$

$$y'(t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x^2(t_1)}y(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\,f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))\times$$
$$\times G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x^2(t_1)}G(t_1,s)\,f_u(s,x(s),u(s))\,(v(s)-u(s)), \tag{27}$$

$$y'(t_0)\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1),\lambda)}{\partial x^2(t_0)}y(t_0)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\,f_u(\tau,x(\tau),u(\tau))G(t_0,\tau)\times$$
$$\times\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1),\lambda)}{\partial x^2(t_0)}G(t_0,s)\,f_u(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s)), \tag{28}$$

$$y'(t_0)\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1),\lambda)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}y'(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\,f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))G(t_0,\tau)\times$$
$$\times\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}G(t_1,s)\,f_u(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s)), \tag{29}$$

$$y'(t_1)\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1),\lambda)}{\partial x^2(t_1)}y(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\,f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))G'(t_1,\tau)\times$$
$$\times\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1),\lambda)}{\partial x^2(t_1)}G(t_1,s)\,f_u(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s)), \tag{30}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}y'(t)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x^2}y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\times$$
$$\times f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))\left[G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x^2}G(t_1,s)\right]f_u(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s)), \tag{31}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}(v(t)-u(t))'\,\frac{\partial^2 H'(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u\partial x}y(t)=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_2-1}(v(t)-u(t))'\,\frac{\partial^2 H'(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u\,\partial x}G(t,\tau)\,f_u(\tau,x(\tau),u(\tau))(v(\tau)-u(\tau)). \tag{32}$$

По аналогии с работой [5] положим

$$K(\tau,s)=-\left[G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x^2(t_0)}G(t_0,s)+\right.$$
$$\left.+2G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}G(t_1,s)+G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x^2(t_1)}G(t_1,s)\right]-$$
$$-\left[G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1),\lambda)}{\partial x^2(t_0)}G(t_0,s)+2G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}G(t_1,s)+\right.$$
$$\left.+G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2 \mathrm{M}(x(t_0),x(t_1),\lambda)}{\partial x^2(t_1)}G(t_1,s)\right]+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}G'(t,\tau)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x^2}G(t,s). \tag{33}$$

С учетом обозначения (33) и тождеств (25)–(32) неравенство (24) принимает вид:

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\,f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))K(\tau,s)\,f_u(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s))+$$

$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left(v(t)-u(t)\right)'\frac{\partial H'\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)}{\partial u\,\partial x}G(t,\tau)\,f_u\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left(v(t)-u(t)\right)'\frac{\partial H'\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)}{\partial u^2}\left(v(t)-u(t)\right)\le 0. \qquad (34)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если множество U выпуклое, то для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство (34) выполнялось для всех $v(t)\in \mathrm{U}$, $t\in \mathrm{T}$.

Неравенство (34) есть довольно общее необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Из него, определяя $v(t)$ специальным образом, можно получить ряд относительно легко проверяемых необходимых условий оптимальности квазиособых управлений. Приведем одно из них.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 2 для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо чтобы неравенство

$$\left(w-u(\theta)\right)'\Bigg[f_u\left(\theta,x(\theta),u(\theta)\right)K(\theta,\theta)\,f_u\left(\theta,x(\theta),u(\theta)\right)+\frac{\partial^2 H\left(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta)\right)}{\partial u\partial x}G(\theta,\theta)\times$$
$$\times f_u\left(\theta,x(\theta),u(\theta)\right)+\frac{\partial^2 H\left(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta)\right)}{\partial u^2}\Bigg]\left(w-u(\theta)\right)\le 0 \qquad (35)$$

выполнялось для всех $\theta\in \mathrm{T}$, $w\in \mathrm{U}$.

Неравенство (35) является аналогом условия оптимальности Габасова–Кирилловой [7] на случай нелокального краевого условия.

Заключение

Рассматривается задача оптимального управления с нелокальными краевыми условиями. При помощи модификации метода приращений установлен аналог линеаризованного условия максимума.

Отдельно изучен случай квазиособых управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
2. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. М. : Наука, 1973. 255 с.
3. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М. : Наука, 1973. 448 с.
4. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск : Наука, 1987. 228 с.
5. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку : Изд-во Бакинского гос. ун-та, 2013. 151 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка. Минск, 1982. 48 с. (Препринт ИМ АН БССР. № 30 (155)).
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 39–47.
8. Мансимов К.Б., Наджафова М.Я. Об одной нелокальной дискретной задаче управления // Вестник Бакинского государственного университета. Сер. физико-математических наук. 2014. № 4. С. 46–54.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Либроком, 2013. 256 с.

Поступила в редакцию 21 апреля 2018 г.

Mansimov K.B., Nacafova M.Y. (2019). QUASI-SINGULAR CONTROL IN DISCRETE SYSTEMS CONTROL PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 4–11

DOI: 10.17223/19988605/46/1

Consider a discrete control system

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), u(t)\right),\ t \in \mathrm{T}, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$\Phi\left(x(t_0), x(\mathrm{t}_1)\right) = l\ . \tag{2}$$

Here $\mathrm{T} = \{t_0, t_0+1, ..., t_1-1\}$ is a finite set of consecutive natural numbers, at that t_0 and t_1 is given, $\Phi\left(x_0, x_1\right)$ is the given twice continuously differentiable with respect to the set of variables *n*-dimensional vector-valued function, *l* is the given constant vector, $x(t)$ is a state vector, $u(t)$ is a control actions vector, $f(t,x,u)$ is the given *n*-dimensional vector-valued function continuous with respect to the set of variables together with the partial derivatives with respect to (x,u) up to the second order inclusive.

Let U be the given non-empty, bounded, and convex set in R^r. Each control function $u(t)$ satisfying the condition

$$u(t) \in \mathrm{U} \subset R^r, \quad t \in \mathrm{T} \tag{3}$$

will be called admissible control.

We consider the problem of the minimum of the functional

$$S(u) = \varphi\left(x(t_0), x(t_1)\right)$$

under constraints (1)–(3).

Here $\varphi(x_0, x_1)$ is the twice continuously differentiable scalar function with respect to the set of variables.

A necessary condition for the optimality of quasi-singular controls is established.

Keywords: discrete control problem; nonlocal boundary conditions; linearization maximum principle; quasi-singular control.

MANSIMOV Kamil' Bayramali ogly (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control Problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

NACAFOVA Malahat Yashar (Institute of Control Problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: nacafova.melahet@mail.com

REFERENCES

1. Gabasov, R., Kirillova, F.M., Alsevich, V.V. et al. (2011) *Metody optimizatsii* [Methods of Optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
2. Propoy, A.I. (1973) *Elementy teorii diskretnykh optimal'nykh protsessov* [Elements of the Theory of Discrete Optimal Processes]. Moscow: Nauka.
3. Boltyanskiy, V.G. (1973) *Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami* [Optimal Control of Discrete Systems]. Moscow: Nauka.
4. Ashchepkov, L.T. (1987) *Optimal'noe upravlenie razryvnymi sistemami* [Optimal Control of Discontinuous Systems]. Novosibirsk: Nauka.
5. Mansimov, K.B. (2013) *Diskretnye sistemy* [Discrete Systems]. Baku: Baku State University.
6. Gabasov, R., Kirillova, F.M. & Mansimov, K.B. (1982) *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti vysokogo poryadka* [Necessary conditions for optimality of high order]. Vol. 30(155). Minsk: [s.n.].
7. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1969) K teorii neobkhodimykh usloviy optimal'nosti dlya diskretnykh sistem [To the theory of necessary optimality conditions for discrete systems]. *Avtomatika i telemekhanika*. 12. pp. 39–47. (In Russian).
8. Mansimov, K.B. & Nadzhafova, M.Ya. (2014) On a nonlocal discrete control problem. *Vestnik BGU. Ser. fiz.-mat. nauk*. 4. pp. 46–54.
9. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2013) *Osobye optimal'nye upravleniya* [Singular Optimal Control]. Moscow: Librokom.