

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2019

№ 61

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Робаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, В.В. Конев, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесён в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Danchev P.V. Commutative feebly invo-clean group rings	5
Приходовский М.А. Критерий бинарной разложимости алгебраической операции	11
Rekkab S., Aichaoui H., Benhadid S. Regional gradient compensation with minimum energy	19

МЕХАНИКА

Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гульяев В.И., Алексеева Е.Г. Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования	32
Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами	45
Козин В.М., Васильев А.С., Земляк В.Л., Ипатов К.И. Исследование предельного состояния ледяного покрова в условиях чистого изгиба при усилении армирующими элементами	61
Кузнецова В.Н. Физическое моделирование процесса контактного взаимодействия рабочего органа землеройной машины с мерзлым грунтом	70
Павлов М.С., Светашков А.А., Куприянов Н.А. Модифицированная формулировка итерационного алгоритма решения задач линейной вязкоупругости на основе разделения временных и пространственных переменных	82
Худаяров Б.А., Комилова Х.М. Численное моделирование колебаний вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду в режиме пробкового течения	95
Щербakov И.В., Люкшин Б.А. Моделирование поведения отклика ортотропной пластины при воздействии динамической нагрузки	111
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	119

CONTENTS

MATHEMATICS

Danchev P.V. Commutative feebly invo-clean group rings	5
Prikhodovsky M.A. Criterion for binary decomposability of an algebraic operation	11
Rekkab S., Aichaoui H., Benhadid S. Regional gradient compensation with minimum energy	19

MECHANICS

Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gyltiaev V.I., Alekseeva E.G. The processes of complex loading structural steel for a five-link piecewise broken strain path	32
Ivanychev D.A. The method of boundary states in the solution of the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces	45
Kozin V.M., Vasilyev A.S., Zemlyak V.L., Ipatov K.I. Research of the limiting state of ice cover under conditions of pure bending with reinforcement by reinforcing elements	61
Kuznetsova V.N. Physical modeling of the contact process interactions of the working body of the digging machine with frozen soil.	70
Pavlov M.S., Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A. Modified formulation of the iterative algorithm for solving linear viscoelasticity problems based on separation of time and space variables.....	82
Khudayarov B.K., Komilova K.M. Numerical modeling of vibrations of viscoelastic pipelines conveying two-phase slug flow.....	95
Scherbakov I.V., Lukshin B.A. Simulation of the orthotropic plate response behavior during dynamic load	111
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	119

МАТЕМАТИКА

УДК 512.55
DOI 10.17223/19988621/61/1

MSC 20C07; 16D60; 16S34; 16U60

P.V. Danchev

COMMUTATIVE FEEBLY INVO-CLEAN GROUP RINGS

A commutative ring R is called *feebly invo-clean* if any its element is of the form $v + e - f$, where v is an involution and e, f are idempotents. For every commutative unital ring R and every abelian group G we find a necessary and sufficient condition only in terms of R , G and their sections when the group ring $R[G]$ is feebly invo-clean. Our result improves two recent own achievements about commutative invo-clean and weakly invo-clean group rings, published in Univ. J. Math. & Math. Sci. (2018) and Ural Math. J. (2019), respectively.

Keywords: *invo-clean rings, weakly invo-clean rings, feebly invo-clean rings, group rings.*

1. Introduction and Conventions

Throughout the current paper, we will assume that all groups G are multiplicative abelian and all rings R with Jacobson radical $J(R)$ are associative, containing the identity element 1 which differs from the zero element 0. The standard terminology and notation are mainly in agreement with [9 and 10], whereas the specific notion and notation shall be explained explicitly below. As usual, both objects R and G form the group ring $R[G]$ of G over R .

The next concepts appeared in [1, 2, and 3], respectively.

Definition 1.1. A ring R is said to be *invo-clean* if, for each $r \in R$, there exist an involution v and an idempotent e such that $r = v + e$. If $r = v + e$ or $r = v - e$, the ring is called *weakly invo-clean*.

The next necessary and sufficient condition for a commutative ring R to be invo-clean was established in [1, 2], namely: *A ring R is invo-clean if, and only if, $R \cong R_1 \times R_2$, where R_1 is a nil-clean ring with $z^2 = 2z$ for all $z \in J(R_1)$, and R_2 is a ring of characteristic 3 whose elements satisfy the equation $x^3 = x$. Moreover, it was proved in [6] that a ring R is weakly invo-clean $\Leftrightarrow$ either R is invo-clean or R can be decomposed as $R = K \times \mathbb{Z}_5$, where $K = \{0\}$ or K is invo-clean.*

The above two notions could be expanded as follows:

Definition 1.2. A ring R is said to be *feebly invo-clean* if, for each $r \in R$, there exist an involution v and idempotents e, f such that $r = v + e - f$.

We will give up in the sequel an useful criterion for a commutative ring to be feebly invo-clean in order to be successfully applied to commutative group rings (compare with Proposition 2.2).

It was asked in [6] to find a suitable criterion only in terms of the commutative unitary ring R and the abelian group G when the group ring $R[G]$ is feebly invo-clean. So, the goal of this short article is to address that question in the affirmative. Some related results in this area can also be found in [4 and 7].

2. The Characterization Result

We begin here with the following key formula from [8] which will be freely used below without concrete citation: Suppose that R is a commutative ring and G is an abelian group. Then

$$J(R[G]) = J(R)[G] + \langle r(g-1) | g \in G_p, pr \in J(R) \rangle,$$

where G_p designates the p -primary component of G .

The next two technicalities are crucial for our further considerations.

Lemma 2.1. *Let K be a commutative ring of characteristic 5. Then K is feebly invo-clean $\Leftrightarrow x^5 = x$ holds for any $x \in K$.*

Proof. The "left-to-right" implication is almost trivial as writing $x = v + e - f$ with $v^2 = 1$, $e^2 = e$ and $f^2 = f$, we have that $x^5 = (v + e - f)^5 = v^5 + e^5 - f^5 = v + e - f = x$, as asserted.

As for the "right-to-left" implication, we proceed like this: Given an arbitrary non-identity element x in K . Then the subring, S , generated by 1 and x will have the same property, namely its characteristic is again 5 and $y^5 = y$ for all $y \in S$. So, with no harm of generality, we may replace K by this subring S , and thus it needs to prove the wanted representation property in S only. To that purpose, we claim that S is isomorphic to a quotient of the factor-ring $\mathbb{Z}_5[X]/(X^5 - X) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ of the polynomial ring $\mathbb{Z}_5[X]$ over $\mathbb{Z}_5$. In fact, we just consider the map $\mathbb{Z}_5[X] \rightarrow S$, defined by mapping $X \rightarrow x$, which is elementary checked to be a surjective homomorphism with kernel which contains the ideal generated by $X^5 - X$, and henceforth the classical Homomorphism Theorem works to get the desired claim. Working now in the direct product of five copies of the five-element field $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4 | 5 = 0\}$, a plain technical argument gives our wanted initial assertion that S and hence K are both feebly invo-clean. This is subsumed by the presentations $0 = 1 + 0 - 1$, $1 = 1 + 0 - 0$, $2 = 1 + 1 - 0$, $3 = 4 + 0 - 1$ and $4 = 4 + 0 - 0$, where $4^2 = 1$, $1^2 = 1$ and $0^2 = 0$. $\square$

Proposition 2.2. *A commutative ring R is feebly invo-clean $\Leftrightarrow R = P \times K$ for two rings P, K , where $P = \{0\}$ or P is invo-clean, and $K = \{0\}$ or K possesses characteristic 5 such that $x^5 = x$, $\forall x \in K$.*

Proof. " $\Rightarrow$ ". It follows from the corresponding characterization method used in [3, Theorem 2.6].

" $\Leftarrow$ ". Firstly, it needs to show that K is feebly invo-clean. This, however, follows directly from Lemma 2.1. Furthermore, one suffices to observe again with [3, Theorem 2.6] at hand that the direct product of such a ring K with an invo-clean ring remains a feebly invo-clean ring, thus getting resultantly that R is feebly invo-clean, as expected. $\square$

We are now ready to proceed by proving the following preliminary statement (see [5] as well).

Proposition 2.3. Suppose R is a non-zero commutative ring and G is an abelian group. Then $R[G]$ is invo-clean if, and only if, R is invo-clean having the decomposition $R = R_1 \times R_2$ such that precisely one of the next three items holds:

(0) $G = \{1\}$

or

(1) $|G| > 2$, $G^2 = \{1\}$, $R_1 = \{0\}$ or R_1 is a ring of char $(R_1) = 2$, and $R_2 = \{0\}$, or R_2 is a ring of char $(R_2) = 3$

or

(2) $|G| = 2$, $2r_1^2 = 2r_1$ for all $r_1 \in R_1$ (in addition $4 = 0$ in R_1), and $R_2 = \{0\}$ or R_2 is a ring of char $(R_2) = 3$.

Proof. If G is the trivial i.e., the identity group, there is nothing to do, so we shall assume hereafter that G is non-identity.

"Necessity." Since there is an epimorphism $R[G] \rightarrow R$, and an epimorphic image of an invo-clean ring is obviously an invo-clean ring (see, e.g., [1]), it follows at once that R is again an invo-clean ring. According to the criterion for invo-cleanness alluded to above, one writes that $R = R_1 \times R_2$, where R_1 is a nil-clean ring with $a^2 = 2a$ for all $a \in J(R_1)$ and R_2 is a ring whose elements satisfy the equation $x^3 = x$. Therefore, it must be that $R[G] \cong R_1[G] \times R_2[G]$, where it is not too hard to verify by [1] that both $R_1[G]$ and $R_2[G]$ are invo-clean rings.

First, we shall deal with the second direct factor $R_2[G]$ being invo-clean. Since $\text{char}(R_2) = 3$, it follows immediately that $\text{char}(R_2[G]) = 3$ too. Thus an application of an assemble of facts from [1, 2] allows us to deduce that all elements in $R_2[G]$ also satisfy the equation $y^3 = y$. So, given $g \in G \subseteq R[G]$, it follows that $g^3 = g$, that is, $g^2 = 1$.

Next, we shall treat the invo-cleanness of the group ring $R_1[G]$. Since $\text{char}(R_1)$ is a power of 2 (see [1]), it follows the same for $R_1[G]$. Consequently, utilizing once again an assortment of results from [1, 2], we infer that $R_1[G]$ should be nil-clean, so that $z^2 = 2z$ for all $z \in J(R_1[G])$. That is why, invoking the criterion from [7], we have that G is a 2-group. We claim that even $G^2 = 1$. In fact, for an arbitrary $g \in G$, we derive with the aid of the aforementioned formula from [8] that $1 - g \in J(R_1[G])$, because $2 \in J(R_1)$. Hence $(1 - g)^2 = 2(1 - g)$ which forces that $1 - 2g + g^2 = 2 - 2g$ and that $g^2 = 1$, as desired. We now assert that $\text{char}(R_1) = 2$ whenever $|G| > 2$. To that purpose, there are two nonidentity elements $g \neq h$ in G with $g^2 = h^2 = 1$. Furthermore, again appealing to the formula from [8], the element $1 - g + 1 - h = 2 - g - h$ lies in $J(R_1[G])$, because $2 \in J(R_1)$. Thus $(2 - g - h)^2 = 2(2 - g - h)$ which yields that $2 - 2g - 2h + 2gh = 0$. Since $gh \neq 1$ as for otherwise $g = h^{-1} = h$, a contradiction, this record is in canonical form. This assures that $2 = 0$, as wanted.

However, in the case when $|G| = 2$, i.e. when $G = \{1, g | g^2 = 1\} = \langle g \rangle$, we can conclude that $2r^2 = 2r$ for any $r \in R_1$. Indeed, in view of the already cited formula from [8], the element $r(1-g)$ will always lie in $J(R_1[G])$, because $2 \in J(R_1)$. We therefore may write $[r(1-g)]^2 = 2r(1-g)$ which ensures that $2r^2 - 2r^2g = 2r - 2rg$ is canonically written on both sides. But this means that $2r^2 = 2r$, as pursued. Substituting $r = 2$, one obtains that $4 = 0$. Notice also that $2r^2 = 2r$ for all $r \in R_1$ and $a^2 = 2a$ for all $a \in J(R_1)$ will imply that $a^2 = 0$.

"Sufficiency." Foremost, assume that (1) is true. Since R_1 has characteristic 2, whence it is nil-clean, and G is a 2-group, an appeal to [7] allows us to get that $R_1[G]$ is nil-clean as well. Since $z^2 = 2z = 0$ for every $z \in J(R_1)$, it is routinely checked that $\delta^2 = 2\delta = 0$ for each $\delta \in J(R_1[G])$, exploiting the formula from [8] for $J(R_1[G])$ and the fact that $R_1[G]$ is a modular group algebra of characteristic 2. That is why, by a consultation with [1], one concludes that $R_1[G]$ is invo-clean, as expected. Further, by a new usage of [1], we derive that $R_2[G]$ is an invo-clean ring of characteristic 3. To see that, given $x \in R_2[G]$, we write $x = \sum_{g \in G} r_g g$ with $r_g \in R_2$ satisfying $r_g^3 = r_g$. Since $G^2 = 1$ will easily imply that $g^3 = g$, one obtains that $x^3 = (\sum_{g \in G} r_g g)^3 = \sum_{g \in G} r_g^3 g^3 = \sum_{g \in G} r_g g = x$, as needed. We finally conclude with the help of [1] that $R[G] \cong R_1[G] \times R_2[G]$ is invo-clean, as expected.

Let us now point (2) be fulfilled. Since $G^2 = 1$, similarly to (1), R_2 being invo-clean of characteristic 3 implies that $R_2[G]$ is invo-clean, too. In order to prove that $R_1[G]$ is invo-clean, we observe that R_1 is nil-clean with $2 \in J(R_1)$. According to [7], the group ring $R_1[G]$ is also nil-clean. What remains to show is that for any element δ of $J(R_1[G])$ the equality $\delta^2 = 2\delta$ is valid. Since in conjunction with the explicit formula quoted above for the Jacobson radical, an arbitrary element in $J(R_1[G])$ has the form $j + j'g + r(1-g)$, where $j, j' \in J(R_1)$ and $r \in R_1$, we have that $[j + j'g + r(1-g)]^2 \in (J(R_1)^2 + 2J(R_1))[G] + r^2(1-g)^2$. However, using the given conditions, $z^2 = 2z = 2z^2$ and thus $z^2 = 2z = 0$ for any $z \in J(R_1)$. Consequently, one checks that $[j + j'g + r(1-g)]^2 = r^2(1-g)^2 = 2r^2(1-g) = 2r(1-g) = 2[j + j'g + r(1-g)]$, because $2r^2 = 2r$, as required. Therefore, $R_1[G]$ is invo-clean with [1] at hand. Finally, again [1] gives that $R[G] \cong R_1[G] \times R_2[G]$ is invo-clean, as promised. $\square$

It is worthwhile noticing that concrete examples of an invo-clean ring of characteristic 4, such that its elements are solutions of the equation $2r^2 = 2r$, are the rings $\mathbb{Z}_4$ and $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

We thereby come to our main theorem which states the following:

Theorem 2.4. *Let G be an abelian group and let R be a commutative non-zero ring. Then the group ring $R[G]$ is feebly invo-clean if, and only if, at most one of the next points is valid:*

(1) $G = \{1\}$ and R is feebly invo-clean.

(2) $G \neq \{1\}$ and $R \cong P \times K$, where $P \cong R_1 \times R_2$ is an invo-clean ring and either $K = \{0\}$ or K is a ring of $\text{char}(K) = 5$ which is a subdirect product of a family of copies of the field $\mathbb{Z}_5$ such that either

(2.1) $P = \{0\}$ and $G^4 = \{1\}$

or

(2.2) $|G| > 2$, $G^2 = \{1\}$, $P \neq \{0\}$ with $R_1 = \{0\}$ or R_1 is a ring of $\text{char}(R_1) = 2$ and $R_2 = \{0\}$ or R_2 is a ring of $\text{char}(R_2) = 3$

or

(2.3) $|G| = 2$, $P \neq \{0\}$ with $2r_1^2 = 2r_1$ for all $r_1 \in R_1$ (in addition $4 = 0$ in R_1) and $R_2 = \{0\}$ or R_2 is a ring of $\text{char}(R_2) = 3$.

Proof. If G is trivial, there is nothing to prove because of the validity of the isomorphism $R[G] \cong R$, so let us assume hereafter that G is non-trivial.

"Necessity." As the feebly invo-cleanness of the group ring $R[G]$ implies the same property for R , utilizing Proposition 2.2 we come to the fact that $R[G] \cong P[G] \times K[G]$ will imply feebly invo-cleanness of both group rings $P[G]$ and $K[G]$ whence $P[G]$ is necessarily invo-clean whereas $K[G]$ is either zero or a subdirect product of a family of copies of the field $\mathbb{Z}_5$. After that, under the presence of $P[G] \neq \{0\}$, we just need apply Proposition 2.3 to deduce the described above things in points (2), (2.2) and (2.3). Letting now $P[G] = \{0\}$, we shall deal only with $K[G]$. To that goal, what we now assert is that the group ring $K[G]$ having the property $x^5 = x$ for all $x \in K[G]$ with $\text{char}(K[G]) = 5$ yields that K has the property $y^5 = y$ for all $y \in K$ with $\text{char}(K) = 5$ and $G^4 = \{1\}$. Indeed, since $K \subseteq K[G]$ and $G \subseteq K[G]$, this can be extracted elementarily thus substantiating our initial statement after all.

"Sufficiency." Item (2) ensures that $R[G] \cong P[G] \times K[G]$ and so it is simple verified that the feebly invo-cleanness of both $P[G]$ and $K[G]$ will assure feebly invo-cleanness of $R[G]$ as well. That is why, we will be concentrated separately on these two group rings. Firstly, the stated above conditions are a guarantor with the aid of Proposition 2.3 that $P[G]$ is invo-clean. Secondly, it is pretty easily seen that as $y^5 = y$ and $g^5 = g$ for all $y \in K$ and $g \in G$, because K is a subdirect product of copies of the field $\mathbb{Z}_5$ possessing characteristic 5 and $G^4 = \{1\}$, we may conclude that $x^5 = x$ holds in $K[G]$ too, as required. This substantiates our former assertion after all. $\square$

REFERENCES

1. Danchev P.V. (2017) Invo-clean unital rings. *Commun. Korean Math. Soc.* 32(1). pp. 19–27.
2. Danchev P.V. (2017) Weakly invo-clean unital rings. *Afr. Mat.* 28(7-8). pp. 1285–1295.
3. Danchev P.V. (2017) Feebly invo-clean unital rings. *Ann. Univ. Sci. Budapest (Math.)* 60. pp. 85–91.
4. Danchev P.V. (2017) Weakly semi-boolean unital rings. *JP J. Algebra, Numb. Th. & Appl.* 39(3). pp. 261–276.
5. Danchev P.V. (2018) Commutative invo-clean group rings. *Univ. J. Math. & Math. Sci.* 11(1). pp. 1–6.
6. Danchev P.V. (2019) Commutative weakly invo-clean group rings. *Ural Math. J.* 5(1). pp. 48–52.
7. P.V. Danchev and W.Wm. McGovern (2015) Commutative weakly nil clean unital rings. *J. Algebra.* 425(5). pp. 410–422.
8. Karpilovsky G. (1982) The Jacobson radical of commutative group rings. *Arch. Math.* 39. pp. 428–430.
9. Milies C.P. and Sehgal S.K. (2002) *An Introduction to Group Rings. Vol. 1.* Springer Science and Business Media.
10. Passman D. (2011) *The Algebraic Structure of Group Rings.* Dover Publications.

Received: June 4, 2019

Peter V. DANCHEV (Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria). E-mail: pvdanchev@yahoo.com, danchev@math.bas.bg

Данчев П.В. КОММУТАТИВНЫЕ МАЛО ИНВО-ЧИСТЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2019. № 61. С. 5–10

DOI 10.17223/19988621/61/1

Ключевые слова: инво-чистые кольца, слабо инво-чистые кольца, мало инво-чистые кольца, групповые кольца.

Коммутативное кольцо R называется мало инво-чистым, если каждый его элемент имеет вид $v + e - f$, где v – инволюция, а e, f – идемпотенты. Для каждого коммутативного унитарного кольца R и каждой абелевой группы G найдены необходимые и достаточные условия, когда групповое кольцо $R[G]$ мало инво-чисто. Результаты статьи улучшают два последних достижения автора по коммутативным инво-чистым и слабо инво-чистым групповым кольцам, опубликованные в Универсальном журнале математики и математических наук (2018) и Уральском математическом журнале (2019) соответственно.

Danchev P.V. (2019) COMMUTATIVE FEEBLY INVO-CLEAN GROUP RINGS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 5–10

AMS Mathematical Subject Classification: 20C07; 16D60; 16S34; 16U60

УДК 512.57
DOI 10.17223/19988621/61/2

MSC 15A69

М.А. Приходовский

КРИТЕРИЙ БИНАРНОЙ РАЗЛОЖИМОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ

Исследуется свойство разложимости операции, не являющейся бинарной, в композицию бинарных операций. Получены необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять структурный тензор 3-арной алгебраической операции для того, чтобы эта операция являлась бинарно-разложимой.

Ключевые слова: бинарная операция, n -арная операция, тензор, бинарная разложимость.

Как правило, чаще всего в алгебре изучаются унарные и бинарные операции. Множество работ посвящено исследованиям групп гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ и колец эндоморфизмов $E(A)$, напр. [1–3]. Также известна группа умножений $\text{Mult}(A)$. При изучении гиперкомплексных числовых систем и конечномерных алгебр тоже идёт речь о бинарных операциях. Конечномерные алгебры тесно связаны с группой $\text{Mult}(A)$. Однако, кроме них, существуют и n -арные алгебраические операции, причём это вовсе не редко используемые абстракции, лишённые геометрического смысла, а напротив, довольно часто встречающиеся в геометрии. Так, к примеру, обобщённое векторное произведение в пространстве R^{n+1} , в результате которого может быть образован общий перпендикуляр к исходным n векторам, является n -арной операцией.

Представим некоторый обзор работ, связанных с n -арными операциями. Несмотря на то, что n -арные группы занимают в алгебре не столь значительное место, как группы с обычными бинарными операциями, тем не менее присутствует довольно большая серия работ по данной тематике. В основном исследования движутся по пути обобщения некоторых свойств, ранее известных для групп с бинарными операциями [4–13]. Эта тематика развивается ещё с первой половины XX века [4]. Также существует множество работ зарубежных авторов, например [6–8]. В XXI веке n -арные группы изучаются в Белоруссии (Гальмак А.М. и другие) [9–13].

Несмотря на обилие работ по обобщениям различных свойств на n -арный случай, непосредственно самим взаимосвязям между n -арной и бинарными операциями посвящено мало работ, и данная статья, следует надеяться, заполнит этот пробел. Бинарные алгебраические операции наиболее изучены. В связи с этим, естественно, возникает вопрос, какие из n -арных операций сводятся к композиции бинарных.

Автором исследовались некоторые свойства n -арных алгебраических операций [14]. Были найдены примеры бинарно-неразложимых операций и поставлен вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий бинарной разложимости. В данной статье получает развитие предложенный автором в [15] матрично-

тензорный подход, а также решаются некоторые из проблем, поставленных в [14]. Исторически сложившееся использование символьной таблицы умножения (вместо структурного тензора) при построении гиперкомплексных систем и конечномерных алгебр, до настоящего времени присутствующее в данной области, не позволило бы ставить и решать подобного рода задачи. Таким образом, можно с уверенностью предположить, что данное исследование обладает новизной.

Операция $f(a, b, c)$ называется бинарно-разложимой, если существуют две такие бинарные операции g, h , что $f(a, b, c) = h(g(a, b), c)$. Отдельный интерес представляет изучение необходимых и достаточных условий бинарной разложимости полилинейных операций в связи с тем, что всякое нелинейное отображение из $f: R^n \rightarrow R^n$ представимо в виде обобщённого ряда Тейлора, состоящего из полилинейных отображений. В данной работе ставится задача выполнить такую базовую задачу: найти необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять структурный тензор трилинейной операции так, что существует пара билинейных операций, композицией которых является исходная трилинейная операция.

Пусть трилинейная алгебраическая операция в R^n задана с помощью своего структурного тензора. Каждой тройке базисных векторов e_i, e_j, e_k поставлен в со-

ответствие вектор $\sum_{s=1}^n \gamma_{ijks} e_s$. Таким образом, имеется 4-мерная матрица C порядка n с элементами γ_{ijks} . Пусть существуют две билинейные операции g и h , заданные матрицами A и B соответственно. При этом матрица A состоит из элементов α_{ijk} таким образом, что

$$g(e_i, e_j) = \sum_{m=1}^n \alpha_{ijm} e_m,$$

а для матрицы B и её элементов β_{mks} соответственно выполняется

$$h(e_m, e_k) = \sum_{s=1}^n \beta_{mks} e_s.$$

Тогда из равенства $f(e_i, e_j, e_k) = h(g(e_i, e_j), e_k)$ следует

$$h\left(\sum_{m=1}^n \alpha_{ijm} e_m, e_k\right) = \sum_{m=1}^n \alpha_{ijm} h(e_m, e_k) = \sum_{m=1}^n \alpha_{ijm} \left(\sum_{s=1}^n \beta_{mks} e_s\right) = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \alpha_{ijm} \beta_{mks}\right) e_s.$$

Таким образом, $\sum_{s=1}^n \gamma_{ijks} e_s = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \alpha_{ijm} \beta_{mks}\right) e_s$ для всякого $s = 1, \dots, n$.

В итоге, имеется n^4 равенств: $\sum_{m=1}^n \alpha_{ijm} \beta_{mks} = \gamma_{ijks}$.

Нахождение чисел $\alpha_{ijm}, \beta_{mks}$ возможно в данном случае с помощью приближённого решения получившейся системы нелинейных уравнений, содержащей n^4 уравнений и $2n^3$ неизвестных. Однако итерационные методы не могут дать ответ о существовании или не существовании точного решения. Поэтому наибольший

интерес представляет не приближённое, а точное решение, а также способ находить однозначный ответ о существовании или не существовании бинарного разложения, зная структуру матрицы, состоящей из коэффициентов γ_{ijks} . Для нахождения такого критерия используем некоторые взаимосвязи между уравнениями в данной системе, возникающие вследствие специфики нелинейных уравнений этой системы.

Определение. Пусть C – четырёхмерная матрица, задающая трилинейную операцию в R^n . Её развёрткой назовём матрицу Ω порядка n^2 , построенную следующим образом: в каждой строке содержатся все элементы того или иного двумерного сечения матрицы C , т. е. все элементы, полученные при фиксировании двух последних индексов. В столбце при этом расположены элементы из двумерного сечения при двух других фиксированных индексах:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1111} & \dots & \gamma_{1n11} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \gamma_{n111} & \dots & \gamma_{nn11} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{111n} & & \gamma_{1n1n} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \gamma_{n11n} & & \gamma_{nn1n} \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} \gamma_{11n1} & \dots & \gamma_{1nn1} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \gamma_{n1n1} & \dots & \gamma_{nnn1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{11nn} & & \gamma_{1nnn} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \gamma_{n1nn} & & \gamma_{nnnn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Трилинейная операция, заданная матрицей C , состоящей из структурных констант γ_{ijks} , является разложимой в композицию двух билинейных тогда и только тогда, когда развёртка матрицы C является матрицей ранга не более n .

Доказательство.

1. *Необходимость.* Запишем какие-либо n^2 из n^4 имеющихся уравнений, заранее задавая некоторые i, j , изменяя при этом лишь k, m . Если существуют такие две трёхмерные матрицы A, B , что выполняются равенства $\sum_{m=1}^n \alpha_{ijm} \beta_{mks} = \gamma_{ijks}$, то для любых i, j от 1 до n верно

$$\begin{cases} \alpha_{ij1} \beta_{111} + \dots + \alpha_{ijn} \beta_{n11} = \gamma_{ij11}, \\ \dots \\ \alpha_{ij1} \beta_{11n} + \dots + \alpha_{ijn} \beta_{n1n} = \gamma_{ij1n}, \\ \dots \\ \alpha_{ij1} \beta_{1n1} + \dots + \alpha_{ijn} \beta_{nn1} = \gamma_{ijn1}, \\ \dots \\ \alpha_{ij1} \beta_{1nn} + \dots + \alpha_{ijn} \beta_{nnn} = \gamma_{ijnn}. \end{cases}$$

В каждой из таких систем участвуют все n^3 элементов β . Если при этом рассматривать элементы β в качестве коэффициентов, каждая такая система равенств может рассматриваться как система линейных уравнений на n неизвестных $\alpha_{ij1}, \dots, \alpha_{ijn}$, состоящая из n^2 уравнений. Ранг основной матрицы этой систе-

мы, очевидно, меньше или равен n , так как здесь всего n столбцов. Существуют базисные строки в количестве меньше или равном, чем n . Линейная зависимость между векторами-строками выражается с помощью некоторого набора коэффициентов K_{ms} . Для удобства записи расположим координаты этих n^2 векторов по столбцам:

$$\left(K_{11} \begin{pmatrix} \beta_{111} \\ \vdots \\ \beta_{n11} \end{pmatrix} + \dots + K_{1n} \begin{pmatrix} \beta_{11n} \\ \vdots \\ \beta_{n1n} \end{pmatrix} \right) + \dots + \left(K_{n1} \begin{pmatrix} \beta_{1n1} \\ \vdots \\ \beta_{nn1} \end{pmatrix} + \dots + K_{nn} \begin{pmatrix} \beta_{1nn} \\ \vdots \\ \beta_{nnn} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Но в этом случае ранг расширенной матрицы должен быть равен рангу основной матрицы, то есть эта линейная зависимость должна сохраняться и для строк расширенной матрицы. В таком случае для любых $i, j = 1, \dots, n$ верно

$$(K_{11}\gamma_{ij11} + \dots + K_{1n}\gamma_{ij1n}) + \dots + (K_{n1}\gamma_{ijn1} + \dots + K_{nn}\gamma_{ijnn}) = 0.$$

При этом данная зависимость распространяется на все столбцы матрицы Ω , ведь для элементов β всегда будут одни и те же коэффициенты K_{ms} , независимо от $i, j = 1, \dots, n$. Таким образом, имеет место линейная зависимость строк матрицы Ω , определяемая коэффициентами K_{ms} . Ранг системы строк матрицы Ω в таком случае равен рангу основной матрицы, определяемой коэффициентами β , а значит, он меньше или равен n . Необходимость доказана.

2. *Достаточность.* Пусть ранг матрицы Ω меньше или равен n и пусть для определённости базисный минор расположен в первых n столбцах. Укажем способ построения матриц A и B . Система нелинейных уравнений может иметь бесконечно много решений, поэтому, если мы зафиксируем часть неизвестных и укажем точный способ вычисления остальных, этого будет достаточно для существования хотя бы одного решения. Зададим одно сечение 3-мерной матрицы A в количестве n^2 элементов таким способом:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{111} & \cdots & \alpha_{11n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n1} & \cdots & \alpha_{1nn} \end{pmatrix} = E.$$

Тогда для первой системы имеем

$$\begin{cases} \alpha_{111}\beta_{111} + \dots + \alpha_{11n}\beta_{n11} = \gamma_{1111}, \\ \dots \\ \alpha_{111}\beta_{11n} + \dots + \alpha_{11n}\beta_{n1n} = \gamma_{111n}, \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_{111} + 0\dots + 0 = \gamma_{1111}, \\ \dots \\ \beta_{11n} + 0\dots + 0 = \gamma_{111n}, \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{111}\beta_{1n1} + \dots + \alpha_{11n}\beta_{nn1} = \gamma_{11n1}, \\ \dots \\ \alpha_{111}\beta_{1nn} + \dots + \alpha_{11n}\beta_{nnn} = \gamma_{11nn}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_{1n1} + 0\dots + 0 = \gamma_{11n1}, \\ \dots \\ \beta_{1nn} + 0\dots + 0 = \gamma_{11nn}. \end{cases}$$

Отсюда получаем значения первых n^2 из n^3 элементов матрицы B .

Изменяя индекс j от 1 до n , с помощью n подобных систем получим в итоге значения всех n^3 элементов матрицы B . Последняя из систем равенств, к примеру, имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_{1n1}\beta_{111} + \dots + \alpha_{1nn}\beta_{n11} = \gamma_{1n11}, \\ \dots \\ \alpha_{1n1}\beta_{11n} + \dots + \alpha_{1nn}\beta_{n1n} = \gamma_{1n1n}, \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + \dots + 0 + \beta_{n11} = \gamma_{1n11}, \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 + \beta_{n1n} = \gamma_{1n1n}, \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{1n1}\beta_{1n1} + \dots + \alpha_{1nn}\beta_{nn1} = \gamma_{1nn1}, \\ \dots \\ \alpha_{1n1}\beta_{1nn} + \dots + \alpha_{1nn}\beta_{nnn} = \gamma_{1nnn}, \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + \dots + 0 + \beta_{nn1} = \gamma_{1nn1}, \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 + \beta_{nn1} = \gamma_{1nnn}. \end{cases}$$

Далее, зная матрицу B , вычислим оставшиеся элементы матрицы A (одно её сечение мы заранее задали с помощью чисел 0 и 1).

Основная матрица каждой такой системы состоит из первых n столбцов матрицы Ω , а правая часть системы – какой-либо столбец этой же матрицы Ω , ранг которой меньше или равен n . Каждая такая система совместна, и можно найти значения $(\alpha_{ij1}, \dots, \alpha_{ijn})$ для заданных номеров i, j .

Пара чисел i, j определяет переменные $(\alpha_{ij1}, \dots, \alpha_{ijn})$ в системе уравнений, при этом правая часть – столбец матрицы Ω , такой, что первыми двумя индексами элемента γ являются i, j . Изначально мы присваивали значения элементам $(\alpha_{111}, \dots, \alpha_{11n}), \dots, (\alpha_{1n1}, \dots, \alpha_{1nn})$, то есть пары i, j были от $(1,1)$ до $(1,n)$, потому что полагали базисный минор находящимся в первых n столбцах матрицы Ω . Если же он расположен иначе, то первоначальное присвоение будет производиться для другой совокупности из n^2 элементов матрицы A , после чего нахождение остальных элементов производится аналогичным образом.

Итак, если ранг матрицы Ω , построенной для 3-арной операции, меньше или равен n , то существуют две бинарные операции, в композицию которых разложима исходная 3-арная операция. Достаточность доказана. $\square$

Таким образом, для получения ответа о бинарной разложимости той или иной трилинейной операции достаточно найти ранг матрицы Ω . Проблема определения наличия бинарного разложения может быть решена без использования приближённых методов решения систем нелинейных уравнений, данная проблема сводится к линейным системам.

Пример. Рассмотрим пример из [5], докажем бинарную неразложимость способом, полученным в данной работе. Рассматривалось обобщённое векторное полипроизведение в пространстве R^4 . Получающийся результат такой операции – вектор, ортогональный всем трём исходным и вычисляемый с помощью определителя следующим образом:

$$\omega(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ i & j & k & l \end{vmatrix}.$$

При этом для базисных элементов i, j, k, l выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \omega(i, j, k) &= \omega(j, k, i) = \omega(k, i, j) = l, \quad \omega(j, i, k) = \omega(i, k, j) = \omega(k, j, i) = -l, \\ \omega(k, j, l) &= \omega(l, k, j) = \omega(j, l, k) = i, \quad \omega(j, k, l) = \omega(k, l, j) = \omega(l, j, k) = -i, \\ \omega(k, l, i) &= \omega(l, i, k) = \omega(i, k, l) = j, \quad \omega(l, k, i) = \omega(i, l, k) = \omega(k, i, l) = -j, \\ \omega(i, l, j) &= \omega(l, j, i) = \omega(j, i, l) = k, \quad \omega(l, i, j) = \omega(i, j, l) = \omega(j, l, i) = -k. \end{aligned}$$

Таким образом, 24 из 64 произведений отличны от 0, остальные соответствуют наборам элементов, содержащим хотя бы пару совпадающих, и поэтому равны 0. Тогда развёртка тензора для этой операции является матрицей порядка 16, в общем виде она выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1111} & \gamma_{1211} & \gamma_{1311} & \gamma_{1411} \\ \gamma_{1112} & \gamma_{1212} & \gamma_{1312} & \gamma_{1412} \\ \gamma_{1113} & \gamma_{1213} & \gamma_{1313} & \gamma_{1413} \\ \gamma_{1114} & \gamma_{1214} & \gamma_{1314} & \gamma_{1414} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{2111} & \gamma_{2211} & \gamma_{2311} & \gamma_{2411} \\ \gamma_{2112} & \gamma_{2212} & \gamma_{2312} & \gamma_{2412} \\ \gamma_{2113} & \gamma_{2213} & \gamma_{2313} & \gamma_{2413} \\ \gamma_{2114} & \gamma_{2214} & \gamma_{2314} & \gamma_{2414} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{3111} & \gamma_{3211} & \gamma_{3311} & \gamma_{3411} \\ \gamma_{3112} & \gamma_{3212} & \gamma_{3312} & \gamma_{3412} \\ \gamma_{3113} & \gamma_{3213} & \gamma_{3313} & \gamma_{3413} \\ \gamma_{3114} & \gamma_{3214} & \gamma_{3314} & \gamma_{3414} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{4111} & \gamma_{4211} & \gamma_{4311} & \gamma_{4411} \\ \gamma_{4112} & \gamma_{4212} & \gamma_{4312} & \gamma_{4412} \\ \gamma_{4113} & \gamma_{4213} & \gamma_{4313} & \gamma_{4413} \\ \gamma_{4114} & \gamma_{4214} & \gamma_{4314} & \gamma_{4414} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{1121} & \gamma_{1221} & \gamma_{1321} & \gamma_{1421} \\ \gamma_{1122} & \gamma_{1222} & \gamma_{1322} & \gamma_{1422} \\ \gamma_{1123} & \gamma_{1223} & \gamma_{1323} & \gamma_{1423} \\ \gamma_{1124} & \gamma_{1224} & \gamma_{1324} & \gamma_{1424} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{2121} & \gamma_{2221} & \gamma_{2321} & \gamma_{2421} \\ \gamma_{2122} & \gamma_{2222} & \gamma_{2322} & \gamma_{2422} \\ \gamma_{2123} & \gamma_{2223} & \gamma_{2323} & \gamma_{2423} \\ \gamma_{2124} & \gamma_{2224} & \gamma_{2324} & \gamma_{2424} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{3121} & \gamma_{3221} & \gamma_{3321} & \gamma_{3421} \\ \gamma_{3122} & \gamma_{3222} & \gamma_{3322} & \gamma_{3422} \\ \gamma_{3123} & \gamma_{3223} & \gamma_{3323} & \gamma_{3423} \\ \gamma_{3124} & \gamma_{3224} & \gamma_{3324} & \gamma_{3424} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{4121} & \gamma_{4221} & \gamma_{4321} & \gamma_{4421} \\ \gamma_{4122} & \gamma_{4222} & \gamma_{4322} & \gamma_{4422} \\ \gamma_{4123} & \gamma_{4223} & \gamma_{4323} & \gamma_{4423} \\ \gamma_{4124} & \gamma_{4224} & \gamma_{4324} & \gamma_{4424} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{1131} & \gamma_{1231} & \gamma_{1331} & \gamma_{1431} \\ \gamma_{1132} & \gamma_{1232} & \gamma_{1332} & \gamma_{1432} \\ \gamma_{1133} & \gamma_{1233} & \gamma_{1333} & \gamma_{1433} \\ \gamma_{1134} & \gamma_{1234} & \gamma_{1334} & \gamma_{1434} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{2131} & \gamma_{2231} & \gamma_{2331} & \gamma_{2431} \\ \gamma_{2132} & \gamma_{2232} & \gamma_{2332} & \gamma_{2432} \\ \gamma_{2133} & \gamma_{2233} & \gamma_{2333} & \gamma_{2433} \\ \gamma_{2134} & \gamma_{2234} & \gamma_{2334} & \gamma_{2434} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{3131} & \gamma_{3231} & \gamma_{3331} & \gamma_{3431} \\ \gamma_{3132} & \gamma_{3232} & \gamma_{3332} & \gamma_{3432} \\ \gamma_{3133} & \gamma_{3233} & \gamma_{3333} & \gamma_{3433} \\ \gamma_{3134} & \gamma_{3234} & \gamma_{3334} & \gamma_{3434} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{4131} & \gamma_{4231} & \gamma_{4331} & \gamma_{4431} \\ \gamma_{4132} & \gamma_{4232} & \gamma_{4332} & \gamma_{4432} \\ \gamma_{4133} & \gamma_{4233} & \gamma_{4333} & \gamma_{4433} \\ \gamma_{4134} & \gamma_{4234} & \gamma_{4334} & \gamma_{4434} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{1141} & \gamma_{1241} & \gamma_{1341} & \gamma_{1441} \\ \gamma_{1142} & \gamma_{1242} & \gamma_{1342} & \gamma_{1442} \\ \gamma_{1143} & \gamma_{1243} & \gamma_{1343} & \gamma_{1443} \\ \gamma_{1144} & \gamma_{1244} & \gamma_{1344} & \gamma_{1444} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{2141} & \gamma_{2241} & \gamma_{2341} & \gamma_{2441} \\ \gamma_{2142} & \gamma_{2242} & \gamma_{2342} & \gamma_{2442} \\ \gamma_{2143} & \gamma_{2243} & \gamma_{2343} & \gamma_{2443} \\ \gamma_{2144} & \gamma_{2244} & \gamma_{2344} & \gamma_{2444} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{3141} & \gamma_{3241} & \gamma_{3341} & \gamma_{3441} \\ \gamma_{3142} & \gamma_{3242} & \gamma_{3342} & \gamma_{3442} \\ \gamma_{3143} & \gamma_{3243} & \gamma_{3343} & \gamma_{3443} \\ \gamma_{3144} & \gamma_{3244} & \gamma_{3344} & \gamma_{3444} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{4141} & \gamma_{4241} & \gamma_{4341} & \gamma_{4441} \\ \gamma_{4142} & \gamma_{4242} & \gamma_{4342} & \gamma_{4442} \\ \gamma_{4143} & \gamma_{4243} & \gamma_{4343} & \gamma_{4443} \\ \gamma_{4144} & \gamma_{4244} & \gamma_{4344} & \gamma_{4444} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Отличными от нуля являются лишь те элементы, где нет двух совпадающих индексов. Так, например, $\omega(i,j,k) = l$, или в других обозначениях $\omega(e_1, e_2, e_3) = e_4 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4$, вследствие чего $\gamma_{1231} = \gamma_{1232} = \gamma_{1233} = 0$, $\gamma_{1234} = 1$. Аналогично строятся структурные константы и для остальных произведений. В итоге для исследуемой операции эта матрица имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Перечислим, где расположены ненулевые элементы:

2-й и 5-й столбцы: 12, 15 строки,
4-й и 13-й столбцы: 7, 10 строки,
8-й и 14-й столбцы: 3, 9 строки,

3-й и 9-й столбцы: 8, 14 строки,
7-й и 10-й столбцы: 4, 13 строки,
12-й и 15-й столбцы: 2, 5 строки.

