ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/47/6

К.С. Ким, В.И. Смагин

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 17-08-00920.

Рассматривается задача синтеза экстраполятора для дискретного объекта с мультипликативными возмущениями, неизвестным входом и неизвестными параметрами. Задача решена на основе принципа разделения с использованием оптимальной рекуррентной экстраполяции, метода наименьших квадратов и сглаживающих процедур.
Ключевые слова: оценки экстраполяции; дискретная система; мультипликативные возмущения; неизвестный вход, неизвестные параметры.

Задачи оценивания для дискретных систем с мультипликативными возмущениями рассматривались в работах [1–3]. Аналогичные задачи оценивания для непрерывных систем с мультипликативными возмущениями изучались в статье [4]. Для моделей систем с неопределенными параметрами такие задачи были рассмотрены в [5]. Задачи фильтрации и экстраполяции для дискретных систем с неизвестным входом и аддитивными гауссовскими возмущениями изучались в [6–13]. В [7–8] для вычисления оценок неизвестного входа использовался МНК, в работах [9–13] для улучшения качества оценивания применялись алгоритмы непараметрического сглаживания.

В настоящей статье рассматривается задача экстраполяции в дискретных системах с мультипликативными и аддитивными возмущениями с неизвестными входом и неизвестными параметрами. Задача решается на основе принципа разделения с помощью алгоритмов МНК и с использованием сглаживающих процедур (скользящего среднего и непараметрического сглаживания).

1. Постановка задачи

Пусть модель объекта с мультипликативными возмущениями и неполной информацией описывается разностным уравнением:

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)u(k)+\sum_{s=1}^{m}A_s x(k)\theta_s(k)+f(k)+q(k),\ \ x(0)=x_0, \tag{1}$$

где $x(k)\in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, $u(k)\in \mathrm{R}^p$ – известный вход, $f(k)$ – неизвестный вход; x_0 – случайный вектор (предполагаются известными дисперсионная матрица $N_0=\mathrm{M}\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)^{\mathrm{T}}\}$ и математическое ожидание $\bar{x}_0=\mathrm{M}\{x_0\}$); A, B, $A_s\ (s=1...m)$ – заданные матрицы; ΔA, ΔB – матрицы неизвестных параметров; $q(k)$ и $\theta_s(k)$ – векторные гауссовские случайные последовательности со следующими характеристиками:

$$\mathrm{M}\{q(k)\}=0,\ \mathrm{M}\{q(k)q^{\mathrm{T}}(j)\}=Q\delta_{kj},\ \mathrm{M}\{\theta_s(k)\}=0,\ \mathrm{M}\{\theta_s(k)\theta_s^{\mathrm{T}}(j)\}=\Theta_s\delta_{kj}.$$

Здесь δ_{kj} – символ Кронекера.

Канал наблюдений имеет вид:

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \tag{2}$$

где $v(k)$ – гауссовская случайная последовательность с характеристиками: $\mathrm{M}\{v(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{v(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = V\delta_{kj}$. Предполагается, что последовательности $q(k)$, $\theta_s(k)$, $v(k)$ независимы между собой, пара матриц S, A детектируема, матрицы Q, Θ_s $(s = 1...m)$ – неотрицательно определены, $V > 0$.

По информации, поступившей в момент $k \in [0; T]$, требуется найти оценку прогноза $\hat{x}(k+1)$ на основе минимизации следующего критерия:

$$J[0;T\,] = M\{\sum_{k=0}^{T} e^{\mathrm{T}}(k)R(k)e(k)\}, \tag{3}$$

где $R(k) > 0$ – весовая матрица, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ – вектор ошибок.

2. Синтез оптимального экстраполятора

Представим модель (1) в следующем виде:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \sum_{s=1}^{m} A_s x(k)\theta_s(k) + r(k) + q(k), \;\; x(0) = x_0, \tag{4}$$

где $r(k) = \Delta Ax(k) + \Delta Bu(k) + f(k)$ – неизвестный вектор.

