

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2019

№ 60

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесён в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Гималтдинова А.А., Аносова Е.П. О нулях комбинации произведений функций Бесселя.....	5
Иванов Д.Ю. Решение краевых задач для двумерного эллиптического дифференциально-операторного уравнения в абстрактном гильбертовом пространстве с помощью метода граничных интегральных уравнений	11
Козловская Т.А. Циклические представления групп Сирадски с четным числом порождающих и трехмерные многообразия	32
Колесников И.А. Определение аксессуарных параметров конформных отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией и круговые счетноугольники.....	42
Марданов М.Дж., Шарифов Я.А., Зейналлы Ф.М. Существование и единственность решений нелинейных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями нелокальными краевыми условиями	61

МЕХАНИКА

Борзенко Е.И., Хегай Е.И. Численное исследование заполнения ёмкости ньютоновской жидкостью с применением VoF-метода.....	73
Демин В.А. Особенности конвективных течений сложных по составу жидкостей в тонких полостях.....	87
Мерзляков А.В., Крюкова Е.А. Свободные колебания идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с горизонтальной проницаемой перегородкой	107
Моренко И.В. Численное моделирование обрушения столба жидкости в резервуарах разной формы.....	119
Хасанов И.Р., Орлов О.И. Эффективность экранирующей способности распыленной воды при пожаре.....	132
Янов Д.В., Бодров А.С., ПахнUTOва Н.В., Зелепугин С.А. Моделирование процесса динамического канально-углового прессования медных образцов с учетом экспериментальных условий нагружения	141
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	152

CONTENTS

MATHEMATICS

Gimaltdinova A.A., Anosova E.P. On zeros of the combination of products of Bessel functions	5
Ivanov D.Y. Solution of boundary problems for a two-dimensional elliptic operator-differential equation in an abstract Hilbert space using the method of boundary integral equations	11
Kozlovskaya T.A. Cyclically presented Sieradski groups with even number of generators and three dimensional manifolds.....	32
Kolesnikov I.A. Determining parameters of conformal mappings from the upper half-plane onto straight-line periodic polygons with double symmetry and onto circular periodic polygons	42
Mardanov M.J., Sharifov Ya.A., Zeynally F.M. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions.....	61

MECHANICS

Borzenko E.I., Hegaj E.I. Numerical investigation of the reservoir filling with a newtonian fluid using the VoF-method.....	73
Demin V.A. The features of the convective flows of multicomponent fluids in thin cavities.....	87
Merzlyakov A.V., Kryukova E.A. Free oscillations of an ideal fluid in a rectangular vessel with a horizontal permeable membrane.....	107
Morenko I.V. Numerical simulation of the liquid column collapse in the reservoirs of different shapes	119
Khasanov I.R., Orlov O.I. efficiency of the screening capacity of sprayed water during a fire.....	132
Yanov D.V., Bodrov A.S., Pakhnutova N.V., Zelepugin S.A. Simulation of dynamic channel-angular pressing of copper samples with allowance for experimental data of loading	141
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	152

МАТЕМАТИКА

УДК 517.584

DOI 10.17223/19988621/60/1

MSC 33C10

А.А. Гималтдинова¹, Е.П. Аносова

О НУЛЯХ КОМБИНАЦИИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Исследуются функции, являющиеся суммой или разностью произведений функции Бесселя и модифицированной функции Бесселя с разными индексами. Изучается множество нулей таких функций. С помощью теоремы Штурма о разделении корней дифференциального уравнения доказано, что такая комбинация имеет счетное множество положительных нулей и счетное множество чисто мнимых нулей с положительной мнимой частью.

Ключевые слова: функция Бесселя, модифицированная функция Бесселя, множество нулей функции, теорема Штурма.

При исследовании краевых или спектральных задач (например, [1]) для уравнений смешанного типа со степенным вырождением возникает необходимость (при нахождении собственных значений) нахождения нулей функции вида

$$f_v(t) = J_v(t)I_{-v}(t) + I_v(t)J_{-v}(t), \quad 0 < v < 1, \quad (1)$$

при $\operatorname{Re} t > 0$, где $J_v(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода порядка v , $I_v(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка v .

Изучению нулей комбинаций произведений цилиндрических функций посвящено относительно небольшое количество исследований. Например, в справочнике [2] приведены таблицы нескольких первых корней уравнения $J_v(x)N_v(kx) - J_v(kx)N_v(x) = 0$ для некоторых значений k и v , а также первых корней уравнения $I_n(x)J_n'(x) - J_n(x)I_n'(x) = 0$ для $n = 0, 1, 2, 3$.

В некоторых случаях комбинации произведений функций Бесселя представляют собой элементарные функции, и тогда вопрос об их корнях решается элементарно, например [3, с. 91]:

$$J_v(z)Y_{v-1}(z) - Y_v(z)J_{v-1}(z) = \frac{z}{\pi z},$$
$$I_v(z)I_{-v+1}(z) - I_{-v}(z)I_{v-1}(z) = -\frac{2\sin(v\pi)}{\pi z}.$$

В книге [4] приведен обзор работ, посвященных изучению нулей функций, содержащих произведения бесселевых функций, но функция (1) или аналогичные ей не исследованы.

¹ Работа первого автора поддержана грантом РФФИ-РБ (проект 17-41-020516).

В большой обзорной статье [5] приведены классические результаты по теории бесселевых функций, основные сведения о нулях функций Бесселя и их производных и методах их вычисления. Описан метод Эйлера вычисления малых нулей функций Бесселя, метод Стокса вычисления больших нулей функций Бесселя, а также другие методы. Отмечено, что можно использовать теорему Штурма [6, с.136] о разделении нулей решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, и показано ее применение для функций Бесселя. Однако там не рассматриваются комбинации вида (1).

В [4, с.336] приведен ряд формул, позволяющих свести произведения бесселевых функций к обобщенной гипергеометрической функции, например

$$J_{-\nu}(z)I_{\nu}(z) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} {}_0F_3\left(1; 1 - \frac{\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{z^4}{64}\right) - \frac{\sin(\pi\nu)}{2\pi(1-\nu^2)} {}_0F_3\left(1; \frac{3-\nu}{2}, \frac{3+\nu}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{z^4}{64}\right), \quad (2)$$

где ${}_0F_3(a; b, c, d; z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция. С учетом формулы (2) функцию (1) можно привести к виду

$$f_{\nu}(t) = \frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} {}_0F_3\left(1; 1 - \frac{\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{t^4}{64}\right). \quad (3)$$

Однако обобщенная гипергеометрическая функция очень мало изучена, и в литературе нет утверждений о ее нулях.

Есть ряд работ, посвященных численным алгоритмам вычисления нулей бесселевых функций (например, [7]), однако и в этих работах не рассматриваются комбинации произведений цилиндрических функций. Кроме того, численные методы позволяют найти лишь конечное число нулей какой-либо функции.

Таким образом, в известных нам классических или современных работах нет каких-либо результатов о нулях функции (1).

В настоящей работе при помощи теоремы о разделении корней будет получена теорема о множестве нулей функции более общего вида, чем (1), а также рассмотрены конкретные примеры.

Утверждения о нулях функций

Рассмотрим функцию $f_{\nu, \mu}^{(1)} = J_{\nu}(t)I_{-\mu}(t) + I_{\mu}(t)J_{-\nu}(t)$, $\nu, \mu \in \mathbf{R}$, $\nu, \mu \notin \mathbf{N}$.

Теорема. Уравнение

$$J_{\nu}(t)I_{-\mu}(t) + I_{\mu}(t)J_{-\nu}(t) = 0 \quad (4)$$

имеет счетное множество действительных положительных корней и счетное множество чисто мнимых корней с положительной мнимой частью. При этом каждый положительный корень находится на интервале между двумя последовательными нулями функции $J_{\nu}(t)$ (равно как и между двумя последовательными нулями функции $J_{-\nu}(t)$), а каждый чисто мнимый корень – между двумя последовательными нулями функции $I_{\mu}(t)$ (или $I_{-\mu}(t)$).

Доказательство. 1) Пусть $t = x \in \mathbf{R}_+$. В силу того, что

$$(\forall x > 0)(I_{\mu}(x) > 0, I_{-\mu}(x) > 0),$$

из уравнения (4) получим

$$\frac{J_v(t)}{I_\mu(t)} = -\frac{J_{-v}(t)}{I_{-\mu}(t)}. \quad (5)$$

При этом функция $\tilde{f}_1(t) = J_v(t)/I_\mu(t)$ имеет те же нули, что и функция $J_v(t)$, а функция $\tilde{f}_2(t) = -a J_{-v}(t)/I_{-\mu}(t)$ имеет такие же нули, что и функция $J_{-v}(t)$.

Далее применим теорему о разделении корней [6, с.136]. В силу того, что функции $J_v(t)$ и $J_{-v}(t)$ при нецелом v являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя, нули функций $J_v(t)$ и $J_{-v}(t)$ взаимно разделены. Следовательно, и нули функций $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ также взаимно разделены. Это означает, что между любыми двумя соседними корнями функции $\tilde{f}_1$ найдется ровно один корень функции $\tilde{f}_2$, и наоборот. Отсюда, в силу непрерывности обеих этих функций, получим, что их графики пересекаются ровно в одной точке на каждом интервале между любыми двумя соседними корнями функции $J_v(t)$ (а также между любыми двумя соседними корнями функции $J_{-v}(t)$).

Это означает, что уравнение (5) имеет счетное множество положительных корней. А зная нули функций $J_v(t)$ и $J_{-v}(t)$, можно отделить промежутки, на которых находятся корни уравнения (5).

2) Пусть $t = iy \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}_+$. Рассуждая аналогично, получим, что уравнение $I_\mu(iy)/J_v(iy) = -I_{-\mu}(iy)/J_{-v}(iy)$ имеет счетное множество чисто мнимых корней. ■

Замечание 1. Остается невыясненным вопрос, имеет ли уравнение (4) другие комплексные корни, отличные от найденных чисто мнимых. Можно предположить, что других комплексных корней нет. Ниже будет разъяснено это предположение.

Замечание 2. Аналогично можно получить утверждение о счётности множества нулей функции $f_{v,\mu}^{(2)} = J_v(t)I_{-\mu}(t) - I_\mu(t)J_{-v}(t)$.

Пример 1. Пусть требуется найти положительные нули функции

$$f_{1/2}(x) = J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x) + I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x).$$

На основании доказанной теоремы (где $v = \mu = 1/2$) можем утверждать, что функция имеет счетное множество положительных нулей. Из известных представлений [2, с. 198] бесселевых функций с полуцелым индексом в виде элементарных функций:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

можем выписать неотрицательные корни функции $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$: πk и $\pi/2 + \pi k$ соответственно, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда первый положительный нуль функции $f_{1/2}(t)$ будет находиться на интервале $(\pi/2, \pi)$, второй – на интервале $(3\pi/2, 2\pi)$, ..., k -й корень – на интервале $((k-1/2)\pi, k\pi)$.

С другой стороны, учитывая представления для модифицированных функций $I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sh} x$, $I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{ch} x$, функцию $f_{1/2}(x)$ можем записать в виде $f_{1/2}(x) = \frac{2}{\pi x} (\sin x \cdot \operatorname{ch} x + \cos x \cdot \operatorname{sh} x)$, то есть для нахождения нулей этой функции следует решить уравнение $\operatorname{tg} x = -\operatorname{th} x$. Корни последнего уравнения найдены в работе [8]:

$$x = 0, \quad x = \pm \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}) \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$x = \pm i \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}) \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Итак, положительные нули функции $f_{1/2}(x)$ задаются формулой

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}).$$

Также в работе [8] доказано, что нет других комплексных корней, кроме найденных чисто мнимых. Учитывая, что для частного случая функции (1) – функции $f_{1/2}(x)$ – нет других комплексных корней, можно предположить, что их не будет и в общем случае для функции $f_{\nu, \mu}^{(1)}(t)$.

Замечание 3. Полученные в примере 1 результаты о нулях функции $f_{1/2}(x)$ дают новые сведения и об обобщенной гипергеометрической функции (3) при $\nu = 1/2$.

Пример 2. Аналогично можно найти положительные нули функции

$$\hat{f}_{1/2}(x) = J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x) - I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x).$$

Преобразуем функцию к виду $\hat{f}_{1/2}(x) = \frac{2}{\pi x} (\sin x \cdot \operatorname{ch} x - \cos x \cdot \operatorname{sh} x)$, тогда на основании результатов работы [9] можем записать положительные нули функции $\hat{f}_{1/2}(x)$: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})$.

Пример 3. Оценить первый положительный корень функции

$$f_{1/4}(x) = J_{1/4}(x)I_{-1/4}(x) + I_{1/4}(x)J_{-1/4}(x).$$

Используя таблицу значений функций $J_{1/4}(x)$ и $J_{-1/4}(x)$, можно убедиться, что первый положительный корень функции $f_{1/4}(x)$ находится в интервале $(2; 2,7)$. В этом случае более точную оценку можно найти только с помощью численных алгоритмов.

Выводы

Показано применение теоремы Штурма о разделении нулей к исследованию функции, являющейся комбинацией произведений функций Бесселя. Отмечено, как можно отделить промежутки нахождения нулей такой функции. Это позволит вместе с применением численных алгоритмов провести более полное изучение функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями перехода в прямоугольной области // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2014. № 19 (190). С. 5–16.
2. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 344 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.
4. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
5. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 9. С. 1387–1441. DOI: 10.7868/S004446614090087
6. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962. 352 с.
7. Алгазин С.Д. О табулировании с высокой точностью нулей функции Бесселя // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 1. С. 132–141.
8. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2015. Т. 460. № 3. С. 260–265. DOI: 10.7868/S0869565215030056.
9. Гималтдинова А.А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2016. Т. 466. № 1. С. 7–11. DOI: 10.7868/S0869565216010059.

Статья поступила 09.10. 2018 г.

Gimaltdinova A.A., Anosova E.P. (2019) ON ZEROS OF THE COMBINATION OF PRODUCTS OF BESSEL FUNCTIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 5–10

DOI 10.17223/19988621/60/1

Keywords: Bessel function, modified Bessel function, set of zeros of the function, Sturm theorem.

In this paper, the function $f_v(t) = J_v(t)I_{-v}(t) + I_v(t)J_{-v}(t)$, $0 < v < 1$, $\text{Re } t > 0$, is investigated. Such functions were little studied in the literature. It is proved that more general functions $f_{v,\mu}^{(1),(2)}(t) = J_v(t)I_{-\mu}(t) \pm I_\mu(t)J_{-v}(t)$ have a countable set of real zeros and a countable set of pure imaginary zeros. The proof uses the well-known Sturm theorem for second-order differential equations. The statement is applied to specific examples. In the case $v = 1/2$, the function $f_{1/2}(x) = J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x) + I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x)$ is reduced to an elementary function

$f_{1/2}(x) = \frac{2}{\pi x}(\sin x \cdot \cosh x + \cos x \cdot \sinh x)$, and an asymptotic formula for its positive zeros

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})$ is found. Function $\hat{f}_{1/2}(x) = J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x) - I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x)$ has the

following positive zeros: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})$.

AMS Mathematical Subject Classification: 33C10

Financial support. The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 17-41-020516).

GIMALTDINOVA Alfira Avkalevna (Candidate of Physics and Mathematics, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation) E-mail: aa-gimaltdinova@mail.ru

ANOSOVA Elizaveta Petrovna (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation) E-mail: ae0809@mail.ru

REFERENCES

1. Gimaltdinova A.A. (2014) Zadacha Dirikhle dlya uravneniya smeshannogo tipa s dvumya perpendikulyarnymi liniyami perekhoda v pryamougolnoy oblasti [Dirichlet problem for a mixed-type equation with two perpendicular transition lines in a rectangular domain]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika.* 19(190). pp. 5–16.
2. Jahnke E., Emde F., Lösch F. (1960) *Tafeln höhere Funktionen.* Stuttgart. 344 p.
3. Bateman H., Erdelyi A. (1953) *Higher Transcendental Functions. V.2.* New York. 296 p.
4. Luke Y.L. (1975) *Mathematical functions and their approximations.* New York: Academic Press Inc.
5. Kerimov M.K. (2014) Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation. *Computational mathematics and mathematical physics.* 54(9). pp. 1337–1388. DOI: 10.1134/S0965542514090073.
6. Tricomi F.G. (1961) *Differential equations.* Blackie & son Limited. 352 p.
7. Algazin S.D. (2013) O tabulirovanii s vysokoy tochnost'yu nuley funktsii Besselya [About tabulating the zeros of the Bessel functions with high precision]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki.* 1. pp. 132–141.
8. Gimaltdinova A.A. (2015) The Dirichlet problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with two type-change lines in a rectangular domain. *Doklady Mathematics.* 91(1). pp. 41–46. DOI: 10.1134/S1064562415010147.
9. Gimaltdinova A.A. (2016) Neumann problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with two type-change lines in a rectangular domain. *Doklady Mathematics.* 93(1). pp. 1–5. DOI: 10.1134/S1064562416010038.

Received: October 9, 2018

УДК 517.956.2, 517.968.25
DOI 10.17223/19988621/60/2

MSC 31A25, 34G10, 35J25

Д.Ю. Иванов

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В АБСТРАКТНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методом граничных интегральных уравнений получены решения краевых задач первого, второго и третьего рода для двумерного дифференциально-операторного уравнения $\Delta_2 u = Bu$, где $u(x_1, x_2)$ – функции со значениями в абстрактном гильбертовом пространстве H , B – генератор экспоненциально убывающей C_0 -полугруппы сжатий в пространстве H . Доказана корректная разрешимость краевых задач в классе непрерывных по норме H функций. Также доказана корректная разрешимость граничных интегральных уравнений в пространстве функций с квадратично суммируемой нормой H и в пространствах k раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в пространствах типа Соболева, порожденных n степенями оператора B .

Ключевые слова: краевая задача, дифференциально-операторное уравнение, граничное интегральное уравнение, полугруппа операторов, генератор, векторнозначная функция, операторнозначная функция, унитарная дилатация.

В настоящей работе на основе метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) получены решения краевых задач (КЗ) первого, второго и третьего рода для двумерного дифференциально-операторного уравнения (ДОУ) вида $\Delta_2 u = Bu$ ($\Delta_2 \equiv \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$). При этом $u(x_1, x_2)$ – функции со значениями в абстрактном гильбертовом пространстве H , определенные в ограниченной односвязной области или ее внешности с границей $\partial\Omega \in C^2$; B – линейный всюду плотно определенный в пространстве H оператор, порождающий экспоненциально убывающую C_0 -полугруппу сжатий. Доказана однозначная разрешимость краевых задач в классе непрерывных по норме H функций и устойчивость решений к возмущениям граничной функции в равномерной по норме H метрике. Кроме того, при условии $\partial\Omega \in C^{k+2}$ установлена однозначная и устойчивая разрешимость соответствующих ГИУ второго рода в банаховых пространствах функций, $k = 0, 1, \dots$ раз непрерывно дифференцируемых по норме пространств типа Соболева, определяемых, в свою очередь, $n = 0, 1, \dots$ степенями оператора B , а также в гильбертовом пространстве функций с квадратично суммируемой нормой H , если $\partial\Omega \in C^2$.

Решение КЗ для ДОУ $\Delta_2 u = Bu$ строится здесь по аналогии с методом решения КЗ для скалярного уравнения $\Delta_2 u = k^2 u$ ($k > 0$), описанным в монографии [1, с. 166]. Оператор B является частным случаем абстрактного эллиптического опе-

ратора A , для которого справедлива оценка резольвенты: $\|R(\lambda; A)\| \leq C/(1+|\lambda|)$ ($\lambda \leq 0$) [2, с. 149]. Исследованию КЗ для обыкновенных эллиптических ДОУ второго порядка в банаховых пространствах посвящено большое количество работ, результаты которых систематически представлены в монографиях [2, с. 304; 3, с. 73; 4, с. 272]. В последние годы появились исследования корректной разрешимости КЗ для эллиптических ДОУ в частных производных в пространствах типа L_p ($p \geq 1$) [5–7]. Однако автору не удалось найти работ, посвященных решению КЗ для многомерных эллиптических ДОУ на основе метода ГИУ.

Настоящая работа является развитием работ [8–11], посвященных решению КЗ нестационарной теплопроводности в прямых цилиндрах. В работах [8–11], кроме указанного здесь свойства, использовались следующие частные свойства оператора B : 1) компактность порождаемых им интегральных операторов; 2) возможность спектрального разложения порождаемых им C_0 -полугрупп в некотором расширенном пространстве. В настоящей работе вместо частного свойства 2 используется универсальная возможность представления сжимающих C_0 -полугрупп в виде унитарных C_0 -полугрупп в некотором расширенном гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supset H$, описанная в монографии [12, с. 44].

Постановки краевых задач и единственность их решений

Пусть Ω^+ – плоская открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$, и $\Omega^- \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$ ($\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$). Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, задающие параметрические уравнения линии $\partial\Omega$ и имеющие период $|\partial\Omega|$ (s – длина дуги на $\partial\Omega$, $|\partial\Omega|$ – длина $\partial\Omega$), имеют непрерывные производные до k -го порядка включительно. Очевидно, тогда $\partial\Omega \in C^k$ в локальном смысле [13, с. 263]. Будем считать по умолчанию, что $\partial\Omega \in C^2$, если не оговорено особо. Рассмотрим четыре краевые задачи ($i = 1, 2$):

$$\Delta_2 u_i^\pm = B u_i^\pm \quad (x \equiv (x_1, x_2) \in \Omega^\pm); \quad (1^\pm)$$

$$u_i^\pm = w_i^\pm \quad (x \in \partial\Omega), \quad (2a)$$

$$\partial_n u_2^\pm - \eta u_2^\pm = w_2^\pm \quad (x \in \partial\Omega), \quad (2b)$$

где $u_i^\pm(x)$ и $w_i^\pm(x)$ – векторнозначные функции со значениями в абстрактном гильбертовом пространстве H (все рассматриваемые здесь пространства комплексные), заданные на множествах $\Omega^\pm$ и $\partial\Omega$ соответственно; n – нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$, направленная внутрь области Ω^+ ; $\Delta_2 \equiv \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$ (ограниченность, непрерывность, дифференцируемость функций предполагается здесь, если не оговорено особо, в норме пространства их значений); $\eta \geq 0$ – постоянная; B – замкнутый всюду плотно определенный в H линейный оператор, порождающий C_0 -полугруппу $T(\tau): Bf = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1} [I - T(\tau)]f$, где I – тождественный оператор в пространстве H (далее в пространстве по контексту). Операторы $T(\tau)$ удовлетворяют условию

$$\|T(\tau)\| \leq \exp(-p\tau), \quad (3)$$

где p – положительная постоянная.

Пусть $C^2(\Omega^\pm; H)$ и $\overline{C(\Omega^\pm; H)}$ – пространства дважды непрерывно дифференцируемых на множестве $\Omega^\pm$ и непрерывных на замыкании этого множества $\overline{\Omega^\pm}$ соответственно функций $f(x)$ со значениями в H .

Определение 1. Решением уравнения $(1^\pm)$ будем называть функцию $u^\pm \in C^2(\Omega^\pm; H)$ со значениями в $D(B)$ (области определения оператора B), обращающую уравнение $(1^\pm)$ в истинное равенство.

Определение 2. Решением задачи $\{P_1^\pm\}$ будем называть функцию $u_1^\pm \in \overline{C(\Omega^\pm; H)}$, являющуюся решением уравнения $(1^\pm)$ и удовлетворяющую граничному условию (2a). В случае задачи $\{P_1^-\}$ будем требовать также выполнение условия: $\|u_1^-\|_H \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Определение 3. Решением задачи $\{P_2^\pm\}$ будем называть функцию $u_2^\pm \in \overline{C(\Omega^\pm; H)}$, являющуюся решением уравнения $(1^\pm)$ и имеющую с внутренней (внешней) стороны $\partial\Omega$ правильную нормальную производную $\partial_n^\pm u_2^\pm$ ($\partial_n u_2^\pm(x \pm \xi n) \rightarrow \partial_n^\pm u_2^\pm(x)$ при $\xi \rightarrow +0$ равномерно относительно $x \in \partial\Omega$), определяемую равенством (2b): $\partial_n^\pm u_2^\pm = w_2^\pm + \eta u_2^\pm$. В случае задачи $\{P_2^-\}$ будем требовать также выполнение условия $|x| \|u_1^-\|_H \| \nabla u_1^- \|_H \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ ($\| \nabla u \|_H^2 \equiv \| \partial_{x_1} u \|_H^2 + \| \partial_{x_2} u \|_H^2$).

Согласно [2, с. 112], следствием оценки (3) является ограниченность оператора B слева:

$$\operatorname{Re}(Bf, f)_H \geq p(f, f)_H \quad (f \in D(B)). \quad (4)$$

Повторяя доказательства аналогичных теорем для частного случая оператора B [8–10], использующие только свойство (4) этого оператора, приходим к следующим утверждениям:

Теоремы 1, 2. Задачи $\{P_1^\pm\}$, $\{P_2^\pm\}$ имеют не более одного решения.

Операторнозначная функция Макдональда

Определение 4 (ср. [12, с. 23]). Пусть H – подпространство гильбертова пространства $\tilde{H}$; $\tilde{P}$ – ортопроектор, сюръективно отображающий $\tilde{H}$ на H ; A и $\tilde{A}$ – ограниченные линейные операторы, всюду определенные в пространствах H и $\tilde{H}$ соответственно. Будем называть оператор $\tilde{A}$ дилатацией оператора A и обозначать $A = \operatorname{pr} \tilde{A}$, если $A^n f = \tilde{P} \tilde{A}^n f$ для любых $f \in H$ и $n \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$.

Операторы $T_0(\tau) \equiv \exp(p\tau)T(\tau)$ являются сжимающими и образуют C_0 -полугруппу. Согласно теореме 8.1 [12, с. 44], в некотором гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supset H$ существует C_0 -полугруппа унитарных операторов $\tilde{T}_0(\tau)$, являющихся

дилатациями соответствующих операторов $T_0(\tau)$. В силу теоремы Стоуна [14, с. 410] операторы $\tilde{T}_0(\tau)$ допускают спектральное разложение:

$$\tilde{T}_0(\tau)f = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega\tau) dP_\omega f \quad (f \in \tilde{H}, i^2 \equiv -1), \quad (5)$$

где P_ω – разложение единицы [14, с. 361] самосопряженного оператора $i\tilde{B}_0$ ($\tilde{B}_0$ – генератор C_0 -полугруппы $\tilde{T}_0(\tau)$). Введем в рассмотрение C_0 -полугруппу $\tilde{T}(\tau) \equiv \exp(-p\tau)\tilde{T}_0(\tau)$, порождаемую оператором $\tilde{B} = \tilde{B}_0 + pI$. При помощи равенств

$$\tilde{K}(r)f \equiv \int_0^\infty a(r, \tau)\tilde{T}(\tau)f d\tau \quad (f \in \tilde{H}), \quad K(r)f \equiv \int_0^\infty a(r, \tau)T(\tau)f d\tau \quad (f \in H), \quad (6)$$

где $a(r, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4\tau)]$ ($\tau > 0$), определим ограниченные линейные операторы $\tilde{K}(r)$ и $K(r)$ ($r > 0$) в пространствах $\tilde{H}$ и H соответственно. Так как $T(\tau) = \text{пр } \tilde{T}(\tau)$ ($\tau \geq 0$), то $K(r) = \text{пр } \tilde{K}(r)$ ($r > 0$).

Пусть Σ – множество значений $\sigma \equiv \sqrt{p - i\omega}$ ($\sqrt{1} = 1$) при $\omega \in \mathbf{R}$. Очевидно, функция $\sigma(\omega): \mathbf{R} \rightarrow \Sigma$ измерима по Борелю. Обозначим через P_σ меру, определенную на борелевских подмножествах $B \subset \Sigma$ с помощью равенств $P_\sigma(B) \equiv P_\omega(\sigma^{-1}(B))$. Тогда на основании формулы (5) получаем следующие представления операторов $\tilde{T}(\tau)$ и $\tilde{B}$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\tau)f &= \int_{\Sigma} \exp(-\sigma^2\tau) dP_\sigma f \quad (f \in \tilde{H}), \quad \tilde{B}f = \int_{\Sigma} \sigma^2 dP_\sigma f \quad (f \in D(\tilde{B})), \\ D(\tilde{B}) &= \left\{ f \in \tilde{H} : \int_{\Sigma} |\sigma|^4 \|dP_\sigma f\|_{\tilde{H}}^2 < \infty \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим выражение для $\tilde{T}(\tau)$ (7) в выражение для $\tilde{K}(r)$ (6). При этом порядок интегрирования может быть изменен на основании теоремы 13 [15, с. 211] в силу конечности мер $\eta_\sigma \equiv (P_\sigma f, g)_{\tilde{H}}$ ($f, g \in \tilde{H}$) и $\mu: \mu(A) \equiv \int_A \exp(-p\tau) d\tau$ (множества $A \subset \mathbf{R}_+ \equiv [0; +\infty)$ измеримы по Лебегу), а также ограниченности и непрерывности на множестве $\Sigma \times \mathbf{R}_+$ подынтегральной функции $F(\sigma, \tau) \equiv a(r, \tau) \exp[-(\sigma^2 - p)\tau]$ ($\sigma \in \Sigma$, $\tau > 0$) при фиксированном $r > 0$. В результате получаем спектральное разложение операторов $\tilde{K}(r)$:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(r)f &= \int_{\Sigma} k(r, \sigma) dP_\sigma f \quad (f \in H), \\ k(r, \sigma) &\equiv \int_0^\infty (4\pi\tau)^{-1} \exp\left[-\left(\frac{r}{2\sigma\tau} + \frac{2\sigma\tau}{r}\right) \frac{r\sigma}{2}\right] d\tau \quad (\sqrt{1} = 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Осуществляя замену $\xi \equiv 2^{-1} [r/(2\sigma\tau) + 2\sigma\tau/r]$, получаем следующее представление функции $k(r, \sigma)$:

$$k(r, \sigma) = (4\pi)^{-1} \int_L \frac{\exp(-\rho\xi)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (\rho \equiv r\sigma). \quad (9)$$

В случае $\omega \neq 0$ кривая L – правая ветвь гиперболы $x^2/\cos^2 \varphi - y^2/\sin^2 \varphi = 1$, при этом $x = \operatorname{Re} \xi$, $y = \operatorname{Im} \xi$, $\varphi = \arg \sigma$. Точка ветвления $\xi = 1$ функции $\sqrt{\xi^2 - 1}$ обходится вдоль контура L по часовой стрелке (кривая L пересекает действительную ось в точке $\xi = \cos \varphi < 1$ при $\omega \neq 0$). Функция $f(\xi) \equiv \sqrt{\xi^2 - 1}$ рассматривается как однозначная в плоскости с разрезом вдоль луча $[1, \infty)$, с условием $f(0) = i$.

Итак, при $\omega \neq 0$ кривая L лежит в секторе $|\arg \xi| < |\arg \sigma|$ ($\sigma \in \Sigma$), асимптотически приближаясь к прямым $\arg \xi = \pm \arg \sigma$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Поскольку $|\arg \sigma| = \pi/4 - \varepsilon$ при некотором $\varepsilon(\sigma) \in (0, \pi/4)$, то $|\arg(\rho\xi)| < \pi/2 - 2\varepsilon$ и справедлива оценка: $|\exp(-\rho\xi)| < \exp[-|\rho||\xi|\sin(2\varepsilon)]$. Следовательно, в области $|\arg \xi| < |\arg \sigma|$ подынтегральная функция $F(\xi) \equiv \exp(-\rho\xi)/\sqrt{\xi^2 - 1}$ стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|\xi|$ равномерно по $\arg \xi$. Поэтому, учитывая аналитичность функции $F(\xi)$ в правой полуплоскости с разрезом вдоль луча $[1, \infty)$, можно преобразовать контур L в двойной луч $[1, \infty)$ с тем же направлением обхода точки ветвления $\xi = 1$, при этом на верхнем луче $f(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1}$, а на нижнем луче $f(\xi) = -\sqrt{\xi^2 - 1}$. Получили формулу

$$k(r, \sigma) = (2\pi)^{-1} \int_1^\infty \frac{\exp(-\rho\xi)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (\sqrt{\xi^2 - 1} \geq 0). \quad (10)$$

В случае $\omega = 0$ интеграл (10) получается из интеграла (9) сразу после замены.

Формула (10) – это интегральная формула функции Макдональда, а именно: $k(r, \sigma) = (2\pi)^{-1} K_0(\rho)$ [1, с. 172]. Поэтому в силу спектрального разложения оператора $\tilde{\mathbf{B}}$ (7) функция $\tilde{\mathbf{K}}(r)$, определяемая формулой (8), с точностью до постоянного множителя является функцией Макдональда оператора $r\sqrt{\tilde{\mathbf{B}}}$.

Дифференцируя l раз интеграл (10) по параметру r и переходя после этого к новой переменной интегрирования $\eta \equiv \sqrt{\rho(\xi - 1)}$ ($\sqrt{1} = 1$), получаем следующие выражения для производных $\partial_r^l k(r, \sigma)$ (при $\omega \neq 0$ дополнительно преобразуем путь интегрирования):

$$\begin{aligned} \partial_r^l k(r, \sigma) &= \frac{(-\sigma)^l}{2\pi} \int_1^\infty \frac{\exp(-\rho\xi) \xi^l}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi = (-1)^l \frac{e^{-\rho}}{\pi r^l} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta^2} (\eta^2 + \rho)^l d\eta}{\sqrt{\eta^2 + 2\rho}} \\ &\quad (l \in \mathbf{Z}_+ \equiv \{0, 1, \dots\}). \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема 3. 1). Функция $K(r)$ бесконечно дифференцируема при $r > 0$ в равномерной операторной топологии, причем $K^{(l)}(r)f \in D(B^m)$ ($f \in H$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$);

2) функция $K(r)$ удовлетворяет при $r > 0$ уравнению $\Delta_r K(r)f = BK(r)f$ ($f \in H$), где $\Delta_r \equiv d^2/dr^2 + r^{-1}d/dr$;

3) $r^\alpha K(r)f \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +0$ ($f \in H$, $\alpha > 0$);

4) $[(-1)^l 2\pi/(l-1)!]r^l K^{(l)}(r)f \rightarrow f$ при $r \rightarrow +0$ ($f \in H$, $l \in \mathbb{N}$);

5) $r^\alpha K^{(l)}(r)f \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$ ($f \in H$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$).

Доказательство. Докажем сначала утверждения 1–5 для функции $\tilde{K}(r)$.

Производные $\partial_r^l k(r, \sigma)$ ($l \in \mathbb{Z}_+$) рассматриваются как функции от $r > 0$, зависящие от $\sigma \in \Sigma$ как от параметра, на основе формул (11).

1). Функции $\partial_r^l k(r, \sigma)$ ($\sigma \in \Sigma$, $l \in \mathbb{Z}_+$) могут быть аналитически продолжены на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, кроме точки $z = 0$. Выражения вида $\sigma^{2m} \partial_z^l k(z, \sigma)$ ($\sigma \in \Sigma$) при фиксированных $l, m \in \mathbb{Z}_+$ ограничены в совокупности на множествах вида $\{|\arg z| \leq \pi/4 - \varepsilon_1, |z| \geq \varepsilon_2\}$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Отсюда в силу представлений (7) для $\tilde{B}$ и (8) для $\tilde{K}(r)$ и теоремы Лебега об ограниченной сходимости интегралов для векторнозначных мер [15, с. 356] следует, что функции $\tilde{K}^{(l)}(r)f$ ($f \in \tilde{H}$) могут быть аналитически продолжены в область $\Lambda \equiv \{|\arg z| < \pi/4, z \neq 0\}$, имеют место включения $\tilde{K}^{(l)}(z)f \in D(\tilde{B}^m)$ ($l \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$) и справедливы формулы

$$\tilde{B}^m \tilde{K}^{(l)}(z)f = \int_{\Sigma} \sigma^{2m} \partial_z^l k(z, \sigma) dP_{\sigma} f \quad (z \in \Lambda; l, m \in \mathbb{Z}_+). \quad (12)$$

Остается заметить, что из голоморфности векторнозначных функций $\tilde{K}^{(l)}(z)f$ в области Λ вытекает голоморфность операторнозначных функций $\tilde{K}^{(l)}(z)$ в той же области [16, с. 459].

2). Функция Макдональда $K_0(r)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_r K_0(r) = K_0(r)$, следствием которого являются равенства $\Delta_r k(r, \sigma) = \sigma^2 k(r, \sigma)$ ($\sigma \in \Sigma$, $r > 0$), так как $k(r, \sigma) = (2\pi)^{-1} K_0(\rho)$. Отсюда с учетом формул (12) получаем уравнения $\Delta_r \tilde{K}(r)f = \tilde{B} \tilde{K}(r)f$ ($f \in \tilde{H}$, $r > 0$).

3). При $|z| \rightarrow \infty$ в любом секторе вида $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) функция Макдональда $K_0(z)$ равномерно относительно $\arg z$ стремится к нулю быстрее любой степени z . При $z \rightarrow 0$ функция $K_0(z)$ имеет логарифмическую особенность. Поэтому в силу непрерывности $K_0(z)$ при $z \neq 0$ выражения $r^\alpha K_0(\rho) = \rho^\alpha K_0(\rho) / \sigma^\alpha$ ограничены при $r \rightarrow +0$ равномерно по $\sigma \in \Sigma$ при любом $\alpha > 0$. Кроме того, $r^\alpha K_0(\rho) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +0$ и фиксированных $\sigma \in \Sigma$. Отсюда в силу представления (8) и теоремы Лебега получаем предел $r^\alpha \tilde{K}(r)f \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +0$ для произвольного $f \in \tilde{H}$.

4). Функции $\partial_r^l k(r, \sigma)$ могут быть представлены в виде $A_l(\rho)/r^l$. Функции $A_l(z)$ ($l \in \mathbf{N}$) непрерывны при любом комплексном z и в любом секторе вида $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) равномерно относительно $\arg z$ стремятся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени z . Следовательно, выражения $r^l \partial_r^l k(r, \sigma)$ ограничены при $r \rightarrow +0$ равномерно по $\sigma \in \Sigma$ и $r^l \partial_r^l k(r, \sigma) \rightarrow A_l(0) = [(-1)^l 2\pi/(l-1)!]^{-1}$ при $r \rightarrow +0$ и фиксированных $\sigma \in \Sigma$. Используя формулы (12) при $m = 0$, получаем на основании теоремы Лебега предел $[(-1)^l 2\pi/(l-1)!] r^l \tilde{\mathbf{K}}^{(l)}(r) \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}$ при $r \rightarrow +0$ для произвольных $\mathbf{f} \in \tilde{H}$ и $l \in \mathbf{N}$.

5). Выражения $r^\alpha \partial_r^l k(r, \sigma)$ ($\alpha > 0$, $l \in \mathbf{Z}_+$) стремятся к нулю при $r \rightarrow +\infty$ равномерно по $\sigma \in \Sigma$. В силу формул (12) при $m = 0$ и теоремы Лебега имеем пределы $r^\alpha \tilde{\mathbf{K}}^{(l)}(r) \mathbf{f} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$ ($\alpha > 0$, $l \in \mathbf{Z}_+$, $\mathbf{f} \in \tilde{H}$).

Утверждения 1 – 5 справедливы для функции $\mathbf{K}(r)$, так как $\mathbf{T}(\tau) = \text{пр } \tilde{\mathbf{T}}(\tau)$, а элементы $\tilde{\mathbf{K}}(r) \mathbf{f}$ ($\mathbf{f} \in \tilde{H}$) могут быть аппроксимированы конечными суммами вида $\sum_{n=0}^N a_n \tilde{\mathbf{T}}(nh) \mathbf{f}$ ($a_n \in \mathbf{R}$, $h > 0$) в норме $\tilde{H}$. Например, на основании включений $\tilde{\mathbf{K}}(r) \mathbf{f} \in D(\tilde{\mathbf{B}}^m)$ ($\mathbf{f} \in H$, $m \in \mathbf{N}$) по индукции получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}^k \mathbf{K}(r) \mathbf{f} &= \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}^{k-1} \mathbf{K}(r) \mathbf{f} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}(\tau)] \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}}^{k-1} \tilde{\mathbf{K}}(r) \mathbf{f} = \\ &= \tilde{\mathbf{P}} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1} [\tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{T}}(\tau)] \tilde{\mathbf{B}}^{k-1} \tilde{\mathbf{K}}(r) \mathbf{f} = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}}^k \tilde{\mathbf{K}}(r) \mathbf{f} \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

справедливые при любых $\mathbf{f} \in H$, для которых определена правая часть. Следовательно, $\mathbf{K}(r) \mathbf{f} \in D(\mathbf{B}^m)$ при любых $\mathbf{f} \in H$, $m \in \mathbf{N}$. Теорема доказана.

Следствие 1. При любом фиксированном $\alpha > 0$ функция $r^\alpha \mathbf{K}(r)$, доопределенная при $r = 0$ нулевым оператором, сильно непрерывна и ограничена при $r \geq 0$.

Следствие 2. При любом фиксированном $l \in \mathbf{N}$ функция $[(-1)^l 2\pi/(l-1)!] r^l \mathbf{K}^{(l)}(r)$, доопределенная при $r = 0$ тождественным оператором, сильно непрерывна и ограничена при $r \geq 0$.

Заметим, что приведенное здесь доказательство теоремы 3 для оператора $\tilde{\mathbf{B}}$ является отредактированным доказательством аналогичной теоремы 3 для частного случая оператора $\mathbf{B}$ [8]. Последнее также основано на возможности спектрального разложения C_0 -полугруппы $\mathbf{T}(\tau)$ в некотором расширенном пространстве, и хотя C_0 -полугруппа в этом расширенном пространстве не унитарна, спектр порождающего ее оператора также целиком лежит в полуплоскости $\text{Re } \gamma \geq p > 0$.

Векторнозначные потенциалы

Пусть $f \in C(\partial\Omega; H)$. С помощью криволинейных интегралов первого рода $g_1(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{n_1} K(r) f(x') ds'$, $g_2(x) \equiv \int_{\partial\Omega} K(r) f(x') ds'$ определим на множестве $R^2 \setminus \partial\Omega$ функции $g_i(x)$ ($i=1,2$) со значениями в пространстве H . Здесь $r = |x - x'|$; n_1 – нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящая через точку x' и направленная внутрь области Ω^+ ; дифференцирование ∂_{n_1} осуществляется по переменной x' . Согласно приведенным ниже теоремам 4 – 8, функции $g_i(x)$ суть векторнозначные аналоги потенциалов простого и двойного слоев при $i=1,2$ соответственно, для уравнения (1). Доказательство этих теорем мы не приводим, так как оно совпадает с доказательством соответствующих теорем 4 – 8 для частного случая оператора B [8]. Последнее основано на свойствах функции $K(r)$, сформулированных в теореме 3.

Теорема 4. При $x \in R^2 \setminus \partial\Omega$ функции g_i ($i=1,2$) бесконечно дифференцируемы, имеют место включения $g_i^{(l_1, l_2)}(x) \in D(B^m)$ ($m \in \mathbf{N}$) и выполняются уравнения $\Delta_2 g_i^{(l_1, l_2)} = B g_i^{(l_1, l_2)}$. Кроме того, $|x|^\alpha \|g_i^{(l_1, l_2)}(x)\|_H \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow +\infty$ ($g_i^{(l_1, l_2)} \equiv \partial_{x_1}^{l_1} \partial_{x_2}^{l_2} g_i$; $l_1, l_2 \in \mathbf{Z}_+$; $\alpha > 0$).

Теорема 5. Функция g_2 ($x \in R^2 \setminus \partial\Omega$) может быть продолжена по непрерывности в точки $x \in \partial\Omega$, и значения $g_2(x)$ ($x \in \partial\Omega$), полученные при этом, также определяются формулой $g_2(x) \equiv \int_{\partial\Omega} K(r) f(x') ds'$.

Пусть d – радиус круга Ляпунова [13, с. 354]. На достаточно малом расстоянии $\varepsilon < d/2$ от $\partial\Omega$ построим кривую $\partial\Omega_\varepsilon^\pm \subset \Omega^\pm$, параллельную $\partial\Omega$ [13, с. 263]. Обозначим через $\Omega_\varepsilon^\pm$ полосу, ограниченную кривыми $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_\varepsilon^\pm$. Пусть $x_0 \in \partial\Omega$ – основание перпендикуляра в $\Omega_\varepsilon^\pm$, опущенного из $x \in \Omega_\varepsilon^\pm$ на $\partial\Omega$; $o_\varepsilon(x_0)$, $o_d(x_0)$ – круги с центром в $x_0 \in \partial\Omega$ и радиусами ε , d соответственно; e_ε – участок $\partial\Omega$ между двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии ε от прямой (x_0, x) ($x_0 \in e_\varepsilon$, $x \in \Omega_\varepsilon^\pm$). Введем в рассмотрение банаховы пространства $C(\partial\Omega; H)$ и $C(\overline{\Omega^\pm}; H)$ непрерывных на множествах $\partial\Omega$ и $\overline{\Omega^\pm}$ соответственно функций $f(x)$ со значениями в H и нормами $\|f\|_{C(\partial\Omega; H)} \equiv \sup_{x \in \partial\Omega} \|f(x)\|_H$, $\|f\|_{C(\overline{\Omega^\pm}; H)} \equiv \sup_{x \in \Omega^\pm} \|f(x)\|_H$. Зададим линейные операторы:

$$\begin{aligned} \hat{G}_2^\pm &\equiv \hat{G}_2'^\pm + \hat{G}_2''^\pm, \\ (\hat{G}_2'^\pm f)(x) &\equiv \int_{e_\varepsilon} K_0(x, x') f(x') ds' \quad (x \in \Omega_\varepsilon^\pm), \\ (\hat{G}_2''^\pm f)(x) &\equiv 0 \quad (x \in \Omega^\pm \setminus \Omega_\varepsilon^\pm), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{G}_2^{\pm} f)(x) &\equiv \int_{\partial\Omega \setminus e_\varepsilon} K_0(x, x') f(x') ds' \quad (x \in \Omega_\varepsilon^\pm), \\ (\hat{G}_2^{\pm} f)(x) &\equiv \int_{\partial\Omega} K_0(x, x') f(x') ds' \quad (x \in \Omega^\pm \setminus \Omega_\varepsilon^\pm), \quad K_0(x, x') \equiv K(r).\end{aligned}$$

С учетом теоремы 5 оператор $\hat{G}_2^\pm$ отображает пространство $C(\partial\Omega; H)$ в пространство $C(\overline{\Omega^\pm}; H)$.

Кривая $\partial\Omega_\varepsilon^\pm$ является огибающей кругов $o_\varepsilon(x_0)$ ($x_0 \in \partial\Omega$), поэтому $r \geq \varepsilon$, если $(x, x') \in \Omega^\pm \setminus \Omega_\varepsilon^\pm \times \partial\Omega$. Так как любая прямая, параллельная $(x_0 x)$, пересекает $\partial\Omega$ внутри $o_d(x_0)$ не более чем в одной точке и $\varepsilon < d/2$, то $r \geq \varepsilon$, если $(x, x') \in \Omega_\varepsilon^\pm \times \partial\Omega \setminus e_\varepsilon$. Пусть $\alpha \in (0; 1)$. На кривой Ляпунова в силу оценки (7) [13, с. 356] выполняются неравенства: $\int_{e_\varepsilon} r^{-\alpha} ds' \leq 4(1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha}$ ($x \in \Omega_\varepsilon^\pm$). Учитывая также следствие 1, имеем оценки

$$\begin{aligned}\|\hat{G}_2^{\pm} f\|_{C(\overline{\Omega^\pm}; H)} &\leq 4(1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} \sup_{r>0} \|r^\alpha K(r)\| \|f\|_{C(\partial\Omega; H)}, \\ \|\hat{G}_2^{\pm} f\|_{C(\overline{\Omega^\pm}; H)} &\leq |\partial\Omega| \sup_{r \geq \varepsilon} \|K(r)\| \|f\|_{C(\partial\Omega; H)},\end{aligned}$$

из которых вытекает утверждение:

Следствие 3. Операторы $\hat{G}_2^\pm : C(\partial\Omega; H) \rightarrow C(\overline{\Omega^\pm}; H)$ всюду определены и ограничены.

Теорема 6. Формулы $g_1(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{n_1} K(r) f(x') ds'$ и $g_0(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{n_2} K(r) f(x') ds'$ определяют при $x \in \partial\Omega$ непрерывные вдоль кривой $\partial\Omega$ функции g_1 и g_0 . Здесь $n_2 = n$ — нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящая через точку x и направленная внутрь области Ω^+ ; дифференцирование ∂_{n_2} осуществляется по переменной x .

Теорема 7. Функция g_1 при подходе к точкам $x \in \partial\Omega$ изнутри области $\Omega^\pm$ стремится к своим предельным значениям $g_1^\pm(x) \equiv \pm 2^{-1} f(x) + g_1(x)$ равномерно относительно $x \in \partial\Omega$.

Следствие 4. Функция g_1 является единственным решением задачи $\{P_1^\pm\}$ с граничным условием $u_1^\pm|_{x \in \partial\Omega} = g_1^\pm(x)$.

Введем в рассмотрение линейные операторы $\hat{G}_1^\pm$:

$$(\hat{G}_1^\pm f)(x) \equiv \int_{\partial\Omega} K_1(x, x') f(x') ds' \quad (x \in \overline{\Omega^\pm}), \quad K_1(x, x') \equiv \partial_{n_1} K(r),$$

отображающие пространство $C(\partial\Omega; H)$ в соответствующие пространства $C(\overline{\Omega^\pm}; H)$ с учетом теоремы 7 ($(\hat{G}_1^\pm f)(x) \equiv g_1^\pm(x)$ при $x \in \partial\Omega$). Интеграл $\int_{\partial\Omega} |\partial_{n_1} \ln r^{-1}| ds'$ равномерно ограничен при $x \in \mathbf{R}^2$ [13, с. 361 и 394]. Поэтому с

учетом следствия 2 и равенства $K_1(x, x') = -r K'(r) \partial_{n_1} \ln r^{-1}$ имеем оценки:

$$\|\hat{G}_1^\pm f\|_{C(\overline{\Omega^\pm}; H)} \leq \sup_{r>0} \|r K'(r)\| \sup_{x \in \overline{\Omega^\pm}} \int_{\partial\Omega} |\partial_{n_1} \ln r^{-1}| ds' \|f\|_{C(\partial\Omega; H)},$$

из которых вытекает утверждение:

Следствие 5. Операторы $\hat{G}_1^\pm : C(\partial\Omega; H) \rightarrow C(\overline{\Omega^\pm}; H)$ всюду определены и ограничены.

Теорема 8. Функция g_2 имеет в точках $x \in \partial\Omega$ правильную нормальную производную $\partial_n^\pm g_2(x)$ со стороны $\Omega^\pm$, которая выражается формулой $\partial_n^\pm g_2(x) = \mp 2^{-1} f(x) + g_0(x)$.

Следствие 6. Функция g_2 является единственным решением задачи $\{P_1^\pm\}$ с граничным условием $u_1^\pm|_{x \in \partial\Omega} = g_2(x)$ и единственным решением задачи $\{P_2^\pm\}$ с граничным условием $\partial_n u_2^\pm - \eta u_2^\pm|_{x \in \partial\Omega} = \partial_n^\pm g_2(x) - \eta g_2(x)$.

Решение краевых задач

Будем искать решение задачи $\{P_i^\pm\}$ в виде функции g_i с неизвестной $v_i^\pm \equiv f$ ($i = 1, 2$). Тогда в силу следствий 4, 6 и теорем 7, 8 функция $v_i^\pm \in C(\partial\Omega; H)$ должна удовлетворять граничному интегральному уравнению:

$$G_i^\pm v_i^\pm = w_i^\pm \quad (x \in \partial\Omega), \quad G_i^\pm \equiv \mp (-1)^i 2^{-1} I + G_i; \quad (13^\pm)$$

$$(G_i f)(x) \equiv \int_{\partial\Omega} K_i(x, x') f(x') ds',$$

$$K_1(x, x') \equiv \partial_{n_1} K(r), \quad K_2(x, x') \equiv \partial_{n_2} K(r) - \eta K(r). \quad (14)$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\partial\Omega; H)$ квадратично суммируемых на множестве $\partial\Omega$ векторнозначных функций $f(x)$ со значениями в пространстве H и нормой $\|f\|_{L_2(\partial\Omega; H)} \equiv \sqrt{\int_{\partial\Omega} \|f(x)\|_H^2 ds'}$. Обозначим через H_B^n ($n \in \mathbf{Z}_+$) гильбертово пространство функций $f \in H$, таких, что $B^m f \in H$ ($m = \overline{0, n}$), с нормой $\|f\|_{H_B^n} \equiv \left[\sum_{m=0}^n \|B^m f\|_H^2 \right]^{1/2}$. Через $C^k(\partial\Omega; H_B^n)$ ($n, k \in \mathbf{Z}_+$) обозначим банахово пространство функций $f \in C(\partial\Omega; H)$, имеющих непрерывные производные $f^{(l)}(x) \equiv d^l f(x(s))/ds^l$ ($l = \overline{0, k}$) со значениями в H_B^n , с нормой $\|f\|_{C^k(\partial\Omega; H_B^n)} = \max_{l=0, k} \sup_{x \in \partial\Omega} \|f^{(l)}(x)\|_{H_B^n}$ ($x = x(s)$ – параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$). Доказательство следующей теоремы целиком может быть взято из доказательства следствий 1–3 [11], так как при этом используются лишь свойства (3) оператора B и свойства функции $K(r)$, доказанные в теореме 3:

Теорема 9. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$ ($k \in \mathbf{Z}_+$). Операторы $\mathbf{G}_i^\pm: C^k(\partial\Omega; H_B^n) \rightarrow C^k(\partial\Omega; H_B^n)$ ($n \in \mathbf{Z}_+; i = 1, 2$) всюду определены и ограничены. Если уравнение $(13_i^\pm)$ при любой правой части $\mathbf{w}_i^\pm \in L_2(\partial\Omega; H)$ имеет единственное решение $\mathbf{v}_i^\pm \in L_2(\partial\Omega; H)$, то оператор $\mathbf{G}_i^\pm: C^k(\partial\Omega; H_B^n) \rightarrow C^k(\partial\Omega; H_B^n)$ ограниченно обратим.

На основании теорем 1, 2, 9 и следствий 3, 5 получаем утверждение:

Следствие 7. Если при $\mathbf{w}_i^\pm \in C(\partial\Omega; H)$ ($i = 1, 2$) уравнение $(13_i^\pm)$ имеет единственное решение $\mathbf{v}_i^\pm \in L_2(\partial\Omega; H)$, то соответствующая задача $\{P_i^\pm\}$ однозначно разрешима и ее решение представимо в виде функции $\mathbf{g}_i$ с данным $\mathbf{v}_i^\pm$. Кроме того, если при любом $\mathbf{w}_i^\pm \in C(\partial\Omega; H)$ ($i = 1, 2$) уравнение $(13_i^\pm)$ имеет единственное решение $\mathbf{v}_i^\pm \in L_2(\partial\Omega; H)$ и $\mathbf{u}_i^{(1)\pm}, \mathbf{u}_i^{(2)\pm}$ – решения задачи $\{P_i^\pm\}$ с граничными функциями $\mathbf{w}_i^{(1)\pm}, \mathbf{w}_i^{(2)\pm} \in C(\partial\Omega; H)$ соответственно, то $\|\mathbf{u}_i^{(1)\pm} - \mathbf{u}_i^{(2)\pm}\|_{\overline{C(\Omega^\pm; H)}} \rightarrow 0$, если $\|\mathbf{w}_i^{(1)\pm} - \mathbf{w}_i^{(2)\pm}\|_{C(\partial\Omega; H)} \rightarrow 0$.

