

УДК 514.132+515.162
DOI 10.17223/19988621/60/3

MSC: 57M05, 20F05, 57M50

Т.А. Козловская

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП СИРАДСКИ С ЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ПОРОЖДАЮЩИХ И ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ¹

Рассматриваются обобщенные группы Сирадски $S(2n, 7, 2)$, $n \geq 1$. Установлено, что их n -циклические представления являются геометрическими, то есть соответствуют спайнам замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Доказано, что полученные многообразия являются n -листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств $L(7, 1)$.

Ключевые слова: *трехмерное многообразие, разветвленное накрытие, линзовое пространство, группа с циклическим представлением, группа Сирадски.*

Дж. Столлинкс в работе [1] показал, что не существует алгоритма, который позволяет по конечному представлению группы определить, является ли она фундаментальной группой некоторого трехмерного многообразия. Этот вопрос решался многими авторами в различных частных случаях, среди которых наибольший интерес был связан с изучением групп, допускающих циклическое представление.

Напомним, что группа G называется *группой с циклическим представлением*, если при некоторых m и w она допускает представление вида

$$G = G_m(w) = \langle x_1, \dots, x_m \mid w = 1, \eta(w) = 1, \dots, \eta^{m-1}(w) = 1 \rangle,$$

где $\eta: \mathbb{F}_m \rightarrow \mathbb{F}_m$ – автоморфизм свободной группы $\mathbb{F}_m = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ ранга m , определенный по правилу $\eta(x_i) = x_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $\eta(x_m) = x_1$, а $w = w(x_1, \dots, x_m)$ – циклически приведенное слово в $\mathbb{F}_m$. Представления групп 3-многообразий называют *геометрическими*, если они соответствуют спайнам замкнутых трехмерных многообразий.

В последнее время исследовано много интересных примеров циклических разветвленных накрытий трехмерной сферы и линзовых пространств, фундаментальные группы которых допускают циклические представления (см. [2–7]). Были получены результаты о взаимосвязях циклически представимых групп и циклических разветвленных накрытий S^3 и $L(p, q)$. По-видимому, новый этап в изучении таких групп начался с работы Х. Хеллинга, А. Кима и И. Меннике [2], где было показано, что группы Фибоначчи возникают как фундаментальные группы замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Эти многообразия могут быть охарактеризованы следующим топологическим свойством: многообразие Фибоначчи является n -листным циклическим накрытием S^3 , разветвленным над узлом восьмерка (см. [8]). Различные обобщения групп Фибоначчи изучены в [6, 9, 10]. Исследование разветвленных циклических накрытий и циклических представле-

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 1.13557.2019/13.1).

ний их фундаментальных групп также связано с многообразиями Данвуди [4]. Многообразия Данвуди были определены как многообразия, допускающие диаграммы Хегора с циклической симметрией разветленно накрывающие многообразия Хегора рода один. Многообразия, допускающие разбиение Хегора рода один – это линзовые пространства $L(p, q)$, включая $S^2 \times S^1 = L(1, 0)$. Л. Грасселли и М. Мулаццани показали в [11], что класс многообразий Данвуди в точности, совпадает с классом строго-циклических разветвленных накрытий $(1, 1)$ -узлов. Класс $(1, 1)$ -узлов содержит двухмостовые узлы и торические узлы в трехмерной сфере. Многообразия Сирадски были введены А. Сирадски в работе [12]. А. Кавиккиоли, Ф. Хагенбарт и А.Ч. Ким установили, что многообразия Сирадски и их обобщения являются n -листными циклическими накрытиями S^3 , разветвленными над торическими узлами [3]. В частности, циклическое представление группы Сирадски $S(m, 3, 2)$ соответствует спайну многообразия, которое m -листно циклически накрывает трехмерную сферу разветленно над узлом трилистник. Дж. Хоуи и Г. Вильямс в [13] рассмотрели случай четного $m = 2n$ и показали, что n -циклическое представление группы $S(2n, 3, 2)$ соответствует n -листному накрытию линзового пространства $L(3, 1)$. n -Циклическое представление групп $S(2n, 5, 2)$ было рассмотрено в статье [14], где установлено, что соответствующие многообразия являются n -листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств $L(5, 1)$. В данной работе исследуются группы $S(2n, 7, 2)$, $n \geq 1$ и их n -циклические представления. Построен спайн, соответствующий n -циклическому представлению группы $S(2n, 7, 2)$. В теореме 2 показано, что этот спайн задает многообразие, n -листно циклически накрывающее линзовое пространство $L(7, 1)$. Для малых значений n построенные многообразия были классифицированы с помощью компьютерной программы «Распознаватель» [15].

2. Основные понятия и вспомогательные утверждения

Хорошо известно, что любое замкнутое трехмерное многообразие может быть представлено как результат попарного отождествления граней его фундаментального многогранника. Примерами являются представление линзового пространства $L(p, q)$, $p \geq 3$, как бипирамиды (см. рис. 1), у которой верхние треугольные грани отождествлены с нижними треугольными гранями по правилу: $A_i S_+ A_{i+1} \rightarrow A_{i+q} S_- A_{i+q+1}$, $i = 0, \dots, p-1$, а также представление сферы Пуанкаре как додекаэдра, у которого каждые две противоположные грани отождествлены некоторым образом. Построение трехмерных гиперболических многообразий из правильных многогранников восходит к работе Вебера и Зейферта [16], где в качестве фундаментального многогранника выступал додекаэдр с

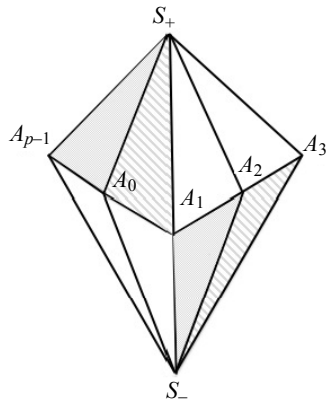


Рис. 1. p -угольная бипирамида

Fig. 1. The p -gonal bipyramid

двугранными углами $2\pi/5$. По построению, многообразие Вебера – Зейферта обладает симметрией пятого порядка, которая позволяет представить это многообразие как 5-листное циклическое накрытие трехмерной сферы, разветвленное над зацеплением Уайтхеда. В этой же работе [16] было построено замкнутое ориентируемое трехмерное сферическое многообразие из додекаэдра с двугранными углами $2\pi/3$.

Многогранник P называют фундаментальным для трехмерного многообразия M , если M может быть получено как результат попарного отождествления граней P . Теорема Зейферта и Трельфалля [17] позволяет распознать многообразие: «Комплекс K^3 , получающийся путем попарного отождествления граней многогранника, является трехмерным многообразием в том и только в том случае, когда его эйлерова характеристика равна 0». Эйлерова характеристика комплекса K^3

определяется следующим образом: $\chi(K^3) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i S_i$, где S_i – количество сим-

плексов размерности i в его триангуляции. Диаграммы Хегора – это наиболее распространенный способ задания замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Пусть M^3 – замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие. Пара (H_g, H'_g) , состоящая из двух полных кренделей рода g , называется *сплетением Хегора* рода g многообразия M^3 , если $M^3 = H_g \cup H'_g$ и $H_g \cap H'_g = \partial H_g$ представляет собой замкнутую ориентируемую поверхность рода g . Минимальный род среди всех родов сплетений Хегора многообразия M^3 называется *родом Хегора* многообразия M^3 . Трехмерная сфера S^3 является единственным ориентируемым многообразием с нулевым родом Хегора. Род Хегора равен 1 для линзовых пространств и многообразия $S^2 \times S^1$. Диаграмма Хегора линзового пространства $L(p, q)$, $p > q > 0$, $p \geq 3$, представлена на рис. 2. Описание многообразия диаграммой Хегора позволяет выписать его фундаментальную группу. Напомним (см., например, [18]), что представление фундаментальной группы трехмерного многообразия называется *геометрическим*, если оно соответствует диаграмме Хегора многообразия. Хорошо известно, что две диаграммы Хегора представляют одно и то же трехмерное многообразие тогда и только тогда, когда от одной диаграммы к другой можно перейти с помощью конечной последовательности преобразований, каждое из которых является движением Зингера (см. подробнее в [19, 20]).

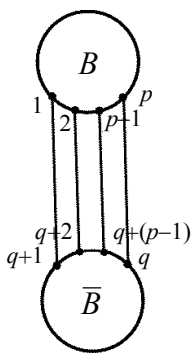


Рис. 2. Диаграмма Хегора линзового пространства $L(p, q)$

Fig. 2. Heegaard diagram for lens space $L(p, q)$

3. Группы с циклическим представлением

Примеры групп с циклическим представлением, возникающих как фундаментальные группы трехмерных многообразий, хорошо известны. Группы с циклическим представлением

$$F(2, m) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2}, i = 1, \dots, m \rangle,$$

где индексы берутся по модулю m , называются *группами Фибоначчи*. Х. Хеллинг, А.Ч. Ким и Й. Меннике в [2] доказали, что если число порождающих четно $m = 2n$, то при $n \geq 4$ группы $F(2, 2n)$ реализуются как фундаментальные группы трехмерных гиперболических многообразий. Построенные ими многообразия, являются n -листными накрытиями S^3 , разветвленными над узлом восьмерка.

Еще один интересный пример, группы со следующим циклическим представлением $S(m) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+2} = x_{i+1}, i = 1, \dots, m \rangle$, где все индексы берутся по модулю m , были введены А. Сирадски. Эти группы позже были названы группами Сирадски [12].

Группы

$$S(m, p, q) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+q} \cdots x_{i+(q-1)dq-q} x_{i+(q-1)dq} = x_{i+1} x_{i+q+1} \cdots x_{i+(q-1)dq-q+1}, i = 1, \dots, m \rangle$$

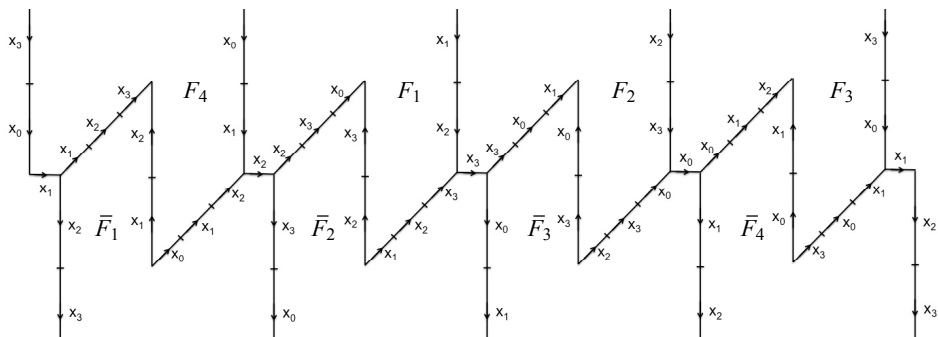
будем называть *обобщенными группами Сирадски*. Здесь все индексы берутся по модулю m , а p и q – такие взаимно простые положительные числа, что $p = 1 + dq$, $d \in \mathbb{Z}$. А. Кавикиоли, Ф. Хегенбарт и А.С. Ким установили [3], что циклическое представление $S(m, p, q)$ соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия, которое является m -листным циклическим накрытием S^3 , разветвленным над торическим узлом $T(p, q)$. В частности, циклическое представление группы Сирадски $S(m) = S(m, 3, 2)$ соответствует спайну многообразия, которое m -листно циклически накрывает трехмерную сферу разветвленно над узлом трилистник $T(3, 2)$. Нас интересуют обобщенные группы Сирадски с параметром $q = 2$. В этом случае $p = 1 + dq$ и

$$S(m, 2d + 1, 2) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+2} \cdots x_{i+2d} = x_{i+1} x_{i+3} \cdots x_{i+2d-1}, i = 1, \dots, m \rangle.$$

Циклические представления групп $S(2n, 3, 2)$ (случай $q = 2, d = 1$) исследовались Дж. Хоуи и Г. Вильямсом [13]. Они показали, что n -циклические представления $S(2n, 3, 2) = G_n(x_i x_{i+1}^2 x_{i+2} x_{i+1}^{-1})$ являются геометрическими, то есть соответствуют спайнам замкнутых трехмерных многообразий. Аналогичный факт установлен для групп $S(2n, 5, 2)$ (случай $q = 2, d = 2$). А именно, А. Весниным и Т. Козловской в [14] показано, что n -циклические представления $S(2n, 5, 2) = G_n(x_i x_{i+1} x_{i+2}^2 x_{i+3} x_{i+4} x_{i+3}^{-1} x_{i+2}^{-1} x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1})$ являются геометрическими. Доказано, что в обоих случаях полученные многообразия являются n -листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств. С целью дальнейшего обобщения конструкции перерисуем двумерный комплекс, представленный в работе [14], как изображено на рис. 3. Используя теорему Зейферта и Трельфалля [17], нетрудно проверить, что приведенный двумерный комплекс является спайном замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия.

4. Разветвленные циклические накрытия $L(7, 1)$

Рассмотрим обобщенные группы Сирадски $S(2n, 7, 2)$ с четным числом порождающих. От циклического представления с $2n$ порождающими перейдем к циклическому представлению с n порождающими:

Рис 3. Двумерный комплекс для $n = 4$, $(p, q) = (5, 2)$ Fig. 3. The complex for the case $n = 4$, $(p, q) = (5, 2)$

$$\begin{aligned}
 S(2n, 7, 2) &= G_{2n}(x_1 x_3 x_5 x_4^{-1} x_2^{-1}) = \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} | x_i x_{i+2} x_{i+4} x_{i+6} = x_{i+1} x_{i+3} x_{i+5}, i=1, \dots, 2n \rangle = \\
 &= \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} | x_j x_{j+3} x_{j+5} x_{j+7} = x_{j+2} x_{j+4} x_{j+6}, x_{j+2} x_{j+4} x_{j+6} x_{j+8} = x_{j+3} x_{j+5} x_{j+7}, \\
 j=2, 4, \dots, 2n \rangle &= \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} | x_{j+7} = (x_j x_{j+2} x_{j+4} x_{j+6})^{-1} x_{j+2} x_{j+4} x_{j+6}, x_j x_{j+2} x_{j+4} x_{j+6} = \\
 &= x_{j+1} x_{j+3} x_{j+5}, j=2, 4, \dots, 2n \rangle = \langle x_2, x_4, \dots, x_{2n} | x_j x_{j+2} x_{j+4} x_{j+6} = \\
 &= (x_{j+4}^{-1} x_{j+2}^{-1} x_j^{-1} x_{j-2} x_{j-4} x_{j-6} x_{j-8}) (x_j^{-1} x_{j-2}^{-1} x_{j-4}^{-1} x_{j-6} x_{j-8} x_{j-10}) = 1, \\
 j=2, \dots, 2n \rangle &= \langle y_1, y_2, \dots, y_n | y_i y_{i+1} y_{i+2} y_{i+3} y_{i+4}^{-1} y_{i+2}^{-1} y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i-1} y_{i+1} y_{i+2} y_{i+3}^{-1} y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} \times \\
 &\quad \times y_{i-2} y_{i-1} y_i y_{i+1} y_{i+2}^{-1} y_{i-1}^{-1} y_{i-2}^{-1} y_{i-3} y_{i-2} y_{i-1} y_i = 1, i=1, \dots, n \rangle = \\
 &= G_n(y_3 y_4 y_5 y_0 y_5^{-1} y_4^{-1} y_3^{-1} y_2 y_3 y_4 y_5 y_4^{-1} y_3^{-1} y_2^{-1} y_1 y_2 y_3 y_4 y_3^{-1} y_2^{-1} y_1^{-1} y_0 y_1 y_2 y_3).
 \end{aligned}$$

Очевидно, полученное представление эквивалентно следующему:

$$G_n(y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_0 y_5^{-1} y_4^{-1} y_3^{-1} y_2 y_3 y_4 y_5 y_4^{-1} y_3^{-1} y_2^{-1} y_1 y_2 y_3 y_4 y_3^{-1} y_2^{-1} y_1^{-1}). \quad (1)$$

Теорема 1. Циклическое представление (1) является геометрическим, то есть оно соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия. $\square$

Поскольку для рассматриваемого циклического представления (1) определяющее слово является достаточно большим, мы рассмотрим строение двумерного комплекса на примере. На рис. 4, представлено строение двумерного комплекса K_1 (для $n = 1$). Опишем 2-комплекс K_1 , имеющий две двумерные клетки (грани), каждая из которых является 25-угольником, а одномерные клетки (ребра) имеют метки $x_i^{\pm 1}$. Чтение меток вдоль границ 25-угольников дает определяющее соотношение группы. При этом 2-клетки разбиваются на пары, противоположно ориентированные и соответствующие одному и тому же слову. Мы будем подразумевать, что ребра левой и правой границ циклически отождествлены и что вертикальные линии, уходящие вверх, встречаются в одной точке и, аналогично, вертикальные линии, уходящие вниз, также встречаются в одной точке. Тогда группа имеет два порождающих, которые обозначим через x_0, x_1 , и два определяющих соотношения, которые мы перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 x_0 x_1 x_0 x_1 x_0 x_1 x_0 x_1^{-1} x_0^{-1} x_1^{-1} x_0 x_1 x_0 x_1 x_0^{-1} x_1^{-1} x_0^{-1} x_1 x_0 x_1 x_0 x_1^{-1} x_0^{-1} x_1^{-1} &= 1, \\
 x_1 x_0 x_1 x_0 x_1 x_0 x_1 x_0^{-1} x_1^{-1} x_0^{-1} x_1 x_0 x_1 x_0 x_1^{-1} x_0^{-1} x_1^{-1} x_0 x_1 x_0 x_1 x_0^{-1} x_1^{-1} x_0^{-1} &= 1.
 \end{aligned}$$

Определяющие слова можно прочесть вдоль границ двумерных клеток на рис. 4. Действительно, первое слово читается вдоль границы клетки F_1 , если ориентировать ее против часовой стрелки и также вдоль границы клетки $\bar{F}_1$, если ориентировать ее по часовой стрелке. Аналогичным образом читается слово для пары клеток F_2 и $\bar{F}_2$. Метки, расставленные на ребрах и ориентация ребер задают попарные отождествления двумерных клеток K_1 , которые, в свою очередь, индуцируют отождествления 1-клеток и 0-клеток. В результате получим комплекс. Нетрудно проверить, что его эйлерова характеристика равно нулю. Отсюда следует, что двумерный комплекс K_1 является спайном замкнутого трехмерного многообразия [17]. Конструкция для комплекса K_n и все рассуждения с очевидностью обобщаются для произвольного n . ■

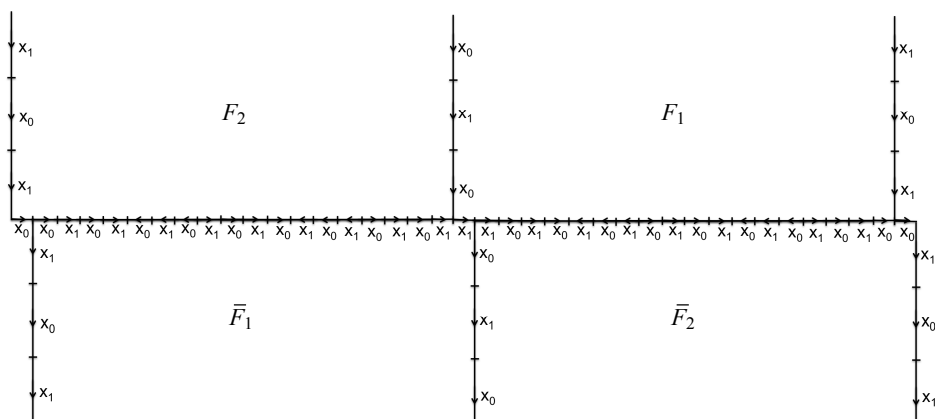


Рис. 4. Двумерный комплекс для $n = 1$, $(p, q) = (7, 2)$

Fig. 4. The complex for the case $n = 1$, $(p, q) = (7, 2)$.

Приведенный на рис. 5, 2-комплекс K_4 является спайном замкнутого трехмерного многообразия.

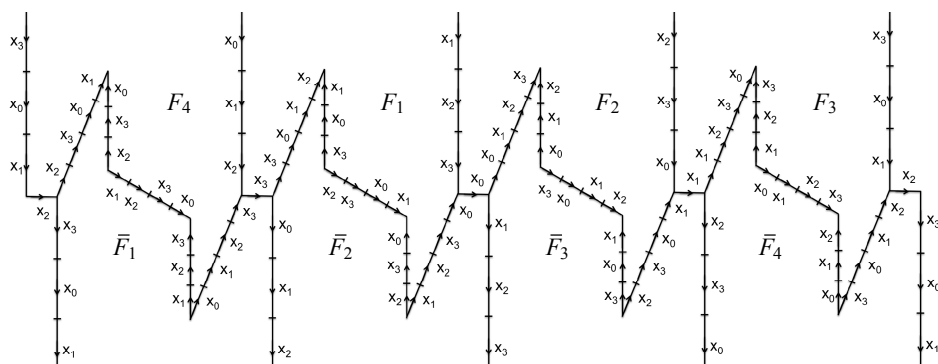


Рис. 5. Двумерный комплекс для случая $n = 4$, $(p, q) = (7, 2)$

Fig. 5. The complex for the case $n = 4$, $(p, q) = (7, 2)$.

Теорема 2. Для каждого $n \geq 1$ многообразие $S(2n, 7, 2)$ является разветвленным n -листным циклическим накрытием линзового пространства $L(7, 1)$.

Известно, что если 3-многообразие задано попарным отождествлением граней многогранника и число пар граней равно N , то для этого трехмерного многообразия существует разбиение Хегора рода N (см. [17]). Открытая диаграмма Хегора многообразия, имеет вид как на рис. 6. Представление группы, реализуемое диаграммой Хегора является геометрическим. У приведенной выше диаграммы Хегора многообразия имеется циклическая симметрия порядка n . Эта симметрия индуцирует симметрию на многообразии $S(2n, 7, 2)$. Фактор-пространство по этой симметрии – трехмерный орбифолд. Носителем этого орбифолда является псевдомногообразие. Теорема доказывается в общем случае, с использованием движений Зингера для диаграмм Хегора. Идея доказательства состоит в проверке того, что полученная диаграмма Хегора является диаграммой Хегора линзового пространства $L(7, 1)$, полученная при помощи последовательности движений Зингера (см. [20]), приводящей к канонической диаграмме Хегора линзового пространства (см. рис. 2). ■

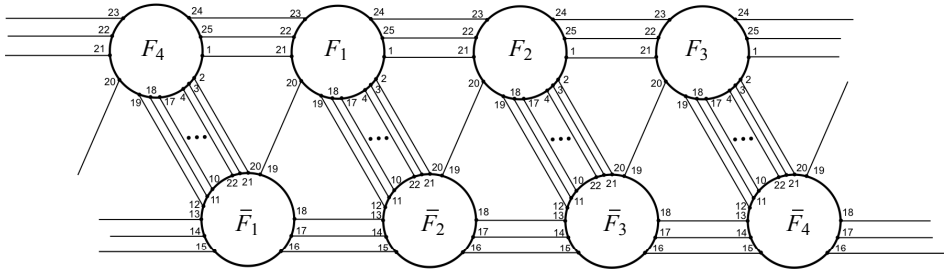


Рис. 6. Диаграмма Хегора для случая $n = 4$, $(p, q) = (7, 2)$
Fig. 6. Heegaard diagram for the case $n = 4$, $(p, q) = (7, 2)$

Задание многообразий фундаментальными многогранниками позволяет перейти к их триангуляции и использовать компьютерную программу «Распознаватель 3-многообразий» [15] для нахождения топологических и геометрических инвариантов. Для малых значений n многообразия $S(2n, 7, 2)$ могут быть классифицированы с помощью «Распознавателя трехмерных многообразий». Вычисления, проведенные для случая $n = 1$ показали, что $S(2, 7, 2)$ является многообразием Зейферта $(S^2, (2, 1), (7, 2), (7, 2), (1, -1))$, а для $n = 3$, что $S(6, 7, 2)$ является многообразием Зейферта $(S^2, (6, 1), (7, 3), (7, 3), (1, -1))$.

Заключение

Исследованы циклические представления групп Сирадски $S(2n, p, q)$ (случай $q = 2$, $d = 3$). Установлено, что n -циклические представления групп Сирадски $S(2n, 7, 2)$ соответствуют спайнам замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Изучены топологические свойства построенных многообразий. Доказа-

но, что трехмерные многообразия являются разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stallings J. On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups // *Fundam. Math.* 1962/63. V. 51. P. 191—194.
2. Helling H., Kim A.C., Mennicke J.L. A geometric study of Fibonacci groups // *J. Lie Theory.* 1998. V. 8. P. 1–23.
3. Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. On cyclic branched coverings of torus knots // *J. Geometry.* 1999. V. 64. P. 55–66.
4. Dunwoody M.J. Cyclic presentations and 3-manifolds // *Proc. Inter. Conf., Groups-Korea '94.* Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 47–55.
5. Kim A.C. On the Fibonacci group and related topics // *Proc. conf. algebra, 1991, Barnaul, Russia (Contemp. Math., 184)*, Providence, RI, Am. Math. Soc. 1995. P. 231–235.
6. Веснин А.Ю., Ким А.Ч. Дробные группы Фибоначчи и многообразия // *Сиб. матем. журнал.* 1998. Т. 39. № 4. С. 765—775.
7. Kim A.C., Kim Y., Vesnin A. On a class of cyclically presented groups // *Proc. Intern. Conf. Groups-Korea '98.* Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2000. P. 211–220.
8. Hilden H., Lozano M., Montesinos-Amilibia J. The arithmeticity of the figure eight knot orbifolds // *Topology '90 Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., Walter de Gruyter, Berlin.* 1992. V. 1. P. 169–183.
9. Johnson D., Wamsley J., Wright D. The Fibonacci Groups // *Proc. London Math. Soc., III. Ser.* 1974. V. 29. No. 4. P. 577–592.
10. MacLachlan C., Reid A.W. Generalised Fibonacci manifolds // *Transform. Groups.* 1997. V. 2. No. 2. P. 165–182.
11. Grasselli L., Mulazzani M. Genus one 1–bridge knots and Dunwoody manifolds // *Forum Mathematicum.* 2001. V. 13. No 3. P. 379–397.
12. Sieradski A.J. Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups // *Invent. Math.* 1986. V. 84. P. 121–139.
13. Howie J., Williams G. Fibonacci type presentations and 3-manifolds // *Topology Appl.* 2017. V. 215. P. 24–34.
14. Веснин А.Ю., Козловская Т.А. Многообразия Брискорна, обобщенные группы Сирадски и накрытия линзовых пространств // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2017. Т. 23. № 4. С. 85–97.
15. *Three-manifold Recognizer.* The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University. URL: <http://matlas.math.csu.ru>
16. Seifert H., Weber C. Die beiden Dodekaedräume // *Math. Z.* 1933. V. 37. P. 237–253.
17. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. Ижевск, 2001. 448 с.
18. Mulazzani M. Cyclic presentation of groups and cyclic branched covering of $(1, 1)$ -knots // *Bull. Korean Math. Soc.* 2003. V. 40(1). P. 101–108.
19. Ozsvath P., Szabo Z. Heegaard diagrams and holomorphic disks // *International Mathematical Series.* 2004. V. 3. P. 301–348.
20. Singer J. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1933. V. 35. No. 1. P. 88–111.

Статья поступила 29.05.2019 г.

Kozlovskaya T.A. (2019) CYCLICALLY PRESENTED SIERADSKI GROUPS WITH EVEN NUMBER OF GENERATORS AND THREE DIMENSIONAL MANIFOLDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 32–41

DOI 10.17223/19988621/60/3

Keywords: three-dimensional manifold, branched covering, lens space, cyclically presented group, Sieradski group.

The Sieradski groups are defined by the presentation $S(m) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+2} = x_{i+1}, i = 1, \dots, m \rangle$, where all subscripts are taken by mod m . The generalized Sieradski groups $S(m, p, q)$ are groups with m -cyclic presentation $G_m(w)$, where word w has a special form depending on coprime integers p and q . We study the problem if a given presentation is geometric, i.e. it corresponds to a spine of a closed orientable 3-manifold. It was shown by Cavicchioli, Hegenbarth, and Kim that the generalized Sieradski group presentation $S(m, p, q)$ corresponds to a spine of some 3-manifold which we denote as $M(m, p, q)$. Moreover, $M(m, p, q)$ are m -fold cyclic coverings of S^3 branched over the torus (p, q) -knot. Howie and Williams proved that $M(2n, 3, 2)$ are n -fold cyclic coverings of the lens space $L(3, 1)$. A. Vesnin and T. Kozlovskaya established that $M(2n, 5, 2)$ are n -fold cyclic coverings of the lens space $L(5, 1)$. In this paper, we consider generalized Sieradski manifolds $M(2n, 7, 2)$ $n \geq 1$. We prove that the n -cyclic presentations of their groups are geometric, i.e., correspond to spines of closed connected orientable 3-manifolds. Moreover, manifolds $M(2n, 7, 2)$ are the n -fold cyclic coverings of the lens space $L(7, 1)$. For the classification some of the constructed manifolds, we use the Recognizer computer program.

AMS Mathematical Subject Classification: 57M05, 20F05, 57M50

Financial support. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (state assignment No. 1.13557.2019/13.1).

KOZLOVSKAYA Tatyana Anatolevna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Associate Professor of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: t.kozlovskaya@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Stallings J. (1962/63) On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups. *Fundam. Math.* 51. pp. 191–194.
2. Helling H., Kim A.C., Mennicke J.L. (1998) A geometric study of Fibonacci groups. *J. Lie Theory*. 8. pp. 1–23.
3. Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. (1999) On cyclic branched coverings of torus knots. *Journal of Geometry*. 64. pp. 55–66.
4. Dunwoody M.J. (1995) Cyclic presentations and 3-manifolds. *Proc. Inter. Conf., Groups-Korea '94*. Berlin; New York: Walter de Gruyter. pp. 47–55.
5. Kim A.C. (1995) On the Fibonacci group and related topics. *Proc. conf. algebra, 1991, Barnaul, Russia (Contemp. Math., 184)*. Providence, RI, Am. Math. Soc. pp. 231–235.
6. Vesnin A.Yu., Kim Ann Chi. (1998) Fractional Fibonacci groups and manifolds. *Siberian Math. J.* 39(4). pp. 655–664.
7. Kim A.C., Kim Y., Vesnin A. (2000.) On a class of cyclically presented groups. *Proc. Intern. Conf., Groups-Korea '98*. Berlin; New York: Walter de Gruyter. pp. 211–220.
8. Hilden H., Lozano M., Montesinos-Amilibia J. (1992) The arithmeticity of the figure eight knot orbifolds. *Topology '90*. Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. Berlin: Walter de Gruyter. 1. pp. 169–183.
9. Johnson D., Wamsley J., Wright D. (1974) The Fibonacci Groups. *Proc. London Math. Soc.*, III. Ser. 29(4). pp. 577–592.
10. MacLachlan C., Reid A. W. (1997) Generalized Fibonacci manifolds. *Transform. Groups*. 2(2). pp. 165–182.
11. Grasselli L., Mulazzani M. (2001) Genus one 1-bridge knots and Dunwoody manifolds. *Forum Mathematicum*. 13(3). pp. 379–397.
12. Sieradski A.J. (1986) Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups. *Invent. Math.* 84. pp. 121–139.

13. Howie J., Williams G. (2017) Fibonacci type presentations and 3-manifolds. *Topology Appl.* 215. pp. 24–34.
14. Kozlovskaya T., Vesnin A. (2019) Brieskorn manifolds, generated Sieradski groups, and coverings of lens space. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 304(1).
15. Three-manifold Recognizer. The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University. URL: <http://matlas.math.csu.ru>
16. Seifert H., Weber C. (1933) Die beiden Dodekaedräume. *Math. Z.* 37. pp. 237–253.
17. Seifert and Threlfall (1980) *A Textbook of Topology, Pure and Applied Mathematics* 89. New York: Academic Press.
18. Mulazzani M. (2003) Cyclic presentation of groups and cyclic branched covering of $(1, 1)$ -knots. *Bull. Korean Math. Soc.* 40(1). pp. 101–108.
19. Ozsvath, P., Szabo, Z. (2004) Heegaard diagrams and holomorphic disks. *International Mathematical Series.* 3. pp. 301–348.
20. Singer J. (1933) Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.* 35(1). pp. 88–111.

Received: May 29, 2019