Базисный минор состоит из 6 столбцов, ранг данной матрицы равен 6, что больше 4, поэтому операция, ей соответствующая, не может быть представлена в виде композиции двух бинарных.

Данный способ установления бинарной разложимости 3-арной операции является легко программируемым на любом алгоритмическом языке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. Endomorphism rings of abelian groups. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2003.
2. Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7. № 2. С. 194–207.
3. Гриншпон С.Я. О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 1998. № 9. С. 42–46.
4. Чунихин С.А. К теории неассоциативных n -групп // ДАН СССР. 1945. Т. 48. № 1. С. 7–10.
5. Сохацкий Ф.Н. Об ассоциативности многоместных операций // Дискретная математика. 1992. № 4. С. 66–84.
6. Dudek W., Glazek K., Gleichgewicht B. A note on the axioms of n -groups // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1977. V. 29. P. 195–202.
7. Glazek K. Bibliographi of n -groups (poliadic groups) and same group like n -ary sistems // Proc. of the sympos. n -ary structures. Skopje, 1982. P. 259–289.
8. Uysan J. n -Groups in the light of the neutral operations // Matematika Moravica. 2006. Special Vol. 162 p.
9. Гальмак А.М. n -Арные группы // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. Т. 4. № 2(8). С. 76–95.
10. Гальмак А.М., Щучкин Н.А. n -Арные аналоги коммутанта группы // Чебышевский сборник. 2009. Т. 10. № 2 (30). С. 4–9.
11. Кусов В.М., Щучкин Н.А. Свободные абелевы полумиклические n -арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. № 2 (38). С. 68–76.
12. Щучкин Н.А. Свободные абелевы n -арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. № 2 (38). С. 163–170.
13. Кусов В.М., Щучкин Н.А. Эндоморфизмы абелевых полумиклических n -арных групп // Информатика и кибернетика. 2018. № 1 (11). С. 65–75.
14. Приходовский М.А. О некоторых классах n -арных алгебраических операций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 48–54.
15. Приходовский М.А. Применение многомерных матриц для исследования гиперкомплексных чисел и конечномерных алгебр // Вестник ТГУ. 2004. № 284. С. 27–30.

Статья поступила 30.03.2019 г.

Prikhodovsky M.A. (2019) CRITERION FOR BINARY DECOMPOSABILITY OF AN ALGEBRAIC OPERATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 11–18

DOI 10.17223/19988621/61/2

Keywords: binary operation, n -ary operation, tensor, binary decomposability.

In this article, the author considers n -ary algebraic operations and their properties. There is a problem to find out conditions under which a ternary operation can be decomposed into a composition of two binary ones. Not every third operation is decomposed into such a composition. An example of an indecomposable operation was built by the author earlier, in a previous article in 2009. Now the problem has been solved, a criterion that establishes the

relationship between decomposability of a ternary operation into two binary operations and the rank of the auxiliary matrix which can be constructed has been proved.

Initially, each ternary operation is associated with a 4-dimensional matrix consisting of its structural constants. However, the idea is to reduce the calculation to flat matrices, for which such concepts as rank and determinant are well applied.

The resulting criterion can be widely used to construct computer programs that can answer questions about whether an operation is decomposable into a composition of two binary operations.

AMS Mathematical Subject Classification: 15A69

Mikhail A. PRIHODOVSKY (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: prihod1@yandex.ru

REFERENCES

1. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. (2003) *Endomorphism rings of abelian groups*. Boston, Kluwer Acad. Publ.
2. Krylov P.A., Chekhlov A.R. (2001) Abelian torsion-free groups with a large number of endomorphisms. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* (Supplementary issues), suppl. 2. pp. 156–168
3. Grinshpon S.Ya. (1998) On the equality to zero of the homomorphism group of abelian groups. *Russian Mathematics* (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Ser. Mat.) 42(9). pp. 39–43
4. Chunikhin S.A. (1945) To the theory of non-associative n -groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 48(1). pp. 7–10.
5. Sokhatskii F.N. (1992) Ob assotsiativnosti mnogomestnykh operatsiy [On associativity of multiplace operations]. *Diskretnaya Matematika*. 4(1). pp. 66–84.
6. Dudek W., Głazek K., Gleichgewicht B. (1977) A note on the axioms of n -groups. *Colloq. Math Soc. J. Bolyai*. 29. pp. 195–202.
7. Głazek K. (1982) Bibliography of n -groups (polyadic groups) and the same group-like n -ary systems. *Proc. Symp. "n-Ary Structures", Skopje 1982*. pp. 259–289.
8. Uysan J. (2006) n -Groups in the light of the neutral operations. *Mathematika Moravica. Special Vol.* 162 p.
9. Galmak A.M. (2007) n -Arnye gruppy [n -Ary groups]. *Giperkompleksnye chisla v geometrii i fizike – Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*. 4. 2(8). pp. 76–95.
10. Galmak A.M., Shchuchkin N.A. (2009) n -Arnye analogi kommutanta gruppy [n -Ary analogues of the group commutant] *Chebyshevskiy sbornik*. 10. 2(30). pp. 4–9.
11. Kusov V.M., Schuchkin N.A. (2011) Svobodnyye abelevy polutsiklicheskiye n -arnyye gruppy [Free abelian n -ary groups defined by cyclic groups]. *Chebyshevskiy sbornik*. 12(2). pp. 68–76.
12. Schuchkin N.A. (2011) Svobodnyye abelevy n -arnyye gruppy [The free abelian n -ary groups]. *Chebyshevskiy sbornik*. 12(2). pp. 163–170.
13. Kusov V.M., Schuchkin N.A. (2018) Endomorfizmy abelevykh polutsiklicheskiykh n -arnykh grupp [Endomorphisms of abelian semicyclic n -ary groups]. *Informatics and Cybernetics*. 1(11). pp. 65–75.
14. Prikhodovskii M. A. (2009) O nekotorykh klassakh n -arnykh algebraicheskikh operatsiy [On some classes of n -ary algebraic operations]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(6). pp. 48–54.
15. Prikhodovskiy M.A. (2004) Primeneniye mnogomernykh matrits dlya issledovaniya giperkompleksnykh chisel i konechnomernykh algebr [Application of multidimensional matrixes for studying hypercomplex numbers and finite-dimension algebras] *Tomsk State University Journal*. 284. pp. 27–30.

Received: March 30, 2019

UDC 517.9
DOI 10.17223/19988621/61/3

MSC 35B20; 35R06; 35R15; 49J20

S. Rekkab, H. Aichaoui, S. Benhadid

REGIONAL GRADIENT COMPENSATION WITH MINIMUM ENERGY

In this paper we interest to the regional gradient remediability or compensation problem with minimum energy. That is, when a system is subjected to disturbances, then one of the objectives becomes to find the optimal control which compensates regionally the effect of the disturbances of the system, with respect to the regional gradient observation. Therefore, we show how to find the optimal control ensuring the effect compensation of any known or unknown disturbance distributed only on a subregion of the geometrical evolution domain, with respect to the observation of the gradient on any given subregion of the evolution domain and this in finite time. Under convenient hypothesis, the minimum energy problem is studied using an extension of the Hilbert Uniqueness Method (HUM). Approximations, numerical simulations, appropriate algorithm, and illustrative examples are also presented.

Keywords: *gradient; optimal control; regional remediability; disturbance; efficient actuators.*

1. Introduction

The control problem of distributed parameter systems arises in engineering applications and many different contexts, which are characterized by a spatiotemporal evolution. Systems analysis consists of a set of concepts as controllability, observability, remediability,...that allows a better understanding of those systems and consequently enables to conduct them in a better way. Moreover, the analysis itself has to deal not with the whole domain, but with its specific subdomain of interest. Thus, motivated by practical applications, El Jai and Zerrik have introduced and studied the so-called regional analysis [1–5]. Such analysis aims to analyze or control a system in which an objective function is defined only on a prescribed subregion. Therefore, the system dynamics is defined in the whole the domain Ω , whilst the objective is focused on a given subregion ω , where $\omega \subset \Omega$. An extension of this study that is very important in practical applications is that of regional analysis of the gradient developed in [6–10]. This study is of great interest from a more practical and control point of view since there exist systems that cannot be controllable but gradient controllable or that cannot be observable but gradient observable or that cannot be detectable but gradient detectable and they provide a means to deal with some problem from the real world. With the same preoccupation, the regional gradient remediability and regionally efficient gradient actuators are introduced and characterized recently for linear distributed systems in [11].

In this work, we show how to find practically the optimal control (convenient regionally gradient efficient actuators) ensuring the gradient compensation regionally, based on a result of characterization obtained in our previous work [11]. In addition, it constitutes also an extension of our previous work [12] to the regional case.

This paper is organized as follows. In the second section, we start by presenting the considered problem. After, we recall the definitions of exact and weak regional gradient

remediability, the notion of regional gradient efficient actuators, and a characterization which shows that the regional gradient remediability of any system may depend on the structure of the actuators and sensors.

In section 3, under a condition on the structure of the actuators and the weak regional gradient remediability hypothesis, using an extension of Hilbert Uniqueness Method (HUM), we examine the problem of gradient remediability with minimum energy regionally. Then, we give the optimal control which compensates an arbitrary disturbance.

In the last section, approximations, simulations, and numerical results are presented.

2. Considered problem, definitions, and characterization

Let Ω be an open and bounded subset of $\mathbb{R}^n$ ($n=1,2,3$) with a regular boundary $\partial\Omega$. Fix $T > 0$ and let denoted by $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$. Consider the system described by the parabolic equation

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = Ay(x, t) + Bu(t) + f(x, t) & - Q, \\ y(x, 0) = y^0(x) & - \Omega, \\ y(\xi, t) = 0 & - \Sigma, \end{cases} \quad (2.1)$$

where A is a second order linear differential operator which generates a strongly continuous semi-group $(S(t))_{t \geq 0}$ on the Hilbert space $L^2(\Omega)$. $(S^*(t))_{t \geq 0}$ is considered for the adjoint semi-group of $(S(t))_{t \geq 0}$. $B \in L(U, X)$, $u \in L^2(0, T; U)$ where U is a Hilbert space representing the control space and $X = H_0^1(\Omega)$ the state space. The disturbance term $f \in L^2(0, T; X)$ is generally unknown.

In system (2.1), the disturbance function f has a space support which can be, in practical applications, a part ω of the domain Ω ($\omega \subset \Omega$). The system (2.1) admits a unique solution $y \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ [13] given by

$$y_{u,f}(t) = S(t)y^0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

For $\omega \subset \Omega$ an open subregion of Ω with a positive Lebesgue measure, we consider the operators

$$\chi_\omega : (L^2(\Omega))^n \rightarrow (L^2(\omega))^n, \quad \text{and} \quad \tilde{\chi}_\omega : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\omega),$$

$$y \rightarrow y|_\omega, \quad y \rightarrow y|_\omega,$$

while their adjoints denoted by χ_ω^* and $\tilde{\chi}_\omega^*$ respectively, are defined by

$$\chi_\omega^* : (L^2(\omega))^n \rightarrow (L^2(\Omega))^n, \quad \text{and} \quad \tilde{\chi}_\omega^* : L^2(\omega) \rightarrow L^2(\Omega),$$

$$y \rightarrow \chi_\omega^* y = \begin{cases} y & \text{on } \omega, \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \omega, \end{cases} \quad y \rightarrow \tilde{\chi}_\omega^* y = \begin{cases} y & \text{on } \omega, \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

Consider also the operator ∇ defined by

$$\nabla: H_0^1(\Omega) \rightarrow \left(L^2(\Omega)\right)^n,$$

$$y \rightarrow \nabla y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right),$$

while ∇^* its adjoint operator.

The system (2.1) is augmented by the regional output equation

$$z_{u,f}^\omega(t) = C\chi_\omega \nabla y_{u,f}(t), \quad (2.2)$$

where $C \in L\left(\left(L^2(\omega)\right)^n, O\right)$, O is a Hilbert space (observation space). In the case of an gradient observation on $[0, T]$ with q sensors, we take generally $O = \mathbb{R}^q$. In the autonomous case, without disturbance ($f = 0$) and without control ($u = 0$), the gradient observation in ω is given by

$$z_{0,0}^\omega(t) = C\chi_\omega \nabla S(t)y^0,$$

it is then normal. However, if $f \neq 0$ and $u \neq 0$, the regional gradient observation is disturbed.

The problem consists to study the existence of an input operator B (actuators), with respect to the output operator C (sensors), ensuring the gradient compensation at finite time T , of any disturbance acting on the system, that is to say:

For any $f \in L^2(0, T; X)$, there exists $u \in L^2(0, T; U)$, such that

$$z_{u,f}^\omega(t) = C\chi_\omega \nabla S(T)y^0,$$

this is equivalent to

$$C\chi_\omega \nabla Hu + C\chi_\omega \nabla Ff = 0,$$

where H and F are two operators defined by

$$H: L^2(0, T; U) \rightarrow X, \quad F: L^2(0, T; X) \rightarrow X,$$

$$u \rightarrow Hu = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds, \quad \text{and} \quad f \rightarrow Ff = \int_0^T S(T-s)f(s)ds.$$

This leads to the following definitions.

Definition 1.

1) We say that the system (2.1) augmented by the output equation (2.2) is exactly regionally f -remediable in ω , if there exists a control $u \in L^2(0, T; U)$, such that

$$C\chi_\omega \nabla Hu + C\chi_\omega \nabla Ff = 0.$$

2) We say that the system (2.1) augmented by the output equation (2.2) is weakly regionally f -remediable in ω on $[0, T]$, if for every $\varepsilon > 0$, there exists a control $u \in L^2(0, T; U)$ such that

$$\|C\chi_\omega \nabla Hu + C\chi_\omega \nabla Ff\|_{\mathbb{R}^q} < 0.$$

3) We say that the system (2.1) augmented by the output equation (2.2) is regionally exactly (resp. weakly) remediable in ω , if for every $f \in L^2(0, T; X)$ the system (2.1) – (2.2) is exactly (resp. weakly) f -remediable in ω .

We suppose that the system (2.1) is excited by p zone actuators $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$, $g_i \in L^2(\Omega_i)$, $\Omega_i \subset \omega$, $\forall i = 1, \dots, p$, in this case the control space is $U = IR^p$ and the operator B is given by

$$B: IR^p \rightarrow X,$$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \mapsto Bu = \sum_{i=1}^p \chi_{\Omega_i}(x) g_i(x) u_i(t).$$

Its adjoint is given by

$$B^* z = \left(\langle g_1, z \rangle_{\Omega_1}, \langle g_2, z \rangle_{\Omega_2}, \dots, \langle g_p, z \rangle_{\Omega_p} \right)^T \in IR^p.$$

Also suppose that the output of the system (2.1) is given by q sensors $(D_i, h_i)_{1 \leq i \leq q}$, $h_i \in L^2(D_i)$, being the spatial distribution, $D_i = \text{supp } h_i \subset \omega$, for $i = 1, \dots, q$ and $D_i \cap D_j = \emptyset$ for $i \neq j$, then the operator C is defined by

$$C: (L^2(\omega))^n \rightarrow IR^q,$$

$$y(t) \mapsto Cy(t) = \left(\sum_{i=1}^n \langle h_1, y_i(t) \rangle_{D_1}, \sum_{i=1}^n \langle h_2, y_i(t) \rangle_{D_2}, \dots, \sum_{i=1}^n \langle h_q, y_i(t) \rangle_{D_q} \right)^T,$$

its adjoint is given by C^* with for $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)^T \in IR^q$,

$$C^* \theta = \left(\sum_{i=1}^q \chi_{D_i}(x) \theta_i h_i(x), \sum_{i=1}^q \chi_{D_i}(x) \theta_i h_i(x), \dots, \sum_{i=1}^q \chi_{D_i}(x) \theta_i h_i(x) \right) \in (L^2(\omega))^n.$$

We recall the following notion of the regionally gradient efficient actuator [11].

Definition 2. The actuators $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$, $g_i \in L^2(\Omega_i)$ are said to be regionally gradient efficient, if the system (2.1) – (2.2) so excited is weakly regional gradient remediable.

For $m \geq 1$, let M_m be the matrix of order $(p \times r_m)$ defined by

$$M_m = \left(\langle g_i, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega_i)} \right)_{i,j}, 1 \leq i \leq p \text{ and } 1 \leq j \leq r_m$$

and let G_m be the matrix of order $(q \times r_m)$ defined by

$$G_m = \left(\sum_{k=1}^n \left\langle h_i, \frac{\partial w_{mj}}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(D_i)} \right)_{i,j}, 1 \leq i \leq q \text{ and } 1 \leq j \leq r_m.$$

Corollary 1 [11]. If there exists $m_0 \geq 1$, such that

$$\text{rank } G_{m_0}^T = q, \quad (2.3)$$

then the actuators $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$, $g_i \in L^2(\Omega_i)$ are regionally gradient efficient if and only if

$$\bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m G_m^T) = \{0\}.$$

3. Regional gradient remediability with minimum energy

Under a condition (2.3) and the weak regional gradient remediability hypothesis, we study in this section the problem of the exact regional gradient remediability with minimal energy.

For $f \in L^2(0, T; X)$, we study the existence and the unicity of an optimal control $u \in L^2(0, T; U)$ ensuring, at the time T , the exact regional gradient remediability of the disturbance f , such that

$$C\chi_\omega \nabla H u + C\chi_\omega \nabla F f = 0.$$

That is the set defined by

$$D = \{u \in L^2(0, T; IR^p) / C\chi_\omega \nabla H u + C\chi_\omega \nabla F f = 0\} \quad (3.1)$$

is non empty.

We consider the function

$$J(u) = \|C\chi_\omega \nabla H u + C\chi_\omega \nabla F f\|_{IR^q}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; IR^p)}^2.$$

The considered problem becomes

$$\min_{u \in D} J(u).$$

For its resolution, we will use an extension of the Hilbert Uniqueness Methods (HUM).

For $\theta \in IR^q$, let us note

$$\|\theta\|_* = \left(\int_0^T \|B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta\|_{IR^p}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The corresponding inner product is given by

$$\langle \theta, \sigma \rangle_* = \int_0^T \langle B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \sigma \rangle ds$$

and the operator $\Lambda : IR^q \rightarrow IR^q$ defined by

$$\Lambda \theta = C\chi_\omega \nabla H H^* \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta = C\chi_\omega \nabla \int_0^T S(T-s) B B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta ds.$$

Then, we have the following proposition:

Proposition 1. If the condition (2.3) is satisfied, then $\|\cdot\|_*$ is a norm on IR^q if and only if system (2.1) – (2.2) is weakly regional gradient remediable on $[0, T]$ and the operator Λ is invertible.

Proof. We have

$$\|\theta\|_* = \left(\int_0^T \|B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta\|_{L^p}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \|B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta\|_{L^2(0,T;L^p)} = 0$$

$$\Rightarrow B^* S^*(T-\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta = 0 \Rightarrow \theta \in \ker(B^* S^*(T-\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^*) = \ker(B^* F^* \nabla^* \chi_\omega^* C^*).$$

$$\text{But } \ker(B^* F^* \nabla^* \chi_\omega^* C^*) = \bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m f_m^\omega),$$

where, for $m \geq 1$,

$$f_m^\omega : \theta \in IR^q \rightarrow f_m^\omega(\theta) = (\langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{m1} \rangle, \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{m2} \rangle, \dots, \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mr_m} \rangle)^T \in IR^{r_m}.$$

Indeed, let $\theta \in IR^q$, we have

$$B^* F^* \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta = B^* S^*(T-\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta = \begin{pmatrix} \sum_{m \geq 1} e^{\lambda_m(T-\cdot)} \sum_{j=1}^{r_m} \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \langle g_1, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega_1)} \\ \sum_{m \geq 1} e^{\lambda_m(T-\cdot)} \sum_{j=1}^{r_m} \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \langle g_2, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega_2)} \\ \vdots \\ \sum_{m \geq 1} e^{\lambda_m(T-\cdot)} \sum_{j=1}^{r_m} \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \langle g_P, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega_p)} \end{pmatrix}$$

and we have $\forall m \geq 1$

$$M_m f_m^\omega(\theta) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{r_m} \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \langle g_1, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega_1)} \\ \sum_{j=1}^{r_m} \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \langle g_2, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega_2)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r_m} \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \langle g_P, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega_p)} \end{pmatrix}.$$

If we assume that $\theta \in \bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m f_m^\omega)$, then

$$\theta \in \ker(M_m f_m^\omega), \forall m \geq 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{r_m} \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \langle g_i, w_{mj} \rangle = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, \forall m \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{m \geq 1} e^{\lambda_m(T-\cdot)} \sum_{j=1}^{r_m} \langle \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, w_{mj} \rangle \langle g_i, w_{mj} \rangle = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, \forall m \geq 1$$

$$\Rightarrow B^* F^* \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta = 0 \Rightarrow \theta \in \ker(B^* F^* \nabla^* \chi_\omega^* C^*),$$

where

$$\bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m f_m^\omega) \subset \ker(B^* F^* \nabla^* \chi_\omega^* C^*),$$

that is

$$\bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m f_m^\omega) = \ker(B^* F^* \nabla^* \chi_\omega^* C^*)$$

and we have also $\bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m G_m^T) = \bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m f_m^\omega)$. Indeed, let $\theta \in \mathbb{R}^q$, then

$$\begin{aligned} \theta \in \bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m G_m^T) &\Leftrightarrow (M_m G_m^T) \theta = 0, \quad \forall m \geq 1, \\ &\Leftrightarrow \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{r_m} \langle g_i, w_{mj} \rangle \left\langle h_l, \sum_{k=1}^n \frac{\partial w_{mj}}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(D_l)} \theta_l = 0, \quad \forall m \geq 1, \forall i = 1, \dots, p, \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r_m} \langle g_i, w_{mj} \rangle \left\langle \nabla^* \chi_\omega^* C^*, w_{mj} \right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall m \geq 1, \forall i = 1, \dots, p, \\ &\Leftrightarrow (M_m f_m^\omega) \theta = 0, \quad \forall m \geq 1 \Leftrightarrow \theta \in \bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m f_m^\omega). \end{aligned}$$

Where $\ker(B^* F^* \nabla^* \chi_\omega^* C^*) = \bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m G_m^T)$, this gives $\theta \in \bigcap_{m \geq 1} \ker(M_m G_m^T)$ and since the Corollary 1, we obtain the result.

On the other hand, the operator Λ is symmetric, indeed,

$$\langle \Lambda \theta, \sigma \rangle_{\mathbb{R}^q} = \langle C \chi_\omega \nabla H H^* \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, \sigma \rangle_{\mathbb{R}^q} = \langle \theta, C \chi_\omega \nabla H H^* \nabla^* \chi_\omega^* C^* \sigma \rangle_{\mathbb{R}^q} = \langle \theta, \Lambda \sigma \rangle_{\mathbb{R}^q}$$

and positive definite, indeed,

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \theta, \theta \rangle_{\mathbb{R}^q} &= \langle C \chi_\omega \nabla H H^* \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, \theta \rangle_{\mathbb{R}^q} \\ &= \langle H^* \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, H^* \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta \rangle_{L^2(0, T; \mathbb{R}^p)} \\ &= \int_0^T \langle B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta, B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta \rangle_{\mathbb{R}^p} ds \\ &= \|\theta\|_*^2 > 0, \quad \text{for } \theta \neq 0 \end{aligned}$$

and then Λ is invertible. $\square$

We give hereafter the expression of the optimal control ensuring the regional gradient remediability of a disturbance f at the time T .

Proposition 2. For $f \in L^2(0, T; X)$, there exists a unique $\theta_f \in \mathbb{R}^q$ such that

$$\Lambda \theta_f = -C \chi_\omega \nabla F f$$

and the control

$$u_{\theta_f}(\cdot) = B^* S^*(\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f$$

verifies

$$C \chi_\omega \nabla H u_{\theta_f} + C \chi_\omega \nabla F f = 0.$$

Moreover, it is optimal and

$$\|u_{\theta_f}\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^p)} = \|\theta_f\|_*.$$

Proof. From Proposition 1, the operator Λ is invertible; then, for $f \in L^2(0, T; X)$, there exists a unique $\theta_f \in IR^q$, such that $\Lambda\theta_f = -C\chi_\omega \nabla Ff$ and, if we put $u_{\theta_f}(\cdot) = B^* S^*(\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f$, we obtain

$$\begin{aligned} \Lambda\theta_f &= C\chi_\omega \nabla \int_0^T S(T-s) BB^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f ds = C\chi_\omega \nabla H u_{\theta_f} \\ &\Rightarrow -C\chi_\omega \nabla Ff = C\chi_\omega \nabla H u_{\theta_f} \Rightarrow C\chi_\omega \nabla H u_{\theta_f} + C\chi_\omega \nabla Ff = 0. \end{aligned}$$

The set D defined by (4.1) is closed, convex, and not empty. For $u \in D$, we have $J(u) = \|u\|_{L^2(0, T; IR^p)}^2$. J is strictly convex on D , and then has a unique minimum at $u^* \in D$, characterized by

$$\langle u^*, v - u^* \rangle_{L^2(0, T; IR^p)} \geq 0; \quad \forall v \in D.$$

For $v \in D$, we have

$$\begin{aligned} \langle u_{\theta_f}, v - u_{\theta_f} \rangle_{L^2(0, T; IR^p)} &= \langle B^* S^*(\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f, v - B^* S^*(\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f \rangle_{L^2(0, T; IR^p)} \\ &= \langle \theta_f, C\chi_\omega \nabla H v - \Lambda\theta_f \rangle_{IR^q} = 0. \end{aligned}$$

Since u^* is unique, then $u^* = u_{\theta_f}$ and u_{θ_f} is optimal with

$$\|u_{\theta_f}\|_{L^2(0, T; IR^p)}^2 = \|B^* S^*(\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f\|_{L^2(0, T; IR^p)}^2 = \|\theta_f\|_*^2. \quad \square$$

4. Approximations and numerical simulations

This section concerns approximations and numerical simulations of the problem of gradient remediability.

First, we give an approximation of θ_f as a solution of a finite dimension linear system $Ax = b$ and then the optimal control u_{θ_f} , with a comparison between the corresponding observation noted $z_{u_{\theta_f}, f}^\omega$ and $z_{0,0}^\omega$ the observation corresponding to the autonomous case.

4.1. Approximations

Coefficients of the system: For $i, j \geq 1$, let $a_{ij} = \langle \Lambda e_i, e_j \rangle_{IR^q}$, where $(e_i)_{1 \leq i \leq q}$ is the canonical basis of IR^q , we have

$$\Lambda e_i = C\chi_\omega \nabla \int_0^T S(T-s) BB^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* e_i ds.$$

And for M, N sufficiently large, we have

$$a_{ij} \approx \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{r_m} \sum_{m'=1}^N \sum_{h=1}^{r_{m'}} \sum_{\tau=1}^p \left(\frac{e^{(\lambda_m + \lambda_{m'})T} - 1}{\lambda_m + \lambda_{m'}} \right) \langle g_\tau, w_{ml} \rangle_{L^2(\Omega_\tau)} \langle g_\tau, w_{m'h} \rangle_{L^2(\Omega_\tau)} \\ \times \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial w_{m'h}}{\partial x_k}, h_i \right\rangle_{L^2(D_i)} \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial w_{ml}}{\partial x_k}, h_j \right\rangle_{L^2(D_j)} \quad (4.1)$$

and $\Lambda \theta_f = -C \chi_\omega \nabla F f$, then $b_j = -\langle C \chi_\omega \nabla F f, e_j \rangle_{IR^q}$.

For N sufficiently large, we have

$$b_j \approx - \sum_{m=1}^N \sum_{h=1}^{r_m} \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial w_{m'h}}{\partial x_k}, h_j \right\rangle_{L^2(D_j)} \int_0^T e^{\lambda_{m'}(T-s)} \langle f(s), w_{m'h} \rangle_{L^2(\omega)} ds. \quad (4.2)$$

The optimal control: In this part, we give an approximation of the optimal control u_{θ_f} which is defined by $u_{\theta_f}(\cdot) = B^* S^*(T-\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f$. Its function coordinates $u_{j,\theta_f}(\cdot)$ are given by

$$u_{j,\theta_f}(\cdot) = \langle g_j, S^*(T-\cdot) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f \rangle \\ \approx \sum_{m=1}^N \sum_{h=1}^{r_m} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^q \theta_{i,f} e^{\lambda_{m'}(T-\cdot)} \langle g_j, w_{m'h} \rangle_{L^2(\Omega_j)} \left\langle \frac{\partial w_{m'h}}{\partial x_k}, h_i \right\rangle_{L^2(D_i)} \quad (4.3)$$

for a large integer N .

Cost: The minimum energy (cost) is defined by

$$\|u_{\theta_f}\|_{L^2(0,T;IR^p)} = \left(\int_0^T \|B^* S^*(T-s) \nabla^* \chi_\omega^* C^* \theta_f\|_{IR^p}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ \approx \left(\sum_{j=1}^p \int_0^T \left(\sum_{m=1}^N \sum_{h=1}^{r_m} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^q e^{\lambda_{m'}(T-s)} \theta_{i,f} \left\langle h_i, \frac{\partial w_{m'h}}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(D_i)} \langle g_j, w_{m'h} \rangle_{L^2(\Omega_j)} \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

for N sufficiently large.

The corresponding observation: The observation corresponding to the control is given by

$$z_{u_{\theta_f},f}^\omega(t) = C \chi_\omega \nabla S(t) y^0 + C \chi_\omega \nabla \int_0^t S(t-s) B u_{\theta_f}(s) ds + C \chi_\omega \nabla \int_0^t S(t-s) f(s) ds. \quad (4.4)$$

Its coordinates $(z_{j,u_{\theta_f},f}^\omega(\cdot))_{1 \leq j \leq q}$ are obtained for a large integer N as follows:

$$z_{j,u_{\theta_f},f}^\omega(t) \approx \sum_{m=1}^N \sum_{h=1}^{r_m} \sum_{k=1}^n e^{\lambda_{m'}t} \langle y^0, w_{m'h} \rangle_{L^2(\omega)} \left\langle h_j, \frac{\partial w_{m'h}}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(D_j)} \\ + \sum_{m=1}^N \sum_{h=1}^{r_m} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \langle g_i, w_{m'h} \rangle_{L^2(\Omega_i)} \left\langle \frac{\partial w_{m'h}}{\partial x_k}, h_j \right\rangle_{L^2(D_j)} \int_0^t e^{\lambda_{m'}(t-s)} u_{i,\theta_f}(s) ds \\ + \sum_{m=1}^N \sum_{h=1}^{r_m} \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial w_{m'h}}{\partial x_k}, h_j \right\rangle_{L^2(D_j)} \int_0^t e^{\lambda_{m'}(t-s)} \langle f(s), w_{m'h} \rangle_{L^2(\omega)} ds. \quad (4.5)$$

4.2. Numerical simulations

We recall the problem considered above:

$$(P) \begin{cases} \text{Find } u \in L^2(0, T; U), \text{ such that} \\ C\chi_\omega \nabla H u + C\chi_\omega \nabla F f = 0. \end{cases}$$

Based on Proposition 2 and using the above results, we can develop an algorithm which allows us to determine a sequence of controls which converges to the solution u^* of (P). The output is given by (4.4) – (4.5).

Algorithm

Step 1: Data: the domain Ω , the subregion ω , the final time T , the initial state y^0 , the disturbance function f , the sensors (D, h) , the efficient gradient actuators (σ, g) , and the accuracy threshold ε .

Step 2: Choose a low truncation order $M = N$.

Step 3: Compute $z_{0,0}^\omega$: the output, when $f = 0$ and $u = 0$ (an autonomous case).

Step 4: Compute $z_{0,f}^\omega$: the output, when $f \neq 0$ and $u = 0$ (a disturbed case).

Step 5: Solve a finite dimension linear system $A\theta = b$, where these coefficients are given by (4.1) – (4.2).

Step 6: Calculate u given by (4.3).

Step 7: Compute $z_{u,f}^\omega$: the output when $f \neq 0$ and $u \neq 0$ (a disturbed and controlled case, that is to say a compensate case).

Step 8: If $\|z_{u,f}^\omega - z_{0,0}^\omega\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$, then stop. Otherwise,

Step 9: $M \leftarrow M + 1$ and $N \leftarrow N + 1$ and return to step 3.

Step 10: the optimal control u corresponds to the solution u^* of (P).

Now, we give a numerical example, which illustrates the efficiency of the approach given in the above section.

Illustrative example. We consider without loss of generality the following diffusion system

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \Delta y(x, t) + \sum_{i=1}^p \chi_{\Omega_i} g_i(x) u_i(t) + f(x, t) & \Omega \times]0, T[\\ y(x, 0) = y^0(x) & \Omega \\ y(\xi, t) = 0 & \partial\Omega \times]0, T[\end{cases}$$

with $\Omega =]0, 1[$ and a Dirichlet boundary condition. In this case, the functions $w_m(\cdot)$ are defined by

$$w_m(x) = \sqrt{2} \sin(m\pi x); m \geq 1.$$

The associated eigenvalues are simple and given by

$$\lambda_m = -m^2 \pi^2; \quad m \geq 1.$$

Let $\omega =]0.15, 0.25[$ ($\omega \subset \Omega$) be the geometrical support or the disturbance.

Then in the case of:

- an initial state: $y^0(\cdot) = 0$,

- a sensor: (D, h) with $D = \omega$ and $h(x) = \sqrt{2}x^2$ ($q = 1$),
- an efficient actuator: (σ, g) with $\sigma = \omega$ and $g(x) = 2x^3$ ($p = 1$),
- a disturbance function: defined by $f(x) = 240 \cos x$.

For $M = N = 10$ and $T = 0.5$, we obtain numerical results illustrating the theoretical results established in previous sections. Hence, in Fig. 1, we give the representations of the discrete observation $z_{u,f}$ corresponding to the control $u = u_{\theta_f}$ and the disturbance f and $z_{0,0}$, which represent the normal observation, that is $u = 0$ and $f = 0$.

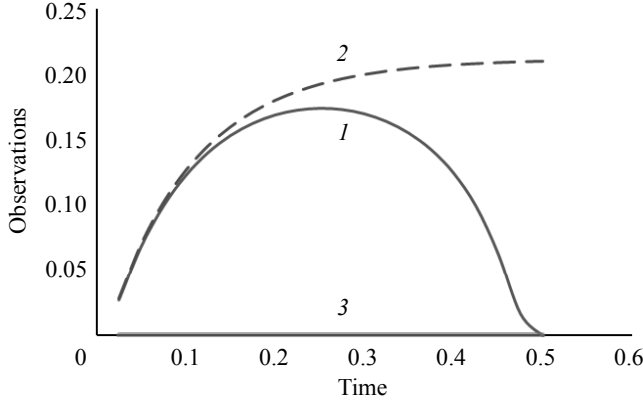


Fig. 1. Representation of $z_{u,f}$ (line 1), $z_{0,f}$ (line 2) and $z_{0,0}$ (line 3)

This figure shows that the disturbance f is compensated by the optimal control $u = u_{\theta_f}$ at the time T that is, we have $z_{u,f}^{\omega}(T) = z_{0,0}^{\omega}(T)$.

The optimal control u_{θ_f} ensuring the regional gradient remediability of the disturbance f is represented in Fig. 2.

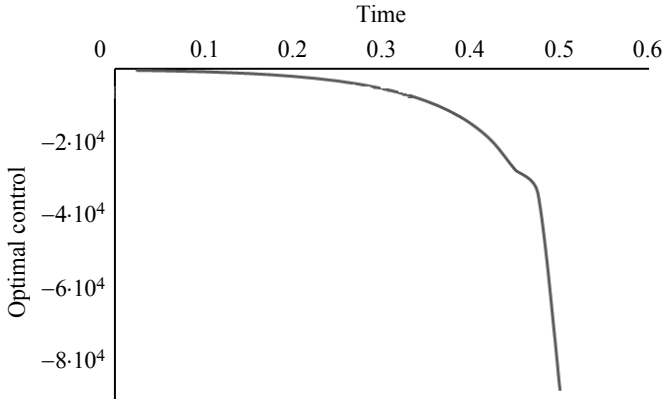


Fig. 2. Representation of the optimal control u_{θ_f}

Table 1 shows that if we want to eliminate the effect of the disturbance in a short time T , the cost increases.

Table 1

Evolution cost with respect to the finite time T

T	Cost
0.3	$1.06 \cdot 10^5$
0.4	$1.05 \cdot 10^5$
0.5	$1.03 \cdot 10^5$
1	$9.46 \cdot 10^4$
2	$8.99 \cdot 10^4$
3	$8.89 \cdot 10^4$
5	$8.85 \cdot 10^4$
10	$8.84 \cdot 10^4$
100	$8.84 \cdot 10^4$

Conclusions

Under a condition on the sensors and the weak regional gradient remediability hypothesis, we have studied the problem of exact regional gradient remediability with minimal energy. That is to say, when a system is subjected to disturbances, we have shown how to find the optimal control, which compensate the effect of the disturbance that can be located in a given subregion of the space domain, with respect to the regional gradient observation and this using an extension of the Hilbert Uniqueness Method. Illustrative examples, numerical approximations, and results are also presented. These results are developed for a class of discrete linear distributed parabolic systems, but the considered approach can be extended to regional or bounded gradient remediability of other class of systems with a convenient choice of space.

REFERENCES

1. Amouroux M., El Jai A., Zerrik E. (1994) Regional observability of distributed systems. *International Journal of Systems Science*. 25. pp. 301–313.

2. Boutoulout A., Bourray H., El Alaoui F.Z., Benhadid S. (2014) Regional observability for distributed semi-linear hyperbolic systems. *International Journal of Systems Science*. 87. pp. 898–910.

3. El Jai A., Simon M.C., Zerrik E. (1993) Regional observability and sensor structures. *Sensors and Actuators Journal*. 39. pp. 95–102.

4. El Jai A., Simon M.C., Zerrik E., Pritchard A.J. (1995) Regional controllability of distributed systems. *International Journal of Control*. 62. pp. 1351–1365.

5. Zerrik E., Bourray H., Benhadid S. (2007) Sensors and regional observability of the wave equation. *Sensors and Actuators Journal*. 138. pp. 313–328.

6. Al-Saphory R.A., Al-Jawari N., Al-Qaisi I. (2010) Regional gradient detectability for infinite dimensional systems. *Tikrit Journal of Pure Science*. 15. pp. 1813–1662.

7. Benhadid S., Rekkab S., Zerrik E. (2012) Sensors and regional gradient observability of hyperbolic systems. *International Control and Automation*. 3. pp. 78–89.

8. Benhadid S., Rekkab S., Zerrik E. (2013) Sensors and boundary gradient observability of hyperbolic systems. *International Journal of Management & Information Technology*. 4(3). pp. 295–316.