Операторы $\mathbf{T}^*(\tau)$, сопряженные к $\mathbf{T}(\tau)$, также образуют C_0 -полугруппу [12, с. 44]. Так как $\|\mathbf{T}^*(\tau)\| = \|\mathbf{T}(\tau)\|$, то для операторов $\mathbf{T}^*(\tau)$ выполняется оценка (3). Обозначим через $\mathbf{B}^*$ генератор C_0 -полугруппы $\mathbf{T}^*(\tau)$, а через $\{P_i^{*\pm}\}$ – задачи $\{P_i^\pm\}$ ($i = 1, 2$) с оператором $\mathbf{B}^*$ вместо $\mathbf{B}$. Для оператора $\mathbf{B}^*$ выполняется оценка (4), следовательно, справедливы теоремы 1 и 2 для задач $\{P_i^{*\pm}\}$. Операторы $\mathbf{K}^*(r)$, сопряженные к $\mathbf{K}(r)$, выражаются через $\mathbf{T}^*(\tau)$ с помощью формулы (6), поэтому для $\mathbf{K}^*(r)$ справедлива теорема 3. Следовательно, для функций $\mathbf{g}_i^*$, выраженных через $\mathbf{K}^*(r)$ по аналогии с $\mathbf{g}_i$, справедливы теоремы 4 – 8. Операторы $\mathbf{G}_1^*$ и $\mathbf{G}_2^*$, сопряженные к операторам $\mathbf{G}_2$ и $\mathbf{G}_1$ соответственно, получаются из $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ заменой $\mathbf{K}(r)$ на $\mathbf{K}^*(r)$ в выражениях (14). Поэтому для уравнений $(13_i^\pm)$ с операторами $\mathbf{G}_i^{*\pm} \equiv \mp(-1)^i 2^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{G}_i^*$ вместо $\mathbf{G}_i^\pm$ справедлива теорема 9.

В силу теорем 8, 9 и следствия 6 однородные уравнения $\mathbf{G}_2^\pm \bar{\mathbf{v}}_2^\pm = 0$ и $\mathbf{G}_2^{*\pm} \bar{\mathbf{v}}_2^{*\pm} = 0$ имеют единственные решения в классе $L_2(\partial\Omega; H)$ (по аналогии со скалярным случаем [13, с. 386]). Поэтому в силу 3-й и 4-й теорем Фредгольма [13, с. 175] справедливо утверждение:

Теорема 10. Пусть $\mathbf{w}_i^\pm \in L_2(\partial\Omega; H)$ и оператор $\mathbf{G}_i$ компактен. Тогда уравнение $(13_i^\pm)$ имеет единственное решение $\mathbf{v}_i^\pm \in L_2(\partial\Omega; H)$ ($i = 1, 2$).

В следствии 3 [11] сформулирована вторая часть теоремы 9 без указанного здесь условия, так как оно выполнено для частного случая оператора $\mathbf{B}$, рассматриваемого в работе [11], благодаря компактности порождаемых им операторов $\mathbf{G}_i$ ($i = 1, 2$).

Разрешимость граничных интегральных уравнений в пространстве L_2

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\partial\Omega)$ квадратично суммируемых на множестве $\partial\Omega$ скалярных функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{L_2(\partial\Omega)} \equiv \sqrt{\int_{\partial\Omega} |f(x)|^2 ds'}$. Обозначим через $\mathbf{B}$ банахову алгебру ограниченных и всюду определенных в $L_2(\partial\Omega)$ линейных операторов. Обозначим через Γ и Γ_W множества значений $\gamma \equiv p - i\omega$ ($\gamma = \sigma^2$) при $\omega \in \mathbf{R}$ и $\omega \in [-W, W]$ ($W > 0$) соответственно. Пусть Ξ_W – семейство всех борелевских множеств топологического пространства Γ_W и $P_\gamma(B) \equiv P_\omega(\omega(B))$, где $\omega(\gamma) = i(\gamma - p)$ и $B \subset \Xi_W$. Будем называть Ξ_W -простой всякую функцию $F_W^n(\gamma)$, всюду определенную на Γ и имеющую вид $F_W^n(\gamma) = \sum_{i=1}^n A_i \chi_{B_i}(\gamma)$ ($n \in \mathbf{N}$), где $A_i \in \mathbf{B}$, $\chi_{B_i}(\gamma)$ – характеристическая функция множества $B_i \in \Xi_W$. Введем в рассмотрение коммутативную банахову алгебру $\mathbf{F}_W$ функций $F_W(\gamma)$ на Γ_W , являющихся пределами Ξ_W -простых функций в норме $\|F_W\|_{\mathbf{F}_W} = \sup_{\gamma \in \Gamma_W} \|F_W(\gamma)\|$ при фиксированном $W > 0$. Наконец, введем в рассмотрение множество $\mathbf{F}$ операторнозначных функций $F(\gamma)$ со значениями в $\mathbf{B}$, всюду определенных и ограниченных на Γ , причем таких, что $P_\gamma(\Gamma_W)F \in \mathbf{F}_W$ при любом $W > 0$, где $P_\gamma(\Gamma_W)f = \int_{\Gamma_W} dP_\gamma f$. Функции $F \in \mathbf{F}$ образуют коммутативную алгебру с нормой $\|F\|_{\mathbf{F}} = \sup_{\gamma \in \Gamma} \|F(\gamma)\|$ и единицей $E(\gamma) = I$.

В алгебру $\mathbf{F}$ входит множество ограниченных и непрерывных на кривой Γ функций со значениями в $\mathbf{B}$.

Введем также в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$ квадратично суммируемых на множестве $\partial\Omega$ векторнозначных функций $f(x)$ со значениями в пространстве $\tilde{H}$ и нормой $\|f\|_{L_2(\partial\Omega; \tilde{H})} \equiv \sqrt{\int_{\partial\Omega} \|f(x)\|_{\tilde{H}}^2 ds'}$. Пусть $F \in \mathbf{F}$. Определим интеграл вида $F(\tilde{D})f \equiv \int_{\Gamma} F(\gamma) dP_\gamma f$ ($f \in L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$, $\tilde{D} \equiv \sqrt{\tilde{B}}$). Для этого сначала определим оператор $F_W^n(\tilde{D})$ в пространстве $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$ как $\sum_{i=1}^n A_i P_\gamma(B_i)$ ($B_i \in \Xi_W$) на элементах вида ab ($a \in L_2(\partial\Omega)$, $b \in \tilde{H}$). Так как полная вариация скалярной аддитивной функции $(P_\gamma(B)f, g)_{\tilde{H}}$ ($f, g \in \tilde{H}$) множества $B \subset \Xi_W$ не больше, чем $4 \sup_{B \subset \Xi_W} |(P_\gamma(B)f, g)_{\tilde{H}}| \leq 4 \|f\|_{\tilde{H}} \|g\|_{\tilde{H}}$ [15, с. 111], то справедлива оценка: $\|F_W^n(\tilde{D})\| \leq 4 \sup_{\gamma \in \Gamma_W} \|F_W^n(\gamma)\|$ (ср. [14, с. 44]), которая может быть продолжена вместе с оператором $F_W^n(\tilde{D})$ на множество конечных линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ ($a_i \in L_2(\partial\Omega)$, $b_i \in \tilde{H}$) [17, с. 327], а затем по непрерывно-

сти на все пространство $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$. Если последовательность Ξ_W -простых функций F_W^n сходится к $F_W \in \mathbf{F}_W$ в норме $\mathbf{F}_W$, то в силу полученной оценки последовательность операторов $F_W^n(\tilde{\mathbf{D}})$ сходится по операторной норме и ее предел зависит только от F_W и не зависит от конкретной последовательности. Назовем этот предел интегралом $F_W(\tilde{\mathbf{D}})$, причем $\|F_W(\tilde{\mathbf{D}})\| \leq 4 \sup_{\gamma \in \Gamma_W} \|F_W(\gamma)\|$. В силу последней оценки и ограниченностей функции $F \in \mathbf{F}$ и меры P_γ существует сильный предел операторов $F_W(\tilde{\mathbf{D}})$ при $W \rightarrow \infty$ и справедлива оценка: $\|F(\tilde{\mathbf{D}})\| \leq 4 \sup_{\gamma \in \Gamma} \|F(\gamma)\|$. Данный сильный предел и назовем интегралом $F(\tilde{\mathbf{D}})$. Операторы $F(\tilde{\mathbf{D}})$ ограничены в силу последней оценки и образуют алгебру $\mathbf{F}_{\tilde{\mathbf{D}}}$ с единицей $E(\tilde{\mathbf{D}})$, причем отображение алгебры $\mathbf{F}$ на алгебру $\mathbf{F}_{\tilde{\mathbf{D}}}$ гомоморфно:

$$(F_1 F_2)(\tilde{\mathbf{D}}) = F_1(\tilde{\mathbf{D}}) F_2(\tilde{\mathbf{D}}) \quad (F_1, F_2 \in \mathbf{F}). \quad (15)$$

Равенства (15) проверяются непосредственно на плотном в $\mathbf{F}$ (в сильной операторной топологии) множестве Ξ_W -простых функций F_W^n и продолжаются по непрерывности на все множество $\mathbf{F}$.

Пусть $\alpha \in (0; 2^{-1})$ и e_ε – часть кривой $\partial\Omega$, вырезаемая кругом o_ε с центром в точке $x \in \partial\Omega$ и радиусом $\varepsilon < d$, где d – радиус круга Ляпунова. Рассмотрим интегральные уравнения в пространстве $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_i^\pm \tilde{v}_i^\pm &= \tilde{w}_i^\pm \quad (x \in \partial\Omega), \quad \tilde{G}_i^\pm \equiv \mp(-1)^i 2^{-1} I + \tilde{G}_i, \\ \tilde{G}_i &\equiv \tilde{G}'_{i,\varepsilon} + \tilde{G}''_{i,\varepsilon}, \quad (\tilde{G}'_{i,\varepsilon} f)(x) \equiv \int_{e_\varepsilon} \tilde{K}_i(x, x') f(x') ds', \\ (\tilde{G}''_{i,\varepsilon} f)(x) &\equiv \int_{\partial\Omega \setminus e_\varepsilon} \tilde{K}_i(x, x') f(x') ds' \quad (i=1, 2), \\ \tilde{K}_1(x, x') &\equiv \partial_{n_1} \tilde{K}(r), \quad \tilde{K}_2(x, x') \equiv \partial_{n_2} \tilde{K}(r) - \eta \tilde{K}(r). \end{aligned} \quad (16^\pm)$$

На кривой Ляпунова в силу оценки (7) [13, с. 356] справедливы оценки: $\int_{e_\varepsilon} r^{-2\alpha} ds' \leq 4(1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-2\alpha}$ ($x \in \partial\Omega$). Имеем равенства $\partial_{n_i} \tilde{K}(r) = -r \tilde{K}'(r) b_i(x, x')$ ($(x, x') \in \partial\Omega \times \partial\Omega$), где $b_i(x, x') \equiv \partial_{n_i} \ln r^{-1}$ ($i=1, 2$) – ограниченные на множестве $\partial\Omega \times \partial\Omega$ функции [18, с. 597]. С учетом свойств функции $\tilde{K}(r)$ (см. теорему 3), имеем оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}'_{i,\varepsilon} f\|_{L_2(\partial\Omega; \tilde{H})} &\leq C_{i,\alpha} \sqrt{M_\alpha(\varepsilon) |\partial\Omega|} \|f\|_{L_2(\partial\Omega; \tilde{H})}, \\ C_{i,\alpha} &\equiv \sup_{(x, x') \in \partial\Omega \times \partial\Omega} \|r^\alpha \tilde{K}_i(x, x')\|, \quad M_\alpha(\varepsilon) \equiv 4(1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-2\alpha}, \\ \|\tilde{G}''_{i,\varepsilon} f\|_{L_2(\partial\Omega; \tilde{H})} &\leq |\partial\Omega| B_{i,\varepsilon} \|f\|_{L_2(\partial\Omega; \tilde{H})}, \quad B_{i,\varepsilon} \equiv \sup_{(x, x') \in \partial\Omega \times \partial\Omega \setminus e_\varepsilon} \|\tilde{K}_i(x, x')\|, \end{aligned} \quad (17)$$

вследствие которых операторы $\tilde{G}_i$ всюду определены и ограничены в пространстве $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$. Так как $K(r) = \tilde{P}\tilde{K}(r)\tilde{P}$ ($r > 0$), то операторы G_i всюду определены и ограничены в пространстве $L_2(\partial\Omega; H)$.

Теорема 11. Операторы $\tilde{G}_i^\pm : L_2(\partial\Omega; \tilde{H}) \rightarrow L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$ ($i = 1, 2$) ограниченно обратимы.

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие линейные операторы в пространстве $L_2(\partial\Omega)$:

$$\begin{aligned} H_1^\pm(\gamma) &\equiv \pm 2^{-1} I + H_1(\gamma), \quad H_2^\pm(\gamma) \equiv \mp 2^{-1} I + H_2(\gamma) - \eta H_0(\gamma), \\ H_i(\gamma) &\equiv H'_{i,\varepsilon}(\gamma) + H''_{i,\varepsilon}(\gamma), \quad (H'_{i,\varepsilon}(\gamma) f)(x) \equiv \int_{e_\varepsilon} h_i(x, x', \gamma) f(x') ds', \\ (H''_{i,\varepsilon}(\gamma) f)(x) &\equiv \int_{\partial\Omega \setminus e_\varepsilon} h_i(x, x', \gamma) f(x') ds' \quad (x \in \partial\Omega; i = \overline{0, 2}), \end{aligned}$$

$$h_0(x, x', \gamma) \equiv k(r, \sigma), \quad h_i(x, x', \gamma) \equiv -r \partial_r k(r, \sigma) b_i(x, x') \quad (i = 1, 2), \quad \sigma \equiv \sqrt{\gamma} \quad (\sqrt{1} = 1).$$

Докажем, что функции $H_i(\gamma)$ ($i = \overline{0, 2}$) непрерывны в области $C_0 \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $H_i(\gamma) \rightarrow O$ при $|\gamma| \rightarrow \infty$ равномерно по $|\arg \gamma| \leq \pi - \varepsilon'$ для любого $\varepsilon' \in (0; \pi)$ (O – нулевой оператор). Функции $k(r, \sigma) = (2\pi)^{-1} K_0(\rho)$ и $r \partial_r k(r, \sigma) = A_1(\rho)$ непрерывны при $\rho \neq 0$; $K_0(\rho) \rightarrow 0$ и $A_1(\rho) \rightarrow 0$ при $|\rho| \rightarrow +\infty$ равномерно по $|\arg \rho| \leq \pi/2 - \varepsilon'$ ($\varepsilon' \in (0; \pi/2)$). Следовательно, функции h_i ($i = \overline{0, 2}$) непрерывны на множестве $\partial\Omega \times \partial\Omega \times C_0$ всюду, где $x \neq x'$, и $h_i \rightarrow 0$ при $|\gamma| \rightarrow \infty$ равномерно по $|\arg \gamma| \leq \pi - \varepsilon'$ ($\varepsilon' \in (0; \pi)$) и $(x, x') \in \partial\Omega \times \partial\Omega \setminus e_\varepsilon$. Кроме того, $r^\alpha K_0(\rho) = \rho^\alpha K_0(\rho) / \sigma^\alpha \rightarrow 0$ и $r^\alpha A_1(\rho) = \rho^\alpha A_1(\rho) / \sigma^\alpha \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ равномерно по $|\sigma| \geq \varepsilon_0 > 0$ ($\alpha \in (0; 2^{-1})$). Следовательно, функции $r^\alpha h_i$ ($r^\alpha h_i \equiv 0$ при $x = x'$) ограничены на множествах вида $\partial\Omega \times \partial\Omega \times S$, где $S \subset C_0$ – замкнутое множество, которое конечно или находится в секторе вида $|\arg \gamma| \leq \pi - \varepsilon'$ ($\varepsilon' \in (0; \pi)$). Получаем при $\gamma \in C_0$ оценки, аналогичные оценкам (17):

$$\begin{aligned} \|H'_{i,\varepsilon}(\gamma) f\|_{L_2(\partial\Omega)} &\leq C_{i,\alpha}(\gamma) \sqrt{M_\alpha(\varepsilon) |\partial\Omega|} \|f\|_{L_2(\partial\Omega)}, \quad C_{i,\alpha}(\gamma) \equiv \sup_{(x, x') \in \partial\Omega \times \partial\Omega} |r^\alpha g_i(x, x', \gamma)|, \\ \|H''_{i,\varepsilon}(\gamma) f\|_{L_2(\partial\Omega)} &\leq |\partial\Omega| B_{i,\varepsilon}(\gamma) \|f\|_{L_2(\partial\Omega)}, \quad B_{i,\varepsilon}(\gamma) \equiv \sup_{(x, x') \in \partial\Omega \times \partial\Omega \setminus e_\varepsilon} |g_i(x, x', \gamma)|, \end{aligned}$$

согласно которым операторы $H_i(\gamma)$ ($\gamma \in C_0$) всюду определены и ограничены в $L_2(\partial\Omega)$. При любом $\varepsilon > 0$ функции $H''_{i,\varepsilon}(\gamma)$ непрерывны в любой точке $\gamma_0 \in C_0$ в силу непрерывности функций h_i , а функции $H'_{i,\varepsilon}(\gamma) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно в достаточно малой окрестности точки γ_0 , так как $M_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$, а функции $r^\alpha h_i$ ограничены. Отсюда можно вывести, что функции $H_i(\gamma)$ непрерывны на множестве C_0 . Наконец, $B_{i,\varepsilon}(\gamma) \rightarrow 0$ при $|\gamma| \rightarrow \infty$ равномерно по $|\arg \gamma| \leq \pi - \varepsilon'$ ($\varepsilon' \in (0; \pi)$), при этом функция $C_{i,\alpha}(\gamma)$ равномерно ограничена, так что

$H'_{i,\varepsilon}(\gamma) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Тогда $\|H_i(\gamma)\| \rightarrow 0$ при $|\gamma| \rightarrow \infty$ равномерно по $|\arg \gamma| \leq \pi - \varepsilon'$ при любом $\varepsilon' \in (0; \pi)$.

Доказано также, что $H_i^\pm \in \mathbf{F}$ ($i=1,2$) и что $\|H_i^\pm(\gamma)\| \rightarrow H_i^\pm(\infty)$ ($H_i^\pm(\infty) \equiv \mp 2^{-1}(-1)^i \mathbf{I}$) при $|\gamma| \rightarrow \infty$ равномерно по $|\arg \gamma| \leq \pi - \varepsilon'$ при любом $\varepsilon' \in (0; \pi)$.

Исследуем обратимость операторов $H_i^\pm(\gamma)$. Пусть $\gamma \in \mathbf{C}_+$ (здесь $\mathbf{C}_+$ – полуплоскость $\operatorname{Re} \gamma > 0$). Уравнения $H_i^\pm(\gamma)v_i^\pm = w_i^\pm$ являются граничными интегральными уравнениями (13 $^\pm_i$), соответствующими задачам $\{P_i^\pm\}$ с оператором $\mathbf{B} = \gamma \mathbf{I}$, являющимся оператором умножения в нормированном пространстве $\mathbf{C}$. Такой оператор порождает C_0 -полугруппу $\mathbf{T}(\tau) = \exp(-\gamma\tau)\mathbf{I}$, удовлетворяющую условию (3). Операторы $H_{i,\varepsilon}''(\gamma)$ являются фредгольмовскими и $H_{i,\varepsilon}'(\gamma) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, поэтому операторы $H_i(\gamma)$ компактны ($i=0,2$). Согласно теореме 10, уравнения $H_i^\pm(\gamma)v_i^\pm = w_i^\pm$ ($i=1,2$) имеют единственные решения $v_i^\pm \in L_2(\partial\Omega)$ при любом $w_i^\pm \in L_2(\partial\Omega)$. Так как операторы $H_i^\pm(\gamma)$ всюду определены и ограничены, то согласно теореме об обратном отображении [17, с. 99] они имеют ограниченные обратные $H_i^{\pm-1}(\gamma)$ ($\gamma \in \mathbf{C}_+$).

Докажем, что $H_i^{\pm-1} \in \mathbf{F}$. Теорема об устойчивости ограниченной обратимости [16, с. 262] утверждает, что если операторы A_n ($n=1,2,\dots$) и A являются непрерывными биекциями одного банахова пространства на другое, то $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \rightarrow 0$. Поэтому на основании непрерывности функций $H_i^\pm(\gamma)$ в области $\mathbf{C}_+$ можно сделать вывод о непрерывности функций $H_i^{\pm-1}(\gamma)$ в той же области. Поскольку $\|H_i^\pm(\gamma)\| \rightarrow H_i^\pm(\infty)$ при $|\gamma| \rightarrow \infty$ равномерно по $|\arg \gamma| \leq \pi/2$, то в силу той же теоремы $\|H_i^{\pm-1}(\gamma)\| \rightarrow H_i^{\pm-1}(\infty)$ ($H_i^{\pm-1}(\infty) \equiv \mp 2(-1)^i \mathbf{I}$) при $|\gamma| \rightarrow \infty$ равномерно по $|\arg \gamma| < \pi/2$. Поэтому при любом $\mu > 0$ функции $H_i^{\pm-1}(\gamma)$ ограничены в замкнутой полуплоскости $\mathbf{C}_\mu$, определяемой неравенством $\operatorname{Re} \gamma \geq \mu$. Следовательно, $H_i^{\pm-1} \in \mathbf{F}$.

Так как $H_i^\pm \in \mathbf{F}$, то в пространстве $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$ определены ограниченные операторы $H_i^\pm(\tilde{\mathbf{D}})$:

$$H_i^\pm(\tilde{\mathbf{D}})f \equiv \int_{\Gamma} H_i^\pm(\gamma) dP_\gamma f = \mp 2^{-1}(-1)^i f + \int_{\Gamma} H_i(\gamma) dP_\gamma f = \mp 2^{-1}(-1)^i f + H_i(\tilde{\mathbf{D}})f.$$

Рассмотрим интегралы $H_i(\tilde{\mathbf{D}})$ на элементах вида ab ($a \in L_2(\partial\Omega)$, $b \in \tilde{H}$). Перейдем к скалярной мере $\eta_\gamma \equiv (P_\gamma b, c)_{\tilde{H}}$ ($c \in \tilde{H}$) для того, чтобы на основании теоремы 17 [15, с. 218] перейти к интегрированию при фиксированных $x \in \partial\Omega$,

затем перейти к мере $\theta'_x: \theta'_x(S) \equiv \int_S r^{-\alpha} a(x') ds'$, зависящей от x (множества $S \subset \partial\Omega$ измеримы по Лебегу, $\alpha \in (0; 2^{-1})$), и, наконец, изменить порядок интегрирования на основании теоремы 13 [15, с. 211]:

$$\begin{aligned} (H_i(\tilde{D})ab, c)_{\tilde{H}}(x) &= \left(\int_{\Gamma} H_i(\gamma) a d\eta_{\gamma} \right)(x) = \int_{\Gamma} \left\{ \int_{\partial\Omega} r^{\alpha} h_i(x, x', \gamma) d\theta'_x \right\} d\eta_{\gamma} = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ \int_{\Gamma} r^{\alpha} h_i(x, x', \gamma) d\eta_{\gamma} \right\} d\theta'_x = \int_{\partial\Omega} (\tilde{K}_i(x, x')b, c)_{\tilde{H}} a(x') ds' = (\tilde{G}_i ab, c)_{\tilde{H}}(x). \end{aligned}$$

Здесь были использованы выражения (6) для $\tilde{K}(r)$. Изменение порядка интегрирования возможно в силу конечности мер η_{γ} и θ'_x , а также ограниченности и непрерывности на множестве $\partial\Omega \times \Gamma$ подынтегральной функции $r^{\alpha} h_i(x, x', \gamma)$ при фиксированных x ($r^{\alpha} h_i \equiv 0$ при $x = x'$). Отсюда в силу произвольности $c \in \tilde{H}$ и $x \in \partial\Omega$ имеем равенства $H_i(\tilde{D})f = \tilde{G}_i f$ на элементах $f = ab$. Полученные равенства могут быть продолжены на множество конечных линейных комбинаций вида $f = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ ($a_i \in L_2(\partial\Omega)$, $b_i \in \tilde{H}$), а затем по непрерывности на все пространство $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$. В результате уравнения (16 $^{\pm}$) могут быть записаны в следующем виде:

$$H_i^{\pm}(\tilde{D})\tilde{v}_i^{\pm} = \tilde{w}_i^{\pm} \quad (x \in \partial\Omega).$$

Так как $H_i^{\pm-1} \in \mathbf{F}$, то в силу равенств (15) операторы $H_i^{\pm}(\tilde{D})$ имеют ограниченные обратные $H_i^{\pm-1}(\tilde{D})$ ($i=1, 2$). Теорема доказана.

Следствие 8. Функции $H_i^{\pm}(\gamma)$ и $H_i^{\pm-1}(\gamma)$ ($i=1, 2$) голоморфны в областях C_0 и C_+ , соответственно.

Доказательство. При $r \neq 0$, $\sigma \neq 0$ имеем равенства $\partial_{\sigma} \partial_r k(r, \sigma) = (2\pi)^{-1} \rho K_0(\rho)$, $\partial_{\sigma} k(r, \sigma) = \sigma^{-1} A_1(\rho)$ (см. формулы (11)). Следовательно, функции h_i ($i=\overline{0, 2}$) имеют непрерывные производные $\partial_{\gamma} h_i = (2\sigma)^{-1} \partial_{\sigma} h_i$ на множестве $\partial\Omega \times \partial\Omega \times C_0$ всюду, где $x \neq x'$, и функции $r^{\alpha} \partial_{\gamma} h_i$ ($r^{\alpha} \partial_{\gamma} h_i \equiv 0$ при $x = x'$; $\alpha \in (0; 2^{-1})$) ограничены на множествах вида $\partial\Omega \times \partial\Omega \times S$, где $S \subset C_0$ – замкнутое конечное множество. По аналогии с непрерывностью получаем дифференцируемость функций $H_i(\gamma)$ в любой точке $\gamma \in C_0$. Это означает, что функции $H_i(\gamma)$ ($i=\overline{0, 2}$), а вместе с ними и $H_i^{\pm}(\gamma)$ ($i=1, 2$) голоморфны в C_0 . В силу теоремы об устойчивости ограниченной обратимости функции $H_i^{\pm-1}(\gamma)$ голоморфны в C_+ [16, с. 459]. Утверждение доказано.

Теорема 12. Операторы $G_i^{\pm}: L_2(\partial\Omega; H) \rightarrow L_2(\partial\Omega; H)$ ($i=1, 2$) ограниченно обратимы.

Доказательство (ср. [19, параграф 3]). Зададим функции $\varphi_h(\gamma) \equiv h^{-1}[1 - \exp(-h\gamma)]$, зависящие от $h > 0$ как от параметра. Функции $\zeta = \varphi_h(\gamma)$ голоморфны в $\mathbb{C}$ и их значения принадлежат $\mathbb{C}_+$ при $\gamma \in \mathbb{C}_+$. Поэтому с учетом голоморфности функций $H_i^{\pm-1}(\zeta)$ в $\mathbb{C}_+$ (см. следствие 8) функции $R_{i,h}^{\pm}(\gamma) \equiv H_i^{\pm-1}(\varphi_h(\gamma))$, зависящие от $h > 0$ как от параметра, голоморфны в $\mathbb{C}_+$. Значения функций $\varphi_h(\gamma)$ ($h > 0$) при $\gamma \in \mathbb{C}_\mu$ ($\mu > 0$) образуют круг с центром в точке h^{-1} и радиусом $h^{-1} \exp(-h\mu)$, полностью находящийся в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \geq \varphi_h(\mu) > 0$. Следовательно, функции $R_{i,h}^{\pm}(\gamma)$ ($h > 0$) ограничены в $\mathbb{C}_\mu$ при любом $\mu > 0$. Получили, что $R_{i,h}^{\pm} \in \mathbf{F}$.

Функции $\varphi_h(\gamma) \rightarrow \gamma$ при $h \rightarrow +0$ равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}_+$. Отсюда в силу непрерывности $H_i^{\pm-1}(\zeta)$ в $\mathbb{C}_+$ вытекает, что $R_{i,h}^{\pm}(\gamma) \rightarrow H_i^{\pm-1}(\gamma)$ по операторной норме при $h \rightarrow +0$ равномерно на любом множестве Γ_W ($W > 0$). Поэтому при фиксированных $W > 0$ имеем предельные равенства в операторной норме:

$$\lim_{h \rightarrow +0} P_\gamma(\Gamma_W) R_{i,h}^{\pm}(\tilde{D}) = P_\gamma(\Gamma_W) H_i^{\pm-1}(\tilde{D}). \quad (18)$$

Пусть $\varphi_0(\gamma) \equiv \gamma$. Заметим, что при любых $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h > 0$ выполнено неравенство: $\alpha > \varphi_h(\alpha)$, в силу которого функция $\psi_\alpha(h) \equiv \varphi_h(\alpha)$ для любого фиксированного $\alpha > 0$ является убывающей при $h \in [0; \infty)$. Отсюда $\operatorname{Re} \varphi_h(\gamma) \geq \varphi_h(\operatorname{Re} \gamma) \geq \varphi_{h_0}(\operatorname{Re} \gamma) \geq \varphi_{h_0}(\mu) > 0$ при $\gamma \in \mathbb{C}_\mu$, $h \in [0; h_0]$ и фиксированных $\mu > 0$, $h_0 > 0$. Поэтому функции $R_{i,h}^{\pm}(\gamma)$ равномерно по $h \in [0; h_0]$ ограничены в любой полуплоскости $\mathbb{C}_\mu$ ($\mu > 0$), а значит, и на множестве Γ . Тогда в силу конечности меры P_γ можно в обеих частях равенства (18) сделать дополнительный предельный переход $W \rightarrow \infty$ в сильной операторной топологии и получить следующие пределы в норме $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$:

$$\lim_{h \rightarrow +0} R_{i,h}^{\pm}(\tilde{D}) f = H_i^{\pm-1}(\tilde{D}) f \quad (f \in L_2(\partial\Omega; \tilde{H})). \quad (19)$$

Введем в рассмотрение функции $\Phi_h(\lambda) = h^{-1}(1 - \lambda)$, зависящие от $h > 0$ как от параметра. Функции $\Phi_h(\lambda)$ голоморфны в $\mathbb{C}$ и их значения принадлежат $\mathbb{C}_+$ при $|\lambda| < 1$. Поэтому функции $A_{i,h}^{\pm}(\lambda) \equiv H_i^{\pm-1}(\Phi_h(\lambda))$, зависящие от $h > 0$ как от параметра, голоморфны в круге $|\lambda| < 1$. Пусть $A_{i,h,n}^{\pm}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) – коэффициенты разложения в ряд Тейлора соответствующих функций $A_{i,h}^{\pm}(\lambda)$ в круге $|\lambda| < 1$. Так как $R_{i,h}^{\pm}(\gamma) = A_{i,h}^{\pm}(e^{-h\gamma})$, то операторы $R_{i,h}^{\pm}(\gamma)$ ($h > 0$, $\gamma \in \mathbb{C}_+$) могут быть представлены в виде сходящихся в норме $\mathbf{B}$ рядов:

$$R_{i,h}^{\pm}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{i,h,n}^{\pm} \exp(-nh\gamma). \quad (20)$$

На основании равенств

$$\begin{aligned} (A_{i,h,n}^{\pm} f, g)_{L_2(\partial\Omega)} &= (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\exp(-h\mu)} \lambda^{-n-1} (A_{i,h}^{\pm}(\lambda) f, g)_{L_2(\partial\Omega)} d\lambda \\ & (f, g \in L_2(\partial\Omega); \mu > 0) \end{aligned}$$

получаем оценки:

$$\|A_{i,h,n}^{\pm}\| \leq C_{h,\mu} / \exp(-nh\mu), \text{ где } C_{h,\mu} \equiv \max_{\gamma \in C_{\mu}} \|R_{i,h}^{\pm}(\gamma)\|.$$

Положим $\mu = p/2$. Тогда имеем оценки:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_{i,h,n}^{\pm}\| |\exp(-nh\gamma)| \leq C_{h,p/2} [1 - \exp(-hp/2)]^{-1} \quad (\gamma \in C_p, h > 0). \quad (21)$$

Подставляя выражения (20) в соответствующие интегралы $R_{i,h}^{\pm}(\tilde{D})$ и изменяя порядок суммирования и интегрирования на основании оценок (21) и $\|F(\tilde{D})\| \leq 4 \sup_{\gamma \in \Gamma} \|F(\gamma)\|$, приходим с учетом формулы (7) для $\tilde{T}(\tau)$ к представлению

операторов $R_{i,h}^{\pm}(\tilde{D})$ ($h > 0$) в виде сходящихся в операторной норме рядов:

$$R_{i,h}^{\pm}(\tilde{D}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{i,h,n}^{\pm} \tilde{T}(nh). \quad (22)$$

Обозначим $R_{i,h}^{\pm}(D) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_{i,h,n}^{\pm} T(nh)$. В силу равенств (19) существуют сильные операторные пределы: $H_i^{\pm-1}(D) \equiv \lim_{h \rightarrow +0} R_{i,h}^{\pm}(D)$. В теореме 11 доказано, что операторы $\tilde{G}_i^{\pm} = H_i^{\pm}(\tilde{D})$ имеют ограниченные обратные $H_i^{\pm-1}(\tilde{D})$. Учитывая также, что элементы $\tilde{G}_i^{\pm} f$ ($f \in L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$) могут быть аппроксимированы в норме $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$ конечными суммами вида $\sum_{n=0}^N \tilde{A}_n \tilde{T}(nh') f$ ($h' > 0$, $\tilde{A}_n$ – ограниченные операторы в $L_2(\partial\Omega)$), и равенства $T(\tau) = \text{пр } \tilde{T}(\tau)$, (19) и (22), получаем следующие равенства для произвольного $f \in L_2(\partial\Omega; H)$:

$$\begin{aligned} H_i^{\pm-1}(D) G_i^{\pm} f &= \tilde{P} \lim_{h \rightarrow +0} R_{i,h}^{\pm}(\tilde{D}) H_i^{\pm}(\tilde{D}) f = f, \\ G_i^{\pm} H_i^{\pm-1}(D) f &= \tilde{P} H_i^{\pm}(\tilde{D}) \lim_{h \rightarrow +0} R_{i,h}^{\pm}(\tilde{D}) f = f, \end{aligned}$$

т.е. операторы $G_i^{\pm}: L_2(\partial\Omega; H) \rightarrow L_2(\partial\Omega; H)$ имеют ограниченные обратные $H_i^{\pm-1}(D)$. Теорема доказана.

Из следствия 7 и теорем 9, 12 вытекают основные результаты настоящей работы:

Следствие 9. Задача $\{P_i^{\pm}\}$ ($i = 1, 2$) однозначно разрешима с любой граничной функцией $w_i^{\pm} \in C(\partial\Omega; H)$. Ее решение представимо в виде функции g_i с неизвестной $v_i^{\pm}$, однозначно определяемой уравнением (13 $_i^{\pm}$), и обладает устойчивостью. А именно: пусть $u_i^{(1)\pm}$, $u_i^{(2)\pm}$ – решения задачи $\{P_i^{\pm}\}$ с соответствующими

граничными функциями $w_i^{(1)\pm}$, $w_i^{(2)\pm}$ из пространства $C(\partial\Omega; H)$. Тогда $\|u_i^{(1)\pm} - u_i^{(2)\pm}\|_{C(\Omega^\pm; H)} \rightarrow 0$, если $\|w_i^{(1)\pm} - w_i^{(2)\pm}\|_{C(\partial\Omega; H)} \rightarrow 0$.

Следствие 10. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$ ($k \in \mathbb{Z}_+$). Операторы $G_i^\pm: C^k(\partial\Omega; H_B^n) \rightarrow C^k(\partial\Omega; H_B^n)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$; $i = 1, 2$) всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
3. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филликов А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995. 176 с.
4. Yakubov S., Yakubov Ya. Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000. 541 p.
5. Шахмуров В.Б. Максимальные регулярные абстрактные эллиптические уравнения и их приложения // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 5. С. 1175–1191.
6. Shakhmurov V. Singular degenerate problems and application [Электронный ресурс] // <https://arxiv.org/abs/1707.01376> (дата представления: 05.06.2017).
7. Shakhmurov V. Regularity properties of singular degenerate abstract differential equations and applications [Электронный ресурс] // <https://arxiv.org/abs/1707.01771> (дата представления: 05.06.2017).
8. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
9. Иванов Д.Ю., Дзержинский Р.И. Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
10. Иванов Д.Ю. Использование векторных потенциалов для решения двумерной задачи Робена, описывающей теплопроводность в прямом цилиндре // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 3-1. С. 8–14.
11. Иванов Д.Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6. С. 33–45.
12. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970. 432 с.
13. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. 1064 с.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
16. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
17. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
18. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Л.: ГИТТЛ, 1953. 804 с.
19. Иванов Д.Ю. Обоснование одного алгоритма численного решения обратных граничных задач теплопроводности, построенного с учетом полугрупповой симметрии таких задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 12. С. 2028–2042.

Статья поступила 15.02.2018 г.

Ivanov D.Y. (2019) SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR A TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION IN AN ABSTRACT HILBERT SPACE USING THE METHOD OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 11–31

DOI 10.17223/19988621/60/2

Keywords: Boundary-value problem, differential-operator equation, boundary integral equation, semigroup of operators, generator, vector-valued function, operator-valued function, unitary dilation.

In this paper, we study boundary-value problems of the first, second, and third kinds for the differential-operator equation $\Delta_2 \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ ($\Delta_2 \equiv \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$) in an open two-dimensional bounded simply connected domain Ω^+ or its open exterior Ω^- . Here, $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ is a vector function with values in an abstract Hilbert space H ; $\mathbf{B}$ is a linear closed densely operator defined in the space H and generating an exponentially decreasing C_0 -semigroup of contractions $\mathbf{T}(\tau)$: $\|\mathbf{T}(\tau)\| \leq \exp(-p\tau)$ ($p > 0$). Solutions of the boundary-value problems are obtained in the form of vector potentials with unknown vector functions similar to density functions, which are found from Fredholm boundary integral equations of the second kind, wherein kernels of integral operators are expressed through the C_0 -semigroup $\mathbf{T}(\tau)$. Let $\partial\Omega$ be the boundary of the domain $\Omega^\pm$. Under the condition $\partial\Omega \in C^2$, the stable solvability of the boundary-value problems in the space $C(\overline{\Omega^\pm}; H)$ is proved. Here, $C(\overline{\Omega^\pm}; H)$ is the Banach space of vector functions, continuous on the closed set $\overline{\Omega^\pm}$ with values in the space H . The stable solvability of the boundary integral equations in the spaces $L_2(\partial\Omega; H)$ and $C^k(\partial\Omega; H_B^n)$ ($k, n \geq 0$) is also proved under the conditions $\partial\Omega \in C^2$ and $\partial\Omega \in C^{k+2}$, respectively. Here, $L_2(\partial\Omega; H)$ is the Hilbert space of vector functions, square-summable on the set $\partial\Omega$ with values in the space H ; $C^k(\partial\Omega; H_B^n)$ is the Banach space of vector functions, k times continuously differentiable on the set $\partial\Omega$ with values in the Sobolev type space H_B^n defined by powers $n+1$ of the operator $\mathbf{B}$.

AMS Subject Classification: 31A25, 34G10, 35J25

IVANOV Dmitry Yurievich (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Polozhii G.N. (1964) *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya Shkola. 560 p.
2. Krein S.G. (1971) *Linear differential equations in Banach space*. Providence: American Math. Soc. 390 p.
3. Ivanov V.K., Mel'nikova I.V., Filinkov A.I. (1995) *Differentsial'no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi* [Operator-differential equations and ill-posed problems]. Moscow: Nauka. 176 p.
4. Yakubov S., Yakubov Ya. (2000) *Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations*. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC. 541 p.
5. Shakhmurov V.B. (2010) Maximal regular abstract elliptic equations and applications. *Siberian Mathematical Journal*. 51 (5). pp. 935–948. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11202-010-0093-5>. pp. 1175–1191.
6. Shakhmurov V. *Singular degenerate problems and application*. Available at <https://arxiv.org/abs/1707.01376> (submitted on 5 July 2017).

7. Shakhmurov V. *Regularity properties of singular degenerate abstract differential equations and applications*. Available at <https://arxiv.org/abs/1707.01771> (submitted on 5 July 2017).
8. Ivanov D.Y. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. <https://link.springer.com/article/10.1134/S0012266110080045>.
9. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Resheniye zadach Robena dlya dvumernykh differentsial'no-operatornykh uravneniy, opisyyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region*. 1. pp. 15–17.
10. Ivanov D.Yu. (2016) Ispolzovanie vektornykh potentsialov dlya resheniya dvumernoy zadachi Robena, opisyyvayushey teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Using of vector potentials for solving the two-dimensional Robin problem describing the heat conductivity in a straight cylinder]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk – Actual Problems of Humanitarian and Natural Sciences*. 3-1. pp. 8–14.
11. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 33–45. DOI 10.17223/19988621/38/4.
12. Sz.-Nagy B., Foias C. (1970) *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. Budapest: Akadémiai Kiadó; Amserdam, London: North-Holland Pub. Co. 389 p.
13. Mikhlin S.G. (1970) *Mathematical physics: an advanced course*. Amserdam: North-Holland Pub. Co. 561 p.
14. Dunford N., Schwartz J.T. (1963) *Linear operators. Part II. Spectral theory, Self adjoint operators in Hilbert space*. New York, London: Interscience Publishers. 1065 p.
15. Dunford N., Schwartz J.T. (1958) *Linear operators. Part I. General theory*. New York, London: Interscience Publishers. 858 p.
16. Kato T. (1976) *Perturbation theory for linear operators*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. 620 p.
17. Reed M., Simon B. (1972) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis*. New York, London: Academic Press. 325 p.
18. Smirnov V.I. (1964) *A course of higher mathematics. Vol. 4. Integral equations and partial differential equations*. Oxford, New-York: Pergamon Press. 811 p.
19. Ivanov D.Yu. (1998) Validation of a numerical algorithm for solving inverse boundary value problems for heat equation that takes into account the semigroup symmetry. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 38 (12). pp. 1948–1961.

Received: February 15, 2018

УДК 514.132+515.162
DOI 10.17223/19988621/60/3

MSC: 57M05, 20F05, 57M50

Т.А. Козловская

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП СИРАДСКИ С ЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ПОРОЖДАЮЩИХ И ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ¹

Рассматриваются обобщенные группы Сирадски $S(2n, 7, 2)$, $n \geq 1$. Установлено, что их n -циклические представления являются геометрическими, то есть соответствуют спайнам замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Доказано, что полученные многообразия являются n -листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств $L(7, 1)$.

Ключевые слова: *трехмерное многообразие, разветвленное накрытие, линзовое пространство, группа с циклическим представлением, группа Сирадски.*

Дж. Столлинкс в работе [1] показал, что не существует алгоритма, который позволяет по конечному представлению группы определить, является ли она фундаментальной группой некоторого трехмерного многообразия. Этот вопрос решался многими авторами в различных частных случаях, среди которых наибольший интерес был связан с изучением групп, допускающих циклическое представление.

Напомним, что группа G называется *группой с циклическим представлением*, если при некоторых m и w она допускает представление вида

$$G = G_m(w) = \langle x_1, \dots, x_m \mid w = 1, \eta(w) = 1, \dots, \eta^{m-1}(w) = 1 \rangle,$$

где $\eta: \mathbb{F}_m \rightarrow \mathbb{F}_m$ – автоморфизм свободной группы $\mathbb{F}_m = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ ранга m , определенный по правилу $\eta(x_i) = x_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $\eta(x_m) = x_1$, а $w = w(x_1, \dots, x_m)$ – циклически приведенное слово в $\mathbb{F}_m$. Представления групп 3-многообразий называют *геометрическими*, если они соответствуют спайнам замкнутых трехмерных многообразий.

В последнее время исследовано много интересных примеров циклических разветвленных накрытий трехмерной сферы и линзовых пространств, фундаментальные группы которых допускают циклические представления (см. [2–7]). Были получены результаты о взаимосвязях циклически представимых групп и циклических разветвленных накрытий S^3 и $L(p, q)$. По-видимому, новый этап в изучении таких групп начался с работы Х. Хеллинга, А. Кима и И. Меннике [2], где было показано, что группы Фибоначчи возникают как фундаментальные группы замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Эти многообразия могут быть охарактеризованы следующим топологическим свойством: многообразие Фибоначчи является n -листным циклическим накрытием S^3 , разветвленным над узлом восьмерка (см. [8]). Различные обобщения групп Фибоначчи изучены в [6, 9, 10]. Исследование разветвленных циклических накрытий и циклических представле-

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 1.13557.2019/13.1).

ний их фундаментальных групп также связано с многообразиями Данвуди [4]. Многообразия Данвуди были определены как многообразия, допускающие диаграммы Хегора с циклической симметрией разветленно накрывающие многообразия Хегора рода один. Многообразия, допускающие разбиение Хегора рода один – это линзовые пространства $L(p, q)$, включая $S^2 \times S^1 = L(1, 0)$. Л. Грасселли и М. Мулаццани показали в [11], что класс многообразий Данвуди в точности, совпадает с классом строго-циклических разветвленных накрытий $(1, 1)$ -узлов. Класс $(1, 1)$ -узлов содержит двухмостовые узлы и торические узлы в трехмерной сфере. Многообразия Сирадски были введены А. Сирадски в работе [12]. А. Кавиккиоли, Ф. Хагенбарт и А.Ч. Ким установили, что многообразия Сирадски и их обобщения являются n -листными циклическими накрытиями S^3 , разветвленными над торическими узлами [3]. В частности, циклическое представление группы Сирадски $S(m, 3, 2)$ соответствует спайну многообразия, которое m -листно циклически накрывает трехмерную сферу разветленно над узлом трилистник. Дж. Хоуи и Г. Вильямс в [13] рассмотрели случай четного $m = 2n$ и показали, что n -циклическое представление группы $S(2n, 3, 2)$ соответствует n -листному накрытию линзового пространства $L(3, 1)$. n -Циклическое представление групп $S(2n, 5, 2)$ было рассмотрено в статье [14], где установлено, что соответствующие многообразия являются n -листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств $L(5, 1)$. В данной работе исследуются группы $S(2n, 7, 2)$, $n \geq 1$ и их n -циклические представления. Построен спайн, соответствующий n -циклическому представлению группы $S(2n, 7, 2)$. В теореме 2 показано, что этот спайн задает многообразие, n -листно циклически накрывающее линзовое пространство $L(7, 1)$. Для малых значений n построенные многообразия были классифицированы с помощью компьютерной программы «Распознаватель» [15].

2. Основные понятия и вспомогательные утверждения

Хорошо известно, что любое замкнутое трехмерное многообразие может быть представлено как результат попарного отождествления граней его фундаментального многогранника. Примерами являются представление линзового пространства $L(p, q)$, $p \geq 3$, как бипирамиды (см. рис. 1), у которой верхние треугольные грани отождествлены с нижними треугольными гранями по правилу: $A_i S_+ A_{i+1} \rightarrow A_{i+q} S_- A_{i+q+1}$, $i = 0, \dots, p-1$, а также представление сферы Пуанкаре как додекаэдра, у которого каждые две противоположные грани отождествлены некоторым образом. Построение трехмерных гиперболических многообразий из правильных многогранников восходит к работе Вебера и Зейферта [16], где в качестве фундаментального многогранника выступал додекаэдр с

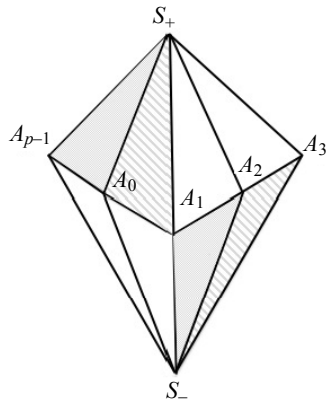


Рис. 1. p -угольная бипирамида

Fig. 1. The p -gonal bipyramid

двугранными углами $2\pi/5$. По построению, многообразие Вебера – Зейферта обладает симметрией пятого порядка, которая позволяет представить это многообразие как 5-листное циклическое накрытие трехмерной сферы, разветвленное над зацеплением Уайтхеда. В этой же работе [16] было построено замкнутое ориентируемое трехмерное сферическое многообразие из додекаэдра с двугранными углами $2\pi/3$.

Многогранник P называют фундаментальным для трехмерного многообразия M , если M может быть получено как результат попарного отождествления граней P . Теорема Зейферта и Трельфалля [17] позволяет распознать многообразие: «Комплекс K^3 , получающийся путем попарного отождествления граней многогранника, является трехмерным многообразием в том и только в том случае, когда его эйлерова характеристика равна 0». Эйлерова характеристика комплекса K^3

определяется следующим образом: $\chi(K^3) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i S_i$, где S_i – количество сим-

плексов размерности i в его триангуляции. Диаграммы Хегора – это наиболее распространенный способ задания замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Пусть M^3 – замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие. Пара (H_g, H'_g) , состоящая из двух полных кренделей рода g , называется *сплетением Хегора* рода g многообразия M^3 , если $M^3 = H_g \cup H'_g$ и $H_g \cap H'_g = \partial H_g$ представляет собой замкнутую ориентируемую поверхность рода g . Минимальный род среди всех родов сплетений Хегора многообразия M^3 называется *родом Хегора* многообразия M^3 . Трехмерная сфера S^3 является единственным ориентируемым многообразием с нулевым родом Хегора. Род Хегора равен 1 для линзовых пространств и многообразия $S^2 \times S^1$. Диаграмма Хегора линзового пространства $L(p, q)$, $p > q > 0$, $p \geq 3$, представлена на рис. 2. Описание многообразия диаграммой Хегора позволяет выписать его фундаментальную группу. Напомним (см., например, [18]), что представление фундаментальной группы трехмерного многообразия называется *геометрическим*, если оно соответствует диаграмме Хегора многообразия. Хорошо известно, что две диаграммы Хегора представляют одно и то же трехмерное многообразие тогда и только тогда, когда от одной диаграммы к другой можно перейти с помощью конечной последовательности преобразований, каждое из которых является движением Зингера (см. подробнее в [19, 20]).

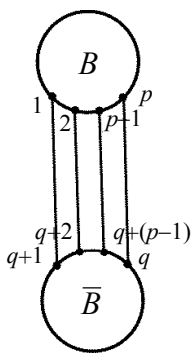


Рис. 2. Диаграмма Хегора линзового пространства $L(p, q)$

Fig. 2. Heegaard diagram for lens space $L(p, q)$

3. Группы с циклическим представлением

Примеры групп с циклическим представлением, возникающих как фундаментальные группы трехмерных многообразий, хорошо известны. Группы с циклическим представлением

$$F(2, m) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2}, i = 1, \dots, m \rangle,$$

где индексы берутся по модулю m , называются *группами Фибоначчи*. Х. Хеллинг, А.Ч. Ким и Й. Меннике в [2] доказали, что если число порождающих четно $m = 2n$, то при $n \geq 4$ группы $F(2, 2n)$ реализуются как фундаментальные группы трехмерных гиперболических многообразий. Построенные ими многообразия, являются n -листными накрытиями S^3 , разветвленными над узлом восьмерка.

Еще один интересный пример, группы со следующим циклическим представлением $S(m) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+2} = x_{i+1}, i = 1, \dots, m \rangle$, где все индексы берутся по модулю m , были введены А. Сирадски. Эти группы позже были названы группами Сирадски [12].

Группы

$$S(m, p, q) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+q} \cdots x_{i+(q-1)dq-q} x_{i+(q-1)dq} = x_{i+1} x_{i+q+1} \cdots x_{i+(q-1)dq-q+1}, i = 1, \dots, m \rangle$$

будем называть *обобщенными группами Сирадски*. Здесь все индексы берутся по модулю m , а p и q – такие взаимно простые положительные числа, что $p = 1 + dq$, $d \in \mathbb{Z}$. А. Кавикиоли, Ф. Хегенбарт и А.С. Ким установили [3], что циклическое представление $S(m, p, q)$ соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия, которое является m -листным циклическим накрытием S^3 , разветвленным над торическим узлом $T(p, q)$. В частности, циклическое представление группы Сирадски $S(m) = S(m, 3, 2)$ соответствует спайну многообразия, которое m -листно циклически накрывает трехмерную сферу разветвленно над узлом трилистник $T(3, 2)$. Нас интересуют обобщенные группы Сирадски с параметром $q = 2$. В этом случае $p = 1 + dq$ и

$$S(m, 2d+1, 2) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+2} \cdots x_{i+2d} = x_{i+1} x_{i+3} \cdots x_{i+2d-1}, i = 1, \dots, m \rangle.$$

Циклические представления групп $S(2n, 3, 2)$ (случай $q = 2, d = 1$) исследовались Дж. Хоуи и Г. Вильямсом [13]. Они показали, что n -циклические представления $S(2n, 3, 2) = G_n(x_i x_{i+1}^2 x_{i+2} x_{i+1}^{-1})$ являются геометрическими, то есть соответствуют спайнам замкнутых трехмерных многообразий. Аналогичный факт установлен для групп $S(2n, 5, 2)$ (случай $q = 2, d = 2$). А именно, А. Весниным и Т. Козловской в [14] показано, что n -циклические представления $S(2n, 5, 2) = G_n(x_i x_{i+1} x_{i+2}^2 x_{i+3} x_{i+4} x_{i+3}^{-1} x_{i+2}^{-1} x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1})$ являются геометрическими. Доказано, что в обоих случаях полученные многообразия являются n -листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств. С целью дальнейшего обобщения конструкции перерисуем двумерный комплекс, представленный в работе [14], как изображено на рис. 3. Используя теорему Зейферта и Трельфалля [17], нетрудно проверить, что приведенный двумерный комплекс является спайном замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия.

4. Разветвленные циклические накрытия $L(7, 1)$

Рассмотрим обобщенные группы Сирадски $S(2n, 7, 2)$ с четным числом порождающих. От циклического представления с $2n$ порождающими перейдем к циклическому представлению с n порождающими:

Определяющие слова можно прочесть вдоль границ двумерных клеток на рис. 4. Действительно, первое слово читается вдоль границы клетки F_1 , если ориентировать ее против часовой стрелки и также вдоль границы клетки $\bar{F}_1$, если ориентировать ее по часовой стрелке. Аналогичным образом читается слово для пары клеток F_2 и $\bar{F}_2$. Метки, расставленные на ребрах и ориентация ребер задают попарные отождествления двумерных клеток K_1 , которые, в свою очередь, индуцируют отождествления 1-клеток и 0-клеток. В результате получим комплекс. Нетрудно проверить, что его эйлерова характеристика равно нулю. Отсюда следует, что двумерный комплекс K_1 является спайном замкнутого трехмерного многообразия [17]. Конструкция для комплекса K_n и все рассуждения с очевидностью обобщаются для произвольного n . ■

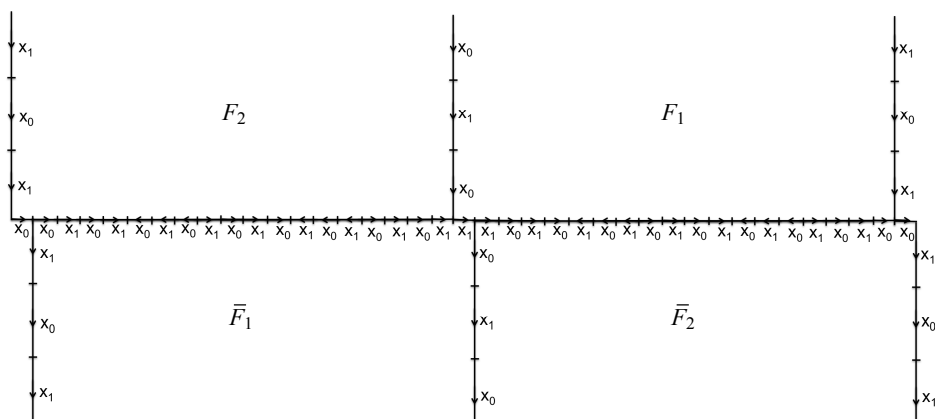


Рис. 4. Двумерный комплекс для $n = 1$, $(p, q) = (7, 2)$

Fig. 4. The complex for the case $n = 1$, $(p, q) = (7, 2)$.

Приведенный на рис. 5, 2-комплекс K_4 является спайном замкнутого трехмерного многообразия.

