ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Математика и механика № 59

МАТЕМАТИКА

УДК 512.54 MSC 15A23
DOI 10.17223/19988621/59/1

М.Н. Зонов, Е.А. Тимошенко

О СТАНДАРТНОЙ ФОРМЕ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы подкольцо поля рациональных чисел имело единственную стандартную форму (в смысле Кона). Аналогичный критерий получен для факторколец кольца целых чисел.

Ключевые слова: *матрица*, *стандартная форма*, *полная линейная группа.*

В 1966 году Кон опубликовал статью [1], посвящённую (2×2)-матрицам, элементы которых принадлежат какому-либо кольцу с единицей. Повышенное внимание к матрицам порядка 2 объяснялось тем, что в строении группы обратимых $(n\times n)$-матриц имеются серьёзные различия между случаями $n=2$ и $n>2$. В этой статье было установлено, в частности, что при выполнении определённых требований, касающихся единственности представления матриц в стандартной форме, можно многое сказать о свойствах инволюций рассматриваемой группы.

С другой стороны, инволюции служат полезным инструментом при изучении групп автоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения и периодических абелевых групп. В связи с этим важно получить ответ на вопрос, будут ли удовлетворять указанным Коном требованиям подкольца поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ и факторкольца кольца целых чисел $\mathbf{Z}$.

Всюду ниже R – ассоциативное кольцо с единицей. Через $U(R)$ будет обозначаться множество всех обратимых элементов этого кольца; через $GL_2(R)$ – группа обратимых (2×2)-матриц с элементами из R (хорошо известно, что в случае коммутативного кольца R группа $GL_2(R)$ состоит из матриц, у которых определители принадлежат $U(R)$, см. [2]).

Определение 1 [1]. Пусть $C\in GL_2(R)$. Будем называть *стандартной формой* матрицы C всякую запись этой матрицы в виде

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_t & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $t\geq 0$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\alpha,\beta\in U(R)$;

2) если $1<i<t$, то $a_i\notin U(R)\cup\{0\}$;

3) если $t=2$, то a_1 и a_2 не могут быть равны 0 одновременно.

Введём для удобства обозначения:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ Y(a)=\begin{pmatrix}a & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ T_{12}(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ T_{21}(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}.$$

[1] Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 1.13557.2019/13.1).

Пусть $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Для всякого множества $L \subset \mathbf{P}$ будем обозначать через $\mathbf{Q}^{(L)}$ подкольцо поля $\mathbf{Q}$, порождённое элементом 1 и элементами вида p^{-1}, где $p \in L$. Нас интересует случай, когда R либо является подкольцом в $\mathbf{Q}$ (т.е. когда R совпадает с одним из колец $\mathbf{Q}^{(L)}$), либо имеет вид $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, где $n > 1$.

Всякое число $a \in \mathbf{Q}^{(L)} \setminus \{0\}$ может быть единственным образом записано в виде $a = u(a)e(a)$, где $u(a)$ – обратимый элемент кольца $\mathbf{Q}^{(L)}$, а $e(a)$ представляет собой произведение конечного числа сомножителей, взятых из $\mathbf{P} \setminus L$ (возможен случай $e(a) = 1$). Функция $e\colon \mathbf{Q}^{(L)} \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$ является *евклидовой нормой* в том смысле, что для любых $a, b \in \mathbf{Q}^{(L)} \setminus \{0\}$ выполнены два условия:

1) если a делится на b в кольце $\mathbf{Q}^{(L)}$, то $e(a) \geq e(b)$;

2) найдутся числа $q, r \in \mathbf{Q}^{(L)}$ такие, что $a = qb + r$ и либо $r = 0$, либо $e(r) < e(b)$.

Если $R = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, то введём функцию $e\colon R \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$, полагая $e(k + n\mathbf{Z}) = k$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (при $n > 2$ эта функция уже не будет евклидовой нормой).

Хорошо известно, что следующая операция:

$$\text{прибавление к } j\text{-му столбцу матрицы } C \text{ её } i\text{-го столбца, домноженного на элемент } a, \tag{2}$$

фактически представляет собой домножение матрицы C справа на матрицу $T_{ij}(a)$. Зафиксируем произвольную матрицу $C \in GL_2(R)$, где R – подкольцо поля $\mathbf{Q}$ либо одно из колец $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Среди всех матриц, которые можно получить из C, применяя операции вида (2), выберем матрицу $B = (b_{ij})$ со следующими свойствами:

I. Число нулевых элементов в B является максимально возможным.

II. Наименьшее из значений функции e, принимаемых на множестве отличных от 0 элементов матрицы B, является минимально возможным (среди всех матриц, удовлетворяющих условию I).

Предположим, что в матрице B нет нулевых элементов. Пусть b_{ij} – тот из элементов этой матрицы, для которого значение $e(b_{ij})$ минимально. Найдутся $q, r \in R$ такие, что $b_{i,\,3-j} = qb_{ij} + r$ и либо $r = 0$, либо $e(r) < e(b_{ij})$. Если прибавить к $(3-j)$-му столбцу матрицы B её j-й столбец, домноженный на $-q$, то мы получим матрицу, имеющую на пересечении i-й строки и $(3-j)$-го столбца элемент r, что, очевидно, противоречит выбору матрицы B.

Предположим теперь, что B содержит ровно один нулевой элемент (пусть это будет b_{ij}). Так как $B \in GL_2(R)$, то $b_{3-i,\,j} \in U(R)$. Прибавляя к $(3-j)$-му столбцу матрицы B её j-й столбец, домноженный на $-b_{3-i,\,3-j}/b_{3-i,\,j}$, придём к матрице с двумя нулевыми элементами, что вновь противоречит выбору B.

Поскольку в B не может быть нулевых столбцов, мы получаем, что матрица B содержит ровно два нулевых элемента, которые могут стоять либо на побочной, либо на главной диагонали. В первом случае B является диагональной матрицей; во втором случае для некоторых $\alpha, \beta \in U(R)$ имеем $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ и, значит,

$$B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Тем самым показано, что любую матрицу $C \in GL_2(R)$ можно превратить в диагональную путём домножения справа на подходящие матрицы вида $T_{ij}(a)$. Так как $(T_{12}(a))^{-1} = T_{12}(-a) = -Y(a)Y(0)$ и $(T_{21}(a))^{-1} = T_{21}(-a) = -Y(0)Y(-a)$, мы можем сделать вывод, что матрица C имеет вид (1) (пока без ограничений на элементы a_i). Далее (см. [1]), из соотношений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -E\,,\ \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\alpha^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b-\alpha^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha a\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(для обратимого элемента α) следует, что для всякой матрицы из $GL_2(R)$ найдётся хотя бы одна стандартная форма.

Если R – произвольное кольцо, то множество всех обладающих хотя бы одной стандартной формой матриц составляет подгруппу группы $GL_2(R)$, обозначаемую через $GE_2(R)$ (см. [1]).

Определение 2 [1]. Будем говорить, что кольцо R:

– имеет *единственную стандартную форму* для GE_2, если стандартная форма единственна для всякой матрицы $C \in GE_2(R)$;

– *квазисвободно* для GE_2, если матрица E обладает единственной стандартной формой (в которой $t=0$ и $\alpha=\beta=1$).

Из определения вытекает, что если кольцо имеет единственную стандартную форму для GE_2, то оно квазисвободно для GE_2.