9. Zerrik E., Boutoulout A., Kamal A. (1999) Regional gradient controllability of parabolic systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 9. pp. 101–121.

10. Zerrik E., Bourray H. (2003) Regional gradient observability for parabolic systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 13. pp. 139–150.
11. Rekkab S. (2017) Regionally gradient efficient actuators and sensors. *International Journal of New Research and Technology*. 3. pp. 143–152.
12. Rekkab S., Benhadid S. (2017) Gradient remediability in linear distributed parabolic systems analysis, approximations and simulations. *Journal of Fundamental and Applied Sciences*. 9. pp. 1535–1558.
13. Lions J.L. (1971) *Optimal control systems governed by partial differential equations*. New York: Springer-Verlag.

Received: March 25, 2019

Soraya REKKAB (Doctor, Faculty of Exact Sciences, Mentouri University, Constantine, Algeria)
E-mail : rekkabsoraya@gmail.com

Houda AICHAOUI (Researcher, Faculty of Exact Sciences, Mentouri University, Constantine, Algeria.) E-mail : aichaoui_houda@hotmail.fr

Samir BENHADID (Doctor, Faculty of Exact Sciences, Mentouri University, Constantine, Algeria.) E-mail: ihebmaths@yahoo.fr

Реккаб С., Айчаой Х., Бенхадид С. ЛОКАЛЬНАЯ ГРАДИЕНТНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ПРИ МИНИМУМЕ ЭНЕРГИИ. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 61. С. 19–31

DOI 10.17223/19988621/61/3

Ключевые слова: градиент, оптимальное управление, локальная восстановимость, возмущение, эффективные актуаторы.

Рассматривается проблема локальной градиентной восстановимости или компенсации при минимальных затратах энергии. Иными словами, при возмущении системы одной из задач становится отыскание оптимального управления, которое локально компенсирует результат возмущения системы по отношению к локальному градиентному измерению. Таким образом, показано, как найти оптимальное управление, обеспечивающее компенсацию любого известного или неизвестного возмущения, распределённого лишь на части области геометрического роста, по отношению к измерению градиента на любой заданной подобласти области роста за конечное время. Проблема минимума энергии исследуется при удобных предположениях с помощью обобщенного метода единственности Гильберта. Представлены также приближения, численное моделирование, соответствующий алгоритм и иллюстративный примеры.

Rekkab S., Aichaoui H., Benhadid S. (2019) REGIONAL GRADIENT COMPENSATION WITH MINIMUM ENERGY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 19–31

DOI 10.17223/19988621/61/3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/4

В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гульяев, Е.Г. Алексеева**ПРОЦЕССЫ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ
КОНСТРУКЦИОННОЙ СТАЛИ ПО ПЯТИЗВЕННОЙ
КУСОЧНО-ЛОМОНОЙ ТРАЕКТОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

Для верификации математической модели теории процессов проведены численные расчёты сложного упругопластического деформирования стали 45 по пятизвенной кусочно-ломаной траектории. Выполнено сравнение полученных результатов расчета с данными физического эксперимента, проведенного на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ на тонкостенных трубчатых образцах из стали 45. Программа эксперимента реализована в девиаторном пространстве деформаций (жесткое нагружение) при совместном действии на образец осевой силы и крутящего момента. Показано, что используемая математическая модель качественно и количественно удовлетворительно описывает основные эффекты сложного пластического деформирования для рассматриваемого класса траекторий.

Ключевые слова: *пластичность, теория процессов, сложное нагружение, многозвенная ломаная траектория деформирования, моделирование процессов, экспериментальные данные.*

Проведение экспериментальных исследований по непропорциональному упругопластическому деформированию материалов при сложном напряженно-деформированном состоянии (НДС) является важной частью создания новых и верификации существующих математических моделей теории пластичности. Адекватность математической модели определяется её способностью описывать эффекты и закономерности поведения конструкционных материалов, наблюдаемые в физических экспериментах. Результаты большого количества экспериментальных исследований при сложном нагружении материалов и варианты математических теории пластичности частично представлены в работах [1–14].

Основные соотношения предлагаемой в работе математической модели, а также методика проведения экспериментальных исследований базируются на векторном представлении деформаций и напряжений А.А. Ильюшина в рамках теории упругопластических процессов [3, 4], где девиаторам напряжений и деформаций ставятся в соответствие векторы напряжений и деформаций формоизменения. При таком подходе история изменения напряжений и деформаций с течением времени представляется соответствующими траекториями в пятимерных векторных (девиаторных) пространствах. В качестве материалов в теории рассматриваются поликристаллические металлы и сплавы, которые перед нагружением (в начальном состоянии) с достаточной точностью подчиняются постулату изотропии

А.А. Ильюшина [3], что подтверждается многочисленными экспериментами [1, 2, 15–17]. В соответствии с постулатом изотропии связь между напряжениями и деформациями определяется скалярными и векторными свойствами материалов. Скалярные свойства характеризуют связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, а векторные свойства – несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений.

В настоящей работе представлены данные эксперимента при совместном растяжении и кручении (P – M -опыт) тонкостенного трубчатого образца при его деформировании по сложной плоской траектории, состоящей из пяти прямолинейных участков (звеньев) с различными углами излома. Данная траектория относится к классу многозвенных кусочно-ломаных траекторий и демонстрирует весьма нетривиальную связь между напряжениями и деформациями. Для верификации предлагаемой математической модели теоретические расчёты сравниваются с результатами эксперимента, проведенного авторами на автоматизированном испытательном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ. Ранее математическая модель была использована для описания процессов деформирования по двузвенной [18] и многозвенной (4 звена) ломаной траектории с одинаковыми углами излома в 135° [14].

1. Основные положения

Тензоры напряжений и деформаций, являющиеся симметричными тензорами второго ранга и характеризующие НДС точки тела, можно разделить на шаровые тензоры и девиаторы [1–4]

$$\mathbf{T}_\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad \mathbf{T}_\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \mathfrak{E}(\mathfrak{E}_{ij}^*), \quad (1)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $(i, j = 1, 2, 3)$;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad \mathfrak{E} = \sqrt{\mathfrak{E}_{ij}\mathfrak{E}_{ij}} \quad (2)$$

– модули шаровых тензоров и девиаторов. Компоненты девиаторов напряжений и деформаций имеют вид

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \mathfrak{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad (3)$$

а компоненты направляющих тензоров

$$S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad \mathfrak{E}_{ij}^* = \frac{\mathfrak{E}_{ij}}{\mathfrak{E}}. \quad (4)$$

При простом (пропорциональном) нагружении $(S_{ij}^*) = (\mathfrak{E}_{ij}^*)$, и определяющие соотношения с учетом упругости объемной деформации имеют вид [1–4]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\mathfrak{E}}\mathfrak{E}_{ij} = 2G_p\mathfrak{E}_{ij}, \quad \sigma = \Phi(\mathfrak{E}), \quad (5)$$

где K – модуль объемной упругости, G_p – пластический модуль сдвига, $\Phi(\mathfrak{E})$ – универсальная единая диаграмма деформирования материалов при простом нагружении. Она определяет только скалярные свойства материалов для произвольного НДС. При сложном нагружении направляющие тензоры $(S_{ij}^*) \neq (\mathfrak{E}_{ij}^*)$ и учет в

определяющих соотношения только скалярных свойств материалов недостаточен. Тензорное изложение теории пластичности не позволяет отобразить геометрически наглядно векторные свойства материалов в физическом пространстве, поэтому в работах А.А. Ильюшина [3, 4] тензоры $\mathbf{T}_\sigma$ и $\mathbf{T}_\varepsilon$ представляются в виде векторов в линейном совмещенном евклидовом пространстве E_6 с ортонормированным неподвижным базисом $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}$ в виде

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^0 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = S_k \hat{\mathbf{i}}_k, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \bar{\boldsymbol{\Theta}}, \quad \bar{\boldsymbol{\Theta}} = \Theta_k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (6)$$

Правомерность такого представления подробно рассмотрена в [6]. Здесь $\bar{\mathbf{S}}^0 = S_0 \hat{\mathbf{i}}_0$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \Theta_0 \hat{\mathbf{i}}_0$ – векторы напряжений и деформаций в одномерном подпространстве объемного растяжения и сжатия с гидростатической осью, характеризуемой единичным вектором $\hat{\mathbf{i}}_0$; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ – векторы напряжений и деформаций формоизменения в пятимерном девиаторном подпространстве E_5 . Координаты векторов связаны с компонентами тензоров и девиаторов взаимно-однозначными формулами [1–4]

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{3}\sigma_0, \quad S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, \quad S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}S_{12}, \quad S_4 = \sqrt{2}S_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \Theta_0 &= \sqrt{3}\varepsilon_0, \quad \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Theta_{11}, \quad \Theta_2 = \frac{\Theta_{22} - \Theta_{33}}{\sqrt{2}}, \quad \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, \quad \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, \quad \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{13}. \end{aligned} \quad (7)$$

Модули векторов в пятимерном подпространстве E_5 равны модулям девиаторов напряжений и деформаций соответственно

$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_k \Theta_k} = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}}. \quad (8)$$

Общие определяющие соотношения теории процессов получены в работах [1, 2]. Они отражают связь между векторами напряжений $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ и деформаций $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ формоизменения с учетом скалярных и векторных свойств материалов. Для случая плоских траекторий определяющие соотношения в скалярной форме имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{ds} = M_1 \frac{d\Theta_k}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \Theta_1 \right) \frac{S_k}{\sigma} & (k = 1, 3), \\ \frac{d\Theta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \Theta_1, \end{cases} \quad (9)$$

где M_1 , $\frac{d\sigma}{ds}$ – функционалы процесса деформирования, зависящие от параметров внутренней геометрии траектории деформации: s – длины дуги траектории деформирования, ее кривизны κ_1 и углов излома; Θ_1 – угол между векторами напряжения и скорости деформации, называемый углом сближения (запаздывания). Этот угол характеризует отклонение $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке и отражает влияние векторных свойств материала на процесс деформирования.

2. Математическая модель

В дополнение к определяющим соотношениям (9) в математической модели теории процессов предлагается использовать аппроксимации функционалов [1, 2]

$$\sigma(s) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s) - \Delta\sigma_k; \quad (10)$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q, \quad (11)$$

где $\Phi(s)$ – универсальная функция нагружения Одквиста – Ильюшина для процессов, близких к простым, без учета их истории; $\Delta s = s - s_k^T$ – приращение длины дуги траектории после ее излома в некоторой точке K ; $\Delta\sigma_k = \Phi(s_k^T) - \sigma_k^T$ – разница в точках излома между значениями универсальной функции Одквиста – Ильюшина и реальным значением модуля вектора напряжений σ_k^T ; G – модуль сдвига (модуль упругости второго рода); $2G_p = \Phi(s) / s$ – удвоенный пластический модуль при простом нагружении; индекс «нолик» у пластического модуля сдвига соответствует значению G_p в точке излома траектории;

$$\Omega(\Delta s) = -\left[\gamma\Delta s e^{-\gamma\Delta s} + b(1 - e^{-\gamma\Delta s})\right] \quad (12)$$

– функция, описывающая скалярный нырок напряжений, то есть явление уменьшения модуля вектора напряжений, возникающее после излома траектории при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании материала;

$$f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}; \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \quad (13)$$

– функция, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома при значении угла сближения ϑ_1^0 каждого из участков неаналитической траектории; A, b, γ, p, q – параметры аппроксимаций, определяемые по существующей методике [14].

Для аппроксимации универсальной функции упрочнения Одквиста – Ильюшина $\Phi(s)$ при простом нагружении использовались выражения [1]

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha} (1 - e^{-\alpha s}), & \text{при } 0 \leq s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_* (1 - e^{-\beta(s - s^T)}), & \text{при } s > s^T, \end{cases} \quad (14)$$

где $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$; σ_T – предел текучести при растяжении; s^T – граница участков диаграммы деформирования, разделяющая упругую часть диаграммы и площадку текучести ($0 \leq s \leq s^T$) от участка самоупрочнения материала ($s > s^T$); σ_* , G_* , α , β – материальные параметры, экспериментально определяемые из опытов на простое нагружение.

При заданных начальных условиях для координат $\mathcal{E}_k$ ($k = 1, 3$) вектора деформаций и начальных значениях угла ϑ_1^0 определяющие соотношения (9) с конкретизированными функционалами (10), (11), приводятся к задаче Коши, где заданными являются траектории вектора деформаций, а траектории вектора напряжений можно получить в результате интегрирования определяющих соотношений.

Для численного решения и определения координат S_k ($k = 1, 3$) вектора напряжений и угла сближения ϑ_1 использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности в программе компьютерной алгебры MathWorks MATLAB.

3. Материалы и методика эксперимента

Экспериментальное исследование было выполнено на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина, реализующем трехпараметрическое воздействие на образец (осевое растяжение-сжатие, кручение и внутреннее давление) в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. Процесс нагружения предполагался изотермическим, а деформации – малыми. В качестве образцов для серии экспериментальных исследований были использованы тонкостенные цилиндрические оболочки из стали 45 в состоянии поставки, имеющие в рабочей части: длину $l = 110$ мм, толщину $h = 1$ мм и радиус срединной поверхности $r = 15.5$ мм. Материал образцов считался однородным и начально изотропным. Начальная изотропия материала образцов с достаточной степенью точности была подтверждена в опытах на простое нагружение (растяжение, сжатие и кручение), где после обработке этих диаграмм были приняты следующие значения материальных параметров для стали 45 в аппроксимации (14): $\sigma^T = 285$ МПа, $s^T = 0.9 \cdot 10^{-2}$, $2G = 1.57 \cdot 10^5$ МПа, $\beta = 70$, $\alpha = 900$, $\sigma_* = 78.8$ МПа, $2G_* = 1618.9$ МПа.

Для определения компонент тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} в автоматизированном комплексе СН-ЭВМ используются формулы [1, 2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta r}{r}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{r\psi}{2l}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{33} &= -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{K}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}); \\ \sigma_{11} &= \frac{P}{2\pi rh}, \quad \sigma_{22} = q \frac{r}{h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi r^2 h}, \quad \sigma_{33} \approx 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где Δl и Δr – приращения l и r ; ψ – угол закручивания поперечного сечения; P – осевая сила; q – внутреннее давление; M – крутящий момент; E – модуль продольной упругости; μ – коэффициент Пуассона. При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости ($\varepsilon_0 = 0$), достаточно точное вне упругой области, так как значение μ с появлением пластических деформаций быстро стремилось к 0.5.

Компоненты векторов деформаций и напряжений формоизменения определялись через компоненты тензоров по формулам (7). Для определения угла сближения ϑ_1 использовалось выражение [1]

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma \Delta s} [S_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1^0) + S_3(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_3^0)], \quad (17)$$

где $\mathcal{E}_1^0$, $\mathcal{E}_3^0$ – значения $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_3$ в начале каждого участка траектории.

Программа эксперимента (рис. 1) реализована в девиаторном пространстве деформаций $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ (жесткое нагружение, в котором координаты вектора деформаций изменялись по заданным зависимостям), и представляет плоскую кусочно-ломаную траекторию, состоящую из пяти прямолинейных участков (звеньев).

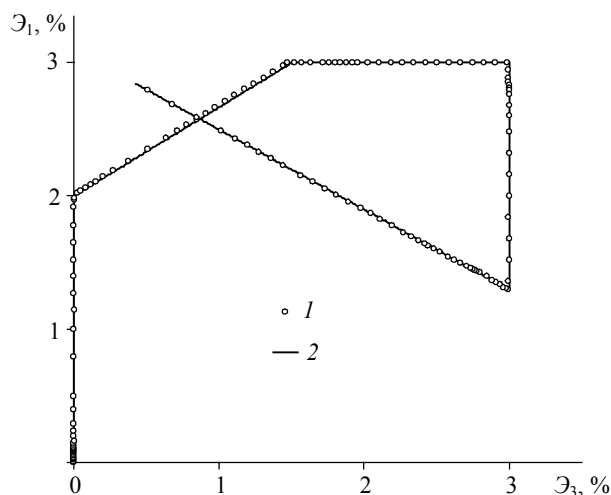


Рис. 1. Траектория деформирования на плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$:

1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные

Fig. 1. Strain path on the plane $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$; 1, experimental data and 2, calculated results

На первом участке реализовывалось пропорциональное растяжение по компоненте $\mathcal{E}_1$ до значения $\mathcal{E}_1^* = 2\%$; на втором участке при изломе траектории на угол 56.3° реализовывалось комбинированное растяжение и кручение до значений $\mathcal{E}_1^* = 3\%$, $\mathcal{E}_3^* = 1.5\%$; на третьем участке с изломом на угол 33.7° при $\mathcal{E}_1^* = 3\% = \text{const}$ осуществлялось кручение до значения $\mathcal{E}_3^* = 3\%$; на четвертом участке при ортогональном изломе траектории и $\mathcal{E}_3^* = 3\% = \text{const}$ осуществлялось сжатие до значения $\mathcal{E}_1^* = 1.3\%$; на последнем пятом участке с углом излома 121° реализовывалось комбинированное растяжение с кручением до значения компонент $\mathcal{E}_1^* \approx 2.84$ и $\mathcal{E}_3^* = 0.43\%$.

4. Результаты физического и численного экспериментов

На рис. 2 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в виде траектории нагружения в плоскости $S_1 - S_3$ совмещенного девиаторного подпространства E_5 . На рис. 3 и 4 приведены результаты расчета и экспериментальные данные для диаграмм $\sigma - s$ и $\sigma - \mathcal{E}$, характеризующих скалярные свойства материалов, на рис. 5 – диаграмма $\mathcal{E}_1 - s$, характеризующая векторные свойства материалов. На рис. 6 и 7 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия по компонентам $S_1 - \mathcal{E}_1$ и чистого сдвига по компонентам $S_3 - \mathcal{E}_3$. Экспериментальные данные на рис. 1–7 отмечены точками (кружочки); модельные расчетные данные – сплошными кривыми.

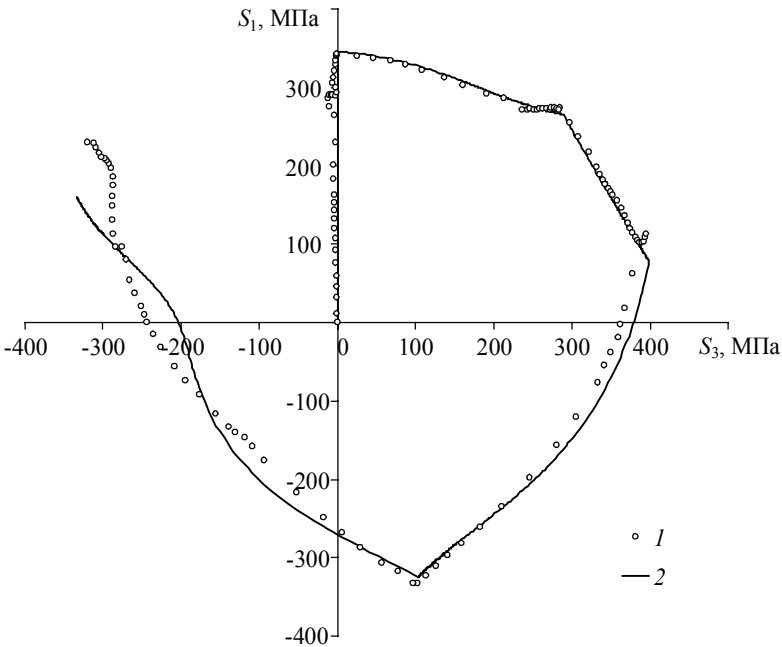


Рис. 2. Отклик по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$:
 1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные
Fig. 2. Stress response on the plane $S_1 - S_3$:
 1 , experimental data and 2 , calculated results

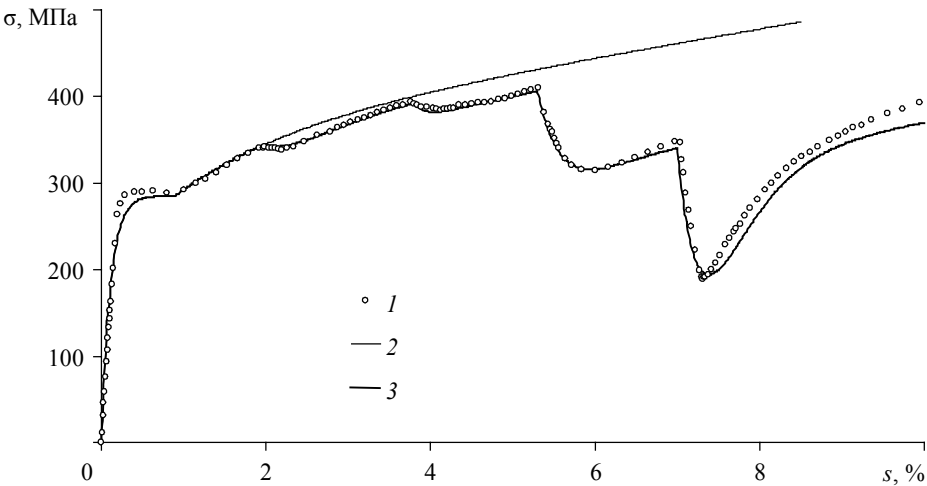


Рис. 3. Диаграмма деформирования $\sigma - s$:
 1 – экспериментальные данные; $2 - \sigma = \Phi(s)$; 3 – модельные данные
Fig. 3. Stress-strain curve $\sigma - s$:
 1 , experimental data, $2, \sigma = \Phi(s)$, and 3 , calculated results

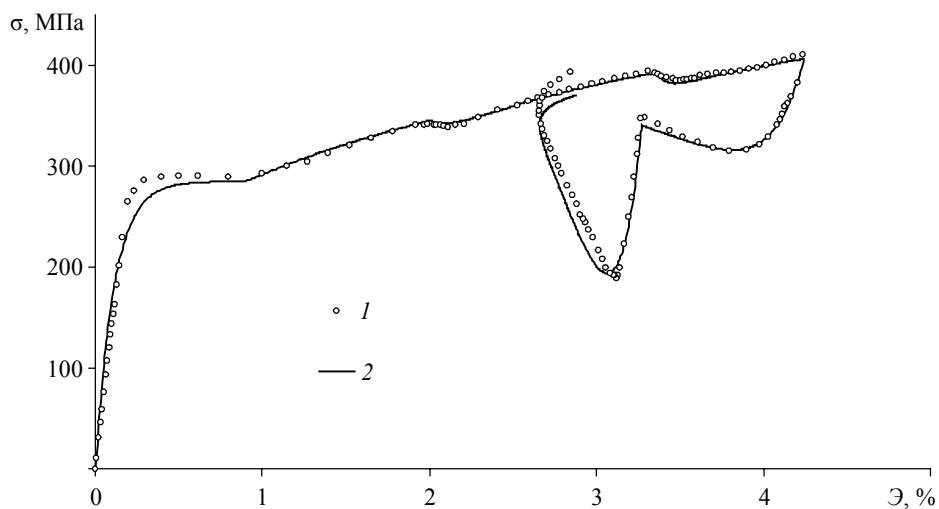


Рис. 4. Диаграмма деформирования $\sigma - \varepsilon$:
 1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные
Fig. 4. Stress-strain curve $\sigma - \varepsilon$:
 1, experimental data and 2, calculated results

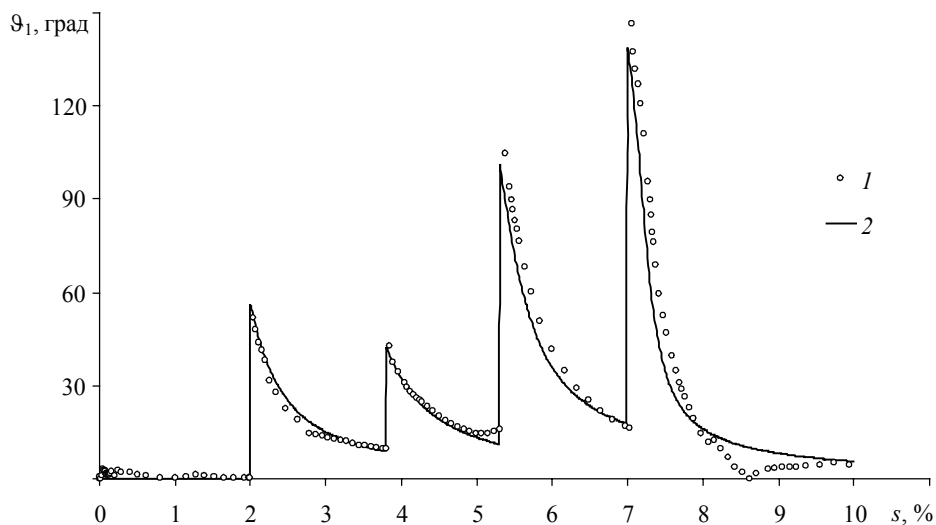


Рис. 5. Диаграмма характеристики векторных свойств материала $\theta_1 - s$:
 1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные
Fig. 5. Diagram for characteristics of the vector material properties $\theta_1 - s$:
 1, experimental data and 2, calculated results

В расчете использовались параметры аппроксимаций в формулах (10) – (12), значения которых были определены по методике, предложенной в [14]. Эти значения представлены в таблице.

№ участка	b	A , МПа	γ	p	q
2	0.28	504.63	250.6	2	0.5
3	1.45	139.53	468.15	1	0.5
4	1.05	305.11	255.88	1.8	0.7
5	0.05	580.84	261.35	1.5	0.5

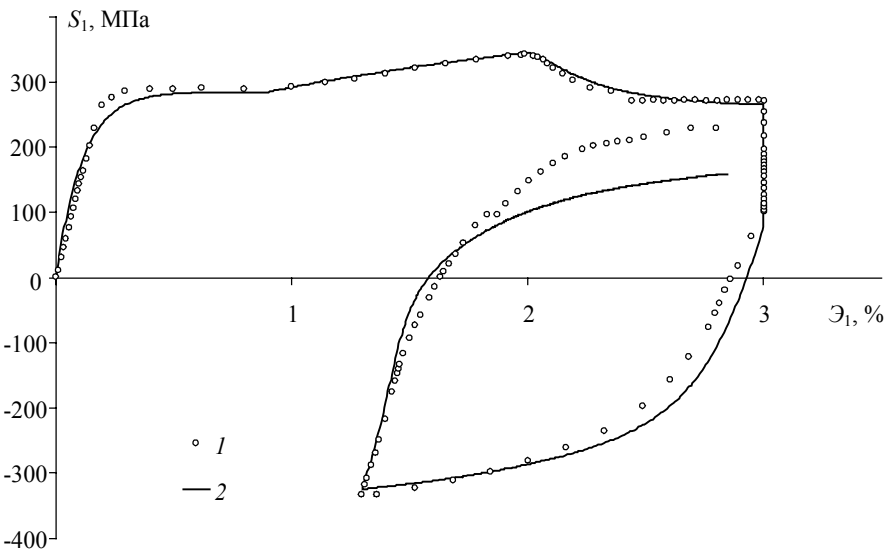


Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \epsilon_1$:
1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные
Fig. 6. Local stress-strain curve $S_1 - \epsilon_1$:
1, experimental data and 2, calculated results

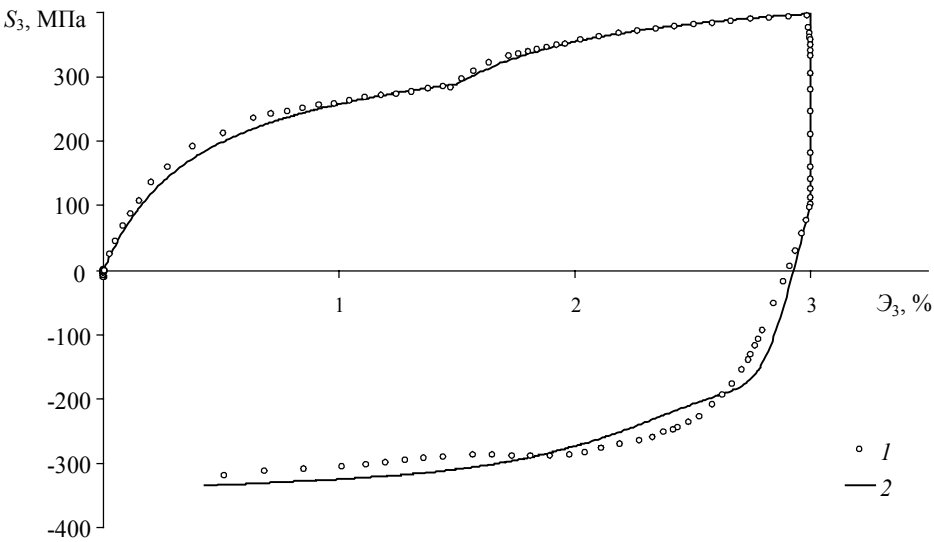


Рис. 7. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \epsilon_3$:
1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные
Fig. 7. Local stress-strain curve $S_3 - \epsilon_3$:
1, experimental data and 2, calculated results

В работе [14] отмечается, что начальное отклонение ϑ_1^0 вектора напряжений не всегда равно углу излома траектории θ . Например, для двузвенных ломаных, при реализации на первом звене простого (пропорционального) нагружения, перед точкой излома направление вектора напряжений совпадает с касательной к траектории деформирования с достаточной точностью, и в этом случае $\vartheta_1^0 = \theta$. В случае изломов, реализуемых после предварительного сложного нагружения при численном моделировании это обстоятельство учитывалось в виде начального условия для участка траектории $\vartheta_1^0 = \theta \pm \vartheta_1^k$, где ϑ_1^k – расчетное значение угла сближения в конце предшествующего участка перед изломом траектории. Знак плюс или минус определяется направлением излома по отношению к имеющемуся отклонению вектора напряжений. В реализованной траектории все изломы производились в сторону, противоположную отклонению вектора напряжений, то есть угол ϑ_1^0 увеличивается. В начале третьего участка (второй излом) принималось $\vartheta_1^0 = 33.7^\circ + 8.9^\circ = 42.6^\circ$; в начале четвертого участка (третий излом) принималось $\vartheta_1^0 = 90^\circ + 11.2^\circ = 101.2^\circ$; а в начале пятого участка (четвертый излом) – $\vartheta_1^0 = 121^\circ + 17.5^\circ = 138.5^\circ$.

Как видно, принятые для модели данные качественно, и с приемлемой точностью для практических расчетов количественно, соответствуют данным эксперимента по скалярным свойствам и смогли достаточно адекватно описать нырки напряжений (рис. 3 и 4), наблюдаемые после изломов траектории деформирования на различные по величине углы. Также наблюдается (рис. 5) хорошее соответствие расчетной и экспериментальных кривых векторных свойств материала, что говорит о правильности моделирования процесса сложного упругопластического деформирования материала.

Заключение

Проведенная верификация математической модели теории процессов путём сопоставления результата численного моделирования с данными физического эксперимента при упругопластическом деформировании материала сталь 45 по плоской пятизвенной кусочно-ломаной траектории подтверждает правильность моделирования процесса сложного нагружения материала для данного класса траекторий деформирования. Это показывает достаточную для практических задач точность построенных аппроксимаций функционалов процессов используемой математической модели теории процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
2. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2008. 336 с.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
5. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1967. 131 с.

6. Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроscopicкой определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 5 С. 29–46. DOI: 10.3103/S0027133018050011.
7. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 1: условия математической корректности и методы решения краевых задач // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 61–68. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
8. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
9. Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С., Шишулин Д.Н., Маркова М.Т. Моделирование сложного пластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80. № 2. С. 194–208. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-2-194-208.
10. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А. и др. Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
11. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Алексеева Е.Г. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Materials Physics and Mechanics (MPM). 2015. V. 24. No. 2. P. 107–118.
12. Зубчанинов В.Г. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 27–37. DOI: 10.3103/S0025654411010043.
13. Муравлев А.В. Экспериментальное построение функционалов пластичности для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических областях // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1996. № 5. С. 74–80.
14. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гуляев В.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. С. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12.
15. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gulyaev V.I. On drawing the yield surface for steel 45 and verifying the postulate of isotropy on straight-line paths under repeated sign-variable loadings. PNRPU Mechanics Bulletin. 2018. No. 1-2. P. 23–28. DOI: 10.15593/perm.mech/eng.2018.1.03.
16. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. Materials Physics and Mechanics. 2017. V. 32. No 3. P. 298–304. DOI: 10.18720/MPM.3232017_10.
17. Ленский В.С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58–82.
18. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гуляев В.И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двухзвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. ун-т, 2014. Вып. 76. Ч. 1. С. 18–25. DOI: 10.32326/1814-9146-2014-76-1-18-25.

Статья поступила 10.12.2018 г.

Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gul'tyaev V.I., Alekseeva E.G. (2019) THE PROCESSES OF A COMPLEX LOADING OF STRUCTURAL STEEL IN A FIVE-LINK PIECEWISE POLYGONAL STRAIN PATH *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 32–44

DOI 10.17223/19988621/61/4

Keywords: plasticity, theory of elastoplastic processes, complex loading, multi-link polygonal strain path, modeling of processes, experimental data.

The paper proposes a mathematical model of the theory of elastoplastic processes for the variety of strain paths such as multi-link straight-line polygonal paths. The constitutive equations of the proposed mathematical model, as well as the methodology of experimental studies, are based on the vector representation of the strain and stress proposed by Ilyushin. In the mathematical model, the approximations of the functional are used, which depend on all parameters of the inner geometry of the strain path. The governing equations of the mathematical model are reduced to the Cauchy problem. A numerical solution to the latter and the calculated results are obtained using the fourth-order Runge-Kutta method.

The experimental data on the complex loading (combined tension-compression and torsion) of a thin-walled tubular sample made of steel 45 according to a deformation program consisting of five straight sections with different break angles of the strain path are presented. The vector and scalar properties of the material are studied.

A mathematical model of the theory of elastoplastic processes is verified by comparing the calculated results with the data of a physical experiment. It is shown that the applied mathematical model gives a qualitatively and quantitatively satisfactory description of the main effects of a complex plastic straining for the variety of strain paths such as multi-link polygonal strain paths.

Vladimir G. ZUBCHANINOV (Doctor of Technical Sciences, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation). E-mail: vlgzub@gmail.com

Andrey A. ALEKSEEV (Candidate of Technical Sciences, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation). E-mail: alexeev@bk.ru

Vadim I. GUL'TYAEV (Doctor of Technical Sciences, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation). E-mail: vig0@mail.ru

Elena G. ALEKSEEVA (Candidate of Technical Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: super_aeg@mail.ru

REFERENCES

1. Zubchaninov V.G. (2010) *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred* [Mechanics of the processes in plastic media]. Moscow: Fizmatlit.
2. Zubchaninov V.G. (2010) *Ustoychivost' i plastichnost'. T. 2. Plastichnost'* [Stability and plasticity. Vol. 2. Plasticity]. Moscow: Fizmatlit.
3. Ilyushin A.A. (1963) *Plastichnost'. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii* [Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR.
4. Ilyushin A.A. (1990) *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow: Izdatel'stvo MGU.
5. Degtyarev V.P. (1967) *Plastichnost' i polzuchest' v mashinostroitel'nykh konstruktsiyakh* [Plasticity and creep of engineering structures]. Moscow: Mashinostroenie.
6. Zubchaninov V.G. (2018) The general mathematical theory of plasticity and the Il'yushin postulates of macroscopic definability and isotropy. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 73(5). pp. 101–116. DOI: 10.3103/S0027133018050011.
7. Peleshko V.A. (2015) Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 1: Conditions of mathematical well-posedness and

- methods for solving boundary value problems. *Mechanics of Solids*. 50(6). pp. 650–656. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
8. Peleshko V.A. (2016) Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification. *Mechanics of Solids*. 51(1). pp. 91–113. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
 9. Volkov I.A., Igumnov L.A., Tarasov I.S., Shishulin D.N., Markova M.T. (2018) Modelirovanie slozhnogo plasticheskogo deformirovaniya polikristallicheskikh konstruksionnykh splavov po ploskim i prostranstvennym traektoriyam proizvol'noy krivizny [Modeling complex plastic deformation of polycrystalline structural alloys along plane and spatial trajectories of arbitrary curvature]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 80(2). pp. 194–208. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-2-194-208.
 10. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Kaplienکو A.V., Korotkikh Yu.G., Panov V.A. (2015) *Prikladnaya teoriya plastichnosti* [Applied theory of plasticity]. Moscow: Fizmatlit.
 11. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G. (2015) Mathematical modeling of plastic deformation of materials on complex flat trajectories. *Materials Physics and Mechanics*. 24(2). pp. 107–118.
 12. Zubchaninov V.G. (2011) Isotropy postulate and the law of complex unloading of continua. *Mechanics of Solids*. 46(1). pp. 21–29. DOI: 10.3103/S0025654411010043.
 13. Muravlev A.V. (1996) Eksperimental'noe postroenie funktsionalov plastichnosti dlya traektoriy deformatsiy tipa dvukhzhvennykh lomanykh v opytakh na sploshnykh tsilindricheskikh oblastiakh [Experimental construction of plasticity functional for a two-link polygonal strain path in the experiments for cylindrical continuous areas]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya I: Matematika. Mekhanika*. 5. pp. 74–80.
 14. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. (2017) Modelirovanie protsessov uprugoplasticheskogo deformirovaniya materialov po mnogozhvennym kusochno-lomanyim pryamolineynym traektoriyam [Modeling of elastic-plastic deformation of work material along multi-element piecewise zig-zag linear trajectories]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12.
 15. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. (2018) On drawing the yield surface for steel 45 and verifying the postulate of isotropy on straight-line paths under repeated sign-variable loadings. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 1-2. pp. 23–28. DOI: 10.15593/perm.mech/eng.2018.1.03.
 16. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. (2017) Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. *Materials Physics and Mechanics*. 32(3). pp. 298–304. DOI: 10.18720/MPM.3232017_10.
 17. Lenskiy V.S. (1961) *Eksperimental'naya proverka osnovnykh postulatov obshchey teorii uprugoplasticheskikh deformatsiy* [Experimental verification of the fundamental postulates of general theory of elastoplastic deformations]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR.
 18. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. (2014) Chislennoe modelirovanie protsessov slozhnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya stali po dvuzhvennym lomanyim traektoriyam [Numerical simulation a processes of complex elastoplastic deformation steel on two-link broken trajectories]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 76(1). pp. 18–25. DOI: 10.32326/1814-9146-2014-76-1-18-25.

Received: December 10, 2018

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/5

Д.А. Иваницhev

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕШЕНИИ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ С МАССОВЫМИ СИЛАМИ¹

Сформулирован подход на основе метода граничных состояний, позволяющий определить напряженно-деформированное состояние для анизотропных тел вращения с заданными на границе перемещениями и находящимися под действием массовых сил. Особенность решения состоит в том, что след искомого упругого поля удовлетворяет одновременно заданным граничным условиям и условиям внутри области (массовым силам), а не представляет собой сумму решений частных задач.

Ключевые слова: *метод граничных состояний, анизотропия, массовые силы, краевые задачи, вторая основная задача, пространство состояний, анизотропный цилиндр.*

Современные материалы, такие, как эластомеры, поликристаллические металлы, керамика, а также композитные материалы, применяемые в конструкциях, механизмах и машинах, часто пребывают в сложных кинематических условиях. Данные материалы обладают значительной анизотропией в отношении упругих свойств. На тела, находящиеся в таких условиях, действуют массовые силы, а на перемещения точек границы наложены ограничения. Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) от совокупности таких воздействий в силу сложной физической природы материалов составляет актуальную научную задачу.

В механике объемные или массовые силы рассматривались в задачах разного направления. Например, в работе [1] построено численно-аналитическое решение плоской задачи теории упругости с использованием метода взвешенных невязок в форме метода граничного решения. Найдено распределения напряжений и смещений в упругом теле, подверженном действию заданной системы объемных сил и заданных напряжений или смещений на границах. В работе [2] исследовались вынужденные деформации в виде суммы воздействий поверхностных и объемных сил. В работе [3], используя фиктивные расчетные схемы, основанные на эквивалентности воздействий в механике деформируемого твердого тела, получены напряженно-деформированные состояния для балки на двух опорах, находящейся под действием массовых сил; вращающегося тонкого круглого диска; плотины треугольного поперечного сечения, находящейся под действием объемных фильтрационных сил. Авторы работы [4] рассматривали задачи теории упругости с заданными объемными и поверхностными силами в функциональных энергетических пространствах тензоров напряжений и деформаций. Методом ортогональных проекций решены конкретные задачи. Объемные силы рассматривались и в механике разрушения [5]; дается решение задачи о зарождении трещин в метал-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p_a".

лическом круговом диске под действием объемных сил. В работе [6] для перемещений получено условие эквивалентности поверхностных и объемных сил при использовании вариационного уравнения Лагранжа. Авторами работы [7] было построено поле перемещений для изотропного упругого тела, ограниченного концентрическими сферами и находящегося под действием осесимметричных нестационарных объемных сил. Автором [8] получены точные аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер с жестко закрепленной или закрепленной только в радиальном направлении внешней поверхности, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления.