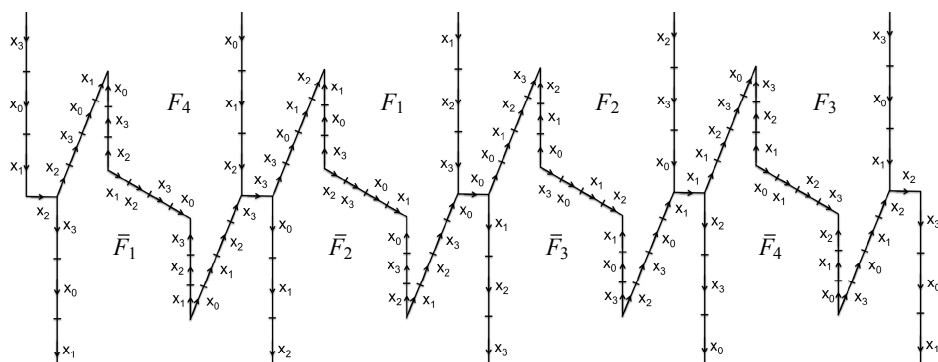


Рис. 5. Двумерный комплекс для случая $n = 4$, $(p, q) = (7, 2)$

Fig. 5. The complex for the case $n = 4$, $(p, q) = (7, 2)$.

Теорема 2. Для каждого $n \geq 1$ многообразие $S(2n, 7, 2)$ является разветвленным n -листным циклическим накрытием линзового пространства $L(7, 1)$.

Известно, что если 3-многообразие задано попарным отождествлением граней многогранника и число пар граней равно N , то для этого трехмерного многообразия существует разбиение Хегора рода N (см. [17]). Открытая диаграмма Хегора многообразия, имеет вид как на рис. 6. Представление группы, реализуемое диаграммой Хегора является геометрическим. У приведенной выше диаграммы Хегора многообразия имеется циклическая симметрия порядка n . Эта симметрия индуцирует симметрию на многообразии $S(2n, 7, 2)$. Фактор-пространство по этой симметрии – трехмерный орбифолд. Носителем этого орбифолда является псевдомногообразие. Теорема доказывается в общем случае, с использованием движений Зингера для диаграмм Хегора. Идея доказательства состоит в проверке того, что полученная диаграмма Хегора является диаграммой Хегора линзового пространства $L(7, 1)$, полученная при помощи последовательности движений Зингера (см. [20]), приводящей к канонической диаграмме Хегора линзового пространства (см. рис. 2). ■

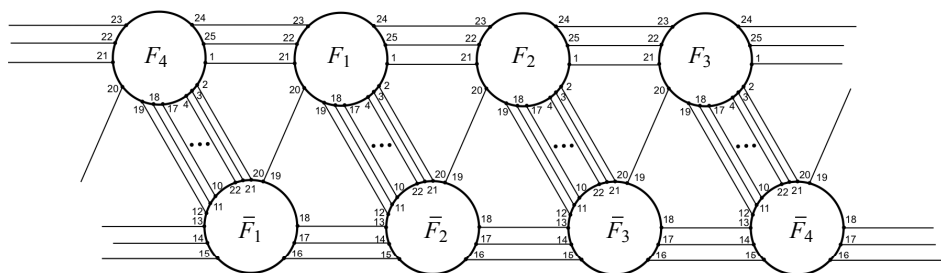


Рис. 6. Диаграмма Хегора для случая $n = 4$, $(p, q) = (7, 2)$

Fig. 6. Heegaard diagram for the case $n = 4$, $(p, q) = (7, 2)$

Задание многообразий фундаментальными многогранниками позволяет перейти к их триангуляции и использовать компьютерную программу «Распознаватель 3-многообразий» [15] для нахождения топологических и геометрических инвариантов. Для малых значений n многообразия $S(2n, 7, 2)$ могут быть классифицированы с помощью «Распознавателя трехмерных многообразий». Вычисления, проведенные для случая $n = 1$ показали, что $S(2, 7, 2)$ является многообразием Зейферта $(S^2, (2, 1), (7, 2), (7, 2), (1, -1))$, а для $n = 3$, что $S(6, 7, 2)$ является многообразием Зейферта $(S^2, (6, 1), (7, 3), (7, 3), (1, -1))$.

Заключение

Исследованы циклические представления групп Сирадски $S(2n, p, q)$ (случай $q = 2$, $d = 3$). Установлено, что n -циклические представления групп Сирадски $S(2n, 7, 2)$ соответствуют спайнам замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Изучены топологические свойства построенных многообразий. Доказа-

но, что трехмерные многообразия являются разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stallings J. On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups // *Fundam. Math.* 1962/63. V. 51. P. 191—194.
2. Helling H., Kim A.C., Mennicke J.L. A geometric study of Fibonacci groups // *J. Lie Theory.* 1998. V. 8. P. 1–23.
3. Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. On cyclic branched coverings of torus knots // *J. Geometry.* 1999. V. 64. P. 55–66.
4. Dunwoody M.J. Cyclic presentations and 3-manifolds // *Proc. Inter. Conf., Groups-Korea '94.* Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 47–55.
5. Kim A.C. On the Fibonacci group and related topics // *Proc. conf. algebra, 1991, Barnaul, Russia (Contemp. Math., 184)*, Providence, RI, Am. Math. Soc. 1995. P. 231–235.
6. Веснин А.Ю., Ким А.Ч. Дробные группы Фибоначчи и многообразия // *Сиб. матем. журнал.* 1998. Т. 39. № 4. С. 765—775.
7. Kim A.C., Kim Y., Vesnin A. On a class of cyclically presented groups // *Proc. Intern. Conf. Groups-Korea '98.* Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2000. P. 211–220.
8. Hilden H., Lozano M., Montesinos-Amilibia J. The arithmeticity of the figure eight knot orbifolds // *Topology '90 Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., Walter de Gruyter, Berlin.* 1992. V. 1. P. 169–183.
9. Johnson D., Wamsley J., Wright D. The Fibonacci Groups // *Proc. London Math. Soc., III. Ser.* 1974. V. 29. No. 4. P. 577–592.
10. MacLachlan C., Reid A.W. Generalised Fibonacci manifolds // *Transform. Groups.* 1997. V. 2. No. 2. P. 165–182.
11. Grasselli L., Mulazzani M. Genus one 1–bridge knots and Dunwoody manifolds // *Forum Mathematicum.* 2001. V. 13. No 3. P. 379–397.
12. Sieradski A.J. Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups // *Invent. Math.* 1986. V. 84. P. 121–139.
13. Howie J., Williams G. Fibonacci type presentations and 3-manifolds // *Topology Appl.* 2017. V. 215. P. 24–34.
14. Веснин А.Ю., Козловская Т.А. Многообразия Брискорна, обобщенные группы Сирадски и накрытия линзовых пространств // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2017. Т. 23. № 4. С. 85–97.
15. *Three-manifold Recognizer.* The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University. URL: <http://matlas.math.csu.ru>
16. Seifert H., Weber C. Die beiden Dodekaedräume // *Math. Z.* 1933. V. 37. P. 237–253.
17. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. Ижевск, 2001. 448 с.
18. Mulazzani M. Cyclic presentation of groups and cyclic branched covering of $(1, 1)$ -knots // *Bull. Korean Math. Soc.* 2003. V. 40(1). P. 101–108.
19. Ozsvath P., Szabo Z. Heegaard diagrams and holomorphic disks // *International Mathematical Series.* 2004. V. 3. P. 301–348.
20. Singer J. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1933. V. 35. No. 1. P. 88–111.

Статья поступила 29.05.2019 г.

Kozlovskaya T.A. (2019) CYCLICALLY PRESENTED SIERADSKI GROUPS WITH EVEN NUMBER OF GENERATORS AND THREE DIMENSIONAL MANIFOLDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 32–41

DOI 10.17223/19988621/60/3

Keywords: three-dimensional manifold, branched covering, lens space, cyclically presented group, Sieradski group.

The Sieradski groups are defined by the presentation $S(m) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+2} = x_{i+1}, i = 1, \dots, m \rangle$, where all subscripts are taken by mod m . The generalized Sieradski groups $S(m, p, q)$ are groups with m -cyclic presentation $G_m(w)$, where word w has a special form depending on coprime integers p and q . We study the problem if a given presentation is geometric, i.e. it corresponds to a spine of a closed orientable 3-manifold. It was shown by Cavicchioli, Hegenbarth, and Kim that the generalized Sieradski group presentation $S(m, p, q)$ corresponds to a spine of some 3-manifold which we denote as $M(m, p, q)$. Moreover, $M(m, p, q)$ are m -fold cyclic coverings of S^3 branched over the torus (p, q) -knot. Howie and Williams proved that $M(2n, 3, 2)$ are n -fold cyclic coverings of the lens space $L(3, 1)$. A. Vesnin and T. Kozlovskaya established that $M(2n, 5, 2)$ are n -fold cyclic coverings of the lens space $L(5, 1)$. In this paper, we consider generalized Sieradski manifolds $M(2n, 7, 2)$ $n \geq 1$. We prove that the n -cyclic presentations of their groups are geometric, i.e., correspond to spines of closed connected orientable 3-manifolds. Moreover, manifolds $M(2n, 7, 2)$ are the n -fold cyclic coverings of the lens space $L(7, 1)$. For the classification some of the constructed manifolds, we use the Recognizer computer program.

AMS Mathematical Subject Classification: 57M05, 20F05, 57M50

Financial support. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (state assignment No. 1.13557.2019/13.1).

KOZLOVSKAYA Tatyana Anatolevna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Associate Professor of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: t.kozlovskaya@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Stallings J. (1962/63) On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups. *Fundam. Math.* 51. pp. 191–194.
2. Helling H., Kim A.C., Mennicke J.L. (1998) A geometric study of Fibonacci groups. *J. Lie Theory*. 8. pp. 1–23.
3. Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. (1999) On cyclic branched coverings of torus knots. *Journal of Geometry*. 64. pp. 55–66.
4. Dunwoody M.J. (1995) Cyclic presentations and 3-manifolds. *Proc. Inter. Conf., Groups-Korea '94*. Berlin; New York: Walter de Gruyter. pp. 47–55.
5. Kim A.C. (1995) On the Fibonacci group and related topics. *Proc. conf. algebra, 1991, Barnaul, Russia (Contemp. Math., 184)*. Providence, RI, Am. Math. Soc. pp. 231–235.
6. Vesnin A.Yu., Kim Ann Chi. (1998) Fractional Fibonacci groups and manifolds. *Siberian Math. J.* 39(4). pp. 655–664.
7. Kim A.C., Kim Y., Vesnin A. (2000.) On a class of cyclically presented groups. *Proc. Intern. Conf., Groups-Korea '98*. Berlin; New York: Walter de Gruyter. pp. 211–220.
8. Hilden H., Lozano M., Montesinos-Amilibia J. (1992) The arithmeticity of the figure eight knot orbifolds. *Topology '90*. Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. Berlin: Walter de Gruyter. 1. pp. 169–183.
9. Johnson D., Wamsley J., Wright D. (1974) The Fibonacci Groups. *Proc. London Math. Soc.*, III. Ser. 29(4). pp. 577–592.
10. MacLachlan C., Reid A. W. (1997) Generalized Fibonacci manifolds. *Transform. Groups*. 2(2). pp. 165–182.
11. Grasselli L., Mulazzani M. (2001) Genus one 1-bridge knots and Dunwoody manifolds. *Forum Mathematicum*. 13(3). pp. 379–397.
12. Sieradski A.J. (1986) Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups. *Invent. Math.* 84. pp. 121–139.

13. Howie J., Williams G. (2017) Fibonacci type presentations and 3-manifolds. *Topology Appl.* 215. pp. 24–34.
14. Kozlovskaya T., Vesnin A. (2019) Brieskorn manifolds, generated Sieradski groups, and coverings of lens space. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 304(1).
15. Three-manifold Recognizer. The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University. URL: <http://matlas.math.csu.ru>
16. Seifert H., Weber C. (1933) Die beiden Dodekaedräume. *Math. Z.* 37. pp. 237–253.
17. Seifert and Threlfall (1980) *A Textbook of Topology, Pure and Applied Mathematics* 89. New York: Academic Press.
18. Mulazzani M. (2003) Cyclic presentation of groups and cyclic branched covering of $(1, 1)$ -knots. *Bull. Korean Math. Soc.* 40(1). pp. 101–108.
19. Ozsvath, P., Szabo, Z. (2004) Heegaard diagrams and holomorphic disks. *International Mathematical Series.* 3. pp. 301–348.
20. Singer J. (1933) Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.* 35(1). pp. 88–111.

Received: May 29, 2019

УДК 517.54
DOI 10.17223/19988621/60/4

MSC 30C20, 30C30

И.А. Колесников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ИЗ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ СЧЕТНОУГОЛЬНИКИ С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ И КРУГОВЫЕ СЧЕТНОУГОЛЬНИКИ¹

Решается задача об определении параметров конформного отображения из полуплоскости на многоугольник с бесконечным количеством вершин (счетноугольник). Рассматриваются счетноугольники, обладающие свойством симметрии переноса, с границей, состоящей из дуг окружностей, и счетноугольники обладающие симметрией относительно двух вертикальных прямых $w = iv$, $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$, с границей, состоящей из отрезков прямых. Для определения параметров отображений из полуплоскости на такие области распространяется метод П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля.

Ключевые слова: конформное отображение, уравнение Шварца, интеграл Шварца – Кристоффеля, счетноугольник, акцессорные параметры, метод П.П. Куфарева.

Область Δ называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π , если при линейном преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ область остается неизменной $L(\Delta) = \Delta$.

Область Δ называют областью типа полуплоскости, если при преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ среди всех простых концов границы области Δ в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Счетноугольником типа полуплоскости называется односвязная область Δ типа полуплоскости, обладающая свойством симметрии переноса вдоль вещественной оси на 2π , и такая, что часть границы области от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ состоит из конечного числа дуг окружностей.

Такую область называют также периодическим многоугольником [1]. Будем использовать термин «счетноугольник», следуя работе [2].

В настоящей статье рассматриваются счетноугольники с границей, состоящей из дуг окружностей (для краткости будем называть их круговыми счетноугольниками), и счетноугольники с границей, состоящей из прямолинейных отрезков, обладающие симметрией относительно вертикальных прямых $w = iv$, $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$ (для краткости будем называть их прямолинейными счетноугольниками с двойной симметрией).

Конформные отображения полуплоскости на счетноугольники, ограниченные дугами окружностей или отрезками прямых, имеют приложения в различных задачах математической физики [3–6]. Численный метод нахождения конформных отображений на счетноугольники предложен в работе [7]. С помощью алгебры

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00190\18.

сверток и теории рядов Фробениуса в работе [1] рассмотрен метод построения конформных отображений на полигональные области, в том числе счетноугольники типа полуплоскости. С помощью параметрического метода Левнера получено дифференциальное уравнение [8] типа дифференциального уравнения Левнера для отображения верхней полуплоскости на области с симметрией переноса на 2π .

В работе [2] с помощью принципа симметрии Римана – Шварца, а в работе [9] с помощью формулы Шварца получен интеграл Шварца – Кристоффеля для отображений верхней полуплоскости на счетноугольники с границей, состоящей из отрезков прямых. Интеграл Шварца – Кристоффеля распространен для отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией [10]. В работе [11] для отображения из полуплоскости на круговой счетноугольник получено дифференциальное уравнение типа уравнения Шварца.

В следующей теореме представлен классический интеграл Шварца – Кристоффеля [4].

Теорема 1. Пусть $D, D \in \mathbb{C}$, – многоугольник с вершинами в точках $A_1, \dots, A_n$ и внутренними углами $\alpha_k \pi$, где $\alpha_k \in (0, 1) \cup (1, 2]$, если A_k конечная, и $\alpha_k \in [-2, 0]$, если $A_k = \infty$. Тогда существует конформное однолистное отображение f верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ на D , и любое такое отображение может быть представлено в виде

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (\xi - a_k)^{\alpha_k - 1} d\xi + c_2,$$

где $a_1, \dots, a_n$ – прообразы вершин $A_1, \dots, A_n$; c_1, c_2 – константы.

Для производной Шварца отображения f будем использовать обозначение

$$\{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

Автором [11] получена следующая теорема.

Теорема 2. Функция f , однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость Π^+ на круговой счетноугольник Δ с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π так, что $f(\infty) = \infty$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{f(z), z\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{L_k}{2} \sin^{-2} \frac{z - a_k}{2} + M_k \operatorname{ctg} \frac{z - a_k}{2} \right) + g(z), \quad (1)$$

где $a_k, k = 1, 2, \dots, n$, – прообразы вершин A_k^0 счетноугольника, принадлежащие промежутку $[0, 2\pi)$, $L_k = \frac{1}{2}(1 - \alpha_k^2)$; $\alpha_k \pi, \alpha_k \in [0, 2], k = 1, 2, \dots, n$, – углы при вершинах A_k^0 ; $M_k, k = 1, 2, \dots, n$, – вещественные константы (называемые аксессуарными параметрами), $g = g(z)$ – целая функция.

Как известно, трудность применения формулы типа Шварца – Кристоффеля заключается в проблеме определения прообразов вершин $a_1, \dots, a_n$ и констант c_1, c_2 .

Были разработаны различные эффективные методы для численного нахождения этих параметров [4, 12]. Один из таких методов был предложен П.П. Куфаревым [13] (см. также [14, 15]). Метод сводит задачу определения параметров отображения единичного круга на многоугольник с внутренней нормировкой к задаче решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для частных случаев метод был реализован впервые в работе [16], а затем в [17]. В работе [18], (см. также [19]) метод распространен для отображений с граничной нормировкой. В работах [20, 21] с использованием идеи П.П. Куфарова и аппарата краевой задачи Гильберта предложен новый подход нахождения параметров отображения. В [22] метод обобщается на случай отображений на многолистные многоугольники, содержащие точки ветвления. Автор [23] распространил метод для отображений из полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с симметрией переноса. В [24, 25] метод обобщен для решения проблемы определения параметров в дифференциальном уравнении Шварца, представляющего конформное отображение верхней полуплоскости на круговой многоугольник.

Ниже приведем теорему, полученную в работе [18].

Пусть D – многоугольник, ограниченный конечным числом отрезков прямых и лучей. Зафиксируем точку на границе D и из этой точки проведем прямолинейный разрез переменной длины внутрь области D . Обозначим через $\Lambda(t)$ подвижный конец разреза, зависящий от вещественного параметра t . При $t = 0$ длина разреза равна нулю, возрастание параметра t соответствует возрастанию длины разреза. Обозначим область с разрезом через $D(t)$, а вершины многоугольника $D(t)$ через $B_1, B_2, \dots, B_j, \Lambda(t), B_{j+1}, \dots, B_{n+1}$. Пусть $w = w(\chi, t)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость Π^+ на $D(t)$ и пусть отображение w удовлетворяет условиям граничной нормировки: $w(\infty, t) = B_1$, $w(0, t) = B_n$, $w(1, t) = B_{n+1}$. С помощью теоремы 1 для любого t можем представить отображение w в виде интеграла типа Шварца – Кристоффеля.

Теорема 3. Для любого $t \in [0, T]$ параметры $p_k(t)$, $\lambda_0(t)$, $c_2(t)$ отображения

$$w(\chi, t) = c_2(t) \int_0^\chi (\xi - \lambda_0(t)) \prod_{k=2}^{n+1} (\xi - p_k(t))^{\delta_k} d\xi + A_n, \quad (2)$$

переводящего верхнюю полуплоскость на многоугольник $D(t)$ с прямолинейным разрезом, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\frac{p_k(t)(p_k(t) - 1)}{\lambda_0(t) - p_k(t)}, \quad k = 2, \dots, n-1; \quad (3)$$

$$\frac{d\lambda_0(t)}{dt} = \lambda_0(t)(\lambda_0(t) - 1) \sum_{k=2}^{n+1} \delta_k \frac{1}{\lambda_0(t) - p_k(t)} + 2\lambda_0(t) - 1; \quad (4)$$

$$\frac{d \ln c_2(t)}{dt} = -\sum_{k=2}^{n+1} \delta_k - 2, \quad (5)$$

с начальными условиями

$$p_k(0) = w^{-1}(B_k, 0), \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$p_j(0) = p_{j+1}(0) = \lambda_0(0) = w^{-1}(B_j, 0),$$

$$c_2(0) = c,$$

где $p_k(t)$ – прообразы вершин B_k многоугольника $D(t)$, $k=1, \dots, n+1$, $p_1 = \infty$, $p_n = 0$, $p_{n+1} = 1$; $\lambda_0(t)$ – прообраз подвижного конца разреза, $p_1 < p_2(t) < \dots < p_j(t) < \lambda_0(t) < p_{j+1}(t) < \dots < p_{n-1}(t) < p_n < p_{n+1}$ при $t \in (0, T)$; $\delta_k = \beta_k - 1$, $\beta_k \pi$ – углы при вершинах B_k , $k=1, \dots, n+1$.

Замечание. Если разрез замыкается на границу многоугольника $D(t)$ при t , стремящемся к T , то многоугольник $D(t)$ разделяется на два многоугольника, обозначим их D^* и D^{**} . Пусть граница многоугольника D^* содержит отрезки $B_1 B_{n+1}$ и $B_n B_{n+1}$, тогда семейство отображений $w = w(z, t)$ сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению $w(z, T)$, переводящему верхнюю полуплоскость Π^+ на D^* , при t стремящемся к T согласно (обобщенной) теореме Каратеодори [26].

Следующая теорема получена в [8].

Теорема 4. Пусть $f = f(z, t)$ – семейство голоморфных и однолистных отображений $f: \Pi^+ \rightarrow D(t)$, $D(t)$ – семейство односвязных областей типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π , получающееся проведением в области D , являющейся счетноугольником, разрезов вдоль аналитических кривых $\gamma_m = \gamma_0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $\gamma_0 = \gamma_0(t)$, $0 \leq t \leq T$. Существует такая параметризация разреза γ_0 , что

$$\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z, t) - z) = 0 \quad (6)$$

и семейство отображений f удовлетворяет дифференциальному уравнению типа уравнения Левнера

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \text{ctg} \frac{\lambda(t) - z}{2}, \quad (7)$$

где $\lambda(t)$ – прообраз конца кривой $\gamma_0(t)$ при отображении $f = f(z, t)$. Предел (6) равномерный относительно вещественной части z .

Заметим, что произвольный круговой счетноугольник Δ можно рассматривать как ядро семейства счетноугольников $D(t)$, $0 \leq t \leq T$, относительно некоторой точки w_0 , $\Delta = D(T)$.

В данной работе метод Куфарева определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля распространяется на случай круговых счетноугольников и прямолинейных счетноугольников с двойной симметрией. Прямолинейные счетноугольники с симметрией переноса рассмотрены в работе автора [23]. В разделе 1 с помощью теоремы 3 получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (9), (10) с начальными условиями Коши для определения параметров отображения из полуплоскости на прямолинейный счетноугольник с двойной симметрией. В разделе 2 уточнено (лемма 1) уравнение для отображения из полу-

плоскости на круговой счетноугольник из [11]. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (15) – (17) с начальными условиями Коши для определения параметров отображения из полуплоскости на круговой счетноугольник. Методом рядов доказано существование и единственность решения этой системы. Численно найдены параметры отображения из полуплоскости на конкретный круговой счетноугольник.

1. Прямолинейный счетноугольник с двойной симметрией

Пусть Δ – прямолинейный счетноугольник с двойной симметрией – односвязная область типа полуплоскости, обладающая симметрией относительно прямых $w = iv$, $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$, и такая, что часть границы области Δ от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ состоит из конечного числа отрезков прямых.

Не умаляя общности, точку множества $\{w \in \mathbb{C} : w = iv, v \in \mathbb{R}\} \cap \partial\Delta$ с наибольшей мнимой частью будем считать вершиной счетноугольника Δ ; обозначим ее A_1^0 . Если вершина A_1^0 принадлежит отрезку границы счетноугольника Δ , то угол при этой вершине равен π . Аналогично, точку A_n^0 множества $\{w \in \mathbb{C} : w = \pi + iv, v \in \mathbb{R}\} \cap \partial\Delta$ с наибольшей мнимой частью будем считать вершиной счетноугольника Δ .

Зафиксируем точки $A_*^m = A_*^0 + 2\pi m$ и точки $A_{**}^m = 2\pi(m+1) - \bar{A}_*^0$ на границе счетноугольника Δ , $m \in \mathbb{Z}$, где A_*^0 – точка, лежащая на части границы $\partial\Delta$ от точки A_1^0 до точки A_n^0 . Из точек A_*^m и A_{**}^m проведем внутрь области Δ прямолинейные разрезы переменной длины, зависящей от вещественного параметра t , до точек $\Lambda_*^m(t) = \Lambda_*^0(t) + 2\pi m$ и $\Lambda_{**}^m(t) = 2\pi(m+1) - \bar{\Lambda}_*^0(t)$ соответственно, $0 \leq t \leq T$, $m \in \mathbb{Z}$. Пусть при $t = 0$ длина разреза равна нулю. Обозначим через $\lambda(t)$ прообраз подвижного конца разреза $\Lambda_*^0(t)$, пусть $0 \leq \lambda(t) \leq \pi$ при $0 \leq t \leq T$. Область Δ с разрезами обозначим через $\Delta(t)$, область $\Delta(t)$ является счетноугольником с двойной симметрией.

Обозначим $A_1^0, A_2^0, \dots, A_j^0, \Lambda_*^0(t), A_{j+1}^0, \dots, A_{2n-2}^0, A_1^1$, $A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$, $1 \leq j \leq n-1$, вершины счетноугольника $\Delta(t)$, лежащие в полосе $P_{2\pi} = \{w \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} w \leq 2\pi\}$, двигаясь вдоль границы Δ в положительном направлении, и углы при этих вершинах $(2\alpha_1 - 1)\pi, \alpha_2\pi, \alpha_3\pi, \dots, \alpha_j\pi, \pi, \alpha_{j+1}\pi, \dots, \alpha_{n-1}\pi, (2\alpha_n - 1)\pi, \alpha_{n+1}\pi, \dots, \alpha_{2n-2}\pi, (2\alpha_1 - 1)\pi$ соответственно. Вершины A_j^0 и A_{j+1}^0 находятся в точке A_*^0 . Заметим, что вершина A_{n-s}^0 симметрична вершине A_{n+s}^0 , $s = 1, \dots, n-2$, относительно прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = \pi\}$, $A_1^0 + 2\pi = A_1^1$ и $\alpha_{n-s} = \alpha_{n+s}$, $s = 1, \dots, n-2$.

Остальные вершины A_k^m определяются сдвигом вершин A_k^0 вдоль вещественной оси: $A_k^m = A_k^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, 2n-2$. Если какая-либо из вершин счетноугольника лежит в бесконечности, то значение угла при этой вершине равняется нулю и не может принимать других значений.

Пусть отображение $f = f(z, t)$ переводит верхнюю полуплоскость на счетно-угольник $\Delta(t)$ так, что $f(0, t) = A_1^0$, $f(\pi, t) = A_n^0$, $f(z + 2\pi, t) = f(z, t) + 2\pi$. Используя результат (теорема 2) работы [10], отображение f можем представить в виде

$$f(z, t) = c_1(t) \int_0^z (\lambda(t) - \cos \xi) \prod_{k=1}^n (a_k(t) - \cos \xi)^{\sigma_k} d\xi + A_1^0, \quad (8)$$

где $a_k(t) = \cos z_k^0(t)$, $z_k^0(t)$ – прообразы вершин A_k^0 , $k = 1, \dots, n$, лежащие в полосе $P_\pi = \{w \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} w \leq \pi\}$, $z_1^0(t) = 0$, $z_n^0(t) = \pi$; $\arccos \lambda(t)$ – прообраз подвижного конца разреза $\Lambda_*^0(t)$; $\sigma_k = \alpha_k - 1$, $k = 1, \dots, n$.

Для нахождения параметров $a_k^0(t)$, $\lambda(t)$ и $c_1(t)$ отображения $f = f(z, t)$, $f : \Pi^+ \rightarrow \Delta(t)$, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Для любого t , $0 < t < T$, параметры $a_k(t)$, $\lambda(t)$, $c_1(t)$ отображения f из верхней полуплоскости на счетноугольник с двойной симметрией удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{da_k(t)}{dt} = \frac{(\lambda(t) - 1)(a_k^2(t) - 1)}{2(a_k(t) - \lambda(t))}, \quad k = 2, \dots, n-1; \quad (9)$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\lambda(t) - 1}{2} \left((\lambda^2(t) - 1) \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{\lambda(t) - a_k(t)} + \lambda(t) \right); \quad (10)$$

$$c_1(t) = \text{const} = c_1,$$

с начальными условиями

$$a_k(0) = \cos f^{-1}(A_k^0, 0), \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$\lambda(0) = \cos f^{-1}(A_j^0, 0) = \cos f^{-1}(A_{j+1}^0, 0).$$

Доказательство. Обозначим полосу $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w < \pi\}$ через P'_π . Область $\Delta(t) \cap P'_\pi$ – многоугольник с углами $\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right)\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_{n-1}\pi, \left(\alpha_n - \frac{1}{2}\right)\pi, 0$ при вершинах $A_1^0, A_2^0, \dots, A_j^0, \Lambda_*^0(t), A_{j+1}^0, \dots, A_n^0, A_{n+1}^*$ соответственно; A_{n+1}^* – вершина в бесконечности. Рассмотрим композицию $w \circ \chi : \Pi^+ \cap P'_\pi \rightarrow \Delta(t) \cap P'_\pi$, где $\chi(z)$ отображает $\Pi^+ \cap P'_\pi$ на Π^+ так, что $\chi(0) = \infty$, $\chi(\pi) = 0$, $\chi(\infty) = 1$, $\chi(z) = -\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2}$, и $w(\chi, t)$ отображает верхнюю полуплоскость Π^+ на многоугольник $\Delta(t) \cap P'_\pi$ так, что $w(\infty, t) = A_1^0$, $w(0, t) = A_n^0$, $w(1, t) = A_{n+1}^0$ при $0 \leq t \leq T$.

Отображение $w \circ \chi : \Pi^+ \cap P'_\pi \rightarrow \Delta \cap P'_\pi$ удовлетворяет при каждом t , $0 \leq t \leq T$, условиям граничной нормировки $w(\chi(0), t) = A_1^0$, $w(\chi(\pi), t) = A_n^0$, $w(\chi(\infty), t) = A_{n+1}^* = \infty$, поэтому единственно. Продолжая аналитически отображение $w(\chi(z), t)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с помощью принципа симметрии Римана – Шварца, получим отображение $w \circ \chi : \Pi^+ \rightarrow \Delta(t)$. Таким образом $w(\chi(z), t) = f(z, t)$ и отображение f единственно.

Отображение $w = w(\chi, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, если положить $D(t) = \Delta(t) \cap P'_\pi$, $B_k = A_k^0$, $k = 1, \dots, n$, $B_{n+1} = A_{n+1}^*$, $\beta_k = \alpha_k$, $k = 2, \dots, n-1$, $\beta_1 = \alpha_1 - \frac{1}{2}$, $\beta_n = \alpha_n - \frac{1}{2}$, $\beta_{n+1} = 0$, следовательно, отображение $w = w(\chi, t)$ может быть представлено интегралом (2), параметры которого $p_k(t)$, $\lambda_0(t)$, $c_2(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (3)–(5) с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_k(0) &= f^{-1}(A_k^0, 0), \quad k = 2, \dots, n-1, \\ p_j(0) &= p_{j+1}(0) = \lambda_0(0) = f^{-1}(A_j^0, 0), \\ c_2(0) &= c. \end{aligned}$$

Заметим, что так как $p_k(t) = \chi(z_k(t)) = -\operatorname{ctg}^2 \frac{z_k(t)}{2}$, то параметры $p_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, отображения $w(\chi, t)$ связаны с параметрами $a_k(t)$ отображения $w(\chi(z), t)$ следующими формулами:

$$p_k(t) = \frac{a_k(t) + 1}{a_k(t) - 1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (11)$$

а также

$$\lambda_0(t) = \frac{\lambda(t) + 1}{\lambda(t) - 1}. \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в уравнение (3), получим дифференциальные уравнения (9) для $a_k(t)$.

Учитывая, что $\delta_{n+1} = -1$, $p_{n+1} = 1$, перепишем уравнение (4) следующим образом:

$$\frac{d\lambda_0(t)}{dt} = \left(\lambda_0(t) \sum_{k=2}^n \frac{\delta_k}{\lambda_0(t) - p_k(t)} + 1 \right) (\lambda_0(t) - 1).$$

Подставив (11) и (12) в последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{1 - \lambda(t)} \frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\lambda(t) + 1}{2} \sum_{k=2}^n \delta_k \frac{a_k(t) - 1}{a_k(t) - \lambda(t)} + 1.$$

Учитывая, что $\delta_k = \sigma_k$, $k = 2, \dots, n-1$, $\delta_n = \beta_n - \frac{3}{2} = \sigma_n - \frac{1}{2}$, последнее уравнение

можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\lambda(t)} \frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\lambda(t)+1}{2} \sum_{k=2}^n \sigma_k \frac{a_k(t)-1}{a_k(t)-\lambda(t)} + \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{1}{1-\lambda(t)} \frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\lambda(t)+1}{2} \sum_{k=2}^n \sigma_k + \frac{\lambda^2(t)-1}{2} \sum_{k=2}^n \sigma_k \frac{1}{a_k(t)-\lambda(t)} + \frac{1}{2}.$$

Заметив, что $\sum_{k=2}^n \sigma_k = -1 - \sigma_1$, окончательно получим (10).

Найдем константу $c_1(t)$. Рассмотрим отображение

$$f(z, t) = f(\chi(z), t) = c_2(t) \int_0^{-\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2}} (\xi - \lambda_0(t)) \prod_{k=2}^{n+1} (\xi - p_k(t))^{\delta_k} d\xi + A_1^0.$$

В интеграле выполним замену $\xi = -\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2}$ и подставим (11) и (12) в подынтегральную функцию. После преобразований получим

$$f(z, t) = c_2(t) \frac{i2^{-\sigma_1}}{\lambda(t)-1} \prod_{k=2}^n (1-a_k(t))^{-\sigma_k} \int_0^z (\lambda(t) - \cos \zeta) \prod_{k=1}^n (a_k(t) - \cos \zeta)^{\sigma_k} d\zeta + A_1^0.$$

Сравнивая полученное представление для отображения $f = f(z, t)$ и представление (8), видим, что

$$c_2(t) i 2^{-\sigma_1} = c_1(t) (\lambda(t)-1) \prod_{k=2}^n (1-a_k(t))^{\sigma_k}.$$

Из последнего равенства и уравнения (5) получим дифференциальное уравнение для параметра $c_1(t)$

$$-\frac{d \ln c_1(t)}{dt} = \frac{1}{\lambda(t)-1} \frac{d\lambda(t)}{dt} + \sum_{k=2}^n \frac{\sigma_k}{a_k(t)-1} \frac{da_k(t)}{dt} + \sum_{k=2}^{n+1} \delta_k + 2. \quad (13)$$

Подставив в это дифференциальное уравнение (9) и (10), после преобразований получим $\frac{d \ln c_1(t)}{dt} = 0$. Теорема доказана.

Обозначим длину разреза через $|A_*^0, \Lambda_*^0(\tau)|$. Для определения значения τ параметра t , при котором проводится интегрирование системы (3)–(5), в работе [18] получено следующее соотношение:

$$|A_*^0, \Lambda_*^0(\tau)| = \int_0^\tau \left| c_2(t) \lambda_0(t) (1-\lambda_0(t)) \prod_{k=2}^{n+1} (\lambda_0(t) - p_k(t))^{\delta_k} \right| dt.$$

Подставляя (11)–(13) и учитывая, что $p_{n+1} = 1$, $\delta_k = \sigma_k$, $k = 2, \dots, n-1$,

$\delta_n = \sigma_n - \frac{1}{2}$, после преобразований получим

$$\left| A_*^0, \Lambda_*^0(\tau) \right| = \frac{1}{2} \int_0^\tau \left| c_1 (\lambda(t) - 1) (1 - \lambda^2(t))^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^n (a_k(t) - \lambda(t))^{\sigma_k} \right| dt.$$

Для нахождения значения τ параметра t , при котором нужно интегрировать систему (9), (10), можно также использовать соотношение

$$\left| A_*^0, \Lambda_*^0(\tau) \right| = \left| c_1 \int_{a_j(\tau)}^{\lambda(\tau)} (\lambda(\tau) - \cos \xi) \prod_{k=1}^n (a_k(\tau) - \cos \xi)^{\sigma_k} d\xi \right|,$$

где $a_j(\tau)$ – прообраз вершины A_j^0 , предшествующей вершине $\Lambda_*^0(\tau)$.

2. Круговой счетноугольник

Лемма 1. Пусть в условиях теоремы 2 функция f удовлетворяет нормировке (6), тогда $g(z) \equiv 0$ и

$$\sum_{k=1}^n M_k = 0. \quad (14)$$

Доказательство. Из нормировки (6) следует, что $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} \{f(z), z\} = 0$. Вычисляя предел правой части равенства (1) при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$, получаем $g(z) = \frac{i}{16} \sum_{k=1}^n M_k$. Так как M_k вещественные постоянные, то целая функция g тождественно равна мнимой константе. Отображение f переводит отрезок вещественной оси (a_k, a_{k+1}) в дугу окружности, поэтому сужение отображения f на этот отрезок можно записать $f(x) = w_0 + r e^{i\varphi(x)}$, и производная Шварца $\{f(z), z\}$ принимает вещественные значения для вещественных z , $z \neq a_k$. Следовательно, g принимает вещественные значения на вещественной оси, но тогда $g(z) \equiv 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим семейство счетноугольников $D(t)$, $0 \leq t \leq T$, получающееся из счетноугольника $D(0)$ проведением разрезов $\Lambda^m(t) = \Lambda^0(t) + 2\pi m$, $0 \leq t \leq T$, $m \in \mathbb{Z}$, по дугам окружностей. Точки $\Lambda^0(0) + 2\pi m$ принадлежат границе $D(0)$. При t изменяющимся от 0 до T траектория $\Lambda^0(t)$ описывает дугу окружности. Обозначим через λ прообраз подвижного конца разреза $\Lambda^0(t)$. Занумеруем прообразы вершин на промежутке $[0, 2\pi)$ так, что $0 \leq a_{k+1}(t) < \dots < a_n(t) < a_0(t) < a_1(t) < \dots < a_k(t) < 2\pi$, $0 \leq t \leq T$, где $a_0 = \lambda$. Соответствующие углы при вершинах обозначим $\alpha_{k+1}\pi, \dots, \alpha_n\pi, \alpha_0\pi, \alpha_1\pi, \dots, \alpha_k\pi$, $\alpha_0 = 2$.

Теорема 6. При $0 \leq t \leq T$, параметры $a_k(t)$, $M_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n$, $a_0 = \lambda$, отображения f из верхней полуплоскости Π^+ на круговой счетноугольник $D(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{da_k(t)}{dt} = \operatorname{ctg} \mu_k(t), \quad k = 1, \dots, n; \quad (15)$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -2M_0(t); \quad (16)$$

$$\frac{dM_k(t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{M_k - L_k \operatorname{ctg} \mu_k(t)}{\sin^2 \mu_k(t)} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (17)$$

$$\text{где } \mu_k(t) = \frac{a_k(t) - \lambda(t)}{2}.$$

Доказательство. В силу уравнения (7) производная Шварца $\{f(z, t), z\}$ отображения f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \{f(z, t), z\}}{\partial t} + \frac{\partial \{f(z, t), z\}}{\partial z} \operatorname{ctg} \frac{z - \lambda(t)}{2} = \\ & = \sin^{-2} \frac{z - \lambda(t)}{2} \left(\{f(z, t), z\} + \frac{3}{4} \sin^{-2} \frac{z - \lambda(t)}{2} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно теореме 2 и лемме 1, производная Шварца отображения f имеет вид

$$\{f(z, t), z\} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{L_k}{2} \sin^{-2} \frac{z - a_k(t)}{2} + M_k \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2}.$$

Подставляя производную Шварца $\{f(z, t), z\}$ в (18), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \frac{L_k}{2} \sin^{-3} \frac{z - a_k(t)}{2} \cos \frac{z - a_k(t)}{2} \frac{da_k(t)}{dt} + \\ & + M_k(t) \frac{da_k(t)}{dt} \sin^{-2} \frac{z - a_k(t)}{2} + 2 \frac{dM_k(t)}{dt} \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2} - \\ & - \left(\sum_{k=0}^n \frac{L_k}{2} \sin^{-3} \frac{z - a_k(t)}{2} \cos \frac{z - a_k(t)}{2} + M_k(t) \sin^{-2} \frac{z - a_k(t)}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{z - \lambda(t)}{2} = \\ & = \sin^{-2} \frac{z - \lambda(t)}{2} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{L_k}{2} \sin^{-2} \frac{z - a_k(t)}{2} + M_k(t) \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2} \right) + \frac{3}{2} \sin^{-2} \frac{z - \lambda(t)}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Раскладывая в ряд Лорана левую и правую части этого равенства в окрестности точки $a_k(t)$ и приравнявая коэффициенты при $(z - a_k(t))^{-3}$, $(z - \lambda(t))^{-3}$ и $(z - a_k(t))^{-1}$, получаем соответственно (15), (16) и (17). Теорема доказана.

Проинтегрируем систему (15)–(17) методом рядов. Перейдем к параметру $x = \sqrt{t}$, $x \in [0, \sqrt{T}]$, тогда

$$\begin{aligned} a_k(t(x)) &= \tilde{a}_k(x), \quad M_k(t(x)) = \tilde{M}_k(x), \quad k = 1, \dots, n, \quad \lambda_k(t(x)) = \tilde{\lambda}_k(x), \\ M_0(t(x)) &= \tilde{M}_0(x) \end{aligned}$$

и система примет вид

$$\frac{d\tilde{a}_k(x)}{dx} = 2x \operatorname{ctg} \frac{\tilde{a}_k(x) - \tilde{\lambda}(x)}{2}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\frac{d\tilde{\lambda}(x)}{dx} = -4x\tilde{M}_0(x), \quad (19)$$

$$\frac{d\tilde{M}_k(x)}{dx} - x \left(\tilde{M}_k - L_k \operatorname{ctg} \frac{\tilde{a}_k(x) - \tilde{\lambda}(x)}{2} \right) \sin^{-2} \frac{\tilde{a}_k(x) - \tilde{\lambda}(x)}{2} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Будем искать решение этой системы в виде рядов:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(x) &= \tilde{\lambda}(x) = \sigma + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots, \\ \tilde{a}_k(x) &= a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \dots, \quad k = 1, \dots, n, \\ \tilde{M}_k(x) &= m_{k0} + m_{k1}x + m_{k2}x^2 + \dots, \quad k = 2, \dots, n-1, \\ \tilde{M}_k(x) &= \frac{m_{k,-1}}{x} + m_{k0} + m_{k1}x + m_{k2}x^2 + \dots, \quad k = 0, 1, n. \end{aligned} \quad (20)$$

Коэффициенты $\sigma, a_{10} = a_{n0} = \sigma, a_{k0}, m_{k0}, k = 2, \dots, n-1$, рядов (20) известны, если известно отображение $f = f(z, 0)$. Найдем остальные коэффициенты.

Согласно выбранной нумерации, $\tilde{a}_n < \tilde{\lambda} < \tilde{a}_1$ при малых значениях x , поэтому $a_{n1} < \lambda_1 < a_{11}$. Подставляя ряды (20) в уравнения (19) и равенство (14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем для определения коэффициентов рядов $\lambda_1, a_{k1}, k = 1, \dots, n, m_{k1}, k = 2, \dots, n-1, m_{k,-1}, k = 0, 1, n$, систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{4}{a_{11} - \lambda_1}, \quad a_{n1} = \frac{4}{a_{n1} - \lambda_1}, \quad a_{k1} = 0, \quad k = 2, \dots, n-1, \quad \lambda_1 = -4m_{0,-1}, \\ 4(4 + a_{11}^2)m_{1,-1} &= a_{11}^3(1 - \alpha_1^2), \quad 4(4 + a_{n1}^2)m_{n,-1} = a_{n1}^3(1 - \alpha_n^2), \\ m_{k1} &= 0, \quad k = 2, \dots, n-1, \quad m_{0,-1} + m_{1,-1} + m_{n,-1} = 0, \end{aligned}$$

которая при $\alpha_1, \alpha_n \neq 0, 2$ имеет единственное вещественное решение

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2\sqrt{\frac{\alpha_n}{\alpha_1}}, \quad a_{n1} = -2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}}, \quad \lambda_1 = a_{11} + a_{n1}, \quad a_{k1} = 0, \quad k = 2, \dots, n-1, \\ m_{0,-1} &= -\frac{\lambda_1}{4}, \quad m_{1,-1} = \frac{L_1}{2} \frac{a_{11}^3}{4 + a_{11}^2}, \quad m_{n,-1} = \frac{L_n}{2} \frac{a_{n1}^3}{4 + a_{n1}^2}, \quad m_{k1} = 0, \quad k = 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (21)$$

удовлетворяющее условию $a_{n1} < \lambda_1 < a_{11}$.

Для $2n+2$ коэффициентов $\lambda_2, a_{k2}, k = 1, \dots, n, m_{k2}, k = 2, \dots, n-1, m_{k0}, k = 0, 1, n$, получаем систему из $2n+2$ линейно-независимых уравнений, которая имеет решение

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{a_{11}^2}{a_{11}^2 + 8} \lambda_2, \quad a_{n2} = \frac{a_{n1}^2}{a_{n1}^2 + 8} \lambda_2, \quad a_{k2} = \operatorname{ctg} \frac{a_{k0} - \sigma}{2}, \quad k = 2, \dots, n-1, \\ \lambda_2 &= \frac{2(2\alpha_1 + \alpha_n)(2\alpha_n + \alpha_1)}{3\alpha_1\alpha_n((\alpha_1 + \alpha_n)^2 - 1)} \sum_{k=2}^{n-1} m_{k0}, \end{aligned}$$

$$m_{00} = -\frac{\lambda_2}{2}, \quad m_{10} = L_1 \lambda_2 a_{11}^2 \frac{12 + a_{11}^2}{(4 + a_{11}^2)(8 + a_{11}^2)}, \quad m_{n0} = L_n \lambda_2 a_{n1}^2 \frac{12 + a_{n1}^2}{(4 + a_{n1}^2)(8 + a_{n1}^2)}, \quad (22)$$

$$m_{k2} = \frac{1}{2} \sin^{-2} \frac{a_{k0} - \sigma}{2} \left(m_{k0} - L_k \operatorname{ctg} \frac{a_{k0} - \sigma}{2} \right), \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Уравнения (19) и равенство (14) дают $2n+1$ линейно-независимых уравнений для определения $2n+2$ коэффициентов λ_3 , a_{k3} , $k = 1, \dots, n$, m_{k3} , $k = 2, \dots, n-1$, $m_{k,1}$, $k = 0, 1, n$. Выразим коэффициенты a_{13} , a_{n3} , m_{01} , m_{11} , m_{n1} через λ_3 и найдем a_{k3} , m_{k3} , $k = 2, \dots, n-1$, получим

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{48}{3} \frac{a_{11}^3 \lambda_2^2}{(a_{11}^2 + 8)^2 (a_{11}^2 + 12)} + \frac{3a_{11}^3 \lambda_3 - 16}{3a_{11} (a_{11}^2 + 12)}, \\ a_{n3} &= \frac{48}{3} \frac{a_{n1}^3 \lambda_2^2}{(a_{n1}^2 + 8)^2 (a_{n1}^2 + 12)} + \frac{3a_{n1}^3 \lambda_3 - 16}{3a_{n1} (a_{n1}^2 + 12)}, \\ m_{01} &= -\frac{3}{4} \lambda_3, \quad m_{11} = \frac{3}{2} L_1 \frac{a_{11}^4}{a_{11}^4 - 16} \lambda_3, \quad m_{n1} = \frac{3}{2} L_n \frac{a_{n1}^4}{a_{n1}^4 - 16} \lambda_3, \\ a_{k3} &= \frac{\lambda_1}{3} \sin^{-2} \frac{a_{k0} - \sigma}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$m_{k3} = \frac{\lambda_1}{6} \sin^{-2} \frac{a_{k0} - \sigma}{2} \left(2m_{k0} \operatorname{ctg} \frac{a_{k0} - \sigma}{2} - L_k \left(1 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{a_{k0} - \sigma}{2} \right) \right), \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Коэффициенты $a_{j,k}$, $m_{j,k}$, $j = 2, \dots, n-1$, определяются через коэффициенты $a_{j,k-2}$, $m_{j,k-2}$, $j = 2, \dots, n-1$, и λ_{k-2} , $k = 3, 4, \dots$, поэтому достаточно рассмотреть уравнения относительно коэффициентов λ_k , a_{1k} , a_{nk} , $m_{j,k-2}$, $j = 0, 1, n$. Определитель системы линейных уравнений на коэффициенты λ_k , a_{1k} , a_{nk} , $m_{j,k-2}$, $j = 0, 1, n$, $k = 3, 4, \dots$, имеет вид

$$\operatorname{Det}_k = \begin{vmatrix} -a_{11}^2 & a_{11}^2 + 4k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{n1}^2 & 0 & a_{n1}^2 + 4k & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -L_1 & L_1 & 0 & 0 & (a_{11}^2 - 4(k-2)) \frac{8}{a_{11}^4} \frac{a_{11}^2 + 4}{a_{11}^2 + 12} & 0 \\ -L_n & 0 & L_n & 0 & 0 & (a_{n1}^2 - 4(k-2)) \frac{8}{a_{n1}^4} \frac{a_{n1}^2 + 4}{a_{n1}^2 + 12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель $\operatorname{Det}_k = 64k(k+1)(k-3) \frac{(\alpha_1 + \alpha_n)^2 ((k-1)^2 - (\alpha_1 + \alpha_n)^2)}{(3\alpha_1 + \alpha_n)(\alpha_1 + 3\alpha_n)}$ равен нулю для допустимых k только при $k = 3$. Таким образом, коэффициенты λ_k , a_{1k} ,

$a_{nk}, m_{j,k-2}, j = 0, 1, n$, при $k = 4, 5, \dots$ определяются однозначно.

Рассмотрим вопрос о сходимости рядов (20). Перейдем в системе (19) к новым переменным $y_k, v_k, k = 0, 1, \dots, n$,

$$y_k(x) = -\frac{2}{a_{11} - \lambda_1} + x \operatorname{ctg} \frac{\tilde{a}_1(x) - \tilde{\lambda}(x)}{2}, \quad k = 1, n,$$

$$y_k(x) = -\operatorname{ctg} \frac{a_{k0} - \sigma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\tilde{a}_k(x) - \tilde{\lambda}(x)}{2}, \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$y_0(x) = \tilde{\lambda}(x) - \sigma, \quad v_k(x) = x \tilde{M}_k(x) - m_{k,-1}, \quad k = 0, 1, n, \quad v_k(x) = \tilde{M}_k(x) - m_{k,0}, \\ k = 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что функции $y_k, v_k, k = 0, 1, \dots, n$, раскладываются в ряды вида

$$y_k(x) = y_{k1}x + y_{k2}x^2 + \dots, \quad v_k(x) = v_{k1}x + v_{k2}x^2 + \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Система (19) после преобразований примет вид

$$x\dot{y}_k(x) + \frac{2}{\alpha_k} y_k(x) + 2 \frac{2 - \alpha_k}{\alpha_k} v_0(x) = Q_k(x, y_k, v_0), \quad k = 1, n,$$

$$x\dot{y}_k(x) = \frac{\lambda_1}{2} \sin^{-2} \frac{a_{k0} - \sigma}{2} x + Q_k(x, y_k, v_0), \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$x\dot{v}_k(x) - \frac{2}{\alpha_k} v_k(x) + L_k \frac{2 - \alpha_k}{\alpha_k} (\alpha_k + 1) y_k(x) = P_k(x, y_k, v_k), \quad k = 1, n, \quad (24)$$

$$x\dot{v}_k(x) = x^2 P_k(y_k, v_k), \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$x\dot{v}_0(x) - v_0 - L_1 \frac{\alpha_n}{\alpha_1} (\alpha_1 + 1) y_1(x) - L_n \frac{\alpha_1}{\alpha_n} (\alpha_n + 1) y_n(x) + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_1(x) + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_n(x) = \\ = P_0(x, y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n).$$

Правые части уравнений представляют собой полиномы относительно переменных, указанных в качестве аргументов. Уравнение для y_0 в систему (24) не включено, так как y_0 ни в одно из уравнений системы не входит. Функцию y_0 можно определить из уравнения $\dot{y}_0(x) = -4v_0 + \lambda_1$.

Система (24) является частным случаем системы дифференциальных уравнений вида

$$x\dot{u}_k(x) + \sum_{j=1}^n c_{kj} u_j(x) = g_k(x, u_1(x), \dots, u_n(x)), \quad k = 1, \dots, n,$$

где $g_k(x, u_1, \dots, u_n)$ – голоморфные в полицилиндре $|x| < r_0, |u_k| < r_k, k = 1, \dots, n$, функции

$$g_k(x, u_1, \dots, u_n) = b_{10\dots 0}^{(k)} x + b_{20\dots 0}^{(k)} x^2 + b_{110\dots 0}^{(k)} x u_1 + \dots + b_{10\dots 01}^{(k)} x u_k + \dots + b_{020\dots 0}^{(k)} u_1^2 + \dots,$$

разложение которых в ряд Тейлора не содержит членов нулевого и первого изменения относительно переменных $u_k, k = 1, \dots, n$. В [14] показано, что если искать

решение этой системы в виде рядов $u_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{kj} x^j$, $k = 1, \dots, n$, и определитель системы уравнений для нахождения коэффициентов u_{kj} не равен нулю, начиная с некоторого k , то система (24) имеет решение $u_1(x), \dots, u_n(x)$, обращающееся в нуль при $x = 0$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 7. Система (19) при $\alpha_1, \alpha_n \neq 0, 2$ имеет на сегменте $[0, T]$ единственное относительно параметра $x = \sqrt{t}$ решение (20), удовлетворяющее начальным условиям (21), (22) и (23).

Чтобы систему (19) проинтегрировать численно, можно перейти к новым переменным по формулам

$$x^3 \hat{\lambda}(x) = \lambda(x) - \sigma - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2, \quad x^3 \hat{a}_k(x) = a_k(x) - a_{k0} - a_{k1} x - a_{k2} x^2, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$x \hat{M}_k(x) = M_k(x) - \frac{m_{k,-1}}{x} - m_{k0}, \quad k = 0, 1, n,$$

$$x^3 \hat{M}_k(x) = M_k(x) - m_{k0} - m_{k1} x - m_{k2} x^2, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Начальные условия для системы относительно функций $\hat{\lambda}(x)$, $\hat{M}_0(x)$, $\hat{a}_k(x)$, $\hat{M}_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, будут иметь вид $\hat{\lambda}(0) = \lambda_3$, $\hat{a}_k(0) = a_{k3}$, $k = 1, \dots, n$, $\hat{M}_k(0) = m_{k1}$, $k = 0, 1, n$, $\hat{M}_k(0) = m_{k3}$, $k = 2, \dots, n-1$.

Теоремы 6 и 7 позволяют найти параметры отображения $f = f(z, t, \lambda_3)$, переводящего верхнюю полуплоскость на круговой счетноугольник с разрезами $\Lambda^m(t) = \Lambda^0(t) + 2\pi m$, $0 \leq t \leq T$, $m \in \mathbb{Z}$. Параметр t связан с длиной подвижной дуги $\Lambda^0(t)$, параметр λ_3 – с кривизной этой дуги.

Проинтегрировав уравнение (19), найдем f_* – одно из решений уравнения (1). Отображение f_* связано с искомым отображением $f = f(z, t, \lambda_3)$ дробно-линейным преобразованием, коэффициенты которого можно определить из условий нормировки $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} \{f(z), z\} = 0$, $f(a_k) = A_k$, $f(a_k + 2\pi) = A_k + 2\pi$. Таким образом, параметр λ_3 можно определить численным методом из условия

$$|f(z, \lambda_3, t) - \omega| = r, \quad 0 < t < T, \quad (25)$$

где ω – центр окружности, по которой проводится разрез $\Lambda^0(t)$, r – ее радиус. Значение параметра t , соответствующее нужной длине разреза, удобно находить (численно) после того, как найден параметр λ_3 .

Пример. Построим отображение f из полуплоскости Π^+ на счетноугольник с вершинами в точках 0 , $i\pi(\sqrt{2}-1)$, π на основном периоде и углами при этих вершинах $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ соответственно. Часть границы счетноугольника от вершины 0 до вершины $i\pi(\sqrt{2}-1)$ и от вершины π до вершины 2π – отрезки прямых, от вершины $i\pi(\sqrt{2}-1)$ до вершины π – дуга окружности с центром в точке $-i\pi$

радиуса $\pi\sqrt{2}$. В качестве начального отображения возьмем отображение f_0 из полуплоскости Π^+ на Δ_0 – верхнюю полуплоскость с разрезами вдоль отрезков $\{w: w = u + iv, u = 2\pi k, 0 < v < \pi(\sqrt{2} - 1)\}$,

$$f_0(z) = -2 \arcsin \left(\cosh h \sin \frac{z+c}{2} \right) + \pi.$$

Здесь $h = \pi(\sqrt{2} - 1)$, $c = 2 \arcsin \frac{1}{\cosh h}$. Прообразы вершин счетноугольника Δ_0 с углами $\frac{\pi}{2}$, 2π , $\frac{\pi}{2}$ на основном периоде находятся в точках $a_{30} = 0$, $a_{10} = \pi - c$, $a_{20} = 2(\pi - c)$. Акцессорные параметры M_{k0} , соответствующие точкам a_{k0} , можно определить из равенства $M_{k0} = \lim_{z \rightarrow a_{k0}} \frac{d}{dz} (\{f_0(z), z\} (z - a_{k0})^2)$, $k = 1, 2, 3$.

Пусть $\Delta_1(t)$ – счетноугольник Δ_0 с разрезом вдоль дуги окружности $\Lambda(x)$, выходящим из точки $i\pi(\sqrt{2} - 1)$ под углом $\frac{\pi}{2}$ к мнимой оси. Отображение $f_1: \Pi^+ \rightarrow \Delta_1(t)$, $f_1 = f_1(z, x)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{f_1'''(z, x)}{f_1'(z, x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f_1''(z, x)}{f_1'(z, x)} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 \left(\frac{1 - \alpha_k^2}{4 \sin^2 \frac{z - a_k(x)}{2}} + M_k(x) \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(x)}{2} \right),$$

где $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = \frac{3}{2}$, $a_0(0) = a_1(0) = a_4(0) = a_{10}$, $a_2(0) = a_{20}$, $a_3(0) = a_{30}$.

Дуге $\Lambda(x)$ окружности радиуса $\pi\sqrt{2}$ соответствует $\lambda_3 = 3.43916$ (найдено численно из условия (25)). При x , стремящемся к $X = 0.61691$, разрез $\Lambda(x)$ замыкается на точку π . Решаем численно задачу Коши (19) при найденных λ_3 , X , получаем, что f , $f(z) = f_1(z, X)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^4 \left(\frac{1 - \delta_k^2}{4 \sin^2 \frac{z - a_k(X)}{2}} + M_k(X) \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(X)}{2} \right),$$

где $\delta_2 = \frac{3}{4}$, $\delta_3 = \alpha_3$, $\delta_4 = \alpha_4$,

$$a_0(X) = a_1(X) = a_2(X) = 4.90679, \quad a_3(X) = 0, \quad a_4(X) = 0.80422,$$

$$M_2(X) = -0.03595, \quad M_3(X) = -0.36547, \quad M_4(X) = 0.40142.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hussenpflug W.S.* Elliptic integrals and the Schwarz-Christoffel transformation // *Computers Math. Applic.* 1997. V. 33. No. 12. pp. 15–114. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(97\)00091-6](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(97)00091-6).
2. *Александров И.А.* Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // *Изв. вузов. Матем.* 1999. № 6(445). С. 15–18.
3. *Verbitskii I.L.* Quasistatic green function method as a powerful tool of diffraction problems solving // *Materials of the VI International conference “Mathematical methods in electromagnetic theory”*. Lviv, Ukraine, 1996. P. 358–361. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565733>.
4. *Driscoll T.A., Trefethen L.N.* Schwarz-Christoffel mapping // *Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math.* Vol. 8. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
5. *Brady M., Pozrikidis C.* Diffusive transport across irregular and fractal walls // *Proceedings the royal of society A*. 1993. V. 442. No. 1916. P. 571–583. <https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0122>.
6. *Tsarin Yu.A.* Conformal mapping technique in the theory of periodic structures // *Microwave and Optical Technology Letters*. 2000. V. 26. No. 1. P. 57–61. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-2760\(20000705\)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q](https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2760(20000705)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q).
7. *Floryan J.M.* Conformal mapping based coordinate generation method for flows in periodic configurations // *J. Computational Physics*. 1986. V. 62. No 1. P. 221–247. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90108-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90108-7).
8. *Александров И.А., Копанева Л.С.* Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса // *Вестн. Томск. ун-та*. 2004. № 284. С. 5–7.
9. *Копанев С.А., Копанева Л.С.* Формула типа формулы Кристоффеля-Шварца для счетноугольника // *Вестн. Том. гос. ун-та. Матем. и мех.* 2003. № 280. С. 52–54.
10. *Колесников И.А., Копанева Л.С.* Конформное отображение на счетноугольник с двойной симметрией // *Изв. вузов. Матем.* 2014. № 12. С. 37–47.
11. *Колесников И.А.* Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* 2013. № 2(22). С. 33–43.
12. *Wegmann R.* Methods for numerical conformal mapping // *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory*. V. 2. Amsterdam: Elsevier, 2005.
13. *Куфарев П.П.* Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля // *ДАН СССР*. 1947. Т. 57. №. 6. С. 535–537.
14. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
15. Труды П.П. Куфарева. К 100-летию со дня рождения / под общ. ред. И.А. Александрова. Томск: Изд-во НТЛ, 2009.
16. *Чистяков Ю.В.* Численный метод определения функции, конформно отображающей круг на многоугольники: дис. ... к.ф.-м.н. Томский гос. ун-т, 1953.
17. *Hopkins T.R., Roberts D.E.* Kufarev's method for determining the Schwarz-Christoffel parameters // *Numer. Math.* 1979. No. 33. P. 353–365. <https://doi.org/10.1007/BF01399319>.
18. *Гутлянский В.Я., Зайдан А.О.* О конформных отображениях полигональных областей // *Укр. матем. журн.* 1993. Т. 45. № 11. С. 1464–1467.
19. *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. Киев: Наукова думка, 2011.
20. *Насыров С.Р., Низамиева Л.Ю.* Определение акцессорных параметров в смешанной обратной краевой задаче с полигональной известной частью границы // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф.* 2011. Т. 11. № 4. С. 34–40.
21. *Низамиева Л.Ю.* Нахождение акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца методом движущегося разреза // *Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского*. Казань: Казан. матем. о-во, 2009. Т. 38. С. 192–194.
22. *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2016. Т. 158. № 2. С. 202–220.

23. Колесников И.А. Определение аксессуарных параметров для отображения на счетно-угольник. // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2014. №. 2(28). С. 18–28.
24. Байбарин Б.Г. Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области. // Труды Томского гос. ун-та, 1966. Т. 189. С. 123–136.
25. Kolesnikov I.A. On the problem of determining parameters in the Schwarz equation // Probl. Anal. Issues Anal. 2018. V. 7(25). No. 2. P. 50–62. <https://doi.org/10.15393/j3.art.2018.5411>.
26. Насыров С.Р. Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей. Казань: Магариф, 2008.

Статья поступила 07.02.2019 г.

Kolesnikov I. A. (2019) DETERMINING PARAMETERS OF CONFORMAL MAPPINGS FROM THE UPPER HALF-PLANE ONTO STRAIGHT-LINE PERIODIC POLYGONS WITH DOUBLE SYMMETRY AND ONTO CIRCULAR PERIODIC POLYGONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 42–60

DOI 10.17223/19988621/60/4

Keywords: conformal mapping, Schwarz equation, Schwarz-Christoffel integral, periodic polygon, accessory parameters, Kufarev's method.

The paper solves the problem of constructing conformal mappings from the half-plane onto a periodic polygon. A periodic polygon Δ is a simply connected domain with symmetry of translation, i.e. it has the property $L(\Delta) = \Delta$, where $L(w) = w + 2\pi$. We consider a polygon with a boundary consisting of a countable number of circular arcs. Moreover, it has a unique prime end at infinity, fixed under the shift $L(w)$. We use a Schwarz-type differential equation for the representation of the mapping. There is a classical problem of determining parameters for equations of this type. They are the preimages of polygon's vertices under the mapping and additional accessory parameters. To determine these parameters, we generalize Kufarev's method. It was proposed for solving the problem of finding parameters in the Schwarz-Christoffel integral. The method, based on Loewner's differential equation, reduces the problem to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. There is a differential equation of the Loewner type for periodic polygon. Separately, we consider periodic polygons that have mirror symmetry with respect to a couple of vertical lines; their boundaries consist of straight line segments. We give an example of mapping of the half-plane onto a specified periodic polygon with a boundary consisting of circular arcs and determine its parameters using Kufarev's method.

AMS Subject Classification: 30C20, 30C30

Financial support. This work was supported by RFBR according to the research project № 18-31-00190\18

KOLESNIKOV Ivan Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

REFERENCES

1. Hussenpflug W.S. (1997) Elliptic integrals and the Schwarz-Christoffel transformation. *Computers Math. Appl.* 33(12). pp. 15–114. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(97\)00091-6](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(97)00091-6).
2. Aleksandrov I.A. (1999) Conformal Mappings of a Half-Plane onto Domains with Transfer Symmetry. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 43(6). pp. 13–16.
3. Verbitskii I.L. (1996) Quasistatic Green function method as a powerful tool of diffraction problems solving. *Materials of the VI international conference "Mathematical methods in electromagnetic theory"*. Lviv, Ukraine. pp. 358–361. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565733>

4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) Schwarz–Christoffel mapping. *Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. Vol. 8*. Cambridge: Cambridge University Press.
5. Brady M., Pozrikidis C. (1993) Diffusive transport across irregular and fractal walls. *Proceedings the royal of society A*. 442(1916). pp. 571–583. <https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0122>.
6. Tsarin Yu.A. (2000) Conformal mapping technique in the theory of periodic structures. *Microwave and Optical Technology Letters*. 26(1). pp. 57–61. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-2760\(20000705\)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q](https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2760(20000705)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q).
7. Floryan J.M. (1986) Conformal mapping based coordinate generation method for flows in periodic configurations // *Journal of Computational Physics*. 62(1). pp. 221–247. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90108-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90108-7).
8. Aleksandrov I.A., Kopaneva L.S. (2004) Levnerovskie semeystva otobrazheniy poluploskosti na oblasti s simmetriey perenosa [Loewner's sets of mappings of a half-plane on domains with symmetry of translation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 5–7.
9. Kopanev S.A., Kopaneva L.S. (2003) Formula tipa formuly Kristoffelya – Shvartsa dlya schetnougol'nika [The Christoffel–Schwarz type formula for a polygon with the countable number of vertices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 280. pp. 52–54.
10. Kolesnikov I.A., Kopaneva L.S. (2014) Conformal mapping onto numerable polygon with double symmetry. *Russian Mathematics*. 58(12). pp. 32–40. <https://doi.org/10.3103/S1066369X14120044>.
11. Kolesnikov I.A. (2013) Otobrazheniye na krugovoy schetnougol'nik s simmetriey perenosa [Mapping onto a circular numerable polygon with the symmetry of translation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(22). pp. 33–43.
12. Wegmann R. (2005) Methods for numerical conformal mapping. *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. V. 2*. Amsterdam: Elsevier.
13. Kufarev P.P. (1947) Ob odnom metode chislennogo opredeleniya parametrov v integrale Shvartsa – Kristoffelya [On a method of numerical determination of the parameters in the Schwarz–Christoffel integral]. *Doklady Acad. Nauk SSSR*. 57(6). pp. 535–537.
14. Aleksandrov I.A. (1976) Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy [Parametrical Extensions in the Theory of Univalent Functions]. Moscow: Nauka. (In Russian)
15. Aleksandrov I.A. (Ed.) (2009) *Trudy P.P. Kufareva. K 100-letiyu so dnya rozhdeniya* [Works of P.P. Kufarev: on the occasion of centenary of the birth]. Tomsk: Publishing House NTL.
16. Chistyakov Yu.V. (1953) *Chislennyy metod opredeleniya funktsii, konformno otobrazhayushchey krug na mnogougol'niki*: diss. for the degree of Ph.D. Tomsk State University.
17. Hopkins T.R., Roberts D.E. (1979) Kufarev's method for determining the Schwarz–Christoffel parameters. *Numer. Math*. 33. pp. 353–365. <https://doi.org/10.1007/BF01399319>.
18. Gutlyansky V.Ya., Zaidan A.O. (1993) O konformnykh otobrazheniyakh poligonal'nykh oblastey [On conformal mapping of polygonal regions]. *Ukrainian Math. Journal*. 45(11). pp. 1464–1467.
19. Gutlyansky V.Ya., Ryazanov V.I. (2011) *Geometricheskaya i topologicheskaya teoriya funktsiy i otobrazheniy* [The Geometric and Topological Theory of Functions and Mappings]. Kiev: Naukova Dumka.
20. Nasyrov S.R., Nizamieva L.Yu. (2011) Opredelenie aktsessornykh parametrov v smeshannoy obratnoy kraevoy zadache s poligonal'noy izvestnoy chast'yu granitsy [Determination of accessory parameters in the mixed inverse boundary-value problem with a polygonal known part of the boundary]. *Izv. Sarat. univ-ta. New series. Series Mat. Mech. Comp. science*. 11(4). pp. 34–40.
21. Nizamieva L.Yu. (2009) Nakhozhdenie aktsessornykh parametrov v integrale Kristoffelya – Shvartsa metodom dvizhushchegosya razreza [Finding accessory parameters in the Schwarz–Christoffel integral by the moving slit method]. *Proc. 9th Int. Kazan. Summer Sci. Sch.-Conf.*

- "Theory of Functions, Its Applications, and Related Problems". Kazan: Kazan. Math society. 38. pp. 192–194.
22. Nakipov N.N., Nasyrov S.R. (2016) Parametricheskii metod nakhozheniya aktsessornykh parametrov v obobshchennykh integralakh Kristoffelya–Shvartsa [A parametric method of finding accessory parameters for generalized Schwarz–Christoffel integrals]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 158(2). pp. 202–220.
 23. Kolesnikov I.A. (2014) Opredelenie aktsessornykh parametrov dlya otobrazheniya na schetnougol'nik [Determination of accessory parameters for mapping onto a numerable polygon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 18–28.
 24. Baybarin B.G. (1966) Ob odnom chislennom sposobe opredeleniya parametrov proizvodnoy Shvartsa dlya funktsii, konformno otobrazhayushchey poluploskost' na krugovye oblasti [On a numerical way for the determination of Schwarz derivative parameters for a function conformally mapping the half-plane onto circular domains]. *Trudy Tomskogo gos. universiteta*. 189. pp. 123–136.
 25. Kolesnikov I.A. On the problem of determining parameters in the Schwarz equation (2018). *Probl. Anal. Issues Anal.* 7(25). 2. pp. 50–62. DOI: 10.15393/j3.art.2018.5411.
 26. Nasyrov S.R. (2008) *Geometricheskie problemy teorii razvetvlennykh nakrytiy rimanovykh poverkhnostey* [Geometric Problems in the Theory of Ramified Coverings of Riemann Surfaces]. Kazan: Magarif. (In Russian)

Received: February 7, 2019

УДК 517.519.7
DOI 10.17223/19988621/60/5

MSC 34B10, 34A37, 34B37

М.Дж. Марданов, Я.А. Шарифов, Ф.М. Зейналлы

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Исследована система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями и нелокальными условиями. Сначала краевая задача приводится эквивалентному интегральному уравнению. Далее, с использованием теоремы о неподвижных точках, получены условия существования и единственности решения краевой задачи. Установлена также непрерывная зависимость решений от правой части краевых условий.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями, нелокальные краевые условия, существование и единственность решений, непрерывная зависимость решений.

Многие задачи физики, техники, биологии и экономики описываются дифференциальными уравнениями, решением которых являются функции с разрывами первого рода в фиксированные или нефиксированные моменты времени. Такие дифференциальные уравнения достаточно хорошо изучены в работах [1–8], и их называют дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием. В вышеотмеченных работах, в основном, изучались дифференциальные уравнения с локальными условиями. Однако в последние годы повысился интерес к дифференциальным уравнениям с импульсными воздействиями и нелокальными краевыми условиями, которыми описываются многие практические процессы.

К настоящему времени существует большое количество работ, посвященных обыкновенным дифференциальным уравнениям с импульсными воздействиями и нелокальными краевыми условиями, в которых доказаны теоремы существования решений для различных видов нелокальных условий [7–19].

В данной работе исследуется нелокальная краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями, краевые условия которых включают точечные и интегральные слагаемые. Отметим, что исследуемая краевая задача является довольно общей. В частных случаях она охватывает задачу Коши и «чистое» интегральное условие. Исследованы вопросы существования и единственности решения краевой задачи, а также непрерывности решения от правой части краевых условий.

Постановка задачи

Исследуем существование и единственность решения системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T], t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (1)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B, \quad (2)$$

при импульсных воздействиях

$$x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$, $A \in R^{n \times n}$, $n(t) \in R^{n \times n}$ – заданные матрицы, причем $\det N \neq 0$, $N = A + \int_0^T n(t)dt$, $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, $I_i: R^n \rightarrow R^n$ – заданные функции;

$$\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-),$$

где $x(t_i^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_i + h)$, $x(t_i^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_i - h) = x(t_i)$ – правосторонние и левосторонние пределы функции $x(t)$ в точке $t = t_i$ соответственно.

Вспомогательные факты

Приведем некоторые определения и вспомогательные факты, которые будут использованы далее. Через $C([0, T]: R^n)$ будем обозначать пространство Банаха, которое состоит из непрерывных вектор-функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0, T]$, со значениями в R^n и с нормой $\|x\| = \max_{[0, T]} |x(t)|$, где через $|\cdot|$ обозначена норма в R^n .

Через $PC([0, T], R^n)$ обозначим линейное пространство

$$PC([0, T], R^n) = \{x: [0, T] \rightarrow R^n; \quad x(t) \in C((t_i, t_{i+1}], R^n), \quad i = 0, 1, \dots, p;$$

причем $x(t_i^+)$ и $x(t_i^-)$, $i = 1, 2, \dots, p$, существуют и конечны; $x(t_i^-) = x(t_i)\}$.

Очевидно, линейное пространство $PC([0, T]; R^n)$ – банахово с нормой $\|x\|_{PC} = \max \{ \|x\|_{C((t_i, t_{i+1}])}, \quad i = 0, 1, \dots, p \}$.

Определим решение краевой задачи (1) – (3) следующим образом.

Определение 1. Функция $x \in PC([0, T]: R^n)$ называется решением краевой задачи (1) – (3), если для любого $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

и для $t = t_i$ $i = 1, 2, \dots, p$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$

$$\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)).$$

Кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет краевому условию (2).

Введем следующую функцию:

$$K(t, \tau) = \begin{cases} N^{-1} \left(A + \int_0^t n(\tau) d\tau \right), & 0 \leq \tau \leq t, \\ -N^{-1} \int_t^T n(\tau) d\tau, & t < \tau \leq T. \end{cases}$$

Лемма 1. Пусть $y \in C([0, T]; R^n)$ и $a_i \in R^n$, $i = 1, 2, \dots, p$. Тогда дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad (4)$$

с импульсными воздействиями

$$x(t_i^+) - x(t_i) = a_i; \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T, \quad (5)$$

и нелокальными условиями

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B \quad (6)$$

имеет единственное решение $x(t) \in PC([0, T], R^n)$ и выражается следующей формулой:

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t, \tau)y(\tau)d\tau + \sum_{0 < t_i < t} K(t, t_i)a_i \quad (7)$$

для $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, p$.

Доказательство. Пусть функция $x(t) \in PC([0, T], R^n)$ является решением краевой задачи (4) – (6). Тогда, интегрируя уравнение (4) на интервале $t \in (0, t_{i+1})$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s)ds &= \int_0^t \dot{x}(s)ds = \\ &= [x(t_1) - x(0^+)] + [x(t_2) - x(t_1^+)] + \dots + [x(t) - x(t_i^+)] = \\ &= -x(0) - [x(t_1^+) - x(t_1)] - [x(t_2^+) - x(t_2)] - \dots - \\ &\quad - [x(t_i^+) - x(t_i)] + x(t). \end{aligned}$$

Учитывая условие (5) в последнем равенстве, получаем

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds + \sum_{0 < t_i < t} a_i. \quad (8)$$

Теперь потребуем, чтобы функция $x(t) \in PC([0, T], R^n)$, определенная равенством (8), удовлетворяла граничному условию (6):

$$\left(A + \int_0^T n(t)dt \right) x(0) = B - \int_0^T n(t) \int_0^t y(s)dsdt - \int_0^T n(t) \sum_{0 < t_i < t} a_i dt. \quad (9)$$

Так как $\det N \neq 0$, из (9) имеем

$$x(0) = N^{-1} \left[B - \int_0^T n(t) \int_0^t y(s) ds dt - \int_0^T n(t) \sum_{0 < t_i < t} a_i dt \right]. \quad (10)$$

Значение $x(0)$, определяемое равенством (10), учтем в равенстве (9). Тогда

$$x(t) = N^{-1} \left[B - \int_0^T n(t) \int_0^t y(s) ds dt - \int_0^T n(t) \sum_{0 < t_i < t} a_i dt \right] + \int_0^t y(s) ds + \sum_{0 < t_i < t} a_i. \quad (11)$$

Так как имеют место равенства

$$\begin{aligned} \int_0^T n(t) \int_0^t y(s) ds dt &= \int_0^T \int_t^T n(s) dy(s) dt, \\ \int_0^T n(t) \sum_{0 < t_i < t} a_i dt &= \sum_{0 < t_i < T} \int_{t_i}^T n(t) dt a_i, \end{aligned}$$

то из (11) получаем

$$x(t) = N^{-1} B - N^{-1} \int_0^T \int_t^T n(s) dy(s) dt - N^{-1} \sum_{0 < t_i < t} \int_{t_i}^T n(t) dt a_i + \int_0^t y(s) ds + \sum_{0 < t_i < t} a_i. \quad (12)$$

Здесь проведем некоторые упрощения. Очевидно, что имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s) ds - N^{-1} \int_0^T \int_t^T n(s) dy(s) dt &= \\ = N^{-1} \int_0^t \left(A + \int_0^\tau n(s) ds \right) y(\tau) d\tau - N^{-1} \int_t^T n(s) dy(s) d\tau; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sum_{0 < t_i < t} a_i - N^{-1} \sum_{0 < t_i < T} \int_{t_i}^T n(t) dt a_i = N^{-1} \sum_{0 < t_i < t} \left(A + \int_0^{t_i} n(t) dt \right) a_i - \sum_{t < t_{i+1} < T} N^{-1} \int_{t_i}^T n(t) dt a_i. \quad (14)$$

Учитывая (13) и (14) в (12), получаем формулу (7).

Замечание. Из формулы (7) следует справедливость следующих утверждений:

(i) Постоянная вектор-функция $x(t) = N^{-1} B$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = 0$$

с нелокальными условиями

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B.$$

(ii) Функция $x(t) = \int_0^T K(t,s)y(s)ds$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

с нелокальным условием

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = 0.$$

Здесь матрица функции $K(t, s)$ есть функция Грина данной задачи.

(iii) Кусочно-постоянная функция

$$x(t) = \sum_{0 < t_i < t} K(t, t_i) a_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = 0$$

с импульсными воздействиями

$$x(t_i^+) - x(t_i) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

и граничными условием

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = 0.$$

Лемма 2. Предположим, что $f \in C([0, T] \times R^n, R^n)$ и $I_i(x) \in C(R^n)$. Тогда функция $x(t) \in PC([0, T], R^n)$ является решением краевой задачи (1) – (3) тогда и только тогда, когда функция $x(t) \in PC([0, T], R^n)$ является решением интегрального уравнения с импульсными воздействиями

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t, s)f(s, x(s))ds + \sum_{i=1}^p K(t, t_i)I_i(x(t_i)), \quad (15)$$

для $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, p$.

Доказательство. Пусть $x(t) \in PC([0, T], R^n)$ является решением краевой задачи. Тогда, аналогично лемме 1, можно показать, что функция $x(t) \in PC([0, T], R^n)$ удовлетворяет интегральному уравнению (15).

Верно и обратное. Прямым вычислением можно убедиться, что решение интегрального уравнения (15) также удовлетворяет уравнению (1), краевому условию (3), а также импульсным условиям (2). Лемма доказана.

Основные результаты

Первый основной результат данного раздела базируется на принципе неподвижной точки Банаха. На основе этого принципа доказана теорема о существовании и единственности решения краевой задачи (1) – (3).

Теорема 1. Предположим, что выполняются следующие условия:

(H1) Существует постоянная $M \geq 0$, такая, что

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M|x - y|,$$

для любого $t \in [0, T]$ и для всех $x, y \in R^n$;

(H2) Существуют постоянные $l_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, такие, что

$$|I_i(x) - I_i(y)| \leq l_i |x - y|$$

для любых $x, y \in R^n$.

$$\text{Если} \quad L = S \left(MT + \sum_{k=1}^p l_k \right) < 1, \quad (16)$$

тогда краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение.

Здесь число S определяется равенством

$$S = \max_{0 \leq t, s \leq T} \|K(t, s)\|.$$

Доказательство. Для доказательства используем принцип неподвижной точки Банаха.

Определим оператор $F : PC([0, T]; R^n) \rightarrow PC([0, T] \times R^n)$ из соотношения

$$(Fx)(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t, s) f(s, x(s)) ds + \sum_{k=1}^p K(t, t_k) I_k(x(t_k)) \quad (17)$$

для $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots, p$.

Очевидно, неподвижные точки оператора F являются решениями краевой задачи (1) – (3). С помощью принципа сжимающих операторов покажем, что оператор F , определенный равенством (17), имеет единственную неподвижную точку.

Положим $M_f = \max_{[0, T]} |f(t, 0)|$ и $m_I = \max_{k \in \{1, 2, \dots, p\}} |I_k(0)|$. Фиксируем число

$$r \geq \frac{\|N^{-1}B\| + S(M_f T + pm_I)}{1 - L}.$$

Покажем, что $FB_r \subset B_r$, где

$$B_r = \{x \in PC([0, T], R^n) : \|x\|_{PC} \leq r\}.$$

Для $x \in B_r$ имеем

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t)\| &\leq \|N^{-1}B\| + \max_{[0, T]} \int_0^T |K(t, s)| [|f(s, x(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|] ds + \\ &+ \max_{[0, T]} \sum_{k=1}^p |K(t, t_k)| [|I_k(x(t_k)) - I_k(0)| + |I_k(0)|] \leq \\ &\leq \|N^{-1}B\| + S \left[(MTr + M_f T) + \left(\sum_{k=1}^p l_k \right) r + pm_I \right] \leq r. \end{aligned}$$

Пусть $x, y \in PC([0, T]; R^n)$ – любые фиксированные элементы. Тогда для любого $t \in (t_i, t_{i+1}]$ имеем

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \int_0^T |K(t, s)| \cdot |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds + \\ &+ \sum_{k=1}^p |K(t, t_k)| \cdot |I_k(x(t_k)) - I_k(y(t_k))|. \end{aligned}$$

Используя условия (H1), (H2), из последнего неравенства получаем

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| \leq SMT \|x - y\| + S \sum_{k=1}^P I_k |x(t_k) - y(t_k)|.$$

Это неравенство можно переписать в следующем виде:

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| \leq \left[S \left(MT + \sum_{k=1}^P I_k \right) \right] \times \|x - y\|_{PC}.$$

Таким образом,

$$\|F(x)(t) - F(y)(t)\| \leq L \|x - y\|_{PC}.$$

Здесь, учитывая условие (16), получаем, что оператор F является сжимающим. Согласно принципу о неподвижной точке, можно сделать вывод, что оператор F имеет единственную неподвижную точку. Это эквивалентно тому, что не-локальная краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Второй результат данного раздела посвящен установлению существования решений краевой задачи (1) – (3), который базируется на неподвижной точке Шауфера.

Теорема 2. Предположим, что выполнены следующие условия:

(H3) Функция $f : [0, T] \times R^n \rightarrow R$ непрерывна и существует постоянная $N_1 > 0$, такая, что

$$|f(t, x)| \leq N_1$$

для всех $t \in [0, T]$ и $x \in R^n$;

(H4) Функции $I_k : R^n \rightarrow R^n$ непрерывны и существует постоянная $N_2 > 0$, такая, что

$$\max_{k \in \{1, 2, \dots, P\}} |I_k(x)| \leq N_2.$$

Тогда краевая задача (1) – (3) имеет хотя бы одно решение на $[0, T]$.

Доказательство. Покажем, что при вышеперечисленных условиях оператор $F(x)(t)$, определенный равенством (17), имеет неподвижные точки. Это будет сделано после определенных шагов.

Шаг 1. Оператор F при условиях теоремы непрерывен в $PC([0, T]; R^n)$.

Пусть $\{x_n\}$ – функциональная последовательность в пространстве $PC([0, T]; R^n)$

и $x_n \rightarrow x$ $x \in PC([0, T]; R^n)$. Тогда для любого $t \in (t_i, t_{i+1}]$, и $i = 0, 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} |F(x_n)(t) - F(x)(t)| &\leq \int_0^t |K(t, s)| \cdot |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds + \\ &+ \sum_{k=1}^P |K(t, t_k)| \cdot |I_k(x_n(t_k)) - I_k(x(t_k))|. \end{aligned}$$

Здесь, учитывая условия (H3), (H4), имеем

$$\begin{aligned} |F(x_n)(t) - F(x)(t)| &\leq ST \max_{s \in [0, T]} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| + \\ &+ S \sum_{k=1}^P |I_k(x_n(t_k)) - I_k(x(t_k))|. \end{aligned}$$

Так как функции f и $I_k, k = 1, 2, \dots, p$, непрерывны, то имеем

$$\|F(x_n)(t) - F(x)(t)\|_{PC} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Шаг 2. Отображение F является ограниченным в пространстве $PC([0, T]; R^n)$. Это эквивалентно тому, что мы должны показать, что для любого $\eta > 0$, существует $l > 0$, такое, что для любого

$$x \in B_\eta = \{x \in PC([0, T]; R^n) : \|x\| \leq \eta\}$$

имеет место

$$\|F(x(\cdot))\| \leq l.$$

Применяя неравенство треугольника и используя предположения (H3) и (H4) для $t \in (t_i, t_{i+1}]$, получаем

$$|F(x)(t)| \leq |N^{-1}B| + \int_0^T |K(t, s)| \cdot |f(s, x(s))| ds + \sum_{i=1}^p |K(t, t_i)| \cdot |I_i(x(t_i))|.$$

Таким образом,

$$\|F(x)(t)\| \leq |N^{-1}B| + S[TN_1 + pN_2] = l$$

Шаг 3. Оператор F отображает ограниченное множество в равномерно непрерывное подмножество пространства $PC([0, T]; R^n)$. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in (t_i, t_{i+1}]$ и $\tau_1 < \tau_2$. B_η – ограниченное множество в шаге 2 и пусть $x \in B_\eta$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} F(x)(\tau_2) - F(x)(\tau_1) &= \\ &= N^{-1} \int_0^{\tau_2} \left(A + \int_0^s n(\tau) d\tau \right) f(s, x(s)) ds - N^{-1} \int_0^{\tau_1} \left(A + \int_0^s n(\tau) d\tau \right) f(s, x(s)) ds - \\ &- N^{-1} \int_0^{\tau_1} \left(A + \int_0^s n(\tau) d\tau \right) f(s, x(s)) ds + N^{-1} \int_0^{\tau_1} \left(A + \int_0^s n(\tau) d\tau \right) f(s, x(s)) ds = \\ &= N^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(A + \int_0^s n(\tau) d\tau \right) f(s, x(s)) ds + N^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^s n(\tau) d\tau f(s, x(s)) ds = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$|F(x)(\tau_1) - F(x)(\tau_2)| \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} |f(s, x(s))| ds.$$

При $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ правая сторона предыдущего неравенства стремится к нулю. Учитывая, что отображение F непрерывно и равномерно непрерывно, приходим к выводу, что отображение

$$F : PC([0, T]; R^n) \rightarrow PC([0, T]; R^n)$$

вполне непрерывно.

Шаг 4. Покажем, что множество

$$\Delta = \{x \in PC([0, T]; R^n) : x = \lambda F(x)\}$$

для некоторого $0 < \lambda < 1$ ограничено. Пусть для некоторого $0 < \lambda < 1$ равенство $x = \lambda(Fx)$ выполняется. Тогда для любого $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, p$,

$$x(t) = \lambda \left[N^{-1}B + \int_0^T K(t, s) f(s, x(s)) ds + \sum_{k=1}^P K(t_i, t_k) I_n(x(t_k)) \right].$$

Отсюда, учитывая предположения (H3) и (H4) (как и на шаге 2) для любого $t \in [0, T]$, имеем

$$|F(x)(t)| \leq |N^{-1}B| + [N_1T + pN_2]S.$$

Следовательно, мы получаем

$$\|x\|_{PC} \leq |N^{-1}B| + [N_1T + pN_2]S = R.$$

Это показывает, что множество Δ ограничено. Значит, выполняются все условия теоремы о неподвижной точке Шауфера. Отсюда следует, что оператор F имеет неподвижные точки, которые являются решениями краевой задачи (1) – (3).

Теорема доказана.

Теперь покажем непрерывную зависимость решений задачи (1) – (3) от правой части (2).

Теорема 3. Пусть выполняются условия (H1), (H2) и $L < 1$. Тогда для любых $B_1, B_2 \in R^n$ и для соответствующих решений x_1, x_2 следующих краевых задач

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)), \quad t \in [0, T], t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (18)$$

$$Ax_j(0) + \int_0^T n(t) x_j(t) dt = B_j; \quad (19)$$

$$x_j(t_i^+) - x_j(t_i) = I_i(x_j(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \quad (20)$$

выполняется оценка

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq (1 - L)^{-1} \|N^{-1}\| \|B_1 - B_2\|.$$

Доказательство: Пусть $B_1, B_2 \in R^n$ – любые точки и x_1, x_2 – соответствующие решения задачи (18) – (20). Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) &= N^{-1}[B_1 - B_2] + \\ &+ \int_0^T K(t, s)[f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))] ds + \sum_{k=1}^P K(t, t_k)[I_k(x_1(t_k)) - I_k(x_2(t_k))]. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь, используя условия (H1) и (H2), из (21) получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \|N^{-1}[B_1 - B_2]\| + SM \int_0^T |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau + S \sum_{i=1}^p l_i |x_1(t_k) - x_2(t_k)|.$$

Отсюда

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|N^{-1}\| \|B_1 - B_2\| + S \left(MT + \sum_{i=1}^p l_i \right) \|x_1(t) - x_2(t)\|.$$

Так как $L < 1$, из последнего неравенства следует, что

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq (1 - L)^{-1} \|N^{-1}\| \|B_1 - B_2\|.$$

Теорема доказана.

Отметим, что схему, предложенную в данной работе, можно успешно применять в более сложных краевых задачах с импульсными воздействиями. Например, для краевой задачи, когда (2) сохраняет в себе двухточечные или многоточечные и интегральные слагаемые.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища Школа, 1987. 287 с.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
3. Perestyk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential equations with impulse effect: multivalued right-hand sides with discontinuities // DeGruyter Stud. Math. Berlin: Walter de Gruyter Co., 2011. V. 40.
4. Samoilenko A.M., Perestyk N.A. Impulsive differential equations. Singapore: World Sci., 1995.
5. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1989. 434 p.
6. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. Utrecht: Brill, 2004.
7. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd ed.). Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2016. 314 p.
8. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.K. Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.
9. Mardanov M.J., Sharifov Yagub A., Molaei Habib H. Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions // Electronic J. Differential Equations. 2014. No. 259. P. 1–8.
10. Annamalai Anguraj, Mani Mallika Arjunan. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations // Elect. J. Differential Equations. 2005. No. 111. P. 1–8.
11. Ji Sh., Wen Sh. Nonlocal cauchy problem for impulsive differential equations in Banach spaces // International J. Nonlinear Science. 2010. V. 10. No. 1. P. 88–95.
12. Li M., Han M. Existence for neutral impulsive functional differential equations with nonlocal conditions // Indagationes Mathematicae. 2009. V. 20. No. 3. P. 435–451.
13. Bin L., Xinzhil L., Xiaoxin L. Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems // Acta Mathematica Scientia. 2005. V. 25 B(1). P. 161–169.
14. Шарифов Я.А. Задача оптимального управления для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2013. № 4(33). С. 34–45.
15. Шарифов Я.А. Оптимальное управление для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях // Изв. вузов. Математика. 2013. № 2. С. 75–84.
16. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions // EJDE. 2013. No. 80. P. 1–11.

17. Sharifov Y.A., Mammadova N.B. Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions // Differential equations. 2014. V. 50. No. 3. P. 403–411.
18. Sharifov Y.A. Conditions optimality in problems control with systems impulsive differential equations under non-local boundary conditions // Ukrainian Mathematical Journal. 2012. V. 64. No. 6. P. 836–847.
19. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions // Advances in Difference Equations. 2013. 2013:173.

Статья поступила 27.04.2019 г.

Mardanov M.J., Sharifov Ya.A., Zeynally F.M. (2019) EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR NONLINEAR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 61–72

DOI 10.17223/19988621/60/5

Keywords: nonlocal boundary conditions, impulsive systems, existence and uniqueness of solutions, continuous dependence of the solutions.

In this paper, we aim to study differential equations

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T], t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

with nonlocal boundary conditions

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B,$$

and subject to impulsive conditions

$$x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

where $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$, $A \in R^{n \times n}$, $n(t) \in R^{n \times n}$ known matrices such that $\det N \neq 0$,

$N = A + \int_0^T n(t)dt$; $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ and $I_i: R^n \rightarrow R^n$ are given functions;

$\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, where $x(t_i^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_i + h)$, $x(t_i^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_i - h) = x(t_i)$ are right- and

left-hand limits of $x(t)$ at $t = t_i$, respectively.

The Green function is constructed and the considered problem is reduced to an equivalent integral equation. The existence and uniqueness of the solutions for the given problem are analyzed using the Banach contraction principle. The Schaefer fixed point theorem is then used to prove the existence of the solutions. The continuous dependence of the solutions on the right side of the boundary conditions is also established.

AMS Mathematical Subject Classification: 34B10, 34A37, 34B37.

MARDANOV Misir J. (Corr.-member of ANAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute Mathematics and Mechanics of ANAS, Baku, Azerbaijan). E-mail: misirmardanov@yahoo.com

SHARIFOV Yagub A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: farahzeynalli@rambler.ru

ZEYNALLY Farah M. (Doctoral student Ganja State University, Ganja, Azerbaijan). E-mail: sharifov22@rambler.ru

REFERENCES

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. (1987) *Differentsial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviem* [Differential equations with impulse effect]. Kiev: Vishcha Shkola, 287 p.
2. Halanay A., Wexler D. (1971) *Qualitative theory of impulse systems*. Moscow: Mir. 309 p. (in Russian)
3. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. (2011) Differential equations with impulse effect: multivalued right-hand sides with discontinuities. *DeGruyter Stud. Math. V. 40*. Berlin: Walter de Gruyter & Co.
4. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. (1995) *Impulsive differential equations*. Singapore: World Sci.
5. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. (1989) *Theory of Impulsive Differential Equations*. Singapore: World Scientific. <https://doi.org/10.1142/0906>.
6. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. (2004) *Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems*. Utrecht: Brill.
7. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. (2016) *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* (2nd ed.). Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH.
8. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.K. (2006). *Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application*. New York: Hindawi Publishing Corporation.
9. Mardanov M. J., Sharifov Yagub A., Molaei Habib H. (2014) Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014(259). pp. 1–8.
10. Anguraj A., Mallika Arjunan M. (2005) Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations. *Elect. J. Differential Equations*, 2005(111). pp. 1–8.
11. Ji S., Wen S. (2010) Nonlocal Cauchy Problem for Impulsive Differential Equations in Banach Spaces. *International Journal of nonlinear Science*. 10(1). P. 88–95.
12. Li M., Han M. (2009) Existence for neutral impulsive functional differential equations with nonlocal conditions. *Indagationes Mathematicae*. 20(3). pp. 435–451. doi.org/10.1016/S0019-3577(09)80017-7.
13. Liu B., Liu X., Liao X. (2005) Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems. *Acta Mathematica Scientia*. 25 B(1). pp. 161–169. doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30273-4.
14. Sharifov Y.A. (2013) Optimal control problem for the impulsive differential equations with non-local boundary conditions. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*. 4(33). pp. 34–45. doi.org/10.14498/vsgtu1134.
15. Sharifov Y.A. (2013) Optimal control of impulsive systems with nonlocal boundary conditions. *Russian Mathematics*. 57(2). pp. 65–72. doi.org/10.3103/S1066369X13020084.
16. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. (2013) Optimal Control Problems for Impulsive Systems with Integral Boundary Conditions. *EJDE*. 2013(80). pp. 1–11. DOI: 10.1063/1.4747627.
17. Sharifov Y.A., Mammadova N.B. (2014) Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions. *Differential equations*. 50(3). pp. 403–411. doi.org/10.1134/S0012266114030148.
18. Sharifov Y.A. (2012) Conditions optimality in problems control with systems impulsive differential equations under non-local boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 64(6). P. 836–847. doi.org/10.1007/s11253-012-0691-4.
19. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. (2013) Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions. *Advances in difference equations*. 173. doi.org/10.1186/1687-1847-2013-173.

Received: April 27, 2019

МЕХАНИКА

УДК 532.529.5

DOI 10.17223/19988621/60/6

Е.И. Борзенко, Е.И. Хегай

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАПОЛНЕНИЯ ЁМКОСТИ
НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЬЮ С ПРИМЕНЕНИЕМ VOF-МЕТОДА¹**

Проведено исследование процесса заполнения плоской ёмкости с центральным телом в присутствии силы тяжести. Течение описывается уравнениями Навье – Стокса и неразрывности, на стенках выполняются условия прилипания. Жидкость подается через канал на верхней крышке с заданным расходом. Задача решается численно с использованием метода контрольного объема и корректирующей процедуры SIMPLE. Местоположение свободной поверхности определяется с помощью метода PLIC VoF. Выявлены различные режимы заполнения ёмкости в зависимости от определяющих параметров. Получены кинематические характеристики течения.

Ключевые слова: *заполнение, ёмкость, вязкая жидкость, свободная поверхность, численное моделирование, алгоритм SIMPLE, метод PLIC VoF, режим.*

Во многих промышленных областях важную роль играет течение жидкости со свободной поверхностью, такое, как заполнение емкостей, растекание жидкости, обтекание объектов и т.п. Для исследования используются методы математического моделирования, которые позволяют получить сведения о поведении свободной поверхности жидкости и особенностях кинематических и динамических характеристик потока.

К настоящему времени известны различные методы численного исследования течения жидкости со свободной поверхностью. Обзор этих методов достаточно подробно представлен в [1, 2]. Одним из широко распространённых методов в вычислительной гидродинамике является метод VoF (Volume of Fluid), предложенный в [3]. Дальнейшее развитие этот метод получил в [4]. В этой работе предложена модификация метода, называемая PLIC VoF (Piecewise-Linear Interface Calculation), которая позволяет представить свободную поверхность в виде наклонных отрезков.

Успешное применение PLIC VoF демонстрируется в [5–10]. В [5] с использованием метода PLIC VoF проводится моделирование процесса обрушения дамбы жидкости. Сравнение результатов моделирования с результатами эксперимента показало хорошее согласование. В [6] исследовалось влияние модели турбулентности на поведение жидкости при обтекании плотины. Достоверность вычислительной методики подтверждена сравнением с многочисленными экспериментами. В [7] приводятся результаты моделирования процесса столкновения жидкости

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-19-00021).

с препятствием, полученные различными методами отслеживания свободной поверхности. В [8] разработана модификация алгоритма PLIC VoF, позволяющая проводить расчеты с более высокой точностью. В [9], используя PLIC VoF, проводится исследование течения ньютоновской жидкости через пористую среду. В [10] PLIC VoF применяется для моделирования процесса заполнения ёмкости пенополиуретанами.

Методы вычислительной гидродинамики применяются для исследования течения при заполнении емкостей. В работе [11] рассматривается медленное течение вязкой жидкости, реализующееся в технологии метода свободного литья на этапах течения жидкости в массопроводе и заливки пресс-форм различной конфигурации. Показано, что монолитность изделий может нарушаться за счет образования газовых включений и внутренних границ раздела в жидкости. Описаны условия, при которых возможно появление таких дефектов: при течении жидкости в массопроводе, при наличии в нем конструктивного элемента типа «диафрагма» и при заполнении пресс-форм в струйном режиме. В [12] моделируется процесс литья под давлением при заполнении пресс-формы вязкой жидкостью. Показано, что такой процесс может проходить с образованием воздушных полостей или линий спая. Это, в свою очередь, приводит к внутренним дефектам готового изделия. При этом существуют отдельные диапазоны значений числа Стокса, обеспечивающие бездефектный режим заполнения.

Авторы [13, 14] исследовали влияние метода литья топливной композиции на производительность и надежность энергетических установок. Согласно проведенным исследованиям, высказано предположение, что распределение порций топливной композиции внутри пресс-формы влияет на локальную скорость горения. В [15, 16] с помощью математического моделирования проводился расчет рабочих характеристик твердотопливного двигателя при различных вариантах литья

топливных композиций. Показано влияние процесса изготовления топливных зарядов на баллистические свойства твердотопливных двигателей.

Целью настоящей работы является изучение процесса заполнения ёмкости вязкой жидкостью и выявление особенностей кинематических и динамических характеристик течения.

Постановка задачи

Рассматривается течение ньютоновской жидкости, реализуемое при заполнении плоской ёмкости с центральным телом в поле силы тяжести. Область решения показана на рис. 1. Жидкость поступает в ёмкость через входное сечение Γ_2 с заданным расходом. Вдоль плоскости симметрии имеется твердое тело высотой $h < H$, и шириной $l < L$. Считается, что в начальный момент заполнен только входной канал.

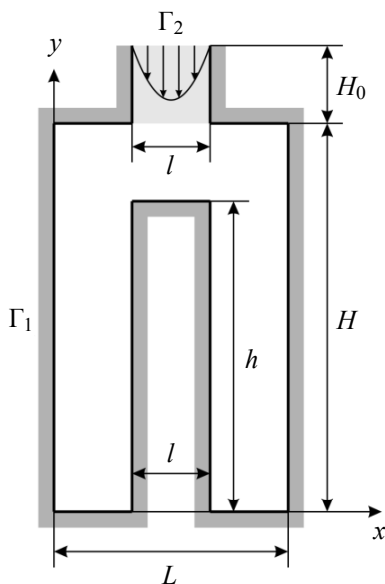


Рис. 1. Область решения
Fig. 1. Solution domain

Математическая постановка включает уравнения движения и неразрывности, записанные в безразмерном виде

$$\text{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial UU}{\partial x} + \frac{\partial VU}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right); \quad (1)$$

$$\text{Re} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial VV}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + W; \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho U_0 D}{\mu}, \quad W = \frac{\rho D^2 g}{\mu U_0},$$

где U и V – проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат x и y , соответственно; P – давление; Re – число Рейнольдса; W – параметр, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил в потоке.

При обезразмеривании выбраны следующие масштабы: D – ширина входного канала; U_0 – среднерасходная скорость жидкости во входном сечении; μ – вязкость жидкости; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

В качестве граничных условий во входном сечении Γ_2 задан параболический профиль, соответствующий установившемуся течению ньютоновской жидкости в плоском бесконечном канале

$$U|_{\Gamma_2} = 0, \quad V|_{\Gamma_2} = -\frac{3}{2}(1 - (2x - L)^2), \quad \frac{L-1}{2} \leq x \leq \frac{L+1}{2}. \quad (4)$$

На твердых стенках Γ_1 выполняется условие прилипания

$$U|_{\Gamma_1} = 0, \quad V|_{\Gamma_1} = 0. \quad (5)$$

На свободной поверхности должны выполняться условия отсутствия касательных напряжений и равенство нормального напряжения внешнему давлению.

В начальный момент времени свободная граница является прямой $y = H$.

Метод решения

Для численного решения сформулированной задачи используется вычислительная технология VoF-метода. Основные уравнения решаются методом контрольного объема, с применением корректирующей процедуры SIMPLE. Положение свободной поверхности в каждый момент времени определяются с помощью VoF-метода.

Идея метода заключается в том, что вводится функция F , значение которой равно единице во всех точках, занятых жидкостью, и равно нулю в остальных точках. При осреднении по контрольному объёму разностной сетки среднее значение F равно объёмной доле контрольного объёма, занятой жидкостью. В частности, $F = 1$ соответствует контрольному объёму, полностью заполненному жидкостью, а $F = 0$ указывает на то, что контрольный объём не содержит жидкости. Контрольные объёмы, в которых F принимает значение от нуля до единицы, содержат свободную поверхность.

Значения этой функции с течением времени находятся из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} + V \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

которое дискретизируется на разностной сетке, и значения потоков через грани рассчитываются, исходя из геометрических соображений и рассчитанных значений скорости на гранях контрольного объема.

Нормаль к свободной поверхности направлена вдоль градиента функции F . Когда известно значение F и направление нормали к свободной поверхности в граничном контрольном объеме, можно провести линию, аппроксимирующую свободную поверхность. Поэтому, помимо определения граничного контрольного объема, функция F используется для определения местоположения жидкости внутри него. Классический метод VoF предполагает существование только двух вариантов расположения свободной поверхности внутри контрольного объема (вертикально или горизонтально). При решении данной задачи использовалась модификация оригинального метода – PLIC VoF, которая предполагает произвольный наклон свободной поверхности [19].

Методические расчеты

Для тестирования разработанного алгоритма и программы расчета проведена проверка аппроксимационной сходимости на последовательности сеток. В качестве контролируемых характеристик выбраны форма свободной поверхности и закон сохранения массы жидкости. Используемые значения определяющих параметров $Re = 1$ и $W = 20$ обеспечивают картину течения, представленную на рис. 2 в момент времени $t = 4$.

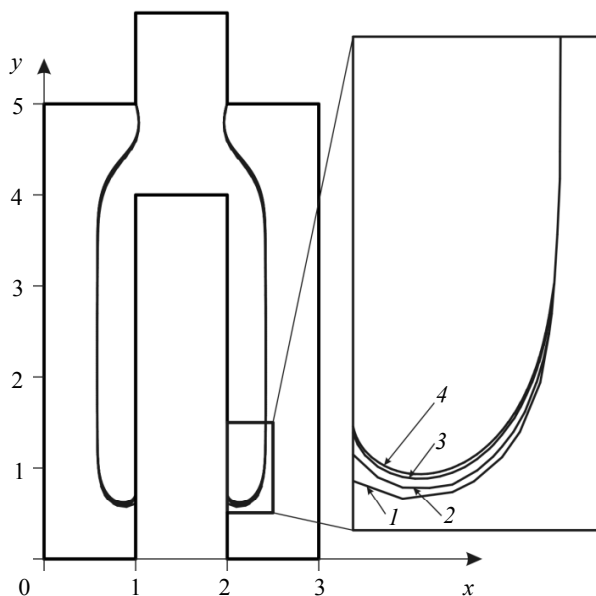


Рис. 2. Форма свободной поверхности на сетках с шагом по пространству h , в момент времени $t = 4$ при $Re = 1$, $W = 20$: 1 – $h = \frac{1}{10}$, 2 – $h = \frac{1}{20}$, 3 – $h = \frac{1}{40}$ и 4 – $h = \frac{1}{80}$

Fig. 2. Free surface shape calculated using the grid step, h , at time instant of $t = 4$

for $Re = 1$ and $W = 20$: $h = (1) \frac{1}{10}$, (2) $\frac{1}{20}$, (3) $\frac{1}{40}$, and (4) $\frac{1}{80}$

Ошибка в законе сохранения массы жидкости рассчитывалась по формуле

$$E_1 = \left| \frac{M_0(t) - M(t)}{M_0(t)} \right| \cdot 100 \%.$$

Здесь $M_0(t)$ – масса жидкости, которая поступила в ёмкость через входное отверстие за время t ; $M(t)$ – вычисленная масса жидкости в ёмкости в момент времени t .

Максимальное различие формы свободной поверхности на ряде сеток наблюдается на линии трехфазного контакта жидкости и центрального тела. Различие координаты формы свободной поверхности в узлах, лежащих на твердой стенке центрального тела, вычислялось по формуле $E_2 = |y_h - y_{h/2}| \cdot 100 \%$. y_h и $y_{h/2}$ – координаты y точек свободной поверхности в сечении $x = 2$ на сетках с шагами h и $h/2$ соответственно.

Различие формы свободной поверхности по ширине стекающего слоя рассчитывалось по формуле $E_3 = |x_h - x_{h/2}| \cdot 100 \%$. x_h и $x_{h/2}$ – координаты x точек свободной поверхности в сечении $y = 3$ на сетках с шагами h и $h/2$ соответственно.

В таблице приведены значения E_1 , E_2 и E_3 на последовательности сеток. Максимальная ошибка в законе сохранения массы жидкости E_1 получалась в момент времени, соответствующий полному заполнению. E_2 и E_3 вычислялись при параметрах, для которых реализуется ситуация, показанная на рис. 2.

Вычисленные значения E_1 , E_2 и E_3 на сетках с шагом h по пространству, %

h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$
E_1	0.359	0.081	0.030	0.008
E_2		0.060	0.038	0.013
E_3		0.00207	0.00097	0.00020

Результаты, представленные в таблице, демонстрируют аппроксимационную сходимость по выбранным величинам.

Аналогичная задача о заполнении ёмкости рассматривалась в [11] в приближении ползущего течения, а решение получено методом граничных элементов. На рис. 3 демонстрируется сравнение результатов, полученных методом PLIC VoF (рис. 3, b , d), с данными [11] (рис. 3, a , c). Наблюдается качественное согласование с небольшими количественными отклонениями.

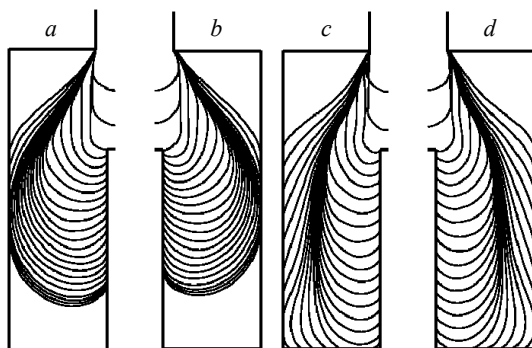


Рис. 3. Эволюция свободной поверхности при $H = 7.5$, $h = 2.5$, $L = 5$, и $l = 0.5$: a – ползущее течение, $W = 0.04$ [11], b – $Re = 0.1$, $W = 0.04$, c – ползущее течение, $W = 0.4$ [11], d – $Re = 0.1$, $W = 0.4$

Fig. 3. Free surface evolution at $H = 7.5$, $h = 2.5$, $L = 5$, and $l = 0.5$: (a) a creeping flow at $W = 0.04$ [11], (b) $Re = 0.1$ and $W = 0.04$, (c) a creeping flow at $W = 0.4$ [11], and (d) $Re = 0.1$ and $W = 0.4$

В [17] исследовалась устойчивость струи высоковязкой жидкости, натекающей на горизонтальную твердую поверхность (рис. 4). Приведен график (рис. 5) зависимости критической высоты входного канала над горизонтальной твердой стенкой H от параметра W , при превышении которой происходит потеря устойчивости струи, выражающаяся в ее периодическом изгибании. При параметрах, соответствующих точкам, лежащим выше кривой 1, струя неустойчивая (рис. 4, a), ниже – устойчивая (рис. 4, b). Сравнение показывает согласование результатов.

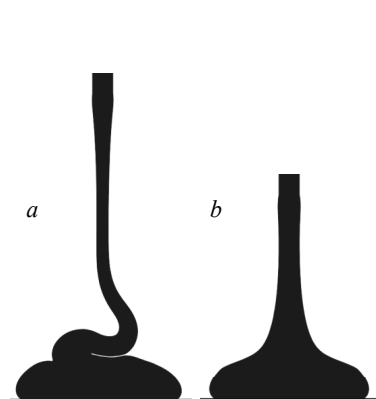


Рис. 4. Эволюция свободной поверхности в случаях неустойчивого и устойчивого режимов $Re = 0.1$, $W = 0.1$: $a - H = 15$ и $b - H = 10$

Fig. 4. Free surface evolution in the cases of unstable and stable regimes at $Re = 0.1$, $W = 0.1$: $H = (a) 15$ and $(b) 10$

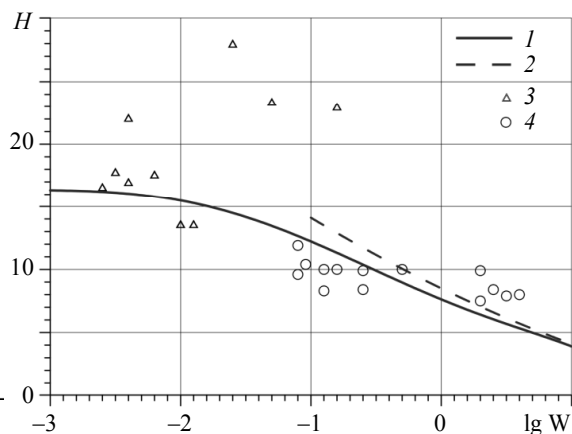


Рис. 5. Зависимость критической высоты H от параметра W : 1 – данные из [17], 2 – результаты настоящей работы при $Re = 0.1$, 3 и 4 – экспериментальные данные из [18] и [19]

Fig. 5. Critical height H as a function of the parameter W : (1) data from [17], (2) results from the current work at $Re = 0.1$, (3) and (4) experimental data from [18] and [19], respectively

Результаты

Все дальнейшие расчеты проводились при следующих размерах: $L = 3$, $H = 5$, $l = 1$, $h = 4$; H_0 выбиралась достаточной для исключения влияния входного сечения на характер течения внутри ёмкости. Давление внутри ёмкости в начальный момент времени считается равным нулю.

В ходе проведения параметрических исследований выявлены четыре режима заполнения, которые качественно отличаются эволюцией свободной поверхности, и продемонстрированы на рис. 6.

При доминировании вязких эффектов над гравитационными наблюдается режим сплошного заполнения, когда свободная поверхность полностью перекрывает боковые полости (рис. 6, a). Увеличение гравитационных эффектов приводит к режиму стекающего по центральному телу слоя (рис. 6, b). В этом случае жидкость стекает по стенке центрального тела, достигает дна, а затем заполняется оставшаяся часть ёмкости. Увеличение инерционных эффектов приводит к формированию струи (рис. 6, c), и, в дальнейшем – к режиму стекания по внешним стенкам боковых полостей (рис. 6, d).

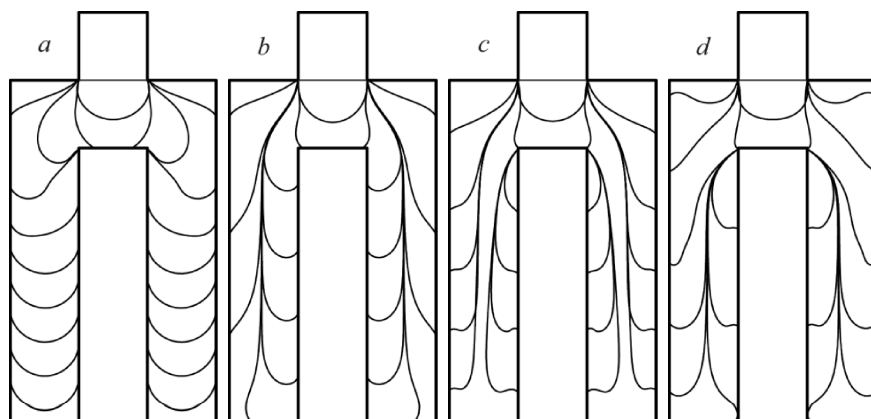


Рис. 6. Четыре основных режима заполнения ёмкости: *a* – сплошное заполнение ($Re = 5$, $W = 0.1$), *b* – стекание по центральному телу ($Re = 1$, $W = 10$), *c* – струя ($Re = 6$, $W = 10$), *d* – стекание по боковым стенкам ($Re = 15$, $W = 10$)

Fig. 6. Four basic regimes of a reservoir filling: (*a*) draining all-over the lateral grooves ($Re = 5$, $W = 0.1$), (*b*) draining down the central rod ($Re = 1$, $W = 10$), (*c*) draining as a jet ($Re = 6$, $W = 10$), and (*d*) draining down the lateral grooves ($Re = 15$, $W = 10$)

На рис. 7 показано распределение кинематических и динамических характеристик в момент времени $t = 8$ в режиме сплошного заполнения. По мере заполнения в местах обтекания центрального тела образуется двумерное течение, а вдоль боковых полостей – одномерное. Давление во входном канале увеличивается по

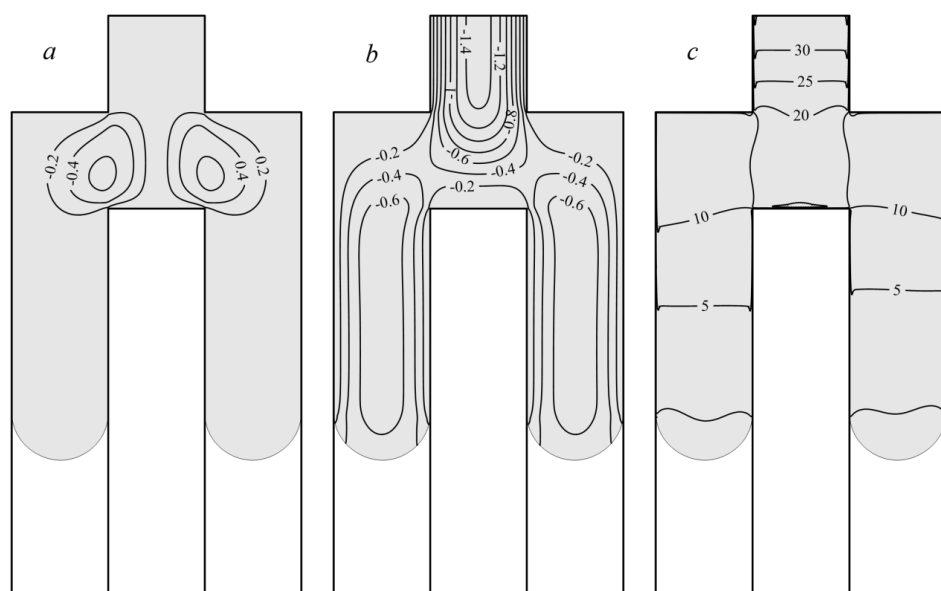


Рис. 7. Кинематика течения в режиме сплошного заполнения ($Re = 1$, $W = 1$): U (*a*), V (*b*) и P (*c*)

Fig. 7. Flow kinematics in the regime of fluid draining all-over the lateral grooves ($Re = 1$, $W = 1$): (*a*) U , (*b*) V , and (*c*) P

мере заполнения. В боковых полостях, вдали от фронта свободной поверхности, изолинии горизонтальны и параллельны друг другу, что соответствует одномерному течению.

На рис. 8 показано распределение кинематических и динамических характеристик в момент времени $t = 8$ в режиме стекания по центральному телу. В этом случае при заполнении боковых полостей образуются застойные зоны у дна ёмкости, в которых скорость практически равна нулю и жидкость покоится.

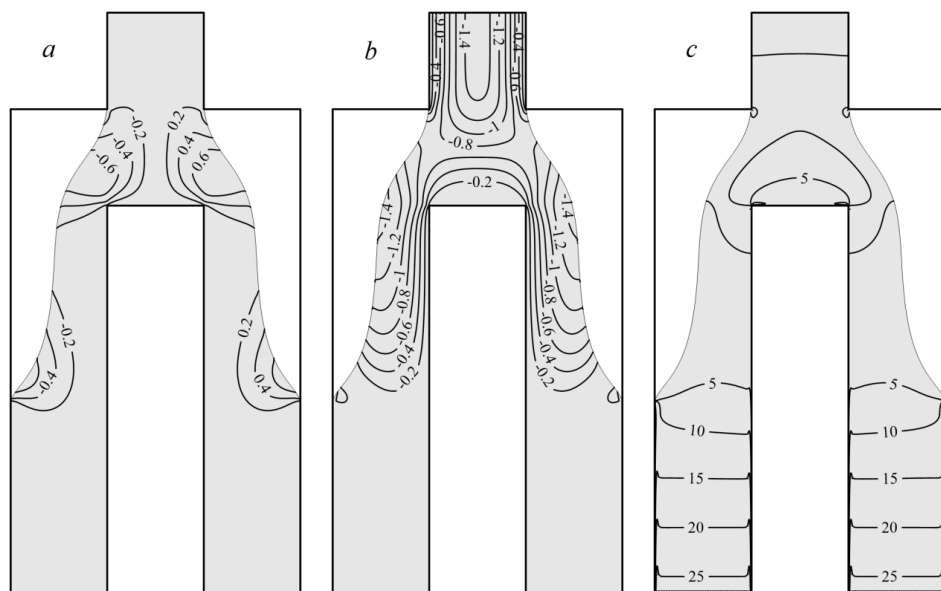


Рис. 8. Кинематика течения в режиме стекания по центральному телу ($Re = 1$, $W = 10$): U (a), V (b) и P (c)

Fig. 8. Flow kinematics in the regime of fluid draining down the central rod ($Re = 1$, $W = 10$): (a) U , (b) V , and (c) P

Поля скоростей и давления в момент времени $t = 8$ в режиме струи и в режиме стекания по боковым стенкам ёмкости показаны на рис. 9 и 10 соответственно. Характер распределения полей продольной и поперечной скоростей и давления в этих режимах качественно совпадает с предыдущим.

Исследование массораспределения жидкости в процессе заполнения ёмкости позволяет оценивать неоднородность пространственного распределения свойств материала конечного изделия. Поэтому в настоящей работе проведено исследование распределения порций жидкости, подаваемых через входное отверстие в пресс-форму за единичный интервал времени. Топограммы распределения порций для четырех режимов приведены на рис. 11 для момента времени, соответствующего полному заполнению ёмкости. Видно, что в первом режиме заполнение имеет фонтанирующий характер [20], а в остальных режимах порции жидкости распределяются параллельными слоями.

Анализ истории деформации элементов жидкости позволяет прогнозировать качество конечного изделия. В связи с этим проведено исследование эволюции и ориентации объёмов жидкости квадратной формы, подаваемых через входной канал.

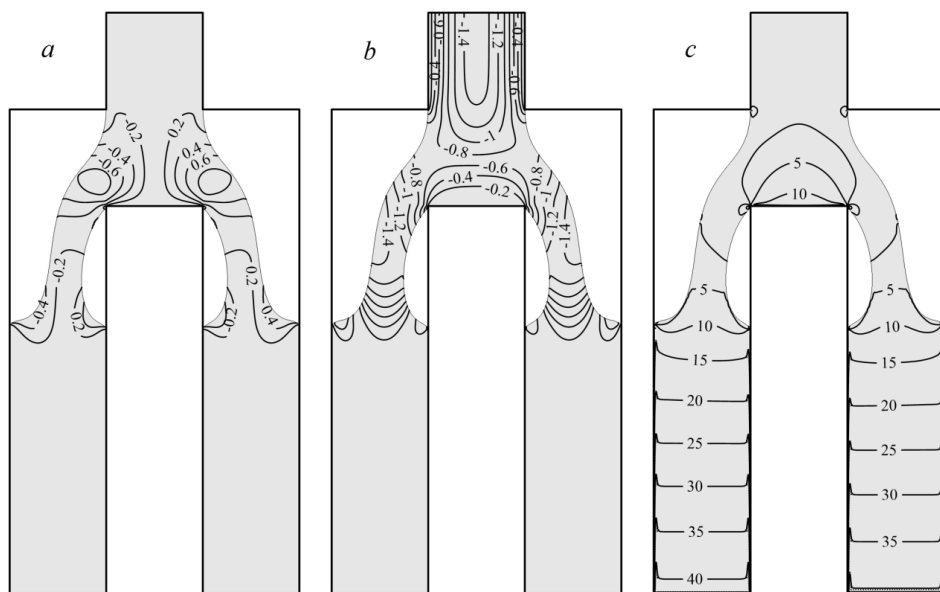


Рис. 9. Кинематика течения в режиме струи ($Re = 6$, $W = 10$):
 U (a), V (b) и P (c)

Fig. 9. Flow kinematics in the regime of fluid draining as a jet
($Re = 6$, $W = 10$): (a) U , (b) V , and (c) P

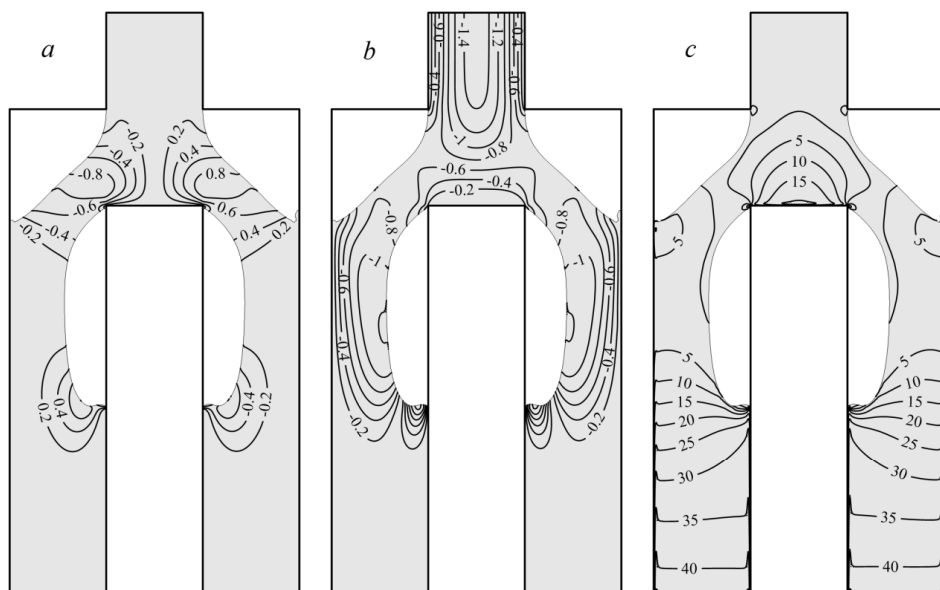


Рис. 10. Кинематика течения в режиме стекания по боковым стенкам
($Re = 15$, $W = 10$): U (a), V (b) и P (c)

Fig. 10. Flow kinematics in the regime of fluid draining down the lateral grooves
($Re = 15$, $W = 10$): (a) U , (b) V , and (c) P

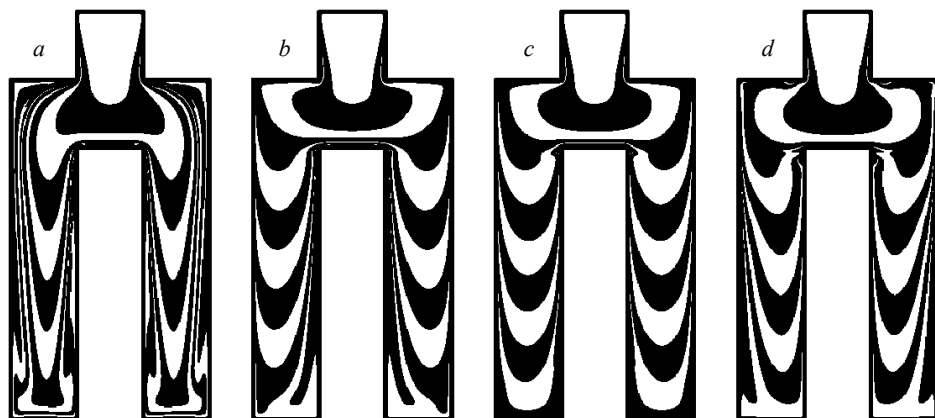


Рис. 11. Топограммы распределения порций жидкости: *a* – сплошное заполнение ($Re = 5$, $W = 0.1$), *b* – стекание по центральному телу ($Re = 1$, $W = 10$), *c* – струя ($Re = 6$, $W = 10$), *d* – стекание по боковым стенкам ($Re = 15$, $W = 10$)

Fig. 11. Topograms of the fluid mass distribution: (*a*) draining all-over the lateral grooves ($Re = 5$, $W = 0.1$), (*b*) draining down the central rod ($Re = 1$, $W = 10$), (*c*) draining as a jet ($Re = 6$, $W = 10$), and (*d*) draining down the lateral grooves ($Re = 15$, $W = 10$)

В первом режиме сказывается влияние фонтанирующего характера процесса. При этом объёмы жидкости вытягиваются вдоль боковых полостей. В остальных режимах элементы жидкости меньше подвергаются деформации. Элементы располагаются параллельно. На рис. 12 показаны положения деформированных объёмов жидкости на момент полного заполнения ёмкости.

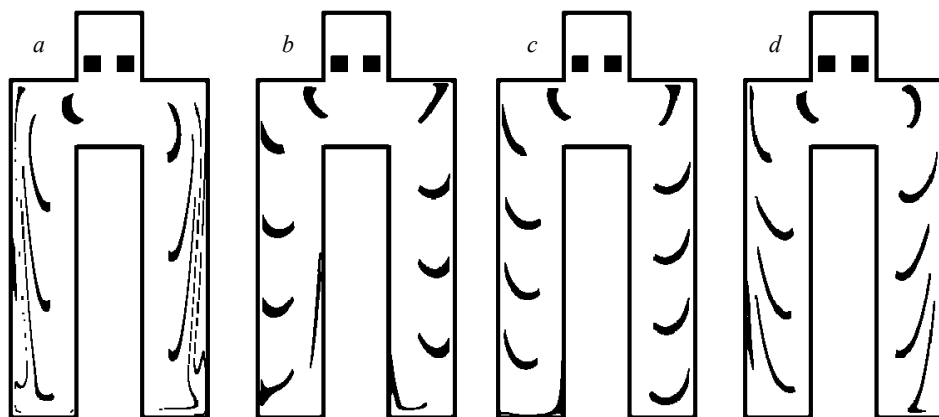


Рис. 12. Деформация объёмов жидкости, подаваемых во входной канал через единичный интервал времени поочередно в левую и правую половину: *a* – сплошное заполнение ($Re = 5$, $W = 0.1$), *b* – стекание по центральному телу ($Re = 1$, $W = 10$), *c* – струя ($Re = 6$, $W = 10$), *d* – стекание по боковым стенкам ($Re = 15$, $W = 10$)

Fig. 12. Strain of the fluid portions entering through the inlet channel per unit time alternately into the left and right grooves: (*a*) draining all-over the lateral grooves ($Re = 5$, $W = 0.1$), (*b*) draining down the central rod ($Re = 1$, $W = 10$), (*c*) draining as a jet ($Re = 6$, $W = 10$), and (*d*) draining down the lateral grooves ($Re = 15$, $W = 10$)

На рис. 13 представлена диаграмма режимов заполнения. При малых значениях параметра W процесс заполнения проходит в режиме сплошного заполнения (область I). При малых значениях числа Рейнольдса жидкость стекает по центральному телу (область II). Увеличение Рейнольдса приводит к отрыву потока от центрального тела, процесс переходит в режим струи (область III) и при дальнейшем росте Re в режим стекания по внешним стенкам боковых полостей (область IV).

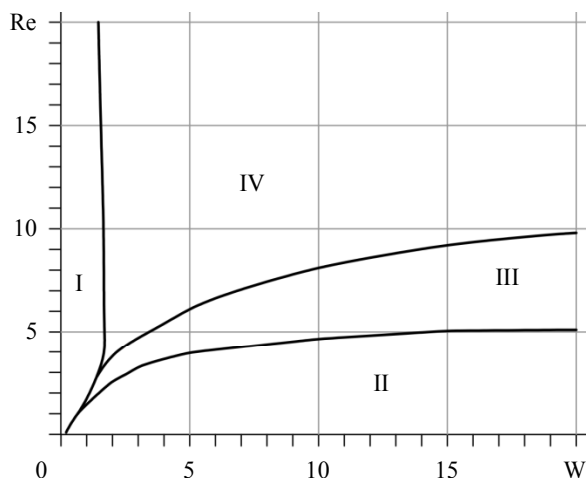


Рис. 13. Диаграмма режимов: I – сплошное заполнение, II – стекание по центральному телу, III – струя, IV – стекание по боковым стенкам

Fig. 13. Diagram of the regimes: (I) draining all-over the lateral grooves, (II) draining down the central rod, (III) draining as a jet, and (IV) draining down the lateral grooves

Заключение

Исследован процесс заполнения ёмкости с центральным телом под действием силы тяжести. Алгоритм решения основных уравнений, описывающих течение, основан на совместном использовании метода PLIC VoF и корректирующей процедуры SIMPLE. Параметрические исследования проводились в диапазоне чисел Рейнольдса $0 < Re < 20$ и значений параметра W , характеризующего соотношение гравитационных и вязких сил в потоке $0 < W < 20$.

В результате продемонстрированы четыре режима заполнения ёмкости. При доминировании вязких эффектов над гравитационными наблюдается режим сплошного заполнения, когда свободная поверхность полностью перекрывает боковые полости. Увеличение гравитационных эффектов приводит к режиму стекающего по центральному телу слоя. В этом случае жидкость стекает по стенке центрального тела, достигает дна, а затем заполняется остальная часть ёмкости. Увеличение инерционных эффектов приводит к формированию струи и в дальнейшем – к режиму стекания по внешним стенкам боковых полостей. Проведен анализ кинематики режимов заполнения. Показано, что в режиме сплошного заполнения реализуется одномерное течение в боковых полостях и двумерное – в окрестности обтекания центрального тела, в остальных режимах образуются застойные зоны в окрестности дна. Исследован характер массораспределения жидкости внутри ёмкости. В режиме сплошного заполнения проявляется фонтанирующий характер течения, а в остальных режимах порции жидкости распределяются параллельными слоями. Проведен анализ деформации элементов жидкости в процессе заполнения. Наибольшим деформациям элементы жидкости подвергаются в режиме сплошного заполнения. Построена диаграмма распределения режимов в зависимости от числа Рейнольдса и параметра W .

ЛИТЕРАТУРА

1. Richard J. McSherry, Ken V. Chua, Thorsten Stoesser. Large eddy simulation of free-surface flows // J. Hydrodynamics. 2017. V. 29(1). P. 1–12. DOI 10.1016/S1001-6058(16)60712-6.
2. Ruben Scardovelli and Stephane Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow // Annu. Rev. Fluid Mech. 1999. V. 31. P. 567–603. DOI 10.1146/annurev.fluid.31.1.567.
3. Nichols B.D., Hirt C.W., Hotchkiss R.S. SOLA-VOF: a solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries. Los Alamos Scientific Laboratory Report: LA-8355, 1980. 121 p.
4. Jang W., Jilesen J., Lien F.S., Ji H. A study on the extension of a VOF/PLIC based method to a curvilinear co-ordinate system // Int. J. Computational Fluid Dynamics. 2008. V. 22(4). P. 241–257. DOI: 10.1080/10618560701880953.
5. Alibek Issakhov, Yeldos Zhandaulet, Aida Nogaeva. Numerical simulation of dam break flow for various forms of the obstacle by VOF method // International Journal of Multiphase Flow. 2018. V. 109. P. 191–206. DOI 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.08.003.
6. Hargreaves D.M., Morvan H.P., Wright N.G. Validation of the volume of fluid method for free surface calculation: The broad-crested weir // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. 2007. V. 1(2). P. 136–146. DOI: 10.1080/19942060.2007.11015188.
7. Susann Hansch, Dirk Lucas, Thomas Hohne, Eckhard Krepper, Gustavo Montoya. Comparative simulations of free surface flows using vof-methods and a new approach for multi-scale interfacial structures // Proceedings of the ASME 2013 Fluids Engineering Summer Meeting (FEDSM2013-16104). 2013 DOI: 10.1115/FEDSM2013-16104.
8. Shaswat Saincher, Jyotirmay Banerjee. A redistribution-based volume preserving PLIC-VOF technique // Numerical Heat Transfer. 2014. V. 67. P. 338–362. DOI: 10.1080/10407790.2014.950078.
9. Yin X., Zaricos I., Karadimitriou N.K., Raoof A., Hassanizadeh S.M. Direct simulations of two-phase flow experiments of different geometry complexities using Volume-of-Fluid (VOF) method // Chemical Engineering Science. 2018. V. 195. P. 820–827. DOI 10.1016/j.ces.2018.10.029.
10. Mohsen Karimi, Hermes Droghetti, Daniele L. Marchisio. Multiscale modeling of expanding polyurethane foams via computational fluid dynamics and population balance equation // Macromol. Symp. 2016. V. 360. P. 108–122. DOI 10.1002/masy.201500108.
11. Пономарева М.А. Моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью / Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы, 2011. 159 с.
12. Ponomareva M.A., Yakutenok V.A. Simulation of mold filling by a highly viscous fluid using the 2D indirect boundary element method // Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXVIII. 2015. V. 61. P. 285–296. DOI:10.2495/BEM380231.
13. Toru Shimada, Kazushige Kato, Nobuhiro Sekino, Nobuyuki Tsuboi, Yoshio Seike, Mihoko Fukunaga, Yu Daimon, Hiroshi Hasegawa, Hiroya Asakawa. Advanced Computer Science on Internal Ballistics of Solid Rocket Motors // Trans. JSASS Aerospace Tech. Japan. 2010. V. 8. P. 29–37. DOI: 10.2322/tastj.8.Pa_29.
14. Hasegawa H., Fukunaga M., Kitagawa K., Shimada T. Burning rate anomaly of composite propellant grains // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2013. V. 49. P. 583–592 DOI: 10.1134/S0010508213050109.
15. Le Breton P., Ribereau D. Casting Process Impact on Small-Scale Solid Rocket Motor Ballistic Performance // J. Propulsion and Power. 2002. V. 18. P. 1211–1217. DOI: 10.2514/2.6055.
16. Ribereau D., Le Breton P., Ballereau S. Casting Process Effect on Composite Solid Propellant Burning Rate // AIAA 2001-3946. 2001. DOI: 10.2514/6.2001-3946.
17. Пономарева М.А., Шпрагер Г.Р., Якутенок В.А. Устойчивость плоской струи высоковязкой жидкости, натекающей на горизонтальную твердую плоскость // Механика жидкости и газа. Т. 46(1). 2011. С. 53–61.
18. Cruickshank J.O., Munson B.R. Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 221–239. DOI: 10.1017/S0022112081003467.

19. Cruickshank J.O. Low-Reynolds-number instabilities in stagnating jet flows // J. Fluid Mech. 1988. V. 193. P. 111–127. DOI: 10.1017/S0022112088002071.
20. Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р. Фонтанирующее течение вязкой жидкости при заполнении канала с учетом диссипативного разогрева // Механика жидкости и газа. 2014. Т. 49(1). С. 45–55 DOI: 10.7868/S0040357114060013.

Статья поступила 04.04.2019 г.

Borzenko E.I., Hegaj E.I. (2019) NUMERICAL INVESTIGATION OF THE RESERVOIR FILLING WITH A NEWTONIAN FLUID USING THE VOF-METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 73–86

DOI 10.17223/19988621/60/6

Keywords: filling, reservoir, viscous fluid, free surface, numerical simulation, SIMPLE algorithm, PLIC-VoF method, regimes.

In this paper, the filling of a plane reservoir, having a central rod, with a fluid under gravity is studied. The flow is described by the Navier-Stokes and continuity equations. On the solid walls, the no-slip boundary conditions are satisfied. The fluid with a fixed flow rate enters the reservoir through the channel on the top. The problem is solved numerically using the control volume method and SIMPLE procedure. The free surface location is determined using the PLIC-VOF method. Mathematical formulation of the problem includes two non-dimensional parameters, namely, the Reynolds number (Re) and the ratio of the gravity forces to the viscous forces in a fluid (W).

As a result, four regimes of the reservoir filling have been discovered. When viscous effects dominate over gravitational effects, the regime characterized by draining all-over the lateral grooves is observed, wherein the free surface completely overlaps the lateral grooves. An increase in the gravitational effects leads to the regime characterized by draining down the central rod. In this case, the fluid flows along the central rod walls, then reaches the bottom, and fills in the rest part of the reservoir. Further increase in the inertial effects gives rise to the regime characterized by draining as a jet, and, subsequently, to the regime of draining down the lateral grooves. The kinematic characteristics of the flows are presented. It is shown that in the case of draining all-over the lateral grooves, one-dimensional flow occurs in the lateral grooves and two-dimensional flow occurs in the vicinity of the central rod. In other regimes, dead zones are formed in the vicinity of the bottom. The behavior of the fluid mass distribution over the reservoir is studied. In the regime of draining fluid all-over the lateral grooves, a fountain flow is observed, and in other regimes, the portions of the fluid are distributed in parallel layers. The deformation of the fluid portions during the filling is analyzed. The diagrams illustrating the reservoir filling regimes are presented at various values of Reynolds number and parameter W .

Financial support. The research is implemented at the expanses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021).

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

HEGAJ Efim Igorevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: efim_h@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. McSherry R.J., Chua K.V., Stoesser Th. (2017) Large eddy simulation of free-surface flows. *Journal of Hydrodynamics*. 29(1). pp. 1–12. DOI: 10.1016/S1001-6058(16)60712-6.
2. Scardovelli R., Zaleski S. (1999) Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 31. pp. 567–603. DOI: 10.1146/annurev.fluid.31.1.567.
3. Nichols B.D., Hirt C.W., Hotchkiss R.S. (1980) *SOLA-VOF: a solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries*. Los Alamos Scientific Laboratory Report: LA-8355.

4. Jang W., Jilesen J., Lien F.S., Ji H. (2008) A study on the extension of a VOF/PLIC based method to a curvilinear co-ordinate system. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 22(4). pp. 241–257. DOI: 10.1080/10618560701880953.
5. Issakhov A., Zhandaulet Ye., Nogaeva A. (2018) Numerical simulation of dam break flow for various forms of the obstacle by VOF method. *International Journal of Multiphase Flow*. 109. pp. 191–206. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.08.003.
6. Hargreaves D.M., Morvan H.P., Wright N.G. (2007) Validation of the volume of fluid method for free surface calculation: the broad-crested weir. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*. 1(2). pp. 136–146. DOI: 10.1080/19942060.2007.11015188.
7. Hansch S., Lucas D., Hohne Th., Krepper E., Montoya G. (2013) Comparative simulations of free surface flows using VOF-methods and a new approach for multi-scale interfacial structures. *Proceedings of the ASME 2013 Fluids Engineering Summer Meeting*. FEDSM2013-16104. DOI: 10.1115/FEDSM2013-16104.
8. Saincher Sh., Banerjee J. (2014) A redistribution-based volume preserving PLIC-VOF technique. *Numerical Heat Transfer*. 67. pp. 338–362. DOI: 10.1080/10407790.2014.950078.
9. Yin X., Zaricos I., Karadimitriou N.K., Raoof A., Hassanizadeh S.M. (2018) Direct simulations of two-phase flow experiments of different geometry complexities using Volume-of-Fluid (VOF) method. *Chemical Engineering Science*. 195. pp. 820–827. DOI: 10.1016/j.ces.2018.10.029.
10. Karimi M., Droghetti H., Marchisio D.L. (2016) Multiscale modeling of expanding polyurethane foams via computational fluid dynamics and population balance equation. *Macromolecular Symposia*. 360. pp. 108–122. DOI: 10.1002/masy.201500108.
11. Ponomareva M.A. (2011) *Modelirovanie medlennykh techeniy vyazkoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu* [Modeling of the creeping flow of viscous fluid with a free surface]. Dissertation in Physics and Mathematics.
12. Ponomareva M.A., Yakutenok V.A. (2015) Simulation of mold filling by a highly viscous fluid using the 2D indirect boundary element method. *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXVIII*. 61. pp. 285–296. DOI: 10.2495/BEM380231.
13. Shimada T., Kato K., Sekino N., Tsuboi N., Seike Y., Fukunaga M., Daimon Y., Hasegawa H., Asakawa H. (2010) Advanced computer science on internal ballistics of solid rocket motors. *Transactions of The JSASS, Aerospace Technology Japan*. 8. pp. 29–37. DOI: 10.2322/tastj.8.Pa_29.
14. Hasegawa H., Fukunaga M., Kitagawa K., Shimada T. (2013) Burning rate anomaly of composite propellant grains. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 49. pp. 583–592 DOI: 10.1134/S0010508213050109.
15. Le Breton P., Ribereau D. (2002) Casting process impact on small-scale solid rocket motor ballistic performance. *Journal of Propulsion and Power*. 18. pp. 1211–1217. DOI: 10.2514/2.6055.
16. Ribereau D., Le Breton P., Ballereau S. (2001) Casting process effect on composite solid propellant burning rate. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 2001-3946. DOI: 10.2514/6.2001-3946.
17. Ponomareva M.A., Shrager G.R., Yakutenok V.A. (2011) Stability of a plane jet of a highly viscous fluid impinging on a horizontal solid wall. *Fluid Dynamics*. 46(1). pp. 51–58. DOI: 10.1134/S0015462811010054.
18. Cruickshank J.O., Munson B.R. (1981) Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*. 113. pp. 221–239. DOI: 10.1017/S0022112081003467.
19. Cruickshank J.O. (1988) Low-Reynolds-number instabilities in stagnating jet flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 193. pp. 111–127. DOI: 10.1017/S0022112088002071.
20. Borzenko E.I., Frolov O.Yu., Shrager G.R. (2014) Fountain viscous fluid flow during filling a channel when taking dissipative warming into account. *Fluid Dynamics*. 49(1). pp. 37–45. DOI: 10.1134/S0015462814010062.

Received: April 4, 2019

УДК 532.5; 532.72

DOI 10.17223/19988621/60/7

В.А. Демян

ОСОБЕННОСТИ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЛОЖНЫХ ПО СОСТАВУ ЖИДКОСТЕЙ В ТОНКИХ ПОЛОСТЯХ¹

При движении жидкостей по микроканалам возникают явления, наблюдающиеся только на этих масштабах. Эксперименты показывают, что парадоксы наиболее ярко начинают проявляться при движении сложных по составу жидкостей. Это могут быть молекулярные смеси, многокомпонентные расплавы металлов или коллоидные растворы. Общая особенность рассматриваемых процессов состоит в том, что при формировании массопереноса в подобных полостях решающим является фактор взаимодействия жидкости с границами. Обсуждаемые явления изначально были обнаружены экспериментально, и долгое время отсутствовало их теоретическое объяснение. В настоящее время они подробно изучены и имеют количественное описание.

Ключевые слова: *концентрационная конвекция, термодиффузия, свободная поверхность, термо- и концентрационно капиллярные эффекты, адсорбционно-десорбционные процессы.*

Тепловая конвекция в ячейке Хеле-Шоу

Исторически одной из первых геометрий в гидродинамике, которая позволила значительно сузить класс разрешенных движений при уменьшении одного из характерных размеров полости стала так называемая ячейка Хеле-Шоу. В настоящее время этот термин применяется довольно широко. В нашем случае рассматривается полость в форме прямоугольного параллелепипеда с вертикальными широкими гранями, которая подогревается снизу. Применительно к тепловой конвекции приближение Хеле-Шоу подразумевает, что толщина зазора d между широкими гранями много меньше длины l и высоты полости h . Течение в ячейке Хеле-Шоу остается трехмерным в том смысле, что поля, характеризующие конвективное движение, зависят от всех трех координат [1]. Упрощение касается только характера движения. В силу подогрева снизу в полости реализуются течения, линии тока которых лежат в плоскости широких граней. Далее представим картину движения для полости с соотношением сторон $h = 40$ мм, $l = 20$ мм, $d = 2$ мм [2, 3]. Численное моделирование проводилось двумя разными методами: конечных разностей и Галеркина – Канторовича на основе уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска [4]. Оба подхода показали хорошее согласие с экспериментом при описании ламинарно-турбулентного перехода вплоть до нерегулярных колебательных течений с весьма сложным по структуре спектром. Не вдаваясь в детали расчета, опишем последовательность возникающих течений с ростом управляющего параметра – числа Рэлея (рис. 1).

¹ Работа выполнялась под патронажем Правительства Пермского края в рамках программы финансовой поддержки научных школ «Пермская школа гидродинамики» (грант № С-26/788).

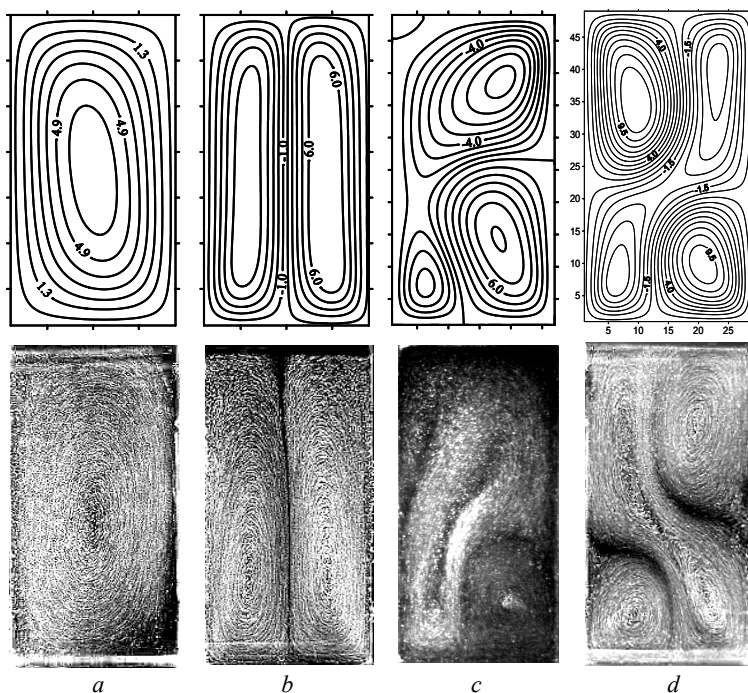


Рис. 1. Вид со стороны прозрачных широких граней: *a, b* – одновихревое и двухвихревое стационарное течение: $\Delta Ra = 0.9\text{--}1.5$, $1.5\text{--}1.9$; *c* – автоколебательный пульсационный режим: $\Delta Ra = 1.9\text{--}2.1$, *d* – регулярный автоколебательный четырехвихревой режим с перезамыканием угловых вихрей $\Delta Ra = 2.1\text{--}3.2$ [2]. Здесь ΔRa – интервал для числа Рэлея, которое было определено через полутолщину ячейки. Сверху представлены результаты расчетов, внизу – экспериментальные фотографии. Эксперимент проводился на трансформаторном масле, визуализация осуществлялась с помощью алюминиевой пудры (Бабушкин И.А. [2, 3])

Fig. 1. The view from the wide transparent boundaries: (a), (b) one- and two-vortex steady flow at $\Delta Ra = 0.9\text{--}1.5$, $1.5\text{--}1.9$, respectively, (c) self-oscillating pulsation regime at $\Delta Ra = 1.9\text{--}2.1$, and (d) regular self-oscillating four-vortex regime with reunification of corner vortices at $\Delta Ra = 2.1\text{--}3.2$ [2]. Here ΔRa is the variation interval for Rayleigh number defined on the basis of semi-thickness of a cell. The calculated results are presented on top, and the experimental photos, below. The experiment was conducted using a transformer oil. The aluminum powder was used for visualizing (Babushkin I.A. [2, 3])

Вследствие нагрева снизу сначала при малых числах Рэлея ($Ra < 0.9$) в полости имеет место состояние механического равновесия. Затем при увеличении числа Рэлея в результате потери устойчивости в жидкости устанавливается одновихревое стационарное течение (рис. 1, *a*). При определенном числе Рэлея оно опять теряет устойчивость и возникает двухвихревое течение (рис. 1, *b*). С ростом надкритичности этот режим сменяется колебательным течением в виде пульсаций углового вихря на фоне основного одновихревого течения (рис. 1, *c*). Данное автоколебательное течение характеризуется тремя основными стадиями. Сначала на фоне одновихревого течения в углу полости зарождается небольшой угловой вихрь с противоположной закруткой. Затем он начинает расти и достигает в высоту примерно 1/3 раз-

меров полости. Далее увеличение углового вихря прекращается, и он поглощается основным течением. После этого процесс повторяется. Пульсационный режим существует в довольно узком интервале чисел Рэлея. Он сменяется на более грубое по динамической классификации течение в виде колебательного четырехвихревого движения с переменным переа замыканием угловых вихрей (рис. 1, *d*). С ростом числа Рэлея ($Ra > 3.2$) спектральный состав этого течения становится все сложнее и сложнее, но визуально оно все равно выглядит примерно так же, как на рис. 1, *d*. Главной особенностью всех этих течений является то, что даже при больших значениях надкритичности, когда четырехвихревой режим с переа замыканием угловых вихрей становится нерегулярным, все равно движение с высокой степенью точности можно считать двумерным в плоскости широких граней.

Таким образом, приближение Хеле-Шоу сильно упрощает класс возможных конвективных движений и позволяет проследить за ламинарно-турбулентным переходом, не выходя за рамки приближения плоских траекторий. Тем не менее, при внимательном рассмотрении можно увидеть, что уменьшение одного из характерных размеров полости в гидродинамике до предельного состояния, когда этот размер становится много меньше двух других, далеко не всегда приводит к упрощению задачи. Более того, довольно часто это приводит к абсолютно противоположному результату. А именно, задача от этого становится кардинально сложнее.

Натекание слоев смешивающихся жидкостей в тонкой прямоугольной полости

Пусть теперь такая же полость в виде прямоугольного параллелепипеда однородна по температуре, но, по-прежнему, находится в статическом поле тяжести. Изменим постановку эксперимента и сформируем неоднородное по плотности начальное состояние иначе. Кювета в вертикальном положении наполовину заполняется некоторой жидкостью с плотностью ρ_2 , а затем поверх нее аккуратно без перемешивания наливается другая жидкость с меньшей плотностью ρ_1 и близкой по своему значению вязкостью. В результате создается двухслойная система с устойчивой стратификацией. Затем полость быстро переворачивают на широкие грани, и начинается процесс взаимного вытеснения жидкостей. Этот процесс схематически изображен на рис. 2.

Посередине штрихом на верхней и нижней широких гранях нанесены линии раздела жидкостей в начальный момент времени. Стрелки указывают направление движения фронтов вытеснения. На твердых границах полости равна нулю нормальная компонента потока вещества. Задача изотермическая, поэтому данный поток является только диффузионным, в результате чего имеем на стенках $\partial C / \partial n|_{\Gamma} = 0$. Также должно выполняться обычное для тепловой конвекции условие равенства нулю полной скорости $\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0$. В описываемых экспериментах использовались взаиморастворимые жидкости, поэтому некая граница раздела между средами задавалась только в начальный момент времени. В любой другой момент времени она естественным образом размывалась за счет диффузии и конвективного массопереноса, так что в ходе численного моделирования во всем объеме использовался метод сквозного счета. Иными словами, как таковых, граничных условий между жидкостями ставить не требовалось.

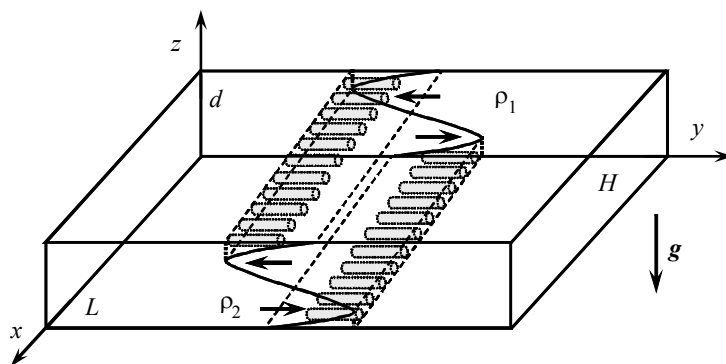


Рис. 2. Движение фронтов взаимного вытеснения жидкостей и образование валиковых концентрационно-конвективных структур в приграничных областях в результате неустойчивости Рэлея – Тэйлора

Fig. 2. The motion of the fronts of mutual displacement for a pair of fluids and the formation of roller convective structures of the component concentration near the boundaries as a result of Rayleigh – Taylor instability

Возникающие вследствие условия прилипания приграничные к горизонтальным широким граням клинообразные области являются источником конвективной неустойчивости. Это остатки старой жидкости, которые за счет условия прилипания не в состоянии оттесниться фронтом другой жидкости к торцам полости. В результате у верхней твердой грани имеем тонкий клин тяжелой жидкости над легкой, а вблизи нижней пластины, наоборот, тяжелая жидкость натекает на тонкий клин легкой. Таким образом, в пристенных областях возникает неустойчивость Рэлея – Тэйлора, порождающая систему продольных валов, характеристики которых сложным образом изменяются в пространстве и во времени.

В теории тепловой конвекции под неустойчивостью Рэлея – Тейлора понимают развитие деформаций поверхности раздела жидкостей либо газов с различными плотностями в поле тяжести, когда слой более плотной среды изначально находится над слоем менее плотной. В случае, когда в начальном состоянии поверхность раздела перпендикулярна вектору силы тяжести, любое сколь угодно малое возмущение поверхности раздела нарастает с течением времени. А именно, участки более плотной среды, оказавшиеся случайным образом ниже средней границы раздела, будут продолжать опускаться в менее плотной среде, а участки менее плотной среды, оказавшиеся выше начальной границы раздела, продолжают всплывать в более плотной среде. Такое взаимное проникновение ведет к уменьшению потенциальной энергии системы, достигающей минимума, когда слои полностью меняются местами. В результате система приходит в состояние устойчивого равновесия.

В описываемых экспериментах полость имела следующие размеры: $d = 4$ мм, $L = 24$ мм, $H = 80$ мм [5]. Оказалось, что фактически та же самая тонкая полость ($L, H \gg d$) демонстрирует качественно более сложное конвективное поведение даже в случае изотермических условий. Система уравнений концентрационной конвекции решалась численно методом конечных объемов в размерной форме в пакете OpenFOAM. Результаты прямого 3D-численного моделирования представлены на рис. 3 (тяжелая жидкость – 20 % водно-солевой раствор, легкая жидкость – чистая вода). Исходная разность плотностей в расчете и эксперименте составля-

ла $\Delta\rho = 0.02 \text{ г/см}^3$. В начальный момент времени распределение примеси моделировалось либо функцией Хевисайда, либо функцией ошибок. Остальные параметры имели такие значения: коэффициент концентрационного изменения плотности $\beta_c = 0.1$, кинематическая вязкость $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, коэффициент диффузии $D = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, температуропроводность смеси $\chi = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$.

На рис. 3 видны продольные пальцеобразные структуры, которые вытягиваются по мере продвижения фронтов. В [7] было показано, что расчетная длина волны и время зарождения концентрационно-конвективных структур в приграничных областях хорошо согласуются с экспериментом.

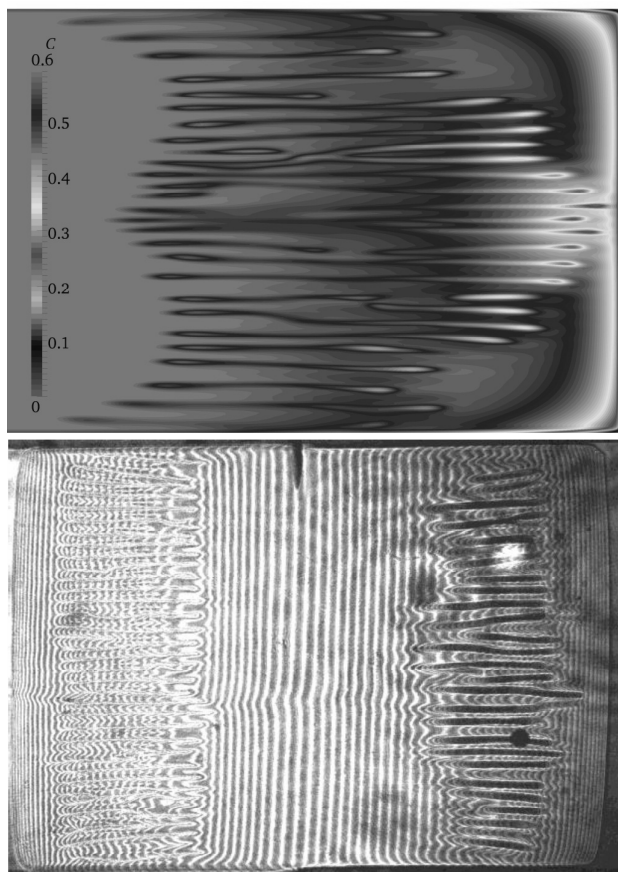


Рис. 3. Вид сверху. Вверху – теория (сечение на расстоянии 0.5 мм от верхней грани, $t = 6 \text{ с}$) [6], внизу – экспериментальная интерферограмма (Мошева Е.А., Мизев А.И. [5]). Результаты расчета показаны только для правой половины полости, масштаб по y изменен. Середина полости в эксперименте показана меткой сверху.

Fig. 3. The view from above. The top figure is the theory (a cross-section at a distance of 0.5 mm from the top boundary, $t = 6 \text{ s}$) [6], the lower figure is an experimental interferogram (Mosheva E.A., Mizev A.I. [5]). The calculated results are shown only for the right half of the cavity; the scale of y -axis is changed. The middle of the cavity is indicated with a black label on top

Процесс характеризуется определенной степенью хаотизации, что отражается на картине течения в виде появления редких дислокаций по мере удлинения концентрационно-конвективных валиков. Существенная трехмерность течения потребовала использования достаточно большого числа расчетных ячеек во всех трех измерениях 159:55:103 (x, y, z).

Можно заметить, что в опыте была взята фактически та же самая полость, но как только вблизи широких границ за счет вязкого трения сформировались крупные по площади области с неустойчивой стратификацией, так сразу картина движения во всем объеме стала чрезвычайно сложной. Неустойчивость фронта вытеснения породила эволюционирующие концентрационно-конвективные структуры во всем объеме, для адекватного описания которых сразу потребовалось трудоемкое трехмерное численное моделирование.

Термодиффузионное разделение молекулярных смесей в конвективной петле

Удивительно, но при активном взаимодействии с твердыми границами сложное временное поведение можно наблюдать даже в случае одномерного движения жидкости. Рассмотрим теперь циркуляцию двухкомпонентной молекулярной смеси в длинных по вертикали связанных каналах (рис. 4.а). Конвективная система нагревается снизу так, что на ее вертикальных границах формируется линейное распределение температуры. Первая рабочая жидкость в экспериментах (Глухов А.Ф. [8], 1992 г.) представляла собой смесь четыреххлористого углерода CCl_4 в декане $\text{C}_{10}\text{H}_{22}$. Заметим, что число Прандтля для чистого декана равно $\text{Pr} = 15$. В свою очередь четыреххлористый углерод в несущей жидкости играет роль тяжелой примеси и характеризуется положительной термодиффузией. Число Шмидта $\text{Sc} = \nu/D > 1000$. Экспериментальные данные были получены для 5–15 % растворов четыреххлористого углерода в декане. Однако термодиффузионные свойства этой смеси до сих пор детально не изучены. Повторные более поздние эксперименты [9, 10] проводились с водными растворами сульфата натрия Na_2SO_4 (тяжелая примесь). Термодиффузионные свойства этой смеси хорошо известны. Параметр разделения смеси положителен и равен $\epsilon = 0.36$, число Шмидта $\text{Sc} = 2100$. Каналы имели квадратное сечение, толщина и высота которых в экспериментах были равны $d = 3.2$ мм; $h = 50$ мм. В опытах было обнаружено, что при малых значениях разности температур в жидкости имеет место состояние механического равновесия. С ростом градиента температуры равновесие теряет устойчивость и возникают колебания, форма которых резко меняется от синусоидальной до прямоугольной при совсем небольшом увеличении надкритичности. Наблюдаемое поведение во времени подразумевает сначала длительное стационарное одномерное движение жидкости, потом довольно быструю остановку и резкое возникновение циркуляционного течения с противоположной закруткой. В настоящее время эти П-образные колебания называются перебросовыми (рис. 5). Удивительно, но далее, при еще более высоких надкритичностях, опять имеет место монотонное одномерное циркуляционное течение, которое остается устойчивым вплоть до очень больших значений теплового числа Рэлея.

Таким образом, вблизи порога устойчивости механического равновесия бинарный молекулярный раствор, характеризующийся положительной термодиффузией, ведет себя неожиданно с точки зрения теории конвективной устойчивости. Отметим дополнительно, что в случае чистых жидкостей никаких колебаний вблизи порога устойчивости механического равновесия не наблюдалось.

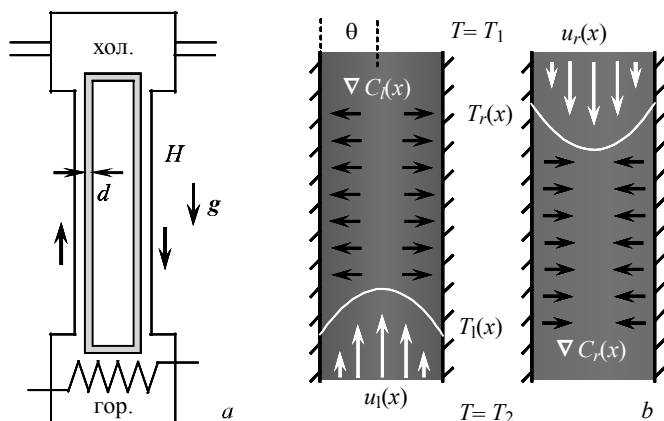


Рис. 4. Связанные каналы в медном массиве (а); схематичное представление о перераспределении компонентов смеси в процессе движения (б). Левый канал постепенно обогащается тяжелым компонентом, правый – обедняется. Черные стрелки поперек канала демонстрируют направления термодиффузионных потоков тяжелой примеси в каналах, оттенками серого показаны распределения температурных полей вследствие подъемного или опускного течения. Белые стрелки указывают направление движения в канале. Индексы r и l у полей концентрации, температуры и скорости отвечают правому и левому каналам

Fig. 4. Connected channels in a copper array (a); Schematic representation of the redistribution of mixture components during the motion (b). The left channel is gradually enriched with a heavy component, while the right one is depleted. The black arrows across the channel show the directions of the thermal diffusion fluxes of a heavy impurity in the channels; the color background demonstrates the temperature field distribution due to the upward or downward flow. The white arrows indicate the direction of motion through the channel. The indices r and l for concentration, temperature, and velocity fields correspond to the right and left channels, respectively

Объяснение подобной аномалии опять основывается на учете специфического взаимодействия движущейся жидкости с длинными вертикальными стенками каналов, вдоль которых происходит движение. При внимательном рассмотрении выяснилось, что описанные эффекты наблюдаются в каналах с высокотеплопроводными металлическими границами. В ходе прямого численного моделирования на основе уравнений термоконцентрационной конвекции [11] использовался метод, представляющий собой комбинацию методов Галеркина и конечных разностей [9, 10]. В процессе расчета влиянием горизонтальных перемычек пренебрегалось, а само движение по вертикальным каналам считалось одномерным и описывалось паузейлевым профилем (схематичное изображение, рис. 4, б).

Оказалось, что в канале с подъемным движением в поперечном сечении возникают термодиффузионные потоки тяжелого компонента к относительно более холодным боковым границам полости, в результате чего пристеночные слои обогащаются примесью. В то же время элементы жидкости, быстродвижущиеся вдоль оси канала, теряют примесь и становятся легче. Поднявшись вверх, эти элементы жидкости сначала охлаждаются, проходя мимо холодного теплообменника, а затем попадают в канал с опускным течением.

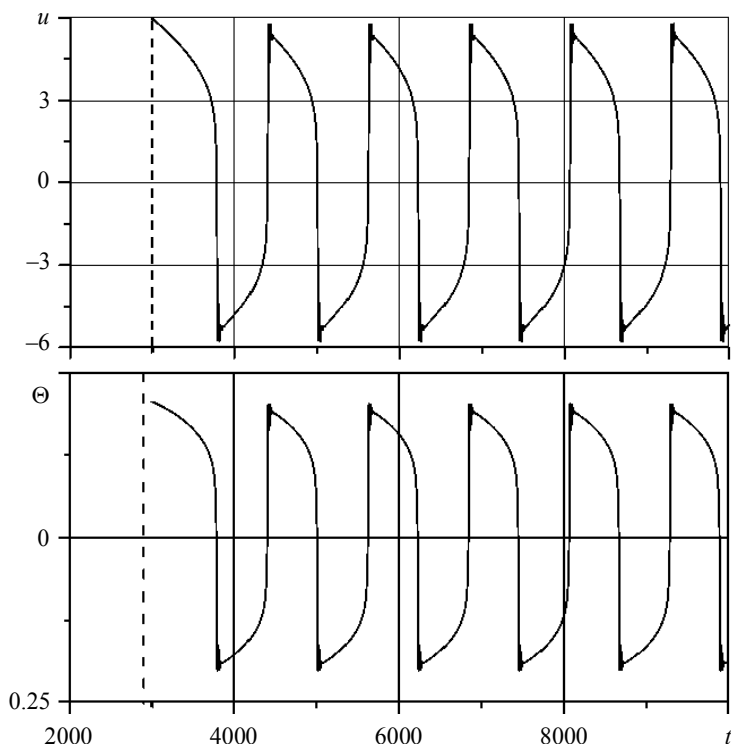


Рис. 5. Форма перебросовых колебаний в молекулярных растворах при нормальной термодиффузии. Результат численного моделирования: скорость (вверху) и температура (внизу) в середине канала как функции времени

Fig. 5. Shape of the “flop-over” oscillations in molecular solutions for the case of normal thermal diffusion. The numerical simulation results: velocity (the top figure) and temperature (the lower figure) in the middle of the channel as a function of time

В этом канале опять возникают термодиффузионные потоки в поперечном сечении, но они ориентированы в противоположном направлении от более горячих боковых стенок к оси канала. Таким образом, более холодный элемент жидкости в ходе опускного движения высасывает из пристенных слоев примесь, обогащается тяжелым компонентом и переносит его в канал с подъемным течением. В какой-то момент времени в канале с подъемным течением накапливается достаточное количество тяжелого компонента, движение останавливается и возникает течение с противоположной закруткой. Характерный горизонтальный градиент температуры, зафиксированный термопарами, равен $\theta/d = 3$ К/см (рис. 4, b). В то время как характерный вертикальный градиент температуры существенно меньше и составляет $\Theta/h = 0.3$ К/см ($\Theta = T_2 - T_1$). Время разделения смеси в горизонтальном сечении $d^2/D \sim 1$ ч, что соответствует по порядку величины времени одного переброса, а время разделения вдоль вертикали: $h^2/D \sim 100$ ч. Неоднородности концентрации, индуцируемые термодиффузией в поперечном сечении, являются следствием теплового взаимодействия с боковыми границами каналов. Таким образом, несмотря на то, что в данной задаче неоднородности плотности вызваны

другими причинами (термодиффузией), тем не менее у двух последних рассматриваемых примеров имеется некая общность в виде похожих принципов генерации гидродинамической неустойчивости. В обоих случаях существенным является взаимодействие жидкости с боковыми стенками полости. Каналы имеют малую толщину, поэтому неоднородности плотности, генерируемые вблизи твердых границ, достаточны, чтобы вызвать неустойчивость во всем объеме.

Термодиффузионное разделение феррожидкостей в конвективной петле

Как уже было отмечено выше, в работах [9, 10] была установлена ключевая роль положительной термодиффузии в бинарных молекулярных растворах при формировании специфических перебросовых колебаний в связанных каналах при подогреве снизу в области малых надкритичностей. Принципиальным здесь оказывается то, что управляющим механизмом является не термодиффузионное разделение вдоль вертикали с продольным неустойчивым распределением по плотности, которое гидродинамическая система не в состоянии породить за разумное время. В нашем случае разделение смеси идет в динамике (когда жидкость движется) за счет термодиффузионного взаимодействия смеси с длинными вертикальными стенками каналов.

Удивительно, но позднее было выявлено подобие конвективных явлений в молекулярных бинарных смесях, которые характеризуются положительной термодиффузией, и феррожидкости на основе керосина. Феррожидкость представляет собой коллоидный раствор феррочастиц нанометровых размеров в некоторой несущей среде, роль которой, как правило, играет керосин или трансформаторное масло [12]. Оказалось, что период перебросов в феррожидкости заметно превышает таковой в молекулярных бинарных растворах и не зависит от концентрации частиц для того диапазона, который имел место в опытах, а форма колебаний более П-образная. Предложенная в [13] теоретическая модель феррожидкости как коллоидного раствора со сложным носителем позволила объяснить результаты опытов. Согласно этой модели, неоднородно нагретый керосин как сложная среда разделяется вследствие термодиффузии подобно тому, как это было в молекулярных растворах. В то же время считается, что слабая седиментация феррочастиц должна порождать с ростом концентрации частиц специфическое действие в виде увеличения частоты перебросовых колебаний. С другой стороны, вязкость и, как следствие, число Прандтля тоже увеличиваются с ростом концентрации, что дает обратный эффект в виде уменьшения частоты колебаний. В результате эти два фактора компенсируют друг друга и период перебросовых колебаний при добавлении феррочастиц в несущую жидкость остается неизменным, что было зафиксировано экспериментально и подтверждено прямым численным моделированием [13]. Таким образом, в своей основе теоретическая модель, объясняющая существенно нелинейные перебросовые колебания в феррожидкости, остается прежней. А именно, причина перебросов заключается в термодиффузионном взаимодействии многокомпонентной жидкости-носителя с высокотеплопроводными стенками подогреваемой снизу конвективной петли. Дополнительные эксперименты с керосином и трансформаторным маслом без примеси феррочастиц показали наличие перебросовых колебаний в конвективной петле при малых надкритичностях, что еще раз подтвердило описанную выше теоретическую модель.

Тем не менее известно, что наночастицы в неоднородно нагретой жидкости-носителе тоже имеют свойство перемещаться под действием приложенного гра-

диента температуры. Это движение наночастиц, направленное противоположно градиенту температуры, в большинстве ситуаций имеет термофоретическую природу, но в западной литературе все равно это явление чаще всего называется термодиффузией. Эксперименты показывают, что параметр разделения для наножидкостей по величине, как правило, оказывается довольно большим. Поэтому не смотря на то, что все феррожидкости сильно отличаются друг от друга по своим свойствам, полностью игнорировать эффект термодиффузии частиц нельзя. В экспериментальной работе [14] было показано, что если взять наножидкость на основе однородной среды, то перебросовые колебания в такой смеси тоже наблюдаются. Для того чтобы отделить явления, связанные с многокомпонентностью несущей жидкости, от эффектов, порождаемых наночастицами, авторами в упомянутой выше работе [14] ферроколлоидный раствор был изготовлен на основе однородного ундекана. Период перебросов при надкритичности $\mu \approx 2$ по порядку величины оказался приблизительно равен 45 мин, т.е. заметно меньше чем в феррожидкости на основе керосина, там период составлял 1–1.5 ч. Несмотря на то, что в ундекане физической причиной разделения смеси может быть только термодиффузия наночастиц, но не термодиффузия молекулярных компонентов, схожее специфическое поведение во времени в виде П-образных колебаний убедительно свидетельствует о подобии механики процессов массопереноса в конвективной петле. А именно, эффект разделения смеси начинает проявляться только в ходе движения жидкости за счет термодиффузионного взаимодействия смеси с длинными вертикальными высокотеплопроводными стенками каналов.

Разделение расплавов металлов в кварцевых и алундовых капиллярах

Еще одним примером превалирующего влияния границ на конвективное перераспределение компонентов в сложных по составу жидких смесях является разделение жидких металлов с эвтектической диаграммой состояния в длинных капиллярах миллиметровой толщины. В исходных экспериментах [15, 16] с расплавами металлов использовались алундовые или кварцевые капилляры диаметром 0.8–1.2 мм и высотой 40–220 мм. Опыты проводились с бинарными системами Pb–Sn, Pb–Bi, Zn–Al, Al–Si, Bi–Sb, Cu–Sn. Известно, что в эвтектических системах температура солидификации меньше, чем у каждого из отдельных компонентов. Так, для расплава Pb–Sn, с которым выполнялась большая часть экспериментов, точке эвтектики соответствует 38 % свинца и 62 % олова. Бинарные расплавы приготавливались из чистых компонентов, состав которых надежно контролировался. Металлы перекладывались в открытый тигель, и при температуре, превышающей точку ликвидуса для обоих элементов на 300–400 °С, расплав механически перемешивался до однородного состояния. Сильный перегрев обеспечивал полную растворимость компонентов друг в друге и предотвращал объединение родственных атомов в кластеры. Далее расплав засасывался в обойму капилляров без нарушения продольной сплошности образцов, так что длина жидких столбиков всегда существенно превышала диаметр. Затем капилляры аккуратно герметизировались с торцов и ставились в вертикальном положении в печь при температуре выше точки плавления смеси (с перегревом приблизительно на 50 °С по сравнению с точкой эвтектики). Также для выяснения природы явления небольшая часть образцов помещалась в печь горизонтально. Через время 1–2 ч капилляры доставались из печи и немедленно охлаждались. Алундовое или кварцевое покрытие всегда легко удалялось и производилось исследование состава образцов

в продольном и поперечном сечениях. Главным результатом опытов [15, 16] стало обнаружение неожиданного эффекта в виде довольно сильного перераспределения компонентов расплава в продольном сечении образца, которое происходило только в каналах, вертикально ориентированных в печи (в горизонтальных капиллярах распределение компонентов всегда оставалось однородным в пределах погрешности эксперимента). Один из компонентов (как правило, более тяжелый) накапливался преимущественно в нижней части образца, в то время как более легкий перемещался в верхнюю часть капилляра. Разница концентраций на торцах могла достигать 10 – 20 %. Количественные данные по концентрации тяжелого компонента напоминали барометрическое распределение, поэтому в [16] было сделано заключение о седиментационной природе эффекта разделения. Тем не менее уже в работе [15] этими же авторами было отмечено, что на оседание не только отдельных атомов, но даже целых конгломератов более тяжелого компонента требуется гигантское время, измеряемое годами. Иными словами, аналитическое решение седиментационной задачи в виде барометрического распределения, хоть как-то совпадающее с экспериментальным, получается лишь в пределе $t \rightarrow \infty$.

Очевидно, что этот вывод находится в серьезном и неразрешимом противоречии со всеми наблюдениями, в ходе которых распределение, напоминающее экспоненциальное, устанавливается за характерное время равное 1–2 ч и далее практически не меняется с течением времени. Кристаллизация в обсуждаемых экспериментах производилась практически мгновенно путем закалки, в результате быстрого погружения образцов в холодную воду, и всегда в опытах фиксировалось непрерывное (гладкое) распределение тяжелого компонента по высоте, похожее на барометрическое. Иными словами, образование продольной неоднородности плотности в капилляре происходит в ходе выдержки образцов в печи, а не в момент закалки. Отсюда становится понятно, что объяснение крупномасштабного регулярного осредненного массопереноса обоих компонентов вдоль капилляра во время прогрева в печи должно основываться на законах механики сплошных сред и неравновесной термодинамики.

Позднее эти эксперименты были воспроизведены и выполнен рентгеноструктурный анализ образцов в поперечном сечении [17]. Оказалось, что измеренные в капилляре зависимости концентрации компонентов от радиальной координаты характеризуются большим разбросом данных, но демонстрируют явную тенденцию к уменьшению концентрации тяжелого компонента в направлении от оси канала к внешней границе на любой высоте среза. Процессы седиментации больших кластеров и небольших конгломератов частиц отличаются по количественным характеристикам, но ни тот, ни другой механизм, как показывают оценки, в бесконвективном приближении не могут привести к наблюдаемому в опыте специфическому распределению в поперечном сечении. Позднее разными авторами делались попытки «включить» в рассмотрение конвективный механизм переноса, но с учетом условия прилипания на боковой поверхности даже при сильном подогреве снизу интенсивность движения в каналах диаметром порядка 1 мм и длиной 50 – 200 мм оказывается ничтожно малой. С другой стороны, большинство атмосферных печей устроено так, что по нормативным характеристикам в них закладывается условие как можно более равномерного прогрева рабочего пространства. Изначально в [15, 16] как раз и предполагалось, что в рабочем пространстве печи имеет место однородное распределение температуры по вертикали. Отклонения температуры от некоторого реперного значения вдоль вертикальной координаты в

соответствии с эксплуатационными характеристиками не выходили за рамки $\pm 5^\circ\text{C}$. С точки зрения теплофизики понятно, что изменение температуры в этом интервале должно представлять собой регулярную зависимость от вертикальной координаты. И устранить эту неоднородность в атмосферной печи представляется весьма проблематичным, так как в результате установления естественной стратификации в верхней части рабочего пространства всегда образуется конвективная шапка более горячего воздуха, что всегда соответствует условиям небольшого подогрева сверху. Но в однородной по составу жидкости подогрев сверху отвечает абсолютно устойчивому состоянию [4] и гравитационная конвекция в этом случае невозможна. Тем не менее в неоднородной жидкости сгустки одной из фаз, как правило, могут существовать достаточно долго, так как характерное значение коэффициента диффузии для жидкостей очень мало, поэтому даже при подогреве сверху они все же могут оседать в более легкой несущей жидкости. Однако, если жидкость хорошо перемешана, то неоднородности концентрации оказываются незначительными и скорость разделения при оседании небольших кластеров становится настолько низкой, что включение данного фактора в модель не позволяет объяснить столь сильную концентрационную вилку на торцах капилляра.

Впервые количественное объяснение аномально быстрого и достаточно сильного разделения бинарных эвтектических расплавов в вертикальных капиллярах на основе закономерностей механики сплошных сред и неравновесной термодинамики было предложено в [18, 19]. В этих работах на основе уравнений межфазной гидродинамики [20] была построена физико-математическая модель и с ее помощью было выполнено прямое численное моделирование процессов, ответственных за крупномасштабный массоперенос компонентов смеси вдоль образца. Разработанная модель основывалась на важном экспериментальном наблюдении, согласно которому эффект разделения происходит в кварцевых или алундовых капиллярах, но не наблюдается в точно таких же по размерам каналах, границы которых изготовлены из тугоплавких металлов. Это наблюдение однозначно свидетельствует о том, что определяющим фактором в рассматриваемых процессах должно быть взаимодействие расплава со стенками капилляра.

Для количественного описания эффекта разделения смеси жидких металлов на компоненты было сделано предположение о совместном действии адсорбционно-десорбционного и термокапиллярного механизмов переноса. Как уже подчеркивалось выше, на вертикальных стенках рассматриваемого капилляра, вследствие особенностей процессов теплообмена в печи, устанавливается градиент температуры, направленный вертикально вверх. В рамках неравновесной термодинамики этот градиент температуры играет роль термодинамической силы. Считается, что в силу специфики используемого в экспериментах материала капилляра (алунда или кварцевого стекла), на вертикальных гранях имеет место условие полного несмачивания. На образованной таким образом вертикальной нагреваемой сверху границе раздела возникает температурная неоднородность поверхностной энергии, которая приводит к термокапиллярному эффекту. Дополнительно в модели потребовалось учесть эффекты адсорбции и десорбции, за счет которых поверхностно-активный компонент частично выталкивается на поверхность. Термокапиллярная сила порождает регулярное опускное движение вдоль поверхности, которое приводит к конвективному переносу поверхностно-активного компонента в том же направлении. Этот компонент накапливается в нижней части капилляра и вследствие эффекта десорбции проникает обратно в объем, после чего в меньшем количестве переносится обратно вверх слабым возвратным подъемным течением

вдоль оси канала. Расчеты показывают, что скорость подъемного течения в объеме значительно ниже, чем у опускающего движения вдоль поверхности, в результате чего тяжелый компонент постепенно аккумулируется вблизи нижнего торца.

Очевидно, что центральным пунктом в описанной выше модели является использование краевого условия полного смачивания на границах капилляра. Это положение требует физического обоснования. Действительно, алунд и кварцевое стекло специфически контактируют с жидкими металлами за счет большой разницы в энергии межчастичного взаимодействия. Известно [21], что условием хорошей смачиваемости поверхности является превосходство ван-дер-ваальсового взаимодействия твердой границы с жидкостью над силами межчастичного взаимодействия внутри самой жидкости. В результате на низкоэнергетических поверхностях, коими являются алунд и кварцевое стекло, должно наблюдаться неполное смачивание в зависимости от выбранной жидкости. Если роль жидкости играет расплав металла, то эффект несмачиваемости проявляется наиболее сильно. Это предположение косвенно подтверждается экспериментами с образцами при разной температуре выдержки в печи, в ходе которых было показано, что с ростом абсолютной температуры эффект разделения становится слабее.

В действительности в алундовых и кварцевых капиллярах на границе раздела имеет место более сложная картина, чем полное смачивание. Границы капилляров указанных материалов характеризуются определенной степенью шероховатости. Мельчайшие пузырьки газа оказываются запертыми в порах нанометровых размеров, на которых имеет место свободная поверхность. Эти поры непрерывным образом в случайном порядке покрывают всю поверхность. На таких порах возникает термокапиллярная сила, которая среднестатистически движет поверхностно-активный компонент. Теоретическое описание подобного движения возможно [22, 23], но требует специальных граничных условий, в которые должны входить характеристики смачиваемости алунда, количественные данные о геометрии пор, их распределении на поверхности и т.д. На сегодняшний день подобные данные для алунда или кварца не известны. По этой причине использовать более точные и физически обоснованные краевые условия на границе раздела между расплавом и твердой поверхностью не имеет смысла, так как подгоночных параметров в этом случае будет только больше. Таким образом, модель полной несмачиваемости на поверхности раздела расплав – твердая граница вполне приемлема для описания механики осредненного движения поверхностного слоя. Как оказалось из результатов расчета, полученная картина явления неплохо согласуется со всеми экспериментальными данными, имеющимися на сегодняшний день.

Система уравнений межфазной гидродинамики решалась методом конечных разностей. Алгоритм был разработан в соответствии с явной схемой решения уравнений в частных производных и основан на двухполевой методике [24]. В ходе расчетов использовался метод установления. Компьютерный код был реализован на языке программирования FORTRAN-90. Система уравнений решалась на суперкомпьютере «ПГУ–Тесла» Научно-образовательного центра Пермского государственного национального исследовательского университета «Параллельные и распределенные вычисления». При проведении численного моделирования осуществлялась периодическая запись искомых полей на диск, что позволяло количественно анализировать структуру полей и эффект разделения в каждый момент времени.

Сначала расчеты были проведены для плоского канала с учетом только термокапиллярной силы на свободной поверхности и адсорбционно-десорбционного

обмена поверхностно-активным компонентом между объемом и поверхностью [22]. Затем модель была усложнена путем добавления в уравнения концентрационно-капиллярного механизма [23]. Наиболее приближенные к эксперименту результаты расчета для цилиндрического капилляра с учетом всех вышеперечисленных факторов в случае осесимметричной постановки были получены в работе [25]. Пример расчета полей концентрации, функции тока и температуры для цилиндрического канала приведен на рис. 6.

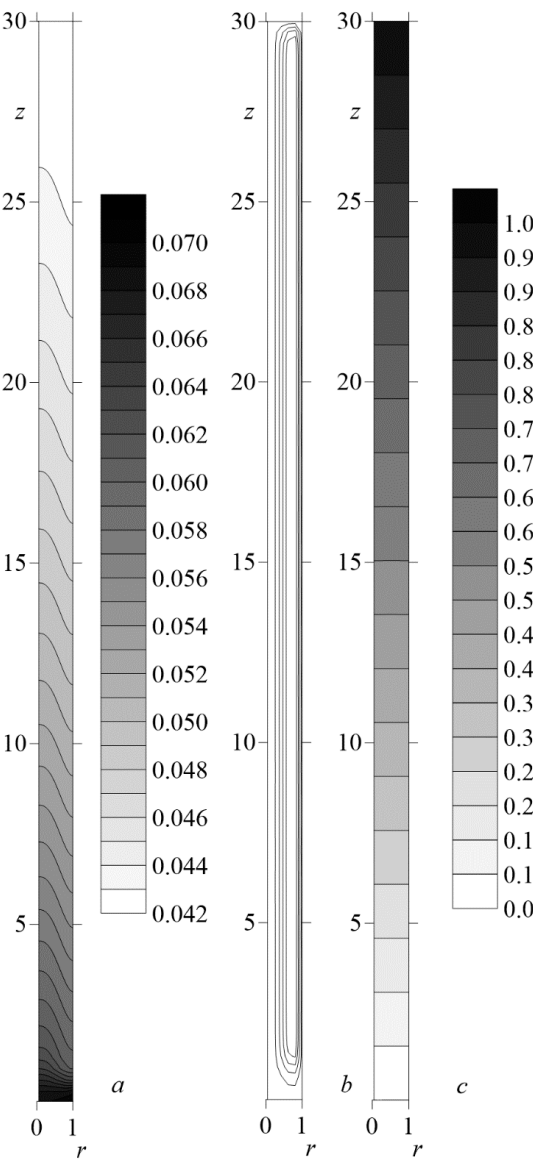


Рис. 6. Поля объемной концентрации (а), функции тока (b) и температуры (с) в момент времени $t = 10^4$ (время измерялось в вязких единицах, r – радиальная координата). Безразмерные параметры имели следующие значения: $Ra_T = 0.015$, $Ra_C = 0.05$ (тепловое и концентрационное числа Рэлея), $k_+ = 2 \cdot 10^{-5}$, $k_- = 6 \cdot 10^{-3}$ (параметры адсорбции и десорбции), $Sc = 300$, $Sc_s = 180$ (объемное и поверхностное числа Шмидта), $Ma_T = 0.8$, $Ma_r = 0.4$ (тепловое и концентрационное числа Марангони), $Pr = 0.045$ (число Прандтля), $H = 30$ (безразмерная высота канала), Демин В.А., Петухов М.И., 2018

Fig. 6. The fields of (a) volume concentration, (b) stream function, and (c) temperature at the time instant of $t = 10^4$ (the time is measured in terms of viscous units, r is the radial coordinate). Non-dimensional parameters are specified as follows: $Ra_T = 0.015$, $Ra_C = 0.05$ (the thermal and concentration Rayleigh numbers), $k_+ = 2 \cdot 10^{-5}$, $k_- = 6 \cdot 10^{-3}$ (the parameters of adsorption and desorption), $Sc = 300$, $Sc_s = 180$ (the volume and surface Schmidt numbers), $Ma_T = 0.8$, $Ma_r = 0.4$ (the thermal and concentration Marangoni numbers), $Pr = 0.045$ (the Prandtl number), $H = 30$ (the non-dimensional height of the channel), Demin V.A., Petukhov M.I., 2018

Следует отметить, что численное моделирование выполнялось для реальных значений материальных параметров, и оно показало, что в процессе разделения устанавливается ожидаемый перепад концентрации компонентов ($\sim 20\%$) и это хорошо согласуется с экспериментальными данными [15, 16]. Также из рис. 6 видно, что конвективный перенос порождается приповерхностными силами, но охватывает, в конечном счете, весь капилляр. Как и в экспериментах, наиболее сильные неоднородности концентрации формируются в нижней части капилляра, где накапливается тяжелый компонент смеси. Данный эффект объясняется тем, что опускное течение вдоль поверхности относительно быстро конвективно перемещает примесь к нижнему торцу капилляра, а затем за счет десорбции она возвращается обратно в объем. Особенно хорошо согласуется с экспериментом продольное распределение объемной концентрации, которое практически является экспоненциальным за исключением торцов капилляра, на которых ставились модельные граничные условия. Термокапиллярная сила генерирует опускное течение на свободной поверхности, в то время как концентрационно-капиллярный механизм является скорее вторичным. Действуя в противоположном направлении, концентрационно-капиллярная сила вносит существенный позитивный вклад в распределение концентрации в объеме, делая его менее градиентным. Распределение приобретает более гладкий, «барометрический» вид, что хорошо согласуется с опытом. Характерная «концентрационная вилка» для максимума и минимума концентраций в объеме, иллюстрирующая процесс разделения смеси в зависимости от времени изображена на рис. 7.

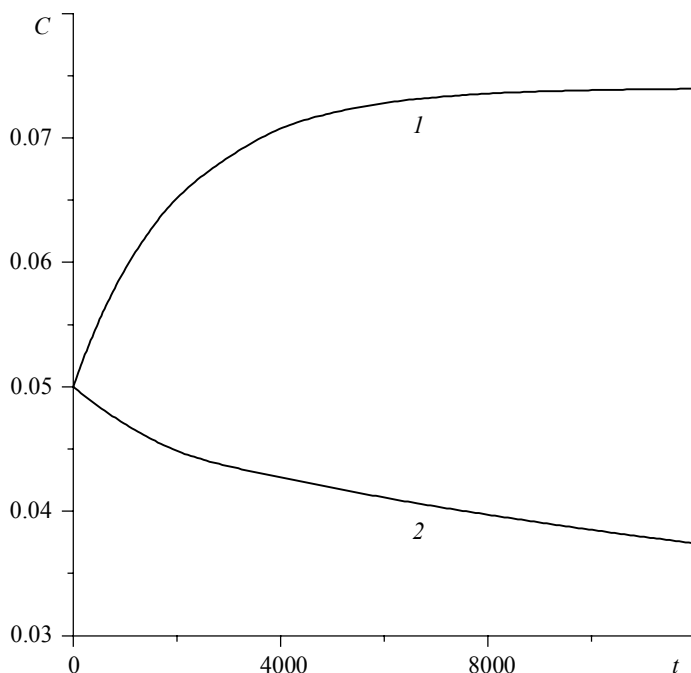


Рис. 7. Максимальное (1) и минимальное (2) значения поля объемной концентрации в зависимости от времени

Fig. 7. (1) Maximum and (2) minimum values of the field of volume concentration versus time

Полученный результат качественно и количественно повторяет подобные зависимости, представленные в [15, 16]. При достижении момента времени порядка 12000 безразмерных единиц (примерно 1 ч при переходе к размерным единицам) система практически полностью выходит на стационарный режим. Заметим, что окончательный профиль функции тока, а также профиль поверхностной концентрации формируются гораздо быстрее, чем профиль объемной концентрации.

Еще одним убедительным аргументом в пользу разработанной теории является объяснение и расчет эксперимента, результаты которого ранее казались вообще необъяснимыми. Один из опытов показал, что в результате высокотемпературного разделения бинарного расплава алюминий – кремний в вертикальном канале тяжелый компонент (кремний) может перераспределиться в верхнюю часть капилляра, а более легкий (алюминий), – наоборот, в нижнюю. Изначально казалось, что здесь нет никакого противоречия, так как в твердом состоянии алюминий имеет большую плотность, нежели кремний.

Однако в расплавленном состоянии при выдержке в печи выше точки ликвидуса уже кремний становится более тяжелым, и именно в это время происходит постепенное разделение смеси на компоненты. Таким образом, в расплавленном состоянии более тяжелый компонент накапливается в верхней части капилляра, что является неустойчивым состоянием с точки зрения теории конвективной устойчивости. Это как если бы в поле тяжести математический маятник постепенно стремился бы занять перевернутое вертикальное положение. Оказалось, что в зависимости от того, какой компонент является поверхностно-активным, уравнения межфазной гидродинамики вполне допускают и такое аномальное, на первый взгляд, распределение вещества по плотности [26]. Как было подтверждено в этой работе, движущей силой, отвечающей за стратификацию в рассматриваемом классе задач, является не сила тяжести, а термокапиллярный механизм, который работает вдоль несмачиваемой поверхности канала в противоположном направлении к вектору ускорения свободного падения. Описанные эффекты оказываются заметными только в тонких капиллярах диаметром порядка 1 мм. При увеличении диаметра канала количество поверхностно-активного компонента на поверхности становится несущественным по отношению к общей массе вещества в объеме и взаимодействие с границами полости приобретает вторичный характер по отношению к объемным силам.

Выводы

Обобщая приведенные выше данные по движению жидкостей в тонких каналах, можно сделать некоторое заключение. Оно касается общих причин возникновения конвективной неустойчивости при движении сложных по составу жидкостей в тонких полостях и каналах, несмотря на различие в природе взаимодействия смесей с границами полости. Как было продемонстрировано в обзоре, это могут быть вязкие касательные напряжения на твердой широкой границе, термодиффузионные потоки в неоднородных по составу жидкостях, направленные к границам высокой теплопроводности или адсорбционно-десорбционные явления вблизи свободной границы. Иными словами, вне зависимости от типа взаимодействия жидкости с границами, как только количество жидкости, участвующее во взаимодействии с границей, становится сравнимым с полным объемом жидкости и условия эксперимента порождают ту или иную неустойчивость, так сразу следует ожидать возникновение каких-то особенностей в гидродинамическом пове-

дении. Подобное поведение может наблюдаться только в полостях, когда один из характерных размеров несопоставимо меньше двух других, притом, что сама гидродинамическая система остается макроскопической.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Д.В., Путин Г.Ф., Чернатынский В.И. О конвективных движениях в ячейке Хеле–Шоу // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 3. С. 554–556.
2. Бабушкин И.А., Демин В.А. Экспериментальное и теоретическое исследование переходных конвективных режимов в ячейке Хеле–Шоу // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 3. С. 3–9.
3. Бабушкин И.А., Глазкин И.В., Демин В.А., Платонова А.Н., Путин Г.Ф. Об изменчивости одного типичного течения в ячейке Хеле–Шоу // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 5. С. 3–14.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. Mizev A., Mosheva E., Kostarev K., Demin V., Popov E. Stability of solutal advective flow in a horizontal shallow layer // Phys. Rev. Fluids. 2017. V. 2(10). P. 103903.
6. Демин В.А., Попов Е.А. Конвективная неустойчивость вблизи границы раздела между встречными потоками взаиморастворимых жидкостей // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С. 115–128.
7. Попов Е.А. Трехмерные конвективные эффекты в узких полостях: канд. дис. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2014. 141 с.
8. Глухов А.Ф. Экспериментальное исследование тепловой конвекции в условиях гравитационного расслоения: канд. дис. Пермь: Перм. гос. ун-т, 1995. 140 с.
9. Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. Конвекция бинарной смеси в связанных каналах при подогреве снизу // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 2. С. 13–23.
10. Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. Разделение смесей и тепломассоперенос в связанных каналах // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 17. С. 45–51.
11. Шапошников И.Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси // Прикладная математика и механика. 1953. Т. 17. Вып. 5. С. 604–606.
12. Такетоми С., Тикадзуми С. Магнитные жидкости. М.: Мир, 1993. 272 с.
13. Глухов А.Ф., Демин В.А., Попов Е.А. Тепловая конвекция магнитной наносuspension в узких каналах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 1. С. 41–51.
14. Глухов А.Ф., Сидоров А.С., Арефьев И.М., Ладейщикова В.В., Шматко Н.Ю. О конвективных свойствах магнитной жидкости на основе ундекана // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. Вып. Т. 4(42). С. 19–24. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-4-19-24.
15. Гаврилин И.В., Фролова Т.Б., Захаров В.П. О ликвации в жидких эвтектических расплавах // Изв. АН СССР. Металлы. 1984. № 3. С. 191–193.
16. Гаврилин И.В. Седиментационный эксперимент при изучении жидких сплавов // Изв. АН СССР. Металлы. 1985. № 2. С. 66–73.
17. Углев Н.П., Дубровина Е.И. Радиальное распределение компонентов при расслоении металлических расплавов в капиллярах // Вестник ПНИПУ. Сер. Химическая технология и биотехнология. 2015. № 1. С. 50–59.
18. Демин В.А., Петухов М.И. К вопросу о механизме крупномасштабного переноса компонентов металлических расплавов в неоднородно нагретых тонких капиллярах // Вестник Пермского университета. Физика. 2016. Вып. 3 (34). С. 65–71. DOI: 10.17072/1994-3598-2016-3-65-71.
19. Демин В.А., Петухов М.И. Крупномасштабный перенос компонентов металлических расплавов в тонких капиллярах // Вестник Томского университета. Математика и механика. 2017. № 48. С. 57–69. DOI: 10.17223/19988621/48/6.
20. Братухин Ю.К., Макаров С.О. Гидродинамическая устойчивость межфазных поверхностей. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2005. 240 с.
21. De Gennes P.G. Wetting: statics and dynamics // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 827–863.

22. Mongruel A., Chastel Th., Asmolv E.S., Vinogradova O.I. Effective hydrodynamic boundary conditions for microtextured surfaces // *Phys. Rev. E. Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics. American Phys. Society.* 2013. V. 87. P. 011002(R), DOI: 10.1103/PhysRevE.87.011002.
23. Vinogradova O.I., Yakubov G.E. Surface roughness and hydrodynamic boundary conditions // *Phys. Rev. E. – Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics. American Phys. Society.* 2006. V. 73. P. 045302(R), DOI: 10.1103/PhysRevE.73.045302.
24. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции: учеб. пособие. Иркутск: изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.
25. Демин В.А., Мизев А.И., Петухов М.И. Сепарация бинарных сплавов в тонких капиллярах // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2018. Т. 11. № 2. С. 125–136. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.2.10.
26. Демин В.А., Мизев А.И., Петухов М.И., Шмыров А.В. О необычном поведении расплава Al – Si в тонких капиллярах // *Вестник Пермского университета. Физика.* 2018. № 1 (39). С. 26–35. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-1-26-35.

Статья поступила 09.01.2019 г.

Demin V.A. (2019) THE FEATURES OF THE CONVECTIVE FLOWS OF MULTICOMPONENT FLUIDS IN THIN CAVITIES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 87–106

DOI 10.17223/19988621/60/7

Keywords: concentration-induced convection, thermal diffusion, free surface, thermo- and concentration-capillary effects, adsorption and desorption processes.

It is known that the specific hydrodynamic phenomena take place during the fluid motion through micro-channels. These effects can be observed only at a microscale level. However, the boundary between microfluidic effects and macroscopic hydrodynamic phenomena is indecipherable. It is quite difficult to predict a real behavior of hydrodynamic system in the case of gradual change in the cavity proportions due to decrease in the size in one of the directions. The problem is to determine the main physical aspects that define the heat and mass transfer under given conditions. The conducted experiments show that the hydrodynamic paradoxes occurring in thin cavities and channels become evident during the motion of multicomponent fluids. These flows can be represented as a multicomponent molecular solution flow through non-uniformly heated thin connected channels, a binary metal melt flow in a capillary with non-wettable boundaries, and a ferrocolloid flow in a convective loop. Sometimes the fluidic media demonstrate unexpected behavior as a result of viscous interaction with solid boundaries during the mixing of initially homogeneous fluids. It is worth emphasizing that anomalous behavior takes place in thin cavities and channels even when their dimensions are macroscopic. The common feature of the considered processes is that the fluid interaction with the cavity boundaries has a great effect on the heat and mass transfer. All the described hydrodynamic phenomena have been found experimentally, and many of them had no explanation for a long time. Currently, these processes with multicomponent fluids involved have been studied in details and have a quantitative description. It is possible to combine the theoretical and experimental results, and to understand these phenomena clearly.

Financial support. The work was carried out under the patronage of the Perm Region Government under the program of financial support for the Scientific Schools “Perm School of Hydrodynamics” (Grant No. C-26/788).

DEMIN Vitaliy Anatol'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: demin@psu.ru

REFERENCES

1. Lyubimov D.V., Putin G.F., Chernatynskiy V.I. (1977) O konvektivnykh dvizheniyakh v yacheyshe Khele-Shou [On convective motion in a Hele-Shaw cell]. *Doklady AN USSR*. 235(3). pp. 554–556.
2. Babushkin I.A., Demin V.A. (2006) Experimental and theoretical investigation of transient convective regimes in a Hele-Shaw cell. *Fluid Dynamics*. 41(3). pp. 323–329. DOI: 10.1007/s10697-006-0047-6.
3. Babushkin I.A., Glazkin I.V., Demin V.A., Platonova A.N., Putin G.F. (2009) Variability of a typical flow in a Hele-Shaw cell. *Fluid Dynamics*. 44(5). pp. 631–640. DOI: 10.1134/S0015462809050019.
4. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. (1976) *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Jerusalem: Keter Publishing House.
5. Mizev A., Mosheva E., Kostarev K., Demin V., Popov E. (2017) Stability of solutal advective flow in a horizontal shallow layer. *Physical Review Fluids*. 2(10). 103903. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.2.103903.
6. Demin V.A., Popov E.A. (2015) Convective instability near the interface between counter propagating fluxes of inter-soluble liquids. *Mathematical models and computer simulations*. 7(5). pp. 485–494. DOI: 10.1134/S2070048215050038.
7. Popov E.A. (2014) *Trekhmernye konvektivnye efekty v uzkiykh polostyakh* [Three-dimensional convective effects in thin cavities]. Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics. Perm: Perm State University.
8. Glukhov A.F. (1995) *Eksperimental'noe issledovanie teplovoy konveksii v usloviyakh gravitatsionnogo rassloeniya* [Experimental study of thermal convection under conditions of a gravitational stratification]. Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics. Perm: Perm State University.
9. Glukhov A.F., Demin V.A., Putin G.F. (2007) Binary-mixture convection in connected channels heated from below. *Fluid Dynamics*. 42(2). pp. 160–169. DOI: 10.1134/S0015462807020020.
10. Glukhov A.F., Demin V.A., Putin G.F. (2008) Separation of mixtures, heat and mass transfer in connected channels. *Technical Physics Letters*. 34(9). pp. 747–749. DOI: 10.1134/S1063785008090083.
11. Shaposhnikov I.G. (1953) K teorii konvektivnykh yavleniy v binarnoy smesi [On theory of convective phenomena in a binary mixture]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 17(5). pp. 604–606.
12. Taketomi S., Tikadzuki S. (1993) *Magnitnye zhidkosti* [Magnetic fluids]. Moscow: Mir.
13. Glukhov A.F., Demin V.A., Popov E.A. (2013) Thermal magnetic nanosuspension convection in narrow channels. *Fluid Dynamics*. 48(1). pp. 36–45. DOI: 10.1134/S0015462813010055.
14. Glukhov A.F., Sidorov A.S., Aref'ev I.M., Ladeyshchikova V.V., Shmatko N.Yu. (2018) O konvektivnykh svoystvakh magnitnoy zhidkosti na osnove undekana [Convective properties of a magnetic fluid based on undecane]. *Vestnik Permskogo universiteta. Fizika – Bulletin of Perm University. Physics*. 4(42). pp. 19–24. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-4-19-24.
15. Gavrilin I.V., Frolova T.B., Zakharov V.P. (1984) O likvatsii v zhidkikh evtekticheskikh rasplavakh [On segregation in liquid eutectic melts]. *Izvestiya AN SSSR. Metall.* 3. pp. 191–193.
16. Gavrilin I.V. (1985) Sedimentatsionnyy eksperiment pri izuchenii zhidkikh splavov [Sedimentation experiment in the study of liquid alloys]. *Izvestiya AN SSSR. Metall.* 2. pp. 66–73.
17. Uglev N.P., Dubrovina E.I. (2015) Radial'noe raspredelenie komponentov pri rassloenii metallicheskiy rasplavov v kapillyarakh [Radial distribution of components at the separation of metal melts in the capillaries]. *Vestnik PNIPU. Khimicheskaya tekhnologiya i biotekhnologiya*. 1. pp. 50–59.
18. Demin V.A., Petukhov M.I. (2016) K voprosu o mekhanizme krupnomasshtabnogo perenosa komponentov metallicheskiy rasplavov v neodnorodno nagretykh tonkikh kapillyarakh [On mechanism of large-scale transfer of molten metal components in non-uniformly heated thin capillaries]. *Vestnik Permskogo universiteta. Fizika – Bulletin of Perm University. Physics*. 3(34). pp. 65–71. DOI: 10.17072/1994-3598-2016-3-65-71.

19. Demin V.A., Petukhov M.I. (2017) Krupnomasshtabnyy perenos komponentov metallicheskikh rasplavov v tonkikh kapillyarakh [Large-scale transfer of molten metal components in thin capillaries]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 57–69. DOI: 10.17223/19988621/48/6.
20. Bratukhin Yu.K., Makarov S.O. (2005) *Gidrodinamicheskaya ustoychivost' mezhfaznykh poverkhnostey* [Hydrodynamic stability of interphases]. Perm: Perm State University Publishing.
21. De Gennes P.G. (1985) Wetting: statics and dynamics. *Reviews of Modern Physics*. 57. pp. 827–863. DOI: 10.1103/RevModPhys.57.827.
22. Mongruel A., Chastel Th., Asmolov E.S., Vinogradova O.I. (2013) Effective hydrodynamic boundary conditions for microtextured surfaces. *Physical Review. E. Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*. 87. 011002(R). DOI: 10.1103/PhysRevE.87.011002.
23. Vinogradova O.I., Yakubov G.E. (2006) Surface roughness and hydrodynamic boundary conditions. *Physical Review. E. Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*. 73. 045302(R). DOI: 10.1103/PhysRevE.73.045302.
24. Tarunin E.L. (1990) *Vychislitel'nyy eksperiment v zadachakh svobodnoy konveksii: uchebnoe posobie* [Numerical experiment in the problems of free convection: a text book]. Irkutsk: Izdatel'stvo Irkutskogo universiteta.
25. Demin V.A., Mizev A.I., Petukhov M.I. (2018) Separatsiya binarnykh splavov v tonkikh kapillyarakh [Binary alloys separation in thin capillaries]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational continuum mechanics*. 11(2). pp. 125–136. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.2.10.
26. Demin V.A., Mizev A.I., Petukhov M.I., Shmyrov A.V. (2018) O neobychnom povedenii raspplava Al – Si v tonkikh kapillyarakh [On an unusual behavior of the melt Al–Si in thin capillaries]. *Vestnik Permskogo universiteta. Fizika – Bulletin of Perm University. Physics*. 1(39). pp. 26–35. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-1-26-35.

Received: January 9, 2019

УДК 532.5.031

DOI 10.17223/19988621/60/8

А.В. Мерзляков, Е.А. Крюкова

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ СОСУДЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЕРЕГОРОДКОЙ

Исследование направлено на определение формы свободной поверхности идеальной жидкости, колеблющейся под действием силы тяжести в прямоугольном сосуде, разделенном горизонтальной проницаемой перегородкой. Решение задачи проведено в плоской постановке аналитическим путем. Для определения формы свободной поверхности решалось уравнение Лапласа для потенциала скорости идеальной жидкости методом разделения переменных в обеих частях сосуда. Полученные результаты сравнивались с имеющимися в настоящее время решениями подобных задач.

Ключевые слова: идеальная жидкость, потенциал скорости, перегородка, уравнение Лапласа, метод разделения переменных.

Задача о движении жидкости является актуальной во многих областях человеческой деятельности, таких, как судостроение, океанология, гидравлика. Часто при решении практических задач достаточно использовать приближение идеальной жидкости. Это касается чаще всего движения жидкости в больших емкостях.

Для длительного хранения и транспортировки больших объемов жидкости используются баки, содержащие горизонтальные и вертикальные перегородки, оказывающие значительное влияние на ее движение. Потребности изготовления таких баков требуют знания характеристик этого движения.

К настоящему времени опубликовано достаточно много работ, в которых исследуются вопросы движения жидкости в сосудах с перегородками (например, [1 – 8]). В большинстве этих работ рассматриваются вопросы, связанные с частотой колебаний жидкости в сосудах. Для практических целей, однако, гораздо важнее знать (хотя бы приближенно) общую картину поведения жидкости в сосуде и прежде всего, – как меняется со временем форма ее свободной поверхности

В данной работе рассматривается один из возможных случаев движения идеальной жидкости в сосуде с перегородками – колебательное движение под действием силы тяжести. Задача решается аналитически в линейном приближении. За основу был взят подход, изложенный в работе [1]. Результатом работы является форма свободной поверхности жидкости в сосуде в различные моменты времени.

Математическая постановка задачи

Движение идеальной несжимаемой жидкости в плоском случае описывается уравнениями Эйлера (см. [9]):

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

где v_x и v_y – проекции вектора скорости жидкости на оси декартовой системы координат; X и Y – проекции внешних сил на оси Ox , Oy соответственно; P – давление, ρ – плотность, t – время.

В силу потенциальности движения идеальной жидкости можно ввести потенциал скорости жидкости φ , для которого $\vec{v} = \nabla\varphi$. Тогда вместо уравнений Эйлера для описания движения жидкости можно использовать уравнение Лапласа для потенциала φ :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Граничные условия для него:

- на твердой стенке – условие непротекания:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

(n – направление нормали к границе);

- на свободной поверхности – интеграл Коши – Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Pi = f(t),$$

где Π – потенциал внешних сил, действующих на жидкость, $f(t)$ – произвольная функция времени.

Рассмотрим движение идеальной жидкости в прямоугольном сосуде шириной a и глубиной c , в котором находится горизонтальная проницаемая перегородка на высоте b от дна (см. рис. 1).

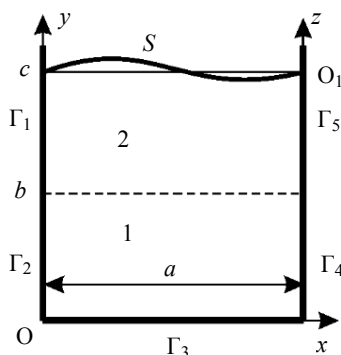


Рис. 1. Расчетная область задачи
Fig. 1. Computational domain of the problem

Перегородка разделяет сосуд на две расчетные области: 1 и 2. Движение жидкости в каждой области будет определяться путем решения уравнение Лапласа (1) для потенциала скорости в этой области.

Для области 1 уравнение Лапласа записывается так:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия для него:

- на твердых границах Γ_2 и Γ_4 – условия непротекания $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0$,
- на твердой границе Γ_3 – условие непротекания $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$.

Для области 2 уравнение Лапласа следующее:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Граничными условиями для него являются:

- на твердых границах Γ_1 и Γ_5 – условия непротекания $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0$.

На свободной поверхности в качестве граничного условия ставится интеграл Коши – Лагранжа со следующими дополнениями. Единственной массовой силой, действующей на жидкость, является сила тяжести. Если ввести величину z - отклонение точки свободной поверхности от равновесного положения (соответствующая координата представлена на рис. 1), то потенциал силы тяжести, действующей на единицу массы, определяется формулой: $\Pi = gz$, где g – ускорение свободного падения.

При решении поставленной задачи предполагается, что отклонение свободной поверхности жидкости от положения равновесия настолько мало, что область, занятая жидкостью, сохраняет прямоугольную форму. Из-за этого в формуле можно пренебречь квадратами скоростей. Считается, что давление над поверхностью жидкости P является постоянной величиной, поэтому соответствующее слагаемое можно включить в потенциал. Произвольную функцию $f(t)$ можно сделать равной 0. Поэтому граничное условие на свободной поверхности примет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + gz = 0. \quad (4)$$

На проницаемой перегородке в обеих областях ставятся условия для потока жидкости через перегородку в форме, выведенной в работе [10]: нормальная скорость жидкости вблизи перегородки пропорциональна разности значений потенциалов скорости жидкости по обе стороны от перегородки. Для области (1) это условие выглядит так:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{y=b} = q(\varphi_2 - \varphi_1)|_{y=b}. \quad (5)$$

Для области (2):

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{y=b} = q(\varphi_2 - \varphi_1)|_{y=b}. \quad (6)$$

Здесь q – проницаемость перегородки для жидкости.

В качестве начальных условий задачи задаются начальная форма свободной поверхности и начальная скорость точек свободной поверхности. Начальная форма свободной поверхности в рассматриваемой задаче считается некоторой функцией от координаты x , т.е.

$$z(t, x)|_{t=0} = \zeta(x). \quad (7)$$

Начальная скорость точек свободной поверхности жидкости считается равной нулю, т.е.

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{y=c, t=0} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0, t=0} = 0. \quad (8)$$

Метод решения

В области 1 уравнение Лапласа (2) решается методом разделения переменных (см. [11]), согласно которому потенциал вектора скорости представляется в виде следующего произведения:

$$\varphi_1 = T_1(t) \cdot X_1(x) \cdot Y_1(y),$$

где $T_1(t)$ – функция, зависящая только от времени, $X_1(x)$ – только от координаты x , $Y_1(y)$ – только от координаты y .

После подстановки этого произведения в уравнение (2), уравнение принимает следующий вид:

$$T_1 X_1'' Y_1 + T_1 X_1 Y_1'' = 0.$$

Деление этого уравнения на произведение TX_1Y_1 приводит его к следующему виду:

$$\frac{X_1''}{X_1} = -\frac{Y_1''}{Y_1} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – некоторое положительное число.

Из данного равенства получаются дифференциальные уравнения для определения функций X_1 и Y_1 .

Уравнение для X_1 – задача Штурма – Лиувилля – сводится к следующему:

$$X_1'' + \lambda^2 X_1 = 0.$$

Решение данного уравнения выглядит так:

$$X_1 = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x).$$

Постоянные A и B определяются из граничных условий, которые заданы на границах Γ_2 и Γ_4 . Согласно им,

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = X_1'(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=a} = X_1'(a) = 0.$$

Из первого условия следует $B_1 = 0$; из второго условия – $\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$, где n – целое число. Поэтому выражение для функции X_1 – собственная функция задачи Штурма – Лиувилля – выглядит так:

$$X_{1n} = \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Уравнение для Y_1 сводится к следующему:

$$Y_1'' - \lambda^2 Y_1 = 0.$$

Решение данного уравнения

$$Y_1 = C_1 \operatorname{ch}(\lambda y) + D_1 \operatorname{sh}(\lambda y).$$

Согласно граничному условию на границе Γ_3

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{y=0} = Y_1'(0) = 0.$$

Из этого условия следует $D_1=0$. Поэтому выражение для функции Y

$$Y_{1n} = \text{ch}(\lambda_n y) = \text{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right).$$

Таким образом, для произвольно заданного натурального номера n решение уравнения Лапласа будет выглядеть так:

$$\varphi_{1n} = T_{1n}(t) \text{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right),$$

а общее решение – так:

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{1n}(t) \text{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

В области 2 уравнение Лапласа (3) решается также методом разделения переменных, согласно которому потенциал вектора скорости представляется в виде следующего произведения:

$$\varphi_2 = T_2(t) \cdot X_2(x) \cdot Y_2(y),$$

где $T_2(t)$ – функция, зависящая только от времени, $X_2(x)$ – только от координаты x , $Y_2(y)$ – только от координаты y .

Преобразования, аналогичные вышеописанным, приводят уравнение (3) к следующему виду:

$$\frac{X_2''}{X_2} = -\frac{Y_2''}{Y_2} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – некоторое положительное число.

Уравнение для X_2 – задача Штурма – Лиувилля – получается точно такой же, как в области 1:

$$X_2'' + \lambda^2 X_2 = 0.$$

Уравнение совпадает с аналогичным уравнением для области 1, граничные условия для него – такие же из-за равенства ширины областей. Поэтому и решение данного уравнения выглядит точно также:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}; \quad X_{2n} = \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Уравнение для Y_2 сводится к следующему:

$$Y_2'' - \lambda^2 Y_2 = 0.$$

Решение данного уравнения выглядит так:

$$Y_2 = A_2 \text{ch}(\lambda y) + B_2 \text{sh}(\lambda y).$$

Таким образом, для произвольно заданного натурального номера n решение уравнения Лапласа будет выглядеть так:

$$\varphi_{2n} = T_{2n}(t) \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right),$$

а общее решение – так:

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n}(t) \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right).$$

Для определения постоянных A_{2n} и B_{2n} и функций T_{1n} и T_{2n} необходимо воспользоваться граничными условиями на перегородке (5) и (6). Подстановка выражений для φ_1 и φ_2 в эти условия и подстановка значения координаты у перегородки приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} T_{1n} \frac{\pi n}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right) = \\ & = q \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{2n} \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) - T_{1n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right] \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right), \\ & \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n} \frac{\pi n}{a} \left(A_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right) = \\ & = q \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{2n} \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) - T_{1n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right] \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right). \end{aligned}$$

Если перенести все слагаемые в каждом уравнении в одну сторону, объединить их одинаковым суммированием, вынести общие множители (косинусы) и приравнять коэффициенты при них нулю, получатся следующие уравнения для определения функций T_{1n} и T_{2n} :

$$\begin{aligned} T_{1n} \frac{\pi n}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) &= q \left[T_{2n} \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) - T_{1n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right], \\ T_{2n} \frac{\pi n}{a} \left(A_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) &= \\ &= q \left[T_{2n} \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) - T_{1n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right]. \end{aligned}$$

Если разделить уравнения на произведение qT_{2n} и сделать замену $\frac{T_{1n}}{T_{2n}} = C_n$, то после простейших преобразований уравнения будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) &= \frac{C_n}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + C_n \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right), \\ A_{2n} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) - \frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) + B_{2n} \left(\operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) - \frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) &= C_n \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right). \end{aligned}$$

При $n = 0$ оба уравнения сводятся к виду $A_{20} = C_0$, что является признаком правильности преобразований. Очевидно, что произведения $T_{1n} \cdot Y_{1n} \cdot X_{1n}$ и $T_{2n} \cdot Y_{2n} \cdot X_{2n}$ при $n = 0$ в выражениях для обоих потенциалов являются функциями только времени, которые в выражениях для потенциала включать необязательно. В дальнейшем по этой причине все рассуждения и суммирование будут проводиться для $n > 0$.

Если разделить оба уравнения на $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}b\right)$ и исключить из них C_n , то в результате получится выражение

$$A_{2n} = B_{2n} \frac{\operatorname{th}^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - \frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - 1}{\frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right)} = k_n B_{2n},$$

где

$$k_n = \frac{\operatorname{th}^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - \frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - 1}{\frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right)}. \quad (9)$$

Таким образом, после подстановки полученного результата выражение для потенциала φ_2 выйдет следующим образом:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{2n} \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}y\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}y\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right), \quad (10)$$

где $\bar{T}_{2n} = T_{2n} \cdot B_{2n}$.

Для определения функции $\bar{T}_{2n}$ используется граничное условие на свободной поверхности (4). Если его продифференцировать по времени и использовать соотношение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y},$$

то получится выражение

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{y=c} = 0.$$

Подстановка в него формулы (10) дает равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{2n}'' \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) + \\ & + g \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{2n} \frac{\pi n}{a} \left(k_n \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) = 0. \end{aligned}$$

Объединение под одной суммой, перегруппировка, вынесение общих множителей (косинусов) и приравнивание коэффициентов при них нулю приводит к системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\bar{T}_{2n}'' \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) \right) + g \bar{T}_{2n} \frac{\pi n}{a} \left(k_n \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) \right) = 0.$$

Если разделить это уравнение на коэффициент у второй производной и ввести обозначение

$$\frac{k_n \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right)}{k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right)} g \frac{\pi n}{a} = \omega_{2n}^2, \quad (11)$$

квадрат частоты колебаний жидкости, то дифференциальное уравнение примет следующую форму:

$$\bar{T}_{2n}'' + \omega_{2n}^2 \cdot \bar{T}_{2n} = 0.$$

Общее решение этого уравнения выглядит так:

$$\bar{T}_{2n} = C_{2n} \cos(\omega_{2n} t) + D_{2n} \sin(\omega_{2n} t),$$

а выражение для потенциала второй области – так:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{2n} \cos(\omega_{2n} t) + D_{2n} \sin(\omega_{2n} t)) \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right). \quad (12)$$

Константы C_{2n} и D_{2n} определяются из начальных условий (7) и (8). Подстановку формулы (12) в выражение (8) приводит к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_{2n} \cos(\omega_{2n} \cdot 0) + D_{2n} \sin(\omega_{2n} \cdot 0)) \frac{\pi n}{a} \left(k_n \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) = 0,$$

откуда сразу же вытекает $C_{2n} = 0$, а выражение для потенциала становится таким:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \sin(\omega_{2n} t) \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right). \quad (13)$$

Форма свободной поверхности жидкости (зависимость $z(t, x)$) определяется из выражения (4):

$$z(t, x) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \Big|_{y=c}.$$

Подстановка в это выражение формулы (13), в правую часть – выражения для начальной формы свободной поверхности (7), а в левую – $t = 0$ приводит к выражению для определения D_{2n} :

$$\zeta(x) = -\frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \omega_{2n} \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Для определения коэффициента с произвольным номером n необходимо это выражение умножить на $\cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right)$ и проинтегрировать от 0 до a . В результате получается равенство

$$\int_0^a \zeta(x) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx = -\frac{a}{2g} D_{2n} \omega_{2n} \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) \right),$$

откуда

$$D_{2n} = -\frac{2g \int_0^a \zeta(x) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx}{a \omega_{2n} \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) \right)}.$$

Подстановка этого выражения в (13) позволяет получить значения потенциала во всей области 2, а также формулу, определяющую текущую форму свободной поверхности в любой момент времени:

$$\begin{aligned}
 z(t, x) &= -\frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \omega_{2n} \cos(\omega_{2n} t) \left(k_n \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} c \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} c \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right) = \\
 &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^a \zeta(x) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right) dx \right) \cos(\omega_{2n} t) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right). \quad (14)
 \end{aligned}$$

При выполнении данной работы начальная форма свободной поверхности жидкости задавалась в виде наклонной плоскости с уравнением $\zeta(x) = \frac{2d}{a}x - d$, где d – отклонение поверхности жидкости от равновесного положения на краях сосуда. Интегрирование и последующая подстановка в (14) привели к окончательному выражению для формы свободной поверхности в данной задаче:

$$z(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4d((-1)^n - 1)}{(\pi n)^2} \cos(\omega_{2n} t) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right). \quad (15)$$

Результаты проверки метода

Рассмотрим пример расчета формы свободной поверхности идеальной жидкости, совершающей свободные колебания под действием силы тяжести в сосуде с горизонтальной пористой перегородкой. Исходными данными в задаче являются: ширина сосуда $a = 1$ м, расстояние от дна до перегородки $b = 0.5$ м, полная высота сосуда $c = 1$ м, начальное отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного положения на краях сосуда $d = 0.01$ м. Проницаемость q принимала различные значения. Расчеты проводились по формуле (13) с использованием программы Mathcad. Для контроля были выполнены расчеты формы свободной поверхности жидкости в двух предельных случаях: когда перегородки нет (проницаемость бесконечно велика) и когда перегородка сплошная (проницаемость нулевая). Форма свободной поверхности в этих случаях рассчитана по классическим формулам для колебаний идеальной жидкости в прямоугольном сосуде, приведенным, например, в [12]. Выражение для определения формы свободной поверхности из этой работы совпадает с выражением (14), частоты колебаний определяются по формуле

$$\omega_n^2 = g \frac{\pi n}{a} \operatorname{th} \left(\frac{\pi n}{a} h \right), \quad (16)$$

где h – глубина сосуда.

На рис. 2 представлена форма свободной поверхности жидкости в начальный момент времени (a) и через 2 с после начала колебаний (b). Сплошной линией показана свободная поверхность в сосуде с проницаемой перегородкой ($q = 5$), пунктирной – в сосуде с непроницаемой перегородкой (глубина сосуда 0.5 м), штриховой – в сосуде без перегородки (глубина сосуда 1 м). Хорошо видно, что колебания в более глубоком сосуде отстают от колебаний в мелком сосуде, а колебания в сосуде с проницаемой перегородкой происходят между ними, что является подтверждением правильности решения задачи.

Для контроля были проведены расчеты формы свободной поверхности по формуле (13) для очень маленького значения проницаемости ($q = 0,001$) и очень большого значения ($q = 1000$). В первом случае сплошная линия на рисунке сов-

пала с пунктирной, во втором – со штриховой. Данные совпадения также подтверждают правильность предложенной методики.

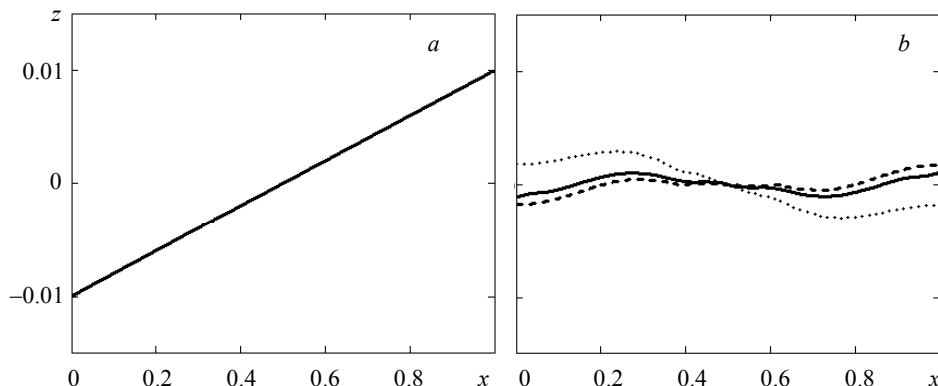


Рис. 2. Форма свободной поверхности жидкости

Fig. 2. Shape of the free surface of a fluid

Этот же факт подтверждается анализом предельных случаев для частот колебаний ω_{2n} .

Если рассмотреть предельный случай $q \rightarrow 0$, то формула (9) приведет к результату

$$k_n = -\operatorname{cth}\left(\frac{\pi n}{a}b\right).$$

После подстановки этого выражения в (11) и последующего преобразования получим формулу для частоты:

$$\omega_{2n}^2 = g \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}(c-b)\right).$$

Разность $c - b$ – глубина верхней части сосуда (см. рис. 1). Поэтому полученная формула совпадает с (16).

Если рассмотреть предельный случай $q \rightarrow \infty$, то формула (9) приведет к результату

$$k_n \rightarrow \infty.$$

При подстановке этого выражения в (11) и предельном переходе получаем

$$\omega_{2n}^2 = g \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}c\right).$$

Величина c – глубина всего сосуда (см. рис. 1). Поэтому полученная формула также совпадает с (16).

Оба предельных перехода подтвердили правильность полученных выражений.

Таким образом, проведенные испытания показали эффективность предложенной методики; полученные с ее помощью результаты могут быть использованы для решения практических задач и проверки более общих численных методов исследования колебаний идеальной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов Д.И., Руднев Ю.И. Собственные колебания идеальной жидкости в сосудах с перфорированными перегородками // Прикладная гидромеханика. 2010. Т. 12. № 2. С. 8–19.
2. Галицын Д.А., Троценко В.А. К расчету частот и присоединенных масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикладная гидромеханика. 2000. Т. 2 (74). № 1. С. 20–27.
3. Галицын Д. А., Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижном прямоугольном контейнере с упругими перегородками // Прикладная гидромеханика. 2000. Т. 2 (74). № 4. С. 11–23.
4. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикладная гидромеханика. 2008. Т. 10. № 1. С. 33–38.
5. Пожалостин А.А. Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 109–116.
6. Пожалостин А.А. Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Экспериментально-аналитический метод определения коэффициента сопротивления разделителя слоев жидкости в баке // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. С. 130–140. DOI: 10.7463/0415.0763626.
7. Alemi Ardakani H., Bridges T.J., & Turner M.R. Dynamic coupling between horizontal vessel motion and two-layer shallow-water sloshing // J. Fluids and Structures. 2015. V. 59. P. 432–460.
8. Nezami M., Oveisi A., & Mehdi Mohammadi M. Standing Gravity Waves in a Horizontal Circular Eccentric Annular Tank // J. Pressure Vessel Technology. August 2014. V. 136. P. 041301-1 – 041301-9. DOI: 10.1115/1.4026978
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.1. М.: ГИФМЛ, 1963. 584 с.
10. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974. 280 с.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 742 с.
12. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.

Статья поступила 10.11.2018 г.

Merzlyakov A.V., Kryukova E.A. (2019) FREE OSCILLATIONS OF AN IDEAL FLUID IN A RECTANGULAR VESSEL WITH A HORIZONTAL PERMEABLE MEMBRANE *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics] 60. pp. 107–118

DOI 10.17223/19988621/60/8

Keywords: ideal fluid, velocity potential, membrane, Laplace's equation, method of separation of variables.

The study aims to determine the shape of the free surface of an ideal fluid executing free oscillations in a rectangular vessel divided by a horizontal partially permeable membrane. The plane problem is solved analytically. The motion of the ideal fluid is simulated by solving Laplace's equation for the fluid velocity potential in the region occupied by fluid. Two regions are considered: the area between the bottom of the vessel and membrane and the area between membrane and free surface. On the solid boundary, the impermeability conditions are used; on the free surface, the Cauchy–Lagrange integral. On the membrane, the boundary condition is set as follows: the normal velocity of the fluid near membrane in both regions is proportional to the difference in the values of fluid velocity potential on either side of membrane. In the considered regions, the Laplace's equation is solved using the method of separation of variables. To

determine the dependence of the velocity potential on time, the boundary condition on the free surface is used, which is transformed for the case of small oscillations. This same condition yields the formula for determining the shape of the free surface of fluid at any time instant in terms of deviation of the free surface points from equilibrium position. The method described in this paper has been applied for the cases of different permeability of horizontal membrane. The obtained results have been compared with currently available solutions to similar problems.

MERZLYAKOV Aleksandr Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: amerz@mail.ru

KRYUKOVA Elizaveta Andreevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: amerz@sibmail.com

REFERENCES

1. Borisov D.I., Rudnev Yu.I. (2010) Sobstvennyye kolebaniya ideal'noy zhidkosti v sosudakh s perforirovannymi peregorodkami [Free oscillations of an ideal fluid in the vessels with perforated membrane]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydromechanics*. 12(2). pp. 8–19.
2. Galitsyn D.A., Trotsenko V.A. (2000) K raschetu chastot i prisoedinennykh mass zhidkosti v pryamougol'nom konteynere s peregorodkami v poperechnoy ploskosti ego simmetrii [To the calculation of the frequencies and added masses of a fluid in a rectangular vessel with membranes in the diametral plane of its symmetry]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydro-mechanics*. 2(1). pp. 20–27.
3. Galitsyn D.A., Trotsenko V.A. (2000) Kolebaniya zhidkosti v podvizhnom pryamougol'nom konteynere s uprugimi peregorodkami [Fluid oscillations in a movable rectangular vessel with elastic membranes]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydromechanics*. 2(4). pp. 11–23.
4. Kononov Yu.N., Tatarenko E.A. (2008) Svobodnye kolebaniya uprugikh membran i dvukhsloynnoy zhidkosti v pryamougol'nom kanale s uprugim dnom [Free vibrations of the elastic membranes and two-layer fluid in a rectangular channel with an elastic bottom]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydromechanics*. 10(1). pp. 33–38.
5. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A., Kokushkin V.V. (2014) Malye kolebaniya dvukhsloynnoy zhidkosti s uchedom pronitsaemosti razdelitelya [Small oscillations of two-layer liquid in view permeability of separator]. *Vestnik MGTU imeni N.E. Baumana. Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman MSTU. Natural Sciences*. 5. pp. 109–116.
6. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A., Kokushkin V.V. (2015) Eksperimental'no-analiticheskiy metod opredeleniya koeffitsienta soprotivleniya razdelitelya sloev zhidkosti v bake [Experimental and analytical method for determining a drag coefficient of the double-layer liquid separator]. *Nauka i obrazovanie. MGTU imeni N.E. Baumana – Science and Education of the Bauman MSTU*. 4. pp. 130–140. DOI: 10.7463/0415.0763626.
7. Alemi Ardakani H., Bridges T.J., Turner M.R. (2015) Dynamic coupling between horizontal vessel motion and two-layer shallow-water sloshing. *Journal of Fluids and Structures*. 59. pp. 432–460. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.10.002.
8. Nezami M., Oveisi A., Mehdi Mohammadi M. (2014). Standing gravity waves in a horizontal circular eccentric annular tank. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 136(4). pp. 041301-1 – 041301-9. DOI: 10.1115/1.4026978.
9. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. (1963) *Teoreticheskaya gidromekhanika. Chast' 1* [Theoretical fluid mechanics. Part1]. Moscow: GIFML.
10. Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. (1974) *Kraevye zadachi v oblastiakh s melkozernistoy granitse*. [Boundary problems in the areas with a fine-grained boundary]. Kiev: Naukova dumka.
11. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. (1977) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
12. Sretenskii L.N. (1977) *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions in a fluid]. Moscow: Nauka.

Received: November 10, 2018

УДК 532.517.4

DOI 10.17223/19988621/60/9

И.В. Моренко**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРУШЕНИЯ СТОЛБА ЖИДКОСТИ
В РЕЗЕРВУАРАХ РАЗНОЙ ФОРМЫ**

Выполнено численное моделирование обрушения столба жидкости в кубическом и цилиндрическом резервуарах. Математическое моделирование движения двухфазной среды основано на методе объема жидкости. Получены зависимости положения фронта жидкости, уровня жидкости, давления в контрольной точке на стенку резервуара от времени в процессе обрушения столба жидкости в форме гексаэдра, цилиндра, кольца.

Ключевые слова: численное моделирование, обрушение столба жидкости, метод объема жидкости.

Исследование движения жидкости со свободной поверхностью несомненно актуально и имеет как теоретическую, так и практическую значимость при решении таких экологических задач, как обрушение дамбы, прорыв плотины, сход селей, разлив загрязнений; в химической технологии – при нанесении функциональных покрытий; в машиностроении – при литье металлов, для определения величины нагрузок на стенки при конструировании топливных баков автотранспортных средств; при проектировании мостов и водохранилищ.

Задачи моделирования течений со свободной поверхностью выделены в отдельный класс задач механики сплошной среды [1]. Их особенностью является наличие свободной поверхности, форма которой неизвестна, при этом движение вязкой жидкости, как правило, является нестационарным, трехмерным, сопровождается натеканием потока на различные препятствия, характеризуется сильной деформацией свободной поверхности вплоть до таких явлений, как опрокидывание волн, образование пузырей и брызг.

Классической тестовой задачей для течений со свободной поверхностью является задача обрушения столба жидкости. Одним из первых лабораторный эксперимент обрушения столба жидкости в прямоугольном канале был выполнен авторами [2]. Эти результаты используются для верификации математических моделей и алгоритмов при расчете течений со свободной поверхностью. Экспериментальные исследования приведены также в работах [3–5].

Для класса течений со свободной поверхностью, как правило, получение аналитических решений и проведение лабораторных экспериментов затруднительно. В большинстве случаев именно математическое моделирование оказывается информативным инструментом исследования, который позволяет, меняя входные параметры в широком диапазоне, изучать процесс движения сред, анализируя численный эксперимент прогнозировать последствия крупномасштабных техногенных катастроф, связанных с разрушением дамб и плотин. Математическое моделирование по сравнению с натурным экспериментом имеет такие преимущества, как экономичность, возможность воссоздания опасных и труднопроизводимых в натуре режимов, анализа и выявления общих закономерностей.

К настоящему времени для математического моделирования движения жидкости со свободной поверхностью в пакетах программ с открытым исходным кодом реализованы следующие методы [1]: Volume of Fluid (метод объема жидкости), Smoothed Particle Hydrodynamics (метод сглаженных частиц), Particle Finite Element Method (метод конечных элементов с частицами).

Математическое моделирование обрушения столба жидкости представлено в работах [1, 4–11].

В работе [1] для расчета используются следующие пакеты программ: OpenFOAM, Gerris, pySPH, DualSPHysics, Kratos. В [6] расчет проводится на OpenFOAM с использованием $(k - \epsilon)$ -модели турбулентности.

Задача о разрушении плотины при наличии слоя жидкости в нижнем бьефе рассматривается в [7]. Нестационарные уравнения Навье – Стокса решаются методом SPH. Его основная идея состоит в дискретизации сплошной среды конечным набором лагранжевых частиц, которые движутся со скоростью потока и допускают произвольную связность между собой, что позволяет отказаться от использования сеток и называть метод бессеточным.

Задача об обрушении столба слабосжимаемой жидкости в изотермическом случае описывается уравнениями неразрывности и Навье – Стокса в [8]. При этом система замыкается уравнением состояния в форме Тэта, используются технологии параллельных вычислений Nvidia CUDA.

Необходимость учета эффектов турбулентности при моделировании течений со свободной поверхностью обсуждается в [9].

Ряд работ посвящен натеканию потока на препятствия различной формы [9 – 13]. Взаимодействие длинной гравитационной волны типа цунами с подводными преградами исследуется в [14].

Отметим, что в названных лабораторных экспериментах и численных расчетах в качестве рабочей среды рассматривалась только вода, а резервуар выбирался прямоугольной формы. Целью данной работы является численное исследование обрушения столба жидкости в форме цилиндра и кольца в цилиндрическом резервуаре; сравнение зависимостей положения фронта и уровня жидкости от времени, давления в контрольных точках и других параметров процесса.

Постановка задачи

Рассмотрим три различных схемы резервуара и столба жидкости (рис. 1).

Первый вариант показан на рис. 1, *a*. В заполненном воздухом кубическом резервуаре со стороной $H = 0.584$ м находится столб жидкости в форме гексаэдра высотой $b = 0.292$ м, шириной $a = 0.146$ м в гидростатическом равновесии. Столб жидкости ограничен тонкой непроницаемой перегородкой, установленной вертикально. В начальный момент времени перегородка удаляется, а столб жидкости под действием силы тяжести начинает обрушиваться.

Второй вариант схемы (рис. 1, *b*) представляет собой цилиндрический резервуар высотой H , радиусом $r_2 = H$, в центре которого размещен столб жидкости высотой b за перегородкой в форме круглой трубы радиусом a . После удаления перегородки жидкость растекается в радиальном направлении от оси к периферии резервуара.

Третий вариант – также цилиндрический резервуар (рис. 1, *c*). Однако в отличие от второго варианта, где жидкость размещается в центре, в третьем варианте

схемы столб жидкости высотой b , шириной a имеет форму кольца и в начальный момент находится вдоль стенки цилиндрического резервуара за перегородкой в форме круглой трубы радиусом $r_2 - a$. После устранения перегородки жидкость устремляется в направлении от стенки цилиндрического резервуара к его оси.

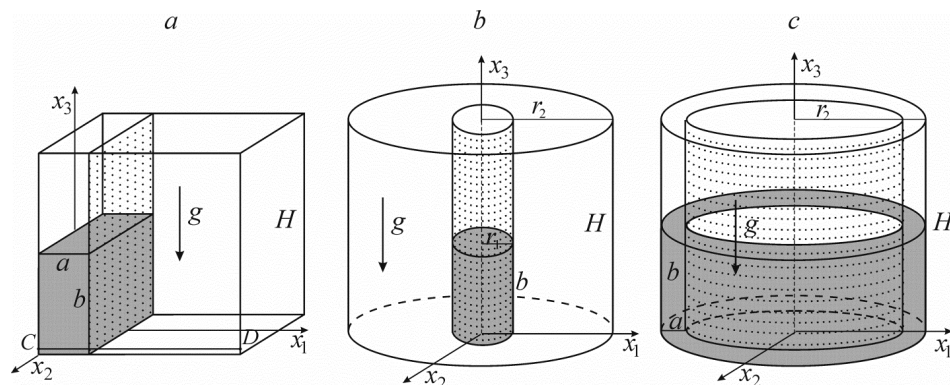


Рис. 1. Схемы областей: a – кубический резервуар со столбом жидкости в форме гексаэдра; b – цилиндрический резервуар с цилиндрическим столбом жидкости в центре; c – цилиндрический резервуар со столбом жидкости на периферии у стенки в форме кольца

Fig. 1. Design of the reservoirs: (a) cubic reservoir with a hexahedral liquid column; (b) cylindrical reservoir with a cylindrical liquid column in the center; and (c) cylindrical reservoir with a ring-shaped liquid column on the periphery near the wall

Для моделирования нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью выбран метод объема жидкости (Volume of Fluid) [15], согласно которому течение среды моделируется единым набором уравнений движения для всех фаз. Предполагается, что движение жидкости является турбулентным.

Рассматривается двухфазная среда, которая состоит из жидкой и газовой фаз. Обозначим через α объемную долю жидкой фазы. Если контрольный объем занят жидкостью, то $\alpha = 1$, если газом – $\alpha = 0$, если через контрольный объем проходит фазовая граница, то $0 < \alpha < 1$.

Плотность ρ , динамический коэффициент вязкости среды рассчитываются по соответствующим значениям жидкости (индекс l) и газа (индекс g) с использованием маркерной функции α :

$$\rho = \rho_l \alpha + \rho_g (1 - \alpha), \quad \mu = \mu_l \alpha + \mu_g (1 - \alpha).$$

Для описания нестационарного турбулентного движения вязкой несжимаемой жидкости записываются трехмерные осредненные уравнения Рейнольдса. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Уравнение количества движения имеет вид

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \sigma \kappa \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}. \quad (2)$$

Здесь u_i – компонента осредненного вектора скорости $\mathbf{u}$, t – время, p – давление, $\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t$ – эффективная вязкость, μ_t – турбулентная, или вихревая вязкость, δ_{ij} – символ Кронекера, g_i – компоненты ускорения свободного падения, $\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n}$ – кривизна свободной поверхности, $\mathbf{n} = \nabla \alpha / |\nabla \alpha|$ – единичная нормаль к поверхности раздела фаз, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Для определения положения свободной поверхности записывается уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial ((1-\alpha) \alpha u_{r,i})}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

Необходимое сжатие поверхности осуществляется путем введения дополнительного искусственного члена сжатия $\mathbf{u}_r$ по формуле

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g.$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Уравнения (1) – (3) дополняются моделью замыкания, начальными и граничными условиями.

Моделирование турбулентности осуществляется на основе зональной модели Менстера SST [16], получившей широкое распространение при решении научных и прикладных задач, поскольку она обеспечивает качественный результат с разумной точностью. Большой опыт ее эксплуатации свидетельствует о том, что она по совокупности своих качеств является одной из лучших среди существующих моделей турбулентности. SST модель представляет собой комбинацию $(k-\epsilon)$ -модели, которая хорошо зарекомендовала себя при расчете свободных течений, и $(k-\omega)$ -модели, обеспечивающей существенно более точное описание пристеночных пограничных слоев [17]. Она реализована с использованием специально сконструированной эмпирической функции переключения. Модель Менстера SST включает уравнения для транспорта кинетической энергии турбулентности k и скорости диссипации турбулентной энергии ω :

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j k)}{\partial x_j} = P^* - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = \\ & = \frac{\gamma_\omega}{\nu_T} P - \beta_\omega \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \rho \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (4) и (5) используются следующие обозначения для вспомогательных соотношений и коэффициентов замыкания: $P^* = \min(P, 20\beta^* \omega k)$,

$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, тензор вязких напряжений $\tau_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$, тензор скоростей

деформации $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Коэффициент турбулентной вязкости

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max[a_1 \omega, \Omega F_2]}, \quad \Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}, \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad F_2 = \text{th}(\arg_2^2),$$

$$\arg_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right).$$

Функция переключения F_1 имеет вид $F_1 = \text{th}(\arg_1^4)$,

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2} \right],$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right), \quad d - \text{расстояние от узла сетки до стенки.}$$

Константы γ_ω , β_ω , σ_ω рассчитываются по формулам

$$\gamma_\omega = F_1 \gamma_{\omega 1} + (1 - F_1) \gamma_{\omega 2}, \quad \beta_\omega = F_1 \beta_{\omega 1} + (1 - F_1) \beta_{\omega 2}, \quad \sigma_\omega = F_1 \sigma_{\omega 1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2};$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^{*2}}{\sqrt{\beta^*}}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^{*2}}{\sqrt{\beta^*}}; \quad \sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856,$$

$$\beta_1 = 0.075, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad \beta^* = 0.09, \quad \kappa^* = 0.41, \quad a_1 = 0.31.$$

На стенках резервуара задаются граничные условия

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0, \quad k = 0, \quad \omega = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 d_1^2},$$

здесь $\beta_1 = 0.075$, d_1 – пристеночный шаг, n – нормаль. В начальный момент времени $t = 0$ значения компонент скорости равны нулю, движение отсутствует. Движение среды начинается после открытия перегородки.

Решение задачи (1) – (5) осуществляется методом конечных объемов с помощью OpenFOAM [18]. Открытая интегрируемая платформа OpenFOAM является мощным современным эффективным инструментом для численного моделирования задач механики сплошных сред. Для решения системы линейных уравнений для давления используется алгебраический многосеточный метод, для скорости – метод бисопряженных градиентов. Шаг по времени Δt подбирается в процессе вычислений таким образом, чтобы число Куранта Co для всех ячеек расчетной области не превосходило 0.25. Число Куранта ячейки $Co = (\Delta t |u|) / \Delta x$ определяется по величине скорости жидкости через ячейку $|u|$, размеру ячейки в направлении скорости Δx .

Результаты расчетов

Поскольку решение тестовой задачи является неотъемлемой частью исследований, в которых основным инструментом являются методы математического моделирования, перед проведением основных вычислительных экспериментов по изучению обрушения столба жидкости в цилиндрическом резервуаре рассмотрим модельную задачу об обрушении столба жидкости в кубическом резервуаре, для которой имеются многочисленные экспериментальные данные, в том числе [2–5].

При расчете задаются следующие параметры жидкости и газа: плотность $\rho_l = 10^3$ кг/м³, $\rho_g = 1.2$ кг/м³; коэффициент кинематической вязкости $\nu_l = 10^{-6}$ м²/с, $\nu_g = 1.48 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Коэффициент поверхностного натяжения σ равен 0.072 Н/м.

Результаты расчетов представим в безразмерном виде. Для этого обозначим через $X = x_1/a$ безразмерное положение фронта жидкости для схем, показанных на рис. 1, a , b , и через $X = (H - x_1)/a$ – для схемы на рис. 1, c , ее уровень $Y = x_3/a$, безразмерное время $\tau = t/\sqrt{a/g}$, скорость $U = |u_1|/\sqrt{gH}$, давление $P = p/\rho g H$. Число Рейнольдса $Re = H\sqrt{gH}/\nu_l$, определяемое по характерному размеру H , скорости $\sqrt{gH}$ и вязкости жидкости ν_l составляет $Re = 1.4 \cdot 10^6$.

Дискретизация расчетной области осуществляется гексаэдральными элементами. Рис. 2 иллюстрирует результаты численного расчета поля маркер-функции α в центральном поперечном сечении области. Полагается, что форма свободной границы определяется изоповерхностью $\alpha = 0.5$. В начальный момент времени ($\tau = 0$) столб жидкости ограничен перегородкой и находится в гидростатическом равновесии. После удаления перегородки столб жидкости под действием силы тяжести начинает обрушиваться, вода устремляется вправо к противоположной стенке резервуара. Отметим, что на межфазной границе «вода-воздух» наблюдаются волны. После взаимодействия с противоположной стенкой резервуара жидкость поднимается вверх ($\tau = 3.0$), затем гребень волны отклоняется влево и волна опрокидывается ($\tau = 6.56$).

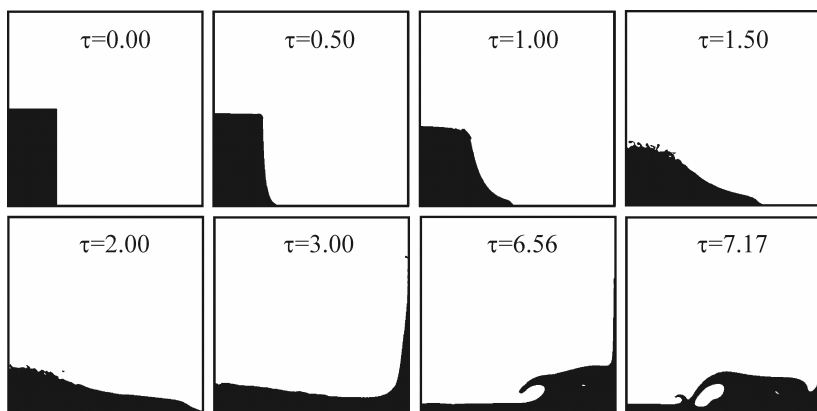


Рис. 2. Обрушение столба жидкости в кубическом резервуаре

Fig. 2. Collapse of the liquid column in a cubic reservoir

Результаты исследования сеточной сходимости на четырех сгущающихся сетках представлены в таблице. Оценивается влияние числа элементов расчетной области на безразмерное время τ^* , за которое волна жидкости достигает противоположную стенку резервуара, и максимальное безразмерное давление жидкости $P_{\max}$ при взаимодействии волны со стенкой резервуара, замеренное на высоте 0.12.

Исследование сеточной сходимости

№	Сетка	τ^*	$P_{\max}$
1	100×100×1	2.102	1.1171
2	250×250×1	2.104	1.1709
3	500×500×1	2.106	1.1927
4	1000×1000×1	2.106	1.1987

Видно, что для получения качественного решения достаточно 500 узлов по высоте области и 500 – в направлении движения волны. Для дальнейших расчетов выбрана сетка № 3. При моделировании процесса обрушения столба жидкости в цилиндрическом резервуаре конструируется расчетная область в форме цилиндрического сектора с углом 4° , строится сетка с количеством узлов 500 в осевом и радиальном направлениях.

Анализ поля скоростей показывает, что движение жидкости вызывает в свою очередь вихревое движение воздуха. Рис. 3 демонстрирует изменение компоненты скорости среды в направлении ее движения в разные моменты времени на отрезке CD , пролегающем вдоль дна кубического резервуара. Характерно, что максимальные значения скорость двухфазной среды достигает на фронте жидкости.

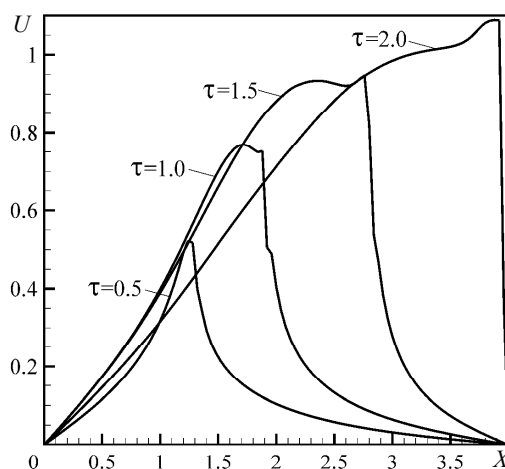


Рис. 3. Продольная компонента скорости среды вдоль отрезка CD

Fig. 3. The longitudinal component of the velocity of medium along the segment CD

Численный эксперимент, в отличие от натурального, позволяет оценить влияние любого параметра на изучаемый процесс. Так, в случае с кубическим резервуаром, установлено, что изменение плотности жидкости в диапазоне от 200 до 5000 кг/м^3 не влияет существенно на положение фронта жидкости X . Разница значений X при этом составляет не более 2 %.

Изменение коэффициента кинематической вязкости жидкости ν_l в диапазоне от $\nu_l = 10^{-7}$ до $10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ фактически не влияет на положение фронта жидкости, однако жидкости с высокой вязкостью ($\nu_l > 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$), например многие виды масел, растекаются медленнее. Так, волна жидкости с коэффициентом кинематической вязкости $\nu_l = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ достигает противоположную стенку за время $\tau^* = 2.48$, а вода за время $\tau^* = 2.106$.

Далее проведены расчеты при следующих значениях безразмерной высоты столба жидкости в начальный момент времени $B = b/a = 0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 2.5; 3.0; 3.5$. Установлено, что чем меньше высота столба жидкости B , тем позже фронт жидкости достигнет противоположной стенки резервуара (рис. 4).

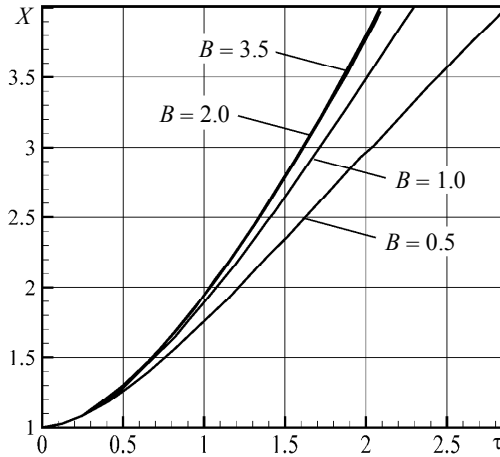


Рис. 4. Положение фронта жидкости с течением времени при обрушении столба в форме гексаэдра с разной высотой столба жидкости
Fig. 4. Position of the leading edge as a function of time during collapse of the hexahedral liquid column of different heights

На рис. 5 слева показано положение фронта жидкости X с течением времени τ при обрушении столба жидкости в форме гексаэдра (кривая 1). Наблюдается хорошее согласие расчетных значений для кубического резервуара и экспериментальных данных [2 и 5]. В ходе численного эксперимента установлено, что

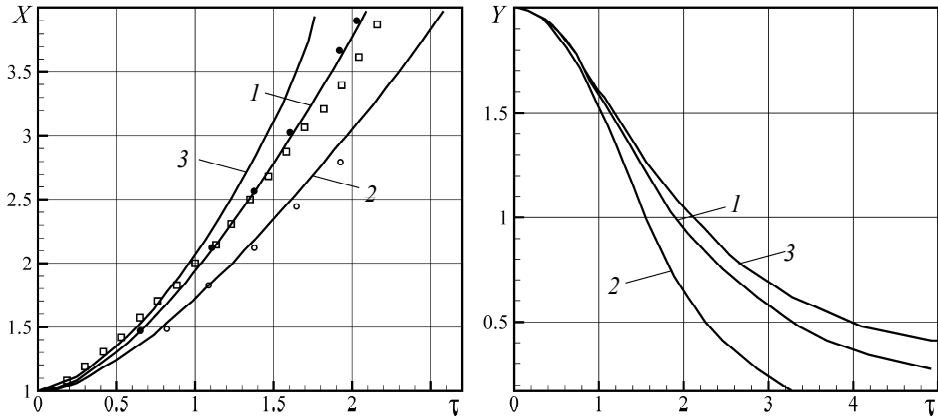


Рис. 5. Продвижение фронта жидкости при обрушении столба в форме гексаэдра (1), цилиндра (2), кольца (3); ● – эксперимент [2], ○ – [4], □ – [5] (слева) и изменение высоты столба (справа)

Fig. 5. The motion of the leading edge during collapse of the (1) hexahedral, (2) cylindrical, and (3) ring-shaped liquid columns; ● – experimental results from [2], ○ – data from [4], □ – data from [5] (on the left) and the variation in the column height (on the right)

скорость движения фронта жидкости зависит от формы столба в начальный момент времени, в частности фронт воды при обрушении столба в форме гексаэдра (кривая 1) движется быстрее, чем при обрушении столба в форме цилиндра (кривая 2), но медленнее, чем в форме кольца (кривая 3). Заметим, что безразмерное расстояние равное 3.00 расходящаяся волна (кривая 2) проходит за время $\tau = 2.58$, а сходящаяся (кривая 3) – за время $\tau = 1.76$.

Функции $X(\tau)$ можно аппроксимировать методом наименьших квадратов зависимостями вида $c \cdot \tau^r$. Так, при обрушении столба жидкости в форме кольца (рис. 5, кривая 3)

$$X_r = 0.92 \cdot 2.24^\tau; \quad (6)$$

в форме гексаэдра (рис. 5, кривая 1)

$$X_h = 0.94 \cdot 2.02^\tau; \quad (7)$$

в форме цилиндра (рис. 5, кривая 2)

$$X_c = 0.96 \cdot 1.77^\tau. \quad (8)$$

Следует отметить, что зависимости (6) – (8) справедливы при высоте столба $B \geq 1.5$ и плотности жидкости $\nu_l < 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Полученные аппроксимационные выражения (6) – (8) могут быть полезны для инженерной практики при решении ряда прикладных задач в области экологии и машиностроения.

Форма столба жидкости в начальный момент времени влияет и на изменение уровня жидкости с течением времени $Y(\tau)$ (рис. 5 справа). При этом уровень жидкости замерялся для кривых 1 и 3 на расстоянии 0.2 от стенки, а для кривой 2 на расстоянии 0.2 от оси резервуара. При обрушении цилиндрического столба падение уровня жидкости происходит быстрее, чем в других случаях, а натекающий на стенку поток является менее глубоким и менее скоростным.

Безразмерное давление жидкости при взаимодействии волны со стенкой резервуара, замеренное на высоте 0.12, приведено на рис. 6. При натекании жидкости на стенку давление резко повышается до максимального значения.

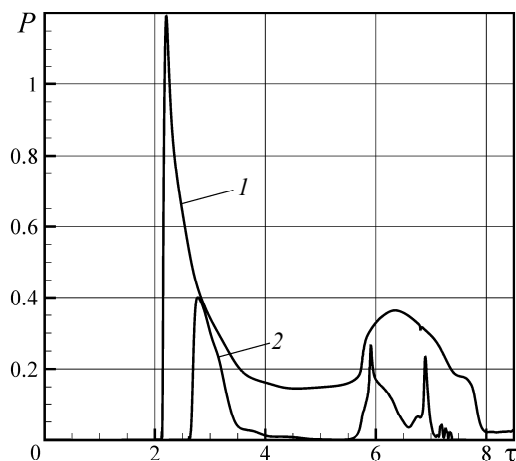


Рис. 6. Давление жидкости на стенку резервуара при обрушении столба в форме гексаэдра (1), цилиндра (2) в контрольной точке на высоте 0.12

Fig. 6. Pressure exerted by a liquid on the reservoir wall during collapse of the (1) hexahedral and (2) cylindrical liquid column at the control point at a height of 0.12

Следует отметить, что значения $P_{\max} = 0.40$, замеренное на стенке цилиндрического резервуара в 2.98 раза ниже, чем в кубическом резервуаре ($P_{\max} = 1.19$). В дальнейшем, в процессе подъема жидкости вдоль стенки, давление падает. Затем в момент падения волны наблюдается локальный максимум величины P , после которого жидкость устремляется от стенки в обратном направлении. В процессе обрушения столба жидкости в форме кольца образуется сходящаяся волна. Рассчитанное максимальное безразмерное давление жидкости $P_{\max}$, замеренное на оси резервуара, составляет 102.5, что в 86 раз больше, чем на такой же высоте от дна на стенке кубического резервуара.

Заключение

Представленные результаты численного эксперимента показали, что чем меньше высота столба жидкости, тем позже фронт жидкости достигнет противоположной стенки резервуара, максимальные значения скорости жидкости достигает на фронте. Установлено, что скорость движения фронта жидкости зависит от формы столба в начальный момент времени, в частности безразмерное расстояние равное 3.0 в цилиндрическом резервуаре расходящаяся волна проходит за интервал времени на 23.5 % больше, а сходящаяся на 15.7 % меньше, чем волна в кубическом резервуаре. Получены аппроксимационные зависимости для определения положения фронта жидкости от времени. Показано, что при обрушении цилиндрического столба падение уровня жидкости происходит быстрее, чем в других случаях, а натекающий на стенку поток является менее глубоким и менее скоростным. Значение максимального давления, замеренное на стенке цилиндрического резервуара в 2.98 раза ниже, чем в кубическом резервуаре. Рассчитанное максимальное безразмерное давление жидкости в сходящейся волне, замеренное на оси резервуара в 86 раз больше, чем на такой же высоте от дна на стенке кубического резервуара. Таким образом, представленные результаты численного эксперимента позволили проанализировать влияние формы столба жидкости на процесс обрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдова Е.В., Корчагова В.Н. Свободное программное обеспечение для моделирования жидкости со свободной поверхностью // Труды Института системного программирования РАН. 2016. Т. 28. № 1. С. 243–258.
2. Martin J.C., Moyce W.J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // Phil. Trans. Roy. Soc. London 1952. V. 244. No. 882. P. 312–324.
3. Lobovsky L., Botia-Vera E., Castellana F., Mas-Soler J., Souto-Iglesias A. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break // J. Fluids Struct. 2014. V. 48. P. 407–434.
4. Koshizuka S., Oka Y. Moving-Particle Semi-Implicit Method for fragmentation of incompressible fluid // Nuclear Science and Engineering. 1996. No. 123. P. 421–434.
5. Hu C., Sueyoshi M. Numerical simulation and experiment on dam break problem // J. Marine Science and Application. 2010. No. 9. P. 109–114.
6. Жайнаков А.Ж., Курбаналиев А.Б. Верификация открытого пакета OpenFOAM на задачах прорыва дамб // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 4. С. 461–472.
7. Афанасьев К.Е., Попов А.Ю. Моделирование процесса разрушения плотины методом SPH // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9. Вып. 3. С. 3–22.
8. Кочерыжский В.А. Моделирование течений слабосжимаемой вязкой жидкости методом сглаженных частиц // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 112–115.

9. Храбрый А.И., Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Влияние модели турбулентности на результаты расчета обтекания препятствия потоком воды после обрушения дамбы // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2013. № 1 (165). С. 182–187.
10. Храбрый А.И., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М. Разработка и примеры приложения специализированного параллельного кода для численного моделирования турбулентных нестационарных течений со свободной поверхностью // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20. № 3(73). С. 153–163.
11. Kleefsman K.M.T., Fekken G., Veldman A.E.P., Iwanowski B., Buchner B. A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems // Journal of Computational Physics. 2005. V. 206. P. 363–393.
12. Ozmen-Cagatay H., Kocaman S. Dam-Break Flow in the Presence of Obstacle: Experiment and CFD Simulation, Engineering Applications of Computational // Fluid Mechanics. 2011. V. 5. No. 4. P. 541–552.
13. Бошнятов Б.В., Лисин Д.Г. Численное моделирование волн типа цунами в гидродинамическом лотке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6 (26). С. 45–55.
14. Бошнятов Б.В., Жильцов К.Н. Исследование взаимодействия волн цунами с подводными преградами конечной толщины в гидродинамическом лотке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 86–103. DOI 10.17223/19988621/51/8.
15. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Computational Physics. 1981. V. 39. No. 1. P. 201–225.
16. Menter F.R. Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. V. 32. N. 8. P. 1598–1605.
17. Гарбарук А.В. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие / А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 88 с.
18. OpenFOAM – The open source CFD toolbox. URL: <http://www.openfoam.com>

Статья поступила 07.09.2018 г.

Morenko I.V. (2019) NUMERICAL SIMULATION OF THE LIQUID COLUMN COLLAPSE IN THE RESERVOIRS OF DIFFERENT SHAPES. (2019) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 119–131

DOI 10.17223/19988621/60/9

Keywords: numerical simulation, collapse of a liquid column, volume of fluid method.

The numerical simulation of three different cases of liquid column collapse is carried out. These are the collapses of hexahedral liquid column in a cubic reservoir, cylindrical liquid column, and ring-shaped liquid column in a cylindrical reservoir. Mathematical modeling is based on the volume of fluid method. The obtained results show that the lower the liquid column, the longer the liquid front reaches the opposite wall of the reservoir. The velocity maximum is observed at the flow front. The velocity of the front depends on the shape of liquid column in the initial stage. The dimensionless time of passing dimensionless distance of 3.0 in a cylindrical reservoir is equal to 2.58 and 1.76 for diverging and converging waves, respectively, while in a cubic reservoir, the time is equal to 2.09. The time dependences for position of the liquid front, liquid level, pressure value at the control point on the reservoir wall in the process of liquid column collapse are obtained. It is shown that the liquid level drop occurs faster in the case of cylindrical column collapse, and the flow flowing onto the wall is less deep and less speedy.

MORENKO Irina Veniaminovna (Candidate of Technical Sciences, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences). E-mail: morenko@imm.knc.ru

REFERENCES

1. Davydova E.V., Korchagova V.N. (2016) Svobodnoe programmnoe obespechenie dlya modelirovaniya zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu [Open-source software for modelling of free surface flows]. *Trudy ISP RAN – Proceedings of ISP RAS*. 28(1). pp. 243–258. DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-14.
2. Martin J.C., Moyce W.J. (1952) An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. 244(882). pp. 312–324. DOI: 10.1098/rsta.1952.0007.
3. Lobovsky L., Botia-Vera E., Castellana F., Mas-Soler J., Souto-Iglesias A. (2014) Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break. *Journal of Fluids and Structures*. 48. pp. 407–434. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2014.03.009.
4. Koshizuka S., Oka Y. (1996) Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear Science and Engineering*. 123. pp. 421–434. DOI: 10.13182/NSE96-A24205.
5. Hu C., Sueyoshi M. (2010) Numerical simulation and experiment on dam break problem. *Journal of Marine Science and Application*. 9. pp. 109–114. DOI: 10.1007/s11804-010-9075-z.
6. Zhainakov A.Zh., Kurbanaliev A.Y. (2013) Verification of the open package OpenFOAM on dam break problems. *Thermophysics and Aeromechanics*. 20(4). pp. 451–461. DOI: 10.1134/S0869864313040082.
7. Afanas'ev K.E., Popov A.Yu. (2009) Modelirovanie protsessa razrusheniya plotiny metodom SPH [Dam breaking process modeling by SPH method]. *Vestnik NGU. Matematika, mekhanika, informatika – Journal of Mathematical Sciences*. 9(3). pp. 3–22.
8. Kocheryzhkin V.A. (2011) Modelirovanie techeniy slaboszhimayemy vyazkoy zhidkosti metodom sglazhennykh chastits [Numerical simulation of the viscous fluid flow using SPH-method]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya – Vestnik of Saint Petersburg university. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 3. pp. 112–115.
9. Khrabry A.I., Smirnov E.M., Zaytsev D.K. (2013) Vliyaniye modeli turbulentnosti na rezul'taty rascheta obtekaniya prepyatstviya potokom vody posle obrusheniya damby [Influence of turbulence model on the results of simulation of dambreak flow about an obstacle]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki – St. Petersburg Polytechnic University Journal – Physics and Mathematics*. 1(165). pp. 182–187.
10. Khrabry A.I., Zaytsev D.K., Smirnov E.M. (2016) Razrabotka i primery prilozheniya spetsializirovannogo parallel'nogo koda dlya chislennogo modelirovaniya turbulentnykh nestatsionarnykh techeniy so svobodnoy poverkhnost'yu [Development and application of a specialized parallel code for numerical simulation of unsteady turbulent free-surface flows]. *Vestnik UGATU – Scientific Journal of Ufa State Aviation Technical University*. 20(3). pp. 153–163.
11. Kleefsman K.M.T., Fekken G., Veldman A.E.P., Iwanowski B., Buchner B. (2005) A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems. *Journal of Computational Physics*. 206. pp. 363–393. DOI: 10.1016/j.jcp.2004.12.007.
12. Ozmen-Cagatay H., Kocaman S. (2011) Dam-break flow in the presence of obstacle: experiment and CFD simulation. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*. 5(4). pp. 541–552. DOI: 10.1080/19942060.2011.11015393.
13. Boshenyatov B.V., Lisin D.G. (2013) Chislennoe modelirovanie voln tipa tsunami v gidrodinamicheskom lotke [Numerical simulation of tsunami type waves in a hydrodynamic channel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(26). pp. 45–55.
14. Boshenyatov B.V., Zhiltsov K.N. (2018) Issledovanie vzaimodeystviya voln tsunami s podvodnymi pregradami konechnoy tolshchiny v gidrodinamicheskom lotke [Investigation of the interaction of tsunami waves and submerged obstacles of finite thickness in a hydrodynamic wave flume]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 86–103. DOI: 10.17223/19988621/51/8.

15. Hirt C.W., Nichols B.D. (1981) Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*. 39(1). pp. 201–225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
16. Menter F.R. (1994) Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*. 32(8). pp. 1598–1605. DOI: 10.2514/3.12149.
17. Garbaruk A.V., Strelets M.Kh., Shur M.L. (2012) *Modelirovanie turbulentnosti v raschetakh slozhnykh techeniy* [Simulation of the turbulence when computing complex flows]. St. Petersburg: Izdatel'stvo Politehnicheskogo universiteta.
18. OpenFOAM – The open source CFD toolbox. URL: <http://www.openfoam.com>

Received: September 7, 2018

УДК 614.841.1

DOI 10.17223/19988621/60/10

И.Р. Хасанов, О.И. Орлов

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЭКРАНИРУЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ РАСПЫЛЕННОЙ ВОДЫ ПРИ ПОЖАРЕ

Рассматривается экранирующая способность капель воды, подаваемой из оросителей автоматических установок пожаротушения. Описаны результаты экспериментальных исследований дисперсного состава распыленной воды при различных значениях давления подачи воды на оросители. Показано, что способ подачи воды оказывает существенное влияние на эффективность тушения пожара. Эффективной защитой от распространения пожара является подача распыленной воды из оросителей, расположенных на уровне пола.

Ключевые слова: *тепловой поток, пожар, распыленная вода, экранирующая способность.*

Для предотвращения распространения пожара помещения зданий и сооружений, в том числе автостоянки, подлежат оборудованию системами пожаротушения [1]. Однако ввиду особенностей конструкции автомобилей с наличием горючих материалов в местах, закрытых для доступа огнетушащих веществ, работа систем пожаротушения в автостоянках зачастую позволяет только замедлить распространение пожара, но не обеспечивает его локализации и полной ликвидации [2, 3].

В связи с этим при обеспечении пожарной безопасности объектов с различной пожарной нагрузкой особую актуальность приобретают исследования эффективности тушения распыленной воды, подаваемой автоматическими установками пожаротушения.

Целью работы являются экспериментальные исследования влияния распыленной воды, подаваемой из оросителей, на тепловой поток модельного очага пожара.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- разработать экспериментальную установку и методику, которые позволят исследовать параметры работы оросителей и изменение теплового потока под действием распыленной воды различной дисперсности;
- исследовать параметры работы оросителей при различном давлении (расход, интенсивность орошения, диаметры капель);
- изучить влияние распыленной воды, подаваемой из оросителей на тепловой поток, излучаемый модельным очагом пожара.

Экспериментальная установка

Созданная экспериментальная установка состоит из следующих основных блоков: системы подачи воды; источника теплового излучения; прибора измерения теплового потока; измерительных приборов; защитных щитов. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1.

Система подачи воды – это баллон объемом 50 л, заполненный водой (1), к которому подсоединен баллон со сжатым воздухом (2) через редуктор (3) и шланг высокого давления. В нижней части баллона установлен штуцер, к которому под-

соединен шланг высокого давления для подачи воды. К шлангу через тройник присоединены манометр (4) и ороситель (7).

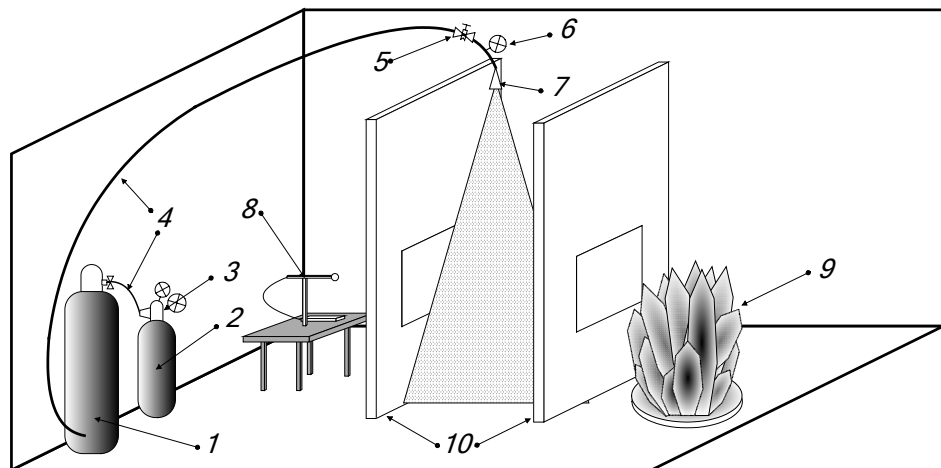


Рис. 1. Схема экспериментальной установки для исследования влияния распыленной воды на тепловой поток, излучаемый модельным очагом пожара: 1 – баллон с водой; 2 – баллон с газом-вытеснителем; 3 – редуктор; 4 – шланги высокого давления; 5 – запорный вентиль; 6 – манометр; 7 – ороситель; 8 – измеритель плотности теплового потока; 9 – модельный очаг пожара; 10 – защитные щиты

Fig. 1. Design of the experimental setup for studying the effect of sprayed water on the heat flux emitted by the model fire source: 1, cylinder with water; 2, cylinder with a gas-displacer; 3, reducer; 4, high pressure hoses; 5, shut-off valve; 6, pressure gauge; 7, sprinkler; 8, meter of the heat flux density; 9, model of a fire source; and 10, protective shields

Для экспериментов были выбраны оросители тонкораспыленной воды, предназначенные для тушения пожаров в помещениях: «А» – ороситель дренчерный тонкораспыленной воды со сплошным конусом распыла, диаметр $\frac{3}{4}$ дюйма; «Б» – ороситель дренчерный тонкораспыленной воды с полым конусом распыла, диаметр $\frac{1}{2}$ дюйма.

В качестве источника теплового излучения для экспериментов использовался модельный очаг пожара, который представлял собой круглый противень, изготовленный из листовой стали с внутренним диаметром 450 мм, толщиной стенки 1.5 мм и высотой борта противня 100 мм. В качестве горючего материала применялся автомобильный бензин марки АИ-92. Выбор источника теплового излучения обусловлен параметрами проемов в защитных щитах (проекция поверхности пламени модельного очага должна полностью покрывать площадь проема).

Для определения значений плотности теплового потока использовался измеритель плотности теплового потока ИПП-2. Давление в баллонах с водой и воздухом измерялось с помощью манометров редуктора БКО-50-4 в диапазоне давлений на входе от 0 до 25 МПа, на выходе от 0 до 2.5 МПа. Давление у оросителя измерялось водяным манометром в диапазоне давлений от 0 до 1.6 МПа. С целью определения интенсивности орошения использовались емкости $0.25 \times 0.25 \times 0.15$ м в количестве 12 шт. и мерный цилиндр объемом 1 л с ценой деления 10 мл. Фиксация времени экспериментов производилась с помощью секундомера с дискретностью отсчета времени 0.01 с.

Экспериментальные исследования состояли из двух основных этапов и выполнялись в следующей последовательности. Вначале определялись параметры работы оросителей в диапазоне давлений от 0.2 до 0.8 МПа с шагом в 0.2 МПа с измерением расхода воды из оросителей, интенсивности орошения оросителей, диаметра капель воды. Затем исследовалось влияние на тепловой поток распыленной воды различной дисперсности, подаваемой из оросителей в этом же диапазоне давлений.

Исследования параметров распыленной воды

Определение дисперсности распыленной струи воды проводилось в соответствии со стандартом [4] методом улавливания капель воды на смесь, состоящую из 1/4 весовой части технического вазелина и 3/4 частей вазелинового масла. Подложки с нанесенным на них слоем этой смеси (массой не менее 3 г, площадью захвата не менее 7 см² каждая) расставляли в плоскости, перпендикулярной к оси распылителя, на расстоянии, равном половине дальности эффективного действия струй, равномерно от центра к максимальному радиусу факела струи. Подложки накрывали отсекателем, который убирался после выхода распылителя на рабочий режим на время, необходимое для фиксирования в плоске не менее 100 капель, и при этом оставалось свободное пространство между каплями. Давление подачи соответствовало условиям проведения экспериментов.

На рис. 2 представлено изменение расхода воды оросителей в зависимости от давления. С увеличением давления повышается средний расход принятых для испытаний оросителей, однако расход воды через ороситель «А» превышает расход оросителя «Б» в среднем в 4 раза.

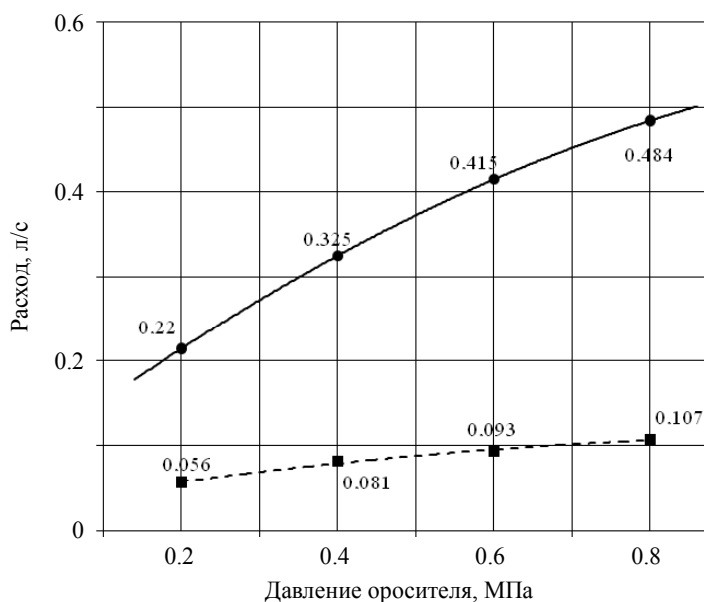


Рис. 2. Изменение расхода воды через оросители в зависимости от давления:
● – ороситель «А»; ■ – ороситель «Б»

Fig. 2. Variation in the water flow rate in the sprinklers as a function of pressure:
● – sprinkler «А» and ■ – sprinkler «Б»

Анализ результатов измерений средней интенсивности орошения оросителей (рис. 3) показал, что с увеличением давления у оросителя «А» наблюдается снижение интенсивности даже при условии повышения среднего расхода. Данный факт объясняется увеличением угла распыла, зафиксированного при проведении измерений. У оросителя «Б» изменения угла распыла не наблюдалось, поэтому средняя интенсивность орошения возрастает с увеличением давления.

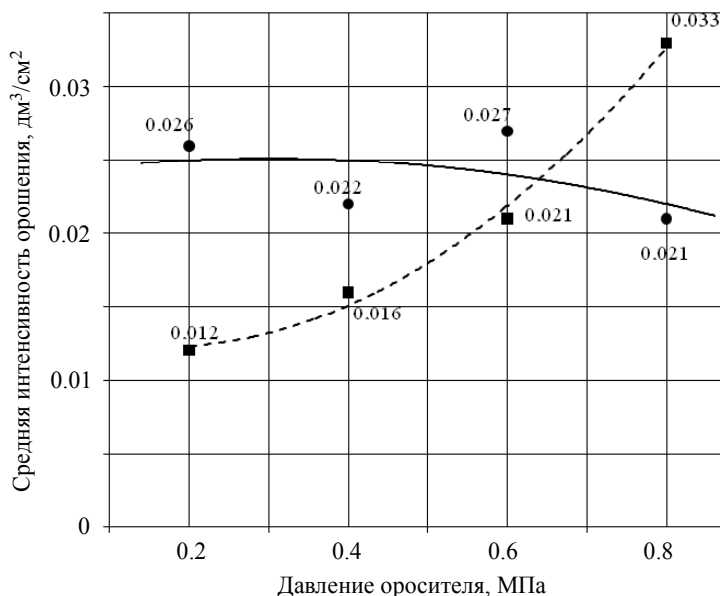


Рис. 3. Изменение средней интенсивности орошения оросителей в зависимости от давления: ● – ороситель «А»; ■ – ороситель «Б»

Fig. 3. Variation in the average intensity of irrigation of sprinklers as a function of pressure: ● – sprinkler «А» and ■ – sprinkler «Б»

Результаты измерения диаметра капель показали, что диаметр капель оросителя «А» в зависимости от давления изменяется незначительно и составляет в среднем 430 мкм. Напротив, у оросителя «Б» с увеличением давления до 0.8 МПа наблюдалось уменьшение диаметра капель более чем в 4.5 раза от диаметра при давлении 0.2 МПа.

Исследования влияния распыленной воды на тепловой поток

Условия проведения экспериментов по исследованию влияния распыленной воды на тепловой поток следующие. Фиксация значений плотности теплового потока начиналась с момента зажигания модельного очага. На 90-й секунде начиналась подача воды и работа оросителей. После 210 с проведения экспериментов подача воды прекращалась, при этом значения плотности теплового потока фиксировались до затухания очага пожара. Оценки систематической и случайной погрешностей показали, что измерения плотности теплового потока q проводились с погрешностью $q \pm 0.3$ кВт/м².

Во время проведения первых двух экспериментов направление распыла было сверху вниз. Результаты измерений плотности теплового потока при различных значениях давления представлены на рис. 4 и 5.

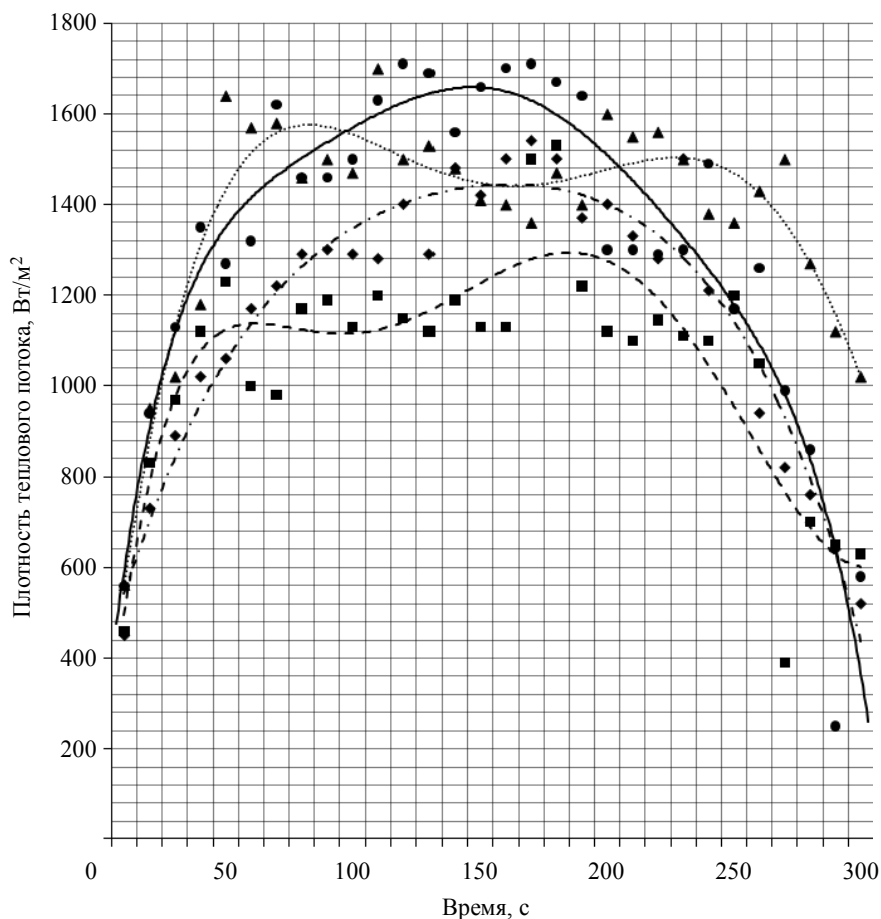


Рис. 4. Изменение плотности теплового потока под воздействием распыленной воды, подаваемой сверху вниз при различном давлении из оросителя «А»:

—●— 0.2 МПа; —■— 0.4 МПа;▲..... 0.6 МПа; —◆— 0.8 МПа
Fig. 4. Variation in the heat flux density under effect of the sprayed water supplied from the top downward at various pressures of sprinkler «А»:
 —●— 0.2 МПа; —■— 0.4 МПа;▲..... 0.6 МПа; —◆— 0.8 МПа

Видно, что подача распыленной воды после 90 с вызывает незначительное ослабление теплового потока на 3.0 % при давлении 0.6 МПа у оросителя «А» и на 5.8 % при 0.4 МПа у оросителя «Б». В остальных случаях снижения тепловых потоков не наблюдалось. При этом было зафиксировано увеличение значений плотности теплового потока и интенсивности горения модельного очага пожара, выраженное в увеличении высоты пламени. Снижение значений тепловых потоков после 210 с связано с прекращением подачи распыленной воды, а также с дальнейшим выгоранием топлива и затуханием очага горения.

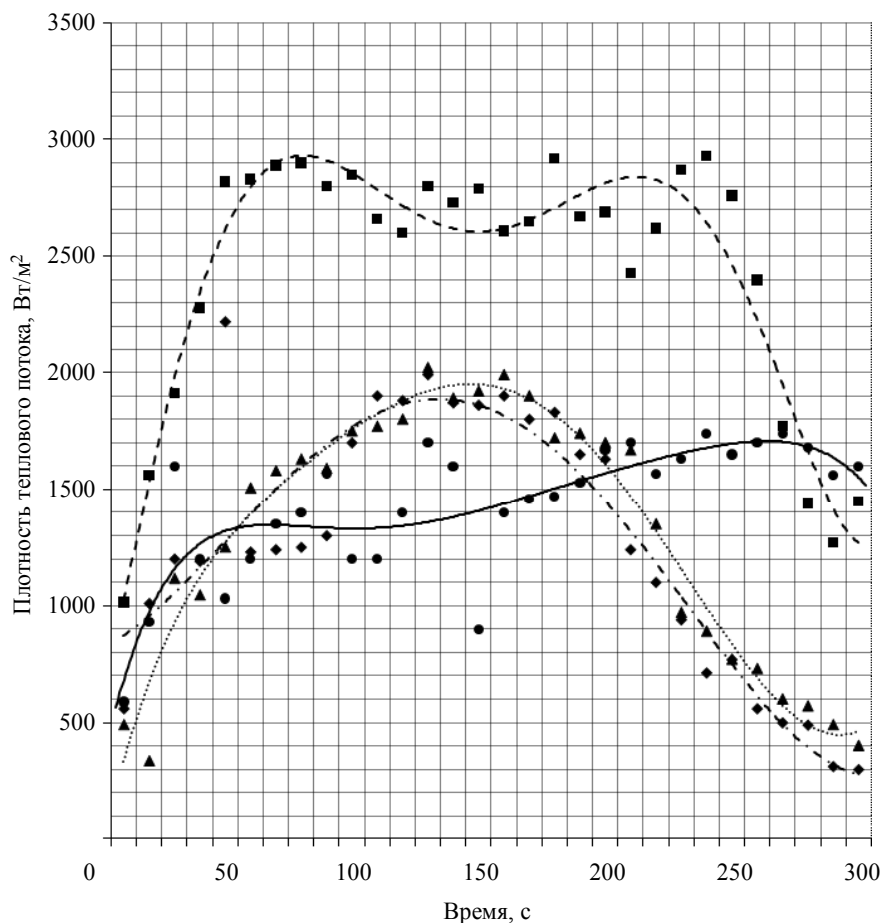


Рис. 5. Изменение плотности теплового потока под воздействием распыленной воды, подаваемой сверху вниз при различном давлении из оросителя «Б»:
 —●— 0.2 МПа; —■— 0.4 МПа;▲..... 0.6 МПа; —◆— 0.8 МПа

Fig. 5. Variation in the heat flux density under effect of the sprayed water supplied from the top downward at various pressures of sprinkler «B»:
 —●— 0.2 MPa; —■— 0.4 MPa;▲..... 0.6 MPa; —◆— 0.8 MPa

Увеличение интенсивности горения и, как следствие, повышение значений тепловых потоков объясняется попаданием дополнительного потока воздуха в зону горения бензина. Очевидно, что данный поток воздуха формировался потоком распыленной воды, так как повышение плотности теплового потока было зафиксировано в период работы оросителей. Увеличение интенсивности горения бензина может наблюдаться при попадании в зону горения капель воды, однако посредством использования защитных щитов это было исключено.

По результатам экспериментов, рассматривающих распространение пожара в автостоянках закрытого типа по принятому сценарию, можно заключить, что работа традиционной системы пожаротушения с подачей воды сверху вниз не обеспечивает в полной мере снижение тепловых потоков и нераспространение огня на

рядом стоящий транспорт. При этом большая часть воды попадает на кузов автомобиля, а не в горящий салон или подкапотное пространство.

При изменении условий проведения экспериментов, когда подача воды производилась снизу вверх (оросители были установлены на уровне пола помещения), удалось добиться существенного снижения интенсивности теплового излучения от очага пожара. При этом движение теплового потока от очага пожара и потока распыленной воды происходит в одном направлении – вверх. В результате движения двух потоков в одном направлении область турбулентного режима смещается вверх по вертикали от уровня пола. Это способствует дополнительному снижению интенсивности теплового излучения. Результаты измерений плотности теплового потока для этого случая представлены на рис. 6.

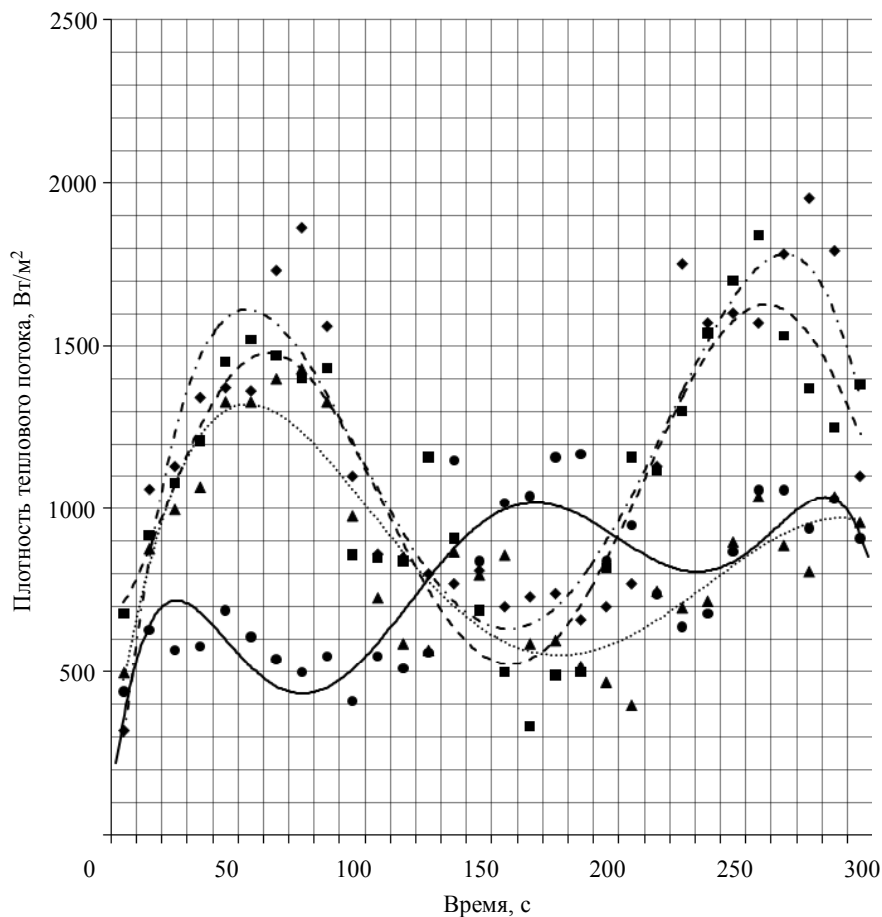


Рис. 6. Изменение плотности теплового потока под воздействием распыленной воды с направлением подачи снизу вверх: —●— 0.2 МПа ороситель «А»; —■— 0.4 МПа ороситель «Б»;▲..... 0.6 МПа ороситель «Б»; —◆— 0.8 МПа ороситель «Б»

Fig. 6. Variation in the heat flux density under effect of the sprayed water supplied from the bottom upwards: —●— sprinkler «А» at 0.2 MPa; —■— sprinkler «Б» at 0.4 MPa;▲..... sprinkler «Б» at 0.6 MPa; and —◆— sprinkler «Б» at 0.8 MPa

При испытаниях с применением оросителя «А», имеющего сплошной конус распыла с углом распыла, превышающим 180° , было зафиксировано попадание капель воды в зону горения бензина. Этот факт объясняет увеличение плотности теплового потока после 90 с эксперимента.

При работе оросителя «Б» (полый конус распыла, угол распыла не более 80°) попадания капель воды в зону горения не наблюдалось. В результате было зафиксировано значительное снижение плотности теплового потока: на 44,6 % при давлении 0,4 МПа; на 48,4 % при давлении 0,6 МПа; на 48,5 % при давлении 0,8 МПа.

Прекращение подачи воды после 210 с вызывает возрастание тепловых потоков, которое прекращается по мере выгорания топлива модельного очага пожара.

Выводы

Экспериментально установлено, что поток распыленной воды из оросителей, подаваемый сверху, за счет эжектируемого потока воздуха в очаг пожара, может привести к увеличению интенсивности горения и, как следствие, к увеличению теплового потока, воздействующего на расположенную рядом пожарную нагрузку.

Наиболее эффективной защитой от распространения пожара за счет теплового потока является их оборудование системой пожаротушения распыленной водой с расположением оросителей на уровне пола и направлением потока распыленной воды снизу вверх.

Эффективность применения предлагаемого способа пожаротушения обусловлена:

- локализацией пожара в пределах очага пожара за счет снижения воздействия теплового потока от горящего автомобиля на соседние транспортные средства до 50 % в зависимости от технических характеристик оросителей;

- повышением вероятности успеха ликвидации горения на ранней стадии пожара вследствие увеличения объема воды, попавшей непосредственно в очаг (шины, декоративные элементы отделки кузова автомобиля, салон автомобиля через разрушенное остекление);

- увеличением времени безопасной эвакуации людей за счет вовлечения продуктов горения потоком распыленной воды и сосредоточения их в припотолочном пространстве.

Реализация предложенного способа наиболее актуальна для защиты мест автомобильных парковок с использованием механизированных средств доставки и установки автомобиля. Разработанный способ пожаротушения может быть применен также на объектах защиты складского и производственного назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *СП 5.13130.2009*. Системы противопожарной защиты. Установки пожарной сигнализации и пожаротушения автоматические. Нормы и правила проектирования. М.: ФГУ ВНИИПО, 2009. 107 с.
2. *Bin Zhao, Joël Kruppa*. Structural behaviour of an open car park under real fire scenarios // *Fires and Materials*. 2004. V. 28 (2-4). P. 269–280. DOI:10.1002/fam.867.
3. *Орлов О.И.* Особенности пожаров в автостоянках закрытого типа. Математическая модель воспламенения материалов автомобиля под воздействием теплового потока в условиях экранирующего воздействия распыленной воды // *Пожарная безопасность*. 2018. № 1. С. 55–63.
4. *ГОСТ Р 51043-2002*. Установки водяного и пенного пожаротушения автоматические. Оросители. Общие технические требования. Методы испытаний. М.: ИПК Издательство стандартов, 2002. 28 с.

Статья поступила 18.10.2018 г.

Khasanov I.R., Orlov O.I. (2019) EFFICIENCY OF THE SCREENING CAPACITY OF SPRAYED WATER DURING A FIRE *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 132–140

DOI 10.17223/19988621/60/10

Keywords: heat flux, fire, sprayed water, screening capacity.

In this paper, the screening capacity of water droplets supplied from the sprinkler automatic fire-fighting systems are considered. The description of experimental setup, which allows to investigate dispersion and screening capacity of sprayed water, is given. The results of the study on the particle size distribution of sprayed water at various pressures of water flow in the sprinklers are presented. The effect of sprayed water on the density of heat flux emitted from the model fire source is studied. It is shown that the method of water supply (top or bottom) has a significant impact on the efficiency of fire extinguishing. It is established that the flow of sprayed water supplied from the top may lead to an increase in the combustion intensity due to the air flow involved into the fire during supply. An effective prevention of fire from spreading is a sprayed water supply from the sprinklers located at the floor level ducting the water from the bottom upwards. An alternative method of fire protection is proposed.

KHASANOV Irek Ravilevich (Doctor of Technical Sciences, All-Russian Research Institute for Fire Protection of Emercom of Russia, Balashikha, Moscow Region, Russian Federation). E-mail: irhas@rambler.ru

ORLOV Oleg Ivanovich (Head of the expert-consulting division, Ivanovo Fire and Rescue Academy of Emercom of Russia, Ivanovo, Russian Federation). E-mail: orlov.iigps@gmail.com

REFERENCES

1. Set of rules SP 5.13130.2009 (2009) *Sistemy protivopozharnoy zashchity. Ustanovki pozharnoy signalizatsii i pozharotusheniya avtomaticheskoe. Normy i pravila proektirovaniya* [Fire protection systems. Installation of the automatic fire alarm and fire extinguishing systems. Rules and regulations of design]. Moscow: FGU VNIPO.
2. Zhao B., Kruppa J. (2004) Structural behavior of an open car park under real fire scenarios. *Fires and Materials*. 28(2-4). pp. 269–280. DOI: 10.1002/fam.867.
3. Orlov O.I. (2018) Osobennosti pozharov v avtostoyankakh zakrytogo tipa. *Matematicheskaya model' vosplamneniya materialov avtomobilya pod vozdeystviem teplovogo potoka v usloviyakh ekraniruyushchego vozdeystviya raspylennoy vody* [Features of the fires in closed parking lots. Mathematical model of the ignition of car materials resulting from a heat flux under the shielding effect of sprayed water]. *Pozharnaya bezopasnost' – Fire Safety*. 1. pp. 55–63.
4. Standard GOST R 51043-2002 (2002) *Ustanovki vodyanogo i pennogo pozharotusheniya avtomaticheskoe. Orositeli. Obshchie tekhnicheskie trebovaniya. Metody ispytaniy* [Installation of the automatic water and foam fire-fighting systems. Sprinklers. General technical requirements. Test methods]. Moscow: IPK Izdatel'stvo standartov.

Received: October 18, 2018

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/60/11

Д.В. Янов, А.С. Бодров, Н.В. Пахнутова, С.А. Зелепугин

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИНАМИЧЕСКОГО
КАНАЛЬНО-УГЛОВОГО ПРЕССОВАНИЯ МЕДНЫХ ОБРАЗЦОВ
С УЧЕТОМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НАГРУЖЕНИЯ¹**

Численно моделируется процесс интенсивной пластической деформации образца из меди при динамическом канально-угловом прессовании. В качестве исходных данных использованы экспериментальные значения скорости и давления, действующего на образец. Численные расчеты проводились с помощью модифицированного метода конечных элементов с использованием модели разрушения активного типа. В результате определены значения скорости и давления, действующего на тыльную часть образца, при которых возможно успешное прохождение динамического канально-углового прессования медного образца.

Ключевые слова: *интенсивная пластическая деформация, динамическое канально-угловое прессование, метод конечных элементов.*

Одним из основных направлений в области материаловедения является получение материалов с улучшенными физико-механическими свойствами. На данный момент уровень развития технологий дает возможность получать наноструктурные и ультрамелкозернистые (УМЗ) металлы и сплавы с размером зерна порядка 50–150 нм [1]. Металлы с УМЗ-структурой имеют уникальные свойства и применяются во многих областях науки и техники. Повышенная прочность, хладноломкость, устойчивость к радиации и многие другие характеристики тесно связаны с УМЗ-металлами, но отдельно стоит вопрос о способах получения такой структуры. Широкое развитие получила технология компактирования порошков, в том числе взрывной [2], из дисперсных частиц металла, полученных при помощи газовой конденсации, химического синтеза и т.д. При этом методика компактирования порошков имеет серьезные недостатки, такие, как остаточная пористость, загрязненность порошков при их подготовке, небольшие размеры конечного изделия.

Активные исследования в области интенсивных пластических деформаций (ИПД) дают возможность взглянуть по-новому на процесс измельчения и образования УМЗ-структуры металла [1]. Известно, что при таких технологических процессах, как прокатка, вытяжка, прессовка, размер зерна металла уменьшается в несколько раз, но границы зерен имеют малоугловую разориентировку, поэтому для получения большеугловых границ зерен используют специальные схемы ИПД: кручение под высоким давлением, равноканальное угловое прессование (РКУП) [1], динамическое канально-угловое прессование (ДКУП) [3].

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 0365-2019-0004) при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-48-700041 p_a).

Работы различных авторов в области интенсивной пластической деформации можно разделить на два направления: экспериментальные исследования процессов ИПД и численное моделирование. Например, в работе [4] представлено исследование особенностей деформирования образцов из меди, легированных цирконием, гафнием и оловом, прошедших ДКУП. Было выявлено, что в процессе динамического прессования образец из сплава циркониевой бронзы, подвергнутый предварительному гомогенизационному отжигу при температуре 800 °С, более устойчив к появлению трещин, чем образец, не прошедший отжиг. При динамическом прессовании образца из сплава гафниевой бронзы, также подвергнутого гомогенизационному отжигу при температуре 800 °С, во всем сечении по плоскости сдвига наблюдаются трещины. То есть в результате легирования медного образца происходит его интенсивное упрочнение в процессе ДКУП и, как следствие, проявляется тенденция к появлению трещин, но в зависимости от легирующей добавки и предварительных технологических операций разрушение образца в процессе ДКУП может быть предотвращено. Также авторами работы [5] подробно изучено изменение микроструктуры и свойств образца из сплава меди с хромом и цирконием при ДКУП. Был выявлен значительный рост механических характеристик сплава после ДКУП, а именно, увеличение микротвердости Cu-0.14Cr-0.04Zr с 700 до 1600 МПа, увеличение предела текучести с 100 до 464 МПа.

В работе [6] представлены результаты численного моделирования процесса РКУП методом сглаженных частиц (SPH) и методом конечных элементов (МКЭ), а также проведен сравнительный анализ двух подходов к решению задачи. Идея применения метода сглаженных частиц к динамическому прессованию связана с тем, что в процессе ИПД конечные элементы в МКЭ подвергается значительным деформациям, в результате чего конечные элементы начинают вытягиваться и вырождаться. В таком случае говорить о сходимости численного решения нельзя. Метод SPH относится к бессеточным методам и лишен такого недостатка, так как модель исследуемой среды состоит из частиц определённого радиуса, взаимодействие между которыми описывается с помощью функции ядра. В работе делается вывод о пригодности метода SPH к описанию процессов интенсивного пластического деформирования.

Авторами [7] исследована структура и механические свойства образца из алюминиевого сплава 1560 после ИПД методом прессования с рифлением. Данный метод ИПД позволяет в несколько раз увеличить механические характеристик легких сплавов за счет изменения зеренной структуры. Особенность такого подхода заключается в том, что обрабатываемые образцы имеют форму в виде лент или пластин. В результате механических испытаний алюминиевого сплава 1560, прошедшего четыре цикла прессования, получено, что микротвердость увеличилась в 2.8 раза и составляет 112 HV, а предел текучести возрос в 1.4 раза и составляет 177 МПа.

В настоящее время большой интерес представляют работы в области численного моделирования микроструктуры материалов. В [8] представлен метод молекулярной динамики, описывающий поведение зеренной структуры в процессе ИПД. В основе метода лежит уравнение Ньютона и потенциал Леннарда – Джонса, описывающий взаимодействие молекул. В двумерной постановке рассмотрено поведение четырехзеренной модели при различных стадиях нагружения: упругая деформация, пластическая деформация и изменение зерен, разгрузка. Было выявлено, что при достижении критических напряжений в четырехзеренной модели

возникают дефекты, которые в дальнейшем разрастаются по обширной площади зерна. Также происходят изменения в самой структуре, измельчение и перестройка зерен.

В данной работе рассматривается процесс ДКУП, который является модификаций РКУП. Процесс РКУП проводится при помощи прессового оборудования, при этом приходится неоднократно пропускать металлический образец через пересекающиеся каналы для достижения однородной УМЗ-структуры в объеме образца. В процессе ДКУП вместо прессы используется, как правило, пороховой заряд, вследствие чего происходит быстрый рост давления, действующего на тыльную часть образца, а сам образец может быть разогнан до высоких скоростей. Применение метода ДКУП дает возможность снизить количество проходов образца в несколько раз за счет высоких скоростей деформаций с сохранением пластических свойств материала образца. При этом размеры образцов могут быть достаточно большими. Динамическое канально-угловое прессование применимо ко многим металлам и сплавам, интерметаллидам, конструкционным, функциональным материалам [3, 4], поэтому необходим более глубокий анализ этого технологического процесса со стороны механики деформируемого твердого тела и механики разрушения, в том числе методами математического моделирования.

Целью данной работы является численное моделирование и анализ процесса ДКУП с учетом параметров давления и ускорения, определенных из экспериментов [9], а также определение величины скорости, при которой возможно успешное прохождение образцом пересекающихся каналов. Принципиальным отличием от предыдущих работ в области численного моделирования [10–14] является исследование процесса ДКУП в условиях нагружения, приближенных к реализующимся в экспериментах [9].

Постановка задачи. Выбор экспериментальных значений

Рассматривается задача о движении медного (М1) образца квадратного сечения в процессе ДКУП. Длина образца 65 мм, размеры в сечении 16×16 мм. В начальный момент времени образец находится в вертикальном канале оснастки и имеет начальную скорость v_0 и давление P_0 , действующие на тыльную часть образца. Стенки оснастки считаются абсолютно жесткими.

На рис. 1 изображена схема пересечения каналов оснастки в продольном сечении, наклонная площадка находится под углом 45° , высота наклонной площадки составляет 4 мм.

На рис. 2 изображена кривая, интерполирующая экспериментальные данные изменения во времени давления, действующего на тыльную часть образца [9]. С учетом представленных на рис. 2 экспериментальных результатов вопрос о выборе величины давления, действующего на тыльную часть образца, в качестве начального параметра для расчета процесса прохождения образцом пересечения каналов, является нетривиальным. Из анализа результатов численных расчетов процессов ДКУП [10–14] можно определить продолжительность основной стадии прохождения каналов, составляющей 0.8–1.0 мс. Экспериментальные данные, приведенные на рис. 2, показывают, что в течение данного интервала процесса давление изменяется не столь значительно. Это позволяет выбрать для расчетов постоянную величину давления, осредненную на интервале в 1 мс. На рис. 2 штриховыми вертикальными линиями определен такой интервал, в качестве осредненного давления выбрано значение $P_0 = 310$ МПа.

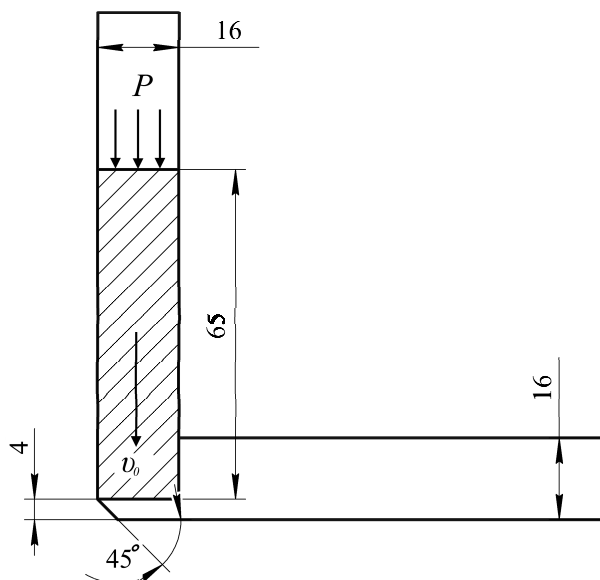


Рис. 1. Постановка задачи, размеры указаны в мм
Fig. 1. Statement of the problem (the sizes are given in mm)

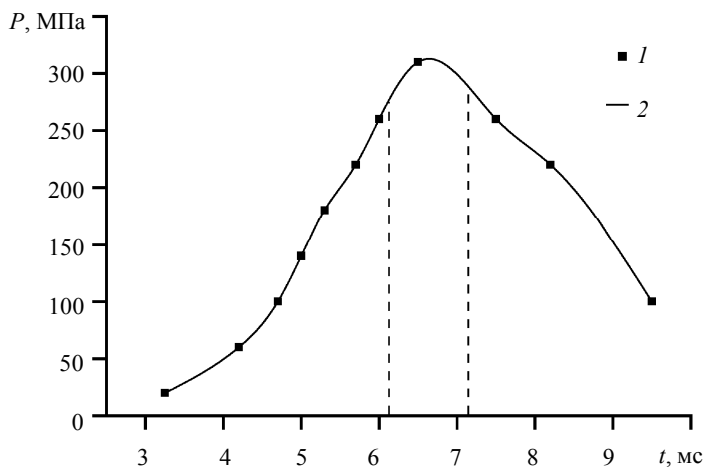


Рис. 2. График зависимости давления от времени.
 1 – экспериментальные данные [9], 2 – интерполяционная кривая

Fig. 2. Pressure as a function of time:

1, experimental data from [9] and 2, interpolation curve

Используя результаты измерений скорости движения образца [9], построена интерполяционная кривая изменения скорости образца во времени (рис. 3). На рис. 3 можно наблюдать практически линейную часть графика в интервале времени 4–10 мс, которую можно аппроксимировать прямой. Вычислив тангенс угла наклона аппроксимирующей прямой, можно определить ускорение образца $2.7 \cdot 10^5 \text{ м/с}^2$. Определив его ускорение, можно варьировать скорость образца, с ко-

торой он начинает прохождение пересечения каналов, в широких пределах 0–1800 м/с (согласно рис. 3) в зависимости от пройденного образцом расстояния по вертикальному каналу до начала процесса ДКУП. Таким образом, на основании экспериментальных данных [9] в данной работе выбраны давление $P_0 = 310$ МПа, действующее на тыльную поверхность образца в течение всего процесса ДКУП, и интервал изменения начальной скорости образца 0–1800 м/с.

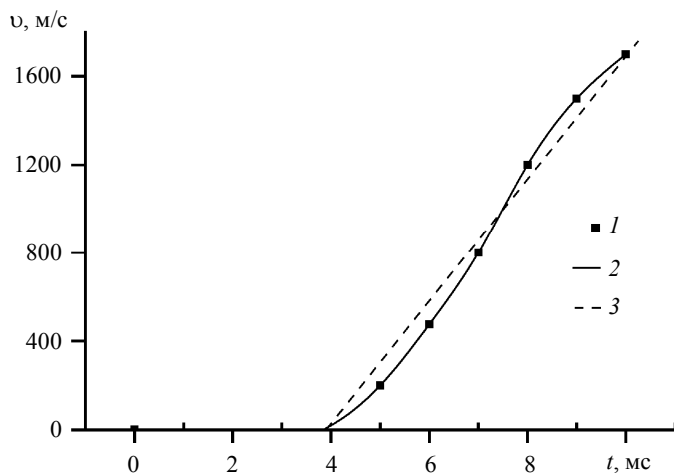


Рис. 3. Скорость движения образца в зависимости от времени:
1 – экспериментальные данные [9], 2 – интерполяционная кривая,
3 – аппроксимирующая прямая

Fig. 3. Velocity of the sample as a function of time: 1, experimental data from [9],
2, interpolation curve, and 3, approximating line

Физико-математическая модель

Решение задачи проводилось модифицированным методом конечных элементов в трехмерной постановке. В качестве базовых уравнений используется уравнение неразрывности (1), движения (2) и энергии (3) [10–13]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}; \quad (2)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где ρ – плотность, t – время, v_i – компоненты скорости, x_i – компоненты пространственных переменных, E – удельная внутренняя энергия, $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, $P = P_c(\rho/\rho_c)$ – среднее давление, δ_{ij} – символ Кронекера, P_c – давление в неповрежденной части среды, S_{ij} – девиатор напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций.

Объем повреждаемой среды W состоит из объема конденсированной фазы W_c и объема пор W_f . Для описания степени поврежденности среды вводится удель-

ный объем микроповреждений V_f и средняя плотность повреждаемой среды $\rho = \rho_c(W/W)$. Моделирование разрушения материала осуществляется с использованием модели разрушения активного типа [15], где $P^* = P_k V_1 / (V_f + V_1)$, V_1 , V_2 , K_f , P_k – константы:

$$\frac{dV_f}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{если } |P_c| \leq P^* \text{ или } (P_c > P^* \text{ и } V_f = 0), \\ -\text{sign}(P_c) K_f (|P_c| - P^*) (V_2 + V_f), & \text{если } P_c < -P^* \text{ или } (P_c > P^* \text{ и } V_f > 0). \end{cases}$$

Для описания пластического деформирования используется условие текучести Мизеса, модуль сдвига и динамический предел текучести зависят от степени повреждения материала и температуры.

Для описания поведения материала под нагрузкой используется уравнение состояния типа Ми – Грюнайзена

$$P_c = \rho_0 a^2 \mu + \rho_0 a^2 [1 - \gamma_0 / 2 + 2(b-1)] \mu^2 + \rho_0 a^2 [2(1 - \gamma_0 / 2)(b-1) + 3(b-1)^2] \mu^3 + \gamma_0 \rho_0 E, \quad (4)$$

где ρ_0 – начальная плотность материала, $\mu = V_0 / (V - V_f) - 1$, γ_0 – коэффициент Грюнайзена, V_0 – начальный объем, V – текущий объем, a , b – константы адиабаты Гюгонио.

В работе использованы представления, согласно которым на изменение пористости влияет только шаровая компонента напряжений или давление, а компоненты девиатора напряжений ограничены независимой девиаторной функцией текучести

$$2G(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij}) = \frac{dS_{ij}^0}{dt} + \lambda S_{ij}. \quad (5)$$

Производная по Яману определяется следующим образом:

$$\frac{dS_{ij}^0}{dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik}W_{jk} - S_{jk}W_{ik}, \quad (6)$$

где G – модуль сдвига, σ – динамический предел текучести, параметр λ равен 0 при упругих деформациях, а при пластических определяется с помощью критерия текучести Мизеса:

$$G = G_0 K_T (1 + \frac{cP}{(1+\mu)^{1/3}}) \frac{V_3}{(V_f + V_3)}; \quad (7)$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 K_T (1 + \frac{cP}{(1+\mu)^{1/3}}) (1 - \frac{V_f}{V_4}), & \text{если } V_f \leq V_4, \\ 0, & \text{если } V_f \geq V_4. \end{cases} \quad (8)$$

Тепловой коэффициент K_T вычисляется следующим таким образом:

$$K_T = \begin{cases} 1, & \text{если } T_0 < T < T_1, \\ \frac{T_m - T}{T_m - T_1}, & \text{если } T_1 < T < T_m, \\ 0, & \text{если } T > T_m, \end{cases} \quad (9)$$

где T_m – температура плавления вещества, c , V_3 , V_4 , T_1 – константы материала. Значения параметров материала: $\rho = 8930 \text{ кг/м}^3$, $a = 3940 \text{ м/с}$, $b = 1.49$, $\gamma_0 = 2.04$,

$G_0 = 41$ ГПа, $\sigma_0 = 0.43$ ГПа, $T_m = 1358$ К, $T_1 = 1154$ К, $c = 280$ ГПа⁻¹, $K_f = 0.005$,
 $P_k = -0.7$ ГПа, $V_1 = 5.6 \cdot 10^{-4}$ см³/г, $V_2 = 5.6 \cdot 10^{-5}$ см³/г, $V_3 = 0.0224$ см³/г,
 $V_4 = 0.0672$ см³/г.

Результаты расчетов

Основная задача численных расчетов – выбор начальной скорости образца, необходимой для успешного прохождения каналов оснастки при выбранном постоянном давлении $P_0 = 310$ МПа. Серия численных расчетов показала, что рациональное значение скорости для медного образца составило 170 м/с. При повышении данного значения скорости движения происходят критические деформации образца и рост микрповреждений, а при меньших скоростях образец застревает в пересекающихся каналах [14].

На рис. 4 представлена динамика процесса прессования и поля удельной энергии сдвиговых деформаций. Из анализа результатов видно, что значительным пластическим деформациям подвергается почти весь образец из меди, кроме передней и тыльной частей, где пластическая деформация незначительна. Также в процессе ДКУП происходит равномерное распределение деформаций и удлинение образца в продольном направлении.

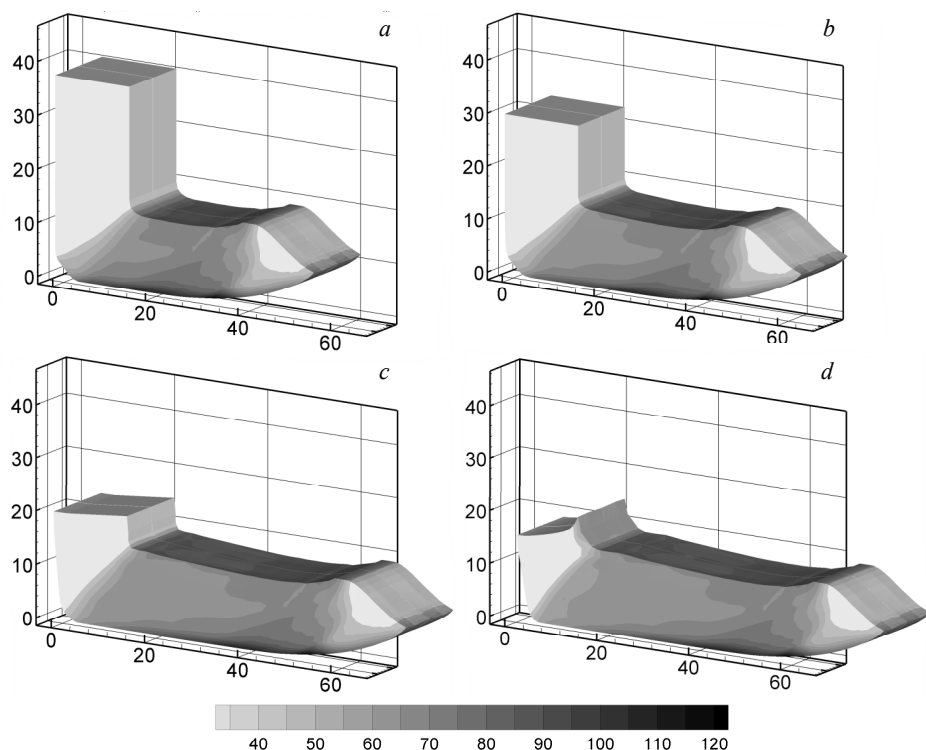


Рис. 4. Поля удельной энергии сдвиговых деформаций, кДж/кг, в различные моменты времени при $P_0 = 310$ МПа, $v_0 = 170$ м/с: $t = 250$ мкс (a), $t = 350$ мкс (b), $t = 550$ мкс (c), $t = 795$ мкс (d)

Fig. 4. Fields of a specific energy of shear deformations, kJ/kg, for $P_0 = 310$ МПа, $v_0 = 170$ м/с at various time instants: $t = a)$ 250, $b)$ 350, $c)$ 550, and $d)$ 795 μ s

На рис. 5, *a* изображено распределение температуры по образцу. Максимальная температура $T = 600$ К соответствует области интенсивного взаимодействия образца со стенками каналов и находится в нижней части образца. Важно, что при данной температуре не происходит рост зерен [3]. При приближении тыльной поверхности образца к пересекающимся каналам оснастки происходит образование выступа, такой характер деформирования согласуется с экспериментальными формами образца, полученными в процессе ДКУП [3].

На рис. 5, *b* представлены поля удельного объема микроповреждений. Из рисунка видно, что максимальным повреждениям подвергаются в основном несколько областей на верхней плоскости образца, расположенные в его передней и тыльной частях. Рост микроповреждений в передней части связан с особенностями деформирования на начальном этапе ДКУП, в том числе с образованием свободной поверхности образца между верхней плоскостью образца и верхней границей горизонтального канала. Рост микроповреждений в тыльной части связан с особенностями деформирования на заключительном этапе ДКУП при образовании выступа на верхней плоскости образца и растяжении материала в данной области.

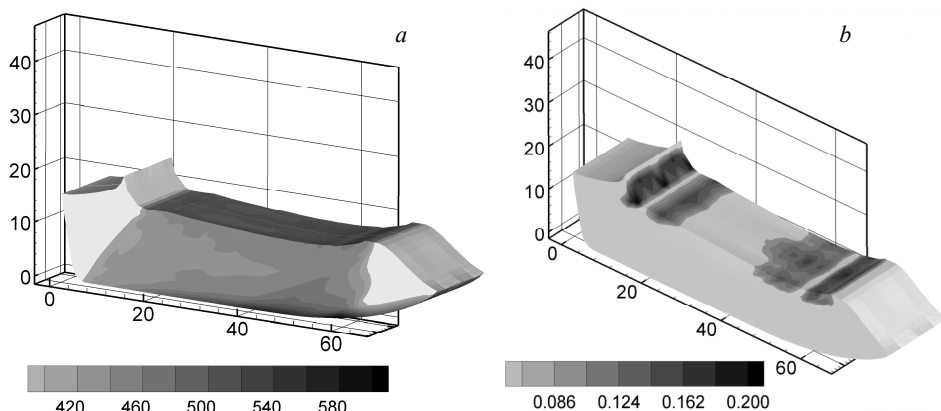


Рис. 5. Параметры процесса при $P_0 = 310$ МПа, $v_0 = 170$ м/с, $t = 795$ мкс:

a – поля распределения температуры, К, *b* – удельный объем микроповреждений, $\text{см}^3/\text{г}$

Fig. 5. Process parameters at $P_0 = 310$ МПа, $v_0 = 170$ м/с, $t = 795$ μs :

(*a*) fields of temperature distribution (K) and (*b*) specific volume of microdamages (cm^3/g)

Заключение

В результате проведенных исследований с использованием экспериментальных данных подобраны значения давления $P_0 = 310$ МПа и ускорения $2.7 \cdot 10^5$ м/с², которые позволили провести численное моделирование ДКУП в условиях нагружения, приближенных к реализующимся в экспериментах. Определено значение начальной скорости движения медного образца перед попаданием в область пересечения каналов, равное 170 м/с, при котором возможно успешное прохождение ДКУП. При увеличении скорости образца происходит критическая деформация и разрушение в начальный период (0.1–0.15 мс) процесса ДКУП, а при уменьшении – возрастает вероятность того, что образец застрянет в пересекающихся каналах. Уменьшение давления также приводит к застреванию при неизменной начальной скорости 170 м/с. Таким образом, образец из меди практически полностью прохо-

дит пересекающуюся оснастку со значительными пластическими деформациями, обеспечивающими измельчение зеренной структуры, при параметрах: скорость $v_0 = 170$ м/с, давление $P_0 = 310$ МПа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Valiev R.Z., Islamgaliev R.K., Alexandrov I.V. Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation // Progress in Materials Science. 2000. V. 45. Issue 2. P. 103–189. DOI: 10.1016/s0079-6425(99)00007-9.
2. Горельский В.А., Зелепугин С.А. Численное моделирование компактирования порошков при осесимметричном ударе // Порошковая металлургия. 1992. № 4. С. 11–16. DOI: 10.1007/BF00796275.
3. Бродова И.Г., Зельдович В.И., Хомская И.В., Шорохов Е.В., Петрова А.Н., Хейфец А.Э., Шириккина И.Г., Фролова Н.Ю. Структура и свойства субмикроструктурных и нанокристаллических цветных металлов и сплавов при экстремальных воздействиях / под ред. И.Г. Бродовой. Екатеринбург: Издательство УМЦ УПИ, 2018. 363 с.
4. Столбовский А.В., Попов В.В., Попова Е.Н., Фалахутдинов Р.М., Шорохов Е.В. Особенности деформационного поведения бронз при динамическом канально-угловом прессовании // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2016. № 11–5. С. 858–863.
5. Khomskaya I.V., Zel'dovich V.I., Frolova N.Yu., Kheifets A.E., Shorokhov E.V., Abdullina D.N. Effect of high-speed dynamic channel angular pressing and aging on the microstructure and properties of Cu-Cr-Zr alloys // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 447. 012007. DOI: 10.1088/1757-899X/447/1/012007.
6. Fagan T., Das R., Lemiale V., Estrin Y. Modelling of equal channel angular pressing using a mesh-free method // J. Materials Science. 2012. V. 47. P. 4514–4519. DOI: 10.1007/s10853-012-6296-3.
7. Москвичев Е.Н., Скрипняк В.А., Лычагин Д.В., Козулин А.А., Скрипняк В.В. Влияние структуры на сопротивление пластической деформации алюминиевого сплава 1560 после обработки методом прессования рифлением // Письма о материалах. 2016. Т. 6. № 2. С. 141–145. DOI: 10.22226/2410-3535-2016-2-141-145.
8. Uehara T. Molecular dynamics simulation of grain refinement in a polycrystalline material under severe compressive deformation // Materials Sciences and Applications. 2017. V. 8. P. 918-932. DOI: 10.4236/msa.2017.812067.
9. Русак И.Г., Ермолаев М.А. Анализ влияния различных факторов на характеристики артиллерийского выстрела // Вестник ИжГТУ. 2014. № 4(64). С. 162–165.
10. Шипачев А.Н., Ильина Е.В., Зелепугин С.А. Деформирование титановых образцов при динамическом канально-угловом прессовании // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 4. С. 20–24.
11. Шипачев А.Н., Зелепугин А.С., Ильина Е.В., Зелепугин С.А. Моделирование динамического канально-углового прессования титановых образцов по двухпоршневой схеме нагружения // Деформация и разрушение материалов. 2012. № 10. С. 7–11.
12. Бодров А.С., Олимпиаева Н.В., Зелепугин А.С., Зелепугин С.А. Численное моделирование процессов динамического канально-углового прессования титановых образцов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. №5 (37). С. 56–63. DOI: 10.17223/19988621/37/5.
13. Bodrov A.S., Zelepugin S.A. Numerical simulation of dynamic channel-angular pressing of copper specimens // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. V. 177. 012056. DOI: 10.1088/1757-899X/177/1/012056.
14. Зелепугин С.А., Бодров А.С., Пахнutowa Н.В. Диаграмма процесса динамического канально-углового прессования титановых образцов // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 11-1. С. 28-31. DOI: 10.17513/mjpf.11924.
15. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 407 с.

Статья поступила 18.10.2018 г.

Yanov D.V., Bodrov A.S., Pakhnutova N.V., Zelepugin S.A. (2019) SIMULATION OF DYNAMIC CHANNEL-ANGULAR PRESSING OF COPPER SAMPLES WITH ALLOWANCE FOR EXPERIMENTAL DATA OF LOADING. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 141–151

DOI 10.17223/19988621/60/11

Keywords: severe plastic deformation, dynamic channel-angular pressing, finite element method.

One of the urgent problems in the field of materials science is producing of metals and alloys with an ultrafine-grained (UFG) structure. Metals with UFG structure are characterized by improved physical and mechanical properties, such as increased strength, cold brittleness, and radiation stability. This paper considers a method of dynamic channel-angular pressing (DCAP) which is used to obtain the UFG structure. The purpose of this work is to simulate numerically the DCAP process of a copper sample using experimental data of loading. The experimental data available in the scientific literature have been analyzed to specify the initial conditions as follows: the pressure acting on the rear part of the sample is $P_0=310$ MPa and the initial velocity of the sample can be varied in a wide range. Numerical simulation is performed using a modified finite element method within the framework of elastoplastic model of a damaged medium. The numerical computations have shown that the copper sample successfully undergoes the DCAP process at the following initial parameters: $v_0 = 170$ m/s and $P_0 = 310$ MPa. Almost the entire sample is exposed to uniform intense plastic deformations, except for the front and rear parts. Also, a slight elongation of the sample occurs along the longitudinal axis, and the temperature rises up to 600 K in the contact region of the sample with the walls of the horizontal part of the channel.

Financial support. The work was carried out within the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 0365-2019-0004) and partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-48-700041).

YANOV *Dmitriy Vasil'evich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dima.yanov97@mail.ru

BODROV *Aleksandr Stanislavovich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alex.bodrov@mail.ru

PAKHNU TOVA *Nadezhda Vladimirovna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nadin_04@mail.ru

ZELEPUGIN *Sergey Alekseevich* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: szel@yandex.ru

REFERENCES

1. Valiev R.Z., Islamgaliev R.K., Alexandrov I.V. (2000) Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation. *Progress in Materials Science*. 45(2). pp. 103–189. DOI: 10.1016/s0079-6425(99)00007-9.
2. Gorel'skii V.A., Zelepugin S.A. (1992) Numerical modeling of powder compaction with axisymmetrical impact. *Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics*. 31(4). pp. 291–295. DOI: 10.1007/BF00796275.
3. Brodova I.G., Zel'dovich V.I., Khomskaya I.V., Shorokhov E.V., Petrova A.N., Kheyfets A.E., Shirinkina I.G., Frolova N.Yu. (2018) *Struktura i svoystva submikrokrystallicheskih i nanokrystallicheskih tsvetnykh metallov i splavov pri ekstremal'nykh vozdeystviyakh* [Structure and properties of submicrocrystalline and nanocrystalline non-ferrous metals and alloys under extreme loading]. Ekaterinburg: Izdatel'stvo UMC UPI.

4. Stolbovsky A.V., Popov V.V., Popova E.N., Falakhutdinov R.M., Shorokhov E.V. (2016) Osobennosti deformatsionnogo povedeniya bronz pri dinamicheskom kanal'no-uglovom pressovanii [Specific features of strain behavior of bronzes under dynamic channel-angular pressing]. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy – International Journal of Applied and Fundamental Research*. 11-5. pp. 858–863.
5. Khomskaya I.V., Zel'dovich V.I., Frolova N.Yu., Kheifets A.E., Shorokhov E.V., Abdullina D.N. (2018) Effect of high-speed dynamic channel angular pressing and aging on the microstructure and properties of Cu-Cr-Zr alloys. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 447 (012007). DOI: 10.1088/1757-899X/447/1/012007
6. Fagan T., Das R., Lemiale V., Estrin Y. (2012) Modelling of equal channel angular pressing using a mesh-free method. *Journal of Materials Science*. 47. pp. 4514–4519. DOI: 10.1007/s10853-012-6296-3.
7. Moskvichev E.N., Skripnyak V.A., Skripnyak V.V., Kozulin A.A., Lychagin D.V. (2016) Influence of structure to plastic deformation resistance of aluminum alloy 1560 after groove pressing treatment. *Letters on Materials*. 6(2). pp. 141–145. DOI: 10.22226/2410-3535-2016-2-141-145.
8. Uehara T. (2017) Molecular dynamics simulation of grain refinement in a polycrystalline material under severe compressive deformation. *Materials Sciences and Applications*. 8. pp. 918–932. DOI: 10.4236/msa.2017.812067.
9. Rusyak I.G., Ermolaev M.A. (2014) Analiz vliyaniya razlichnykh faktorov na kharakteristiki artilleriyskogo vystrela [Wavelet-analysis application in problems about work of the regulated propulsion system]. *Vestnik IzhGTU – Bulletin of Kalashnikov ISTU*. 4(64). pp. 162–165.
10. Shipachev A.N., Il'ina E.V., Zelepugin S.A. (2010) Deformirovanie titanovykh obraztsov pri dinamicheskom kanal'no-uglovom pressovanii [Deformation of titanium samples under dynamic channel-angular pressing]. *Deformatsiya i razrushenie materialov*. 4. pp. 20–24.
11. Shipachev A.N., Zelepugin A.S., Il'ina E.V., Zelepugin S.A. (2012) Modelirovanie dinamicheskogo kanal'no-uglovogo pressovaniya titanovykh obraztsov po dvukhporshevoy skheme nagruzheniya [Simulation of dynamic channel-angular pressing of titanium samples using two-piston scheme of loading]. *Deformatsiya i razrushenie materialov*. 10. pp. 7–11.
12. Bodrov A.S., Olimpieva N.V., Zelepugin A.S., Zelepugin S.A. (2015) Chislennoe modelirovanie protsessov dinamicheskogo kanal'no-uglovogo pressovaniya titanovykh obraztsov [Numerical simulation of dynamic channel-angular pressing of titanium specimens]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(37). pp. 56–63. DOI: 10.17223/19988621/37/5.
13. Bodrov A.S., Zelepugin S.A. (2017) Numerical simulation of dynamic channel-angular pressing of copper specimens. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 177 (012056). DOI: 10.1088/1757-899X/177/1/012056.
14. Zelepugin S.A., Bodrov A.S., Pakhnutova N.V. (2017) The diagram of the dynamic channel-angular pressing of titanium specimen. *International Journal of Applied and Fundamental Research*. 11(1). pp. 28–31. DOI: 10.17513/mjpf.11924.
15. Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. (1996) *Udarno-volnovye yavleniya v kondensirovannykh sredakh* [Shock wave phenomena in condensed matter]. Moscow: Yanus-K.

Received: October 18, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНОСОВА Елизавета Петровна – старший преподаватель кафедры математики Уфимского государственного нефтяного технического университета, г. Уфа, Россия. E-mail: ae0809@mail.ru

БОДРОВ Александр Станиславович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: alex.bodrov@mail.ru

БОРЗЕНКО Евгений Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

ГИМАЛТДИНОВА Альфира Авкалевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики Уфимского государственного нефтяного технического университета, г. Уфа, Россия. E-mail: aa-gimaltdinova@mail.ru

ДЕМИН Виталий Анатольевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь, Россия. E-mail: demin@psu.ru

ЗЕЙНАЛЛЫ Фарах Мамед – ассистент кафедры информатики факультета математики и информатики Гянджинского государственного университета, г. Гянджа, Азербайджан. E-mail: farahzeynalli@rambler.ru

ЗЕЛЕПУГИН Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: szel@yandex.ru

ИВАНОВ Дмитрий Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Института пути, строительства и сооружений Российского университета транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия. E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

КОЗЛОВСКАЯ Татьяна Анатольевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, доцент кафедры геометрии Томского государственного университета. E-mail: t.kozlovskaya@math.tsu.ru

КОЛЕСНИКОВ Иван Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

КРЮКОВА Елизавета Андреевна – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: amerz@mail.ru

МАРДАНОВ Мисир Джумал – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан. E-mail: misirmardanov@yahoo.com

МЕРЗЛЯКОВ Александр Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: amerz@mail.ru

МОРЕНКО Ирина Вениаминовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН, г. Казань, Россия. E-mail: morenko@imm.knc.ru

ОРЛОВ Олег Иванович – начальник экспертно-консалтингового отдела Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России, г. Иваново, Россия. E-mail: orlov.iigps@gmail.com

ПАХНУТОВА Надежда Владимировна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: nadin_04@mail.ru

ХАСАНОВ Ирек Равильевич – доктор технических наук, главный научный сотрудник Всероссийского научно-исследовательского института противопожарной обороны МЧС России, г. Балашиха, Россия. E-mail: irhas@rambler.ru

ХЕГАЙ Ефим Игоревич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: efim_h@ftf.tsu.ru

ШАРИФОВ Ягуб Амняр – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов прикладного анализа факультета прикладной математики и кибернетики Бакинского государственного университета, г. Баку, Азербайджан. E-mail: sharifov22@rambler.ru

ЯНОВ Дмитрий Васильевич – студент физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: dima.yanov97@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. +7(3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 12.06.2019. Выпуск в свет 27.08.2019.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 12.42. Уч.-изд. л. 13.91. Тираж 250 экз. Заказ № 19. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 3935.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru