ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Математика и механика № 60

УДК 517.956.2, 517.968.25 MSC 31A25, 34G10, 35J25
DOI 10.17223/19988621/60/2

Д.Ю. Иванов

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В АБСТРАКТНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методом граничных интегральных уравнений получены решения краевых задач первого, второго и третьего рода для двумерного дифференциально-операторного уравнения $\Delta_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}(x_1, x_2)$ – функции со значениями в абстрактном гильбертовом пространстве *H*, $\boldsymbol{B}$ – генератор экспоненциально убывающей C_0-полугруппы сжатий в пространстве *H*. Доказана корректная разрешимость краевых задач в классе непрерывных по норме *H* функций. Также доказана корректная разрешимость граничных интегральных уравнений в пространстве функций с квадратично суммируемой нормой *H* и в пространствах k раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в пространствах типа Соболева, порожденных n степенями оператора $\boldsymbol{B}$.

Ключевые слова: *краевая задача, дифференциально-операторное уравнение, граничное интегральное уравнение, полугруппа операторов, генератор, векторнозначная функция, операторнозначная функция, унитарная дилатация.*

В настоящей работе на основе метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) получены решения краевых задач (КЗ) первого, второго и третьего рода для двумерного дифференциально-операторного уравнения (ДОУ) вида $\Delta_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ ($\Delta_2 \equiv \partial^2_{x_1 x_1} + \partial^2_{x_2 x_2}$). При этом $\boldsymbol{u}(x_1, x_2)$ – функции со значениями в абстрактном гильбертовом пространстве H, определенные в ограниченной односвязной области или ее внешности с границей $\partial\Omega \in C^2$; $\boldsymbol{B}$ – линейный всюду плотно определенный в пространстве *H* оператор, порождающий экспоненциально убывающую C_0-полугруппу сжатий. Доказана однозначная разрешимость краевых задач в классе непрерывных по норме H функций и устойчивость решений к возмущениям граничной функции в равномерной по норме H метрике. Кроме того, при условии $\partial\Omega \in C^{k+2}$ установлена однозначная и устойчивая разрешимость соответствующих ГИУ второго рода в банаховых пространствах функций, $k = 0,1,\ldots$ раз непрерывно дифференцируемых по норме пространств типа Соболева, определяемых, в свою очередь, $n = 0,1,\ldots$ степенями оператора $\boldsymbol{B}$, а также в гильбертовом пространстве функций с квадратично суммируемой нормой H, если $\partial\Omega \in C^2$.

Решение КЗ для ДОУ $\Delta_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ строится здесь по аналогии с методом решения КЗ для скалярного уравнения $\Delta_2 u = k^2 u$ ($k > 0$), описанным в монографии [1, с. 166]. Оператор $\boldsymbol{B}$ является частным случаем абстрактного эллиптического оператора $\boldsymbol{A}$, для которого справедлива оценка резольвенты: $\|\boldsymbol{R}(\lambda;\boldsymbol{A})\| \leq C/(1+|\lambda|)$ ($\lambda \leq 0$) [2, с. 149]. Исследованию КЗ для обыкновенных эллиптических ДОУ второго порядка в банаховых пространствах посвящено большое количество работ, результаты которых систематически представлены в монографиях [2, с. 304; 3, с. 73; 4, с. 272]. В последние годы появились исследования корректной разрешимости КЗ для эллиптических ДОУ в частных производных в пространствах типа L_p ($p \geq 1$) [5–7]. Однако автору не удалось найти работ, посвященных решению КЗ для многомерных эллиптических ДОУ на основе метода ГИУ.

Настоящая работа является развитием работ [8–11], посвященных решению КЗ нестационарной теплопроводности в прямых цилиндрах. В работах [8–11] , кроме указанного здесь свойства, использовались следующие частные свойства оператора $\boldsymbol{B}$: 1) компактность порождаемых им интегральных операторов; 2) возможность спектрального разложения порождаемых им C_0-полугрупп в некотором расширенном пространстве. В настоящей работе вместо частного свойства 2 используется универсальная возможность представления сжимающих C_0-полугрупп в виде унитарных C_0-полугрупп в некотором расширенном гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supset H$, описанная в монографии [12, с. 44].

Постановки краевых задач и единственность их решений

Пусть Ω^+ – плоская открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$, и $\Omega^- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$ ($\mathbf{R} \equiv (-\infty,+\infty)$). Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, задающие параметрические уравнения линии $\partial\Omega$ и имеющие период $|\partial\Omega|$ (s – длина дуги на $\partial\Omega$, $|\partial\Omega|$ – длина $\partial\Omega$), имеют непрерывные производные до k-го порядка включительно. Очевидно, тогда $\partial\Omega \in C^k$ в локальном смысле [13, с. 263]. Будем считать по умолчанию, что $\partial\Omega \in C^2$, если не оговорено особо. Рассмотрим четыре краевые задачи ($i = 1, 2$):

$$\Delta_2 \boldsymbol{u}_i^{\pm} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_i^{\pm} \quad (\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega^{\pm}); \tag{$1^{\pm}$}$$

$$\boldsymbol{u}_1^{\pm} = \boldsymbol{w}_1^{\pm} \quad (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega), \tag{2a}$$

$$\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_2^{\pm} - \eta\,\boldsymbol{u}_2^{\pm} = \boldsymbol{w}_2^{\pm} \quad (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega), \tag{2b}$$

где $\boldsymbol{u}_i^{\pm}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{w}_i^{\pm}(\boldsymbol{x})$ – векторнозначные функции со значениями в абстрактном гильбертовом пространстве H (все рассматриваемые здесь пространства комплексные), заданные на множествах $\Omega^{\pm}$ и $\partial\Omega$ соответственно; $\boldsymbol{n}$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, направленная внутрь области Ω^+; $\Delta_2 \equiv \partial^2_{x_1 x_1} + \partial^2_{x_2 x_2}$ (ограниченность, непрерывность, дифференцируемость функций предполагается здесь, если не оговорено особо, в норме пространства их значений); $\eta \geq 0$ – постоянная; $\boldsymbol{B}$ – замкнутый всюду плотно определенный в H линейный оператор, порождающий C_0-полугруппу $\boldsymbol{T}(\tau)$: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{f} = \lim_{\tau \to +0} \tau^{-1}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}(\tau)]\boldsymbol{f}$, где $\boldsymbol{I}$ – тождественный оператор в пространстве H (далее в пространстве по контексту). Операторы $\boldsymbol{T}(\tau)$ удовлетворяют условию

$$\|\boldsymbol{T}(\tau)\| \le \exp(-p\tau)\,, \qquad (3)$$

где p – положительная постоянная.

Пусть $C^2(\Omega^{\pm};H)$ и $C(\overline{\Omega^{\pm}};H)$ – пространства дважды непрерывно дифференцируемых на множестве $\Omega^{\pm}$ и непрерывных на замыкании этого множества $\overline{\Omega^{\pm}}$ соответственно функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ со значениями в H.

Определение 1. Решением уравнения ($1^{\pm}$) будем называть функцию $\boldsymbol{u}^{\pm} \in C^2(\Omega^{\pm};H)$ со значениями в $D(\boldsymbol{B})$ (области определения оператора $\boldsymbol{B}$), обращающую уравнение ($1^{\pm}$) в истинное равенство.

Определение 2. Решением задачи $\left\{P_1^{\pm}\right\}$ будем называть функцию $\boldsymbol{u}_1^{\pm} \in C(\overline{\Omega^{\pm}};H)$, являющуюся решением уравнения ($1^{\pm}$) и удовлетворяющую граничному условию (2a). В случае задачи $\left\{P_1^{-}\right\}$ будем требовать также выполнение условия: $\left\|\boldsymbol{u}_1^{-}\right\|_H \to 0$ при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$.

Определение 3. Решением задачи $\left\{P_2^{\pm}\right\}$ будем называть функцию $\boldsymbol{u}_2^{\pm} \in C(\overline{\Omega^{\pm}};H)$, являющуюся решением уравнения ($1^{\pm}$) и имеющую с внутренней (внешней) стороны $\partial\Omega$ правильную нормальную производную $\partial_{\boldsymbol{n}}^{\pm}\boldsymbol{u}_2^{\pm}$ ($\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_2^{\pm}(\boldsymbol{x} \pm \xi\boldsymbol{n}) \to \partial_{\boldsymbol{n}}^{\pm}\boldsymbol{u}_2^{\pm}(\boldsymbol{x})$ при $\xi \to +0$ равномерно относительно $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$), определяемую равенством (2b): $\partial_{\boldsymbol{n}}^{\pm}\boldsymbol{u}_2^{\pm} = \boldsymbol{w}_2^{\pm} + \eta\,\boldsymbol{u}_2^{\pm}$. В случае задачи $\left\{P_2^{-}\right\}$ будем требовать также выполнение условия $|\boldsymbol{x}|\left\|\boldsymbol{u}^{-}\right\|_H\left\|\nabla\boldsymbol{u}^{-}\right\|_H \to 0$ при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ ($\|\nabla\boldsymbol{u}\|_H^2 \equiv \left\|\partial_{x_1}\boldsymbol{u}\right\|_H^2 + \left\|\partial_{x_2}\boldsymbol{u}\right\|_H^2$).

Согласно [2, с. 112], следствием оценки (3) является ограниченность оператора $\boldsymbol{B}$ слева:

$$\operatorname{Re}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{f},\boldsymbol{f})_H \ge p(\boldsymbol{f},\boldsymbol{f})_H \quad (\boldsymbol{f} \in D(\boldsymbol{B})). \qquad (4)$$

Повторяя доказательства аналогичных теорем для частного случая оператора $\boldsymbol{B}$ [8–10], использующие только свойство (4) этого оператора, приходим к следующим утверждениям:

Теоремы 1, 2. Задачи $\{P_1^{\pm}\}$, $\{P_2^{\pm}\}$ имеют не более одного решения.

Операторнозначная функция Макдональда

Определение 4 (ср. [12, с. 23]). Пусть H – подпространство гильбертова пространства $\tilde{H}$; $\tilde{\boldsymbol{P}}$ – ортопроектор, сюръективно отображающий $\tilde{H}$ на H; $\boldsymbol{A}$ и $\tilde{\boldsymbol{A}}$ – ограниченные линейные операторы, всюду определенные в пространствах H и $\tilde{H}$ соответственно. Будем называть оператор $\tilde{\boldsymbol{A}}$ дилатацией оператора $\boldsymbol{A}$ и обозначать $\boldsymbol{A} = \text{пр}\,\tilde{\boldsymbol{A}}$, если $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{A}}^n\boldsymbol{f}$ для любых $\boldsymbol{f} \in H$ и $n \in \mathbf{N} \equiv \{1,2,\ldots\}$.

Операторы $\boldsymbol{T}_0(\tau) \equiv \exp(p\tau)\boldsymbol{T}(\tau)$ являются сжимающими и образуют C_0-полугруппу. Согласно теореме 8.1 [12, с. 44], в некотором гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supset H$ существует C_0-полугруппа унитарных операторов $\tilde{\boldsymbol{T}}_0(\tau)$, являющихся дилатациями соответствующих операторов $\boldsymbol{T}_0(\tau)$. В силу теоремы Стоуна [14, с. 410] операторы $\tilde{\boldsymbol{T}}_0(\tau)$ допускают спектральное разложение:

$$\tilde{\boldsymbol{T}}_0(\tau)\boldsymbol{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega\tau)\, d\boldsymbol{P}_\omega \boldsymbol{f} \quad (\boldsymbol{f} \in \tilde{H},\ i^2 \equiv -1), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{P}_\omega$ – разложение единицы [14, с. 361] самосопряженного оператора $i\tilde{\boldsymbol{B}}_0$ ($\tilde{\boldsymbol{B}}_0$ – генератор C_0-полугруппы $\tilde{\boldsymbol{T}}_0(\tau)$). Введем в рассмотрение C_0-полугруппу $\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau) \equiv \exp(-p\tau)\tilde{\boldsymbol{T}}_0(\tau)$, порождаемую оператором $\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{B}}_0 + p\boldsymbol{I}$. При помощи равенств

$$\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f} \equiv \int_0^{\infty} a(r,\tau)\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)\boldsymbol{f}\, d\tau \ \ (\boldsymbol{f} \in \tilde{H}), \quad \boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f} \equiv \int_0^{\infty} a(r,\tau)\boldsymbol{T}(\tau)\boldsymbol{f}\, d\tau \ \ (\boldsymbol{f} \in H), \tag{6}$$

где $a(r,\tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1}\exp\left[-r^2/(4\tau)\right]$ ($\tau > 0$), определим ограниченные линейные операторы $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$ и $\boldsymbol{K}(r)$ ($r > 0$) в пространствах $\tilde{H}$ и H соответственно. Так как $\boldsymbol{T}(\tau) = \text{пр}\,\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)$ ($\tau \geq 0$), то $\boldsymbol{K}(r) = \text{пр}\,\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$ ($r > 0$).

Пусть Σ – множество значений $\sigma \equiv \sqrt{p - i\omega}$ ($\sqrt{1} = 1$) при $\omega \in \mathbf{R}$. Очевидно, функция $\sigma(\omega)$: $\mathbf{R} \to \Sigma$ измерима по Борелю. Обозначим через $\boldsymbol{P}_\sigma$ меру, определенную на борелевских подмножествах $\mathrm{B} \subset \Sigma$ с помощью равенств $\boldsymbol{P}_\sigma(\mathrm{B}) \equiv \boldsymbol{P}_\omega\left(\sigma^{-1}(\mathrm{B})\right)$. Тогда на основании формулы (5) получаем следующие представления операторов $\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)$ и $\tilde{\boldsymbol{B}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)\boldsymbol{f} = \int_{\Sigma} \exp\left(-\sigma^2\tau\right) d\boldsymbol{P}_\sigma \boldsymbol{f} \ \ (\boldsymbol{f} \in \tilde{H}), \quad \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{f} = \int_{\Sigma} \sigma^2 d\boldsymbol{P}_\sigma \boldsymbol{f} \ \ (\boldsymbol{f} \in D(\tilde{\boldsymbol{B}})),$$

$$D(\tilde{\boldsymbol{B}}) = \left\{ \boldsymbol{f} \in \tilde{H} : \int_{\Sigma} |\sigma|^4 \, \|d\boldsymbol{P}_\sigma \boldsymbol{f}\|_{\tilde{H}}^2 < \infty \right\}. \tag{7}$$

Подставим выражение для $\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)$ (7) в выражение для $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$ (6). При этом порядок интегрирования может быть изменен на основании теоремы 13 [15, с. 211] в силу конечности мер $\eta_\sigma \equiv (\boldsymbol{P}_\sigma \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})_{\tilde{H}}$ ($\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \tilde{H}$) и μ: $\mu(\mathrm{A}) \equiv \int_{\mathrm{A}} \exp(-p\tau)d\tau$ (множества $\mathrm{A} \subset \mathbf{R}_+ \equiv [0;+\infty)$ измеримы по Лебегу), а также ограниченности и непрерывности на множестве $\Sigma \times \mathbf{R}_+$ подынтегральной функции $F(\sigma,\tau) \equiv a(r,\tau)\exp\left[-(\sigma^2 - p)\tau\right]$ ($\sigma \in \Sigma$, $\tau > 0$) при фиксированном $r > 0$. В результате получаем спектральное разложение операторов $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$:

$$\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f} = \int_{\Sigma} k(r,\sigma)\, d\boldsymbol{P}_\sigma \boldsymbol{f} \ \ (\boldsymbol{f} \in H),$$

$$k(r,\sigma) \equiv \int_0^{\infty} (4\pi\tau)^{-1} \exp\left[-\left(\frac{r}{2\sigma\tau} + \frac{2\sigma\tau}{r}\right)\frac{r\sigma}{2}\right] d\tau \ \ (\sqrt{1} = 1). \tag{8}$$

Осуществляя замену $\xi \equiv 2^{-1}[r/(2\sigma\tau)+2\sigma\tau/r]$, получаем следующее представление функции $k(r,\sigma)$:

$$k(r,\sigma)=(4\pi)^{-1}\int\limits_L \frac{\exp(-\rho\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}}d\xi \quad (\rho\equiv r\sigma). \tag{9}$$

В случае $\omega\neq 0$ кривая L – правая ветвь гиперболы $x^2/\cos^2\varphi - y^2/\sin^2\varphi = 1$, при этом $x=\operatorname{Re}\xi$, $y=\operatorname{Im}\xi$, $\varphi=\arg\sigma$. Точка ветвления $\xi=1$ функции $\sqrt{\xi^2-1}$ обходится вдоль контура L по часовой стрелке (кривая L пересекает действительную ось в точке $\xi=\cos\varphi<1$ при $\omega\neq 0$). Функция $f(\xi)\equiv\sqrt{\xi^2-1}$ рассматривается как однозначная в плоскости с разрезом вдоль луча $[1,\infty)$, с условием $f(0)=i$.

Итак, при $\omega\neq 0$ кривая L лежит в секторе $|\arg\xi|<|\arg\sigma|$ ($\sigma\in\Sigma$), асимптотически приближаясь к прямым $\arg\xi=\pm\arg\sigma$ при $|\xi|\to\infty$. Поскольку $|\arg\sigma|=\pi/4-\varepsilon$ при некотором $\varepsilon(\sigma)\in(0,\pi/4)$, то $|\arg(\rho\xi)|<\pi/2-2\varepsilon$ и справедлива оценка: $|\exp(-\rho\xi)|<\exp[-|\rho||\xi|\sin(2\varepsilon)]$. Следовательно, в области $|\arg\xi|<|\arg\sigma|$ подынтегральная функция $F(\xi)\equiv\exp(-\rho\xi)\big/\sqrt{\xi^2-1}$ стремится к нулю при $|\xi|\to\infty$ быстрее любой степени $|\xi|$ равномерно по $\arg\xi$. Поэтому, учитывая аналитичность функции $F(\xi)$ в правой полуплоскости с разрезом вдоль луча $[1,\infty)$, можно преобразовать контур L в двойной луч $[1,\infty)$ с тем же направлением обхода точки ветвления $\xi=1$, при этом на верхнем луче $f(\xi)=\sqrt{\xi^2-1}$, а на нижнем луче $f(\xi)=-\sqrt{\xi^2-1}$. Получили формулу

$$k(r,\sigma)=(2\pi)^{-1}\int\limits_1^\infty \frac{\exp(-\rho\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}}d\xi \quad (\sqrt{\xi^2-1}\geq 0). \tag{10}$$

В случае $\omega=0$ интеграл (10) получается из интеграла (9) сразу после замены.

Формула (10) – это интегральная формула функции Макдональда, а именно: $k(r,\sigma)=(2\pi)^{-1}K_0(\rho)$ [1, с. 172]. Поэтому в силу спектрального разложения оператора $\tilde{\boldsymbol{B}}$ (7) функция $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$, определяемая формулой (8), с точностью до постоянного множителя является функцией Макдональда оператора $r\sqrt{\tilde{\boldsymbol{B}}}$.

Дифференцируя l раз интеграл (10) по параметру r и переходя после этого к новой переменной интегрирования $\eta\equiv\sqrt{\rho(\xi-1)}$ ($\sqrt{1}=1$), получаем следующие выражения для производных $\partial_r^l k(r,\sigma)$ (при $\omega\neq 0$ дополнительно преобразуем путь интегрирования):

$$\partial_r^l k(r,\sigma)=\frac{(-\sigma)^l}{2\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\exp(-\rho\xi)\xi^l}{\sqrt{\xi^2-1}}d\xi=(-1)^l\frac{e^{-\rho}}{\pi r^l}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\eta^2}(\eta^2+\rho)^l d\eta}{\sqrt{\eta^2+2\rho}}$$

$$(l\in\mathbf{Z}_+\equiv\{0,1,\ldots\}). \tag{11}$$

Теорема 3. 1). Функция $\boldsymbol{K}(r)$ бесконечно дифференцируема при $r>0$ в равномерной операторной топологии, причем $\boldsymbol{K}^{(l)}(r)\boldsymbol{f}\in D(\boldsymbol{B}^m)$ ($\boldsymbol{f}\in H$, $l\in\mathbf{Z}_+$, $m\in\mathbf{N}$);

2) функция $\boldsymbol{K}(r)$ удовлетворяет при $r>0$ уравнению $\Delta_r\boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f}\in H$), где $\Delta_r\equiv d^2/dr^2+r^{-1}\,d/dr$;

3) $r^\alpha\boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f}\to 0$ при $r\to+0$ ($\boldsymbol{f}\in H$, $\alpha>0$);

4) $\left[(-1)^l 2\pi/(l-1)!\right]r^l\boldsymbol{K}^{(l)}(r)\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{f}$ при $r\to+0$ ($\boldsymbol{f}\in H$, $l\in\mathbf{N}$);

5) $r^\alpha\boldsymbol{K}^{(l)}(r)\boldsymbol{f}\to 0$ при $r\to+\infty$ ($\boldsymbol{f}\in H$, $l\in\mathbf{Z}_+$, $\alpha>0$).

Доказательство. Докажем сначала утверждения 1–5 для функции $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$. Производные $\partial_r^l k(r,\sigma)$ ($l\in\mathbf{Z}_+$) рассматриваются как функции от $r>0$, зависящие от $\sigma\in\Sigma$ как от параметра, на основе формул (11).

1). Функции $\partial_r^l k(r,\sigma)$ ($\sigma\in\Sigma$, $l\in\mathbf{Z}_+$) могут быть аналитически продолжены на всю комплексную плоскость $\mathbf{C}$, кроме точки $z=0$. Выражения вида $\sigma^{2m}\partial_z^l k(z,\sigma)$ ($\sigma\in\Sigma$) при фиксированных $l,m\in\mathbf{Z}_+$ ограничены в совокупности на множествах вида $\{|\arg z|\le\pi/4-\varepsilon_1,\ |z|\ge\varepsilon_2\}$ при ε_1, $\varepsilon_2>0$. Отсюда в силу представлений (7) для $\tilde{\boldsymbol{B}}$ и (8) для $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$ и теоремы Лебега об ограниченной сходимости интегралов для векторнозначных мер [15, с. 356] следует, что функции $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(l)}(r)\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f}\in\tilde{H}$) могут быть аналитически продолжены в область $\Lambda\equiv\{|\arg z|<\pi/4,\ z\ne 0\}$, имеют место включения $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(l)}(z)\boldsymbol{f}\in D(\tilde{\boldsymbol{B}}^m)$ ($l\in\mathbf{Z}_+$, $m\in\mathbf{N}$) и справедливы формулы

$$\tilde{\boldsymbol{B}}^m\tilde{\boldsymbol{K}}^{(l)}(z)\boldsymbol{f}=\int\limits_\Sigma\sigma^{2m}\partial_z^l k(z,\sigma)\,d\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{f}\quad(z\in\Lambda;\ l,m\in\mathbf{Z}_+).\tag{12}$$

Остается заметить, что из голоморфности векторнозначных функций $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(l)}(z)\boldsymbol{f}$ в области Λ вытекает голоморфность операторнозначных функций $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(l)}(z)$ в той же области [16, с.459].

2). Функция Макдональда $K_0(r)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_r K_0(r)=K_0(r)$, следствием которого являются равенства $\Delta_r k(r,\sigma)=\sigma^2 k(r,\sigma)$ ($\sigma\in\Sigma$, $r>0$), так как $k(r,\sigma)=(2\pi)^{-1}K_0(\rho)$. Отсюда с учетом формул (12) получаем уравнения $\Delta_r\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f}=\tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f}\in\tilde{H}$, $r>0$).

3). При $|z|\to\infty$ в любом секторе вида $|\arg z|\le\pi/2-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) функция Макдональда $K_0(z)$ равномерно относительно $\arg z$ стремится к нулю быстрее любой степени z. При $z\to 0$ функция $K_0(z)$ имеет логарифмическую особенность. Поэтому в силу непрерывности $K_0(z)$ при $z\ne 0$ выражения $r^\alpha K_0(\rho)=\rho^\alpha K_0(\rho)/\sigma^\alpha$ ограничены при $r\to+0$ равномерно по $\sigma\in\Sigma$ при любом $\alpha>0$. Кроме того, $r^\alpha K_0(\rho)\to 0$ при $r\to+0$ и фиксированных $\sigma\in\Sigma$. Отсюда в силу представления (8) и теоремы Лебега получаем предел $r^\alpha\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f}\to 0$ при $r\to+0$ для произвольного $\boldsymbol{f}\in\tilde{H}$.

4). Функции $\partial_r^l k(r,\sigma)$ могут быть представлены в виде $A_l(\rho)/r^l$. Функции $A_l(z)$ ($l \in \mathbf{N}$) непрерывны при любом комплексном z и в любом секторе вида $|\arg z| \le \pi/2 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) равномерно относительно $\arg z$ стремятся к нулю при $|z| \to \infty$ быстрее любой степени z. Следовательно, выражения $r^l\, \partial_r^l k(r,\sigma)$ ограничены при $r \to +0$ равномерно по $\sigma \in \Sigma$ и $r^l\, \partial_r^l k(r,\sigma) \to A_l(0) = = \left[(-1)^l 2\pi/(l-1)!\right]^{-1}$ при $r \to +0$ и фиксированных $\sigma \in \Sigma$. Используя формулы (12) при $m = 0$, получаем на основании теоремы Лебега предел $\left[(-1)^l 2\pi/(l-1)!\right] r^l \tilde{\boldsymbol{K}}^{(l)}(r)\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{f}$ при $r \to +0$ для произвольных $\boldsymbol{f} \in \tilde{H}$ и $l \in \mathbf{N}$.

5). Выражения $r^\alpha\, \partial_r^l k(r,\sigma)$ ($\alpha > 0$, $l \in \mathbf{Z}_+$) стремятся к нулю при $r \to +\infty$ равномерно по $\sigma \in \Sigma$. В силу формул (12) при $m = 0$ и теоремы Лебега имеем пределы $r^\alpha \tilde{\boldsymbol{K}}^{(l)}(r)\boldsymbol{f} \to 0$ при $r \to +\infty$ ($\alpha > 0$, $l \in \mathbf{Z}_+$, $\boldsymbol{f} \in \tilde{H}$).

Утверждения 1 – 5 справедливы для функции $\boldsymbol{K}(r)$, так как $\boldsymbol{T}(\tau) = \text{пр}\,\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)$, а элементы $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f} \in \tilde{H}$) могут быть аппроксимированы конечными суммами вида $\sum_{n=0}^{N} a_n \tilde{\boldsymbol{T}}(nh)\boldsymbol{f}$ ($a_n \in \mathbf{R}$, $h > 0$) в норме $\tilde{H}$. Например, на основании включений $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\,\boldsymbol{f} \in D(\tilde{\boldsymbol{B}}^m)$ ($\boldsymbol{f} \in H$, $m \in \mathbf{N}$) по индукции получаем следующие равенства:

$$\boldsymbol{B}^k \boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f} = \lim_{\tau \to +0} \tau^{-1}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}(\tau)\right]\tilde{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{k-1}\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f} =$$
$$= \tilde{\boldsymbol{P}} \lim_{\tau \to +0} \tau^{-1}\left[\tilde{\boldsymbol{I}} - \tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)\right]\tilde{\boldsymbol{B}}^{k-1}\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{k}\,\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\boldsymbol{f}\ (k = 1, 2, \ldots),$$

справедливые при любых $\boldsymbol{f} \in H$, для которых определена правая часть. Следовательно, $\boldsymbol{K}(r)\,\boldsymbol{f} \in D(\boldsymbol{B}^m)$ при любых $\boldsymbol{f} \in H$, $m \in \mathbf{N}$. Теорема доказана.

Следствие 1. При любом фиксированном $\alpha > 0$ функция $r^\alpha \boldsymbol{K}(r)$, доопределенная при $r = 0$ нулевым оператором, сильно непрерывна и ограничена при $r \ge 0$.

Следствие 2. При любом фиксированном $l \in \mathbf{N}$ функция $\left[(-1)^l 2\pi/(l-1)!\right] r^l \boldsymbol{K}^{(l)}(r)$, доопределенная при $r = 0$ тождественным оператором, сильно непрерывна и ограничена при $r \ge 0$.

Заметим, что приведенное здесь доказательство теоремы 3 для оператора $\tilde{\boldsymbol{B}}$ является отредактированным доказательством аналогичной теоремы 3 для частного случая оператора $\boldsymbol{B}$ [8]. Последнее также основано на возможности спектрального разложения C_0-полугруппы $\boldsymbol{T}(\tau)$ в некотором расширенном пространстве, и хотя C_0-полугруппа в этом расширенном пространстве не унитарна, спектр порождающего ее оператора также целиком лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma \ge p > 0$.

Векторнозначные потенциалы

Пусть $\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega; H)$. С помощью криволинейных интегралов первого рода $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}_1} \boldsymbol{K}(r)\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\, ds'$, $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}(r)\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\, ds'$ определим на множестве $\mathbf{R}^2 \setminus \partial\Omega$ функции $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ ($i = 1, 2$) со значениями в пространстве H. Здесь $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$; $\boldsymbol{n}_1$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящая через точку $\boldsymbol{x}'$ и направленная внутрь области Ω^+; дифференцирование $\partial_{\boldsymbol{n}_1}$ осуществляется по переменной $\boldsymbol{x}'$. Согласно приведенным ниже теоремам 4 – 8, функции $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ суть векторнозначные аналоги потенциалов простого и двойного слоев при $i = 1, 2$ соответственно, для уравнения (1). Доказательство этих теорем мы не приводим, так как оно совпадает с доказательством соответствующих теорем 4 – 8 для частного случая оператора $\boldsymbol{B}$ [8]. Последнее основано на свойствах функции $\boldsymbol{K}(r)$, сформулированных в теореме 3.

Теорема 4. При $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \partial\Omega$ функции $\boldsymbol{g}_i$ ($i = 1, 2$) бесконечно дифференцируемы, имеют место включения $\boldsymbol{g}_i^{(l_1, l_2)}(\boldsymbol{x}) \in D(\boldsymbol{B}^m)$ ($m \in \mathbf{N}$) и выполняются уравнения $\Delta_2 \boldsymbol{g}_i^{(l_1, l_2)} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{g}_i^{(l_1, l_2)}$. Кроме того, $|\boldsymbol{x}|^{\alpha} \left\| \boldsymbol{g}_i^{(l_1, l_2)}(\boldsymbol{x}) \right\|_H \to 0$ при $|x| \to +\infty$ ($\boldsymbol{g}_i^{(l_1, l_2)} \equiv \partial_{x_1}^{l_1} \partial_{x_2}^{l_2} \boldsymbol{g}_i$; $l_1, l_2 \in \mathbf{Z}_+$; $\alpha > 0$).

Теорема 5. Функция $\boldsymbol{g}_2$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \partial\Omega$) может быть продолжена по непрерывности в точки $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, и значения $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$), полученные при этом, также определяются формулой $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}(r)\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\, ds'$.

Пусть d – радиус круга Ляпунова [13, с. 354]. На достаточно малом расстоянии $\varepsilon < d/2$ от $\partial\Omega$ построим кривую $\partial\Omega_\varepsilon^\pm \subset \Omega^\pm$, параллельную $\partial\Omega$ [13, с. 263]. Обозначим через $\Omega_\varepsilon^\pm$ полоску, ограниченную кривыми $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_\varepsilon^\pm$. Пусть $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$ – основание перпендикуляра в $\Omega_\varepsilon^\pm$, опущенного из $\boldsymbol{x} \in \Omega_\varepsilon^\pm$ на $\partial\Omega$; $o_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$, $o_d(\boldsymbol{x}_0)$ – круги с центром в $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$ и радиусами ε, d соответственно; e_ε – участок $\partial\Omega$ между двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии ε от прямой $(\boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x}_0 \in e_\varepsilon$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_\varepsilon^\pm$). Введем в рассмотрение банаховы пространства $C(\partial\Omega; H)$ и $C(\overline{\Omega^\pm}; H)$ непрерывных на множествах $\partial\Omega$ и $\overline{\Omega^\pm}$ соответственно функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ со значениями в H и нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C(\partial\Omega; H)} \equiv \sup_{x \in \partial\Omega} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_H$, $\|\boldsymbol{f}\|_{C(\overline{\Omega^\pm}; H)} \equiv \sup_{x \in \overline{\Omega^\pm}} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_H$. Зададим линейные операторы:

$$\hat{\boldsymbol{G}}_2^\pm \equiv \hat{\boldsymbol{G}}_2'^\pm + \hat{\boldsymbol{G}}_2''^\pm,$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{G}}_2'^\pm \boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{e_\varepsilon} \boldsymbol{K}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\, ds' \quad (\boldsymbol{x} \in \Omega_\varepsilon^\pm),$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{G}}_2'^\pm \boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \quad (\boldsymbol{x} \in \Omega^\pm \setminus \Omega_\varepsilon^\pm),$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{G}}_2''^{\pm}\boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x}) \equiv \int\limits_{\partial\Omega\setminus e_\varepsilon} \boldsymbol{K}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')ds' \;\; (\,\boldsymbol{x}\in\Omega_\varepsilon^{\pm}\,),$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{G}}_2''^{\pm}\boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x}) \equiv \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')ds' \;\; (\,\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega_\varepsilon^{\pm}\,),\;\; \boldsymbol{K}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\equiv\boldsymbol{K}(r)\,.$$

С учетом теоремы 5 оператор $\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm}$ отображает пространство $C(\partial\Omega;H)$ в пространство $C(\overline{\Omega^{\pm}};H)$.

Кривая $\partial\Omega_\varepsilon^{\pm}$ является огибающей кругов $o_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ ($\boldsymbol{x}_0\in\partial\Omega$), поэтому $r\ge\varepsilon$, если $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega_\varepsilon^{\pm}\times\partial\Omega$. Так как любая прямая, параллельная $(\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x})$, пересекает $\partial\Omega$ внутри $o_d(\boldsymbol{x}_0)$ не более чем в одной точке и $\varepsilon<d/2$, то $r\ge\varepsilon$, если $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\Omega_\varepsilon^{\pm}\times\partial\Omega\setminus e_\varepsilon$. Пусть $\alpha\in(0;1)$. На кривой Ляпунова в силу оценки (7) [13, с. 356] выполняются неравенства: $\int_{e_\varepsilon} r^{-\alpha}ds'\le 4(1-\alpha)^{-1}\varepsilon^{1-\alpha}$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega_\varepsilon^{\pm}$). Учитывая также следствие 1, имеем оценки

$$\left\|\hat{\boldsymbol{G}}_2'^{\pm}\boldsymbol{f}\right\|_{C(\overline{\Omega^{\pm}};H)} \le 4(1-\alpha)^{-1}\varepsilon^{1-\alpha}\sup_{r>0}\left\|r^{\alpha}\boldsymbol{K}(r)\right\|\,\|\boldsymbol{f}\|_{C(\partial\Omega;H)}\,,$$

$$\left\|\hat{\boldsymbol{G}}_2''^{\pm}\boldsymbol{f}\right\|_{C(\overline{\Omega^{\pm}};H)} \le |\partial\Omega|\sup_{r\ge\varepsilon}\|\boldsymbol{K}(r)\|\,\|\boldsymbol{f}\|_{C(\partial\Omega;H)}\,,$$

из которых вытекает утверждение:

Следствие 3. Операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm}$: $C(\partial\Omega;H)\to C(\overline{\Omega^{\pm}};H)$ всюду определены и ограничены.

Теорема 6. Формулы $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\equiv\int_{\partial\Omega}\partial_{\boldsymbol{n}_1}\boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')ds'$ и $\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x})\equiv\int_{\partial\Omega}\partial_{\boldsymbol{n}_2}\boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')ds'$ определяют при $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ непрерывные вдоль кривой $\partial\Omega$ функции $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_0$. Здесь $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящая через точку $\boldsymbol{x}$ и направленная внутрь области Ω^{+}; дифференцирование $\partial_{\boldsymbol{n}_2}$ осуществляется по переменной $\boldsymbol{x}$.

Теорема 7. Функция $\boldsymbol{g}_1$ при подходе к точкам $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ изнутри области $\Omega^{\pm}$ стремится к своим предельным значениям $\boldsymbol{g}_1^{\pm}(\boldsymbol{x})\equiv\pm2^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})$ равномерно относительно $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$.

Следствие 4. Функция $\boldsymbol{g}_1$ является единственным решением задачи $\left\{P_1^{\pm}\right\}$ с граничным условием $\boldsymbol{u}_1^{\pm}\,|_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega}=\boldsymbol{g}_1^{\pm}(\boldsymbol{x})$.

Введем в рассмотрение линейные операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_1^{\pm}$:

$$\left(\hat{\boldsymbol{G}}_1^{\pm}\boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x}) \equiv \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')ds' \;\; (\,\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega^{\pm}}\,),\;\; \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\equiv\partial_{\boldsymbol{n}_1}\boldsymbol{K}(r)\,,$$

отображающие пространство $C(\partial\Omega;H)$ в соответствующие пространства $C(\overline{\Omega^{\pm}};H)$ с учетом теоремы 7 ($\left(\hat{\boldsymbol{G}}_1^{\pm}\boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{g}_1^{\pm}(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$). Интеграл $\int_{\partial\Omega}\left|\partial_{\boldsymbol{n}_1}\ln r^{-1}\right|ds'$ равномерно ограничен при $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$ [13, с. 361 и 394]. Поэтому с учетом следствия 2 и равенства $\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -r\,\boldsymbol{K}'(r)\,\partial_{\boldsymbol{n}_1} \ln r^{-1}$ имеем оценки:

$$\left\|\hat{\boldsymbol{G}}_1^{\pm}\boldsymbol{f}\right\|_{C(\overline{\Omega^{\pm}};H)} \le \sup_{r>0}\left\|r\,\boldsymbol{K}'(r)\right\| \sup_{\underline{x\in\Omega^{\pm}}} \int_{\partial\Omega} \left|\partial_{\boldsymbol{n}_1} \ln r^{-1}\right| ds' \,\|\boldsymbol{f}\|_{C(\partial\Omega;H)},$$

из которых вытекает утверждение:

Следствие 5. Операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_1^{\pm}$: $C(\partial\Omega;H) \to C(\overline{\Omega^{\pm}};H)$ всюду определены и ограничены.

Теорема 8. Функция $\boldsymbol{g}_2$ имеет в точках $x \in \partial\Omega$ правильную нормальную производную $\partial_{\boldsymbol{n}}^{\pm}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})$ со стороны $\Omega^{\pm}$, которая выражается формулой $\partial_{\boldsymbol{n}}^{\pm}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}) = \mp 2^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x})$.

Следствие 6. Функция $\boldsymbol{g}_2$ является единственным решением задачи $\left\{P_1^{\pm}\right\}$ с граничным условием $\boldsymbol{u}_1^{\pm}\,|_{x\in\partial\Omega} = \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})$ и единственным решением задачи $\left\{P_2^{\pm}\right\}$ с граничным условием $\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_2^{\pm} - \eta\boldsymbol{u}_2^{\pm}\,|_{x\in\partial\Omega} = \partial_{\boldsymbol{n}}^{\pm}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}) - \eta\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})$.

Решение краевых задач

Будем искать решение задачи $\left\{P_i^{\pm}\right\}$ в виде функции $\boldsymbol{g}_i$ с неизвестной $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \equiv \boldsymbol{f}$ ($i = 1,2$). Тогда в силу следствий 4, 6 и теорем 7, 8 функция $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in C(\partial\Omega;H)$ должна удовлетворять граничному интегральному уравнению:

$$\boldsymbol{G}_i^{\pm}\boldsymbol{v}_i^{\pm} = \boldsymbol{w}_i^{\pm} \;(\,\boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,),\; \boldsymbol{G}_i^{\pm} \equiv \mp(-1)^i 2^{-1}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_i\,; \qquad (13_i^{\pm})$$

$$(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds',$$

$$\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \equiv \partial_{\boldsymbol{n}_1}\boldsymbol{K}(r),\; \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \equiv \partial_{\boldsymbol{n}_2}\boldsymbol{K}(r) - \eta\,\boldsymbol{K}(r). \qquad (14)$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\partial\Omega;H)$ квадратично суммируемых на множестве $\partial\Omega$ векторнозначных функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ со значениями в пространстве H и нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{L_2(\partial\Omega;H)} \equiv \sqrt{\int_{\partial\Omega}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_H^2\,ds'}$. Обозначим через $H_{\boldsymbol{B}}^n$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) гильбертово пространство функций $\boldsymbol{f} \in H$, таких, что $\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f} \in H$ ($m = \overline{0,n}$), с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{H_{\boldsymbol{B}}^n} \equiv \left[\sum_{m=0}^{n}\left\|\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\right\|_H^2\right]^{1/2}$. Через $C^k(\partial\Omega;H_{\boldsymbol{B}}^n)$ ($n,k \in \mathbf{Z}_+$) обозначим банахово пространство функций $\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega;H)$, имеющих непрерывные производные $\boldsymbol{f}^{(l)}(\boldsymbol{x}) \equiv d^l\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(s)\right)\big/ds^l$ ($l = \overline{0,k}$) со значениями в $H_{\boldsymbol{B}}^n$, с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega;H_{\boldsymbol{B}}^n)} = \max_{\underline{l=0,k}} \sup_{x\in\partial\Omega}\left\|\boldsymbol{f}^{(l)}(\boldsymbol{x})\right\|_{H_{\boldsymbol{B}}^n}$ ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$ – параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$). Доказательство следующей теоремы целиком может быть взято из доказательства следствий 1–3 [11], так как при этом используются лишь свойство (3) оператора $\boldsymbol{B}$ и свойства функции $\boldsymbol{K}(r)$, доказанные в теореме 3:

Теорема 9. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$ ($k \in \mathbf{Z}_+$). Операторы $\boldsymbol{G}_i^{\pm}$: $C^k(\partial\Omega; H_{\boldsymbol{B}}^n) \to$ $\to C^k(\partial\Omega; H_{\boldsymbol{B}}^n)$ ($n \in \mathbf{Z}_+$: $i = 1, 2$) всюду определены и ограничены. Если уравнение $(13_i^{\pm})$ при любой правой части $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in L_2(\partial\Omega; H)$ имеет единственное решение $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in L_2(\partial\Omega; H)$, то оператор $\boldsymbol{G}_i^{\pm}$: $C^k(\partial\Omega; H_{\boldsymbol{B}}^n) \to C^k(\partial\Omega; H_{\boldsymbol{B}}^n)$ ограниченно обратим.

На основании теорем 1, 2, 9 и следствий 3, 5 получаем утверждение:

Следствие 7. Если при $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in C(\partial\Omega; H)$ ($i = 1, 2$) уравнение $(13_i^{\pm})$ имеет единственное решение $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in L_2(\partial\Omega; H)$, то соответствующая задача $\left\{P_i^{\pm}\right\}$ однозначно разрешима и ее решение представимо в виде функции $\boldsymbol{g}_i$ с данным $\boldsymbol{v}_i^{\pm}$. Кроме того, если при любом $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in C(\partial\Omega; H)$ ($i = 1, 2$) уравнение $(13_i^{\pm})$ имеет единственное решение $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in L_2(\partial\Omega; H)$ и $\boldsymbol{u}_i^{(1)\pm}$, $\boldsymbol{u}_i^{(2)\pm}$ – решения задачи $\left\{P_i^{\pm}\right\}$ с граничными функциями $\boldsymbol{w}_i^{(1)\pm}$, $\boldsymbol{w}_i^{(2)\pm} \in C(\partial\Omega; H)$ соответственно, то $\left\|\boldsymbol{u}_i^{(1)\pm} - \boldsymbol{u}_i^{(2)\pm}\right\|_{C(\overline{\Omega^{\pm}}; H)} \to 0$, если $\left\|\boldsymbol{w}_i^{(1)\pm} - \boldsymbol{w}_i^{(2)\pm}\right\|_{C(\partial\Omega; H)} \to 0$.

Операторы $\boldsymbol{T}^*(\tau)$, сопряженные к $\boldsymbol{T}(\tau)$, также образуют C_0-полугруппу [12, с. 44]. Так как $\left\|\boldsymbol{T}^*(\tau)\right\| = \left\|\boldsymbol{T}(\tau)\right\|$, то для операторов $\boldsymbol{T}^*(\tau)$ выполняется оценка (3). Обозначим через $\boldsymbol{B}^*$ генератор C_0-полугруппы $\boldsymbol{T}^*(\tau)$, а через $\{P_i^{*\pm}\}$ – задачи $\{P_i^{\pm}\}$ ($i = 1, 2$) с оператором $\boldsymbol{B}^*$ вместо $\boldsymbol{B}$. Для оператора $\boldsymbol{B}^*$ выполняется оценка (4), следовательно, справедливы теоремы 1 и 2 для задач $\{P_i^{*\pm}\}$. Операторы $\boldsymbol{K}^*(r)$, сопряженные к $\boldsymbol{K}(r)$, выражаются через $\boldsymbol{T}^*(\tau)$ с помощью формулы (6), поэтому для $\boldsymbol{K}^*(r)$ справедлива теорема 3. Следовательно, для функций $\boldsymbol{g}_i^*$, выраженных через $\boldsymbol{K}^*(r)$ по аналогии с $\boldsymbol{g}_i$, справедливы теоремы 4 – 8. Операторы $\boldsymbol{G}_1^*$ и $\boldsymbol{G}_2^*$, сопряженные к операторам $\boldsymbol{G}_2$ и $\boldsymbol{G}_1$ соответственно, получаются из $\boldsymbol{G}_1$ и $\boldsymbol{G}_2$ заменой $\boldsymbol{K}(r)$ на $\boldsymbol{K}^*(r)$ в выражениях (14). Поэтому для уравнений $(13_i^{\pm})$ с операторами $\boldsymbol{G}_i^{*\pm} \equiv \mp(-1)^i 2^{-1}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_i^*$ вместо $\boldsymbol{G}_i^{\pm}$ справедлива теорема 9.

В силу теорем 8, 9 и следствия 6 однородные уравнения $\boldsymbol{G}_2^{\pm}\overline{\boldsymbol{v}}_2^{\pm} = 0$ и $\boldsymbol{G}_2^{*\pm}\overline{\boldsymbol{v}}_2^{*\pm} = 0$ имеют единственные решения в классе $L_2(\partial\Omega; H)$ (по аналогии со скалярным случаем [13, с. 386]). Поэтому в силу 3-й и 4-й теорем Фредгольма [13, с. 175] справедливо утверждение:

Теорема 10. Пусть $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in L_2(\partial\Omega; H)$ и оператор $\boldsymbol{G}_i$ компактен. Тогда уравнение $(13_i^{\pm})$ имеет единственное решение $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in L_2(\partial\Omega; H)$ ($i = 1, 2$).

В следствии 3 [11] сформулирована вторая часть теоремы 9 без указанного здесь условия, так как оно выполнено для частного случая оператора $\boldsymbol{B}$, рассматриваемого в работе [11], благодаря компактности порождаемых им операторов $\boldsymbol{G}_i$ ($i = 1, 2$).

Разрешимость граничных интегральных уравнений в пространстве L_2

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\partial\Omega)$ квадратично суммируемых на множестве $\partial\Omega$ скалярных функций $f(\boldsymbol{x})$ с нормой $\|f\|_{L_2(\partial\Omega)} \equiv \sqrt{\int_{\partial\Omega} |f(\boldsymbol{x})|^2 \, ds'}$. Обозначим через $\mathbf{B}$ банахову алгебру ограниченных и всюду определенных в $L_2(\partial\Omega)$ линейных операторов. Обозначим через Γ и Γ_W множества значений $\gamma \equiv p - i\omega$ ($\gamma = \sigma^2$) при $\omega \in \mathbf{R}$ и $\omega \in [-W, W]$ ($W > 0$) соответственно. Пусть Ξ_W – семейство всех борелевских множеств топологического пространства Γ_W и $\boldsymbol{P}_\gamma(\mathrm{B}) \equiv \boldsymbol{P}_\omega(\omega(\mathrm{B}))$, где $\omega(\gamma) = i(\gamma - p)$ и $\mathrm{B} \subset \Xi_W$. Будем называть Ξ_W-простой всякую функцию $\boldsymbol{F}_W^n(\gamma)$, всюду определенную на Γ и имеющую вид $\boldsymbol{F}_W^n(\gamma) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i \chi_{\mathrm{B}_i}(\gamma)$ ($n \in \mathbf{N}$), где $\boldsymbol{A}_i \in \mathbf{B}$, $\chi_{\mathrm{B}_i}(\gamma)$ – характеристическая функция множества $\mathrm{B}_i \in \Xi_W$. Введем в рассмотрение коммутативную банахову алгебру $\mathbf{F}_W$ функций $\boldsymbol{F}_W(\gamma)$ на Γ_W, являющихся пределами Ξ_W–простых функций в норме $\|\boldsymbol{F}_W\|_{\mathbf{F}_W} = \sup\limits_{\gamma\in\Gamma_W} \|\boldsymbol{F}_W(\gamma)\|$ при фиксированном $W > 0$. Наконец, введем в рассмотрение множество $\mathbf{F}$ операторнозначных функций $\boldsymbol{F}(\gamma)$ со значениями в $\mathbf{B}$, всюду определенных и ограниченных на Γ, причем таких, что $\boldsymbol{P}_\gamma(\Gamma_W)\boldsymbol{F} \in \mathbf{F}_W$ при любом $W > 0$, где $\boldsymbol{P}_\gamma(\Gamma_W)\boldsymbol{f} \equiv \int_{\Gamma_W} d\boldsymbol{P}_\gamma \boldsymbol{f}$. Функции $\boldsymbol{F} \in \mathbf{F}$ образуют коммутативную алгебру с нормой $\|\boldsymbol{F}\|_{\mathbf{F}} = \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} \|\boldsymbol{F}(\gamma)\|$ и единицей $\boldsymbol{E}(\gamma) = \boldsymbol{I}$. В алгебру $\mathbf{F}$ входит множество ограниченных и непрерывных на кривой Γ функций со значениями в $\mathbf{B}$.

Введем также в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$ квадратично суммируемых на множестве $\partial\Omega$ векторнозначных функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ со значениями в пространстве $\tilde{H}$ и нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{L_2(\partial\Omega;\tilde{H})} \equiv \sqrt{\int_{\partial\Omega} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_{\tilde{H}}^2 \, ds'}$. Пусть $\boldsymbol{F} \in \mathbf{F}$. Определим интеграл вида $\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{f} \equiv \int_\Gamma \boldsymbol{F}(\gamma)\, d\boldsymbol{P}_\gamma \boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f} \in L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$, $\tilde{\boldsymbol{D}} \equiv \sqrt{\tilde{\boldsymbol{B}}}$). Для этого сначала определим оператор $\boldsymbol{F}_W^n(\tilde{\boldsymbol{D}})$ в пространстве $L_2(\partial\Omega; \tilde{H})$ как $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{P}_\gamma(\mathrm{B}_i)$ ($\mathrm{B}_i \in \Xi_W$) на элементах вида $\boldsymbol{ab}$ ($\boldsymbol{a} \in L_2(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{b} \in \tilde{H}$). Так как полная вариация скалярной аддитивной функции $\left(\boldsymbol{P}_\gamma(\mathrm{B})\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\right)_{\tilde{H}}$ ($\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \tilde{\boldsymbol{H}}$) множества $\mathrm{B} \subset \Xi_W$ не больше, чем $4 \sup\limits_{\mathrm{B}\subset\Xi_W} \left|\left(\boldsymbol{P}_\gamma(\mathrm{B})\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\right)_{\tilde{H}}\right| \le 4\|\boldsymbol{f}\|_{\tilde{H}} \|\boldsymbol{g}\|_{\tilde{H}}$ [15, с. 111], то справедлива оценка: $\left\|\boldsymbol{F}_W^n(\tilde{\boldsymbol{D}})\right\| \le 4 \sup\limits_{\gamma\in\Gamma_W} \left\|\boldsymbol{F}_W^n(\gamma)\right\|$ (ср. [14, с. 44]), которая может быть продолжена вместе с оператором $\boldsymbol{F}_W^n(\tilde{\boldsymbol{D}})$ на множество конечных линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i$ ($\boldsymbol{a}_i \in L_2(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{b}_i \in \tilde{H}$) [17, с. 327], а затем по непрерывности на все пространство $L_2(\partial\Omega;\tilde{H})$. Если последовательность Ξ_W-простых функций $\boldsymbol{F}_W^n$ сходится к $\boldsymbol{F}_W \in \mathbf{F}_W$ в норме $\mathbf{F}_W$, то в силу полученной оценки последовательность операторов $\boldsymbol{F}_W^n(\tilde{\boldsymbol{D}})$ сходится по операторной норме и ее предел зависит только от $\boldsymbol{F}_W$ и не зависит от конкретной последовательности. Назовем этот предел интегралом $\boldsymbol{F}_W(\tilde{\boldsymbol{D}})$, причем $\left\|\boldsymbol{F}_W(\tilde{\boldsymbol{D}})\right\| \le 4 \sup\limits_{\gamma\in\Gamma_W} \left\|\boldsymbol{F}_W(\gamma)\right\|$. В силу последней оценки и ограниченностей функции $\boldsymbol{F} \in \mathbf{F}$ и меры $\boldsymbol{P}_\gamma$ существует сильный предел операторов $\boldsymbol{F}_W(\tilde{\boldsymbol{D}})$ при $W \to \infty$ и справедлива оценка: $\left\|\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{D}})\right\| \le 4\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\left\|\boldsymbol{F}(\gamma)\right\|$. Данный сильный предел и назовем интегралом $\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{D}})$. Операторы $\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{D}})$ ограничены в силу последней оценки и образуют алгебру $\mathbf{F}_{\tilde{\boldsymbol{D}}}$ с единицей $\boldsymbol{E}(\tilde{\boldsymbol{D}})$, причем отображение алгебры $\mathbf{F}$ на алгебру $\mathbf{F}_{\tilde{\boldsymbol{D}}}$ гомоморфно:

$$(\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_2)\left(\tilde{\boldsymbol{D}}\right) = \boldsymbol{F}_1\left(\tilde{\boldsymbol{D}}\right)\boldsymbol{F}_2\left(\tilde{\boldsymbol{D}}\right) \ (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2 \in \mathbf{F}). \tag{15}$$

Равенства (15) проверяются непосредственно на плотном в $\mathbf{F}$ (в сильной операторной топологии) множестве Ξ_W-простых функций $\boldsymbol{F}_W^n$ и продолжаются по непрерывности на все множество $\mathbf{F}$.

Пусть $\alpha \in (0;2^{-1})$ и e_ε – часть кривой $\partial\Omega$, вырезаемая кругом o_ε с центром в точке $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ и радиусом $\varepsilon < d$, где d – радиус круга Ляпунова. Рассмотрим интегральные уравнения в пространстве $L_2(\partial\Omega;\tilde{H})$:

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{\pm} = \tilde{\boldsymbol{w}}_i^{\pm} \ (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega), \ \tilde{\boldsymbol{G}}_i^{\pm} \equiv \mp(-1)^i 2^{-1}\boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{G}}_i, \tag{$16_i^{\pm}$}$$

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_i \equiv \tilde{\boldsymbol{G}}'_{i,\varepsilon} + \tilde{\boldsymbol{G}}''_{i,\varepsilon}, \ \left(\tilde{\boldsymbol{G}}'_{i,\varepsilon}\boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x}) \equiv \int\limits_{e_\varepsilon} \tilde{\boldsymbol{K}}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds',$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{G}}''_{i,\varepsilon}\boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x}) \equiv \int\limits_{\partial\Omega\setminus e_\varepsilon} \tilde{\boldsymbol{K}}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds' \ (i = 1,2),$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \equiv \partial_{\boldsymbol{n}_1}\tilde{\boldsymbol{K}}(r), \ \tilde{\boldsymbol{K}}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \equiv \partial_{\boldsymbol{n}_2}\tilde{\boldsymbol{K}}(r) - \eta\tilde{\boldsymbol{K}}(r).$$

На кривой Ляпунова в силу оценки (7) [13, с. 356] справедливы оценки: $\int_{e_\varepsilon} r^{-2\alpha}ds' \le 4(1-\alpha)^{-1}\varepsilon^{1-2\alpha}$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$). Имеем равенства $\partial_{\boldsymbol{n}_i}\tilde{\boldsymbol{K}}(r) = -r\tilde{\boldsymbol{K}}'(r)b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ ($(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \in \partial\Omega\times\partial\Omega$), где $b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \equiv \partial_{\boldsymbol{n}_i}\ln r^{-1}$ ($i = 1,2$) – ограниченные на множестве $\partial\Omega\times\partial\Omega$ функции [18, с. 597]. С учетом свойств функции $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$ (см. теорему 3), имеем оценки

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{G}}'_{i,\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_{L_2(\partial\Omega;\tilde{H})} \le C_{i,\alpha}\sqrt{M_\alpha(\varepsilon)\left|\partial\Omega\right|}\left\|\boldsymbol{f}\right\|_{L_2(\partial\Omega;\tilde{H})},$$

$$C_{i,\alpha} \equiv \sup_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\partial\Omega\times\partial\Omega}\left\|r^\alpha\tilde{\boldsymbol{K}}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\right\|, \ M_\alpha(\varepsilon) \equiv 4(1-\alpha)^{-1}\varepsilon^{1-2\alpha},$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{G}}''_{i,\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_{L_2(\partial\Omega;\tilde{H})} \le \left|\partial\Omega\right| B_{i,\varepsilon}\left\|\boldsymbol{f}\right\|_{L_2(\partial\Omega;\tilde{H})}, \ B_{i,\varepsilon} \equiv \sup_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\partial\Omega\times\partial\Omega\setminus e_\varepsilon}\left\|\tilde{\boldsymbol{K}}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\right\|, \tag{17}$$

вследствие которых операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_i$ всюду определены и ограничены в пространстве $L_2(\partial\Omega;\tilde{H})$. Так как $\boldsymbol{K}(r)=\tilde{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{K}}(r)\tilde{\boldsymbol{P}}$ ($r>0$), то операторы $\boldsymbol{G}_i$ всюду определены и ограничены в пространстве $L_2(\partial\Omega;H)$.

Теорема 11. Операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}$: $L_2(\partial\Omega;\tilde{H})\to L_2(\partial\Omega;\tilde{H})$ ($i=1,2$) ограниченно обратимы.

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие линейные операторы в пространстве $L_2(\partial\Omega)$:

$$\boldsymbol{H}_1^{\pm}(\gamma)\equiv\pm2^{-1}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}_1(\gamma)\,,\ \boldsymbol{H}_2^{\pm}(\gamma)\equiv\mp2^{-1}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}_2(\gamma)-\eta\boldsymbol{H}_0(\gamma)\,,$$

$$\boldsymbol{H}_i(\gamma)\equiv\boldsymbol{H}'_{i,\varepsilon}(\gamma)+\boldsymbol{H}''_{i,\varepsilon}(\gamma)\,,\ \left(\boldsymbol{H}'_{i,\varepsilon}(\gamma)\boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x})\equiv\int\limits_{e_\varepsilon}h_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)\,f(\boldsymbol{x}')\,ds'\,,$$

$$\left(\boldsymbol{H}''_{i,\varepsilon}(\gamma)\boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{x})\equiv\int\limits_{\partial\Omega\setminus e_\varepsilon}h_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)\,f(\boldsymbol{x}')\,ds'\ \ (\,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\,;\ i=\overline{0,2}\,),$$

$$h_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)\equiv k(r,\sigma)\,,\ h_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)\equiv-r\,\partial_r k(r,\sigma)\,b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\ \ (\,i=1,2\,),\ \sigma\equiv\sqrt{\gamma}\ \ (\,\sqrt{1}=1\,).$$

Докажем, что функции $\boldsymbol{H}_i(\gamma)$ ($i=\overline{0,2}$) непрерывны в области $\mathbf{C}_0\equiv\mathbf{C}\setminus\{0\}$ и $\boldsymbol{H}_i(\gamma)\to\boldsymbol{O}$ при $|\gamma|\to\infty$ равномерно по $|\arg\gamma|\le\pi-\varepsilon'$ для любого $\varepsilon'\in(0;\pi)$ ($\boldsymbol{O}$ – нулевой оператор). Функции $k(r,\sigma)=(2\pi)^{-1}K_0(\rho)$ и $r\,\partial_r k(r,\sigma)=A_1(\rho)$ непрерывны при $\rho\ne0$; $K_0(\rho)\to0$ и $A_1(\rho)\to0$ при $|\rho|\to+\infty$ равномерно по $|\arg\rho|\le\pi/2-\varepsilon'$ ($\varepsilon'\in(0;\pi/2)$). Следовательно, функции h_i ($i=\overline{0,2}$) непрерывны на множестве $\partial\Omega\times\partial\Omega\times\mathbf{C}_0$ всюду, где $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{x}'$, и $h_i\to0$ при $|\gamma|\to\infty$ равномерно по $|\arg\gamma|\le\pi-\varepsilon'$ ($\varepsilon'\in(0;\pi)$) и $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\partial\Omega\times\partial\Omega\setminus e_\varepsilon$. Кроме того, $r^\alpha K_0(\rho)=\rho^\alpha K_0(\rho)/\sigma^\alpha\to0$ и $r^\alpha A_1(\rho)=\rho^\alpha A_1(\rho)/\sigma^\alpha\to0$ при $\rho\to0$ равномерно по $|\sigma|\ge\varepsilon_0>0$ ($\alpha\in(0;2^{-1})$). Следовательно, функции $r^\alpha h_i$ ($r^\alpha h_i\equiv0$ при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$) ограничены на множествах вида $\partial\Omega\times\partial\Omega\times S$, где $S\subset\mathbf{C}_0$ – замкнутое множество, которое конечно или находится в секторе вида $|\arg\gamma|\le\pi-\varepsilon'$ ($\varepsilon'\in(0;\pi)$). Получаем при $\gamma\in\mathbf{C}_0$ оценки, аналогичные оценкам (17):

$$\left\|\boldsymbol{H}'_{i,\varepsilon}(\gamma)\boldsymbol{f}\right\|_{L_2(\partial\Omega)}\le C_{i,\alpha}(\gamma)\sqrt{M_\alpha(\varepsilon)|\partial\Omega|}\,\|\boldsymbol{f}\|_{L_2(\partial\Omega)}\,,\ C_{i,\alpha}(\gamma)\equiv\sup_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\partial\Omega\times\partial\Omega}\left|r^\alpha g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)\right|,$$

$$\left\|\boldsymbol{H}''_{i,\varepsilon}(\gamma)\boldsymbol{f}\right\|_{L_2(\partial\Omega)}\le|\partial\Omega|\,B_{i,\varepsilon}(\gamma)\|\boldsymbol{f}\|_{L_2(\partial\Omega)}\,,\ B_{i,\varepsilon}(\gamma)\equiv\sup_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\partial\Omega\times\partial\Omega\setminus e_\varepsilon}\left|g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)\right|,$$

согласно которым операторы $\boldsymbol{H}_i(\gamma)$ ($\gamma\in\mathbf{C}_0$) всюду определены и ограничены в $L_2(\partial\Omega)$. При любом $\varepsilon>0$ функции $\boldsymbol{H}''_{i,\varepsilon}(\gamma)$ непрерывны в любой точке $\gamma_0\in\mathbf{C}_0$ в силу непрерывности функций h_i, а функции $\boldsymbol{H}'_{i,\varepsilon}(\gamma)\to0$ при $\varepsilon\to+0$ равномерно в достаточно малой окрестности точки γ_0, так как $M_\alpha(\varepsilon)\to0$, а функции $r^\alpha h_i$ ограничены. Отсюда можно вывести, что функции $\boldsymbol{H}_i(\gamma)$ непрерывны на множестве $\mathbf{C}_0$. Наконец, $B_{i,\varepsilon}(\gamma)\to0$ при $|\gamma|\to\infty$ равномерно по $|\arg\gamma|\le\pi-\varepsilon'$ ($\varepsilon'\in(0;\pi)$), при этом функция $C_{i,\alpha}(\gamma)$ равномерно ограничена, так что

$\boldsymbol{H}'_{i,\varepsilon}(\gamma)\to 0$ при $\varepsilon\to+0$. Тогда $\|\boldsymbol{H}_i(\gamma)\|\to\boldsymbol{O}$ при $|\gamma|\to\infty$ равномерно по $|\arg\gamma|\le\pi-\varepsilon'$ при любом $\varepsilon'\in(0;\pi)$.

Доказано также, что $\boldsymbol{H}_i^{\pm}\in\mathbf{F}$ ($i=1,2$) и что $\left\|\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)\right\|\to\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\infty)$ ($\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\infty)\equiv\mp2^{-1}(-1)^i\,\boldsymbol{I}$) при $|\gamma|\to\infty$ равномерно по $|\arg\gamma|\le\pi-\varepsilon'$ при любом $\varepsilon'\in(0;\pi)$.

Исследуем обратимость операторов $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)$. Пусть $\gamma\in\mathbf{C}_+$ (здесь $\mathbf{C}_+$ – полуплоскость $\operatorname{Re}\gamma>0$). Уравнения $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)\,\boldsymbol{v}_i^{\pm}=\boldsymbol{w}_i^{\pm}$ являются граничными интегральными уравнениями ($13_i^{\pm}$), соответствующими задачам $\left\{P_i^{\pm}\right\}$ с оператором $\boldsymbol{B}=\gamma\boldsymbol{I}$, являющимся оператором умножения в нормированном пространстве $\mathbf{C}$. Такой оператор порождает C_0-полугруппу $\boldsymbol{T}(\tau)=\exp(-\gamma\tau)\boldsymbol{I}$, удовлетворяющую условию (3). Операторы $\boldsymbol{H}''_{i,\varepsilon}(\gamma)$ являются фредгольмовскими и $\boldsymbol{H}'_{i,\varepsilon}(\gamma)\to\boldsymbol{O}$ при $\varepsilon\to+0$, поэтому операторы $\boldsymbol{H}_i(\gamma)$ компактны ($i=\overline{0,2}$). Согласно теореме 10, уравнения $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)\,\boldsymbol{v}_i^{\pm}=\boldsymbol{w}_i^{\pm}$ ($i=1,2$) имеют единственные решения $\boldsymbol{v}_i^{\pm}\in L_2(\partial\Omega)$ при любом $\boldsymbol{w}_i^{\pm}\in L_2(\partial\Omega)$. Так как операторы $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)$ всюду определены и ограничены, то согласно теореме об обратном отображении [17, с. 99] они имеют ограниченные обратные $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\gamma)$ ($\gamma\in\mathbf{C}_+$).

Докажем, что $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}\in\mathbf{F}$. Теорема об устойчивости ограниченной обратимости [16, с. 262] утверждает, что если операторы A_n ($n=1,2,\ldots$) и A являются непрерывными биекциями одного банахова пространства на другое, то $\|A_n-A\|\to0$ тогда и только тогда, когда $\left\|A_n^{-1}-A^{-1}\right\|\to0$. Поэтому на основании непрерывности функций $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)$ в области $\mathbf{C}_+$ можно сделать вывод о непрерывности функций $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\gamma)$ в той же области. Поскольку $\left\|\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)\right\|\to\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\infty)$ при $|\gamma|\to\infty$ равномерно по $|\arg\gamma|\le\pi/2$, то в силу той же теоремы $\left\|\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\gamma)\right\|\to\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\infty)$ ($\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\infty)\equiv\mp2(-1)^i\,\boldsymbol{I}$) при $|\gamma|\to\infty$ равномерно по $|\arg\gamma|<\pi/2$. Поэтому при любом $\mu>0$ функции $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\gamma)$ ограничены в замкнутой полуплоскости $\mathbf{C}_\mu$, определяемой неравенством $\operatorname{Re}\gamma\ge\mu$. Следовательно, $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}\in\mathbf{F}$.

Так как $\boldsymbol{H}_i^{\pm}\in\mathbf{F}$, то в пространстве $L_2(\partial\Omega;\tilde H)$ определены ограниченные операторы $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})$:

$$\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{f}\equiv\int_\Gamma\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)\,d\boldsymbol{P}_\gamma\boldsymbol{f}=\mp2^{-1}(-1)^i\,\boldsymbol{f}+\int_\Gamma\boldsymbol{H}_i(\gamma)\,d\boldsymbol{P}_\gamma\boldsymbol{f}=\mp2^{-1}(-1)^i\,\boldsymbol{f}+\boldsymbol{H}_i(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{f}.$$

Рассмотрим интегралы $\boldsymbol{H}_i(\tilde{\boldsymbol{D}})$ на элементах вида $\boldsymbol{ab}$ ($\boldsymbol{a}\in L_2(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{b}\in\tilde H$). Перейдем к скалярной мере $\eta_\gamma\equiv\left(\boldsymbol{P}_\gamma\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right)_{\tilde H}$ ($\boldsymbol{c}\in\tilde H$) для того, чтобы на основании теоремы 17 [15, с. 218] перейти к интегрированию при фиксированных $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$, затем перейти к мере $\theta'_{\boldsymbol{x}}$: $\theta'_{\boldsymbol{x}}(S) \equiv \int_S r^{-\alpha} a(\boldsymbol{x}')\,ds'$, зависящей от $\boldsymbol{x}$ (множества $S \subset \partial\Omega$ измеримы по Лебегу, $\alpha \in (0;2^{-1})$), и, наконец, изменить порядок интегрирования на основании теоремы 13 [15, с. 211]:

$$\left(\boldsymbol{H}_i(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{ab},\boldsymbol{c}\right)_{\tilde{H}}(\boldsymbol{x}) = \left(\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{H}_i(\gamma)\boldsymbol{a}\,d\eta_\gamma\right)(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma}\left\{\int\limits_{\partial\Omega} r^{\alpha} h_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)\,d\theta'_{\boldsymbol{x}}\right\}d\eta_\gamma =$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\int\limits_{\Gamma} r^{\alpha} h_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)d\eta_\gamma\right\}d\theta'_{\boldsymbol{x}} = \int\limits_{\partial\Omega}\left(\tilde{\boldsymbol{K}}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right)_{\tilde{H}} a(\boldsymbol{x}')\,ds' = \left(\tilde{\boldsymbol{G}}_i\boldsymbol{ab},\boldsymbol{c}\right)_{\tilde{H}}(\boldsymbol{x}).$$

Здесь были использованы выражения (6) для $\tilde{\boldsymbol{K}}(r)$. Изменение порядка интегрирования возможно в силу конечности мер η_γ и $\theta'_{\boldsymbol{x}}$, а также ограниченности и непрерывности на множестве $\partial\Omega\times\Gamma$ подынтегральной функции $r^{\alpha}h_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)$ при фиксированных $\boldsymbol{x}$ ($r^{\alpha}h_i \equiv 0$ при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$). Отсюда в силу произвольности $\boldsymbol{c}\in\tilde{H}$ и $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ имеем равенства $\boldsymbol{H}_i(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{G}}_i\boldsymbol{f}$ на элементах $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{ab}$. Полученные равенства могут быть продолжены на множество конечных линейных комбинаций вида $\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i$ ($\boldsymbol{a}_i \in L_2(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{b}_i\in\tilde{H}$), а затем по непрерывности на все пространство $L_2(\partial\Omega;\tilde{H})$. В результате уравнения ($16_i^{\pm}$) могут быть записаны в следующем виде:

$$\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{\pm} = \tilde{\boldsymbol{w}}_i^{\pm} \quad (\boldsymbol{x}\in\partial\Omega).$$

Так как $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}\in\mathbf{F}$, то в силу равенств (15) операторы $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})$ имеют ограниченные обратные $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\tilde{\boldsymbol{D}})$ ($i=1,2$). Теорема доказана.

Следствие 8. Функции $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)$ и $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\gamma)$ ($i=1,2$) голоморфны в областях $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{C}_+$, соответственно.

Доказательство. При $r\neq 0$, $\sigma\neq 0$ имеем равенства $\partial_\sigma\partial_r k(r,\sigma)=(2\pi)^{-1}\rho K_0(\rho)$, $\partial_\sigma k(r,\sigma)=\sigma^{-1}A_1(\rho)$ (см. формулы (11)). Следовательно, функции h_i ($i=\overline{0,2}$) имеют непрерывные производные $\partial_\gamma h_i = (2\sigma)^{-1}\partial_\sigma h_i$ на множестве $\partial\Omega\times\partial\Omega\times\mathbf{C}_0$ всюду, где $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}'$, и функции $r^{\alpha}\partial_\gamma h_i$ ($r^{\alpha}\partial_\gamma h_i \equiv 0$ при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$; $\alpha\in(0;2^{-1})$) ограничены на множествах вида $\partial\Omega\times\partial\Omega\times S$, где $S\subset\mathbf{C}_0$ – замкнутое конечное множество. По аналогии с непрерывностью получаем дифференцируемость функций $\boldsymbol{H}_i(\gamma)$ в любой точке $\gamma\in\mathbf{C}_0$. Это означает, что функции $\boldsymbol{H}_i(\gamma)$ ($i=\overline{0,2}$), а вместе с ними и $\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\gamma)$ ($i=1,2$) голоморфны в $\mathbf{C}_0$. В силу теоремы об устойчивости ограниченной обратимости функции $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\gamma)$ голоморфны в $\mathbf{C}_+$ [16, с. 459]. Утверждение доказано.

Теорема 12. Операторы $\boldsymbol{G}_i^{\pm}$: $L_2(\partial\Omega;H)\to L_2(\partial\Omega;H)$ ($i=1,2$) ограниченно обратимы.

Доказательство (ср. [19, параграф 3]). Зададим функции $\varphi_h(\gamma) \equiv \equiv h^{-1}[1-\exp(-h\gamma)]$, зависящие от $h>0$ как от параметра. Функции $\zeta = \varphi_h(\gamma)$ голоморфны в $\mathbf{C}$ и их значения принадлежат $\mathbf{C}_+$ при $\gamma \in \mathbf{C}_+$. Поэтому с учетом голоморфности функций $\underset{i}{\boldsymbol{H}}^{\pm-1}(\zeta)$ в $\mathbf{C}_+$ (см. следствие 8) функции $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\gamma) \equiv \underset{i}{\boldsymbol{H}}^{\pm-1}(\varphi_h(\gamma))$, зависящие от $h>0$ как от параметра, голоморфны в $\mathbf{C}_+$. Значения функций $\varphi_h(\gamma)$ ($h>0$) при $\gamma \in \mathbf{C}_\mu$ ($\mu>0$) образуют круг с центром в точке h^{-1} и радиусом $h^{-1}\exp(-h\mu)$, полностью находящийся в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta \geq \varphi_h(\mu) > 0$. Следовательно, функции $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\gamma)$ ($h>0$) ограничены в $\mathbf{C}_\mu$ при любом $\mu>0$. Получили, что $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm} \in \mathbf{F}$.

Функции $\varphi_h(\gamma) \to \gamma$ при $h \to +0$ равномерно на каждом компакте в $\mathbf{C}_+$. Отсюда в силу непрерывности $\underset{i}{\boldsymbol{H}}^{\pm-1}(\zeta)$ в $\mathbf{C}_+$ вытекает, что $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\gamma) \to \underset{i}{\boldsymbol{H}}^{\pm-1}(\gamma)$ по операторной норме при $h \to +0$ равномерно на любом множестве Γ_W ($W>0$). Поэтому при фиксированных $W>0$ имеем предельные равенства в операторной норме:

$$\lim_{h\to+0} \boldsymbol{P}_\gamma(\Gamma_W)\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}}) = \boldsymbol{P}_\gamma(\Gamma_W)\underset{i}{\boldsymbol{H}}^{\pm-1}(\tilde{\boldsymbol{D}}). \tag{18}$$

Пусть $\varphi_0(\gamma) \equiv \gamma$. Заметим, что при любых $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $h>0$ выполнено неравенство: $\alpha > \varphi_h(\alpha)$, в силу которого функция $\psi_\alpha(h) \equiv \varphi_h(\alpha)$ для любого фиксированного $\alpha>0$ является убывающей при $h \in [0;\infty)$. Отсюда $\operatorname{Re}\varphi_h(\gamma) \geq \varphi_h(\operatorname{Re}\gamma) \geq \varphi_{h_0}(\operatorname{Re}\gamma) \geq \varphi_{h_0}(\mu) > 0$ при $\gamma \in \mathbf{C}_\mu$, $h \in [0;h_0]$ и фиксированных $\mu>0$, $h_0>0$. Поэтому функции $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\gamma)$ равномерно по $h \in [0;h_0]$ ограничены в любой полуплоскости $\mathbf{C}_\mu$ ($\mu>0$), а значит, и на множестве Γ. Тогда в силу конечности меры $\boldsymbol{P}_\gamma$ можно в обеих частях равенства (18) сделать дополнительный предельный переход $W \to \infty$ в сильной операторной топологии и получить следующие пределы в норме $L_2(\partial\Omega;\tilde{H})$:

$$\lim_{h\to+0} \boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{f} = \underset{i}{\boldsymbol{H}}^{\pm-1}(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{f} \quad (\boldsymbol{f} \in L_2(\partial\Omega;\tilde{H})). \tag{19}$$

Введем в рассмотрение функции $\Phi_h(\lambda) = h^{-1}(1-\lambda)$, зависящие от $h>0$ как от параметра. Функции $\Phi_h(\lambda)$ голоморфны в $\mathbf{C}$ и их значения принадлежат $\mathbf{C}_+$ при $|\lambda|<1$. Поэтому функции $A_{i,h}^{\pm}(\lambda) \equiv \boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\Phi_h(\lambda))$, зависящие от $h>0$ как от параметра, голоморфны в круге $|\lambda|<1$. Пусть $A_{i,h,n}^{\pm}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) – коэффициенты разложения в ряд Тейлора соответствующих функций $A_{i,h}^{\pm}(\lambda)$ в круге $|\lambda|<1$. Так как $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\gamma) = A_{i,h}^{\pm}(e^{-h\gamma})$, то операторы $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\gamma)$ ($h>0$, $\gamma \in \mathbf{C}_+$) могут быть представлены в виде сходящихся в норме $\mathbf{B}$ рядов:

$$\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{i,h,n}^{\pm}\exp(-nh\gamma). \tag{20}$$

На основании равенств

$$\left(\boldsymbol{A}_{i,h,n}^{\pm}\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\right)_{L_2(\partial\Omega)}=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{|\lambda|=\exp(-h\mu)}\lambda^{-n-1}\left(\boldsymbol{A}_{i,h}^{\pm}(\lambda)\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\right)_{L_2(\partial\Omega)}d\lambda$$

$$(\ \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in L_2(\partial\Omega)\ ;\ \mu>0\ )$$

получаем оценки:

$$\left\|\boldsymbol{A}_{i,h,n}^{\pm}\right\|\leq C_{h,\mu}/\exp(-nh\mu)\text{, где }C_{h,\mu}\equiv\max_{\gamma\in\mathbf{C}_{\mu}}\left\|\boldsymbol{R}_{ih}^{\pm}(\gamma)\right\|.$$

Положим $\mu=p/2$. Тогда имеем оценки:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}_{i,h,n}^{\pm}\right\|\left|\exp(-nh\gamma)\right|\leq C_{h,p/2}\left[1-\exp(-hp/2)\right]^{-1}\ (\ \gamma\in\mathbf{C}_p,\ h>0\ ). \tag{21}$$

Подставляя выражения (20) в соответствующие интегралы $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})$ и изменяя порядок суммирования и интегрирования на основании оценок (21) и $\left\|\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{D}})\right\|\leq 4\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\left\|\boldsymbol{F}(\gamma)\right\|$, приходим с учетом формулы (7) для $\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)$ к представлению операторов $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})$ ($h>0$) в виде сходящихся в операторной норме рядов:

$$\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_{i,h,n}^{\pm}\,\tilde{\boldsymbol{T}}(nh)\,. \tag{22}$$

Обозначим $\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\boldsymbol{D})\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_{i,h,n}^{\pm}\,\boldsymbol{T}(nh)$. В силу равенств (19) существуют сильные операторные пределы: $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\boldsymbol{D})\equiv\lim\limits_{h\to+0}\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\boldsymbol{D})$. В теореме 11 доказано, что операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}=\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})$ имеют ограниченные обратные $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\tilde{\boldsymbol{D}})$. Учитывая также, что элементы $\tilde{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f}\in L_2(\partial\Omega;\tilde{H})$) могут быть аппроксимированы в норме $L_2(\partial\Omega;\tilde{H})$ конечными суммами вида $\sum_{n=0}^{N}\tilde{\boldsymbol{A}}_n\tilde{\boldsymbol{T}}(nh')\boldsymbol{f}$ ($h'>0$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_n$ – ограниченные операторы в $L_2(\partial\Omega)$), и равенства $\boldsymbol{T}(\tau)=\text{пр}\,\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)$, (19) и (22), получаем следующие равенства для произвольного $\boldsymbol{f}\in L_2(\partial\Omega;H)$:

$$\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\boldsymbol{D})\boldsymbol{G}_i^{\pm}\boldsymbol{f}=\tilde{\boldsymbol{P}}\lim_{h\to+0}\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}\ ,$$

$$\boldsymbol{G}_i^{\pm}\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\boldsymbol{D})\boldsymbol{f}=\tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{H}_i^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})\lim_{h\to+0}\boldsymbol{R}_{i,h}^{\pm}(\tilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}\ ,$$

т.е операторы $\boldsymbol{G}_i^{\pm}:\ L_2(\partial\Omega;H)\to L_2(\partial\Omega;H)$ имеют ограниченные обратные $\boldsymbol{H}_i^{\pm-1}(\boldsymbol{D})$. Теорема доказана.

Из следствия 7 и теорем 9, 12 вытекают основные результаты настоящей работы:

Следствие 9. Задача $\left\{P_i^{\pm}\right\}$ ($i=1,2$) однозначно разрешима с любой граничной функцией $\boldsymbol{w}_i^{\pm}\in C(\partial\Omega;H)$. Ее решение представимо в виде функции $\boldsymbol{g}_i$ с неизвестной $\boldsymbol{v}_i^{\pm}$, однозначно определяемой уравнением ($13_i^{\pm}$), и обладает устойчивостью. А именно: пусть $\boldsymbol{u}_i^{(1)\pm}$, $\boldsymbol{u}_i^{(2)\pm}$ – решения задачи $\left\{P_i^{\pm}\right\}$ с соответствующими граничными функциями $\boldsymbol{w}_i^{(1)\pm}$, $\boldsymbol{w}_i^{(2)\pm}$ из пространства $C(\partial\Omega;H)$. Тогда $\left\|\boldsymbol{u}_i^{(1)\pm}-\boldsymbol{u}_i^{(2)\pm}\right\|_{C(\overline{\Omega^{\pm}};H)}\to 0$, если $\left\|\boldsymbol{w}_i^{(1)\pm}-\boldsymbol{w}_i^{(2)\pm}\right\|_{C(\partial\Omega;H)}\to 0$.

Следствие 10. Пусть $\partial\Omega\in C^{k+2}$ ($k\in\mathbf{Z}_+$). Операторы $\boldsymbol{G}_i^{\pm}:\ C^k(\partial\Omega;H_{\boldsymbol{B}}^n)\to$ $\to C^k(\partial\Omega;H_{\boldsymbol{B}}^n)$ ($n\in\mathbf{Z}_+$; $i=1,2$) всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.
2. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
3. *Иванов В.К.*, *Мельникова И.В.*, *Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995. 176 с.
4. *Yakubov S.*, *Yakubov Ya.* Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000. 541 p.
5. *Шахмуров В.Б.* Максимальные регулярные абстрактные эллиптические уравнения и их приложения // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 5. С. 1175–1191.
6. *Shakhmurov V.* Singular degenerate problems and application [Электронный ресурс] // https://arxiv.org /abs/1707.01376 (дата представления: 05.06.2017).
7. *Shakhmurov V.* Regularity properties of singular degenerate abstract differential equations and applications [Электронный ресурс] // https://arxiv.org /abs/1707.01771 (дата представления: 05.06.2017).
8. *Иванов Д.Ю.* Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
9. *Иванов Д.Ю.*, *Дзержинский Р.И.* Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
10. *Иванов Д.Ю.* Использование векторных потенциалов для решения двумерной задачи Робена, описывающей теплопроводность в прямом цилиндре // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 3-1. С. 8–14.
11. *Иванов Д.Ю.* Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6. С. 33–45.
12. *Секефальви-Надь Б.*, *Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970. 432 с.
13. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
14. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. 1064 с.
15. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
16. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
17. *Рид М.*, *Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
18. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Л.: ГИТТЛ, 1953. 804 с.
19. *Иванов Д.Ю.* Обоснование одного алгоритма численного решения обратных граничных задач теплопроводности, построенного с учетом полугрупповой симметрии таких задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 12. С. 2028-2042.

Статья поступила 15.02.2018 г.

Ivanov D.Y. (2019) SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR A TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION IN AN ABSTRACT HILBERT SPACE USING THE METHOD OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 11–31

DOI 10.17223/19988621/60/2

Keywords: Boundary-value problem, differential-operator equation, boundary integral equation, semigroup of operators, generator, vector-valued function, operator-valued function, unitary dilation.

In this paper, we study boundary-value problems of the first, second, and third kinds for the differential-operator equation $\Delta_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ ($\Delta_2 \equiv \partial^2_{x_1x_1} + \partial^2_{x_2x_2}$) in an open two-dimensional bounded simply connected domain Ω^+ or its open exterior Ω^-. Here, $\boldsymbol{u}(x_1,x_2)$ is a vector function with values in an abstract Hilbert space H; $\boldsymbol{B}$ is a linear closed densely operator defined in the space H and generating an exponentially decreasing C_0-semigroup of contractions $\boldsymbol{T}(\tau)$: $\|\boldsymbol{T}(\tau)\| \le \exp(-p\tau)$ ($p > 0$). Solutions of the boundary-value problems are obtained in the form of vector potentials with unknown vector functions similar to density functions, which are found from Fredholm boundary integral equations of the second kind, wherein kernels of integral operators are expressed through the C_0-semigroup $\boldsymbol{T}(\tau)$. Let $\partial\Omega$ be the boundary of the domain $\Omega^\pm$. Under the condition $\partial\Omega \in C^2$, the stable solvability of the boundary-value problems in the space $C(\overline{\Omega^\pm};H)$ is proved. Here, $C(\overline{\Omega^\pm};H)$ is the Banach space of vector functions, continuous on the closed set $\overline{\Omega^\pm}$ with values in the space H. The stable solvability of the boundary integral equations in the spaces $L_2(\partial\Omega;H)$ and $C^k(\partial\Omega;H^n_{\boldsymbol{B}})$ (k, $n \ge 0$) is also proved under the conditions $\partial\Omega \in C^2$ and $\partial\Omega \in C^{k+2}$, respectively. Here, $L_2(\partial\Omega;H)$ is the Hilbert space of vector functions, square-summable on the set $\partial\Omega$ with values in the space H; $C^k(\partial\Omega;H^n_{\boldsymbol{B}})$ is the Banach space of vector functions, k times continuously differentiable on the set $\partial\Omega$ with values in the Sobolev type space $H^n_{\boldsymbol{B}}$ defined by powers n+1 of the operator $\boldsymbol{B}$.

AMS Subject Classification: 31A25, 34G10, 35J25

*IVANOV Dmitry Yurievic*h (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engeneering (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Polozhii G.N. (1964) *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya Shkola. 560 p.
2. Krein S.G. (1971) *Linear differential equations in Banach space*. Providence: American Math. Soc. 390 p.
3. Ivanov V.K., Mel'nikova I.V., Filinkov A.I. (1995) *Differentsial'no-operatornye uravneniya i nekorreknye zadachi* [Operator-differential equations and ill-posed problems]. Moscow: Nauka. 176 p.
4. Yakubov S., Yakubov Ya. (2000) *Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations*. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC. 541 p.
5. Shakhmurov V.B. (2010) Maximal regular abstract elliptic equations and applications. *Siberian Mathematical Journal*. 51 (5). pp. 935–948. DOI: https://doi.org/10.1007/s11202-010-0093-5. pp. 1175–1191.
6. Shakhmurov V. *Singular degenerate problems and application*. Available at https://arxiv.org/abs/1707.01376 (submitted on 5 July 2017).

7. Shakhmurov V. *Regularity properties of singular degenerate abstract differential equations and applications*. Available at https://arxiv.org/abs/1707.01771 (submitted on 5 July 2017).
8. Ivanov D.Y. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. https://link.springer.com/article/10.1134/S0012266110080045.
9. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Resheniye zadach Robena dlya dvumernykh differentsial'no-operatornykh uravneniy, opisyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region.* 1. pp. 15-17.
10. Ivanov D.Yu. (2016) Ispolzovanie vektornykh potentsialov dlya resheniya dvumernoy zadachi Robena, opisyvayuschey teploprovodnost’ v pryamom tsilindre [Using of vector potentials for solving the two-dimensional Robin problem describing the heat conductivity in a straight cylinder]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk – Actual Problems of Humanitarian and Natural Sciences*. 3-1. pp. 8–14.
11. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost’ v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 33–45. DOI 10.17223/19988621/38/4.
12. Sz.-Nagy B., Foias C. (1970) *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* Budapest: Akadémiai Kiadó; Amserdam, London: North-Holland Pub. Co. 389 p.
13. Mikhlin S.G. (1970) *Mathematical physics: an advanced course*. Amserdam: North-Holland Pub. Co. 561 p.
14. Dunford N., Schwartz J.T. (1963) *Linear operators. Part II. Spectral theory, Self adjoint operators in Hilbert space.* New York, London: Interscience Publishers. 1065 p.
15. Dunford N., Schwartz J.T. (1958) *Linear operators. Part I. General theory.* New York, London: Interscience Publishers. 858 p.
16. Kato T. (1976) *Perturbation theory for linear operators*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. 620 p.
17. Reed M., Simon B. (1972) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis.* New York, London: Academic Press. 325 p.
18. Smirnov V.I. (1964) *A course of higher mathematics. Vol. 4. Integral equations and partial differential equations*. Oxford, New-York: Pergamon Press. 811 p.
19. Ivanov D.Yu. (1998) Validation of a numerical algorithm for solving inverse boundary value problems for heat equation that takes into account the semigroup symmetry. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 38 (12). pp. 1948–1961.

Received: February 15, 2018