В работах [9, 10] редуцирован обратный метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия непрерывных непотенциальных объемных сил. Метод граничных состояний (МГС) с участием объемных сил для изотропной среды применен в работе [11]. А в работе [12] продемонстрирован прием включения в круг расчетных вопросов МГС объемных сил, составляющих линейную комбинацию «эталонных» воздействий на односвязное ограниченное тело. В работе [13] разработана методика получения полнопараметрических решений для анизотропных тел, где возникновение фиктивных массовых сил являлось следствием применения метода Пуанкаре. Методом граничных состояний вопрос кручения анизотропных стержней сложного сечения исследовался в работе [14]. Этот метод оперирует понятием внутренней энергии упругой деформации. С помощью метода минимизации полной энергии деформации в работе [15] решена задача по определению напряженно-деформированного состояния, возникающего при осадке жесткопластической тонкой квадратной заготовки. Авторами [16] представлено решение уравнения Лапласа в осесимметричных областях с осесимметричными граничными условиями с помощью непрямого метода граничных элементов рассмотрено в работе. В работе [17] рассмотрены контактные задачи для трансверсально-изотропного цилиндра в условиях одновременного действия массовых сил и условий на границе.

В рамках настоящей работы предполагается применение энергетического метода граничных состояний для решения осесимметричной второй основной задачи теории упругости с массовыми силами для трансверсально-изотропных тел вращения. Особенность искомого упругого поля состоит в том, что его след одновременно удовлетворяет заданным условиям на границе и внутри области, т.е. массовым силам, а не представляет собой сумму отдельных полей в задаче эластостатики и в задаче от действия массовых сил.

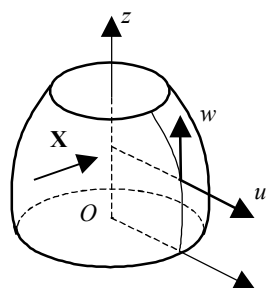


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения
Fig. 1. A transversely isotropic body of revolution

1. Постановка задачи

Рассматривается трансверсально-изотропное тело, ограниченное одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения с заданными перемещениями точек границы $\mathbf{u} = \{u, w\}$ и массовыми силами $\mathbf{X} = \{R, Z\}$, симметричными относительно оси вращения (рис. 1).

Решение поставленной задачи можно провести простым путем: сначала решить краевую задачу механики в зависимости заданных на границе перемещений [18], затем отдельно решить задачу по определению упругого состояния под действием массо-

вых сил и полученные поля характеристик напряженно-деформированного состояния сложить. Однако в этом случае сложно проводить анализ полученного результата исходя из теорий прочности и жесткости, возникает необходимость дискретно корректировать граничные условия в краевой задаче, что составляет непростую и трудоемкую задачу, особенно если граница тела частично или полностью закреплена. Например, естественно, что напряжения внутри тела, находящегося, например, под действием сил инерции со свободной границей, отличаются от напряжений в том же теле с закрепленной границей, вопрос состоит в том, каким образом происходит это перераспределение.

Целью работы является создание подхода на основе метода граничных состояний, позволяющего получить заданное перераспределение напряжений, деформаций и перемещений.

2. Определяющие соотношения для среды

Для однородной трансверсально-изотропной среды в цилиндрических координатах имеют место следующие соотношения [19]:

Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе координат z, r, θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где R, Z, Q – массовые силы.

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обобщенный закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}, \end{aligned} \quad (3)$$

где E_z и E_r – модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль r при растяжении вдоль оси z ; ν_r – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскостях изотропии при растяжении в этих же плоскостях; G_r и G_z – модуль сдвига в плоскостях изотропии и перпендикулярных к ним.

3. Задача эластостатики

С помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных) [19].

В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах бесконечной длины, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление $\eta \perp$ плоскости zy):

$$\begin{aligned}\sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1^2 \phi_1'(\zeta_1) + \gamma_2^2 \phi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_y^{pl} &= \operatorname{Re}[\phi_1'(\zeta_1) + \phi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1 \phi_1'(\zeta_1) + \gamma_2 \phi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_\eta^{pl} &= \nu_r \sigma_y^{pl} + \nu_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl}; \quad \tau_{z0} = 0; \quad \tau_{r0} = 0; \\ u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_1 \phi_1(\zeta_1) + p_2 \phi_2(\zeta_2)]; \\ u_y^{pl} &= \operatorname{Re}[iq_1 \phi_1(\zeta_1) + iq_2 \phi_2(\zeta_2)],\end{aligned}\tag{4}$$

где константы q_1 и p_1 определены упругими параметрами материала, $\zeta_j = z/\gamma_j + iy$, γ_j – комплексные корни характеристического уравнения, функции $\phi_j(\zeta_j)$ – аналитические по своим переменным.

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям [18]

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{zr} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta}; \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad v = 0.\end{aligned}\tag{5}$$

4. Метод решения

Для решения поставленной задачи прибегнем к понятиям метода граничных состояний (МГС) [20]. Основу метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}. \quad (6)$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}. \quad (7)$$

Воспользуемся при построении решения основных задач механики уравнением Клапейрона [21]:

$$\int_V \mathbf{X} \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{P}_v \mathbf{u}_v dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (8)$$

Придавая перемещениям возможные вариации $\delta \mathbf{u}$, последнее уравнение преобразуется в вариационное уравнение Лагранжа [21].

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования (отсюда и принадлежность метода к классу энергетических). Например, для 1-го и 2-го внутренних состояний тела, занимающего область V :

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV, \quad (9)$$

причем в силу тождества Бетти:

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

Граничное состояние γ_k , в зависимости от традиционного $\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k\}$, определяемого в [20], будем формировать наборами компонент вектора перемещения точек границы u_{vi} , поверхностными усилиями p_i и массовыми силами X_i (последнее условно в силу того, что массовые силы не относятся к элементу поверхности тела):

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (10)$$

где n_j – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний Γ , согласно (8), скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела S и работу массовых сил на перемещениях u_i внутренних точек тела:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV,$$

причем свойство коммутативности выполняется:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV = \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV.$$

В случае гладкой границы и в силу (8) оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению, каждому элементу

$\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет поиски внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от граничных условий (ГУ).

Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [22], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается (9).

Проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье и разложению искомым внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k; \quad X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k. \quad (11)$$

В случае второй основной задачи заданы массовые силы $\mathbf{X} = \{R, Z\}$ и перемещения точек границы тела $\mathbf{u}_v = \{u_v, w_v\}$.

Ортонормированность базиса граничных состояний позволяет для его элементов записать

$$\int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS = 2\delta_{ij}, \quad (12)$$

причем

$$\int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = - \left[\int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS \right], \quad i \neq j.$$

Заменяя в (12) базисные характеристики $\mathbf{X}^j$, $\mathbf{u}_v^j$ заданными $\mathbf{X}$, $\mathbf{u}_v$ и осуществляя перебор по индексу j , образуем матрицы коэффициентов:

$$\beta_{ij} = \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS; \quad \mathbf{B} = [\beta_{ij}]_{N \times N}; \quad (13)$$

$$\alpha_j = \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v dS; \quad \mathbf{A} = [\alpha_j]_N,$$

где $\mathbf{u}^j$ – вектор перемещения в j -м элементе базиса внутренних состояний (7); $\mathbf{X}^i$ – вектор массовых сил в i -м элементе базиса граничных состояний (10); $\mathbf{p}_v^j$, $\mathbf{u}_v^i$ – вектор усилий и перемещений на границе тела в элементах базиса граничных (10) состояний.

Следует отметить, что матрица $\mathbf{B}$ является косимметричной ($\beta_{ij} = -\beta_{ji}$, $i \neq j$).

Коэффициенты Фурье $c = \{c_k\}_N$ рассчитываются так:

$$c = \{c_k\}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \quad (14)$$

где N – число используемых элементов базиса.

Окончательно решение имеет вид (11).

5. Формирование базиса

Основной сложностью формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды. Также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

В работе [9] изложена методика определения напряженно-деформированного состояния изотропных тел от объемных сил.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная ортонормированная система многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$, образуя некоторое допустимое упругое плоское вспомогательное состояние:

$$\mathbf{u}^{pl} = \left\{ \left\{ y^\alpha z^\beta, 0 \right\}, \left\{ 0, y^\alpha z^\beta \right\} \right\}.$$

Перебор всевозможных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leq n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) позволяет получить множество состояний. Далее по формулам (5) определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r, z)$ пространственного осесимметричного состояния и по цепочке (2), (3), (1) определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и массовые силы, образуя конечномерный базис в задаче от массовых сил:

$$\Xi^X = \left\{ \xi_1^X, \xi_2^X, \xi_3^X, \dots, \xi_k^X, \dots \right\}.$$

Базисные наборы в задаче эластостатики можно конструировать, генерируя возможные варианты для двух аналитических функций $\varphi_1(\zeta_1)$ и $\varphi_2(\zeta_2)$ плоского вспомогательного состояния (4).

Базисные наборы плоских вспомогательных состояний в этом случае генерируются согласно

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\zeta_1) \\ \varphi_2(\zeta_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Далее определяются все механические характеристики плоского вспомогательного состояния, и затем следует переход к трехмерному состоянию по зависимостям (5), образуя конечномерный базис в задаче эластостатики:

$$\Xi^S = \left\{ \xi_1^S, \xi_2^S, \xi_3^S, \dots, \xi_k^S, \dots \right\}.$$

Результирующий базис (6) представляет собой объединение:

$$\Xi = \left\{ \xi_1^S, \xi_2^X, \xi_3^S, \xi_4^X, \dots, \xi_{k-1}^S, \xi_k^X, \dots \right\}. \quad (15)$$

Окончательный базис представляет собой объединение двух базисов в силу того, что перемещения, задаваемые на границе тела, могут вызывать одновременно как «уравновешенные» так и «неуравновешенные» (удовлетворяющие уравнению равновесия с массовыми силами) напряжения и после восстановления последних потребуются наличие «уравновешенных» элементов, в противном случае будет наблюдаться расхожимость решения. Окончательный базис граничных состояний редуцируется из (15).

6. Решение задачи для цилиндра

Апробацию предложенной методики проведем на исследовании упругого состояния трансверсально-изотропного кругового в плане цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [21]. После процедуры обезразмеривания, аналогия которой приведена в работе [23], упругие характеристики материала: $E_z = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_z = 2.55$; $\nu_z = 0.22$; $\nu_r = 0.24$ и цилиндр занимает область $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$ (рис. 2).

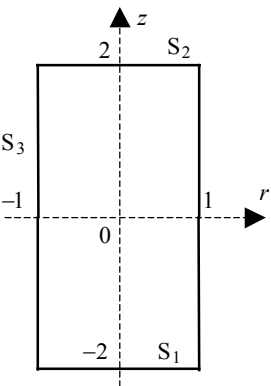


Рис. 2. Меридианное сечение тела вращения
Fig. 2. A meridian section of the body of revolution

Цилиндр находится под действием массовых сил $\mathbf{X} = \{r, z^3\}$, граница защемлена $\mathbf{u}_v = 0$. После процедуры ортонормирования и исключения линейно-зависимых элементов, базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 9 элементов).

Т а б л и ц а 1

Перемещения ортонормированного базиса

	u	w
ξ_1	0	$0.26389z$
ξ_2	$0.18528r$	$-0.10429z$
ξ_3	0	$0.11427z^2$
ξ_4	$0.14435rz$	$0.06455r^2 - 0.04062z^2$
ξ_5	$0.07007rz$	$-0.31671r^2 - 0.01972z^2$
ξ_6	$-0.09006r - 0.02311r^3 + 0.08488rz^2$	$0.18204z + 0.08488r^2z - 0.05612z^3$
ξ_7	$-0.05853r - 0.01502r^3 + 0.05516rz^2$	$-0.23356z + 0.05516r^2z + 0.05149z^3$
ξ_8	$0.19119r - 0.03733r^3 - 0.11539rz^2$	$-0.2256z + 0.278r^2z + 0.02165z^3$
ξ_9	$-0.23702r + 0.23608r^3 + 0.00071rz^2$	$-0.01291z + 0.0269r^2z - 0.000133z^3$

Усеченная до $N = 8$ матрица коэффициентов β_{ij} представлена в табл. 2 (i определяется по строке, j – по столбцу).

Таблица 2

Матрица коэффициентов β_{ij}

1	0	0	0	0	0	-2.666	-1.167	-0.198	0
0	1	0	0	0	0	1.054	0.461	-2.255	0
0	0	1	-0.496	0.269	0	0	0	0	0.404
0	0	0.496	1	-0.641	0	0	0	0	-0.032
0	0	-0.269	0.641	1	0	0	0	0	-0.504
0	0	0	0	0	1	-0.907	-0.391	-0.164	0
2.666	-1.054	0	0	0	0.907	1	0.014	0.001	0
1.167	-0.461	0	0	0	0.397	-0.014	1	-0.129	0
0.198	2.255	0	0	0	0.164	-0.001	0.129	1	0
0	0	-0.404	0.032	0.504	0	0	0	0	1

При решении использовался базис в 55 элементов. На рис. 3 приведен график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

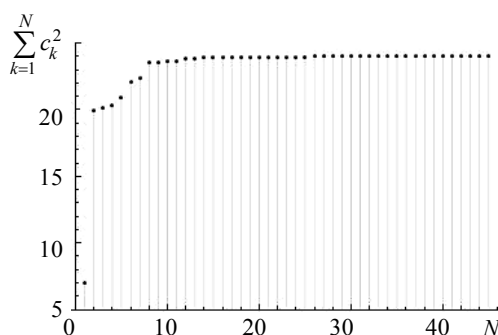


Рис. 3. Сумма Бесселя в задаче для цилиндра
Fig. 3. The Bessel sum in the problem for a cylinder

Коэффициенты Фурье рассчитываются по зависимости (14), искомые характеристики НДС – по зависимостям (11). Проверка результата и оценка точности осуществляется сопоставлением заданных ГУ с восстановленными в результате решения (рис. 4), а также сопоставлением полученного поля массовых сил с заданным полем.

Здесь и далее, заданные (| | | |) и восстановленные (————) ГУ изображены на графиках в масштабе. Например, истинное значение на графике рис. 4, a равно значению на графике, умноженному на коэффициент k . Аналогично и для выражений.

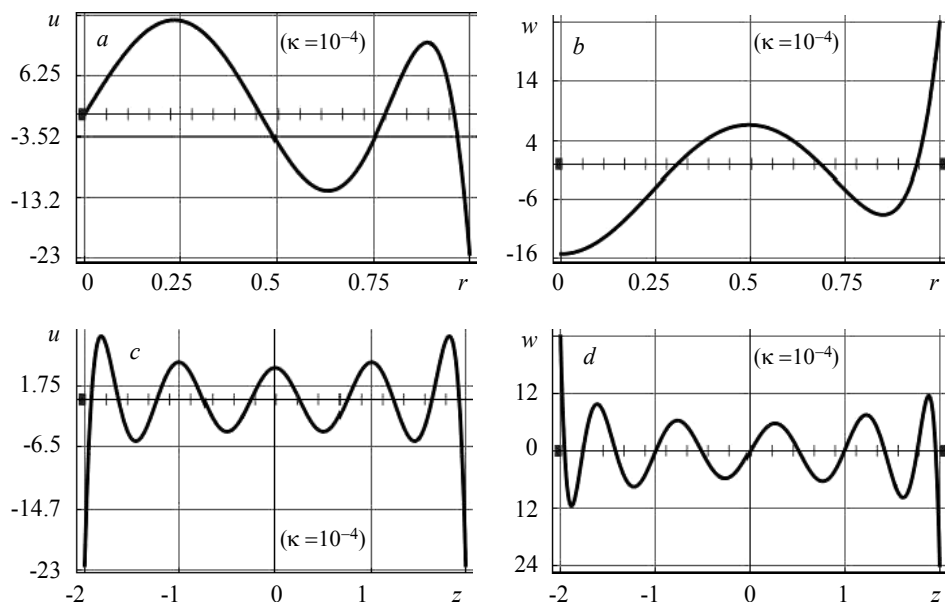


Рис. 4. Верификация перемещений на границе: *a* – компоненты u на участке S_1 , *b* – компоненты w на участке S_1 , *c* – компоненты u на участке S_3 , *d* – компоненты w на участке S_3

Fig. 4. Verification of displacements on the boundary: (*a*) the components of u in the section S_1 , (*b*) the components of w in the section S_1 , (*c*) the components of u in the section S_3 , and (*d*) the components of w in the section S_3

Приведем восстановленные массовые силы ($\kappa = 10^{-5}$):

$$\begin{aligned}
 R &= 97140.3r + 11750.7r^3 - 9911.8r^5 + \\
 &+ 394.636r^2z^2 - 786.119r^3z^2 + 35.973rz; \\
 Z &= -294.709z + 570.086r^2z - 412.157r^4 + \\
 &+ 100228z^3 - 14.666r^2z^3 - 56.777z^5.
 \end{aligned}$$

Остальные характеристики НДС представим в виде изолиний (в явном виде необозримы) (рис. 5). В силу осевой симметрии показана область $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$. Относительно плоскости $z = 0$ компоненты u , σ_{rr} обладают симметрией, w и σ_{zz} – косой симметрией.

Полученные поля удовлетворяют уравнениям (1) – (3), а также уравнениям совместности деформаций [24].

При практической реализации приема решения второй основной задачи для цилиндра и его тестирования при различных видах функций заданных массовых сил наблюдалась следующая особенность. Если область интегрирования V симметрична относительно плоскости $z = 0$, то задачи с несимметричной и не кососимметричной относительно этой плоскости компонентой Z , например $Z = z + 1$, сходимостью решения в области восстановления массовых сил не обладают. Для получения корректного решения в этом случае необходимо задать несимметричную относительно плоскости $z = 0$ область цилиндра V , например с координатой $0 \leq z \leq 4$.

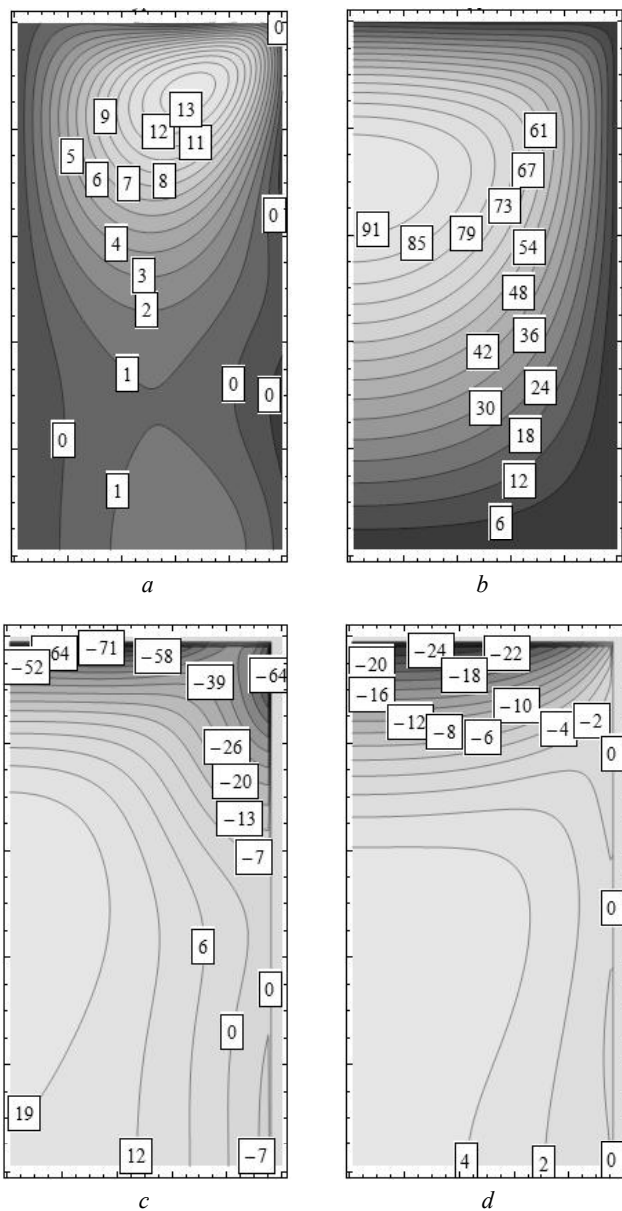


Рис. 5. Механические характеристики: a – компонента вектора перемещения u ($\kappa = 10^{-3}$), b – компонента вектора перемещения w ($\kappa = 10^{-3}$), c – компонента тензора напряжений σ_{rr} ($\kappa = 10^{-2}$), d – компонента тензора напряжений σ_{zz} ($\kappa = 10^{-1}$)

Fig. 5. Mechanical characteristics: (a) a component of the displacement vector u ($\kappa = 10^{-3}$), (b) a component of the displacement vector w ($\kappa = 10^{-3}$), (c) a component of the stress tensor σ_{rr} ($\kappa = 10^{-2}$), and (d) a component of the stress tensor σ_{zz} ($\kappa = 10^{-1}$)

Заключение

Таким образом, сформулирован метод решения второй основной задачи для трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием стационарных массовых сил. Заданные перемещения на границе и массовые силы носят осесимметричный характер. Особенность решения заключается в том, что наиболее трудоемкие вычисления, а именно построение ортонормированного базиса и матрицы коэффициентов β_{ij} строятся для тела один раз и могут быть использованы при решении задач с различными краевыми условиями и массовыми силами. Сложность задачи обусловлена тем, что восстановление искомого упругого поля осуществляется одновременно по двум направлениям (два интеграла в выражении для α_j (13)): массовые силы $\mathbf{X}$ и перемещения точек границы $\mathbf{u}$.

Основным преимуществом представленного метода перед численными методами заключается в том, что в своей структуре метод оперирует квадратурами, которые берутся средствами компьютерной алгебры с абсолютной точностью. Это ликвидирует причину формирования результирующей ошибки вычислений, связанной с промежуточным характером численного счета. Также предложенный подход позволяет получить численно-аналитическое решение задачи теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голоскоков Д.П., Данилюк В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 1. С. 8–14.
2. Агаханов Э.К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2013. № 2 (29). С. 39–45.
3. Агаханов Э.К. Решение задач механики деформируемого твердого тела с использованием фиктивных расчетных схем // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2015. № 3 (38). С. 8–15.
4. Стружанов В.В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89–100.
5. Калантарлы Н.М. Трещинообразование в круговом диске под действием объемных сил // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 23–29.
6. Агаханов Э.К., Магомедэминов Н.С. Условия эквивалентности воздействий для перемещений // Вестник ДГТУ. Технические науки. 2007. №12. С. 27–28.
7. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 6. С. 59–69.
8. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20–24 августа 2015. С. 3951–3953.
9. Кузьменко Н.В., Левина Л.В. Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. докл. Казань, 2015. С. 2276–2278.
10. Пеньков В.Б., Левина Л.В., Кузьменко Н.В. Анализ напряженно-деформированного состояния массива, ослабленного взаимодействующими подземными хранилищами газа // Успехи современного естествознания. 2017. № 9. С. 95–101.
11. Пеньков В.Б., Пеньков В.В., Викторов Д.В. Учет массовых сил в методе граничных состояний // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 2. С. 94–100.

12. Пеньков В.Б., Новикова О.С., Левина Л.В. Состояние упругого тела при нагружении комбинацией объемных сил // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2017. № 4. С. 25–56.
13. Penkov V.B., Ivanychev D.A., Novikova O.S., Levina L.V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations // J. Physics: Conf. Series 973. 2018. 012015 DOI:10.1088/1742-6596/973/1/012015.
14. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length // International Transaction J. Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. 2019. V. 10. No. 2. pp. 183–191. DOI: 10.14456/IJEMAST.2019.18.
15. Албагачиев А.Ю., Моисеенко А.М., Якововская И.М., Зернов Е.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой квадратной заготовки при ее осадке шероховатыми плитами // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 49. С. 75–80. DOI: 10.17223/19988621/49/7.
16. Пономарева М.А., Собко Е.А., Якутенок В.А. Решение осесимметричных задач теории потенциала непрямым методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 84–96.
17. Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.
18. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в приложении к осесимметричным задачам для анизотропных тел // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. Липецк: ЛГТУ. 2014. № 1. С. 19–26.
19. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, 1978. 464 с.
20. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
21. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
22. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. 2007. С. 130–131.
23. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
24. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Статья поступила 06.10.2018 г.

Ivanychev D.A. (2019) THE METHOD OF BOUNDARY STATES IN THE SOLUTION TO THE SECOND FUNDAMENTAL PROBLEM OF THE THEORY OF ANISOTROPIC ELASTICITY WITH MASS FORCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 45–60

DOI 10.17223/19988621/61/5

Keywords: boundary state method, anisotropy, mass forces, boundary value problems, the second fundamental problem, state space, anisotropic cylinder.

The aim of the paper is to assess the stress-strain state of anisotropic bodies of revolution with specified displacements of the boundary points and acting mass forces. The problem solution is intended to develop the method of boundary states. A theory is elaborated for constructing a basis of the internal state space, including displacements, strains, and stresses within the body, and a

basis of the boundary state space, including forces at the boundary, displacements of the boundary points, and mass forces. The bases are formed using a general solution of the boundary value problem for a transversely-isotropic body of revolution and a method for creating basis vectors of displacement, which is similar to the one usually employed in problems dealing with stress conditions caused by non-conservative mass forces. The internal area and the boundaries are conjugated by isomorphism. This property allows one to reduce the analysis of the whole body state to the analysis of its boundary state. The characteristics of the stress-strain state are presented using the Fourier series. Eventually, a determination of the stress-strain state is reduced to solving an infinite system of algebraic equations.

The paper proposes a solution to the second fundamental problem of a circular plane cylinder made of rock, as well as the relevant steps of the study and conclusions. The obtained results are visualized graphically.

Financial support. The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Lipetsk Region in the framework of the research project No. 19-41-480003 "p_a".

Dmitriy A. IVANYCHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdml@mail.ru

REFERENCES

1. Goloskokov D.P., Danilyuk V.A. (2013) Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugikh tel s pomoshch'yu polinomov [Modeling of the stress-strain state of elastic bodies using the polynomials]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova*. 1. pp. 8–14.
2. Agakhanov E.K. (2013) O razvitiy kompleksnykh metodov resheniya zadach mekhaniki deformiruемого твердого тела [On the development of complex methods for solving the problems of mechanics of a deformable solid]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskies nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2(29). pp. 39–45.
3. Agakhanov E.K. (2015) Reshenie zadach mekhaniki deformiruемого твердого тела s ispol'zovaniem fiktivnykh raschetnykh skhem [Solving the problems of mechanics of a deformable solid with the use of fictitious calculation schemes]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskies nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 3(38). pp. 8–15.
4. Struzhanov V.V. (2014) O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsiy [On the solution of boundary value problems of the theory of elasticity by the method of orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 12. pp. 89–100.
5. Kalantarly N.M. (2014) Treshchinoobrazovanie v krugovom diske pod deystviem ob'emnykh sil [Cracking in circular disk under the influence of volume forces]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 6. pp. 23–29.
6. Agakhanov E.K., Magomedeminov N.S. (2007) Usloviya ekvivalentnosti vozdeystviy dlya peremeshcheniy [Equivalence conditions of impacts for displacements]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskies nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 12. pp. 27–28.
7. Vestay V.A., Tarlakovskiy D.V. (2015) Nestatsionarnoe osesimmetrichnoe deformirovanie uprugoy tolstostennoy sfery pod deystviem ob'emnykh sil [Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(6). pp. 984–994. DOI: 10.1134/S0021894415060085.
8. Fukalov A.A. (2015) Zadachi ob uprugom ravnovesii sostavnykh tolstostennykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviem massovykh sil i

- vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems on the elastic equilibrium of the composite thick-walled transversally isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications]. *XI Vserossiyskiy s"ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki, Kazan'*. pp. 3951–3953.
9. Kuzmenko N.V., Levina L.V. (2015) Obratnyy metod effektivnogo analiza sostoyaniya uprugogo tela ot massovykh sil iz klassa nepreryvnykh [The inverse method of effective analysis of an elastic body state affected by mass forces classified as continuous ones]. *XI Vserossiyskiy s"ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Kazan'*. pp. 2276–2278.
 10. Pen'kov V.B., Levina L.V., Kuz'menko N.V. (2017) Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya massiva, oslablennogo vzaimodeystvuyushchimi podzemnymi khranilishchami gaza [Analysis of the stress-strain state of the massif weakened by the interacting underground gas storages]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya – Advances in Current Natural Sciences*. 9. pp. 95–101.
 11. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V., Viktorov D.V. (2005) Uchet massovykh sil v metode granichnykh sostoyaniy [The account for mass forces in the method of boundary states]. *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 11. pp. 94–100.
 12. Pen'kov V.B., Novikova O.S., Levina L.V. (2017) Sostoyanie uprugogo tela pri nagruzhenii kombinatsiei ob'emnykh sil [The state of an elastic body when loaded by a combination of volume forces]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Lipetsk State Technical University*. 4. pp. 25–56.
 13. Pen'kov V.B., Ivanychev D.A., Novikova O.S., Levina L.V. (2018) An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations. *Journal of Physics: Conference Series*. 973(012015). DOI:10.1088/1742-6596/973/1/012015.
 14. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. (2019) The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*. 10(2). pp. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.
 15. Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Yakobovskaya I.M., Zernov E.V. (2017) Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie tonkoy kvadratnoy zagotovki pri ee osadke sherokhovatyimi plitami [A stress-strain state of the thin square workpiece during upsetting by rough plates]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 75–80. DOI: 10.17223/19988621/49/7.
 16. Ponomareva M.A., Sobko E.A., Yakutenok V.A. (2015) Reshenie osesimmetrichnykh zadach teorii potentsiala nepryamym metodom granichnykh elementov [Solving axisymmetric potential problems using the indirect boundary element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(37). pp. 84–96. DOI: 10.17223/19988621/37/8.
 17. Ivanychev D.A. (2019) Reshenie kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi silami [The contact problem solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.
 18. Ivanychev D.A. (2014) Metod granichnykh sostoyaniy v prilozhenii k osesimmetrichnym zadacham dlya anizotropnykh tel [The method of boundary states as applied to axisymmetric problems for anisotropic bodies]. *Vesti vysshikh uchebnykh zavedeniy Chernozem'ya – News of Higher Educational Institutions of the Chernozem Region*. 1. pp. 19–26.
 19. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of the methods of the theory of functions of complex variable)]. Moscow: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury.

20. Pen'kov V.B. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving the problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal*. 2(2). pp. 115–137.
21. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
22. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space at severe limitations in the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
23. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution to the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Lipetsk State Technical University*. 2 (28). pp. 16–24.
24. Novatskiy V. (1975) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir.

Received: October 6, 2018

УДК 539.3; 001.891.573; 519.6
DOI 10.17223/19988621/61/6

В.М. Козин, А.С. Васильев, В.Л. Земляк, К.И. Ипатов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА В УСЛОВИЯХ ЧИСТОГО ИЗГИБА ПРИ УСИЛЕНИИ АРМИРУЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ¹

Исследовано влияние поверхностного армирования на несущую способность ледяного покрова. Представлены результаты эксперимента по исследованию разрушения ледовых балок с заданной схемой армирования и выполнено сопоставление полученных результатов с численными расчетами. Приведены численные исследования армированных ледовых балок, усиленных различными композиционными материалами. Численные расчеты выполнены в программном комплексе ANSYS. Результаты оригинальные.

Ключевые слова: *ледовая балка, поверхностное армирование, нагрузка, чистый изгиб, несущая способность, численное исследование, критерий прочности.*

Ледовые переправы на автомобильных дорогах организуются в зимний период времени при образовании на водных преградах ледяного покрова требуемой толщины, в случаях отсутствия мостовых сооружений, а также при невозможности устройства паромных переправ. Как отмечается в монографии Н.Н. Бычковского и Ю.А. Гурьянова [1], ледяной покров должен обладать достаточной несущей способностью (грузоподъемностью), а глубина воды подо льдом на переправе в течение всего периода ее работы должна быть не менее 1 м при самом низком уровне воды и наибольшей толщине льда. Стоит отметить трудности прогнозирования поведения льда при различных видах нагружения (статическом и динамическом). Разрушения льда от нормальных, наклонных и радиальных трещин исследовали в своих работах W.J. Lu, R. Lubbad, S. Loset [2]; C.E. Renshaw, E.M. Schulson, S.J.G. Sigward [3]; J.D. Tippmann, H. Kim, J.D. Rhymer [4].

Если толщина ледяного покрова не достаточна для безопасной эксплуатации переправы, могут быть использованы традиционные методы повышения несущей способности льда, такие, как намораживание льда снизу, намораживание льда сверху или усиление льда деревянным копейным настилом [5]. Однако, как показывает практический опыт, физико-механические свойства ледяного покрова могут сильно зависеть от наличия снега и ветра в момент намораживания, температуры окружающей среды и других факторов. С учетом ненадежности физико-механических свойств льда из-за вышеперечисленных факторов актуальной становится задача повышения несущей способности льда альтернативными методами, например внедрением в лед армирующих элементов из различных материалов.

Внедрению усиливающих элементов в ледовые переправы посвящено множество работ. Достаточно перспективным является армирование ледовых переправ гео-

¹ Работа выполнена в рамках проекта 9.4934.2017/БЧ «Определение влияния ледовых условий на несущую способность ледяного покрова при использовании его в качестве ледовых переправ» задания на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания вузу.

синтетическими материалами. Результаты экспериментальных исследований такого армирования представлены в работе Якименко [6–8]. П.Е. Никитин [9] предлагает способ создания ледовой переправы для широких водоемов путем вмораживания стальных сеток. Известен ряд решений, в которых для увеличения несущей способности в ледяной покров вмораживаются стальные элементы [10–13]. Внедрение в тонкий ледяной покров стальных цельносварных каркасов толщиной 0.3–0.4 м – достаточно перспективный метод усиления ледовых переправ.

Цель работы – выяснить, как ведет себя лед на переправах в условиях чистого изгиба. Для этого были выполнены модельные эксперименты армированных образцов, сопоставленные с численными расчетами в ПК ANSYS. В работе исследовались зависимости нагрузка – прогиб, а также напряженно-деформированное состояние ледовых образцов, усиленных поверхностными армирующими каркасами из различных материалов и с заданной схемой армирования.

Методика проведения экспериментальных и численных исследований

Для выполнения модельных экспериментов была спроектирована и собрана универсальная нагружающая установка (рис. 1), которая состояла из силовой рамы, состоящей из стоек, станин, верхней и нижней балок, нагружающего устройства и измерительного модуля. Нагружающее устройство представляло собой гидроцилиндр 3 с номинальным давлением 9 атм и распределительную силовую балку 2. Усилие нагружающего устройства передавалось на образец 1 через шарнирные опоры 6. Нагружающая система была устроена так, что обеспечивала в средней части пролета ледяного образца чистый изгиб. Вертикальные перемещения сечения образца в середине пролета измерялись с помощью бесконтактного лазерного датчика LAS-Z компании «Way Con» (Германия) 5, закреплённого на

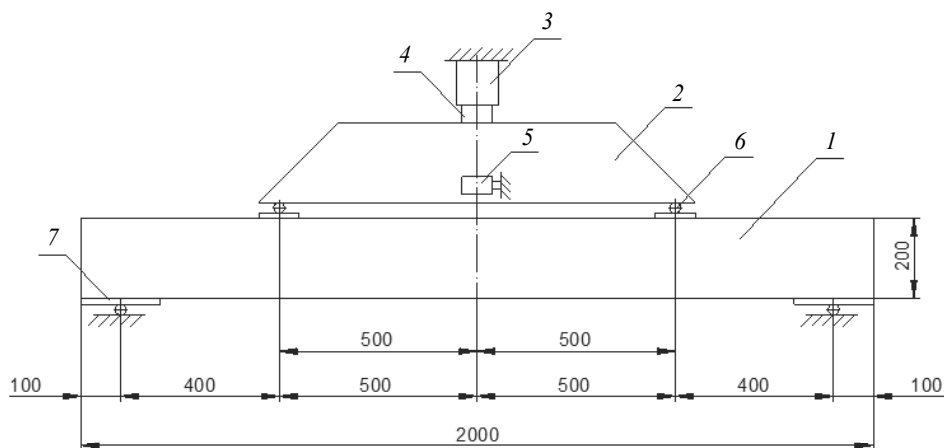


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – ледяная балка; 2 – распределительная балка; 3 – гидроцилиндр; 4 – весовой терминал SH-20; 5 – датчик вертикальных перемещений LAS-Z; 6 – шарнирные опоры распределительной балки; 7 – шарнирные опоры ледяной балки

Fig. 1. Diagram of the experimental setup: 1, ice beam; 2, distributing beam; 3, hydraulic cylinder; 4, weighing indicator SH-20; 5, vertical displacement sensor LAS-Z; 6, hinged supports of the distributing beam; and 7, hinged supports of the ice beam

независимой стойке. Нагрузка, которую испытывал образец, фиксировалась с помощью весового электронного терминала SH-20 компании TOKBEC (Россия) 4. Скорость нагружения для всех образцов была постоянной и составила 135 кПа/с.

Для приготовления ледяных образцов была изготовлена деревянная опалубка из досок толщиной 40 мм. Опалубка позволяла приготавливать ледяные балки размерами $L \times B \times H = 2000 \times 200 \times 200$ мм. В собранную опалубку укладывалась двухслойная полиэтиленовая плёнка толщиной 0.03 мм и армирующий каркас. После этого опалубка заливалась водой. Жидкость подвергалась воздействию низких атмосферных температур ($t < 0^\circ\text{C}$) до её полного замерзания. Время приготовления образца в зависимости от погодных условий составляло от 5 до 7 сут при температуре окружающей среды от -16 до -28°C . Структура льда преимущественно сплошная, кристаллическая.

Для армирования ледяных балок использовался цельносварной каркас из стальной арматуры периодического профиля диаметром 6 мм. Схема каркаса представлена на рис. 2.

Эксперименты на ледяных балках проводились с целью оценки влияния поверхностного усиления растянутой зоны армирующим каркасом на их (балок) несущую способность в условиях чистого изгиба.

Численный расчет напряженно-деформированного состояния ледяных образцов выполнялся в программном комплексе ANSYS Workbench v15, с использованием модуля ANSYS Mechanical. Для льда использовались нелинейные конечные элементы SOLID 65

в форме гексаэдра, предназначенные для моделирования элементов, допускающих трещинообразование при растяжении, а также позволяющих выполнять расчеты по нелинейной модели с учетом разрушения материалов на основе критерия прочности Willam – Warnke [14]. Для отображения трещин были введены функции пользователя, применяющие деформационный критерий Базанта [15].

Конечный элемент BEAM188 использовался для моделирования работы армирующих материалов. Это балочный элемент с изгибной жесткостью. Каждый продольный стержень модели был разделен на 180 конечных элементов (КЭ), каждый поперечный стержень на 18 элементов.

Для расчета армированных ледяных балок использовались следующие механические характеристики льда: начальный модуль упругости $E = 700$ МПа, одноосная прочность на сжатие $R_b = 0.55$ МПа, одноосная прочность на растяжение $R_{bt} = 0.4$ МПа, плотность $\rho = 930$ кг / м³, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Характеристики арматуры: начальный модуль упругости $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление $R_s = 355$ МПа.

Механические характеристики материалов, используемых для усиления льда в численных экспериментах, представлены в таблице: горячекатаная арматура А400 (образец № 1); стеклопластиковая композитная арматура (образец № 2); углерод-

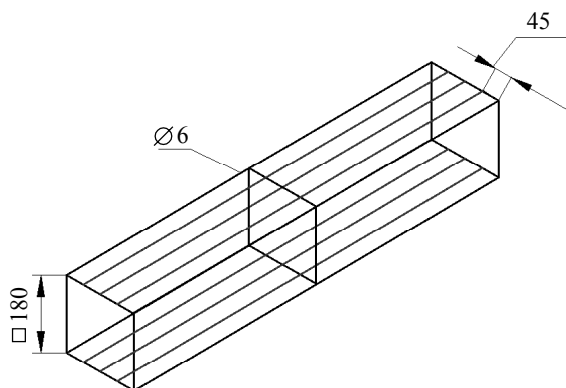


Рис. 2. Схема армирования ледяной балки

Fig. 2. Scheme of the ice beam reinforcement

ная арматура (образец №3); арамидокompозитная арматура (образец № 4); комбинированная сочетанием стекла и базальта арматура (образец № 5). В дальнейшем образец без усиления будет обозначаться №0

Расчетные механические характеристики стальной и композитной арматуры

Наименование показателя	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Предел прочности при растяжении, $\sigma_{bt,п}$, МПа	365	168	840	448	320
Предел прочности при сжатии, $\sigma_{bc,п}$, МПа	365	63	180	96	96
Модуль упругости, E, МПа	$20 \cdot 10^4$	$50 \cdot 10^3$	$130 \cdot 10^3$	$70 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$

Результаты экспериментального и численного исследования.