Для решения задачи экстраполяции воспользуемся принципом разделения. Это означает, что сначала мы построим оценки вектора $\hat{x}(k)$ в предположении, что вектор $r(k)$ известен, затем строятся оценки вектора $\hat{r}(k)$ в предположении, что оценка прогноза вектора состояния $\hat{x}(k)$ известна.

Тогда для построения оценки можно использовать рекуррентный алгоритм экстраполятора Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + r(k) + K(k)(y(k) - S\hat{x}(k)), \;\; \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \tag{5}$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов передачи экстраполятора.

Найдем матрицу $K(k)$, обеспечивающую минимум критерия (3). Для этого запишем уравнение для вектора ошибок $e(k)$, вычитая из уравнения (4) уравнение (5):

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) = \\ &= (A - KS)e(k) + \sum_{s=1}^{m} A_s x(k)\theta_s(k) + q(k) - Kv(k). \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая (6), уравнение для матрицы $N(k) = \mathrm{M}\{e(k)e(k)^{\mathrm{T}}\}$ получим в виде следующего разностного уравнения:

$$\begin{aligned} N(k+1) &= (A - K(k)S)N(k)(A - K(k)S)^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s N(k) A_s^{\mathrm{T}} + \\ &+ \sum_{s=1}^{m} A_s \hat{x}(k)\hat{x}(k)^{\mathrm{T}} A_s^{\mathrm{T}} + Q + K(k)VK(k)^{\mathrm{T}}, \;\; N(0) = N_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Представим критерий (3) в виде

$$J[0;T] = \mathrm{tr}\, N_0 R(0) + \sum_{k=1}^{T} \mathrm{tr}\, N(k)R(k), \tag{8}$$

где tr – след матрицы. Тогда, подставив в (8) формулу (7) со сдвигом на один такт, в результате получим

$$\begin{aligned} J[0;T] &= \mathrm{tr}\, N_0 R(0) + \sum_{k=1}^{T} \mathrm{tr}[(A - K(k-1)S)N(k-1)(A - K(k-1)S)^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s N(k-1) A_s^{\mathrm{T}} + \\ &+ \sum_{s=1}^{m} A_s \hat{x}(k-1)\hat{x}(k-1)^{\mathrm{T}} A_s^{\mathrm{T}} + Q + K(k-1)VK(k-1)^{\mathrm{T}}]R(k). \end{aligned} \tag{9}$$

Используя правила дифференцирования функции след (tr) от произведения матриц [14]:

$$\frac{\partial \operatorname{tr} AXB}{\partial X} = A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}, \quad \frac{\partial \operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} X B^{\mathrm{T}}}{\partial X} = BA, \tag{10}$$

из уравнения

$$\frac{\partial J[0;T]}{\partial K} = 0, \tag{11}$$

учитывая, что матрица $R(k)$ не вырождена, получим выражение для матрицы $K(k)$:

$$K(k) = AN(k)S^{\mathrm{T}}(SN(k)S^{\mathrm{T}} + V)^{-1}. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим стационарный случай, когда дополнительно предполагается, что пара матриц A, B управляема и существует управление в форме обратной связи, зависящей от $\hat{x}(k)$, которое осуществляет слежение за некоторым постоянным вектором z. Тогда матрица коэффициентов передачи экстраполятора также будет постоянной и может быть вычислена по формуле

$$K = ANS^{\mathrm{T}}(SNS^{\mathrm{T}} + V)^{-1}, \tag{13}$$

где матрица N определяется из решения матричного алгебраического уравнения

$$N = (A - KS)N(A - KS)^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s N A_s^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s z z^{\mathrm{T}} A_s^{\mathrm{T}} + Q + KVK^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

Если решение уравнения (14) существует, $N > 0$, а также в силу того, что в этом случае матрица $\sum_{s=1}^{m} A_s N A_s^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s z z^{\mathrm{T}} A_s^{\mathrm{T}} + Q + KVK^{\mathrm{T}}$ положительно определена, следует устойчивость матрицы динамики экстраполятора $(A - KS)$, так как будет выполнено условие устойчивости для дискретных систем в виде следующего матричного неравенства:

$$(A - KS)N(A - KS)^{\mathrm{T}} - N < 0. \tag{15}$$

3. Оценка неизвестного входа

В качестве алгоритма оценивания неизвестного входа будем использовать алгоритмы МНК, в этом случае оценку можно построить на основе минимизации дополнительного критерия [7, 8]:

$$I = \sum_{t=1}^{k} \left\{ \| y(t) - S\tilde{x}(t) \|_{W}^{2} + \| r(t-1) \|_{\overline{W}}^{2} \right\}, \tag{16}$$

где $W, \overline{W}$ – положительно определенные весовые матрицы, $\tilde{x}(t) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1) + r(t-1)$. Построенные на основе минимизации (16) оценки неизвестного входа примут вид:

$$\hat{r}^{\langle \mathrm{LSM} \rangle}(k) = [S^{\mathrm{T}} W S + \overline{W}]^{-1} S^{\mathrm{T}} W \{ y(k) - S\ (A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1)) \}. \tag{17}$$

Оценка неизвестного входа, использующая дополнительное непараметрическое сглаживание [11–13], определим по формуле:

$$\hat{r}^{\langle \mathrm{NP} \rangle}(k) = [S^{\mathrm{T}} W S + \overline{W}]^{-1} S^{\mathrm{T}} W \hat{\Omega}, \tag{18}$$

где j-я компонента вектора $\hat{\Omega}(k)$ имеет вид:

$$\hat{\Omega}_j(k) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{[y(i) - S(A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1))]_j}{\mu_j} G\left(\frac{k-i+1}{\mu_j} \right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu_j} G\left(\frac{k-i+1}{\mu_j} \right)}. \tag{19}$$

В соотношении (19), $G(\cdot)$ является ядерной функцией и μ_j – коэффициентом сглаживания.

Для построения оценки неизвестного входа можно также использовать скользящее среднее $\bar{\Omega}$:

$$\hat{r}^{\langle \mathrm{SM}\rangle}(k)=[S^{\mathrm{T}}WS+\bar{W}]^{-1}S^{\mathrm{T}}W\bar{\Omega}, \tag{20}$$

где j-я компонента вектора $\bar{\Omega}$ вычисляется по формуле

$$\bar{\Omega}_j(k)=\sum_{i=k-l-1}^{k}\frac{[y(i)-S(A\hat{x}(i-1)+Bu(i-1))]_j}{l} \tag{21}$$

(в (21) l – ширина окна сглаживания).

4. Результаты моделирования

Экстраполяции в дискретных системах с мультипликативными возмущениями реализована для трех вариантов вычисления оценок неизвестного вектора (формулы (17), (18), (20)). Оценки вектора состояния определялись из рекуррентного уравнения

$$\hat{x}(k+1)=A\hat{x}(k)+Bu(k)+\hat{r}(k)+K(k)(y(k)-S\hat{x}(k)),\ \ \hat{x}(0)=\bar{x}_0, \tag{22}$$

где матрица коэффициентов передачи $K(k)$ вычислялась по формуле (12).

Моделирование выполнено для следующих исходных данных:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}1\\ -0{,}05 & 0{,}94\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0{,}01 & -0{,}0015\\ 0{,}003 & 0{,}01\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0{,}01 & 0{,}004\\ -0{,}002 & 0{,}01\end{pmatrix},$$

$$\Delta A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0\\ 0{,}05 & 0{,}1\end{pmatrix},\ \Delta B=\begin{pmatrix}0{,}1 & -0{,}03\\ 0 & 0{,}1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0{,}03 & 0\\ 0 & 0{,}04\end{pmatrix},$$

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix}0{,}06 & 0\\ 0 & 0{,}02\end{pmatrix},$$

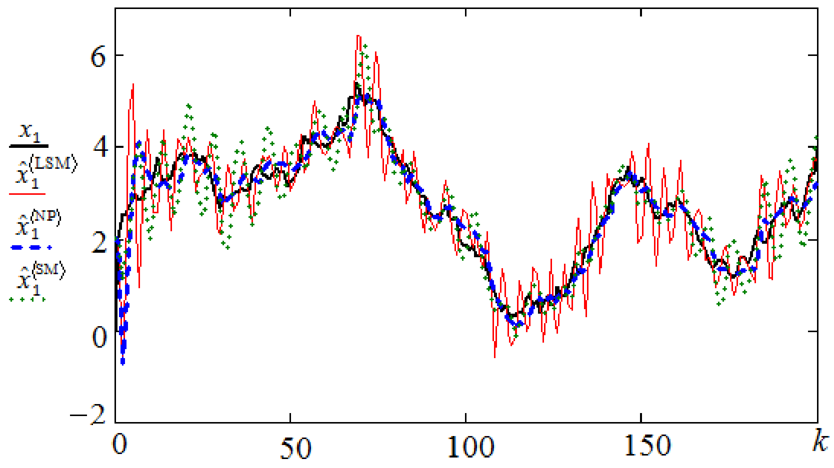
$$W=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}1\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}15\end{pmatrix}, \bar{W}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$u(k)\begin{cases}\begin{pmatrix}0{,}1 & -0{,}1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k\in[1;30],\\ \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k\in[31;75],\\ \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k\in[76;126],\\ \begin{pmatrix}0{,}1 & -0{,}1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k\in[127;184],\\ \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k\in[185;200].\end{cases}$$

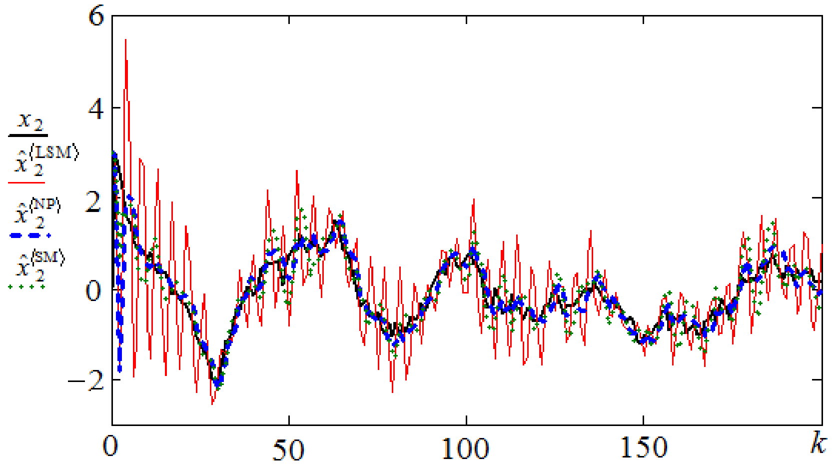
В (19) использовалась ядерная функция гауссовского вида:

$$G(u)=\frac{\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Результаты моделирования представлены на рис. 1, 2 и в табл. 1, 2.



a



b

Рис. 1, *a*, *b*. Графики компонент вектора состояния *x* и оценок вектора состояния, полученные с использованием алгоритмов МНК $\hat{x}^{\langle LSM \rangle}$, модифицированного МНК с использованием непараметрического сглаживания $\hat{x}^{\langle NP \rangle}$, модифицированного МНК с использованием метода скользящего среднего $\hat{x}^{\langle SM \rangle}$

Fig. 1, *a*, *b*. Graphs for the state vector *x* components and state vector estimates components using LSM algorithms $\hat{x}^{\langle LSM \rangle}$, modified LSM using nonparametric smoothing $\hat{x}^{\langle NP \rangle}$, modified LSM using the moving average method $\hat{x}^{\langle SM \rangle}$

В табл. 1 приведены результаты сравнения среднеквадратических ошибок отклонений оценок вектора состояния для алгоритмов МНК и модифицированного МНК, использующего процедуру скользящего среднего и алгоритм непараметрического сглаживания для оценки неизвестного входа. Расчет среднеквадратических ошибок оценивания выполнялся по формулам:

$$\sigma_{x,i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2}{N-1}}, \quad \sigma_{r,i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N}(r_i(k) - \hat{r}_i(k))^2}{N-1}} \quad (i = \overline{1,2}).$$

Таблица 1

Среднеквадратические ошибки оценок вектора состояния ($\sigma_{x,i}$)

Номер компоненты *i*	МНК	МНК и скользящее среднее	МНК и непараметрическое сглаживание
1	0,732	0,527	0,294
2	0,821	0,425	0,268

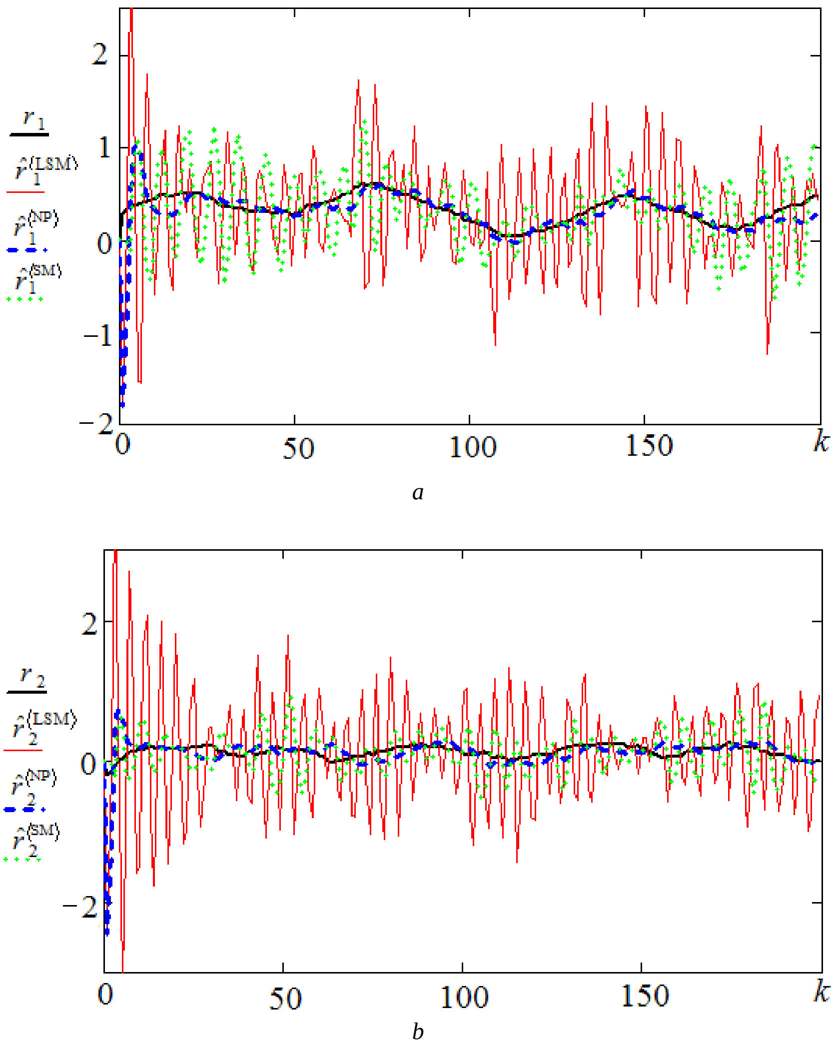


Рис. 2, *a*, *b*. Графики компонент вектора неизвестного входа r и оценок вектора неизвестного входа, полученных с использованием алгоритмов МНК $\hat{r}^{\langle LSM \rangle}$, модифицированного МНК с использованием непараметрического сглаживания $\hat{r}^{\langle NP \rangle}$, модифицированного МНК с использованием метода скользящего среднего $\hat{r}^{\langle SM \rangle}$
Fig. 2, *a*, *b*. Graphs for the unknown input vector r components and estimates vector of the unknown input components using the LSM algorithms $\hat{r}^{\langle LSM \rangle}$, modified LSM using nonparametric smoothing $\hat{r}^{\langle NP \rangle}$, modified LSM using the moving average method $\hat{r}^{\langle SM \rangle}$

В табл. 2 показаны среднеквадратические ошибки отклонений оценок неизвестного входа.

Таблица 2

Среднеквадратические ошибки оценок $r(k)$ ($\sigma_{r,i}$)

Номер компоненты i	МНК	МНК и скользящее среднее	МНК и непараметрическое сглаживание
1	0,712	0,454	0,293
2	0,763	0,302	0,099

Из табл. 1 и 2 видно, что применение для оценок неизвестного входа МНК с дополнительным сглаживанием с помощью алгоритмов скользящего среднего и непараметрического сглаживания позволяет уменьшить среднеквадратические ошибки оценок экстраполяции вектора состояния и среднеквадратические ошибки оценок вектора неизвестного входа.

Заключение

Получено решение задачи синтеза экстраполятора для линейной дискретной модели с аддитивными и мультипликативными возмущениями, с неизвестным входом и неизвестными параметрами. Показано, что применение алгоритмов сглаживания при оценивании неизвестного входа позволяет повысить точность прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mohanty N.C., Soong T.T. Linear filtering in multiplicative noise // Information and Control. 1977. V. 34, is. 2. P. 141–147.
2. Stoica A.-M., Yaesh I. Kalman-type filtering for discrete-time stochastic systems with state-dependent noise // Proc. Mathematical Theory of Networkand Systems-MTNS. 28 July – 1 August, Blacksburg, VA. 2008. P. 1–6.
3. Wu Y., Zhang Q., Shen Z. Kalman filtering with multiplicative and additive noises // Proc. 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). 12–15 June, 2016. P. 483–487.
4. Germani A., Manes C., Palumbo P. Linear filtering for bilinear stochastic differential systems with unknown inputs // IEEE Trans. on Automatic Control. 2002. V. 47, No. 10. P. 1726–1730.
5. Yang F., Wang Z., Hung Y.S. Robust Kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises // IEEE Trans. on Automatic Control. 2002. V. 47, No. 7. P. 1179–1183.
6. Smagin V.I. State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations // Russian Physics Journal. 2015. V. 58, is. 7. P. 1010–1017.
7. Janczak D., Grishin Yu. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. 2006. No. 4. P. 851–862.
8. Gillijns S., Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // Automatica. 2007. V. 43. P. 111–116.
9. Hsien C.-S. On the optimality of two-stage Kalman filter for systems with unknown input // Asian J. of Control. 2010. V. 12, No. 4. P. 510–523.
10. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Ch. 2: Unknown input observers and filters // Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer International Publishing, 2014. P. 19–56.
11. Koshkin G.M., Smagin V.I. Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms // Proc. 10th International Conference on Digital Technologies. Zilina, Slovakia, July 9–11, 2014. P. 120–124.
12. Smagin V.I., Koshkin G.M. Kalman filtering and conrol algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique // Proc. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015). 24–27 August, 2015, Miedzyzdroje, Poland. P. 247–251.
13. Koshkin G.M., Smagin V.I. Kalman filtering and forecasting algorithms with use of nonparametric functional estimators // Springer Proceeding in Mathematical Statistics / eds. R. Cao et al. 2016. Vol. 175. P. 75–84.
14. Athans M. The matrix minimum principle // Informat. and Contr. 1968. V. 11. P. 592–606.

Поступила в редакцию 28 сентября 2018 г.

Kim K.S., Smagin V.I. (2019) EXTRAPOLATION IN DISCRETE SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE PERTURBATIONS AT INCOMPLETE INFORMATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 49–56

DOI: 10.17223/19988605/47/6

The model with multiplicative perturbations and incomplete information is described by the equation:

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)u(k)+\sum_{s=1}^{m}A_s x(k)\theta_s(k)+f(k)+q(k),\ \ x(0)=x_0,$$

where $x(k)\in \mathrm{R}^n$ is the state vector, $u(k)\in \mathrm{R}^p$ is the known input, $f(k)$ is an unknown input; x_0 is a random vector (the covariance matrix $N_0=\mathrm{M}\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)^{\mathrm{T}}\}$ and the expectation $\bar{x}_0=\mathrm{M}\{x_0\}$ are assumed to be known); A, B, $A_s\,(s=1...m)$ are known matrices; $\Delta A, \Delta B$ are matrices of unknown parameters; $q(k)$ and $\theta_s(k)$ are Gaussian vector random sequences with the following characteristics: $\mathrm{M}\{q(k)\}=0$, $\mathrm{M}\{q(k)q^{\mathrm{T}}(j)\}=Q\delta_{kj}$, $\mathrm{M}\{\theta_s(k)\}=0$, $\mathrm{M}\{\theta_s(k)\theta_s^{\mathrm{T}}(j)\}=Q\delta_{kj}$.

The observation channel is described by the formula: $y(k)=Sx(k)+v(k)$, where $v(k)$ is a Gaussian random sequence with known characteristics.

The problem solution is proposed to be performed on the basis of the separation principle using the optimal recurrent extrapolation, the least squares method with additional smoothing using the moving average algorithms and nonparametric estimators. It is shown that the use of smoothing algorithms for estimating an unknown input for a discrete model with multiplicative perturbations allows can improve the prediction accuracy.

Keywords: extrapolation estimates; discrete system; multiplicative perturbations; unknown input, unknown parameters.

KIM Konstantin Stanislavovich (Post-graduate student of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: kks93@rambler.ru

SMAGIN Valery Ivanovich (Doctor of Technical Science, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: vsm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Mohanty, N.C. & Soong, T.T. (1977) Linear filtering in multiplicative noise. *Information and Control*. 34(2). pp. 141–147.
2. Stoica, A.-M. & Yaesh, I. (2008) Kalman–type filtering for discrete–time stochastic systems with state–dependent noise. *Proc. Mathematical Theory of Networkand Systems-MTNS*. July 28 – August 1. Blacksburg, VA. pp. 1–6.
3. Wu, Y., Zhang, Q. & Shen, Z. (2016) Kalman filtering with multiplicative and additive noises. *Proc. 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*. June 12–15. pp. 483–487.
4. Germani, A., Manes, C. & Palumbo, P. (2002) Linear filtering for bilinear stochastic differential systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 47(10). pp. 1726–1730. DOI: 10.1109/TAC.2002.803546
5. Yang, F., Wang, Z. & Hung, Y.S. (2002) Robust Kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 47(7). pp. 1179–1183. DOI: 10.1109/TAC.2002.800668
6. Smagin, V.I. (2015) State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 1010–1017. DOI: 10.1007/s11182-015-0602-x
7. Janczak, D. & Grishin, Yu. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 4. pp. 851–862.
8. Gillijns, S. & Moor, B. (2007) Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*. 43. pp. 111–116. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.11.016 ·
9. Hsien, C.-S. (2010) On the optimality of two-stage Kalman filter for systems with unknown input. *Asian Journal of Control*. 12(4). pp. 510–523. DOI: 10.1109/9.895577
10. Witczak, M. (2014) Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters. In: Angrisani, L. et al. (eds) *Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer International Publishing*. Switzerland. pp. 19–56.
11. Koshkin, G.M. & Smagin, V.I. (2014) Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms. *Proc. of the 10th International Conference on Digital Technologies*. Zilina, Slovakia. July 9–11. pp. 120–124.
12. Smagin, V.I. & Koshkin, G.M. (2015) Kalman filtering and conrol algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique. *Proc. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015)*. August 24–27. Miedzyzdroje. Poland. pp. 247–251.
13. Koshkin, G.M. & Smagin, V.I. (2016) Kalman filtering and forecasting algorithms with use of nonparametric functional estimators. In: Cao, R. et al. (eds) *Springer Proceeding in Mathematical Statistics.* Vol. 175. pp. 75–84.
14. Athans, M. (1968) The matrix minimum principle. *Information and Control*. 11. pp. 592–606.