

УДК 532.5.031

DOI 10.17223/19988621/60/8

А.В. Мерзляков, Е.А. Крюкова

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ СОСУДЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЕРЕГОРОДКОЙ

Исследование направлено на определение формы свободной поверхности идеальной жидкости, колеблющейся под действием силы тяжести в прямоугольном сосуде, разделенном горизонтальной проницаемой перегородкой. Решение задачи проведено в плоской постановке аналитическим путем. Для определения формы свободной поверхности решалось уравнение Лапласа для потенциала скорости идеальной жидкости методом разделения переменных в обеих частях сосуда. Полученные результаты сравнивались с имеющимися в настоящее время решениями подобных задач.

Ключевые слова: идеальная жидкость, потенциал скорости, перегородка, уравнение Лапласа, метод разделения переменных.

Задача о движении жидкости является актуальной во многих областях человеческой деятельности, таких, как судостроение, океанология, гидравлика. Часто при решении практических задач достаточно использовать приближение идеальной жидкости. Это касается чаще всего движения жидкости в больших емкостях.

Для длительного хранения и транспортировки больших объемов жидкости используются баки, содержащие горизонтальные и вертикальные перегородки, оказывающие значительное влияние на ее движение. Потребности изготовления таких баков требуют знания характеристик этого движения.

К настоящему времени опубликовано достаточно много работ, в которых исследуются вопросы движения жидкости в сосудах с перегородками (например, [1 – 8]). В большинстве этих работ рассматриваются вопросы, связанные с частотой колебаний жидкости в сосудах. Для практических целей, однако, гораздо важнее знать (хотя бы приближенно) общую картину поведения жидкости в сосуде и прежде всего, – как меняется со временем форма ее свободной поверхности

В данной работе рассматривается один из возможных случаев движения идеальной жидкости в сосуде с перегородками – колебательное движение под действием силы тяжести. Задача решается аналитически в линейном приближении. За основу был взят подход, изложенный в работе [1]. Результатом работы является форма свободной поверхности жидкости в сосуде в различные моменты времени.

Математическая постановка задачи

Движение идеальной несжимаемой жидкости в плоском случае описывается уравнениями Эйлера (см. [9]):

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

где v_x и v_y – проекции вектора скорости жидкости на оси декартовой системы координат; X и Y – проекции внешних сил на оси Ox , Oy соответственно; P – давление, ρ – плотность, t – время.

В силу потенциальности движения идеальной жидкости можно ввести потенциал скорости жидкости φ , для которого $\vec{v} = \nabla\varphi$. Тогда вместо уравнений Эйлера для описания движения жидкости можно использовать уравнение Лапласа для потенциала φ :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Граничные условия для него:

- на твердой стенке – условие непротекания:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

(n – направление нормали к границе);

- на свободной поверхности – интеграл Коши – Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Pi = f(t),$$

где Π – потенциал внешних сил, действующих на жидкость, $f(t)$ – произвольная функция времени.

Рассмотрим движение идеальной жидкости в прямоугольном сосуде шириной a и глубиной c , в котором находится горизонтальная проницаемая перегородка на высоте b от дна (см. рис. 1).

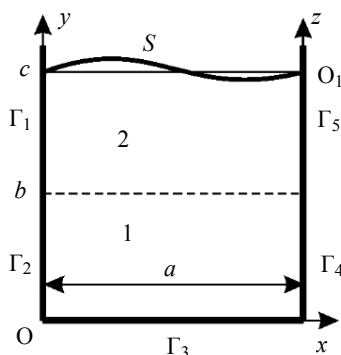


Рис. 1. Расчетная область задачи
Fig. 1. Computational domain of the problem

Перегородка разделяет сосуд на две расчетные области: 1 и 2. Движение жидкости в каждой области будет определяться путем решения уравнение Лапласа (1) для потенциала скорости в этой области.

Для области 1 уравнение Лапласа записывается так:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия для него:

- на твердых границах Γ_2 и Γ_4 – условия непротекания $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0$,

- на твердой границе Γ_3 – условие непротекания $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$.

Для области 2 уравнение Лапласа следующее:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Граничными условиями для него являются:

на твердых границах Γ_1 и Γ_5 – условия непротекания $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0$.

На свободной поверхности в качестве граничного условия ставится интеграл Коши – Лагранжа со следующими дополнениями. Единственной массовой силой, действующей на жидкость, является сила тяжести. Если ввести величину z - отклонение точки свободной поверхности от равновесного положения (соответствующая координата представлена на рис. 1), то потенциал силы тяжести, действующей на единицу массы, определяется формулой: $\Pi = gz$, где g – ускорение свободного падения.

При решении поставленной задачи предполагается, что отклонение свободной поверхности жидкости от положения равновесия настолько мало, что область, занятая жидкостью, сохраняет прямоугольную форму. Из-за этого в формуле можно пренебречь квадратами скоростей. Считается, что давление над поверхностью жидкости P является постоянной величиной, поэтому соответствующее слагаемое можно включить в потенциал. Произвольную функцию $f(t)$ можно сделать равной 0. Поэтому граничное условие на свободной поверхности примет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + gz = 0. \quad (4)$$

На проницаемой перегородке в обеих областях ставятся условия для потока жидкости через перегородку в форме, выведенной в работе [10]: нормальная скорость жидкости вблизи перегородки пропорциональна разности значений потенциалов скорости жидкости по обе стороны от перегородки. Для области (1) это условие выглядит так:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{y=b} = q(\varphi_2 - \varphi_1)|_{y=b}. \quad (5)$$

Для области (2):

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{y=b} = q(\varphi_2 - \varphi_1)|_{y=b}. \quad (6)$$

Здесь q – проницаемость перегородки для жидкости.

В качестве начальных условий задачи задаются начальная форма свободной поверхности и начальная скорость точек свободной поверхности. Начальная форма свободной поверхности в рассматриваемой задаче считается некоторой функцией от координаты x , т.е.

$$z(t, x)|_{t=0} = \zeta(x). \quad (7)$$

Начальная скорость точек свободной поверхности жидкости считается равной нулю, т.е.

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{y=c, t=0} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0, t=0} = 0. \quad (8)$$

Метод решения

В области 1 уравнение Лапласа (2) решается методом разделения переменных (см. [11]), согласно которому потенциал вектора скорости представляется в виде следующего произведения:

$$\varphi_1 = T_1(t) \cdot X_1(x) \cdot Y_1(y),$$

где $T_1(t)$ – функция, зависящая только от времени, $X_1(x)$ – только от координаты x , $Y_1(y)$ – только от координаты y .

После подстановки этого произведения в уравнение (2), уравнение принимает следующий вид:

$$T_1 X_1'' Y_1 + T_1 X_1 Y_1'' = 0.$$

Деление этого уравнения на произведение TX_1Y_1 приводит его к следующему виду:

$$\frac{X_1''}{X_1} = -\frac{Y_1''}{Y_1} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – некоторое положительное число.

Из данного равенства получаются дифференциальные уравнения для определения функций X_1 и Y_1 .

Уравнение для X_1 – задача Штурма – Лиувилля – сводится к следующему:

$$X_1'' + \lambda^2 X_1 = 0.$$

Решение данного уравнения выглядит так:

$$X_1 = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x).$$

Постоянные A и B определяются из граничных условий, которые заданы на границах Γ_2 и Γ_4 . Согласно им,

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = X_1'(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=a} = X_1'(a) = 0.$$

Из первого условия следует $B_1 = 0$; из второго условия – $\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$, где n – целое число. Поэтому выражение для функции X_1 – собственная функция задачи Штурма – Лиувилля – выглядит так:

$$X_{1n} = \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Уравнение для Y_1 сводится к следующему:

$$Y_1'' - \lambda^2 Y_1 = 0.$$

Решение данного уравнения

$$Y_1 = C_1 \operatorname{ch}(\lambda y) + D_1 \operatorname{sh}(\lambda y).$$

Согласно граничному условию на границе Γ_3

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{y=0} = Y_1'(0) = 0.$$

Из этого условия следует $D_1=0$. Поэтому выражение для функции Y

$$Y_{1n} = \text{ch}(\lambda_n y) = \text{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right).$$

Таким образом, для произвольно заданного натурального номера n решение уравнения Лапласа будет выглядеть так:

$$\varphi_{1n} = T_{1n}(t) \text{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right),$$

а общее решение – так:

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{1n}(t) \text{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

В области 2 уравнение Лапласа (3) решается также методом разделения переменных, согласно которому потенциал вектора скорости представляется в виде следующего произведения:

$$\varphi_2 = T_2(t) \cdot X_2(x) \cdot Y_2(y),$$

где $T_2(t)$ – функция, зависящая только от времени, $X_2(x)$ – только от координаты x , $Y_2(y)$ – только от координаты y .

Преобразования, аналогичные вышеописанным, приводят уравнение (3) к следующему виду:

$$\frac{X_2''}{X_2} = -\frac{Y_2''}{Y_2} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – некоторое положительное число.

Уравнение для X_2 – задача Штурма – Лиувилля – получается точно такой же, как в области 1:

$$X_2'' + \lambda^2 X_2 = 0.$$

Уравнение совпадает с аналогичным уравнением для области 1, граничные условия для него – такие же из-за равенства ширины областей. Поэтому и решение данного уравнения выглядит точно также:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}; \quad X_{2n} = \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Уравнение для Y_2 сводится к следующему:

$$Y_2'' - \lambda^2 Y_2 = 0.$$

Решение данного уравнения выглядит так:

$$Y_2 = A_2 \text{ch}(\lambda y) + B_2 \text{sh}(\lambda y).$$

Таким образом, для произвольно заданного натурального номера n решение уравнения Лапласа будет выглядеть так:

$$\varphi_{2n} = T_{2n}(t) \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right),$$

а общее решение – так:

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n}(t) \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right).$$

Для определения постоянных A_{2n} и B_{2n} и функций T_{1n} и T_{2n} необходимо воспользоваться граничными условиями на перегородке (5) и (6). Подстановка выражений для φ_1 и φ_2 в эти условия и подстановка значения координаты у перегородки приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} T_{1n} \frac{\pi n}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right) = \\ & = q \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{2n} \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) - T_{1n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right] \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right), \\ & \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n} \frac{\pi n}{a} \left(A_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right) = \\ & = q \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{2n} \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) - T_{1n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right] \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right). \end{aligned}$$

Если перенести все слагаемые в каждом уравнении в одну сторону, объединить их одинаковым суммированием, вынести общие множители (косинусы) и приравнять коэффициенты при них нулю, получатся следующие уравнения для определения функций T_{1n} и T_{2n} :

$$\begin{aligned} T_{1n} \frac{\pi n}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) &= q \left[T_{2n} \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) - T_{1n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right], \\ T_{2n} \frac{\pi n}{a} \left(A_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) &= \\ &= q \left[T_{2n} \left(A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) - T_{1n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right]. \end{aligned}$$

Если разделить уравнения на произведение qT_{2n} и сделать замену $\frac{T_{1n}}{T_{2n}} = C_n$, то после простейших преобразований уравнения будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} A_{2n} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + B_{2n} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) &= \frac{C_n}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) + C_n \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right), \\ A_{2n} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) - \frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) + B_{2n} \left(\operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) - \frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) &= C_n \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} b \right). \end{aligned}$$

При $n = 0$ оба уравнения сводятся к виду $A_{20} = C_0$, что является признаком правильности преобразований. Очевидно, что произведения $T_{1n} \cdot Y_{1n} \cdot X_{1n}$ и $T_{2n} \cdot Y_{2n} \cdot X_{2n}$ при $n = 0$ в выражениях для обоих потенциалов являются функциями только времени, которые в выражениях для потенциала включать необязательно. В дальнейшем по этой причине все рассуждения и суммирование будут проводиться для $n > 0$.

Если разделить оба уравнения на $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}b\right)$ и исключить из них C_n , то в результате получится выражение

$$A_{2n} = B_{2n} \frac{\operatorname{th}^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - \frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - 1}{\frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right)} = k_n B_{2n},$$

где
$$k_n = \frac{\operatorname{th}^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - \frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - 1}{\frac{1}{q} \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right)}. \quad (9)$$

Таким образом, после подстановки полученного результата выражение для потенциала φ_2 выйдет следующим образом:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{2n} \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}y\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}y\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right), \quad (10)$$

где $\bar{T}_{2n} = T_{2n} \cdot B_{2n}$.

Для определения функции $\bar{T}_{2n}$ используется граничное условие на свободной поверхности (4). Если его продифференцировать по времени и использовать соотношение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y},$$

то получится выражение

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{y=c} = 0.$$

Подстановка в него формулы (10) дает равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{2n}'' \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) + \\ & + g \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{2n} \frac{\pi n}{a} \left(k_n \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) = 0. \end{aligned}$$

Объединение под одной суммой, перегруппировка, вынесение общих множителей (косинусов) и приравнивание коэффициентов при них нулю приводит к системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\bar{T}_{2n}'' \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) \right) + g \bar{T}_{2n} \frac{\pi n}{a} \left(k_n \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) \right) = 0.$$

Если разделить это уравнение на коэффициент у второй производной и ввести обозначение

$$\frac{k_n \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right)}{k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a}c\right)} g \frac{\pi n}{a} = \omega_{2n}^2, \quad (11)$$

квадрат частоты колебаний жидкости, то дифференциальное уравнение примет следующую форму:

$$\bar{T}_{2n}'' + \omega_{2n}^2 \cdot \bar{T}_{2n} = 0.$$

Общее решение этого уравнения выглядит так:

$$\bar{T}_{2n} = C_{2n} \cos(\omega_{2n} t) + D_{2n} \sin(\omega_{2n} t),$$

а выражение для потенциала второй области – так:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{2n} \cos(\omega_{2n} t) + D_{2n} \sin(\omega_{2n} t)) \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right). \quad (12)$$

Константы C_{2n} и D_{2n} определяются из начальных условий (7) и (8). Подстановку формулы (12) в выражение (8) приводит к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_{2n} \cos(\omega_{2n} \cdot 0) + D_{2n} \sin(\omega_{2n} \cdot 0)) \frac{\pi n}{a} \left(k_n \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) = 0,$$

откуда сразу же вытекает $C_{2n} = 0$, а выражение для потенциала становится таким:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \sin(\omega_{2n} t) \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right). \quad (13)$$

Форма свободной поверхности жидкости (зависимость $z(t, x)$) определяется из выражения (4):

$$z(t, x) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \Big|_{y=c}.$$

Подстановка в это выражение формулы (13), в правую часть – выражения для начальной формы свободной поверхности (7), а в левую – $t = 0$ приводит к выражению для определения D_{2n} :

$$\zeta(x) = -\frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \omega_{2n} \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Для определения коэффициента с произвольным номером n необходимо это выражение умножить на $\cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right)$ и проинтегрировать от 0 до a . В результате получается равенство

$$\int_0^a \zeta(x) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx = -\frac{a}{2g} D_{2n} \omega_{2n} \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) \right),$$

откуда

$$D_{2n} = -\frac{2g \int_0^a \zeta(x) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx}{a \omega_{2n} \left(k_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{a} c\right) \right)}.$$

Подстановка этого выражения в (13) позволяет получить значения потенциала во всей области 2, а также формулу, определяющую текущую форму свободной поверхности в любой момент времени:

$$\begin{aligned}
 z(t, x) &= -\frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \omega_{2n} \cos(\omega_{2n} t) \left(k_n \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{a} c \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} c \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right) = \\
 &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^a \zeta(x) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right) dx \right) \cos(\omega_{2n} t) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right). \quad (14)
 \end{aligned}$$

При выполнении данной работы начальная форма свободной поверхности жидкости задавалась в виде наклонной плоскости с уравнением $\zeta(x) = \frac{2d}{a}x - d$, где d – отклонение поверхности жидкости от равновесного положения на краях сосуда. Интегрирование и последующая подстановка в (14) привели к окончательному выражению для формы свободной поверхности в данной задаче:

$$z(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4d((-1)^n - 1)}{(\pi n)^2} \cos(\omega_{2n} t) \cos \left(\frac{\pi n}{a} x \right). \quad (15)$$

Результаты проверки метода

Рассмотрим пример расчета формы свободной поверхности идеальной жидкости, совершающей свободные колебания под действием силы тяжести в сосуде с горизонтальной пористой перегородкой. Исходными данными в задаче являются: ширина сосуда $a = 1$ м, расстояние от дна до перегородки $b = 0.5$ м, полная высота сосуда $c = 1$ м, начальное отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного положения на краях сосуда $d = 0.01$ м. Проницаемость q принимала различные значения. Расчеты проводились по формуле (13) с использованием программы Mathcad. Для контроля были выполнены расчеты формы свободной поверхности жидкости в двух предельных случаях: когда перегородки нет (проницаемость бесконечно велика) и когда перегородка сплошная (проницаемость нулевая). Форма свободной поверхности в этих случаях рассчитана по классическим формулам для колебаний идеальной жидкости в прямоугольном сосуде, приведенным, например, в [12]. Выражение для определения формы свободной поверхности из этой работы совпадает с выражением (14), частоты колебаний определяются по формуле

$$\omega_n^2 = g \frac{\pi n}{a} \operatorname{th} \left(\frac{\pi n}{a} h \right), \quad (16)$$

где h – глубина сосуда.

На рис. 2 представлена форма свободной поверхности жидкости в начальный момент времени (а) и через 2 с после начала колебаний (б). Сплошной линией показана свободная поверхность в сосуде с проницаемой перегородкой ($q = 5$), пунктирной – в сосуде с непроницаемой перегородкой (глубина сосуда 0.5 м), штриховой – в сосуде без перегородки (глубина сосуда 1 м). Хорошо видно, что колебания в более глубоком сосуде отстают от колебаний в мелком сосуде, а колебания в сосуде с проницаемой перегородкой происходят между ними, что является подтверждением правильности решения задачи.

Для контроля были проведены расчеты формы свободной поверхности по формуле (13) для очень маленького значения проницаемости ($q = 0,001$) и очень большого значения ($q = 1000$). В первом случае сплошная линия на рисунке сов-

пала с пунктирной, во втором – со штриховой. Данные совпадения также подтверждают правильность предложенной методики.

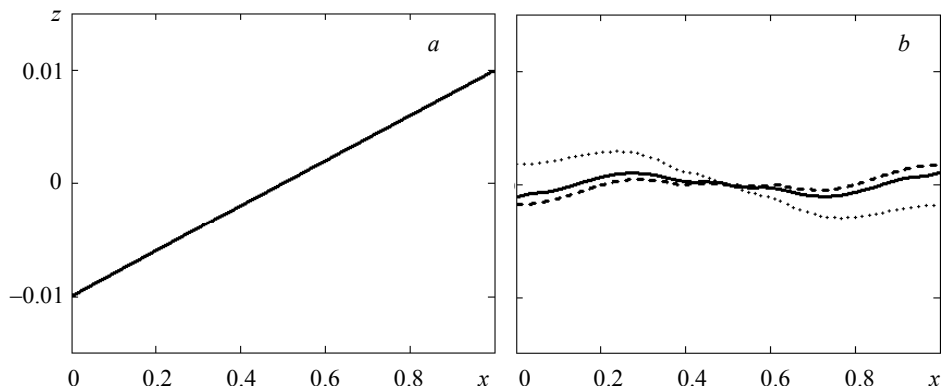


Рис. 2. Форма свободной поверхности жидкости

Fig. 2. Shape of the free surface of a fluid

Этот же факт подтверждается анализом предельных случаев для частот колебаний ω_{2n} .

Если рассмотреть предельный случай $q \rightarrow 0$, то формула (9) приведет к результату

$$k_n = -\operatorname{cth}\left(\frac{\pi n}{a}b\right).$$

После подстановки этого выражения в (11) и последующего преобразования получим формулу для частоты:

$$\omega_{2n}^2 = g \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}(c-b)\right).$$

Разность $c - b$ – глубина верхней части сосуда (см. рис. 1). Поэтому полученная формула совпадает с (16).

Если рассмотреть предельный случай $q \rightarrow \infty$, то формула (9) приведет к результату

$$k_n \rightarrow \infty.$$

При подстановке этого выражения в (11) и предельном переходе получаем

$$\omega_{2n}^2 = g \frac{\pi n}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}c\right).$$

Величина c – глубина всего сосуда (см. рис. 1). Поэтому полученная формула также совпадает с (16).

Оба предельных перехода подтвердили правильность полученных выражений.

Таким образом, проведенные испытания показали эффективность предложенной методики; полученные с ее помощью результаты могут быть использованы для решения практических задач и проверки более общих численных методов исследования колебаний идеальной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов Д.И., Руднев Ю.И. Собственные колебания идеальной жидкости в сосудах с перфорированными перегородками // Прикладная гидромеханика. 2010. Т. 12. № 2. С. 8–19.
2. Галицын Д.А., Троценко В.А. К расчету частот и присоединенных масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикладная гидромеханика. 2000. Т. 2 (74). № 1. С. 20–27.
3. Галицын Д. А., Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижном прямоугольном контейнере с упругими перегородками // Прикладная гидромеханика. 2000. Т. 2 (74). № 4. С. 11–23.
4. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикладная гидромеханика. 2008. Т. 10. № 1. С. 33–38.
5. Пожалостин А.А. Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 109–116.
6. Пожалостин А.А. Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Экспериментально-аналитический метод определения коэффициента сопротивления разделителя слоев жидкости в баке // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. С. 130–140. DOI: 10.7463/0415.0763626.
7. Alemi Ardakani H., Bridges T.J., & Turner M.R. Dynamic coupling between horizontal vessel motion and two-layer shallow-water sloshing // J. Fluids and Structures. 2015. V. 59. P. 432–460.
8. Nezami M., Oveisi A., & Mehdi Mohammadi M. Standing Gravity Waves in a Horizontal Circular Eccentric Annular Tank // J. Pressure Vessel Technology. August 2014. V. 136. P. 041301-1 – 041301-9. DOI: 10.1115/1.4026978
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.1. М.: ГИФМЛ, 1963. 584 с.
10. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974. 280 с.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 742 с.
12. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.

Статья поступила 10.11.2018 г.

Merzlyakov A.V., Kryukova E.A. (2019) FREE OSCILLATIONS OF AN IDEAL FLUID IN A RECTANGULAR VESSEL WITH A HORIZONTAL PERMEABLE MEMBRANE *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics] 60. pp. 107–118

DOI 10.17223/19988621/60/8

Keywords: ideal fluid, velocity potential, membrane, Laplace's equation, method of separation of variables.

The study aims to determine the shape of the free surface of an ideal fluid executing free oscillations in a rectangular vessel divided by a horizontal partially permeable membrane. The plane problem is solved analytically. The motion of the ideal fluid is simulated by solving Laplace's equation for the fluid velocity potential in the region occupied by fluid. Two regions are considered: the area between the bottom of the vessel and membrane and the area between membrane and free surface. On the solid boundary, the impermeability conditions are used; on the free surface, the Cauchy–Lagrange integral. On the membrane, the boundary condition is set as follows: the normal velocity of the fluid near membrane in both regions is proportional to the difference in the values of fluid velocity potential on either side of membrane. In the considered regions, the Laplace's equation is solved using the method of separation of variables. To

determine the dependence of the velocity potential on time, the boundary condition on the free surface is used, which is transformed for the case of small oscillations. This same condition yields the formula for determining the shape of the free surface of fluid at any time instant in terms of deviation of the free surface points from equilibrium position. The method described in this paper has been applied for the cases of different permeability of horizontal membrane. The obtained results have been compared with currently available solutions to similar problems.

MERZLYAKOV Aleksandr Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: amerz@mail.ru

KRYUKOVA Elizaveta Andreevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: amerz@sibmail.com

REFERENCES

1. Borisov D.I., Rudnev Yu.I. (2010) Sobstvennyye kolebaniya ideal'noy zhidkosti v sosudakh s perforirovannymi peregorodkami [Free oscillations of an ideal fluid in the vessels with perforated membrane]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydromechanics*. 12(2). pp. 8–19.
2. Galitsyn D.A., Trotsenko V.A. (2000) K raschetu chastot i prisoedinennykh mass zhidkosti v pryamougol'nom konteynere s peregorodkami v poperechnoy ploskosti ego simmetrii [To the calculation of the frequencies and added masses of a fluid in a rectangular vessel with membranes in the diametral plane of its symmetry]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydro-mechanics*. 2(1). pp. 20–27.
3. Galitsyn D.A., Trotsenko V.A. (2000) Kolebaniya zhidkosti v podvizhnom pryamougol'nom konteynere s uprugimi peregorodkami [Fluid oscillations in a movable rectangular vessel with elastic membranes]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydromechanics*. 2(4). pp. 11–23.
4. Kononov Yu.N., Tatarenko E.A. (2008) Svobodnye kolebaniya uprugikh membran i dvukhsloynnoy zhidkosti v pryamougol'nom kanale s uprugim dnom [Free vibrations of the elastic membranes and two-layer fluid in a rectangular channel with an elastic bottom]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydromechanics*. 10(1). pp. 33–38.
5. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A., Kokushkin V.V. (2014) Malye kolebaniya dvukhsloynnoy zhidkosti s uchedom pronitsaemosti razdelitelya [Small oscillations of two-layer liquid in view permeability of separator]. *Vestnik MGTU imeni N.E. Baumana. Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman MSTU. Natural Sciences*. 5. pp. 109–116.
6. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A., Kokushkin V.V. (2015) Eksperimental'no-analiticheskiy metod opredeleniya koeffitsienta soprotivleniya razdelitelya sloev zhidkosti v bake [Experimental and analytical method for determining a drag coefficient of the double-layer liquid separator]. *Nauka i obrazovanie. MGTU imeni N.E. Baumana – Science and Education of the Bauman MSTU*. 4. pp. 130–140. DOI: 10.7463/0415.0763626.
7. Alemi Ardakani H., Bridges T.J., Turner M.R. (2015) Dynamic coupling between horizontal vessel motion and two-layer shallow-water sloshing. *Journal of Fluids and Structures*. 59. pp. 432–460. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.10.002.
8. Nezami M., Oveisi A., Mehdi Mohammadi M. (2014). Standing gravity waves in a horizontal circular eccentric annular tank. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 136(4). pp. 041301-1 – 041301-9. DOI: 10.1115/1.4026978.
9. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. (1963) *Teoreticheskaya gidromekhanika. Chast' 1* [Theoretical fluid mechanics. Part1]. Moscow: GIFML.
10. Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. (1974) *Kraevye zadachi v oblastiakh s melkozernistoy granitse*. [Boundary problems in the areas with a fine-grained boundary]. Kiev: Naukova dumka.
11. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. (1977) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
12. Sretenskii L.N. (1977) *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions in a fluid]. Moscow: Nauka.

Received: November 10, 2018