Была проведена предварительная серия экспериментов по загрузке неармированных ледяных балок для оценки влияния поверхностного армирования на несущую способность образцов. Во время проведения экспериментов фиксировались результаты прогибов w , вызванные возрастающей нагрузкой F , приложенной к испытываемому образцу. Согласно экспериментальным данным, разрушающая нагрузка составляла 3.6 кН при численном расчете около 3.9 кН [13].

На рис. 3 представлены данные результатов модельного эксперимента при испытании армированного образца. Видно, что максимальная нагрузка, которую выдержали образцы в эксперименте, составила порядка 12 кН, что существенно превысило предельную нагрузку, которую смог выдержать неармированный образец.

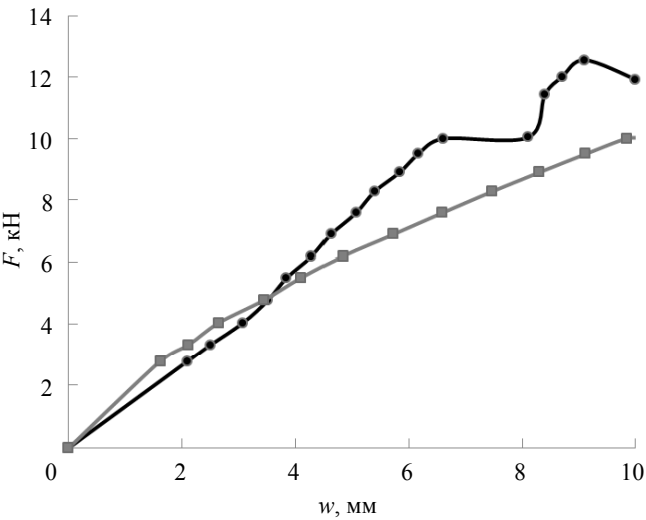


Рис. 3. Диаграмма зависимости прогиба армированного образца (A400) от нагрузки (—●— — результаты экспериментальных исследований, —■— — результаты численных исследований в ANSYS Workbench 17.2.)
Fig. 3. Diagram for a dependence of the reinforced sample A400 deflection on the load (—●— — experimental study results and —■— — numerical calculation results obtained using the ANSYS Workbench 17.2.)

При этом происходило образование сквозных трещин в испытуемых образцах, а максимальное значение прогиба составило около 10 мм, после чего происходило полное разрушение балок.

Как можно заметить, результаты модельных экспериментов и численных расчетов хорошо согласуются в упругой зоне. В качестве критерия разрушения ледяной балки был принят резкий рост деформаций, характеризующийся потерей несущей способности и разрушением большей части сечения. При этом арматура не достигала предела текучести, а разрушение происходило с образованием обширных сквозных трещин во льду, в результате действия изгибающего момента в середине пролета балки. На рис. 4 представлены фото разрушений ледовых балок под действием разрушающей нагрузки.

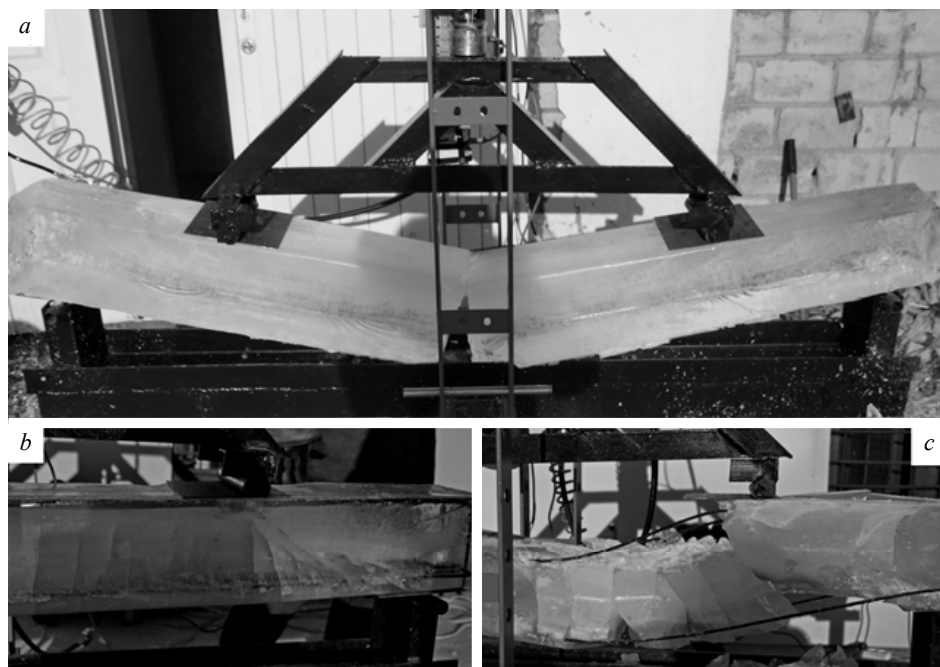


Рис. 4. Разрушение ледовых балок на экспериментальной установке под действием чистого изгиба: *a* – ледяная балка без армирования, *b* – формирование нормальных и наклонных трещин в армированной балке (A400), *c* – полное разрушение армированной балки (A400)
Fig. 4. Destruction of the ice beams under the action of pure bending on the experimental setup: (a) unreinforced ice beam, (b) appearance of the normal and inclined cracks in the reinforced beam A400, and (c) a complete destruction of the reinforced beam A400

На рис. 5, *a* представлена схема трещин в программном комплексе ANSYS, на рис. 5, *b* – напряжения в арматурном каркасе, смоделированном в программном комплексе ANSYS.

Схема трещин в соответствии с критерием Базанта [15] представлена значениями от -0.00017 до 0.018 (см. рис. 5, *a*). Значения критерия больше нуля соответствуют возникновению и открытию трещин в растянутой зоне балки.

Как видно из рис. 5, *b*, напряжения в арматуре растянутой зоны ледовой балки не достигали предела текучести и составляли около 117 МПа.

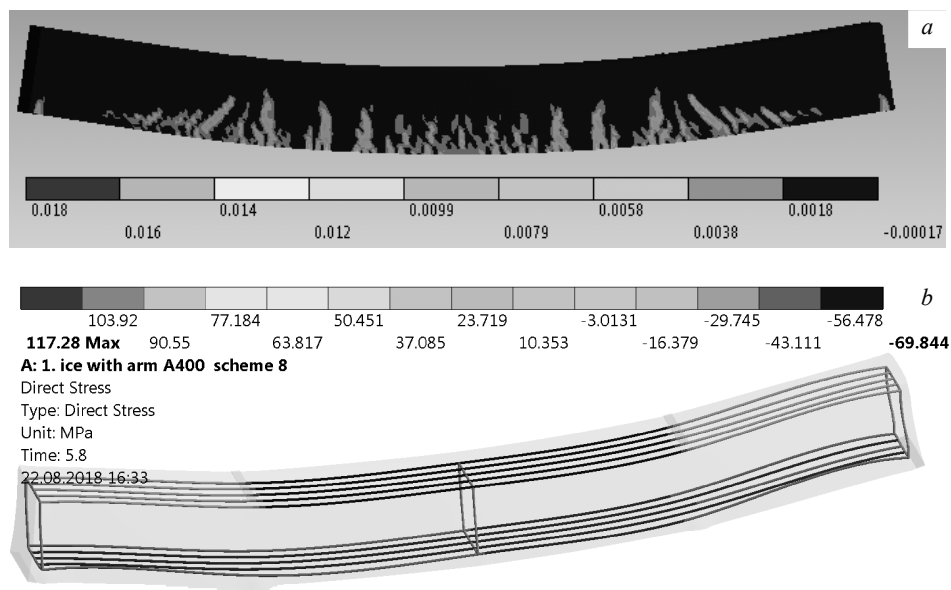


Рис. 5. Результаты численных расчетов в ПК ANSYS: *a* – схема трещин при разрушении ледовой балки, *b* – напряжения в арматуре (A400) при разрушении
Fig. 5. Numerical calculation results obtained by PC ANSYS: (*a*) diagram of the cracks during the ice beam destruction and (*b*) stresses in the reinforced sample A400 during destruction

Основные результаты численных расчетов, представленные в виде диаграмм зависимости нагрузки от прогиба для образцов, армированных различными материалами, показаны на рис. 6, *a*.

С учетом того, что нагрузка, при которой разрушился неармированный образец, составила 3.6 кН, можно судить о том, что несущая способность армированного образца намного выше. Напряжения в средних сечениях каждого из армированных образцов представлены на рис. 6, *b*.

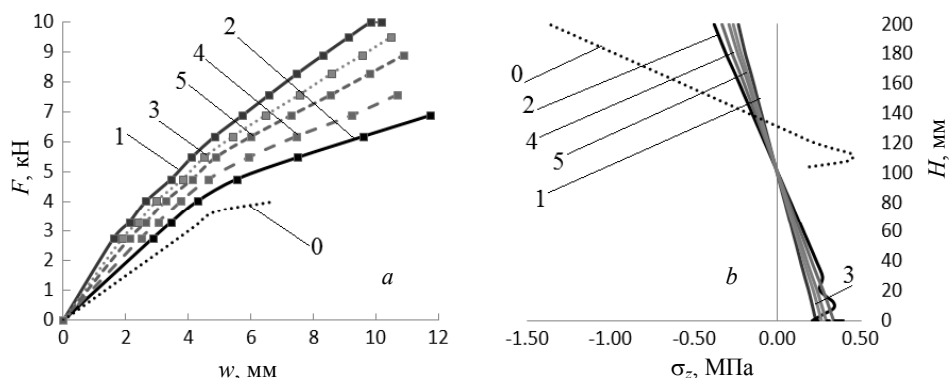


Рис. 6. Результаты численных расчетов: *a* – зависимость нагрузка-прогиб, *b* – распределение нормальных напряжений σ_z в сечении балки при нагрузке 3.6 кН

Fig. 6. Numerical calculation results: (*a*) load-deflection dependency and (*b*) normal stress σ_z distribution along the beam section at a load of 3.6 kN

Анализ данных показывает, что использование армирующих каркасов из различных композитных материалов приводит к существенному увеличению несущей способности льда. Наибольшую несущую способность по сравнению с неармированным показал образец, армированный стальной арматурой А400. Наименьшей несущей способностью обладали армированные образцы № 2 и 4. Максимальные напряжения при нагрузке 3.6 кН (предельная нагрузка, при которой неармированный образец №0 сохранял свою несущую способность) для образцов, армированных материалом № 1, 2, 3, 4, 5, составляли -0.23 , -0.38 , -0.26 , -0.33 и -0.29 МПа соответственно. Самый быстрый рост нормальных напряжений с увеличением нагрузки наблюдался в армированном образце № 2, самый медленный рост – в армированном образце № 1.

Выводы

В результате исследования можно сделать следующие выводы:

При проведении экспериментальных и численных исследований было установлено, что использование поверхностного упрочнения льда различными материалами по данной схеме армирования позволяет увеличить несущую способность с 92 до 178 %.

Разрушение образцов во всех случаях происходило в результате образования обширных трещин во льду, вызванных действием изгибающего момента в середине пролета балки. При этом арматура не достигала предела текучести.

Результаты модельного эксперимента и численного расчета (см. рис. 3) хорошо согласуются в упругой зоне. Что касается прогибов и разрушающих нагрузок, отклонения в сравнении данных не превышали 19 и 2 % соответственно. Это позволяет считать численные расчеты ледовых балок, армированных различными композитами, достаточно корректными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бычковский Н.Н., Гурьянов Ю.А. Ледовые строительные площадки, дороги и переправы, Саратов, 2005. 180 с.
2. Lu W.J., Lubbad R., Loset S. Out-of-plane failure of an ice floe: Radial-crack-initiation-controlled fracture // Cold Regions Science and Technology. 2015. No.119. P. 183–203. DOI: 10.1016/j.coldregions.2015.08.009.
3. Renshaw C.E., Schulson E.M., Sigward S.J.G. Experimental observation of the onset of fracture percolation in columnar ice // Geophysical Research Letters. 2017. No.44(4). P. 1795–1802. DOI: 10.1002/2016 GL071919.
4. Tippmann J.D., Kim H., Rhymer J.D. Experimentally validated strain rate dependent material model for spherical ice impact simulation // Int. J. Impact Engineering. 2013. No. 57. P. 43–54. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2013.01.013
5. ОДН 218.010-98. Инструкция по проектированию, строительству и эксплуатации ледовых переправ: введен 01.10.1998.: утвержден ФДС России от 1998-08-26 // Союздорнии Госстроя России. 1998.
6. Якименко О.В., Сиротюк В.В. Усиление ледовых переправ геосинтетическими материалами. Омск: СибАДИ, 2015. 168 с.
7. Yakimenko O.V., Sirotyuk V.V. Reinforcement of ice crossings // Earth's Cryosphere. 2014. V. 18. Iss. 1. P. 88–91
8. Sirotyuk V.V., Yakimenko O.V., Levashov G.M., Zakharenko A.A. Reinforcement of ice cover with geosynthetics materials // Earth's Cryosphere. V. 20. Iss. 3. 2016. P. 86–94.
9. Никитин П.Е., Никитина М.П. Способ создания армированной ледовой переправы для широких водоемов // Патент на изобретение РФ № 2569694, опубли. 27.11.2015.

10. Костенко А.В., Сердечный А.С., Сердечный А.А. Ледяная переправа // Патент на изобретение РФ № 2260648, опубл. 20.09.2005.
11. Zemlyak V.L., Kozin V.M., Vasil'ev A.S., Ipatov K.I. Experimental and numerical investigations of the influence of reinforcement on the load-carrying capacity of ice crossings // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2019. No. 56(1). P. 37–43.
12. Kozin V.M., Zemlyak V.L., Vasilyev A.S., Ipatov K.I. The research of the stressed strain state of ice beams reinforced by surface reinforcement // *Proceedings of the Twenty-eighth International Ocean and Polar Engineering Conference*, Sapporo, Japan. 2018. P. 1511–1515.
13. Kozin V.M., Zemlyak V.L., Vasilyev A.S., Ipatov K.I. Experimental and numerical research of the stressed-deformed state of ice beams reinforced by surface reinforcement // *IOP Conf. Series: Earth and Environ. Sci.* 2018. 193. 012031. DOI: 10.1088/1755-1315/193/1/012031.
14. Willam K.J., Warnke K.J. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete // *Seminar of concrete structures subjected to triaxial stresses*. Bergamo, Italy, 1974. No. 19. P. 3–11.
15. Bazant Z.P., Cedolin L. Fracture mechanics of reinforced concrete // *J. Engineering Mechanics* – ASCE. 1980. P. 1287–1306.

Статья поступила 27.08.2018 г.

Kozin V.M., Vasil'ev A.S., Zemlyak V.L., Ipatov K.I. (2019) INVESTIGATION OF THE LIMIT STATE OF ICE COVER UNDER CONDITIONS OF PURE BENDING WHEN USING REINFORCING ELEMENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 61–69

DOI 10.17223/19988621/61/6

Keywords: ice beam, surface reinforcement, load, pure bending, carrying capacity, numerical investigation, strength criterion.

The aim of the paper was an experimental and numerical investigation of the stress-strain state of the ice samples strengthened by surface reinforcement. The ice samples were reinforced with the welded reinforcing cages in a series of experiments performed in the winter of 2015/2016. The reinforcing steel A400 was used in the experimental study. A multifunctional loading unit was developed and assembled for the model experiments to be carried out. The unit consisted of a power frame, loading device, and measuring module. The results of experiments on the loading of the samples were compared with those obtained numerically using the ANSYS software suite. The samples were loaded under conditions of pure bending. The resulting load-deflection diagrams showed a high convergence when comparing experimental data to numerical results for a specified reinforcement scheme with steel A400. The simulation of ice beams and the corresponding calculations were performed by the ANSYS software. The beam samples were reinforced with various composite materials in accordance with a given scheme of reinforcement. The load-deflection diagrams for the ice samples reinforced with steel were compared with those for the samples reinforced with considered composite materials. The stress-strain state of the samples was determined at each loading step. The numerical calculations were performed on the basis of a nonlinear deformation model with account for appearance of the cracks in the samples. The authors assessed an increase in the load-bearing capacity of ice when using different composite materials, and analyzed their effect on the stress-strain state of the ice samples at various loading steps. The numerical model efficiency was tested using the ANSYS software suite at the specified physical and mechanical characteristics of the materials.

Financial support. The study is performed in the framework of the project No. 9.4934.2017 of the task for fulfillment of the government works in the field of science within a base part of the government task for higher education establishment.

Victor M. KOZIN (Doctor of Technical Sciences, Institute of Machining and Metallurgy, FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation). E-mail: vellkom@list.ru

Aleksey S. VASIL'EV (Candidate of Technical Sciences, Sholem Aleichem Amur State University, Birobidzhan, Russian Federation). E-mail: vasil-grunt@mail.ru

Vitaliy L. ZEMLYAK (Candidate of Physics and Mathematics, Sholem Aleichem Amur State University, Birobidzhan, Russian Federation). E-mail: vellkom@list.ru

Konstantin I. IPATOV (Sholem Aleichem Amur State University, Birobidzhan, Russian Federation). E-mail: ipatov21@mail.ru

REFERENCES

1. Bychkovskiy N.N., Gur'yanov Yu.A. (2005) *Ledovye stroitel'nye ploshchadki, dorogi i perepravy* [Ice construction sites, roads, and ferries]. Saratov.
2. Lu W.J., Lubbad R., Loset S. (2015) Out-of-plane failure of an ice floe: radial-crack-initiation-controlled fracture. *Cold Regions Science and Technology*. 119. pp. 183–203. DOI: 10.1016/j.coldregions.2015.08.009.
3. Renshaw C.E., Schulson E.M., Sigward S.J.G. (2017) Experimental observation of the onset of fracture percolation in columnar ice. *Geophysical Research Letters*. 44(4). pp. 1795–1802. DOI: 10.1002/2016 GL071919.
4. Tippmann J.D., Kim H., Rhymer J.D. (2013) Experimentally validated strain rate dependent material model for spherical ice impact simulation. *International Journal of Impact Engineering*. 57. pp. 43–54. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2013.01.013.
5. Common house needs 218.010-1998. (1998) *Instruktsiya po proektirovaniyu, stroitel'stvu i ekspluatatsii ledovykh pereprav* [Instruction on the design, construction, and operation of ice crossings]. SoyuzdornII Gosstroy Rossii.
6. Yakimenko O.V., Sirotyuk V.V. (2015) *Usilenie ledovykh pereprav geosinteticheskimi materialami* [Strengthening of ice crossings by geosynthetic materials]. Omsk.
7. Yakimenko O.V., Sirotyuk V.V. (2014) Reinforcement of ice crossings. *Earth's Cryosphere*. 18(1). pp. 88–91.
8. Sirotyuk V.V., Yakimenko O.V., Levashov G.M., Zakharenko A.A. (2016) Reinforcement of ice cover with geosynthetics materials. *Earth's Cryosphere*. 20(3). pp. 86–94.
9. Nikitin P.E., Nikitina M.P. (2015) *Sposob sozdaniya armirovannoy ledovoy perepravy dlya shirokikh vodoemov* [The method of creating a reinforced ice crossing for wide reservoirs]. Patent for invention of the Russian Federation No. 2569694.
10. Kostenko A.V., Serdechnyy A.S., Serdechnyy A.A. (2005) *Ledyanaya pereprava* [Ice crossing]. Patent for the invention of the Russian Federation No. 2260648.
11. Zemlyak V.L., Kozin V.M., Vasil'ev A.S., Ipatov K.I. (2019) Experimental and numerical investigations of the influence of reinforcement on the load-carrying capacity of ice crossings. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 56(1). pp. 37–43. DOI: 10.1007/s11204-019-09566-x.
12. Kozin V.M., Zemlyak V.L., Vasilyev A.S., Ipatov K.I. (2018) The research of the stressed strain state of ice beams reinforced by surface reinforcement. *Proceedings of the Twenty-eighth International Ocean and Polar Engineering Conference 2013*. pp. 1511–1515.
13. Kozin V.M., Zemlyak V.L., Vasilyev A.S., Ipatov K.I. (2018) Experimental and numerical research of the stressed-deformed state of ice beams reinforced by surface reinforcement. *IOP Conf. Series: Earth and Environment*. 193(012031). DOI: 10.1088/1755-1315/193/1/012031.
14. Willam K.J., Warnke K.J. (1974) Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Seminar of Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*. 19. pp. 3–11.
15. Bazant Z.P., Cedolin L. (1980) Fracture mechanics of reinforced concrete. *Journal of the Engineering Mechanics*. ASCE. pp. 1287–1306.

Received: August 27, 2018

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/7

В.Н. Кузнецова

ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАБОЧЕГО ОРГАНА ЗЕМЛЕРОЙНОЙ МАШИНЫ С МЕРЗЛЫМ ГРУНТОМ

Представлены методика проведения и анализ результатов экспериментальных исследований по определению аналитических зависимостей и численных значений коэффициентов, входящих в математическую модель контактного взаимодействия рабочих органов землеройных машин с мерзлым грунтом. Моделирование процесса проводилось с целью учета физико-механических свойств мерзлых грунтов и установления нелинейности характера распределения напряжений на контактной поверхности рабочего органа. В результате проведенных исследований раскрыта сущность протекающих явлений, что позволяет обосновать конструктивные параметры рабочих органов и технологические параметры процесса разработки мерзлых грунтов землеройными машинами.

Ключевые слова: мерзлый грунт, рабочий орган, землеройная машина, прочность, напряжение, энергоемкость.

Одним из дорогостоящих и энергозатратных видов земляных работ, производимых землеройными или землеройно-транспортными машинами, является разработка мерзлых или сезонно-промерзающих грунтов. Такие виды работ осуществляются при добыче полезных ископаемых арктического шельфа, освоении Севера России, развитии транспортной инфраструктуры, реализации строительных и производственных проектов. Отказы в работе используемой техники, в том числе и в результате износа деформации рабочих органов землеройных машин, приводят к значительным экономическим потерям, вынужденному простою машин и оборудования [1–15].

Основные аспекты математической модели

Нормальная составляющая силы сопротивления мерзлого грунта разработке определяется как поверхностный интеграл

$$N = \iint_{\sigma} p_0 P(x) Q(y) d\sigma, \quad (1)$$

где σ – площадь контактной поверхности рабочего органа землеройных машин; p_0 – величина нормального давления, действующего на элементарную площадку лобовой поверхности рабочего органа; $P(x)$, $Q(y)$ – характеристические нормированные функции, описывающие закономерности распределения давления по поверхности рабочего органа землеройных машин в продольной XOZ и поперечной YOZ плоскостях соответственно (рис. 1).

На процесс разрушения мерзлых грунтов в значительной мере влияют их физико-механические свойства (плотность, влажность, температура, льдистость, механическая прочность и др.) [17–22]. Они определяют не только характер распределения функций $P(x)$, $Q(y)$, но и величину p_0 .

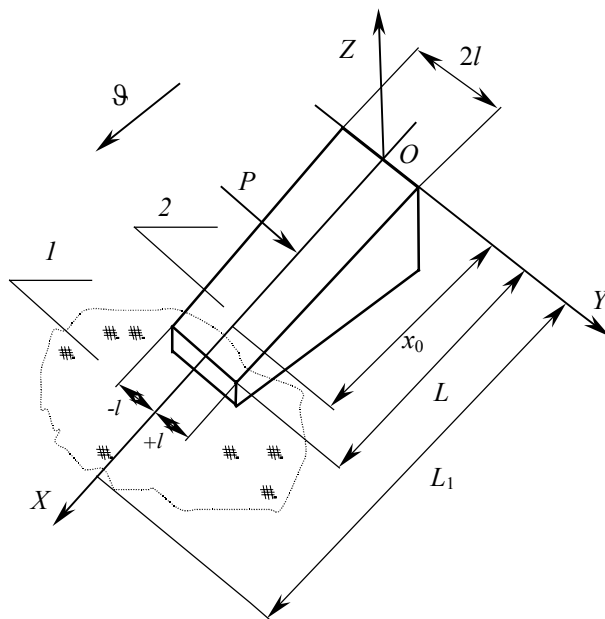


Рис. 1. Расчетная схема взаимодействия плоской контактной поверхности рабочего органа землеройной машины с мерзлым грунтом: 1 – мерзлый грунт; 2 – рабочий орган землеройной машины

Fig. 1. Computational diagram for interaction of the flat contact surface of the working body of digging machine with a frozen soil: 1, frozen soil and 2, a working body of digging machine

Значение p_0 изменяется по поверхности рабочего органа землеройных машин в зависимости от физико-механических свойств разрабатываемого грунта и режимов разработки [23–25] от минимального значения $p_0^{\min}$ до величины, численно равной максимальному значению сопротивления грунтов сжатию $[\sigma_g]$:

$$p_0^{\min} \leq p_0 \leq [\sigma_g]. \quad (2)$$

Распределение давления, действующего на поверхность рабочего органа землеройных машин по его ширине в поперечной его движению плоскости, можно представить в виде [26]

$$Q(y) = \frac{1 + ay^2}{\left(1 + \frac{a}{a+2}y^2\right)^2}, \quad (3)$$

где a – коэффициент, определяемый из начальных условий.

Характер изменения функции распределения давлений в продольной плоскости $P(x)$ имеет нелинейный характер и подчиняется зависимости

$$P(x) = \left[1 + 2a_2 \cdot a_3 \cdot x \cdot e^{-a_3 x^2}\right], \quad (4)$$

где a_2, a_3 – коэффициенты пропорциональности, зависящие от физико-механических свойств разрабатываемого мерзлого грунта и режимов рыхления.

Исходя из условий глобального максимума функций, нормируем функцию $P(x)$:

$$P^*(x) = \frac{P(x)}{P^{\max}(x)} = \frac{P(x)}{p_0}, \quad (5)$$

где $P^*(x)$ – нормированная функция $P(x)$, $P^*(x) < 0 < 1$; $P^{\max}(x)$ – значение функции $P(x)$ в точке глобального максимума при $x_0 = x_{\max}^g$.

После ряда преобразований зависимость (1) преобразуется в следующий вид:

$$N = \iint_{\sigma} P(x, y) dx dy = \frac{1}{P^{\max}(x)} \iint_{\sigma} P(x) Q(y) dx dy. \quad (6)$$

Далее возникает необходимость в экспериментальном определении коэффициентов, входящих в основные зависимости представленной выше математической модели и подтверждения ее адекватности.

Экспериментальные исследования

Разработана программа и методика проведения экспериментальных исследований с использованием специально созданных экспериментальной установки и модели рабочего органа землеройной машины (рис. 2).

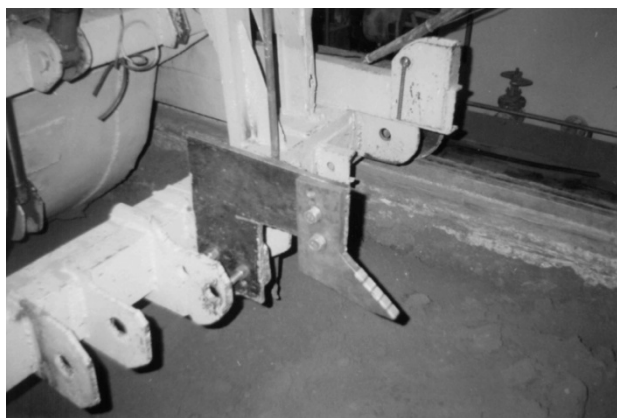


Рис. 2. Экспериментальная установка с моделью рабочего органа

Fig. 2. Experimental setup with a working body model

На подвижной тележке грунтового канала закрепляется экспериментальная модель рабочего органа землеройной машины (модель зуба рыхлителя мерзлых грунтов). Модель представляет собой металлическую конструкцию, в которой по всей длине режущей кромки выфрезерованы 5 канавок размером 20×20 мм. В каждой канавке высверлено по четыре сферических углубления, в которых размещены на одном уровне стальные шарики. В канавки модели зуба помещаются сменные элементы (алюминиевые пластины), которые при проведении эксперимента с одной стороны опираются на четыре шарика, а с другой – контактируют с разрабатываемым грунтом. Аллюминиевые пластины в данном эксперименте являются индикаторами сил воздействия грунта на рабочий орган (рис. 3). В качестве модели мерзлого грунта использовался предварительно замороженный супесчаный грунт, размещенный в металлическом коробе.

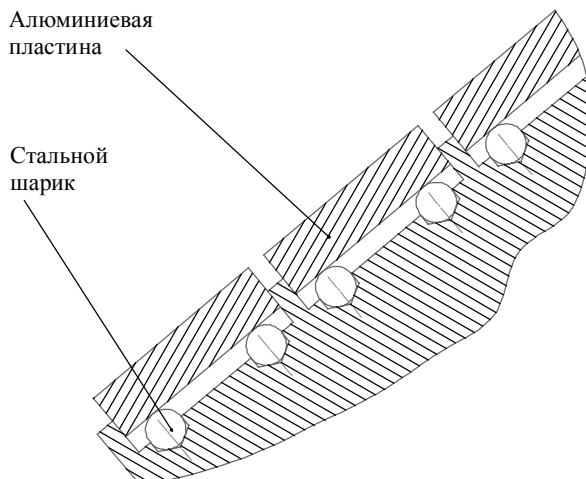


Рис. 3. Экспериментальные пластины с шариками

Fig. 3. Experimental plates with balls

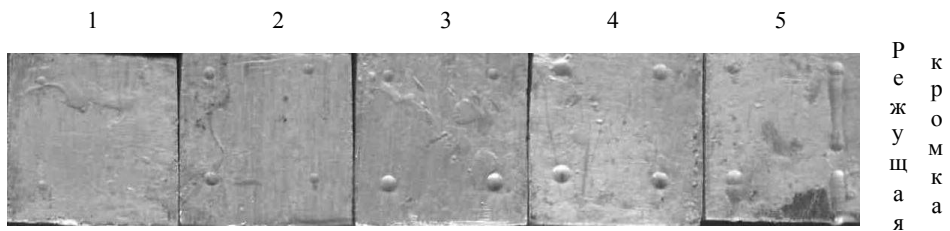
При передвижении подвижной тележки в грунтовом канале экспериментальный зуб внедрялся в грунт (рис. 4). При этом металлические шарики вдавливались в алюминиевые пластины, оставляя на последних отпечатки определенного диаметра.



Рис. 4. Процесс внедрения экспериментального зуба в мерзлый грунт

Fig. 4. Introducing of experimental tooth into the frozen soil

Следующей задачей являлось определение величины силы, возникающей при рыхлении мерзлого грунта по всей длине рабочей поверхности экспериментального зуба по пятну контакта на алюминиевой пластине от шариков (рис. 5). Для этого были замерены диаметры отпечатков шариков на пластинах. Результаты замеров показаны в табл. 1 [26].



Р
е
ж
у
щ
а
я

Рис. 5. Пластины с отпечатками
Fig. 5. Plates with impressions

Таблица 1

Диаметры отпечатков на пластинах экспериментального зуба

Номер пластины	1	2	3	4	5
Диаметр отпечатка d , мм	0.8	1	2	2	1.25

Соотношение Герца [27] для определения величин сил внедрения независимых внедряемых сфер при упругом контакте выглядит следующим образом:

$$Q_s = \frac{4}{3} r^{1/2} \eta^{3/2} E N_c / (1 - \nu^2), \tag{7}$$

где r – радиус сферического выступа; η – перемещение под отдельным выступом; N_c – количество внедряемых сферических выступов; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно.

Для получения аппроксимирующей зависимости между величиной силы рыхления мерзлого грунта и диаметром пятна контакта на алюминиевой пластине с помощью лабораторного комплекса ЛКСМ-1К (рис. 6) были проведены следующие лабораторные замеры [28].

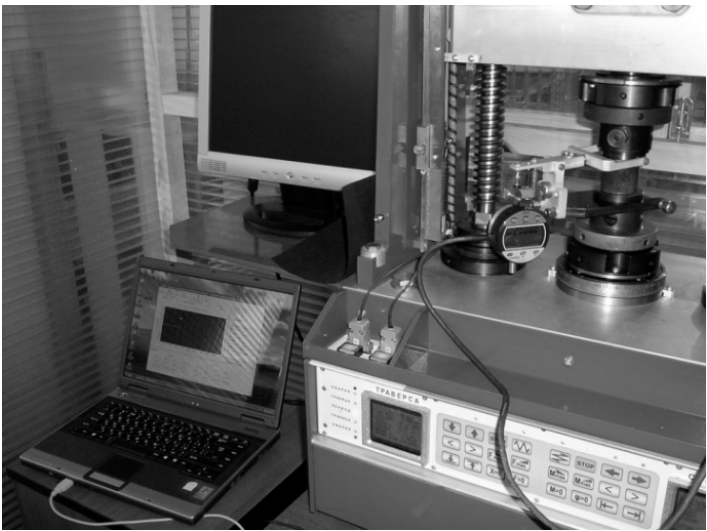


Рис. 6. Лабораторный комплекс ЛКСМ-1К
Fig. 6. Laboratory facility LKSM-1K

Экспериментальные шарики вдавливались в алюминиевые пластины под действием заранее известной величины силы Q_s , создаваемой вертикальным перемещением traversы лабораторного комплекса. После этого определялись диаметры отпечатков пятен контактов шариков с пластинами. На одном отпечатке определялись два взаимно перпендикулярных диаметра d_1 и d_2 .

Полученные в результате замеров экспериментальные данные были подвергнуты математической обработке. Таким образом, были получены регрессионная зависимость величины силы Q_s от диаметра отпечатка экспериментального шарика и график экспериментальных данных и результатов их обработки (рис. 7):

$$Q_s = b_1 d^2, \quad (8)$$

где b_1 – коэффициент пропорциональности ($b_1 = 298.45$); d – диаметр отпечатка шарика.

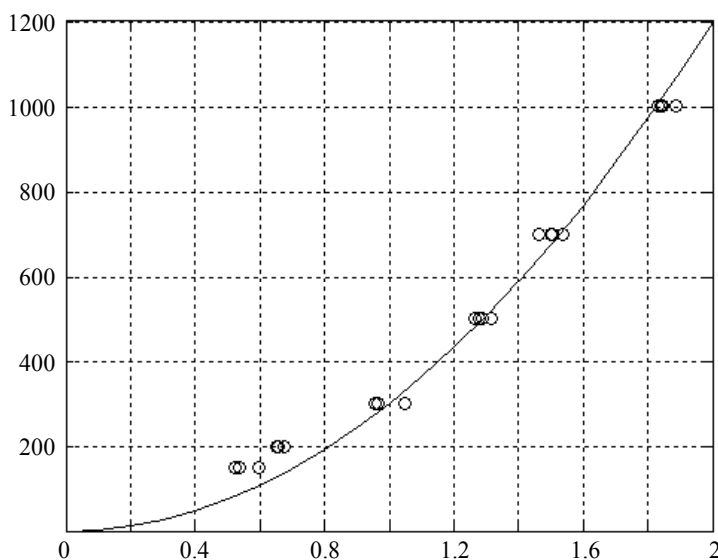


Рис. 7. Сравнительные графики теоретической регрессионной зависимости (линия) и экспериментальных данных (точки) $Q_s = f(d)$

Fig. 7. Comparative graphs for theoretical regression dependence (the solid line) and experimental data (the circles) $Q_s = f(d)$

Анализ графика (рис. 7) и регрессионной зависимости (8) показывает, что коэффициент b_1 имеет ярко выраженный физический смысл: он пропорционален удельному сопротивлению, оказываемому пластиной при внедрении экспериментального шарика. Величина b_1 является постоянной и может быть найдена из выражения

$$P = \frac{4b_1}{\pi} = 380 \text{ [МПа]}, \quad (9)$$

где P – сила сопротивления рыхлению мерзлого грунта (см. рис. 1).

Для нахождения следующих экспериментальных значений используем выражение для определения значения нормального усилия на рабочий орган землеройных машин, полученное с учетом зависимостей (1), (3), (4):

$$\begin{aligned}
 N &= \iint_{\sigma} p_0 P(X) Q(Y) dx dy = \\
 &= Ll \int_{-1}^{+1} dy \int_0^x \frac{(1+ay^2)}{\left(1+\frac{a}{a+2}y^2\right)^2} a_1 \left[1+2a_2a_3xe^{-a_3x^2}\right] dx,
 \end{aligned} \quad (10)$$

где L, l – длина и полуширина рабочего органа землеройных машин соответственно; X, Y – абсолютные координаты произвольной точки поверхности рабочего органа землеройных машин; x, y – относительные координаты точек поверхности рабочего органа землеройных машин.

В результате преобразований получим

$$N = a_1 \left[x + a_2 \left(1 - e^{-a_3 x^2} \right) \right] Ll k_y, \quad (11)$$

где

$$k_y = \frac{1}{2}(a+2) \left[2a \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{(a+2)a}} + 6 \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{(a+2)a}} - \sqrt{(a+2)a} \right] / \sqrt{(a+2)a}. \quad (12)$$

Для каждого значения абсциссы X (координаты центра тяжести пластины) экспериментально определены значения суммарной нормальной силы, действующей на рабочий орган землеройных машин (табл. 2).

Таблица 2

**Значения суммарной нормальной силы по длине экспериментальной модели
рабочего органа землеройных машин**

$X, \text{ м}$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$N, \text{ Н}$	764	1978	6733	11508	133743

Так как значение параметра a зависит от геометрических размеров рабочего органа землеройных машин и для заданных условий проведения эксперимента неизвестно, то задаемся значениями a в интервале $[0; 20]$ и находим $P^{\max}$. При этом учитываем, что уравнение для определения величины давления в произвольной точке рабочего органа может быть представлено в следующем виде:

$$p = a_1 \left[1 + 2a_2 a_3 x e^{0.5} \right] \frac{(1+ay^2)}{(1+by^2)^2}, \quad (13)$$

где $a_1 = p_0$.

Максимальное значение давления на рабочем органе землеройных машин достигается при глобальном максимуме функций $P(x), Q(y)$ в точках с координатами $x = x_{\max}^g, y = \pm l$.

Значение $x_{\max}^g$ находится приравниванием дифференциала функции (4) нулю:

$$\frac{dP(x)}{dx} = 2a_2 a_3 e^{-a_3 x^2} (1 - 2a_3 x^2) = 0. \quad (14)$$

Откуда следует, что

$$x_{\max}^g = \sqrt{\frac{1}{2a_3}}. \quad (15)$$

Максимальное значение давления грунта на экспериментальный зуб найдем из зависимости

$$p_{\max} = a_1 \left[1 + 2 a_2 a_3 \sqrt{\frac{1}{2a_3}} e^{0.5} \right] \frac{1(a+2)^2}{4(a+1)}. \quad (16)$$

Из графика зависимости $p_{\max} = f(a)$ (рис. 8) находим значение коэффициента $a = 1$, зная предел прочности мерзлого грунта на сжатие (для мерзлого песка $[\sigma_g] = 10$ МПа).

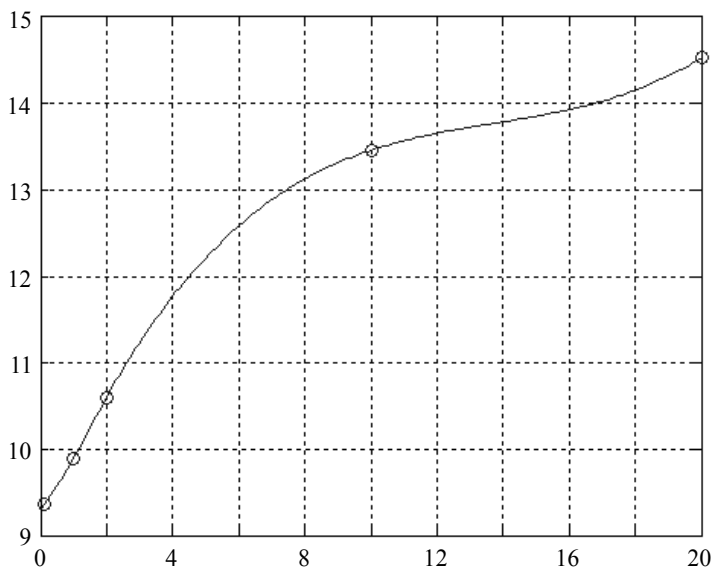


Рис. 8. График зависимости $p_{\max} = f(a)$
Fig. 8. Dependency diagram for $p_{\max} = f(a)$

Задавая значение коэффициента a , определяем значения коэффициентов a_1 , a_2 , a_3 , входящих в выражения (13) – (16), путем аппроксимации этой зависимости данных табл. 2. Аппроксимация проведена с помощью встроенной в программный продукт «MathLab» функции «*lsqcurvefit*». При известном значении параметра a «*lsqcurvefit*» определяет вектор $[a_1 \ a_2 \ a_3]$. Соответствующие найденному значению коэффициента $a = 1$ величины остальных коэффициентов равны: $a_1 = 1.58 \cdot 10^5$ Па, $a_2 = 63.56$, $a_3 = 1.01$. Следует отметить, что значение $a_1 = 1.58 \cdot 10^5$ Па для данного эксперимента соответствует минимальному значению давления в верхней точке контакта. Значения a_2 , a_3 справедливы для мерзлого песчаного грунта.

