ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

DOI 10.17223/20710410/10/1

УДК 519.1

ЧИСЛО НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ ПОКРЫТИЙ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ПОДМНОЖЕСТВАМИ ФИКСИРОВАННОГО РАЗМЕРА

Р. М. Ганопольский

Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия

E-mail: rodion@utmn.ru

Рассматривается новый вид комбинаторных чисел, исчисляющих количество покрытий конечного множества подмножествами с заданными мощностями. Доказывается ряд соотношений и тождеств. Вычисляются некоторые суммы этих чисел. Приводятся частные случаи новых комбинаторных чисел при определенных значениях коэффициентов и интерпретация этих чисел.

Ключевые слова: *покрытие, конечное множество, комбинаторные числа.*

1. Основные понятия

Пусть дано конечное множество $\mathbf{X}$ мощности n и семейство $\mathbf{S}$ его непустых несовпадающих подмножеств, являющееся покрытием изначального множества:

$$\begin{gathered} |\mathbf{X}| = n, \\ \mathbf{S} \subset \mathfrak{P}'(\mathbf{X}), \\ \bigcup_{U_\alpha \in \mathbf{S}} U_\alpha = \mathbf{X}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathfrak{P}'(\mathbf{X})$ — семейство всех непустых подмножеств множества $\mathbf{X}$ [1]. Множество всех покрытий $\mathbf{S}$, удовлетворяющих условию (1), обозначим $\mathbf{C}(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \left\{ \mathbf{S} \subset \mathfrak{P}'(\mathbf{X}) : \bigcup_{U_\alpha \in \mathbf{S}} U_\alpha = \mathbf{X} \right\}, \tag{2}$$

а множество покрытий, содержащих только собственные подмножества $\mathbf{X}$, обозначим $\mathbf{C}'(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{C}'(\mathbf{X}) = \{ \mathbf{S} \in \mathbf{C}(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \notin \mathbf{S} \}. \tag{3}$$

Для множества покрытий, содержащих ровно k подмножеств, где $1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$, используем обозначение $\mathbf{C}_k(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{C}_k(\mathbf{X}) = \{ \mathbf{S} \in \mathbf{C}(\mathbf{X}) : |\mathbf{S}| = k \}. \tag{4}$$

В качестве примера конечного множества $\mathbf{X}$ можно взять множество целых чисел от 1 до n:

$$\mathbf{X}_n = \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Согласно работам [1, 2], мощность множества $\mathbf{C}(\mathbf{X})$, равную количеству всех покрытий конечного множества, можно вычислить по формуле (для пустого множества по определению мощность множества покрытий равна 1):

$$|\mathbf{C}(\mathbf{X})| = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i 2^{2^{n-i}}, \tag{6}$$

мощность множества $\mathbf{C}'(\mathbf{X})$ — по формуле

$$|\mathbf{C}'(\mathbf{X})| = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i 2^{2^{n-i}} - \frac{2^{2^n}}{4}, \tag{7}$$

а мощность множества $\mathbf{C}_k(\mathbf{X})$ — по формуле

$$|\mathbf{C}_k(\mathbf{X})| = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i C_{2^{n-i}-1}^k, \tag{8}$$

где C_n^i — биномиальный коэффициент:

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = C_n^{n-i}. \tag{9}$$

Зафиксируем мощности подмножеств, составляющих семейство $\mathbf{S}$ (1), и введем обозначение

$$\mathbf{S}(k_1, k_2, \ldots, k_n) \tag{10}$$

для покрытия, содержащего k_i подмножеств мощности i (для всех i). Мощность такого покрытия равна

$$|\mathbf{S}(k_1, k_2, \ldots, k_n)| = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Аналогично обозначениям (2)–(4) введем обозначение для множества семейств (10):

$$\mathbf{C}(k_1, k_2, \ldots, k_n)(\mathbf{X}) = \{\mathbf{S}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\}. \tag{11}$$

Мощность введенного множества обозначим следующим образом:

$$|\mathbf{C}(k_1, k_2, \ldots, k_n)(\mathbf{X})| = {}_nN(k_1, k_2, \ldots, k_n). \tag{12}$$

В случае, когда не равны нулю только несколько k_i, будем пользоваться другим обозначением:

$${}_nN_{l_1 l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m}, \tag{13}$$

где k_i — это количество подмножеств мощности l_i в покрытии. Например:

— ${}_4N_2^3 = {}_4N(0,3,0,0)$ — количество покрытий множества мощности 4, состоящих из трех подмножеств мощности 2;

— ${}_5N_{2\,3}^{3\,1} = {}_5N(0,3,1,0,0)$ — количество покрытий множества мощности 5, состоящих из трех подмножеств мощности 2 и одного подмножества мощности 3.

Подобное обозначение введем и для множества семейств (11):

$${}_n\mathbf{C}_{l_1 l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m}(\mathbf{X}). \tag{14}$$

Для фиксирующих коэффициентов в (12) существуют следующие ограничения:

$$0 \leqslant k_i \leqslant C_n^i,$$

а для коэффициентов в (13), (14) — следующие:

$$\begin{gathered} 1 \leqslant m \leqslant n, \\ 1 \leqslant l_1 < l_2 < \cdots < l_m \leqslant n, \\ 1 \leqslant k_i \leqslant C_n^{l_i}. \end{gathered}$$

Рассмотрим множество $\mathbf{X}$ мощности 3 в виде набора чисел $\mathbf{X}_3 = \{1, 2, 3\}$, а также все различные покрытия $\mathbf{X}_3$, состоящие только из подмножеств мощности 2:

$$\begin{aligned} \{1,2\} \cup \{2,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{1,3\} \cup \{2,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{1,2\} \cup \{1,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{1,2\} \cup \{2,3\} \cup \{1,3\} &= \mathbf{X}_3. \end{aligned}$$

Таким образом, комбинаторные числа вида ${}_3N_2^k = {}_3N(0, k, 0)$ равны

$${}_3N(0,1,0) = 0; \quad {}_3N(0,2,0) = 3; \quad {}_3N(0,3,0) = 1.$$

Рассмотрим теперь все покрытия $\mathbf{X}_3$, состоящие из подмножеств мощности 2 и 3:

$$\begin{aligned} \{1,2\} \cup \{1,2,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{1,3\} \cup \{1,2,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{2,3\} \cup \{1,2,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{1,2\} \cup \{2,3\} \cup \{1,2,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{1,3\} \cup \{2,3\} \cup \{1,2,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{1,2,3\} &= \mathbf{X}_3, \\ \{1,2\} \cup \{2,3\} \cup \{1,3\} \cup \{1,2,3\} &= \mathbf{X}_3. \end{aligned}$$

Следовательно, комбинаторные числа вида ${}_3N_{2\,3}^{k\,l} = {}_3N(0, k, l)$, где $k \neq 0$ и $l \neq 0$, равны

$${}_3N(0,1,1) = 3; \quad {}_3N(0,2,1) = 3; \quad {}_3N(0,3,1) = 1.$$

С помощью перебора всех вариантов покрытий можно получить и остальные коэффициенты вида ${}_3N(m, k, l)$:

$$\begin{array}{llll} {}_3N(1,0,0) = 0, & {}_3N(2,0,0) = 0, & {}_3N(3,0,0) = 1, & {}_3N(1,1,0) = 3, \\ {}_3N(2,1,0) = 6, & {}_3N(3,1,0) = 3, & {}_3N(1,2,0) = 9, & {}_3N(2,2,0) = 9, \\ {}_3N(3,2,0) = 3, & {}_3N(1,3,0) = 3, & {}_3N(2,3,0) = 3, & {}_3N(3,3,0) = 1, \\ {}_3N(1,0,1) = 3, & {}_3N(2,0,1) = 3, & {}_3N(3,0,1) = 1, & {}_3N(1,1,1) = 9, \\ {}_3N(2,1,1) = 9, & {}_3N(3,1,1) = 3, & {}_3N(1,2,1) = 9, & {}_3N(2,2,1) = 9, \\ {}_3N(3,2,1) = 3, & {}_3N(1,3,1) = 3, & {}_3N(2,3,1) = 3, & {}_3N(3,3,1) = 1. \end{array}$$

2. Соотношения и тождества

Все соотношения и тождества для комбинаторных чисел (12), (13) сначала будем получать для простого вида чисел, когда все подмножества покрытия имеют одинаковую мощность (то есть для комбинаторных чисел ${}_nN_k^l$). В этом случае фиксируем количество и мощности множеств.

Найдем зависимость комбинаторных чисел ${}_nN_l^k$ от биномиальных коэффициентов C_j^i и комбинаторных чисел предыдущих порядков вида ${}_{n-i}N_l^k$. Множество $\mathbf{X}$ мощности n имеет C_n^l подмножеств мощности l. Из этих подмножеств можно выбрать $C_{C_n^l}^k$ способами k подмножеств. Не все эти наборы подмножеств будут являться покрытием множества $\mathbf{X}$. Некоторые из них являются покрытиями собственных подмножеств исходного множества $\mathbf{X}$. Следовательно, число покрытий множества $\mathbf{X}$ k подмножествами мощности l будет равно $C_{C_n^l}^k$ минус число всех покрытий собственных подмножеств тем же количеством подмножеств с такими же мощностями:

$$\left|{}_n\mathbf{C}_l^k\left(\mathbf{X}\right)\right| = C_{C_n^l}^k - \sum_{U_\alpha \subset \mathbf{X}} \left|{}_{|U_\alpha|}\mathbf{C}_l^k\left(U_\alpha\right)\right|. \tag{15}$$

У множества мощности n существует C_n^i подмножеств мощности $(n-i)$. Количество покрытий множества мощности $n-i$ — это комбинаторное число ${}_{n-i}N_l^k$. Окончательно получаем рекуррентное соотношение для числа покрытий множества:

$${}_nN_l^k = C_{C_n^l}^k - {}_{n-1}N_l^k C_n^1 - {}_{n-2}N_l^k C_n^2 - {}_{n-3}N_l^k C_n^3 - \cdots \tag{16}$$

Вычитаемые в (16) берутся пока ${}_{n-i}N_l^k > 0$, то есть пока $C_{n-i}^l \geqslant k$. Таким образом, формулу (16) можно записать в компактном виде

$${}_nN_l^k = C_{C_n^l}^k - \sum_{i \geqslant 1}^{C_{n-i}^l \geqslant k} {}_{n-i}N_l^k C_n^i. \tag{17}$$

Соберем в соотношении (17) все слагаемые с комбинаторными числами N_l^k с одной стороны, а биномиальный коэффициент $C_{C_n^l}^k$ — с другой:

$$C_{C_n^l}^k = {}_nN_l^k + \sum_{i \geqslant 1}^{C_{n-i}^l \geqslant k} {}_{n-i}N_l^k C_n^i = \sum_{i \geqslant 0}^{C_{n-i}^l \geqslant k} {}_{n-i}N_l^k C_n^i. \tag{18}$$

Выражение (18) представляет собой биномиальное преобразование [3]. Используя обратное биномиальное преобразование, получим

$${}_nN_l^k = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i C_n^i C_{C_{n-i}^l}^k = C_{C_n^l}^k + \sum_{i \geqslant 1} (-1)^i C_n^i C_{C_{n-i}^l}^k. \tag{19}$$

Выведем аналогичное (19) выражение для общего случая. Из множества $\mathbf{X}$ мощности n можно выбрать $C_n^{l_i}$ способами подмножество мощности l_i. Из этого числа подмножеств выбрать k_i подмножеств можно $C_{C_n^{l_i}}^{k_i}$ способами. Так как все задаваемые мощности l_i не равны между собой, то выбрать семейство, содержащее k_1 подмножеств мощности l_1, k_2 подмножеств мощности l_2 и т. д., можно следующим числом способов:

$$\prod_{i=1}^{m} C_{C_n^{l_i}}^{k_i}.$$

Таким образом, в общем случае выражение (15) будет иметь следующий вид:

$$\left|{}_n\mathbf{C}^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1\,l_2\cdots l_m}\left(\mathbf{X}\right)\right| = \prod_{i=1}^{k=m} C^{k_i}_{C_n^{l_i}} - \sum_{U_\alpha\subset\mathbf{X}}\left|{}_{|U_\alpha|}\mathbf{C}^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1\,l_2\cdots l_m}\left(U_\alpha\right)\right|.$$

У множества мощности n существует C_n^i подмножеств мощности $n-i$. Количество покрытий множества мощности $n-i$ подмножествами с фиксированными мощностями есть комбинаторное число ${}_{n-i}N^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1\,l_2\cdots l_m}$. Получаем рекуррентное соотношение для числа покрытий множества:

$${}_nN^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1\,l_2\cdots l_m} = \prod_{i=1}^{m} C^{k_i}_{C_n^{l_i}} - \sum_{i\geqslant 1} C_n^i\,{}_{n-i}N^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1\,l_2\cdots l_m}, \tag{20}$$

где параметр суммы i ограничен сверху соотношениями

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,m\}\left(C_{n-i}^{l_j} \geqslant k_j\right).$$

Избавившись в правой части (20) от комбинаторных чисел N с помощью биномиального преобразования, получим нерекуррентное выражение для ${}_nN^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1\,l_2\cdots l_m}$, содержащее только биномиальные коэффициенты:

$${}_nN^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1\,l_2\cdots l_m} = \prod_{i=1}^{m} C^{k_i}_{C_n^{l_i}} + \sum_{i\geqslant 1}(-1)^i C_n^i \prod_{j=1}^{m} C^{k_j}_{C_{n-i}^{l_j}}. \tag{21}$$

Найдем зависимость комбинаторных чисел ${}_nN_l^k$ от комбинаторных чисел предыдущих порядков вида ${}_{n-i}N_l^{k-1}$, где $0 \leqslant i \leqslant l$. Рассмотрим произвольное покрытие множества мощности $n-i$, состоящее из $k-1$ подмножеств мощности l. Теперь добавим в него еще одно множество мощности l таким образом, чтобы получившееся семейство стало покрытием для множества мощности n. Для этого добавляемое множество должно содержать i элементов, не входящих в изначальное множество мощности $n-i$, и, следовательно, $l-i$ элементов, входящих в него.

Рассмотрим случай, когда $i=0$. У множества мощности n существует C_n^l подмножеств мощности l. Из них $k-1$ уже входят в покрытие. Значит, в это покрытие можно добавить одно из $C_n^l - k + 1$ оставшихся подмножеств. Так как у множества мощности n существует ${}_nN_l^{k-1}$ покрытий, состоящих из $k-1$ подмножеств мощности l, то добавление еще одного подмножества дает

$$\left(C_n^l - k + 1\right){}_nN_l^{k-1} \tag{22}$$

покрытий этого множества k подмножествами мощности l.

В случае, когда $i > 0$, существует ${}_{n-i}N_l^{k-1}$ покрытий множества мощности $n-i$ подмножествами мощности l в количестве $k-1$. У множества мощности n существует C_n^{n-i} подмножеств мощности $n-i$. Способов выбрать $l-i$ элементов из множества мощности $n-i$ равно C_{n-i}^{l-i}. Таким образом, количество возможных вариантов получения из покрытий множества мощности $n-i$ покрытий множества мощности n равно

$$C_{n-i}^{l-i}C_n^{n-i}\,{}_{n-i}N_l^{k-1} = C_{n-i}^{l-i}C_n^i\,{}_{n-i}N_l^{k-1}. \tag{23}$$

Так как добавить в покрытие можно любое из k подмножеств мощности l, то, просуммировав (22) и (23) для всех i, окончательно получаем

$${}_nN_l^k = \frac{1}{k}\left[\left(C_n^l - k + 1\right){}_nN_l^{k-1} + \sum_{i=1}^{l} C_{n-i}^{l-i}C_n^i\,{}_{n-i}N_l^{k-1}\right]. \tag{24}$$

Вынося одно слагаемое, получаем другой вид выражения (24):

$$ {}_nN_l^k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{l} C_{n-i}^{l-i} C_n^i {}_{n-i}N_l^{k-1} - \frac{k-1}{k}{}_nN_l^{k-1}. \tag{25} $$

С помощью аналогичных рассуждений можно вывести соотношение для общего случая

$$ {}_nN_{l_1\cdots l_j\cdots l_m}^{k_1\cdots k_j\cdots k_m} = \frac{1}{k_j}\left[\left(C_n^{l_j} - k_j + 1\right){}_nN_{l_1\cdots l_j\cdots l_m}^{k_1\cdots(k_j-1)\cdots k_m} + \sum_{i=1}^{l_j} C_{n-i}^{l_j-i} C_n^i {}_{n-i}N_{l_1\cdots l_j\cdots l_m}^{k_1\cdots(k_j-1)\cdots k_m}\right], \tag{26} $$

где $1 \leqslant j \leqslant m$.

Получим выражение (24) с помощью ряда преобразований выражения (19). Подставив тождество

$$ C_{C_n^l}^k = \frac{C_n^l - k + 1}{k} C_{C_n^l}^{k-1} $$

в (19), получим

$$ {}_nN_l^k = \frac{1}{k}\left[\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i C_n^i \left(C_{n-i}^l - k + 1\right) C_{C_{n-i}^l}^{k-1}\right]. $$

Теперь подставим вместо $C_{C_{n-i}^l}^{k-1}$ правую часть соотношения (18):

$$ {}_nN_l^k = \frac{1}{k}\left[\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i C_n^i \left(C_{n-i}^l - k + 1\right)\sum_{j\geqslant 0} {}_{n-j-i}N_l^{k-1} C_{n-i}^j\right]. $$

Произведем замены $i + j \to i$ и $i \to j$ и поменяем порядок суммирования:

$$ {}_nN_l^k = \frac{1}{k}\left[\sum_{i\geqslant 0} {}_{n-i}N_l^{k-1} \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{n-j}^{i-j} C_n^j \left(C_{n-j}^l - k + 1\right)\right]. $$

Разложим выражение под знаком суммы на два слагаемых:

$$ \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{n-j}^{i-j} C_n^j C_{n-j}^l - (k-1)\sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{n-j}^{i-j} C_n^j. \tag{27} $$

При $i = 0$ вторая сумма равна 1. Для вычисления сумм воспользуемся тождествами для биномиальных коэффициентов [3]:

$$ \begin{aligned} C_s^r &= C_s^{s-r}, \\ C_s^r C_{s-r}^t &= C_{r+t}^r C_s^{r+t}, \\ C_s^r &= (-1)^r C_{r-s-1}^r, \\ \sum_r C_s^r C_p^{t-r} &= C_{s+p}^t. \end{aligned} \tag{28} $$

Преобразуем первую сумму в (27):

$$ \begin{aligned} \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{n-j}^{i-j} C_n^j C_{n-j}^l &= C_n^i \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_i^j C_{n-j}^{n-l-j} = C_n^i \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_i^j (-1)^{n-l-j} C_{-l-1}^{n-l-j} = \\ &= C_n^i (-1)^{n-l} C_{i-l-1}^{n-l} = C_n^i C_{n-i}^{n-l} = C_n^i C_{n-i}^{l-i}. \end{aligned} \tag{29} $$

Вторую сумму вычислим для $i > 0$:

$$\sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{n-j}^{i-j} C_n^j = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{n-j}^{n-i} C_n^j = (-1)^i \sum_{j=0}^{i} C_{i-n-1}^{i-j} C_n^j = (-1)^i C_{i-1}^{i} = 0. \tag{30}$$

Воспользовавшись (29) и (30), а также учитывая значение второй суммы при $i = 0$, получаем выражение (24).

Рекуррентное соотношение (24) при $k = 1$ и $n = l$ дает

$${}_l N_l^1 = {}_0 N_l^0.$$

Таким образом, получаем

$${}_0 N_l^0 = 1,$$

что можно интерпретировать следующим образом: число покрытий пустого множества семейством подмножеств, не содержащим ни одного подмножества, равно 1.

3. Суммы

Вычислим сумму всех комбинаторных чисел ${}_n N(k_1 k_2 \cdots k_n)$ для определенного n. Для это воспользуемся выражением (21)

$$\sum_{k\geqslant 0} {}_n N(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{i}^{n} (-1)^i C_n^i \prod_{j=1}^{n} C_{C_{n-i}^j}^{k_j},$$

где $k \geqslant 0$ — общее условие для всех чисел из набора $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Поменяем порядок суммирования, вынесем один множитель из произведения и воспользуемся тождеством $\sum\limits_i C_n^i = 2^n$:

$$\sum_{k\geqslant 0} {}_n N(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{i}^{n} (-1)^i C_n^i \sum_{k_s\geqslant 0} C_{C_{n-i}^s}^{k_s} \sum_{k\geqslant 0} \prod_{j\neq s} C_{C_{n-i}^j}^{k_j} = \sum_{i}^{n} (-1)^i C_n^i 2^{C_{n-i}^s} \sum_{k\geqslant 0} \prod_{j\neq s} C_{C_{n-i}^j}^{k_j}.$$

Аналогично, вынося по одному множителю, получим

$$\sum_{k\geqslant 0} {}_n N(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{i}^{n} (-1)^i C_n^i 2^{\sum_j C_{n-i}^j} = \sum_{i}^{n} (-1)^i C_n^i 2^{2^{n-i}-1},$$

что равно числу всех покрытий множества мощности n (6).

Получим значения следующих сумм:

$$\sum_{i\geqslant 0} C_n^i \, {}_{n-i} N_{l_1 l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m}; \tag{31}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \, {}_n N_{l_1 l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m}; \tag{32}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \, {}_n N_{l_1 l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m}; \tag{33}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \, {}_n N_{l_1 l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m}. \tag{34}$$

В выражении (20) переносом всех комбинаторных чисел ${}_n N_{l_1 l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m}$ из правой части получаем сумму (31):

$$\sum_{i\geqslant 0} C_n^i \, {}_{n-i} N_{l_1 l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m} = \prod_{i=1}^{m} C_{C_n^{l_i}}^{k_i}.$$

Для нахождения других сумм воспользуемся соотношениями (25) и (26). Подставим в (32) вместо ${}_nN_l^k$ правую часть из (25) и преобразуем выражение:

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n{}_nN_l^k = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{l}C_{n-i}^{l-i}C_n^i{}_{n-i}N_l^{k-1} - \frac{k-1}{k}{}_nN_l^{k-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\sum_{i=0}^{l}C_{n-i}^{l-i}C_n^i{}_{n-i}N_l^{k-1} - \frac{k-1}{k}\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n{}_nN_l^{k-1}. \tag{35}$$

В первой сумме в (3) произведем замену $n-i\to n$:

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\sum_{i=0}^{l}C_{n-i}^{l-i}C_n^i{}_{n-i}N_l^{k-1} = \sum_{n}(-1)^n{}_nN_l^{k-1}\sum_{i=0}^{l}(-1)^iC_{n+i}^iC_n^{l-i}.$$

Воспользуемся тождествами (28):

$$\sum_{i=0}^{l}(-1)^iC_{n+i}^iC_n^{l-i} = \sum_{i=0}^{l}C_{-n-1}^iC_n^{l-i} = C_{-1}^l = (-1)^lC_l^l = (-1)^l.$$

Подставив значение первой суммы в (3), получим рекуррентное соотношение

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n{}_nN_l^k = \frac{(-1)^l-k+1}{k}\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n{}_nN_l^{k-1}. \tag{36}$$

Для $k=1$ значение суммы (32) равно

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n{}_nN_l^1 = (-1)^l{}_lN_l^1 = (-1)^l.$$

Коэффициент в выражении (36) при четных и нечетных значениях l соответственно равен

$$\frac{(-1)^l-k+1}{k} = \begin{cases} -1, & \text{если } l \text{ нечетное,}\\ \dfrac{2-k}{k}, & \text{если } l \text{ четное.}\end{cases}$$

При $k=2$ коэффициент для четных l равен 0. Окончательно получаем

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n{}_nN_l^k = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } l \text{ нечетное,}\\ 1, & \text{если } l \text{ четное и } k=1,\\ 0, & \text{если } l \text{ четное и } k>1.\end{cases}$$

В общем случае сумма (32) равна

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n{}_nN_{l_1\,l_2\cdots l_m}^{k_1k_2\cdots k_m} = \begin{cases} (-1)^{\sum k_i}, & \text{если все } l_i \text{ нечетные,}\\ (-1)^{\sum k_i}, & \text{если } k_i=1 \text{ для всех четных } l_i\text{; сумма идет}\\ & \text{только по } i\text{, для которых } l_i \text{ нечетно,}\\ 0, & \text{если } k_i>1 \text{ хотя бы для одного четного } l_i.\end{cases}$$

Подставим ${}_nN_l^k$ из (25) в (33) и преобразуем получившееся выражение:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}{}_nN_l^k = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{l}C_{n-i}^{l-i}C_n^i{}_{n-i}N_l^{k-1} - \frac{k-1}{k}{}_nN_l^{k-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\sum_{i=0}^{l}C_{n-i}^{l-i}C_n^i{}_{n-i}N_l^{k-1} - \frac{k-1}{k}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}{}_nN_l^{k-1}.$$

Воспользуемся тождеством
$$\frac{1}{n}C_n^i=\frac{1}{n-i}C_{n-1}^i$$
и произведем замену $n-i\to n$ в первой сумме:

$$\frac{1}{k}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\sum_{i=0}^{l}C_{n-i}^{l-i}C_n^i{}_{n-i}N_l^{k-1}=\frac{1}{k}\sum_{n}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_l^{k-1}\sum_{i=0}^{l}(-1)^iC_n^{l-i}C_{n+i-1}^i.$$

Для вычисления суммы произведений биномиальных коэффициентов воспользуемся тождествами (28):

$$\sum_{i=0}^{l}(-1)^iC_n^{l-i}C_{n+i-1}^i=\sum_{i=0}^{l}C_n^{l-i}C_{-n}^i=C_0^l=0.$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_l^k=-\frac{k-1}{k}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_l^{k-1}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_l^1. \tag{37}$$

Для $k=1$ значение суммы (33) равно

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_l^1=\frac{(-1)^l}{l}\,{}_lN_l^1=\frac{(-1)^l}{l}.$$

Окончательно получаем значение суммы комбинаторных коэффициентов:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_l^k=\frac{(-1)^{k+l-1}}{kl}.$$

В общем случае для $m>1$ сумма (33) равна

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_{l_1\cdots l_i\cdots l_m}^{k_1\cdots k_i\cdots k_m}=\frac{(-1)^{k_i+l_i-1}}{k_il_i}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_{l_1\cdots l_i\cdots l_m}^{k_1\cdots 1\cdots k_m}=0,$$

так как, согласно (37),

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_{l_1\cdots l_i\cdots l_m}^{k_1\cdots 1\cdots k_m}=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\,{}_nN_{l_1\cdots l_i\cdots l_m}^{k_1\cdots 0\cdots k_m}=0. \tag{38}$$

С помощью подобных же выкладок вычислим сумму (34):

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\,{}_nN_l^k=\frac{1}{k}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\sum_{i=0}^{l}C_{n-i}^{l-i}C_n^i{}_{n-i}N_l^{k-1}-\frac{k-1}{k}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\,{}_nN_l^{k-1};$$

$$\frac{1}{n(n-1)}C_n^i=\frac{1}{(n-i)(n-i-1)}C_{n-2}^i;$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\sum_{i=0}^{l}C_{n-i}^{l-i}C_n^i{}_{n-i}N_l^{k-1}=\sum_{n}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\,{}_nN_l^{k-1}\sum_{i=0}^{l}(-1)^iC_n^{l-i}C_{n+i-2}^i;$$

$$\sum_{i=0}^{l}(-1)^i C_n^{l-i} C_{n+i-2}^i = \sum_{i=0}^{l} C_n^{l-i} C_{-n+1}^i = C_1^l = \begin{cases} 1, & \text{если } l = 1, \\ 0, & \text{если } l > 1. \end{cases}$$

Для $k = 1$ и $l > 1$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \, {}_nN_l^1 = \frac{(-1)^l}{l(l-1)} \, {}_lN_l^1 = \frac{(-1)^l}{l(l-1)}.$$

Для $l = 1$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \, {}_nN_1^k = -\frac{k-2}{k} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \, {}_nN_1^{k-1} = \frac{(-1)^k}{k(k-1)}.$$

Окончательно:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \, {}_nN_l^k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{k(k-1)}, & \text{если } l = 1, \\ \dfrac{(-1)^{k+l-1}}{kl(l-1)}, & \text{если } l > 1. \end{cases}$$

Используя выкладки, аналогичные (38), получим, что для $m > 1$ сумма (34) равна 0:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \, {}_nN_{l_1\, l_2 \cdots l_m}^{k_1 k_2 \cdots k_m} = 0.$$

4. Частные случаи

Рассмотрим частные случаи комбинаторных чисел (13), когда их коэффициенты заданы или связаны определенными соотношениями.

При $k > C_{n-1}^l$ в выражении (19) остается только одно слагаемое:

$$k > C_{n-1}^l \Rightarrow {}_nN_l^k = C_{C_n^l}^k.$$

То есть k подмножеств мощности l не могут являться покрытием ни одного собственного подмножества исходного множества (при условии вхождения этих k подмножеств в собственное подмножество). Аналогично в выражении (21): если $k_j > C_{n-1}^{l_j}$ хотя бы для одного из коэффициентов k_j, то

$${}_nN_{l_1 \cdots l_j \cdots l_m}^{k_1 \cdots k_j \cdots k_m} = \prod_{i=1}^{m} C_{C_n^{l_i}}^{k_i}.$$

Из этого тождества следует, что если в комбинаторном числе ${}_nN(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ последний коэффициент равен 1, то

$${}_nN(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, 1) = \prod_{i=1}^{n-1} C_{C_n^i}^{k_i}.$$

Просуммировав все комбинаторные числа вида ${}_nN(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, 1)$, получим

$$\sum_{k\geqslant 0} {}_nN(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, 1) = 2^{2^n - 2},$$

что равно количеству всех покрытий множества мощности n, включающих в себя исходное множество. Вычтя это число из общего числа покрытий множества мощности n, получим выражение (7).

Используя выражение (8) и сумму комбинаторных чисел с одинаковым количеством подмножеств в покрытии, можно вывести соотношение

$$\sum_{\sum k_i = k} {}_nN^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1l_2\cdots l_m} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i C^k_{2^{n-i}-1}.$$

Для простого вида комбинаторных чисел при $k = C_n^l$ из (19) получаем

$$k = C_n^l \Rightarrow {}_nN_l^k = 1.$$

Если $n = \sum k_i l_i$, то каждый элемент множества $\mathbf{X}$ принадлежит только одному из подмножеств покрытия. Таким образом, все покрытия представляют собой неупорядоченные разбиения множества $\mathbf{X}$ на подмножества фиксированного размера [3–5]:

$$n = \sum_i^m k_i l_i \Rightarrow {}_nN^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1l_2\cdots l_m} = \frac{n!}{(l_1!)^{k_1}(l_2!)^{k_2}\cdots(l_m!)^{k_m}\,k_1!k_2!\cdots k_m!}. \tag{39}$$

При $m = 1$ получим

$${}_{kl}N_l^k = \frac{(kl)!}{(l!)^k k!}.$$

Количество всех неупорядоченных разбиений n-элементного множества задается числом Белла B_n [3]. Таким образом, сумма всех новых комбинаторных чисел, для которых $n = \sum k_i l_i$, равна B_n. Вследствие этого получаем соотношения между различными комбинаторными числами:

$$B_n = \sum_{\sum k_i l_i = n} {}_nN^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1l_2\cdots l_m},$$

$$B_n = n! \sum_{\sum k_i l_i = n} \left((l_1!)^{k_1}(l_2!)^{k_2}\cdots(l_m!)^{k_m}\,k_1!k_2!\cdots k_m!\right)^{-1}.$$

Если $n = \sum k_i l_i - 1$, то один и только один элемент множества $\mathbf{X}$ принадлежит двум подмножествам покрытия. Исключим одно из них из покрытия. Пусть мощность этого покрытия l_i. Тогда оставшееся семейство подмножеств будет являться покрытием для подмножества мощности $n - l_i + 1$, каждый элемент которого будет принадлежать только одному подмножеству покрытия. Число таких подмножеств в множестве $\mathbf{X}$ равно

$$C_n^{n-l_i+1} = C_n^{l_i-1}.$$

Любой из $n - l_i + 1$ элементов подмножества может быть в добавляемом подмножестве. Таким образом, количество вариантов построения из покрытия подмножества мощности $n - l_i + 1$ покрытия множества $\mathbf{X}$ равно

$$(n - l_i + 1)C_n^{l_i-1}\,{}_{n-l_i+1}N^{k_1\cdots k_i-1\cdots k_m}_{l_1\cdots l_i\cdots l_m}.$$

Общее количество вариантов построения покрытия множества $\mathbf{X}$ из покрытий подмножеств равно

$$\sum_{i=1}^{m}(n - l_i + 1)C_n^{l_i-1}\,{}_{n-l_i+1}N^{k_1\cdots k_i-1\cdots k_m}_{l_1\cdots l_i\cdots l_m}.$$

Так как один элемент принадлежит двум подмножествам в покрытии, то каждое покрытие посчитано два раза. Таким образом, окончательно получаем

$${}_nN^{k_1\cdots k_m}_{l_1\cdots l_m} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(n - l_i + 1)C_n^{l_i-1}\,{}_{n-l_i+1}N^{k_1\cdots k_i-1\cdots k_m}_{l_1\cdots l_i\cdots l_m}. \tag{40}$$

Упростим выражение (40), учитывая, что $n = \sum k_j l_j - 1$, а

$$n - l_i + 1 = \sum_{j \neq i} k_j l_j + (k_i - 1) l_i.$$

То есть для комбинаторных чисел, стоящих под знаком суммы в (40), можно применить выражение (39):

$$\begin{aligned}
{}_nN^{k_1\cdots k_m}_{l_1\cdots l_m} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(n-l_i+1)n!}{2(l_i-1)!(n-l_i+1)!} \frac{(n-l_i+1)!}{(l_1!)^{k_1}\cdots(l_i!)^{k_i-1}\cdots(l_m!)^k_m k_1!\cdots(k_i-1)!\cdots k_m!} = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{(n-l_i+1)k_i l_i}{2(n+1)} \frac{(n+1)!}{(l_1!)^{k_1}\cdots(l_i!)^{k_i}\cdots(l_m!)^k_m k_1!\cdots k_i!\cdots k_m!} = \\
&= \frac{1}{2(n+1)} {}_{n+1}N^{k_1\cdots k_m}_{l_1\cdots l_m} \left((n+1)\sum_{i=1}^{m} k_i l_i - \sum_{i=1}^{m} k_i (l_i)^2 \right) = \\
&= {}_{n+1}N^{k_1\cdots k_m}_{l_1\cdots l_m} \frac{1}{2(n+1)} \left((n+1)^2 - \sum_{i=1}^{m} k_i (l_i)^2 \right).
\end{aligned}$$

Для $m = 1$ получим

$$ {}_{kl-1}N^k_l = \frac{l(k-1)}{2} {}_{kl}N^k_l = \frac{l(k-1)}{2} \frac{(kl)!}{(l!)^k k!}.$$

Найдем общее количество покрытий, в котором все подмножества одной мощности, то есть сумму

$$\sum_k {}_nN^k_l.$$

Подставим выражение для простых комбинаторных чисел (19) и преобразуем:

$$\sum_k {}_nN^k_l = \sum_k \sum_i C^k_{C^l_{n-i}} C^i_n (-1)^i = \sum_i C^i_n (-1)^i \sum_k C^k_{C^l_{n-i}} = \sum_i C^i_n (-1)^i \left(2^{C^l_{n-i}} - 1 \right).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $\sum\limits_i C^i_n (-1)^i = 0$, окончательно получаем

$$\sum_k {}_nN^k_l = \sum_{i=0}^{n} C^i_n (-1)^i 2^{C^l_{n-i}}.$$

При $k = 2$ получаем целочисленную последовательность A006129 в OEIS [6].

5. Интерпретация

Новые комбинаторные числа, исчисляющие количество неупорядоченных покрытий конечного множества подмножествами с фиксированными мощностями, можно применять в следующих областях:

1) Конечные множества, покрытия множеств. С помощью новых комбинаторных чисел (12) и (13) можно вычислять количества покрытий конечных множеств с различными ограничениями: фиксирование мощностей подмножеств покрытия, ограничивающие соотношения для количества подмножеств в покрытии, общие условия на мощности и количество подмножеств. Вместо способа подсчета ограниченных условиями покрытий множеств, использующего метод исключения из общего числа покрытий, не удовлетворяющих заданным условиям [5], можно вычислять покрытия с помощью суммирования новых комбинаторных чисел, ограничивая параметры сумм.

2) Распределение элементов по классам. Покрытие конечного множества заданным числом подмножеств с определенными мощностями можно интерпретировать как распределение элементов множества по классам с условиями, что элемент может принадлежать нескольким классам, при этом он должен принадлежать хотя бы одному классу, а также нет идентичных друг другу классов. Новые комбинаторные числа можно применять для вычисления количества распределений по классам с заданными характеристиками (количество и мощности классов) [7, 8].
3) Диаграммы Эйлера — Венна. В качестве наглядного представления, с помощью которого можно изобразить отношения между подмножествами или классами элементов, обширно используются диаграммы Эйлера — Венна. Для вычисления вариантов распределения элементов по диаграммам могут служить новые комбинаторные числа [9].
4) Двудольные графы [10]. Покрытие конечного множества семейством несовпадающих подмножеств можно интерпретировать как частный случай двудольного графа $G(\mathbf{X} \cup \mathbf{S}, E)$, в котором каждый элемент (вершина) из $\mathbf{X}$ связан ребром хотя бы с одним элементом (вершиной) из $\mathbf{S}$ и обратно: для каждой вершины $\mathbf{S}$ есть хотя бы одно ребро, связывающее вершину из $\mathbf{X}$ с данной вершиной. Кроме того, любую пару вершин из $\mathbf{X}$ и $\mathbf{S}$ связывает только одно ребро. При этом есть условие, что для любых двух вершин из $\mathbf{S}$ наборы вершин из $\mathbf{X}$ не должны совпадать. Для подсчета таких двудольных графов с зафиксированным количеством ребер можно использовать комбинаторные числа (12) и (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Comtet L.* Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinate Expansions. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1974.
2. *Macula A. J.* Covers of a finite set // Mathematics Magazine. 1994. V. 67. No. 2. P. 141–144.
3. *Кнут Д., Грэхем Ф., Поташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 2006.
4. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982.
5. *Stanley R. P.* Enumerative Combinatorics. V. I. Cambridge University Press, 2002.
6. `http://oeis.org/classic/A006129` — On-Line Encyclopedia of Integer Sequences — энциклопедии целочисленных последовательностей.
7. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
8. *Риордан Д.* Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.
9. *Burger A. P., van Vuuren J. H.* Balanced minimum covers of a finite set // Discrete Mathematics. 2007. V. 307. No. 22. P. 2853–2860.
10. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.