Длиной стандартной формы (1) будем называть число t. Выпишем общий вид матриц, обладающих стандартной формой длины 1 или 2:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Y(a_1) = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Y(a_1)Y(a_2) = \begin{pmatrix} \alpha a_1 a_2 - \alpha & \alpha a_1 \\ -\beta a_2 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что если для матрицы $C=(c_{ij})$ существует стандартная форма длины <3, то эта стандартная форма восстанавливается однозначно:

– если $c_{22}=0$, то $t=1$, $\alpha=c_{12}$, $\beta=-c_{21}$ и $a_1=\alpha^{-1}c_{11}$;

– если $c_{22}\neq 0$ и $c_{12}=c_{21}=0$, то $t=0$, $\alpha=c_{11}$ и $\beta=c_{22}$;

– если $c_{22}\neq 0$ и хотя бы один из элементов c_{12} и c_{21} не равен 0, то $t=2$, $\beta=-c_{22}$, $a_2=(c_{22})^{-1}c_{21}$, $\alpha=c_{12}a_2-c_{11}$ и $a_1=\alpha^{-1}c_{12}$.

Если R – тело, то $U(R)\cup\{0\}=R$, а следовательно, стандартная форма в $GL_2(R)$ не может иметь длину >2. Отсюда с учётом сказанного выше вытекает

Утверждение 3. Все тела имеют единственную стандартную форму для GE_2.

Следующий результат (он был установлен в [1] для произвольного дискретно нормированного кольца) для полноты изложения приведём с доказательством.

Теорема 4 [1]. Кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$ квазисвободно для GE_2.

Доказательство. Выше было показано, что никакая матрица не может иметь более одной стандартной формы длины <3. Предположим, что матрица E имеет стандартную форму (1), причём $t\geq 3$. Очевидно, что тогда числа $a_2, a_3, \ldots, a_{t-1} \in \mathbf{Z}$ по абсолютной величине не меньше 2.

Введём обозначения $z_{-1}=0$, $z_0=1$, $z_{i+1}=z_i a_{i+1}-z_{i-1}$. Несложно показать по индукции, что первая строка матрицы $Y(a_1)Y(a_2)\ldots Y(a_i)$ имеет вид (z_i, z_{i-1}). Докажем индукцией по i, что $|z_i|\geq|z_{i-1}|$, если $1<i\leq t-1$.

При $i=2$ нам необходимо показать, что $|z_2|\geq|z_1|$, т.е. что $|a_1a_2-1|\geq|a_1|$. Случай $a_1=0$ очевиден; если же $a_1\neq 0$, то требуемое неравенство следует из соотношений $1+|a_1a_2-1|\geq|a_1a_2|\geq 2|a_1|\geq 1+|a_1|$. Допустим теперь, что выполняется неравенство $|z_i|\geq|z_{i-1}|$, где $1<i<t-1$. Тогда

$$|z_{i+1}|+|z_{i-1}|=|z_i a_{i+1}-z_{i-1}|+|z_{i-1}|\ge |z_i a_{i+1}|\ge 2|z_i|\ge |z_i|+|z_{i-1}|,$$

откуда получаем $|z_{i+1}|\ge |z_i|$. Индукция завершена.

Так как $|a_2|\ge 2$, то $z_2=a_1a_2-1\ne 0$, а значит, $|z_{t-1}|\ge\ldots\ge|z_3|\ge|z_2|>0$. Таким образом, в правом верхнем углу задаваемой выражением (1) матрицы стоит отличный от 0 элемент αz_{t-1}, откуда следует, что эта матрица не равна E – противоречие.

Итак, матрица E обладает ровно одной стандартной формой (нулевой длины), что и требовалось. ■

Следующий результат даёт полезное необходимое условие того, чтобы кольцо (не обязательно коммутативное) было квазисвободно для GE_2.

Теорема 5. Если кольцо R квазисвободно для GE_2, то для любых необратимых в R ненулевых элементов b и c выполнено $bc-1\notin U(R)$.

Доказательство. Допустим, что элемент $bc-1$ является обратимым, и введём обозначение $\beta=(1-bc)^{-1}$. Заметим, что

$$cb\cdot c\beta b=c(1-\beta^{-1})\beta b=c(\beta-1)b=c\beta(1-\beta^{-1})b=c\beta b\cdot cb.$$

Отсюда следует, что произведения $(1-cb)(1+c\beta b)$ и $(1+c\beta b)(1-cb)$ равны выражению $1-cb+c\beta b-c(\beta-1)b=1$, т.е. $1-cb\in U(R)$ и $(1-cb)^{-1}=1+c\beta b$. Убедимся теперь, что справедливо соотношение

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-cb&0\\0&\beta\end{pmatrix}Y(-c\beta)Y(b)Y(c)Y(-\beta b)\,. \qquad (3)$$

Действительно, имеют место равенства

$$Y(-c\beta)Y(b)Y(c)=\begin{pmatrix}-c\beta&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&1\\-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-c\beta b-1&-c\beta\\-b&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c\beta bc-c+c\beta&-c\beta b-1\\1-bc&-b\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-c\beta(1-\beta^{-1})-c+c\beta&-(1+c\beta b)\\\beta^{-1}&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&(cb-1)^{-1}\\\beta^{-1}&-b\end{pmatrix},$$

а значит, правая часть соотношения (3) равна матрице

$$\begin{pmatrix}1-cb&0\\0&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&(cb-1)^{-1}\\\beta^{-1}&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta b&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-\beta b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta b&1\\-1&0\end{pmatrix}=E\,,$$

что и требовалось. Если при этом выполнено $b,c\notin U(R)\cup\{0\}$, то запись (3) показывает, что матрица E обладает стандартной формой длины 4, а это невозможно, так как по условию R квазисвободно для GE_2. ■

Частным случаем теоремы 5 является доказанное в [1] утверждение о том, что не являющееся телом локальное кольцо не может быть квазисвободным для GE_2. Справедливо также

Следствие 6. Если кольцо содержит делители нуля, то оно не квазисвободно для GE_2.

Доказательство. В самом деле, если в кольце R есть элементы $b,c\ne 0$, такие, что выполняется $bc=0$, то $b,c\notin U(R)$ и $bc-1=-1\in U(R)$, а следовательно, в силу теоремы 5 кольцо R не квазисвободно для GE_2. ■

Предложение 7. Пусть $R=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, где $n>1$. Следующие условия эквивалентны:

а) R имеет единственную стандартную форму для GE_2;

б) R квазисвободно для GE_2;

в) n – простое число.

Доказательство. Если n – простое число, то кольцо R является полем и ввиду утверждения 3 имеет единственную стандартную форму для GE_2 (откуда следует, что R квазисвободно для GE_2).

Если же число n составное, то R содержит делители нуля. Поэтому по следствию 6 кольцо R не квазисвободно для GE_2, откуда сразу получаем, что R не имеет единственную стандартную форму для GE_2. ■

Теорема 8. 1) Подкольцо поля $\mathbf{Q}$ квазисвободно для GE_2 тогда и только тогда, когда оно совпадает с $\mathbf{Q}$ или с $\mathbf{Z}$.

2) Подкольцо поля $\mathbf{Q}$ имеет единственную стандартную форму для GE_2 тогда и только тогда, когда оно совпадает с $\mathbf{Q}$.

Доказательство. Из утверждения 3 следует, что поле $\mathbf{Q}$ имеет единственную стандартную форму для GE_2 и, следовательно, квазисвободно для GE_2. Кольцо $\mathbf{Z}$ квазисвободно для GE_2 (см. теорему 4), но не имеет единственную стандартную форму для GE_2, как показывают следующие равенства:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y(3)Y(2)Y(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y(2)Y(-2)Y(0) = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Остаётся рассмотреть случай $R = \mathbf{Q}^{(L)}$, где $L \neq \varnothing$ и $L \neq \mathbf{P}$. Предположим сначала, что $2 \notin L$, и обозначим через a наименьший элемент множества L. Поскольку для числа $c = (a+1)/2$ при всех $p \in L$ выполнено $2 \le c < a \le p$, то натуральное число c обладает простым делителем, принадлежащим $\mathbf{P} \setminus L$. Полагая теперь $b = 2$, имеем $b, c \notin U(R) \cup \{0\}$ и $bc - 1 = a \in U(R)$.

Наконец, допустим, что выполнено $2 \in L$, и обозначим через a наименьший из элементов множества $\mathbf{P} \setminus L$. Полагая $b = c = a$, заметим, что число

$$bc - 1 = a^2 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{a-1}{2} \cdot \frac{a+1}{2}$$

представляет собой произведение натуральных чисел, каждое из которых строго меньше a. Отсюда вытекает, что элемент $bc - 1$ можно разложить в произведение простых сомножителей, принадлежащих L, и, следовательно, $bc - 1 \in U(R)$.

В обоих случаях нашлись $b, c \notin U(R) \cup \{0\}$ такие, что выполнено $bc - 1 \in U(R)$. Тогда ввиду теоремы 5 кольцо R не квазисвободно для GE_2, а значит, R не имеет единственную стандартную форму для GE_2. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohn P.M.* On the structure of the GL_2 of a ring // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 1966. V. 30. P. 5–53. DOI: 10.1007/BF02684355.
2. *Глухов М.М.*, *Елизаров В.П.*, *Нечаев А.А.* Алгебра. Т. 1. М.: Гелиос АРВ, 2003. 336 с.

Статья поступила 05.04.2019 г.

Zonov M.N., Timoshenko E.A. ON THE STANDARD FORM FOR MATRICES OF ORDER TWO. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 5–10

DOI 10.17223/19988621/59/1

Keywords: matrix, standard form, general linear group.

We establish a criterion for a subring of the field of rational numbers to have a unique standard form (in the sense of Cohn). A similar criterion is obtained for quotient rings of the ring of integers.

Definition 1. Let R be an associative ring with unit, $C \in GL_2(R)$ and

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

where $t \geq 0$. Suppose that the following conditions are satisfied:

1) α and β are invertible in R;

2) if $1 < i < t$, then a_i is a nonzero non-invertible element of R;

3) if $t = 2$, then a_1 and a_2 cannot both be 0.

Then the above representation is said to be a *standard form* for C.

Definition 2. 1) A ring R is said to have a *unique standard form* if no matrix $C \in GL_2(R)$ can be represented by two different standard forms.

2) A ring R is said to be *quasi-free* if the identity matrix $E \in GL_2(R)$ does not possess a nontrivial standard form.

Theorem 5. If a ring R is quasi-free, then for every nonzero non-invertible elements b and c of R the element $bc - 1$ is non-invertible in R.

Theorem 5 enables us to prove Proposition 7 and Theorem 8.

Proposition 7. Let $R = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, where $n > 1$. The following conditions are equivalent:

a) R has a unique standard form;

b) R is quasi-free;

c) n is a prime.

Theorem 8. 1) A subring of the field $\mathbf{Q}$ is quasi-free if and only if it coincides with $\mathbf{Q}$ or with $\mathbf{Z}$.

2) A subring of the field $\mathbf{Q}$ has a unique standard form if and only if it coincides with $\mathbf{Q}$.

AMS Mathematical Subject Classification: 15A23

Financial support. The work of the second author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (state assignment No. 1.13557.2019/13.1).

ZONOV Matvey Nikitovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mnzonov@gmail.com

TIMOSHENKO Egor Aleksandrovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Cohn P.M. (1966) On the structure of the GL_2 of a ring. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 30. pp. 5–53. DOI: 10.1007/BF02684355.
2. Glukhov M.M., Elizarov V.P., Nechaev A.A. (2003) *Algebra*. Vol. 1. Moscow: Gelios ARV (in Russian).

Received: April 5, 2019