Анализ теоретических и экспериментальных исследований

В результате проведенных исследований и с учетом экспериментально полученных значений коэффициентов, входящих в математическую модель, установлено графическое изображение пространственной эпюры распределения напряжений по контактной поверхности рабочего органа землеройной машины при разработке мерзлого грунта (рис. 9).

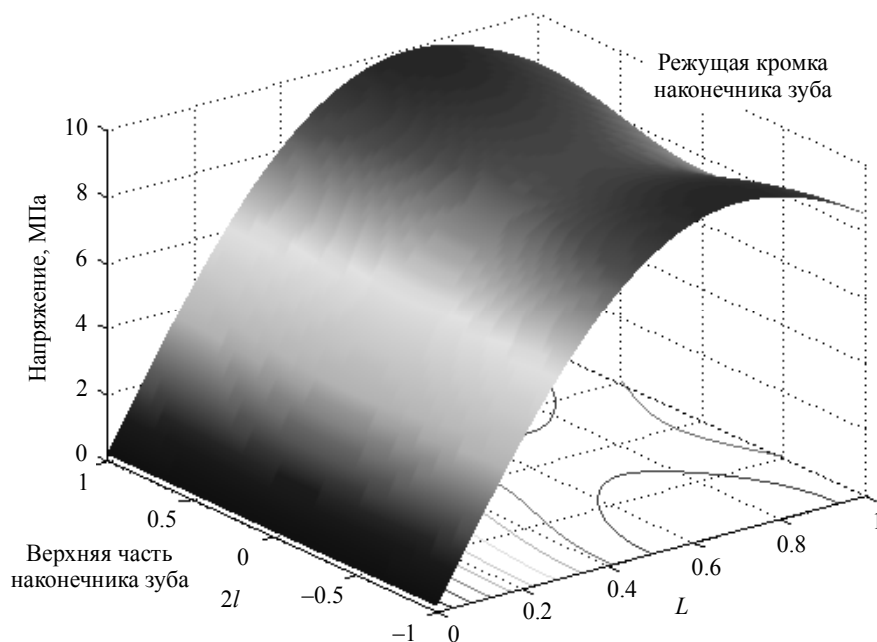


Рис. 9. Пространственная эпюра распределения напряжений по поверхности рабочего органа землеройной машины при взаимодействии с мерзлым грунтом

Fig. 9. Three-dimensional diagram for stress distribution over the surface of the working body of digging machine when interacting with frozen soil

Анализ эпюры подтверждает адекватность теоретических исследований (погрешность составляет 6–8 %) и позволяет с большой достоверностью определить значения глобального максимума функций распределения напряжений на контактной поверхности рабочего органа землеройных машин. Зоны глобального максимума находятся выше режущей кромки по длине и смещены к крайним точкам профиля лобовой поверхности рабочего органа землеройных машин. Доказано, что координаты нахождения зон глобального максимума зависят от физико-механических свойств разрабатываемого грунта, условий его разработки, параметров рабочего органа землеройных машин. Необходимо стремиться к снижению напряжений именно в этих зонах рабочего органа путем конструктивного его усиления.

Заключение

Проведенные экспериментальные исследования по физическому моделированию процесса взаимодействия рабочего органа землеройных машин с мерзлым грунтом позволили адаптировать теоретические исследования к реальным условиям эксплуатации и режимам работы техники, установить значения коэффициентов, входящих в математическую модель процесса взаимодействия рабочих органов землеройных машин с мерзлым грунтом. Полученное графическое изображение пространственной эпюры распределения напряжений по длине рабочего органа землеройных машин согласуется с аналитическими зависимостями распределения напряжений по контактной поверхности их рабочего органа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вялов С.С. Реология мерзлых грунтов. М.: Стройиздат, 2000. 464 с.
2. Baker D.G., Ruschy D.L. Calculated and Measured Air and Soil Freeze-Thaw Frequencies // American Meteorological Society. 1995. V. 34. No. 10. P. 2197–2205. DOI: [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0450\(1995\)034<2197:CAMAAS>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0450(1995)034<2197:CAMAAS>2.0.CO;2).
3. Atkinson J. The Mechanics of Soils and Foundations. CRC Press, 2007. 448 p.
4. Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов: общая и прикладная. М.: Строительство, 2013. 448 с.
5. Zhu Y. Constitutive relations of frozen soil in uniaxial compression // J. Glaciology and Geocryology. 1992. No. 3. P. 216–220.
6. Роман Л.Д. Механика мерзлых грунтов. М.: Наука-Интерпериодика, 2002. 426 с.
7. Li Q. Development of frozen soil model // Advances in Earth Science. 2006. No. 12. P. 96–103.
8. Sun X. АСТ–timely experimental study on meso-scopic structural damage development of frozen soil under triaxial shearing // Rock and Soil Mechanics. 2005. No. 8. P. 150–163.
9. Баловнев В.И. Моделирование и прогнозирование процессов взаимодействия машин с многофазными средами: взаимодействие рабочих органов строительных, дорожных и коммунальных машин с грунтом и другими материалами. М.: МАДИ, 2000. 61 с.
10. Баловнев В.И., Нгуен З.Ш. Определение сопротивлений при разработке грунтов рыхлителем по интегральному показателю прочности // Строительные и дорожные машины. 2005. № 3. С. 38–40.
11. Ветров Ю.А. Резание грунтов землеройными машинами. М.: Машиностроение, 1971. 357 с.
12. Желудкевич Р.Б. Разработка мерзлых грунтов землеройными машинами с дисковым инструментом. Красноярск: СФУ, 2012. 194 с.
13. Talalay P.G. Subglacial till and bedrock drilling // Cold Regions Science and Technology. 2013. V. 86. P. 142–166.
14. Лецинер В.Б. Совершенствование инструмента для резания мерзлых грунтов. Томск: Изд-во Томского университета, 1991. 210 с.
15. Евдокимов А.Н., Васильев С.И., Жубрин В.Г. Аналитическое определение силы сопротивления внедрению инструмента в мерзлый грунт // Системы. Методы. Технологии. 2011. № 11. С. 115–118.
16. Завьялов А.М., Завьялов М.А., Кузнецова В.Н. Взаимодействие дорожных и строительных машин с контактной средой. Омск: КАН, 2011. 370 с.
17. Мартюченко И.Г. Машины и оборудование для разработки и бурения мерзлых грунтов. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2009. 101 с.
18. Растегаев И.К. Механика и теплофизика статистического рыхления вечномерзлых грунтов. Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1988. 222 с.
19. Liu X., Liu P. Experimental research on the compressive fracture toughness of wing fracture of frozen soil // Cold Regions Science and Technology. 2011. V. 65. P. 421–428.
20. Ryabets N., Kirzhner F. Weakening of frozen soils by means of ultra-high frequency energy // Cold Regions Science and Technology. 2003. V. 36. P. 115–128.
21. Васильев С.И. Вероятностные физико-механические характеристики грунтов Восточно-Сибирского региона // Транспортное строительство. 2013. № 3 (19). С. 28–30.
22. Недорезов И.А. Вариации прочности грунтов, разрабатываемых в строительстве // Транспортное строительство. 2013. № 8. С. 29–30.
23. Рахматуллин Х.А., Сагомонян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. М.: МГУ, 1964. 124 с.
24. Зеленин А.Н., Баловнев В.И., Керов И.П. Машины для земляных работ. М.: Машиностроение, 1975. 420 с.
25. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 214 с.
26. Кузнецова В.Н. Развитие научных основ взаимодействия контактной поверхности рабочих органов землеройных машин с мерзлыми грунтами: дис... д-ра техн. наук. Омск, 2009. 259 с.

27. Горячева И.Г. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 252 с.
28. Завьялов А.М., Завьялов М.А., Кузнецова В.Н., Мецераков В.А. Математическое моделирование рабочих процессов дорожных и строительных машин: имитационные и адаптивные модели. Омск: СибАДИ, 2012. 411 с.

Статья поступила 02.08.2018 г.

Kuznetsova V.N. (2019) PHYSICAL MODELING OF THE CONTACT INTERACTION BETWEEN WORKING BODY OF DIGGING MACHINE AND FROZEN SOIL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 70–81

DOI 10.17223/19988621/61/7

Keywords: frozen soil, working body, digging machine, strength, tension, energy intensity.

The methodology for experimental studies and the analysis of the obtained results intended to determine the analytical dependencies and numerical values of the coefficients in a mathematical model of the contact interaction of working body of digging machine with a frozen soil are presented. Modeling of the process was aimed to take into account the physical and mechanical properties of the frozen soils and to determine a nonlinear behavior of the stress distribution over the contact surface of working body. As a result of the research, the main principles of the processes were revealed, which allowed one to validate both the design parameters of the working bodies and the technological parameters of the frozen soil excavation by digging machines.

Viktoriya N. KUZNETSOVA (Doctor of Technical Sciences, Siberian State Automobile and Highway University, Omsk, Russian Federation). E-mail: dissovetsibadi@bk.ru

REFERENCES

1. Vyalov S.S. (2000) *Reologiya merzlykh gruntov* [Rheology of frozen soils]. Moscow: Stroyizdat.
2. Baker D.G., Ruschy D.L. (1995) Calculated and measured air and soil freeze-thaw frequencies. *American Meteorological Society*. 34(10). pp. 2197–2205. DOI: 10.1175/1520-0450(1995)034<2197:CAMAAS>2.0.CO;2.
3. Atkinson J. (2007) *The Mechanics of Soils and Foundations*. CRC Press.
4. Tsytoich N.A. (2013) *Mekhanika merzlykh gruntov: obshchaya i prikladnaya* [Mechanics of frozen soils: general and applied]. Moscow: Stroitel'stvo.
5. Zhu Y. (1992) Constitutive relations of frozen soil in uniaxial compression. *Journal of Glaciology and Geocryology*. 3. pp. 216–220.
6. Roman L.D. (2002) *Mekhanika merzlykh gruntov* [Mechanics of frozen soils]. Moscow: Nauka-Interperiodika.
7. Li Q. (2006) Development of frozen soil model. *Advances in Earth Science*. 12. pp. 96–103.
8. Sun X. (2005) CT–timely experimental study on meso-scopic structural damage development of frozen soil under triaxial shearing. *Rock and Soil Mechanics*. 8. pp. 150–163.
9. Balovnev V.I. (2000) *Modelirovanie i prognozirovanie protsessov vzaimodeystviya mashin s mnogofaznymi sredami: vzaimodeystvie rabochikh organov stroitel'nykh, dorozhnykh i kommunal'nykh mashin s gruntom i drugimi materialami* [Modeling and forecasting of the processes of interaction between machines and multiphase media: interaction of the working bodies of construction, road, and utility machines with soil and other materials]. Moscow: MADI.
10. Balovnev V.I., Nguen Z.Sh. (2005) *Opredelenie soprotivleniy pri razrabotke gruntov rykhlytem po integral'nomu pokazatelyu prochnosti* [Determination of resistance during the excavation of soil by a ripper on the basis of the integral indicator of strength]. *Stroitel'nye i dorozhnye mashiny*. 3. pp. 38–40.
11. Vetrov Yu.A. (1971) *Rezanie gruntov zemleroynymi mashinami* [Soil cutting by earth-moving machines]. Moscow: Mashinostroenie.

12. Zhelukevich R.B. (2012) *Razrabotka merzlykh gruntov zemleroynymi mashinami s diskovym instrumentom* [Excavation of frozen soils by earth-moving machines equipped with disc tools]. Krasnoyarsk: SFU.
13. Talalay P.G. (2013) Subglacial till and bedrock drilling. *Cold Regions Science and Technology*. 86. pp. 142–166.
14. Leshchiner V.B. (1991) *Sovershenstvovanie instrumenta dlya rezaniya merzlykh gruntov* [Improving of the tools for a frozen soil cutting]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
15. Evdokimov A.N., Vasil'ev S.I., Zhubrin V.G. (2011) Analiticheskoe opredelenie sily soprotivleniya vnedreniyu instrumenta v merzlyy grunt [Analytical determination of the force of resistance to the introduction of tool into the frozen soil]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii*. 11. pp. 115–118.
16. Zav'yalov A.M., Zav'yalov M.A., Kuznetsova V.N. (2011) *Vzaimodeystvie dorozhnykh i stroitel'nykh mashin s kontaktnoy sredoy* [Interaction of road and construction machines with a contact environment] Omsk: KAN.
17. Martyuchenko I.G. (2009) *Mashiny i oborudovanie dlya razrabotki i bueniya merzlykh gruntov* [Machines and equipment for the excavation and drilling of frozen soils]. Saratov: Saratovskiy gosudarstvennyy tekhnicheskii universitet.
18. Rastegaev I.K. (1988) *Mekhanika i teplofizika statisticheskogo rykhleniya vechnomerzlykh gruntov* [Mechanics and thermal physics of the statistical loosening of permafrost soils]. Krasnoyarsk: Izdatel'stvo Krasnoyarskogo universiteta.
19. Liu X., Liu P. (2011) Experimental research on the compressive fracture toughness of wing fracture of frozen soil. *Cold Regions Science and Technology*. 65. pp. 421–428.
20. Ryabets N., Kirzhner F. (2003) Weakening of frozen soils by means of ultra-high frequency energy. *Cold Regions Science and Technology*. 36. pp. 115–128.
21. Vasil'ev S.I. (2013) Veroyatnostnye fiziko-mekhanicheskie kharakteristiki gruntov Vostochno-Sibirskogo regiona [Probabilistic physical and mechanical characteristics of soils in the East-Siberian region]. *Transportnoe stroitel'stvo*. 3 (19). pp. 28–30.
22. Nedorezov I.A. (2013) Variatsii prochnosti gruntov, razrabatyvaemykh v stroitel'stve [Variety of the strength of soils excavated in construction]. *Transportnoe stroitel'stvo*. 8. pp. 29–30.
23. Rakhmatullin Kh.A., Sagomonyan A.Ya., Alekseev N.A. (1964) *Voprosy dinamiki gruntov* [Ground dynamics issues]. Moscow: MGU.
24. Zelenin A.N., Balovnev V.I., Kerov I.P. (1975) *Mashiny dlya zemlyanykh rabot* [Earth-moving machines]. Moscow: Mashinostroyeniye.
25. Sokolovskiy V.V. (1960) *Statika sypuchey sredy* [Statics of flowing medium]. Moscow: Fizmatgiz.
26. Kuznetsova V.N. (2009) *Razvitie nauchnykh osnov vzaimodeystviya kontaktnoy poverkhnosti rabochikh organov zemleroynykh mashin s merzlymi gruntami* [Development of scientific principles of the interaction of the contact surface of working bodies of earth-moving machines with frozen soils]. Dissertation. Omsk.
27. Goryacheva I.G. (1988) *Kontaktnye zadachi v tribologii* [Contact problem in tribology]. Moscow: Mashinostroyeniye.
28. Zav'iylov A.M., Zav'yalov M.A., Kuznetsova V.N., Meshcheryakov V.A. (2012) *Matematicheskoe modelirovaniye rabochikh protsessov dorozhnykh i stroitel'nykh mashin: imitatsionnye i adaptivnye modeli* [Mathematical modeling of road and construction machinery workflows: simulating and adaptive models]. Omsk: SibADI.

Received: August 2, 2018

УДК 004.94

DOI 10.17223/19988621/61/8

М.С. Павлов, А.А. Светашков, Н.А. Куприянов**МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФОРМУЛИРОВКА
ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ РАЗДЕЛЕНИЯ
ВРЕМЕННЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Целью настоящей работы является построение итерационных процедур решения краевых задач линейной вязкоупругости для случаев, в которых интегральный оператор, обратный оператору релаксации, либо неизвестен, либо расчет соответствующего ядра сопряжен с вычислительными трудностями. Преимущества использованного подхода состоят в том, что, во-первых, при его применении возможно распараллеливание процессов расчета пространственных и временных компонент напряженно-деформированного состояния, во-вторых, отпадает необходимость интегрирования истории изменения напряжений и перемещений во времени.

Ключевые слова: *линейная вязкоупругость, интегральные операторы, вспомогательные определяющие уравнения, сходимость, итерационный алгоритм.*

Многие конструкционные материалы проявляют вязкоупругие свойства. Чаше всего необходимость учета таких свойств возникает в отношении полимеров и композиционных материалов с полимерной матрицей. Тем не менее вязкоупругие свойства проявляют также и традиционные материалы, например дерево, бетон или стекло. Помимо этого, необходимость учета ползучести и/или релаксации в механически нагруженных телах может возникать в самых разных областях, таких как, например, дорожное строительство, геология, разработка автомобильных шин, биомедицинские исследования [1], аэрокосмические разработки [2] и т.д.

Начало изучения влияния времени на напряженно-деформированное состояние изделий из металлов, резины и стекла положено в конце девятнадцатого – начале двадцатого веков Кельвином, Максвеллом, Больцманом и другими [3]. Максвелл сформулировал закон деформирования с течением времени в дифференциальном виде [4, 5]. Несколько позже разработан Больцманом и развит Вольтерра общий математический аппарат для описания линейной ползучести [4, 6–8]. В связи с развитием индустрии полимерных материалов с начала 30-х годов XX века началось более интенсивное изучение вязкоупругости [1]. К настоящему моменту математический аппарат линейной и нелинейной вязкоупругости в значительной степени разработан. Формулировка определяющих соотношений и методов анализа для вязкоупругих тел содержится в фундаментальных монографиях различных авторов, например [1, 4, 9–15].

Для вязкоупругих тел связь между напряжениями и деформациями описывается с помощью интегральных уравнений Вольтерра, содержащих ядра того или иного вида. На сегодняшний день наиболее популярными являются интегральные ядра ползучести и релаксации в виде суммы убывающих экспонент (рядов Прони) [1, 16–18]. Такой вид ядра позволяет достичь высокой точности анализа путем

аппроксимации большого объема экспериментальных данных за счет увеличения числа слагаемых. Кроме того, представление ядер ползучести и релаксации в виде рядов Прони удобно для программирования при численном анализе.

Построение точных решений для краевых задач напряженно-деформированного состояния вязкоупругого тела возможно только в некоторых простейших случаях. Поэтому при анализе изделий из вязкоупругих материалов главным образом применяются приближенные методы, большинство из которых можно отнести к одной из трех следующих групп. В первую группу входят методы, подразумевающие прямое интегрирование физических уравнений [19, 20], во вторую – использующие замену тем или иным способом вязкоупругой задачи на упругую [21, 22], и третью группу составляют итерационные методы [23–28].

Целью настоящей работы является развитие итерационного метода решения краевых задач напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел, приведенного, в [27, 29]. В основе метода лежит разделение временных и пространственных переменных. Последнее, в свою очередь, позволяет ускорить решение за счет разделения его на два параллельных процесса на этапе постановки задачи.

Формулировка граничной задачи линейной вязкоупругости

В настоящей работе при записи уравнений используется общепринятое положение о суммировании по повторяющимся индексам.

Физические соотношения для изотропного вязкоупругого материала в общем виде можно представить, например, следующим образом:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \theta \delta_{\alpha\beta} + 2 G^* \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно, индексы α , β соответствуют номерам пространственных координат; $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера; $\theta = \varepsilon_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$ – объемная деформация; K^* , G^* – операторы объемной и сдвиговой релаксации соответственно.

$$K^* \theta \equiv \int_0^t K(t-\tau) d\theta(\tau); \quad (2)$$

$$G^* \varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon_{\alpha\beta}(\tau). \quad (3)$$

Здесь $K(t)$, $R(t)$ – функции объемной и сдвиговой релаксации, $R(0) = G_0$, $K(0) = K_0$, где K_0 , G_0 – упругомгновенные модули объемного сжатия и сдвига.

Уравнения равновесия в области и условия на границе

$$\left(K^* + \frac{1}{3} G^* \right) \theta_{,\alpha} + G^* \Delta u_{\alpha} = P_{\alpha}; \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} \big|_{\Gamma_1} = S_{\alpha}^0, \quad u_{\alpha} \big|_{\Gamma_2} = u_{\alpha}^0. \quad (5)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, P_{α} , S_{α}^0 – соответственно массовые и поверхностные силы; n_{β} – направляющие косинусы нормали к границе; Γ_1 , Γ_2 – участки граничного контура, на которых заданы усилия S_{α}^0 и перемещения u_{α}^0 соответственно.

Заменив в вязкоупругой задаче (1), (4), (5) операторы K^* и G^* на специальным образом выбранные константы k и g , получим вспомогательную задачу, в которой

левые части уравнений равновесия и граничных условий соответствуют задаче линейной упругости, тогда как правые содержат слагаемые, определяемые действием вязкоупругих операторов на искомые перемещения. Конкретный вид правых частей вспомогательной задачи зависит от способа определения упругих констант k , g и подчиняется требованию тождественности решений основной и вспомогательной задач. Если правые части уравнений вспомогательной задачи определены, то решение вязкоупругой задачи сводится к решению вспомогательной линейно упругой задачи. Это условие, вообще говоря, не выполняется, так как искомые перемещения находятся в обеих частях уравнений. Однако возможно организовать итерационный процесс, в котором правые части уравнений на текущем шаге вычисляются через решение, полученное на предыдущем. Формулировка и доказательство теоремы о сходимости алгоритмов такого типа имеются в [30]. Скорость сходимости зависит от конкретного вида вспомогательных упругих констант и будет обсуждаться далее.

Формулировка итерационного алгоритма для случая упругих объемных свойств материала

Будем рассматривать случай, когда объемная релаксация отсутствует, то есть $K^* = K_0 = K$. Вспомогательные физические соотношения зададим в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \left(K - \frac{2}{3}g \right) \theta \delta_{\alpha\beta} + 2g \varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Здесь g – некоторый заранее выбранный модуль сдвига для вспомогательного упругого тела. Уравнения равновесия (4), с использованием (6) могут быть записаны в эквивалентном виде:

$$\left(K + \frac{1}{3}G^* \right) \theta_{,\alpha} + G^* \Delta u_{\alpha} + \left(K + \frac{1}{3}g \right) \theta_{,\alpha} + g \Delta u_{\alpha} - \left(K + \frac{1}{3}g \right) \theta_{,\alpha} - g \Delta u_{\alpha} = P_{\alpha}. \quad (7)$$

Или, в отсутствие массовых сил P_{α} ,

$$\left(K + \frac{1}{3}g \right) \theta_{,\alpha} + g \Delta u_{\alpha} = (g - G^*) \left(\frac{1}{3} \theta_{,\alpha} + \Delta u_{\alpha} \right). \quad (8)$$

Правая часть (8) является невязкой основной и вспомогательной задач. Аналогично записываются граничные условия

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 n_{\beta} = S_{\alpha}^0 + \left[(G^* - g) \left(\frac{2}{3} \theta \delta_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta} \right) \right] n_{\beta}. \quad (9)$$

Далее можно записать соотношения для итерационного процесса, снабдив входящие в (8), (9) параметры напряженно-деформированного состояния соответствующими верхними индексами

$$\left(K + \frac{1}{3}g \right) \theta_{,\alpha}^{(n+1)} + g \Delta u_{\alpha}^{(n+1)} = (g - G^*) \left(\frac{1}{3} \theta_{,\alpha}^{(n)} + \Delta u_{\alpha}^{(n)} \right); \quad (10)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(n+1)} n_{\beta} = S_{\alpha}^0 + \left[(G^* - g) \left(\frac{2}{3} \theta^{(n)} \delta_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)} \right) \right] n_{\beta}. \quad (11)$$

Решение исходной задачи определяется как суперпозиция всех $n+1$ решений, полученных на соответствующих итерациях. Начальное приближение может быть выбрано из произвольных соображений.

Следует обратить внимание на то, что в левых частях (10), (11) отсутствуют интегральные операторы. Кроме того, можно показать, что в случае представления каждого из граничных условий исходной вязкоупругой задачи в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от пространственных переменных, а другая – только от времени, в задачах (10), (11) пространственные и временные переменные оказываются разделенными на каждой итерации.

В качестве критерия сходимости авторы предлагают использовать значение функционала работы напряжений на деформациях за время нагружения t :

$$W(\dot{\varepsilon}) = \int_0^t \sigma_{\alpha\beta}(\tau) \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

При практическом решении задач значения производных по времени от компонент тензора деформаций, как правило, неизвестны. При этом, если положить в каждой точке вязкоупругого тела представление $\varepsilon_{\alpha\beta}(t)$ в виде кусочно-постоянной функции

$$\varepsilon(t_m) = \sum_{i=0}^m [h(t_m - t_i) - h(t_m - t_{i+1})] \varepsilon_{\alpha\beta}^i, \quad (13)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^i$ – некоторые постоянные величины, а m – целое число, то значение функционала (12) будет приближенно равно удельной потенциальной энергии деформаций

$$W_0(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \sigma_{\alpha\beta}(t) \varepsilon_{\alpha\beta}(t). \quad (14)$$

Пример реализации алгоритма

Поясним реализацию сформулированного алгоритма на простом примере. Для этого зададим оператор сдвиговой релаксации в виде

$$G^* x \equiv G_0 [1 - \lambda \mathcal{D}_0^* (\lambda + \gamma)] x, \quad (15)$$

где λ, γ – материальные константы; $\mathcal{D}_0^*$ – интегральный оператор вида

$$\mathcal{D}_0^*(\zeta) x \equiv \int_0^t e^{-\zeta(t-\tau)} x(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Оператор невязки правых частей (10), (11) принимает наиболее простой вид, если в качестве вспомогательного модуля сдвига g использовать мгновенный модуль G_0 . Тогда выражения невязок, входящих в (9), будут

$$G^* - g = G^* - G_0 = -\lambda G_0 \mathcal{D}_0^* (\lambda + \gamma). \quad (17)$$

В этом случае уравнения (10), (11) принимают вид

$$\left(K + \frac{1}{3} G_0 \right) \theta_{,\alpha}^{(n+1)} + G_0 \Delta u_{\alpha}^{(n+1)} = \lambda G_0 \mathcal{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(\frac{1}{3} \theta_{,\alpha}^{(n)} + \Delta u_{\alpha}^{(n)} \right); \quad (18)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(n+1)} n_{\beta} = S_{\alpha}^0 + \left[\lambda G_0 \mathcal{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)} - \frac{2}{3} \theta^{(n)} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] n_{\beta}. \quad (19)$$

Также будем считать, что заданные на соответствующих участках границы перемещения всюду нулевые. В этом случае они остаются таковыми на каждой ите-

рации, В свою очередь, силовые граничные условия заданы в виде произведения функций координат на функцию времени:

$$S_{\alpha}^0 = \tilde{S}_{\alpha}^0(x, y) \phi^0(t). \quad (20)$$

В качестве начального приближения будем рассматривать недеформированное состояние, то есть при $n = 0$, $u_{\alpha}^{(0)} = 0$. Тогда

$$\left(K + \frac{1}{3}G_0\right) \theta_{,\alpha}^{(1)} + G_0 \Delta u_{\alpha}^{(1)} = 0; \quad (21)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(1)} n_{\beta} = S_{\alpha}^0. \quad (22)$$

Решение вязкоупругой задачи (21), (22) в силу (20) может быть представлено в виде

$$u_{\alpha}^{(1)} = \tilde{u}_{\alpha}^{(1)} \phi_1, \quad (23)$$

где $\phi_1 = \phi^0(t)$, $\tilde{u}_{\alpha}^{(1)}$ – решение упругой задачи

$$\left(K + \frac{1}{3}G_0\right) \tilde{\theta}_{,\alpha}^{(1)} + G_0 \Delta \tilde{u}_{\alpha}^{(1)} = 0; \quad (24)$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{0(1)} n_{\beta} = \tilde{S}_{\alpha}^0. \quad (25)$$

Таким образом, на первой итерации достигнуто разделение временных и пространственных переменных. На второй итерации необходимо получить решение задачи

$$\left(K + \frac{1}{3}G_0\right) \theta_{,\alpha}^{(2)} + G_0 \Delta u_{\alpha}^{(2)} = \lambda G_0 \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(\frac{1}{3} \theta_{,\alpha}^{(1)} + \Delta u_{\alpha}^{(1)}\right); \quad (26)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(2)} n_{\beta} = \left[\lambda G_0 \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{2}{3} \theta^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] n_{\beta}. \quad (27)$$

Уравнения (26), (27) с учетом (23) представляются в виде

$$\left(K + \frac{1}{3}G_0\right) \theta_{,\alpha}^{(2)} + G_0 \Delta u_{\alpha}^{(2)} = \lambda G_0 \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(\frac{1}{3} \tilde{\theta}_{,\alpha}^{(1)} + \Delta \tilde{u}_{\alpha}^{(1)}\right) \phi_1; \quad (28)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(2)} n_{\beta} = \left[\lambda G_0 \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{2}{3} \tilde{\theta}^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \right) \phi_1 \right] n_{\beta}. \quad (29)$$

Решение граничной задачи (28), (29) может быть найдено как

$$u_{\alpha}^{(2)} = \tilde{u}_{\alpha}^{(2)} \phi_2, \quad (30)$$

где

$$\phi_2 = \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \phi_1. \quad (31)$$

Соответственно $\tilde{u}_{\alpha}^{(2)}$ есть решение упругой задачи, получаемой из (28), (29), так же, как (24), (25) получено из (21), (22). Таким образом, на второй итерации также разделяются на две независимых процедуры операции с пространственными и временными переменными.

Третья и последующие итерации выполняются аналогично. При этом замечательно, что

$$\phi_{n+1} = \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \phi_n = \mathfrak{D}_0^{*n} (\gamma + \lambda) \phi_1. \quad (32)$$

Возведение оператора в степень осуществляется в соответствии с [31] следующим образом:

$$\mathfrak{D}_0^{*n}(\zeta) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \mathfrak{D}_0^*(\zeta)}{\partial \zeta^{n-1}}. \quad (33)$$

В результате искомые параметры напряженно-деформированного состояния находятся как

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} u_\alpha^{(i)}; \quad (34)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha^{(i)}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x_\alpha} \right); \quad (35)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(K - \frac{2}{3} G^* \right) \theta^{(i)} \delta_{\alpha\beta} + 2G^* \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}. \quad (36)$$

Условие останова итерационного процесса можно записать в виде

$$\left| \frac{W_0^{(n+1)} - W_0^{(n)}}{W_0^{(n)}} \right| \leq \mu, \quad (37)$$

где W_0 определяется по (14); μ – некоторое наперед заданное число.

Вычислительная процедура для использования совместно с методом конечных элементов

Для успешного применения предлагаемого в настоящей работе итерационного алгоритма, необходимо на каждой итерации располагать решением упругой задачи. Получить такое решение в общем случае возможно разными способами, однако для практических расчетов наиболее применяемым является метод конечных элементов. При этом чаще всего используются линейные элементы, то есть такие, в которых функция формы элемента является линейной. Коэффициентами этой функции являются значения рассматриваемых параметров в узлах элемента. Также в большинстве случаев решение задачи определения напряженно-деформированного состояния получается вначале в перемещениях, а затем по ним вычисляются компоненты тензоров деформаций и напряжений, для чего необходимо вычислить в каждом узле первые производные функции перемещений по координатам. Однако при использовании предлагаемого итерационного метода, необходимо для определения невязки уравнений равновесия вычислять вторые производные от перемещений. В пределах одного линейного элемента вторая производная от линейной функции формы всегда равна нулю.

Поскольку для реализации алгоритмов метода конечных элементов требуется сравнительно большой объем работ, связанных с программированием, в инженерной практике широкое распространение получили универсальные программные средства для прикладного конечно-элементного анализа. В их число входят как «тяжелые» программные комплексы ANSYS, Abaqus, NX, CalciliX и т.п., так и авторские проекты, например Z88Aurora, или специальные программы, разрабатываемые инженерными коллективами для собственных нужд. В абсолютном большинстве случаев в таком программном обеспечении не предусмотрена процедура

вычисления вторых производных функций формы элемента даже в случае использования конечных элементов высших порядков.

Исходя из сказанного, для реализации сформулированного выше итерационного алгоритма совместно с методом конечных элементов необходимо решить задачу вычисления вторых производных от функций перемещений. Особенную важность этот вопрос приобретает при использовании готового программного обеспечения конечно-элементного анализа. Одним из возможных способов является использование конечно-разностной схемы дифференцирования, однако такой подход влечет за собой ряд неудобств, особенно на нерегулярных сетках. Более рациональным представляется использование схемы дифференцирования, реализованной в используемом программном обеспечении метода конечных элементов. При этом процедуре дифференцирования следует подвергать компоненты деформаций, через которые выражаются невязки уравнений равновесия. Так, выражение под оператором в правой части (10), определяющее величины массовых сил (невязки) в упругих задачах итерационного процесса, записывается через производные от деформаций следующим образом:

$$\frac{1}{3}\theta_{,\alpha} + \Delta u_{\alpha} = \frac{4}{3} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \varepsilon_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + 2 \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (38)$$

Рассмотрим пример решения задачи чистого изгиба консольной балки из вязкоупругого материала, подчиняющегося общему линейному закону деформирования [4]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \left[\sigma(t) + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) K_1(t - \tau) d\tau \right], \quad (39)$$

где t_0 и t соответствуют времени начала нагружения и рассматриваемому моменту; E_0 – мгновенный модуль упругости; $K_1(t - \tau)$ – ядро ползучести.

В случае, когда изгибающий момент может быть представлен в виде

$$M(t) = M_0 \phi_0(t), \quad (40)$$

где M_0 – постоянная, а $\phi_0(t)$ – некоторая функция времени, уравнение прогибов для такой балки запишется следующим образом:

$$w(t) = \frac{M_0 y^2}{2EJ} \left[\phi_0(t) + \int_{t_0}^t K_1(t - \tau) \phi_0(t) d\tau \right] = \frac{M_0 y^2}{2J} E^{*-1} \phi_0(t). \quad (41)$$

Здесь w – величина прогиба; y – координата поперечного сечения, откладываемая от жестко зашпеленного конца; J – осевой момент инерции балки; E^{*-1} – оператор ползучести.

Полагая $t_0 = 0$ и объемную релаксацию отсутствующей, оператор ползучести E^{*-1} представим через заданные G^* , K следующим образом:

$$E^{*-1}x \equiv \left[(3K + G^*) \frac{G^{*-1}}{9K} \right] x = \left[\frac{G^{*-1}}{3} + \frac{1}{9K} \right] x. \quad (42)$$

Следует отметить, что (42) получено вне каких-либо суждений о виде ядра ползучести $K_1(t - \tau)$. Далее, принимая оператор сдвиговой релаксации в виде (15), (16), получим вид оператора G^{*-1} :

$$G^{*-1}x \equiv \frac{1}{G_0} [1 + \lambda \mathfrak{D}_0^*(\gamma)] x. \quad (43)$$

Теперь, для случая статического нагружения, положим функцию $\phi_0(t)$ как функцию Хевисайда, и решение (40) принимает вид

$$w(t) = \frac{M_0 y^2}{6 G_0 J} \left[1 + \frac{\lambda}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \right] + \frac{M_0 y^2}{18 K J}. \quad (44)$$

Последнее выражение является точным решением. Также решение этой задачи получено итерационным методом совместно с методом конечных элементов, реализованным в ANSYS.

При численной реализации в качестве балки рассматривалась квадратная плоская пластина с длиной стороны равной 1. Для удобства принято, что все значения соответствуют системе СИ. Схема нагружения и разбиения на конечные элементы приведена на рис. 1. Момент M_0 и сила F_0 связаны соотношением

$$F_0 = \frac{12 M_0}{l^3}. \quad (45)$$

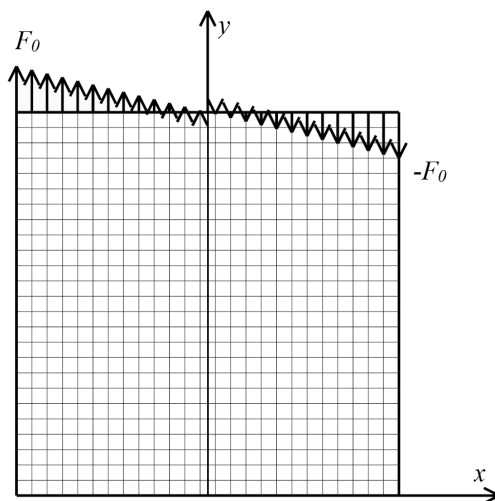


Рис. 1. Схема граничных условий балки
Fig. 1. Diagram of the boundary conditions for a beam

Параметры оператора сдвиговой релаксации вида (11): $G_0 = 6 \cdot 10^8$, $\lambda = 0.002$, $\gamma = 0.009$, объемный модуль $K = 14 \cdot 10^8$, время $t = 1000$. Сравнение численного и аналитического решения проведено по величине перемещения центра пластины, теоретически равной прогибу x , определенному по (38) при $y = 0.5$. На рис. 2 показаны результаты сравнения точного и численных решений, полученных на различных конечно-элементных сетках.

На рис. 3 приведен график сходимости итерационного процесса при разбиении стороны квадрата на 40 элементов. Критерий сходимости $\mu = 10^{-6}$.

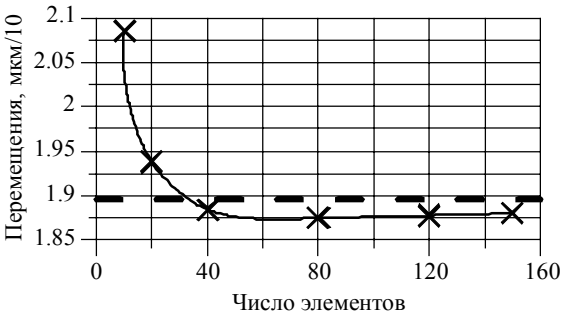


Рис. 2. Зависимость перемещения центральной точки пластины от числа разбиений стороны квадрата (Пунктир – точное решение; крестики – численное решение; сплошная линия – аппроксимация численного решения)

Fig. 2. Displacement of the plate central point as a function of the number of cells on the square side (the dashed line is the analytical solution; the crosses, the numerical solution; and the solid line, the numerical solution approximation)

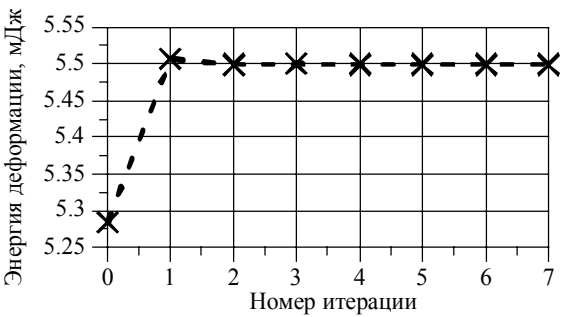


Рис. 3. Зависимость энергии упругой деформации от номера итерации

Fig. 3. Elastic-strain energy as a function of iteration number

Заклучение

Сформулированы соотношения для итерационной процедуры решения задач линейной вязкоупругости на основе использования вспомогательной упругой задачи, в которой механические свойства среды описываются мгновенными упругими характеристиками вязкоупругого тела. Также предложен способ использования алгоритма совместно с методом конечных элементов, при этом для вычисления невязок итерационного алгоритма могут быть использованы процедуры, являющиеся частью программного обеспечения конечно-элементного анализа. Таким образом, возможно применение предлагаемого в работе алгоритма совместно с прикладными программными средствами конечно-элементного моделирования.

Другой важной особенностью приведенной формулировки итерационного алгоритма является возможность определения всех параметров напряженно-деформированного состояния вязкоупругого тела с использованием только оператора релаксации. В том числе при решении задач ползучести.

Апробация алгоритма на модельных задачах показала эффективность предлагаемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lakes R.* Viscoelastic Materials N.Y.: Cambridge University Press, 2009. 461 p. DOI: 10.1017/CBO9780511626722
2. *Pavlov M. et. al.* Mathematical model of composite fibre-glass aramide-wired cord rheological properties // 13th International Conference of Students and Young Scientists on Prospect of Fundamental Sciences Development, PFSD 2016, Tomsk, Russian Federation, 26–29 April 2016. AIP Conference Proceeding. American Institute of Physics, 2016. V. 1772. 6 p. DOI: 10.1063/1.4964582.
3. *Doubal S., Doubal J.* Theory of Viscoelasticity Handbook. Delter, 2014. 81 p.
4. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Издательство литературы по строительству, 1968. 418 с.
5. *Maxwell J.C.I.* On the Dynamical Theory of Gases // Philosophical Transactions. 1867. V. 157. P. 49–88. DOI: 10.1098/rstl.1867.0004.
6. *Boltzman L.* Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung // Wiener Berichte. 1874. V. 70. P. 275–306. DOI: 10.1002/andp.18782411107
7. *Volterra V.* Lecons sur les fonctions de lignes. Paris: Gautierr Villars, 1912. 230 p.
8. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations. London; Glasgow: Blackie & Son Limited, 1930. 226 p.
9. *Адамов А.А. и др.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
10. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. *Reddy J.N.* An Introduction to Continuum Mechanics. N.Y.: Cambridge University Press, 2008. 449 p. DOI: 10.1017/CBO9781139178952.
12. *Pipkin A.C.* Lectures of Viscoelasticity Theory. N.Y.: Springer Verlag, 1986. 181 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1078-8.
13. *Flugge W.* Viscoelasticity. N.Y.: Blaisdell Press, 1967. 187 p.
14. *Cristensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: An Introduction. N.Y.: Academic, 1980. 364 p.
15. *Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г.* Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Высшая школа, 1983. 239 с.
16. *Schapery R.A.* On the characterization of nonlinear viscoelastic materials // Polymer Engineering and Science. 1969. V. 9. No. 4. P. 295–310. DOI: 10.1002/pen.760090410.
17. *Tang Y., Li T., Ma X.* Creep and recovery behavior analysis of space mesh structures // Acta Astronautica. 2016. No. 128. P. 455–463. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.08.003.
18. *Kwok K., Pellegrino S.* Micromechanics Models for Viscoelastic Plain-Weave Composite Tape Springs // AIAA Journal. 2017. V. 55. No 1. P. 309–321. DOI: 10.2514/1.J055041.
19. *Taylor R.L., Pister K.S., Goudreas G.L.* Thermochemical analysis of viscoelastic solids // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 1970. V. 2. P. 45–59. DOI: 10.1002/nme.1620020106.
20. *Simo J.C.* On fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects // Computer. Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1987. V. 60. Iss. 2. P. 153–173. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90107-1.
21. *Schapery R.A.* Analysis of viscoelastic composite materials // J. Composite Materials. 1967. V. 1. Iss. 3. P. 228–267. DOI: 10.1177/002199836700100302.
22. *Малый В.И., Труфанов Н.А.* Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // Известия Академии Наук СССР. Механика твердого тела. 1987. № 6. С. 148–154.
23. *Haj-Ali R., Muliana A.* Numerical finite element formulation of the schapery non-linear viscoelastic material model // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 2004. No. 59. P. 25–45. DOI: 10.1002/nme.861.
24. *Tsukrov I. et al.* Numerical modeling of nonlinear elastic components of mooring systems // IEEE J. Oceanic Engineering. 2005. V. 30. No. 1. P. 37–46. DOI: 10.1109/JOE.2004.841396.

25. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Итерационный метод решения квазистатических нелинейных задач вязкоупругости // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 3. С. 44–56.
26. Барба С.П. Метод упругих решений в задаче о неустойчившейся ползучести // Ученые записки ЦАГИ. 1990. Т. XXI. № 5. С. 112–123.
27. Павлов С.М., Светашков А.А. Итерационный метод решения задач линейной вязкоупругости // Изв. вузов. Физика. 1993. Т. 36. № 4. С. 129–136. DOI: 10.1007/BF00570749.
28. Svetashkov A., Kupriyanov N., Manabaev K. Modification of the iterative method for solving linear viscoelasticity boundary value problems and its implementation by finite element method // Acta Mechanica. 2018. V. 229. Iss. 6. P. 2539–2559. DOI: 10.1007/s00707-018-2129-z.
29. Светашков А.А. Прикладные задачи механики вязкоупругих материалов: монография / Томский политехнический университет. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. 205 с.
30. Победра Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
31. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

Статья поступила 06.09.2018 г.

Pavlov M.S., Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A. (2019) MODIFIED FORMULATION OF THE ITERATIVE ALGORITHM FOR SOLVING LINEAR VISCOELASTICITY PROBLEMS BASED ON THE SEPARATION OF TIME AND SPACE VARIABLES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 82–94

DOI 10.17223/19988621/61/8

Keywords: linear viscoelasticity, integral operators, auxiliary constitutive equations, convergence, iterative algorithm.

Designing of the structures made of polymeric and composite viscoelastic materials requires development of the efficient and cost-effective methods for calculating stress-strain state. This paper proposes an iterative algorithm for solving such problems. The advantages of the algorithm over existing methods are the following: firstly, there is a possibility to parallelize the calculations of spatial and time components of the stress-strain state; secondly, this algorithm eliminates the need to integrate the history of stress and displacement variation in time. Moreover, the formulated iterative algorithm allows one to obtain the parameters of the stress-strain state of a viscoelastic solid without using integral operator inverse to the relaxation operator.

The proposed method involves the following concept. The integral operators of the shear and volume relaxation are replaced by some values of the elastic shear and volume moduli. The identity of the obtained elastic problem with initially stated viscoelastic problem is ensured by supplementing right-hand sides of the equilibrium equations and boundary conditions with the corresponding residuals. In addition, each residual involves the result of viscoelastic operator effect on the required parameters, and, therefore, it cannot be found directly. The numerical implementation assumes the iteration process to be built, in which the residuals on the current step are calculated using the solutions obtained on the previous one.

The paper describes the formulated iterative algorithm, as well as its application in conjunction with commercial or free computer software employed for a finite element analysis. The paper also includes an example of the model problem solution.

Mikhail S. PAVLOV (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

Aleksandr A. SVETASHKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: svetashkov@tpu.ru

Nikolay A. KUPRIYANOV (Candidate of Technical Sciences, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kupriyanov@tpu.ru

REFERENCES

1. Lakes R. (2009) *Viscoelastic Materials*. New York: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511626722.
2. Pavlov M.S., Ponomarev S.A., Maritsky N., Ponomarev S.V. (2016) Mathematical model of composite fibre-glass aramide-wired cord rheological properties. *AIP Conference Proceeding*. 1772. DOI: 10.1063/1.4964582.
3. Doubal S., Doubal J. (2014) *Theory of Viscoelasticity. Handbook*. Delter.
4. Rzhantsyn A.R. (1968) *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow: Izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu.
5. Maxwell J.C. (1867) On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions*. 157. pp. 49–88. DOI: 10.1098/rstl.1867.0004.
6. Boltzman L. (1874) Zur theorie der elastischen nachwirkung. *Wiener Berichte*. 70. pp. 275–306. DOI: 10.1002/andp.18782411107.
7. Volterra V. (1912) *Lecons sur Les Fonctions de Lignes*. Paris: Gautierr Villars.
8. Volterra V. (1930) *Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations*. London; Glasgow: Blackie & Son Limited.
9. Adamov A.A., Matveenkov V.P., Trufanov N.A., Shadakov I.N. (2003) *Metody prikladnoy vyazkouprugosti* [Applied viscoelasticity methods]. Ekaterinburg: UrO RAN.
10. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. (1970) *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Foundations of the mathematical theory of thermal viscoelasticity]. Moscow: Nauka.
11. Reddy J.N. (2008) *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781139178952.
12. Pipkin A.C. (1986) *Lectures of Viscoelasticity Theory*. New York: Springer Verlag. DOI: 10.1007/978-1-4612-1078-8.
13. Flugge W. (1967) *Viscoelasticity*. New York: Blaisdell Press.
14. Cristensen R.M. (1980) *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York: Academic.
15. Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G. (1983) *Prochnostnye raschety izdeliy iz polimernykh materialov* [Strength calculations for the products made of polymeric materials]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Schapery R.A. (1969) On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. *Polymer Engineering and Science*. 9(4). pp. 295–310. DOI: 10.1002/pen.760090410.
17. Tang Y., Li T., Ma X. (2016) Creep and recovery behavior analysis of space mesh structures. *Acta Astronautica*. 128. pp. 455–463. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.08.003.
18. Kwok K., Pellegrino S. (2017) Micromechanics models for viscoelastic plain-weave composite tape springs. *AIAA Journal*. 55(1). pp. 309–321. DOI: 10.2514/1.J055041.
19. Taylor R.L., Pister K.S., Goudreas G.L. (1970) Thermochemical analysis of viscoelastic solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2. pp. 45–59. DOI: 10.1002/nme.1620020106.
20. Simo J.C. (1987) On fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects. *Computer. Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 60(2). pp. 153–173. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90107-1.
21. Schapery R.A. (1967) Analysis of viscoelastic composite materials. *Journal of Composite Materials*. 1(3). pp. 228–267. DOI: 10.1177/002199836700100302.
22. Malyy V.I., Trufanov N.A. (1987) Metod kvazikonstantnykh operatorov v teorii vyazkouprugosti anizotropnykh materialov [Methods of quasi-constant operators in the theory of viscoelasticity of the anisotropic materials]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 6. pp. 148–154.
23. Haj-Ali R., Muliana A. (2004) Numerical finite element formulation of the Schapery nonlinear viscoelastic material model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 59. pp. 25–45. DOI: 10.1002/nme.861.
24. Tsukrov I., Eroshkin O. Paul W., Celikkol B. (2005) Numerical modeling of nonlinear elastic components of mooring systems. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 30(1). pp. 37–46. DOI: 10.1109/JOE.2004.841396.

25. Kulikov R.G., Trufanov N.A. (2009) Iterative method for solving quasistatic nonlinear viscoelastic problems. *Computating Continuum Mechanics*. 2(3). pp. 44–56
26. Barba S.P. (1990) Metod uprugikh resheniy v zadache o neustanovivsheysya polzuchesti [Method of elastic solutions to the problem of transient creep]. *Uchenye zapiski TSAGI*. 21(5). pp. 112–123.
27. Pavlov S.M., Svetashkov A.A. (1993) Iteration method for solving linear viscoelasticity problems. *Russian Physics Journal*. 36(4). pp. 129–136. DOI: 10.1007/BF00570749.
28. Svetashkov A., Kupriyanov N., Manabaev K. (2018) Modification of the iterative method for solving linear viscoelasticity boundary value problems and its implementation by finite element method. *Acta Mechanica*. 229(6). pp. 2539–2559. DOI: 10.1007/s00707-018-2129-z.
29. Svetashkov A.A. (2012) *Prikladnye zadachi mekhaniki vyazkouprugikh materialov* [Applied problems of mechanics of viscoelastic materials]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta.
30. Pobedrya B.E. (1995) *Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Izdatel'stvo MGU.
31. Rabotnov Yu.N. (1977). *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka.

Received: September 6, 2018

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/9

Б.А. Худаяров, Х.М. Комилова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБОПРОВОДОВ, ТРАНСПОРТИРУЮЩИХ ДВУХФАЗНУЮ СРЕДУ В РЕЖИМЕ ПРОБКОВОГО ТЕЧЕНИЯ

Предложена математическая модель колебаний горизонтальных вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду, учитывающая внутреннее давление. При исследовании колебаний трубопроводов с протекающей внутри газосодержащей жидкостью используется вязкоупругая модель теории балок. Для описания вязкоупругих свойств материала трубопровода использована наследственная теория вязкоупругости Больцмана – Вольтерра со слабосингулярными ядрами наследственности. Получено, что с увеличением давления внутри трубопровода происходит уменьшение критической скорости газового потока.

Ключевые слова: математическая модель, вычислительный алгоритм, вязкоупругость, трубопровод, двухфазное течение, критическая скорость.

Трубопроводное транспортирование жидкостей и газов играет значительную роль для экономического развития промышленности и производственной отрасли многих стран мира. Транспортировка по трубопроводам отличается от других способов транспортировки своей относительно высокой экологической безопасностью и непрерывным обеспечением продуктов в назначенные объекты отрасли экономики. При эксплуатации трубопроводов часто возникают случайные аварии, которые могут нанести ущерб людям и/или окружающей среде. Поэтому вибрации трубопроводов с протекающей жидкостью привлекают большое внимание исследователей. Вибрации отдельных участков трубопроводов с протекающей жидкостью являются сложными для изучения. В настоящее время имеется значительное число публикаций, посвященных решению задач о колебаниях и динамической устойчивости трубопроводов, транспортирующих жидкость [1–8].

В работе [9] предлагается численный подход для прогнозирования вибрации трехмерного трубопровода с протекающей жидкостью двухфазного потока. Результаты моделирования были подтверждены экспериментальными данными. На основе результатов моделирования предложен численный метод измерения скоростей двухфазного потока.

Моделирование сопряженных колебаний изогнутых труб, транспортирующих двухфазную среду в режиме слоистого течения, изучено авторами [10]. Для получения уравнения вибрации трубы используется уравнение Эйлера. Исследовано влияние основного радиуса, толщины и внутреннего радиуса трубы на критические скорости потока.

В настоящее время объекты нефтегазовой промышленности, жилищно-коммунального хозяйств и другие часто сталкиваются с проблемами ремонта и восстановления металлических трубопроводов из-за воздействия на них различных внешних факторов [11]. Одним из способов решения данной проблемы явля-

ется создание и применение новых видов материалов, в том числе композиционных, которые обладают рядом преимуществ.

Влияние функции частотной характеристики для вязкоупругих трубопроводов представлено в работе [12]. При рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью обобщенной многоэлементной модели Кельвина-Фойгта. В ней исследовано влияние вязкоупругих свойств материала трубопровода на резонансные частоты и на частотно-зависимое демпфирование резонансных пиков.

Моделирование процессов деформирования трубы с учетом оснований на основе теории балок Эйлера – Бернулли было предложено в [13]. Для описания процессов деформирования вязкоупругого основания используется модель Кельвина. С применением принципа Гамильтона получены уравнения движения трубы. Определены критические скорости потока.

Для описания процессов деформирования вязкоупругих материалов используются различные модели наследственной теории вязкоупругости. Необходимость учета вязкоупругих свойств материалов в инженерных расчетах отразилось в появлении большого количества более или менее простых теорий.

В работе [14] приведены дифференциальные и интегральные модели, определяющие связь между напряжениями и деформациями наследственной теории вязкоупругости по определенным критериям, проанализированы их преимущества и недостатки.

В данной работе при решении динамических задач колебания трубопроводов из композиционных материалов применяется интегральная модель связи между напряжением и деформацией со слабосингулярными ядрами наследственности с учетом особенности Абеля.

При транспортировании по трубопроводам двухфазное пробковое течение сопровождается вибрационными нагрузками на трубопровод, которые ослабляют мощность потока транспортирования, а также может *привести* в отдельных случаях к *ускоренному* разрушению трубопроводов.

Исследование поведения различных видов и форм элементов вязкоупругого трубопровода в широком диапазоне внешних физических условий и внутренних нагрузок приводит к применению в этих задачах методов математического моделирования как основного средства решения проблемы. Таким образом, успешное решение вибрации вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду в пробковом режиме, зависит от наличия адекватных математических моделей соответствующих физических процессов, эффективных численных методов, алгоритмов и программных средств для реализации моделей.

Настоящая работа посвящена решению колебательных процессов вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих газосодержащую жидкость.

Постановка задачи

Рассмотрим прямой участок трубопровода длиной L в виде стержня, состоящего из композиционного материала, транспортирующего газожидкостную среду (рис. 1). Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось x проходила через центры тяжести сечений трубы, а начало оси совместим с левым концом трубы (рис. 2). Перемещения точек оси трубопровода по оси y представляют неизвестную функцию прогибов $w(x, t)$. Скорость течения жидкости вдоль оси трубопровода – U . Продольные колебания трубопровода не рассматриваются. Пред-

полагается, что движение плоское, а труба горизонтальна. Площадь поперечного сечения потока считается постоянной. Кроме того, в поперечной вибрации труба ведет себя как балка Эйлера – Бернулли и режим течения жидкости пробковый.

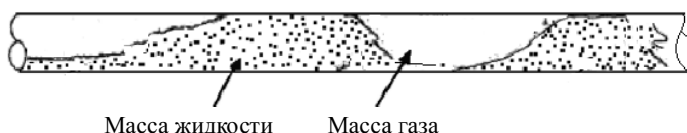


Рис. 1. Пробковый режим течения газосодержащей жидкости

Fig. 1. Slug flow of a gas-containing fluid

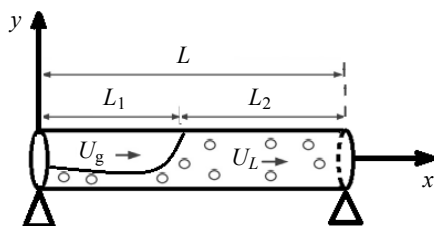


Рис. 2. Геометрия трубопровода

Fig. 2. Pipeline geometry

Интегральная модель Больцмана – Вольтерра, которая характеризует закон зависимости напряжения σ от деформации ε в одномерном случае, определяется из уравнения [15]

$$\sigma = E(1 - R^*)\varepsilon = E \left\{ \varepsilon - \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right\}. \quad (1)$$

Здесь E – модуль упругости материала; $R(t - \tau)$ – ядро релаксации; t – время наблюдения; τ – предшествующее моменту наблюдения время.

Геометрическая зависимость зададим уравнением

$$\varepsilon = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где $w = w(x, t)$ – поперечный прогиб трубопровода типа стержня; z – расстояние от точки переноса сечения стержня до нейтральной оси.

Изгибающий момент

$$M = \int_{A_p} z \sigma dA_p, \quad (3)$$

где A_0 – площадь поперечного сечения трубы.

Подставляя (1) и (2) в (3), получим

$$M = -EI(1 - R^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где $I = \int_{A_p} z^2 dA_p$.

Основываясь на работах [16, 17], уравнение движения трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду, с учетом свойств вязкости материала конструкций и внутреннее давление имеет вид

$$EI(1-R^*)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(m_L U_L + m_g U_g)\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \\ + (m_L U_L^2 + m_g U_g^2 - N_0 + A_{Lp} P_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (m_L + m_g + m_p)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь E – модуль упругости материала; EI – жесткость изгиба; L – длина трубы; x – независимая переменная, продольная осевая координата трубы; $w(x, t)$ – прогиб в сечении x в момент времени t ; m_L , m_g и m_p – масса жидкости, газа и трубы соответственно, отнесенная к единице длины трубопровода; A_p – площадь поперечного сечения трубы; U_L , U_g – скорости потока жидкости и газа соответственно; P_i – внутреннее давление; $A_{Lp} = \pi r_1^2$; r_1 , A_{Lp} – внутренний радиус и площадь проходного сечения трубопровода соответственно; N_0 – растягивающее (сжимающее) усилие; R^* – интегральный оператор вида

$$R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau;$$

$R(t-\tau)$ – ядро релаксации Колтунова – Ржаницына [15]:

$$R(t-\tau) = A \exp(-\beta(t-\tau))(t-\tau)^{\alpha-1},$$

$$A > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1;$$

A – параметр вязкости; β – параметр затухания; α – параметр сингулярности, определяемый экспериментом.

Будем изучать решения уравнения (1) при следующих граничных условиях:

$$w(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = L;$$

и начальных условиях

$$w(x, 0) = \vartheta(x), \quad \dot{w}(x, 0) = \psi(x),$$

где $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции в области изменения своих аргументов.

Метод решения

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N w_n(t) \varphi_n(x), \quad (5)$$

где $w_n(t)$ – некоторые функции, подлежащие к определению, при этом функции $\varphi_n(x)$ подобраны так, чтобы каждый член суммы (5) удовлетворял граничным условиям. В случае шарнирно опертой по краям трубы в разложении мето-

да Бубнова – Галеркина (5) аппроксимирующие функции прогиба выбираем в виде

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6)$$

Подставим функцию (5) в уравнение (1) и применим к последнему процедуру Бубнова – Галеркина. В процессе интегрирования уравнения (1) от 0 до L параметры потока, включая массу на единицу длины и скорость потока для газовой и жидкой фазы в зоне газового пузыря и зоне жидкой фазы, интегрируются отдельно в интервале от нуля до L_1 , и от L_1 до L (рис. 1). После несложных преобразований получим систему интегродифференциальных уравнений относительно коэффициентов (5).

Введя следующие безразмерные величины

$$\frac{x}{L}, \frac{w}{L}, \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_L + m_g + m_p}} \quad (7)$$

и сохраняя при этом прежние обозначения, получим систему интегродифференциальных уравнений относительно w_n :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \Delta_{kn} \ddot{w}_n + 2 \sum_{n=1}^N G_{Lg, kn} \dot{w}_n - \\ & \sum_{n=1}^N P_{Lg, kn} w_n + \alpha_{0k} (\bar{N}_0 - \pi P_o) w_k + \alpha_{0k}^2 (1 - R^*) w_k = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$w_n(0) = w_{0nm}; \quad \dot{w}_n(0) = \dot{w}_{0nm}; \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{kn} &= \theta_{Lkn} + \theta_{gkn}; \quad G_{Lg, kn} = \beta_L u_L \gamma_{Lkn} + \beta_g u_g \gamma_{gkn}; \quad P_{Lg, kn} = \alpha_{0n} (\theta_{Lkn} u_L^2 + \theta_{gkn} u_g^2); \\ \theta_{gkn} &= \int_0^{\bar{L}_1} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx; \quad \theta_{Lkn} = \int_{\bar{L}_1}^1 \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx; \quad \gamma_{gkn} = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\bar{L}_1} \varphi'_n(x) \varphi_k(x) dx; \\ \gamma_{Lkn} &= \frac{1}{n\pi} \int_{\bar{L}_1}^1 \varphi'_n(x) \varphi_k(x) dx; \quad \beta_g = \sqrt{\frac{m_g}{m_L + m_g + m_p}}; \quad \bar{P}_i = \frac{r_1^2 L^2 P_i}{EI}; \quad u_L = L U_L \sqrt{\frac{m_L}{EI}}; \\ u_g &= L U_g \sqrt{\frac{m_g}{EI}}; \quad \beta_L = \sqrt{\frac{m_L}{m_L + m_g + m_p}}; \quad \alpha_{0k} = k^2 \pi^2; \quad \bar{N}_0 = \frac{L^2 N_o}{EI}; \quad \bar{L}_1 = \frac{L_1}{L}. \end{aligned}$$

Точки над переменными означают взятие производной по времени соответствующего порядка.

Интегрирование системы (8) на основе многочленной аппроксимации прогиба с учетом различных факторов, выполнялось с помощью численного метода, предложенного в [14, 18, 19]. Дважды интегрируя систему (8) по t , запишем ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим сингулярные особенности интегрального оператора R^* . Затем, полагая $t = t_i$, $t_i = i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots (\Delta t = \text{const})$ и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $w_{ikl} = w_{kl}(t_i)$, получим формулы для ядра Колтунова – Ржаницына ($R(t) = A \exp(-\beta t) t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N (\Delta_{kn} + C_i G_{Lg, kn}) w_{in} &= \sum_{n=1}^N \Delta_{kn} (w_{0n} + \dot{w}_{0n} t_i) + \sum_{n=1}^N G_{Lg, kn} w_{0n} t_i - \\
&- \sum_{j=0}^{i-1} C_j \left\{ \sum_{n=1}^N G_{Lg, kn} w_{jn} - (t_i - t_j) \left(\sum_{n=1}^N P_{Lg, kn} w_{jn} + \alpha_{0k} (\bar{N}_0 - \pi \bar{P}_0) w_{jk} + \right. \right. \\
&\left. \left. + \alpha_{0k}^2 \left(w_{jk} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-s, k} \right) \right) \right\}, \quad (9)
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3, \dots$; где C_j, B_s – числовые коэффициенты применительно к квадратурным формулам трапеции [19–23]:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\Delta t}{2}; \quad C_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, i-1}; \quad C_i = \frac{\Delta t}{2}; \\
B_0 &= \frac{\Delta t^\alpha}{2}; \quad s = j, \quad B_j = \frac{\Delta t^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha)}{2}; \quad B_s = \frac{\Delta t^\alpha ((s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha)}{2}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Обсуждение результатов

Результаты вычислений представлены в таблице и изображены на графиках (рис. 3–10). В таблице приведены критические скорости потока в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик трубопровода. Как видно из таблицы, критическая скорость $u_{г\text{кр}}$ при значениях параметра $A = 0$ имеет значение 3.133, а при $A = 0.1$, составляет 1.911. Коэффициент критического значения скорости газовой фазы для вязкоупругих трубопроводов уменьшается относительно упругих трубопроводов на 39 %.

Исследовано влияние сингулярного параметра α на критические значения скорости двухфазного потока. Увеличение реологического параметра α **приводит к росту критических значений скорости потока**. При $\alpha = 0.02$ критическая скорость газовой фазы составляет 2.159, а при $\alpha = 0.75$ равна 3.062. Критические скорости потока отличаются друг от друга на 41.8 %.

Из таблицы видно, что влияние параметра затухания β , массы жидкости β_L и массы газа β_g на критическую скорость газовой фазы двухфазного потока незначительно.

Исследовано влияние параметра $\bar{L}_1$, характеризующего длину зоны газовой фазы, на критические скорости потока. Расчеты показали, что с увеличением длины зоны газовой фазы уменьшается значение критической скорости потока.

Изучено влияние параметра внутреннего давления на критическую скорость потока. Исследования были проведены при $\bar{P}_i = 0.5; 1; 2; 2.5$. Из таблицы видно, что с ростом внутреннего давления критическая скорость потока снижается. Это объясняется тем, что внутреннее давление приводит к появлению поперечных сил, действующих на трубопровод, так как трубопровод, расположенный на опорах имеет прогиб от веса трубопровода и веса жидкости, протекающей через нее.

Изучено влияние скорости жидкости на критическую скорость газовой фазы. Анализ результатов показывает следующее: увеличение скорости жидкости u_L приводит к уменьшению критической скорости газа $u_{г\text{кр}}$ на 21.8 %.

**Зависимость критической скорости двухфазного потока
от физико-механических и геометрических параметров трубопровода**

A	α	β	β_L	β_g	$\bar{L}_1$	$\bar{N}_o$	$\bar{P}_i$	u_L	u_{gr}
0 0.005 0.05 0.1	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0.025	-	0.3	3.133 3.086 2.610 1.911
0.01	0.02 0.05 0.1 0.4 0.75	0.05	0.02	0.01	0.27	0.025	-	0.3	2.159 2.760 2.942 3.055 3.062
0.01	0.25	0.01 0.08	0.02	0.01	0.27	0.025	-	0.3	3.031 3.037
0.01	0.25	0.05	0.001 0.1 0.7	0.01	0.27	0.025	-	0.3	3.044 3.051 3.034
0.01	0.25	0.05	0.02	0.007 0.1 0.5	0.27	0.025	-	0.3	3.038 3.041 3.055
0.01	0.25	0.05	0.02	0.01	0.2 0.3 0.32	0.025	-	0.3	3.042 3.033 3.027
0	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0 5 10 20	-	0.3	3.125 3.812 4.447 5.346
0.01	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0 0.1 3 6 15	-	0.3	3.027 3.051 3.489 3.894 4.918
0.01	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0.025	0.5 1 2 2.5	0.3	2.771 2.472 1.717 1.189
0.01	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0.025	30	0.2 0.5 0.8 1.2	1.738 1.679 1.588 1.359

Исследовалось влияние вязкоупругих свойств материала на амплитуды и частоты колебаний трубопровода (рис. 3). Для упругого трубопровода колебание меняется по периодическому закону (кривая 1). Для вязкоупругих трубопроводов ($A = 0.01$ (кривая 2); $A = 0.1$ (кривая 3)) амплитуда колебаний затухает.

На рис. 4 изображены кривые $w = w(0.5, t)$, построенные для различных значений параметров β . Кривые вычислены для трубопровода с параметрами $A = 0.1$; $\alpha = 0.25$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{N}_o = 5$; $\bar{P}_i = 0$; $u_L = 0.3$; $u_g = 1.5$. Как видно из графиков, влияние параметра β незначительно. Это объясняется тем, что экспоненциальное ядро релаксации не способно описать полностью наследственные свойства материала конструкций.

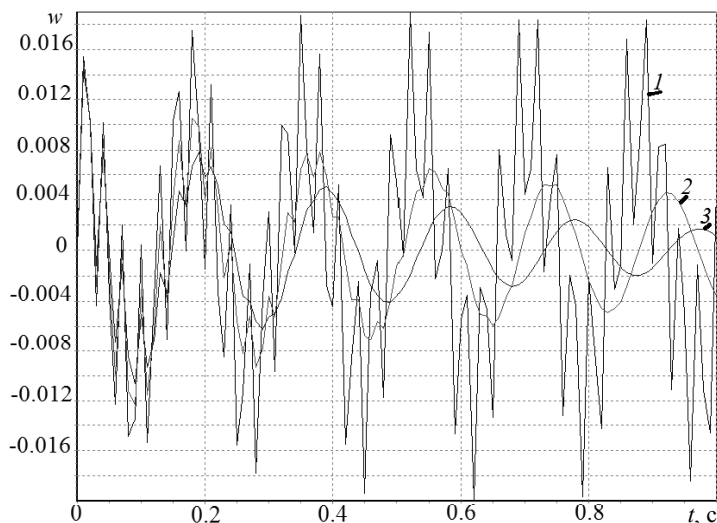


Рис. 3. Зависимость прогиба трубы w от времени t при различных параметрах вязкости:

$A = 0$ (1); $A = 0.01$ (2); $A = 0.1$ (3); $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$;

$$\bar{L}_1 = 0.27; \bar{P}_i = 0; \bar{N}_o = 5; u_L = 0.3; u_g = 1.5$$

Fig. 3. Tube flexure w as a function of time t at various viscosity parameters:

$A =$ (1) 0, (2) 0.01, and (3) 0.1; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$;

$$\bar{L}_1 = 0.27; \bar{P}_i = 0; \bar{N}_o = 5; u_L = 0.3; u_g = 1.5$$

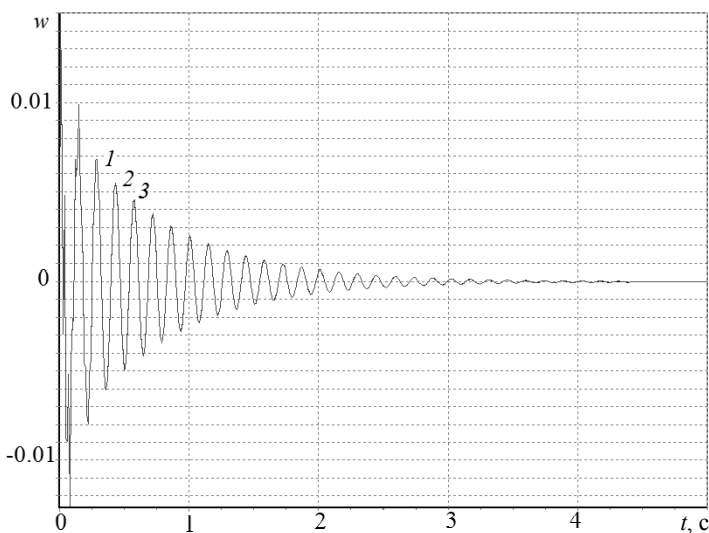


Рис. 4. Зависимость прогиба трубы w от времени t при $\beta = 0.01$ (1); $\beta = 0.5$ (2); $A = 0.1$;

$\alpha = 0.25$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 5$; $u_L = 0.3$; $u_g = 1.5$

Fig. 4. Tube flexure w as a function of time t at $\beta =$ (1) 0.01 and (2) 0.5; $A = 0.1$; $\alpha = 0.25$;

$\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 5$; $u_L = 0.3$; $u_g = 1.5$

Изучено влияние параметра растягивающего усилия на поведение трубопровода (рис. 5). При отсутствии растягивающего усилия (кривая 1) амплитуда колебаний уже с момента $t \geq 2.4$ резко возрастает. Подобные колебания являются нежелательными, так как приводят к зарождению и развитию усталостных трещин.

Изучено влияние внешних растягивающих усилий в продольном направлении трубопровода. Из таблицы видно, что рост растягивающих усилий в продольном направлении трубопровода приводит к увеличению критической скорости потока для газовой фазы. При $\bar{N}_o = 0$ и $\bar{N}_o = 20$ критическая скорость потока для газовой фазы соответственно равна 3.125 и 5.36. Напротив, сжимающие усилия $\bar{N}_o$ приводят к такому же пропорциональному снижению критической скорости потока для газовой фазы.

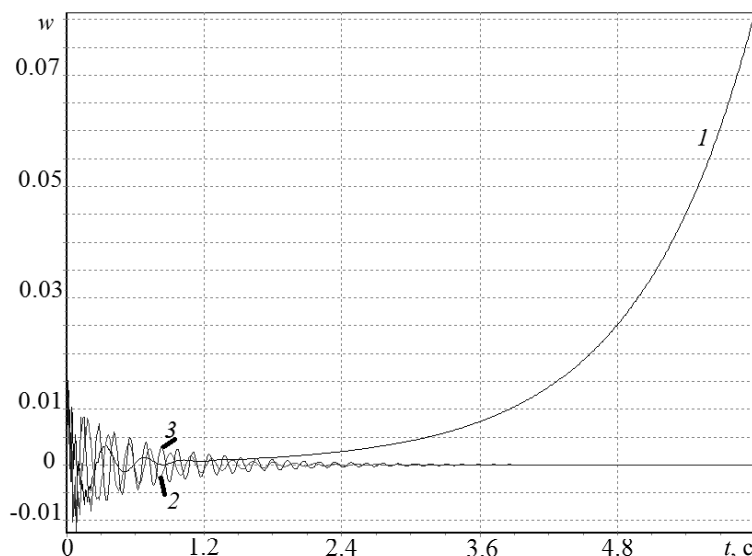


Рис. 5. Зависимость прогиба трубы w от времени t при $\bar{N}_o = 0$; (1); $\bar{N}_o = 5$; (2); $\bar{N}_o = 10$; (3); $A = 0.1$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 5$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.5$

Fig. 5. Tube flexure w as a function of time t at $\bar{N}_o = (1) 0$, (2) 5, and (3) 10; $A = 0.1$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 5$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.5$

Проведены исследования влияния параметра $\bar{L}_1$ на колебательный процесс вязкоупругого трубопровода ($A = 0.1$). При $\bar{L}_1 = 0.32$ (кривая 2) мы имеем колебательное движение с быстро возрастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению (рис. 6). При этом скорость газового потока $u_g = 2.3$ является значительно выше от критической скорости u_{gcr} для значений $\bar{L}_1 = 0.22$ и $\bar{L}_1 = 0.32$. С уменьшением длины зоны газовой фазы можно устранить опасность колебательных движений. Газовый поток скапливается в верхней части трубы, принимает «снарядную» форму, и центр тяжести потока смещается вниз по сечению трубы. Это приводит к изменению положения центра тяжести потока при движении жидкости и появлению дополнительных нагрузок.

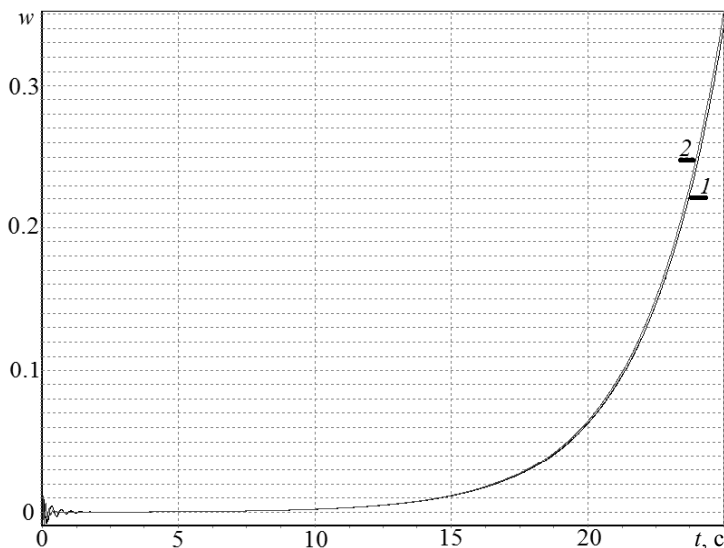


Рис. 6. Зависимость прогиба трубы w от времени t при $\bar{L}_1 = 0.22$ (1); $\bar{L}_1 = 0.32$ (2); $A = 0.1$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 5$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.3$

Fig. 6. Tube flexure w as a function of time t at $\bar{L}_1 = (1) 0.22$ and (2) 0.32; $A = 0.1$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 5$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.3$

На рис. 7 приведено влияние параметра β_g , характеризующего массу газа, на процесс колебаний трубопровода. По оси ординат на фигуре откладывается параметр прогиба трубопровода, а по оси абсцисс – параметр безразмерного времени. Первая из этих кривых построена при $\beta_g = 0.01$, а вторая кривая отражает влияние параметра $\beta_g = 0.75$ при следующих значениях: $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 0.05$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.91$. При значениях параметра $\beta_g = 0.75$ скорость потока является критической, что приводит к резкому возрастанию амплитуды колебаний. С уменьшением параметра β_g амплитуда колебаний быстро затухает.

На рис. 8 показана зависимость значения прогиба w от времени t при различных значениях скорости жидкости u_L : $u_L = 1.542$ (кривая 1); $u_L = 1.962$ (кривая 2). При скорости потока жидкости $u_L = 1.962$ проявляется динамическая неустойчивость, поведение трубопровода представляет собой колебания со стремительно возрастающими амплитудами, что может привести к разрушению конструкции (кривая 2).

Было исследовано влияние скорости газового потока на процесс колебания трубопровода (рис. 9). Скорости газового потока приняты равными $u_g = 2.5$ (кривая 1); $u_g = 2.75$ (кривая 2). Осевое растягивающее усилие не учитывается. Как видно из рисунка, по мере увеличения параметра скорости u_g газового потока происходит заметное ухудшение колебательного процесса трубопровода (кривая 2).

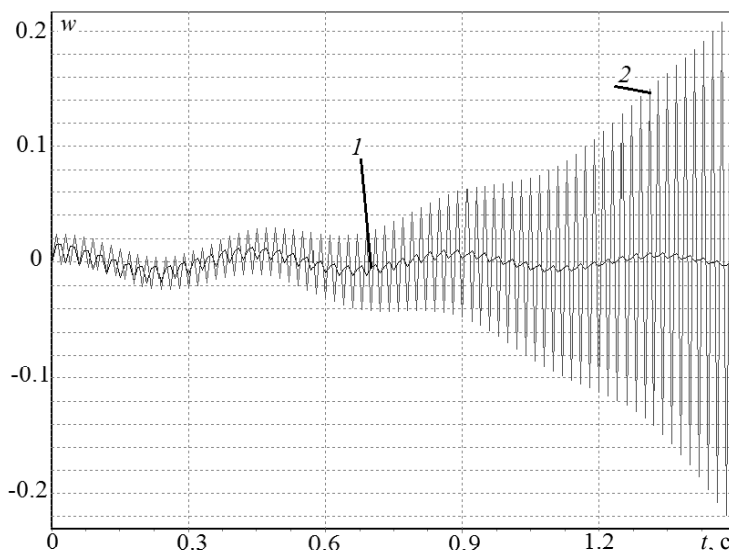


Рис. 7. Зависимость прогиба трубы w от времени t при $\beta_g = 0.01$ (1); $\beta_g = 0.75$ (2); $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 0.05$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.91$

Fig. 7. Tube flexure w as a function of time t at $\beta_g =$ (1) 0.01 and (2) 0.75; $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 0.05$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.91$

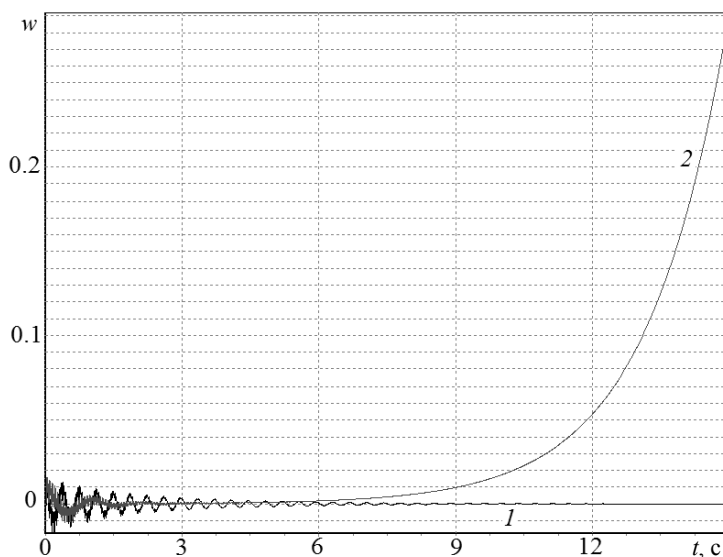


Рис. 8. Зависимость прогиба трубы w от времени t при $u_L = 1.542$ (1); $u_L = 1.962$ (2); $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 0.05$; $u_g = 2.5$

Fig. 8. Tube flexure w as a function of time t at $u_L =$ (1) 1.542 and (2) 1.962; $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 0.05$; $u_g = 2.5$

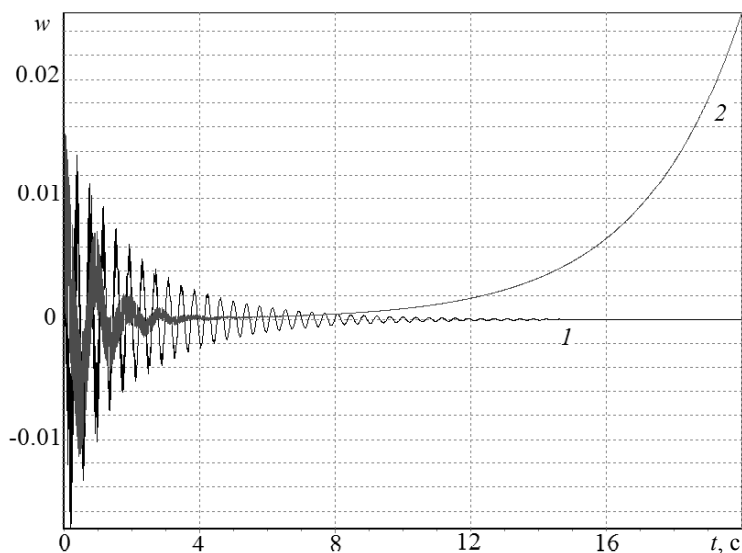


Рис. 9. Зависимость $w(t)$ при различных скоростях потока для газовой фазы $u_g = 2.5$ (1); $u_g = 2.75$ (2); $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 0.05$; $u_L = 1.5$

Fig. 9. $w(t)$ dependency at various velocities of the gas phase flow $u_g = (1)$ 2.5 and (2) 2.75; $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 0.05$; $u_L = 1.5$

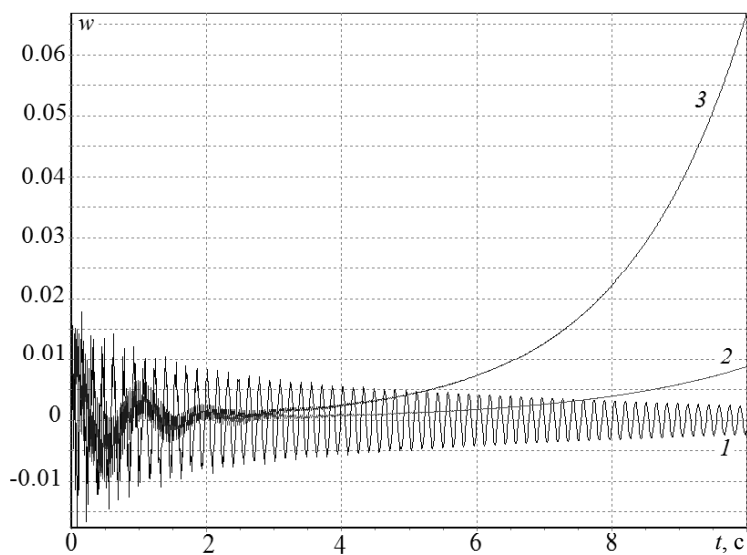


Рис. 10. Зависимость прогиба трубы w от времени t при $\bar{P}_i = 0$ (1); $\bar{P}_i = 3.03$ (2); $\bar{P}_i = 3.04$ (3); $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 5$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.2$

Fig. 10. Tube flexure w as a function of time t at $\bar{P}_i = (1)$ 0, (2) 3.03, and (3) 3.04; $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\beta_L = 0.02$; $\beta_g = 0.01$; $\bar{L}_1 = 0.27$; $\bar{P}_i = 0$; $\bar{N}_o = 5$; $u_L = 0.3$; $u_g = 2.2$

Внутреннее давление существенно влияет на динамические характеристики трубопровода, транспортирующего газосодержащую жидкость (рис. 10). Из рисунка видно, что по мере увеличения параметра внутренних давлений $\bar{P}_i$ происходит уменьшение скорости и увеличение амплитуды колебаний. При $\bar{P}_i = 3.03$ и $\bar{P}_i = 3.04$ скорость газового потока превышает скорость критических, колебания приобретают быстро возрастающие амплитуды.

Заключение

Разработана математическая модель колебаний вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазные среды с учетом внутреннего давления жидкости. Разработан вычислительный алгоритм для решения задач расчета колебательных процессов трубопроводов с протекающим двухфазным потоком. При численном моделировании задачи исследован ряд динамических эффектов:

- выявлено, что увеличение внутреннего давления приводит к уменьшению критической скорости двухфазного потока;
- установлено, что увеличение растягивающего усилия приводит к возрастанию критической скорости двухфазного потока;
- показано, что учет вязкоупругих свойств материала конструкции приводит к уменьшению критической скорости потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xiao-Ye Mao, H Ding, Li-Qun Chen. Steady-state response of a fluid-conveying pipe with 3:1 internal resonance in supercritical regime // *Nonlinear Dynamics*. 2016. V. 86(2). P. 795–80. DOI: 10.1007/s11071-016-2924-9.
2. Paidoussis M.P., Li G.X. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem // *J. Fluid. Struct.* 1993. V. 7. P. 137–204.
3. Bezborodov S.A., Ulanov A.M. Calculation of vibration of pipeline bundle with damping support made of MR material // *Procedia Engineering*. 2017. V. 176. P. 169–174. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.285>.
4. Kaiming Bi, Hong Hao. Numerical simulation on the effectiveness of using viscoelastic materials to mitigate seismic induced vibrations of above-ground pipelines // *Engineering Structures*. 2016. V. 123. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.05.022.
5. Hu Ding, Jinchen Ji, Li-Qun Chen. Nonlinear vibration isolation for fluid-conveying pipes using quasi-zero stiffness characteristics // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019. V. 121. P. 675–688. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.057.
6. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. Mathematical Simulation of nonlinear oscillations of viscoelastic pipelines conveying fluid // *Applied Mathematical Modelling*. 2019. V. 66. P. 662–679. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.10.008>.
7. Zahid I. Al-Hashimy, Hussain H. Al-Kayiem and Rune W. Time. Experimental investigation on the vibration induced by slug flow in horizontal pipe // *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2016. Vol. 11(20).
8. Belen'kij M.Ya., Gotovskij M.A., Fokin B.S. Vibration elimination in pipe-lines for transport of two-phase and boiling flows // *Teplotehnergetika*. 1996. No. 3. P. 41–46.
9. Ahmed M. Nagib Elmekawy, Mohamed A. Shabara, Hassan Elgamel and Bassuny El-Souhily. Numerical analysis of the prediction of the two-phase flow rate by measuring vibration of pipelines // *ASME 2017 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. Paper No. IMECE2017-71038. P. V04AT05A039. DOI: 10.1115/IMECE2017-71038.
10. Wan Yi, Zhao Jianhua, Zhang Ling. Mathematical modeling of coupled vibration of curved pipes conveying stratified two-phase flow // *Chinese Journal of Applied Mechanics*. 2015. V. 32.

11. Ягубов Э.З., Цхадая Н.Д., Ягубов З.Х. Многоканальные трубопроводы для транспортировки нефтегазовых сред и восстановление изношенных нефтегазопроводов // Научные труды. 2013. № 1. С. 57–63.
12. Jinzhe Gong, Aaron Zecchin, Martin Lambert, Angus Simpson. Study on the frequency response function of viscoelastic pipelines using a multi-element Kelvin-Voigt model // Procedia Engineering. 2015. 119. P. 226–234. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.08.880.
13. Hao T.Y. Establishment of mathematical model of buried pipeline on nonlinear soil dynamic model // Advanced Materials Research. 2012. V. 452–453. P. 334–338. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.452-453.334>.
14. Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А., Абдукаримов А. Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственнодеформируемых систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. Российская академия наук. 2007. № 4. С. 107–110. <https://doi.org/10.3103/S1052618807040048>.
15. Koltunov M.A. Creep and Relaxation. Moscow: Higher School. 1976.
16. Dai H., Wang L., Ni Q. Dynamics of a fluid-conveying pipe composed of two different materials // Int. J. Eng. Sci. 2013. V. 73. P. 67–76. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.08.008.
17. Monette C., Pettigrew M.J. Fluid elastic instability of flexible tubes subjected to two-phase internal flow // J. Fluids Struct. 2004. V. 19. P. 943–956. DOI: 10.1016/j.jfluidstruct.2004.06.003
18. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
19. Badalov F.B., Eshmatov Kh. Yusupov M. Some methods of solution of systems of integro-differential equations encountered in problems of viscoelasticity // Applied Mathematics and Mechanics. 1987. 51. P. 867–871.
20. Khudayarov B.A. Flutter of a viscoelastic plate in a supersonic gas flow // International Applied Mechanics. 2010. V. 46(4). P. 455–460. <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0328-y>.
21. Khudayarov B.A. Numerical Analysis of the nonlinear oscillation of viscoelastic plates // International Applied Mechanics. 2005. V. 41. P. 538–542. <https://doi.org/10.1007/s10778-005-0121-5>.
22. Khudayarov B.A., Bandurin N.G. Numerical investigation of nonlinear vibrations of viscoelastic plates and cylindrical panels in a gas flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2007. V. 48. P. 279–284. <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0036-5>.
23. Худаяров Б.А., Тураев Ф.Ж. Численное моделирование нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 5(43). С. 90–98. DOI: 10.17223/19988621/43/10.

Статья поступила 12.05.2019 г.

Khudayarov B.A., Komilova K.M. (2019) NUMERICAL SIMULATION OF VIBRATIONS OF VISCOELASTIC PIPELINES CONVEYING TWO-PHASE MEDIUM IN A SLUG FLOW REGIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 95–110

DOI 10.17223/19988621/61/9

Keywords: mathematical model, computational algorithm, viscoelasticity, pipeline, two-phase flow, critical velocity.

A mathematical model of vibrations of horizontal viscoelastic pipelines conveying two-phase medium in a slug flow taking into account the internal pressure is proposed in the paper. In the study on vibrations of the pipeline conveying gas-containing fluid, a viscoelastic model of the theory of beams is used. The hereditary Boltzmann-Volterra theory of viscoelasticity with weakly singular hereditary kernels is used to describe the viscoelastic properties of the pipeline material. By means of the Bubnov-Galerkin method, the equations of the pipeline motion are reduced to the study of a system of ordinary integro-differential equations (IDE) with variable coefficients

relative to a time function. The solution to the IDE is obtained numerically using the quadrature formulas. The effect of both gas and fluid phase flow rates, tensile forces in a longitudinal direction of the pipeline, internal pressure parameters, singularity parameters in the hereditary kernels on the vibrations of the pipeline made of composite material are studied numerically. It is found that the critical velocity of the gas flow decreases with an increase in the pressure inside the pipeline.

Bakhtiyar A. KHUDAYAROV (Doctor of Technical Sciences, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

Kholidakhon M. KOMILOVA (Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: komilova591@mail.ru

REFERENCES

1. Xiao-Ye Mao, Hu Ding, Li-Qun Chen (2016) Steady-state response of a fluid-conveying pipe with 3:1 internal resonance in supercritical regime. *Nonlinear Dynamics*. 86(2). pp. 795–80. DOI: 10.1007/s11071-016-2924-9.
2. Paidoussis M.P., Li G.X. (1993) Pipes conveying fluid: a model dynamical problem. *Journal of Fluids and Structures*. 7. pp. 137–204. DOI: 10.1006/jfls.1993.1011.
3. Bezborodov S.A., Ulanov A.M. (2017) Calculation of vibration of pipeline bundle with damping support made of MR material. *Procedia Engineering*. 176. pp. 169–174. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.285.
4. Kaiming Bi, Hong Hao (2016) Numerical simulation on the effectiveness of using viscoelastic materials to mitigate seismic induced vibrations of above-ground pipelines. *Engineering Structures*. 123. pp. 1–14. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.05.022.
5. Hu Ding, Jinchen Ji, Li-Qun Chen (2019) Nonlinear vibration isolation for fluid-conveying pipes using quasi-zero stiffness characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 121. pp. 675–688. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.057.
6. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. (2019) Mathematical simulation of nonlinear oscillations of viscoelastic pipelines conveying fluid. *Applied Mathematical Modelling*. 66. pp. 662–679. DOI: 10.1016/j.apm.2018.10.008.
7. Zahid I. Al-Hashimy, Hussain H. Al-Kayiem and Rune W. Time (2016) Experimental investigation on the vibration induced by slug flow in horizontal pipe. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. 11(20). pp. 12134–12139.
8. Belen'kiy M.Ya., Gotovskiy M.A., Fokin B.S. (1996) Ustranenie vibratsiy truboprovodov, transportiruyushchikh vskipyayushchie i dvukhfaznye potoki [Vibration elimination in the pipelines conveying two-phase and boiling flows]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*. 3. pp. 41–46.
9. Ahmed M. Nagib Elmekawy, Mohamed A. Shabara, Hassan Elgamal, Bassuny El-Souhily (2017) Numerical analysis of the prediction of the two-phase flow rate by measuring vibration of pipelines. *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. IMECE2017-71038, V04AT05A039. DOI: 10.1115/IMECE2017-71038.
10. Wan Y., Zhao J., Zhang L. (2015) Mathematical modeling of coupled vibration of curved pipes conveying stratified two-phase flow. *Chinese Journal of Applied Mechanics*. 32. DOI: 10.11776/cjam.32.03.C010.
11. Yagubov E.Z., Tskhadaya N.D., Yagubov Z.Kh. (2013) Mnogokanal'nye truboprovody dlya transportirovki neftegazovykh sred i vosstanovlenie iznoshennykh neftegazoprovodov [Multichannel pipelines for oil and gas media transportation and a restoration of the depreciated oil and gas pipelines]. *Nauchnye trudy*. 1. pp. 57–63.
12. Gong J., Zecchin A., Lambert M., Simpson A. (2015) Study on the frequency response function of viscoelastic pipelines using a multi-element Kelvin-Voigt model. *Procedia Engineering*. 119. pp. 226–234. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.08.880.

13. Hao T.Y. (2012) Establishment of mathematical model of buried pipeline on nonlinear soil dynamic model. *Advanced Materials Research*. 452–453. pp. 334–338. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.452-453.334.
14. Badalov F.B., Khudayarov B.A., Abdukarimov A. (2007) Effect of the hereditary kernel on the solution of linear and nonlinear dynamic problems of hereditary deformable systems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 36. pp. 328–335. DOI: 10.3103/S1052618807040048.
15. Koltunov M.A. (1976) *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Dai H., Wang L., Ni Q. (2013) Dynamics of a fluid-conveying pipe composed of two different materials. *International Journal of Engineering Science*. 73. pp. 67–76. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.08.008.
17. Monette C., Pettigrew M.J. (2004) Fluid elastic instability of flexible tubes subjected to two-phase internal flow. *Journal of Fluids and Structures*. 19. pp. 943–956. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2004.06.003.
18. Badalov F.B. (1987) *Metody resheniya integral'nykh i integrodifferentsial'nykh uravneniy nasledstvennoy teorii vyazkoupругosti* [Methods for solving integral and integro-differential equations of the hereditary theory of viscoelasticity]. Tashkent: Mekhnat.
19. Badalov F.B., Eshmatov Kh., Yusupov M. (1987) Some methods of solution of systems of integro-differential equations encountered in problems of viscoelasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 867–871.
20. Khudayarov B.A. (2010) Flutter of a viscoelastic plate in a supersonic gas flow. *International Applied Mechanics*. 46(4). pp. 455–460. DOI:10.1007/s10778-010-0328-y.
21. Khudayarov B.A. (2005) Numerical analysis of the nonlinear oscillation of viscoelastic plates. *International Applied Mechanics*. 41. pp. 538–542. DOI: 10.1007/s10778-005-0121-5.
22. Khudayarov B.A., Bandurin N.G. (2007) Numerical investigation of nonlinear vibrations of viscoelastic plates and cylindrical panels in a gas flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48. pp. 279–284. DOI: 10.1007/s10808-007-0036-5.
23. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. (2016) Chislennoe modelirovanie nelineynykh kolebaniy vyazkoupругogo truboprovoda s zhidkost'yu [Numerical simulation of nonlinear oscillations of a viscoelastic pipeline with fluid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 90–98. DOI:10.17223/19988621/43/10.

Received: May 12, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/10

И.В. Щербаков, Б.А. Люкшин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ОТКЛИКА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Произведена оценка напряженно-деформированного состояния элемента конструкции, выполненного в виде пластины из изотропного или ортотропного материала, при действии импульсной нагрузки. Рассмотрены различные условия закрепления на контуре пластины, нагрузка задается в виде ускорения точек закрепления в направлении нормали к пластине. Актуальность такой информации особенно важна для случая, когда ее невозможно определить в реальных условиях использования изделий. В силу особенности геометрии элемента предлагается использовать соотношения теории пластин. Уравнения движения решаются с применением конечно-разностных соотношений. Оценивается влияние соотношения упругих свойств по различным направлениям (по осям ортотропии) на параметры напряженно-деформированного состояния пластины и характер изменения их во времени.

Ключевые слова: математическое моделирование, изотропный материал, ортотропный материал, напряженно-деформированное состояние, уравнение движения.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии (НДС) элемента конструкции, представляющего собой пластину, закрепленную по ее контуру. Точки (или линии) закрепления находятся на жестком основании, причем это основание получает импульс ускорения известной величины и формы в направлении, перпендикулярном плоскости пластины. Если принять, что пластина является абсолютно жесткой (известная из теоретической механики модель абсолютно твердого тела), то все ее точки будут иметь те же ускорения, скорости и перемещения (параметры движения), что и заданные на контуре величины. В действительности за счет деформирования пластины в разных ее точках эти параметры движения будут различными. Интерес представляют их экстремальные значения, в частности параметры ускорения, поскольку именно они определяют массовые силы (силы инерции) как в самой пластине, так и в любых элементах, связанных с ее поверхностью. Эти силы могут вызвать нарушение целостности пластины или элементов.

НДС ортотропной пластины при действии динамической нагрузки предлагается оценивать с использованием средств вычислительной механики на основе соотношений теории пластин, т.е. использовать для анализа конструкции математическое моделирование в сочетании с численной реализацией.

Изотропные и ортотропные модели пластин

Рассматривается реакция пластины на ударную нагрузку [1, 2], вызывающую ускорение пластины вдоль нормали к ней. Закон изменения нагрузки во времени задается кусочно-линейной функцией, в частности, в виде трапеции. Такой выбор

определяется тем, что при ограниченном числе параметров, определяющих форму импульса, можно получить хорошую аппроксимацию реальной нагрузки.

Выбирая систему координат, связанную с жестким основанием, можно исключить из рассмотрения общую для всех точек пластины постоянную составляющую перемещений. Это важно при численной реализации с использованием конечно-разностных соотношений, так как перемещения, определяющие деформации, много меньше этой составляющей, а разности относительно близких величин считаются с большими ошибками за счет округления.

Поскольку эта система в силу постановки задачи не является инерциальной (закон движения основания – и соответственно начала координат – задается в виде импульса ускорения), в уравнения движения необходимо ввести массовые силы, отражающие характер системы отсчета.

Для случая, когда материал пластины является изотропным, в простейшем линейном случае уравнение движения можно записать в виде [3, 4]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho G(t) = 0, \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12}$ – так называемая цилиндрическая жесткость пластины; E – модуль

упругости материала пластины, h – ее толщина; $w(x, y, t)$ – прогибы пластины, т.е. перемещения вдоль нормали; x, y – декартовы координаты вдоль сторон пластины; t – время; G – заданное ускорение, тогда $\rho G(t)$ – массовые силы, возникающие

за счет выбора системы отсчета; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – дифференциальный

оператор четвертого порядка.

Во многих случаях при изготовлении конструкций или их элементов рациональным является вариант, когда материал обладает анизотропией деформационно-прочностных свойств [5, 6]. Для упрочненных волокнами полимерных композиций анизотропия может регулироваться относительно простыми средствами, например, путем варьирования направлений укладки и соотношений между количествами подкрепляющих волокон. В работе рассматривается случай достаточно распространенных ортотропных материалов. В этом случае уравнение движения по форме несколько усложняется и принимает вид

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h G(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (2)$$

$$D_{nm} = \frac{a_{nm} h^3}{12} (n, m = 1, 2), \quad (3)$$

где (3) – цилиндрическая жесткость пластины, в данном случае различная для разных направлений в силу разных модулей упругости материала в двух взаимно перпендикулярных направлениях, а коэффициенты a_{nm} для ортотропного материала определяются по соотношениям

$$a_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad a_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad a_{12} = \frac{E_2 \nu_1}{1 - \nu_1 \nu_2}. \quad (4)$$

В дополнение к ранее введенным обозначениям принимается, что E_1, E_2 – модули Юнга вдоль сторон прямоугольной пластины; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона.

Начальные условия принимаются в виде равенства нулю перемещений и скоростей перемещений при $t = 0$:

$$w(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Для описания закрепления пластины на ее контуре были применены два типа граничных условий – шарнирное и жесткое закрепление. Для шарнирного закрепления равны нулю перемещения и вторые производные от них, последнее означает отсутствие моментов на шарнирах. При так называемом жестком защемлении равны нулю перемещения и первая производная, что характеризует запреты на смещения и повороты кромок пластины. Условия для свободных границ записываются в виде равенств второй и третьей производных от перемещений по нормали к контуру пластины нулю. Это означает отсутствие приложенных моментов и перерезывающих сил на этих границах. В известном смысле жесткая и шарнирная заделки берут в вилку реальное закрепление на контуре. Для того чтобы модель описывала реальное закрепление, необходимо в областях крепления задать определенную степень свободы, величина которой подбирается экспериментальным путем.

Таким образом, в каждой точке пластины на ее контуре задаются условия для свободных границ, для шарнирного или жесткого закрепления:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right) \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \right) \quad \text{– свободные границы;} \quad (6)$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right) \quad \text{– шарнирное закрепление;} \quad (7)$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \right) \quad \text{– жесткое закрепление.} \quad (8)$$

Поскольку в уравнениях движения производные по пространству имеют четвертый порядок, количество условий на границах (по два в каждой точке контура пластины) замыкает математическую модель.

Производные по времени в уравнениях движения (1) или (2) имеют второй порядок, и каждое из этих уравнений можно привести к системе двух уравнений первого порядка путем введения функции скоростей

$$w_1(x, y, t) = \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t}. \quad (9)$$

Расчеты проводились с использованием конечно-разностных соотношений. Для этого вводилась двумерная сетка $x_i = i \times \Delta x$, $y_j = j \times \Delta y$, $i = 0, 1, \dots, N_x$, $j = 0, 1, \dots, N_y$, $\Delta x = a/N_x$, $\Delta y = b/N_y$, N_x , N_y – номера последних узлов вдоль направлений осей x , y , параллельных сторонам пластины, a и b – размеры пластины в плане. Число узлов по осям OX и OY составляет 24 и 14 соответственно. Проверка сеточной сходимости показала, что при этом погрешность расчетов вполне приемлема. Следует учесть, что сама модель пластины предполагает наличие погрешности порядка h/a , где a – минимальный из размеров пластины в плане.

Далее вводятся соответствующие сеточные функции перемещений $w_{ij}(t) = w(x_i, y_j, t)$ и скоростей перемещений $w_{1ij}(t) = w_1(x_i, y_j, t)$. Дифференциальные операторы в уравнениях движения заменялись разностными. Для сеточных функций получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая

решается методом Рунге – Кутты второго порядка. В результате получаются поля перемещений (прогибов), скоростей и ускорений точек пластины как функции времени.

Поскольку аппроксимация производных возможна лишь для внутренних точек, получаемая система алгебраических уравнений относительно сеточных функций не замкнута. Для решения этой системы необходимо дополнить ее конечно-разностными соотношениями, аппроксимирующими граничные условия в каждой точке контура вида (6), или (7), или (8).

Моделирование отклика пластинки при внешнем воздействии

Нагрузка в виде зависимости ускорения точек (линий) крепления пластины показана на рис. 1. Задача решается для случая $E_1 = E_2 = 22000$ МПа [7]. Результаты приведены для узла с координатами по осям OX и OY – 12 и 7 соответственно. Первоначально нагрузка растет от нуля до 2 мс, далее уровень остается постоянным. Как видно по графику, отклик на пластине так же растет, как и нагрузка, до 2 мс, а после того как внешнее воздействие приобретает статический характер, отклик ускорений на плате начинает уменьшаться.

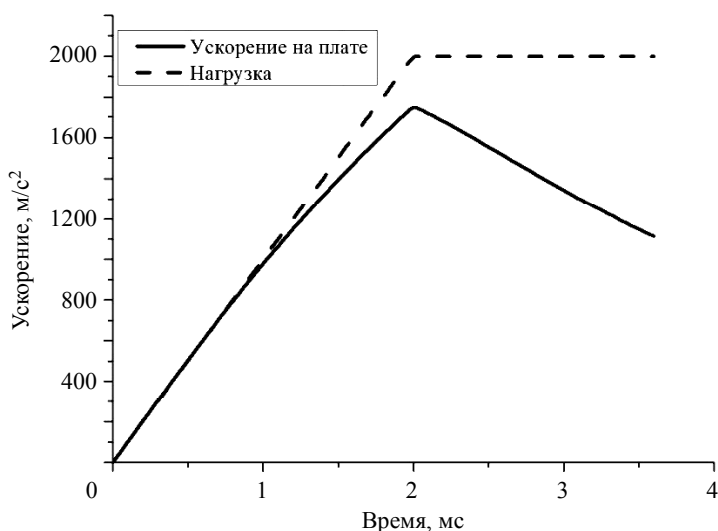


Рис. 1. Внешнее воздействие и отклик, возникший на плате
Fig. 1. External impact and a response arising on the plate

Приведены результаты расчетов для случая, когда в качестве материала был выбран стеклотекстолит, это распространенный материал с ортотропными свойствами. Размеры пластины $a \times b \times h$ составляют соответственно $0.180 \times 0.080 \times 0.002$ м. Две стороны пластины (длиной 0.18 м) закреплены шарнирно, а две другие свободны. Модуль E_2 отвечает направлению вдоль коротких свободных сторон. Форма выпучивания пластины (рис. 2) напоминает арку, края которой закреплены, максимальные прогибы наблюдаются в ее середине. При этом на одной стороне пластины возникают сжимающие, на другой – растягивающие напряжения, связанные с модулем E_2 .

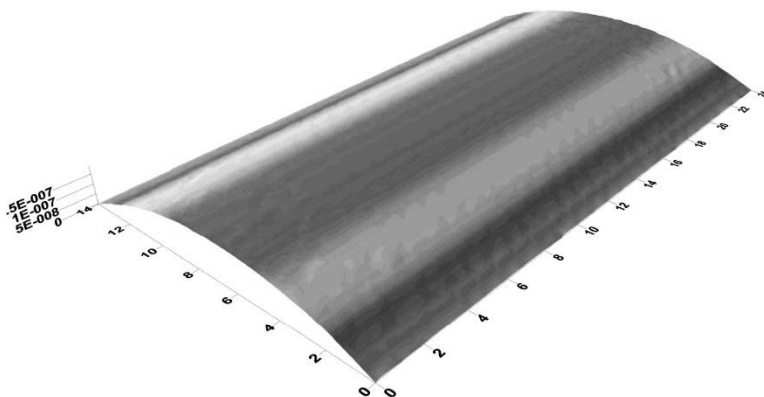


Рис. 2. Форма колебания пластины, условие закрепления: вдоль оси x – шарнир, вдоль оси y – свободные границы

Fig. 2. Plate oscillation shape and fixing condition: a hinge along the x axis and free boundaries along the y axis

На рис. 3 приведены зависимости максимальных прогибов пластинки от времени для случая ортотропной пластинки. Непрерывной сплошной линией показаны результаты для изотропного материала пластинки, другие кривые отвечают разным вариантам соотношений между модулями упругости вдоль сторон прямоугольной пластины, соответствующие обозначения показаны на рисунке. Физически результаты закономерны: изменение модуля упругости E_1 не оказывает

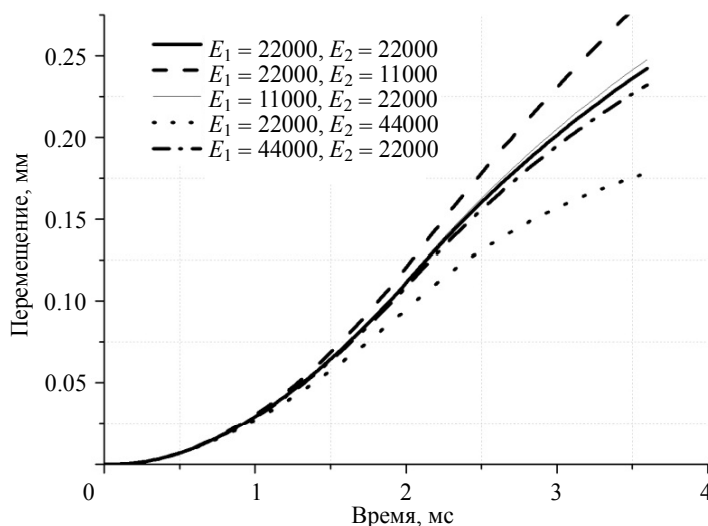


Рис. 3. Зависимости прогибов пластинки в ее центре от времени для ортотропной пластинки при различных соотношениях между упругими модулями вдоль сторон (осей ортотропии), условия закрепления см. рис. 2

Fig. 3. Deflections of the plate center as functions of time for an orthotropic plate with different ratios between elastic modules along the sides (orthotropy axes); for fixing conditions, see Fig. 2

качественного влияния на результат, поскольку вдоль более длинной стороны пластина практически не деформируется. Что касается модуля упругости E_2 , то с его увеличением цилиндрическая жесткость пластинки в соответствующем направлении увеличивается, а с уменьшением соответственно убывает, что приводит к противоположному изменению величин прогибов.

Результаты натурных испытаний

Для получения исходных данных по математическому моделированию и доказательства наличия ортотропных свойств материала стеклотекстолит проведен эксперимент на разрывной машине Instron 5582 [8]. Размеры образцов составляли: $110.00 \times 5.50 \times 0.45$ мм. Зона захвата тисков 25 мм с каждой стороны, рабочая зона – 60 мм. Образцы вырезались в двух взаимно перпендикулярных направлениях, что позволяет оценить соответствующие свойства ортотропного материала.

Результаты механических испытаний приведены на рис. 4.

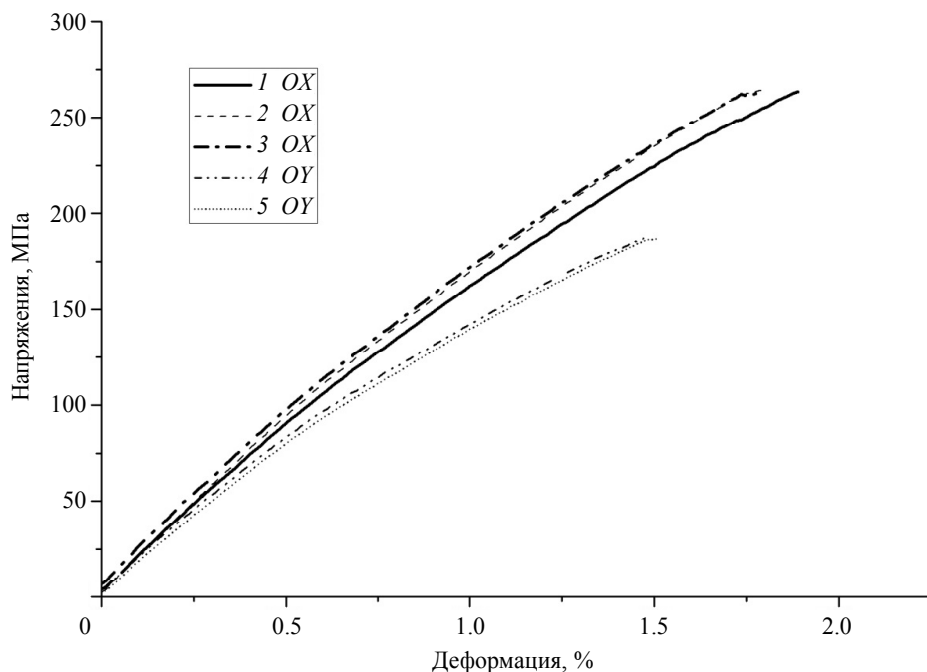


Рис. 4. Диаграммы деформаций, полученные для материала стеклотекстолит при одноосных испытаниях вдоль осей ортотропии

Fig. 4. Stress-strain diagrams obtained for a fiberglass laminate material during uniaxial testing along the orthotropy axes

Первые три кривые, изображенные на диаграмме деформации, соответствуют образцам, полученным вдоль оси OX , 4 и 5 – вдоль оси OY . Результаты испытаний подтверждают наличие ортотропных свойств материала стеклотекстолит, что видно по различию характеру отклика материала на нагружение. Модули упругости составляют (15 ± 0.1) ГПа при воздействии вдоль оси OX и (11 ± 0.1) ГПа – вдоль OY . Эти результаты позволяют задать свойства материалов при математическом моделировании.

Заключение

Ортотропия деформационно-прочностных свойств материала пластины, в частности, наличие разных модулей упругости, оказывает заметное влияние на характер НДС, а предложенная и реализованная модель позволяет получить количественные оценки этого влияния.

Созданная модель и полученные с ее применением результаты основаны на данных физических экспериментов, полученных в лабораторных условиях. Разработанная и реализованная модель применима для оценки параметров НДС в реальных условиях эксплуатации, которые нельзя полностью и точно воспроизвести в лабораторных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xiaotian Zhang *et al.* Element fracture technique for hypervelocity impact simulation // *Advances in Space Research*. 2015. V. 55(9). P. 2293–2304. DOI: 10.1016/j.asr.2015.01.040.
2. Xin Jin *et al.* Lightweight design for servo frame based on lattice material // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017. V. 207. P. 10. DOI: 10.1088/1757-899X/207/1/012035.
3. Кармишин А.В., Лясковец, Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
5. Pang S.S. *et al.* Impact response of composite laminates with a hemispherical indenter // *Polymer Engineering and Science*. 1991. V. 30(20). P. 1461–1466. DOI: 10.1002/pen.760312004.
6. Хон Ю.А. и др. Анализ применения изотропных и анизотропных критериев разрушения для моделирования разрушения анизотропных материалов // *Известия РАН. Серия физическая*. 2012. Т. 76 (1). С. 79–85. DOI: 10.3103/S10662873812010108.
7. ГОСТ 10292-74. Стеклотекстолит конструкционный. Технические условия. М.: Изд-во стандартов, 1976. 16 с.
8. Акopian В.А. и др. К определению эффективных свойств полимеркомпозитного материала на основе гармонического и модального анализа // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2008. Т. 14. № 1. С. 35–48.

Статья поступила 16.01.2019 г.

Shcherbakov I.V., Lyukshin B.A. (2019) SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF AN ORTHOTROPIC PLATE RESPONSE UNDER DYNAMIC LOAD *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 111–118

DOI 10.17223/19988621/61/10

Keywords: mathematical modeling, isotropic material, orthotropic material, stress-strain state, equation of motion.

Detection of the structural defects in devices and machines at early stages is an urgent problem in the instrument-making industry. Such requirements are based on the need to reduce the time of manufacturing new products, and to decrease the expenses for creating prototypes. One of the tools which is capable to solve the complex problems is a mathematical modeling. In this paper, the simulation of the device has been reduced to the level of describing orthotropic plate behavior. Such methodology makes it possible not only to numerically analyze the process, but also to experimentally evaluate the adequacy of the obtained results. The model is based on the equation of motion which allows one to describe the behavior of the orthotropic plate under external dynamic load. To confirm the simulation results, an experiment is carried out, which yields the elastic modulus of the real orthotropic plate and gives an opportunity to compare the results with the data from tables, as well as to show the presence of the orthotropy in the sample.

Il'ya V. *SHCHERBAKOV* (ISPMS SB RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: scherbakov_ilja@mail.ru

Boris A. *LYUKSHIN* (Doctor of Physics and Mathematics, ISPMS SB RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lba2008@yandex.ru

REFERENCES

1. Xiaotian Zhang, Xiao-gang Li, Tao Liu, Guang-hui Jia. (2015) Element fracture technique for hypervelocity impact simulation. *Advances in Space Research*. 55(9). pp. 2293–2304. DOI: 10.1016/j.asr.2015.01.040.
2. Xin Jin, Guoxi Li, Encai Liu, Jingzhong Gong. (2017) Lightweight design for servo frame based on lattice material. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 207(012035). DOI: 10.1088/1757-899X/207/1/012035.
3. Karmishin A.V., Lyaskovets., Myachenkov V.I., Frolov A.N. (1975) *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksiy* [Statics and dynamics of thin-walled shell structures]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Vol'mir A.S. (1972) *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka.
5. Pang S.S., Zhao Y., Yang C., Griffin S.A. (1991) Impact response of composite laminates with a hemispherical indenter. *Polymer Engineering and Science*. 30(20). pp. 1461–1466. DOI: 10.1002/pen.760312004.
6. Khon Yu.A., Krivosheina M.N., Tuch E.V. (2012) Analiz primeneniya izotropnykh i anizotropnykh kriteriev razrusheniya dlya modelirovaniya razrusheniya anizotropnykh materialov [Analysis of the application of isotropic and anisotropic fracture criteria for modeling the destruction of anisotropic materials]. *Izvestiya RAN. Seriya Fizicheskaya – Proceedings of the RAS. Physical series*. 76(1). pp. 79–85. DOI: 10.3103/S1062873812010108.
7. GOST 10292-74. (1976) *Steklotekstolit konstruksionnyy. Tekhnicheskie usloviya* [Constructional glass-fibre laminate. Technical conditions]. Moscow: Izdatel'stvo standartov.
8. Akop'yan V.A., Bychkov A.A., Rozhkov E.V., Solov'ev A.N., Shevtsov S.N. (2008) K opredeleniyu effektivnykh svoystv polimerkompozitnogo materiala na osnove garmonicheskogo i modal'nogo analiza [On determination of the effective properties of polymer-composite material on the basis of the harmonic and modal analysis]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. 14(1). pp. 35–48.

Received: January 16, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

AICHAOUI Houda – Researcher, Faculty of Exact Sciences, Mentouri University, Constantine, Algeria. E-mail: aichaoui_houda@hotmail.fr

BENHADID Samir – Doctor, Faculty of Exact Sciences, Mentouri University, Constantine, Algeria. E-mail: ihebmaths@yahoo.fr

DANCHEV Peter V. – Prof., Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria. E-mail: pvdanchev@yahoo.com, danchev@math.bas.bg

REKKAB Soraya – Doctor, Faculty of Exact Sciences, Mentouri University, Constantine, Algeria. E-mail: rekkabsoraya@gmail.com

АЛЕКСЕЕВ Андрей Алексеевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия. E-mail: alexeew@bk.ru

АЛЕКСЕЕВА Елена Геннадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры РК-5 «Прикладная механика» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия. E-mail: super_aeg@mail.ru

ВАСИЛЬЕВ Алексей Сергеевич – кандидат технических наук, старший преподаватель Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан, Россия. E-mail: vasil-grunt@mail.ru

ГУЛЬТЯЕВ Вадим Иванович – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой оснований и фундаментов Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия. E-mail: vig0@mail.ru

ЗЕМЛЯК Виталий Леонидович – кандидат физико-математических наук, проректор по научной работе и инновациям Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан, Россия. E-mail: vellkom@list.ru

ЗУБЧАНИНОВ Владимир Георгиевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия. E-mail: vgz@rambler.ru

ИВАНЫЧЕВ Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета, г. Липецк, Россия. E-mail: lsivdmail@mail.ru

ИПАТОВ Константин Игоревич – научный сотрудник Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан, Россия. E-mail: ipatov21@mail.ru

КОЗИН Виктор Михайлович – доктор технических наук, профессор Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан, Россия. E-mail: vellkom@list.ru

КОМИЛОВА Холидахон Мухтаровна – старший преподаватель кафедры высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: komilova591@mail.ru

КУЗНЕЦОВА Виктория Николаевна – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры эксплуатации и сервиса транспортно-технологических машин и комплексов в строительстве Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета, г. Омск, Россия. E-mail: dissovetsibadi@bk.ru

КУПРИЯНОВ Николай Амвросьевич – кандидат технических наук, доцент отделения общетехнических дисциплин ШБИП Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: kupriyanov@tpu.ru

ЛЮКШИН Борис Александрович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, г. Томск, Россия. E-mail: lba2008@yandex.ru

ПАВЛОВ Михаил Сергеевич – ассистент отделения нефтегазового дела ИШПР Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: mspravlov@tpu.ru

ПРИХОДОВСКИЙ Михаил Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики факультета систем управления Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия. E-mail: prihod1@yandex.ru

СВЕТАШКОВ Александр Андреевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник отделения общетехнических дисциплин ШБИП Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: svetashkov@tpu.ru

ХУДАЯРОВ Бахтияр Алимович – доктор технических наук, заведующий кафедрой высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

ЩЕРБАКОВ Илья Вячеславович – аспирант Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, г. Томск, Россия. E-mail: scherbakov_ilja@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. +7(3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.

Подписано к печати 16.10.2019. Выпуск в свет 29.10.2019.

Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».

Усл. п. л. 9.68. Уч.-изд. л. 10.84. Тираж 250 экз. Заказ № 23. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4015.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru