

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2020

№ 63

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Робаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесён в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бозиев О.Л. О слабых решениях нагруженного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями	5
Иванов А.В. О функторе вероятностных мер и размерностях квантования	15
Нгуен Тхи Куинь Чанг. Абелевы SACR-группы	27
Турсунов Д.А., Орозов М.О. Асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность	37
Эргашев Т.Г., Комилова Н.Д. Задача Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами	47

МЕХАНИКА

Анисимова М.А., Князева А.Г. Оценка напряжений и деформаций в процессе формирования переходного слоя между частицей и матрицей	60
Бакушев С.В. Разрешающие дифференциальные уравнения физически-нелинейной теории упругости в напряжениях для плоской деформации	72
Глазунов А.А., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Еремин И.В., Алигасанова К.Л., Котоногов В.А. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с преградами	87
Козлов В.В., Маркин А.А. Апробация определяющих соотношений нелинейной теории упругости при осевом сдвиге полого цилиндра	102
Пейгин С.В., Орлов С.А. Оптимальное аэродинамическое проектирование конфигурации «крыло – фюзеляж» широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета	115
Рыльцев И.А., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Кинематика течения степенной жидкости в трубе переменного сечения	125
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	139

CONTENTS

MATHEMATICS

Boziev O.L. On weak solutions of a loaded hyperbolic equation with homogeneous initial conditions	5
Ivanov A.M. On the functor of probability measures and quantization dimensions	15
Nguyen T.Q.T. Abelian SACR-groups	27
Tursunov D.A., Orozov M.O. Asymptotic solution of the Dirichlet problem for a ring, when the corresponding unperturbed equation has a regular special circle.	37
Ergashev T.G., Komilova N.J. Holmgren problem for multidimensional elliptic equation with two singular coefficients.....	47

MECHANICS

Anisimova M.A., Knyazeva A.G. Evaluation of the stress and strain during transition layer formation between a particle and a matrix	60
Bakushev S.V. Resolving differential equations of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses for a plane strain	72
Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aligasanova K.L. Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with obstacles	87
Kozlov V.V., Markin A.A. Testing of defining relations of nonlinear theory of elasticity in an axial strain of a hollow cylinder	102
Peygin S.V., Orlov S.A. Optimal aerodynamic design of a wing-body configuration for a wide-body long-range aircraft.....	115
Ryltsev I.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. Kinematics of a power-law fluid flow in a pipe with a varying cross section	125
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	139

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.35

DOI 10.17223/19988621/63/1

MSC 35L20, 35L72, 35D30

О.Л. Бозиев

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Исследуются вопросы существования и единственности слабого решения смешанной задачи для волнового уравнения, содержащего интеграл по пространственной переменной от натуральной степени модуля решения. Для доказательства существования решения используется метод компактности. Компактность приближенных галеркинских решений устанавливается с помощью теорем вложения Соболева. Единственность слабого решения доказывается стандартной процедурой из теории гиперболических уравнений.

Ключевые слова: *нагруженные уравнения в частных производных, априорные оценки, слабое решение, существование и единственность.*

В работе [1] был предложен приближенно-аналитический метод решения смешанной задачи с однородными начальными условиями для нагруженного гиперболического уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение в частных производных с натуральной степенной нелинейностью. В этом методе для линеаризации обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), ассоциированного с нагруженным, используются априорные оценки решения начально-краевой задачи для нагруженного уравнения. Решение задачи Коши для ОДУ используется для записи приближенного решения нагруженной задачи. Полученное таким образом решение принимается за нулевое приближение, используемое для запуска итерационного процесса нахождения «достаточно точного» приближенного решения нелинейной задачи.

Как показано в [1], для аппроксимации нелинейного уравнения с натуральной степенью p

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b|u|^p u_t = 0, \quad a > 1, \quad b > 0,$$

которое является одной из разновидностей уравнений, возникающих в релятивистской квантовой механике или при моделировании колебательных процессов [2, с. 44, 66], можно использовать нагруженное уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu_t \int_{\Omega} |u|^p dx = 0, \quad \Omega = [0, l]. \quad (1)$$

В [3, 4] при $p = 2$ и $p = 1$ соответственно показано существование и единственность слабых решений двух различных задач для уравнения вида (1). В настоящей работе существование и единственность слабого решения смешанной задачи для (1) распространяются на случай всех натуральных $p \geq 3$ при однородных начальных и неоднородных краевых условиях.

Итак, в области $Q = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу нахождения функции $u = u(x, t)$, которая является решением уравнения (1) и при $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1(0, T)$, $\psi_1(t) + \psi_2(t) \neq \text{const}$, удовлетворяет условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \quad (2)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

1. Априорные оценки

Априорные оценки 1, 2, 3. В [1] при условии $u(x, t) \in C^{2,2}(\bar{Q})$ были получены следующие априорные оценки задачи (1) – (3):

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq C_1(t), \quad \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{C_1(t)}{a^2}, \quad C_1(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$C_1(t) = 2C_0 \int_0^t (|\psi_{1t}(t)| + |\psi_{2t}(t)|) dt, \quad C_0 = \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |u_x(l, t)|, \max_{t \in [0, T]} |u_x(0, t)| \right\}.$$

Здесь и всюду ниже равенство вида

$$\|v\|_{p,\Omega}^p = \int_{\Omega} |v|^p dx$$

выражает норму функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega), \Omega = [0, l]$.

Кроме того, при дополнительном предположении

$$u \in L_{p-2}(\Omega), \quad \psi_1(t), \psi_2(t) \in L_{p-1}[0, T]$$

доказано выполнение неравенства

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leq K(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

в котором

$$K(t) = \frac{F(t)}{2 - bF(t)t}, \quad T < \frac{2}{bF(T)},$$

$$F(t) = \frac{4}{3} p(p-1)t^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^t |C_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} C_2(t) + pa^2 C_0 t \int_0^t \left(\int_0^t |\psi_2(t)|^{p-1} dt + \int_0^t |\psi_1(t)|^{p-1} dt \right) dt,$$

а $C_2(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{p-2,\Omega}^{p-2} \leq C_2(t).$$

Априорная оценка 4. Умножим уравнение (1) на $\|u\|_{p,\Omega}^p u_t$ и с помощью соотношений, полученных при выводе других оценок, запишем

$$\begin{aligned} \|u\|_{p,\Omega}^p \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + a^2 |u_x|^2) dx + 2b \|u\|_{p,\Omega}^{2p} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 = \\ = 2a^2 (u_x(l, t) \partial_t \psi_2(t) - u_x(0, t) \partial_t \psi_1(t)). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$U(t) = \int_{\Omega} (|u_t|^2 + a^2 |u_x|^2) dx = \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|u_x\|_{2,\Omega}^2$$

и перейдем к уравнению

$$\frac{d}{dt} (\|u\|_{p,\Omega}^p U(t)) + 2b \|u\|_{p,\Omega}^{2p} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 = U(t) \frac{d}{dt} \|u\|_{p,\Omega}^p + 2a^2 (u_x(l,t) \partial_t \psi_2(t) - u_x(0,t) \partial_t \psi_1(t)).$$

Интегрируя последнее уравнение по t в границах от 0 до t , получим

$$\|u\|_{p,\Omega}^p U(t) + 2b \int_0^t \|u\|_{p,\Omega}^{2p} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 dt = \int_0^t U(t) \frac{d}{dt} \|u\|_{p,\Omega}^p dt + C_3(t), \quad (6)$$

$$C_3(t) = 2a^2 \int_0^t (u_x(l,t) \partial_t \psi_2(t) - u_x(0,t) \partial_t \psi_1(t)) dt.$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое правой части (6) и убедимся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^t U(t) \frac{d}{dt} \|u\|_{p,\Omega}^p dt &= \|u\|_{p,\Omega}^p U(t) \Big|_0^t - \int_0^t \|u\|_{p,\Omega}^p dU(t) \leq \\ &\leq \|u\|_{p,\Omega}^p U(t) - \inf_{t \in (0,T)} \|u\|_{p,\Omega}^p U(t) \leq \|u\|_{p,\Omega}^p U(t). \end{aligned}$$

То есть

$$\int_0^t U(t) \frac{d}{dt} \|u\|_{p,\Omega}^p dt \leq \|u\|_{p,\Omega}^p U(t).$$

Вернемся к (6) и с учетом полученного запишем

$$2b \int_0^t \|u\|_{p,\Omega}^{2p} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 dt \leq \|u\|_{p,\Omega}^p U(t) + C_3(t).$$

Воспользовавшись неравенством (5), окончательно получим оценку, верную при всех значениях $t \in [0, T]$:

$$\int_0^t \|u\|_{p,\Omega}^{2p} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 dt \leq C_4(t), \quad (7)$$

$$C_4(t) = (K(t)U(t) + C_3(t)) / 2b.$$

Априорная оценка 5. Предположим теперь, что решение задачи (1) – (3) ищется в виде галеркинских приближений

$$u_m = \sum_{j=1}^m g_j(t) w_j(x), \quad (8)$$

где $w_j(x) \in H_0^1(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots$, – полная линейно независимая система, а функции $g_j(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы и определяются из условий

$$(\partial_t^2 u_m, w_j) + a^2 (\partial_x u_m, \partial_x w_j) + b (\|u_m\|_{p,\Omega}^p \partial_t u_m, w_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (9)$$

При этом для всех t в силу (2) имеем

$$u_m(x, 0) = 0, \partial_t u_m(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (10)$$

Здесь и ниже для частных производных функций u_m используются обозначения вида

$$\partial_t u_m = \frac{\partial u_m}{\partial t}, \quad \partial_t^2 u_m = \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, \quad \partial_{tx}^2 u_m = \frac{\partial^2 u_m}{\partial t \partial x}.$$

Пусть задача (1) – (3) имеет два приближенных решения u_m и u_n . Разность скалярных произведений (1), содержащих эти функции, с $\partial_t u_m$ и $\partial_t u_n$ соответственно при $v = u_m - u_n$ имеет вид

$$(v_t, v_t) + a^2 (v_x, v_{xt}) + b \left(\|u_m\|_{p, \Omega}^p \partial_t u_m - \|u_n\|_{p, \Omega}^p \partial_t u_n, v_t \right) = 0.$$

От этого уравнения перейдем к следующему:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_t^2 + a^2 v_x^2) dx + b \|u_n\|_{p, \Omega}^p \int_{\Omega} v_t^2 dx + b \left(\|u_m\|_{p, \Omega}^p - \|u_n\|_{p, \Omega}^p \right) \int_{\Omega} v_t \partial_t u_m dx = 0,$$

после интегрирования которого в границах от 0 до t получаем

$$\int_{\Omega} (v_t^2 + a^2 v_x^2) dx + 2b \int_0^t \|u_n\|_{p, \Omega}^p \int_{\Omega} v_t^2 dx dt + 2b \int_0^t \left(\|u_m\|_{p, \Omega}^p - \|u_n\|_{p, \Omega}^p \right) \int_{\Omega} v_t \partial_t u_m dx dt = 0.$$

Для перехода к неравенству опустим второе слагаемое в левой части, а третье перенесем в правую часть и оценим по модулю. Тогда

$$\int_{\Omega} (v_t^2 + a^2 v_x^2) dx \leq 2b \int_0^t \left| \|u_m\|_{p, \Omega}^p - \|u_n\|_{p, \Omega}^p \right| \left| \int_{\Omega} v_t \partial_t u_m dx \right| dt. \quad (11)$$

Рассмотрим отдельно первый сомножитель под знаком интеграла в правой части (11) и разложим его на множители:

$$\left| \|u_m\|_{p, \Omega}^p - \|u_n\|_{p, \Omega}^p \right| \leq \int_{\Omega} |u_m| - |u_n| \cdot \left| |u_m|^{p-1} + |u_m|^{p-2} |u_n| + \dots + |u_m| |u_n|^{p-2} + |u_n|^{p-1} \right| dx. \quad (12)$$

Следующее ниже утверждение легко доказать, восстанавливая функцию u^2 по своей производной, применяя неравенства Коши и теорему о среднем значении.

Лемма 1. Для абсолютно непрерывной на $[0, l]$ функции u^2 выполняется неравенство

$$u^2 \leq \frac{l+1}{l} \|u\|_{2, \Omega}^2 + \|u_x\|_{2, \Omega}^2.$$

Продолжим его с помощью неравенства Фридрихса, записанного в виде

$$\|u\|_{2, \Omega}^2 \leq \frac{l^2}{8} \|u_x\|_{2, \Omega}^2, \quad (13)$$

и второй из оценок (4):

$$u^2 \leq \frac{l^2 + l + 8}{8} \|u_x\|_{2, \Omega}^2 \leq \frac{l^2 + l + 8}{8a^2} C_1(t) = C_5(t).$$

Очевидно, что при всех $q \geq 1$ слагаемые правой части (12) удовлетворяют неравенству

$$|u|^q = \left(|u|^2\right)^{\frac{q}{2}} \leq C_5^{\frac{q}{2}},$$

откуда следует, что

$$\left| |u_m|^{p-1} + |u_m|^{p-2} |u_n| + \dots + |u_m| |u_n|^{p-2} + |u_n|^{p-1} \right| \leq p C_5^{\frac{p-1}{2}}.$$

Продолжим (12) с учетом данного неравенства, а также вложения $L_2(\Omega)$ в $L_1(\Omega)$ и (13):

$$\left| \|u_m\|_{p,\Omega}^p - \|u_n\|_{p,\Omega}^p \right| \leq p C_5^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} |v| dx \leq p C_5^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{l^2} \|v\|_{2,\Omega} \leq \frac{p}{8} C_5^{\frac{p-1}{2}} \frac{3}{l^2} \|v_x\|_{2,\Omega}. \quad (14)$$

Для второго сомножителя под знаком интеграла в правой части (11) применением первой из оценок (4) последовательно получим

$$\left| \int_{\Omega} v_t \partial_t u_m dx \right| \leq \int_{\Omega} |v_t \partial_t u_m| dx \leq \sqrt{\int_{\Omega} v_t^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_t u_m)^2 dx} \leq \sqrt{C_1(t)} \|v_t\|_{2,\Omega}.$$

Вернемся к (11), чтобы с помощью найденных оценок записать

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{bp}{4} \frac{l^2 + l + 8}{8a^2} l^{\frac{3}{2}} \int_0^t C_1^{\frac{p}{2}}(t) \|v_x\|_{2,\Omega} \|v_t\|_{2,\Omega} dt.$$

Продолжим это неравенство, положив $C_6 = bpl^{\frac{3}{2}}(l^2 + l + 8)/32a^2$:

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \leq C_6 \int_0^t \left(\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + C_1^p \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \right) dt.$$

Предполагая, что $C_1^p \leq a^2$, окончательно получим

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \leq C_6 \int_0^t \left(\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \right) dt.$$

Применяя к нему лемму Гронуолла [5, с. 10], приходим к соотношению

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \leq 0,$$

откуда следует, что

$$\|\partial_t u_m - \partial_t u_n\|_{2,\Omega}^2 = 0, \quad \|\partial_x u_m - \partial_x u_n\|_{2,\Omega}^2 = 0. \quad (15)$$

2. Существование слабого решения

Определение. Функция $u \in L_{\infty}(0, T; H^1(\Omega) \cap L_p(\Omega))$, такая, что $u_t \in L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))$, называется слабым решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет первому из условий (2) и при всех $w \in H^1(\Omega)$ тождеству

$$(u_t, w) + \int_0^t \left(a^2 (u_x, w_x) + b \|u\|_{p,\Omega}^p (u_t, w) \right) dt = 0.$$

Приведем некоторые утверждения, необходимые для доказательства существования решения поставленной задачи.

Лемма 2. Пусть функции u и u_t принадлежат пространствам функций из приведенного определения. Тогда в пространствах $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ и $L_\infty(0, T; H^1(\Omega))$ соответственно имеет место сильная сходимость

$$\partial_t u_m \rightarrow u_t, u_m \rightarrow u. \quad (16)$$

Доказательство. Из (15) следует фундаментальность последовательностей $\partial_t u_m$ и u_m , значит (16) выполняется.

Лемма 3. Пусть последовательность u_m сходится сильно к функции u в пространстве $L_p(Q)$. Тогда в пространстве $L_2(Q)$ имеет место сильная сходимость

$$\|u_m\|_{p, \Omega}^p \rightarrow \|u\|_{p, \Omega}^p.$$

Доказательство. Воспользуемся (14), (15) и (16):

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \left| \|u_m\|_{p, \Omega}^p - \|u\|_{p, \Omega}^p \right|^2 dx dt &\leq \frac{p}{8} l^2 \int_0^t C_3^{\frac{p-1}{2}} \left(\int_\Omega |\partial_x u_m - u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{p}{8} l^2 \int_0^t C_3^{\frac{p-1}{2}} \left(\|\partial_x u_m - u_x\|_{2, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Утверждение леммы следует отсюда при $m \rightarrow \infty$.

Лемма 4 [6, с. 25]. Пусть Q – ограниченная область в R^n , φ_μ и φ такие ограниченные функции из $L_p(Q)$, $1 < p < \infty$, что $\|\varphi_\mu\|_{p, \Omega} \leq C$, $\varphi_\mu \rightarrow \varphi$ почти всюду в Q .

Тогда $\varphi_\mu \rightarrow \varphi$ слабо в $L_p(Q)$.

Перейдем к доказательству существования обобщенного решения задачи (1) – (3).

Теорема 1. При $C_1^p \leq a^2$ существует функция u , являющаяся обобщенным решением задачи (1) – (3).

Доказательство. Применим метод Галеркина, для чего умножим (9) на $\partial_t g_j(t)$ для всех j и просуммируем полученные уравнения:

$$\left(\partial_t^2 u_m, \partial_t u_m \right) + a^2 \left(\partial_x u_m, \partial_{xx}^2 u_m \right) + b \left(\|u_m\|_{p, \Omega}^p \partial_t u_m, \partial_t u_m \right) = 0. \quad (17)$$

Соотношение (17), рассмотренное вместе с (10), является задачей Коши для системы линейных дифференциальных уравнений относительно функций $g_j(t)$, которая, как известно, имеет единственное абсолютно непрерывное решение.

Соответствующие задаче (17), (10) оценки (4) примут вид

$$\|\partial_t u_m\|_{2, \Omega}^2 \leq C_1(t), \quad \|\partial_x u_m\|_{2, \Omega}^2 \leq \frac{C_1(t)}{a^2}, \quad C_1(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (18)$$

Отсюда следует, что в пространствах $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ и $L_\infty(0, T; H^1(\Omega))$ соответственно имеет место слабая сходимость подпоследовательностей $\partial_t u_\mu$ и u_μ :

$$\partial_t u_\mu \rightarrow u_t, u_\mu \rightarrow u. \quad (19)$$

В свою очередь, из свойств компактности вложения $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$ следует, что

$$u_\mu \rightarrow u \text{ сильно в } L_2(Q) \text{ и почти всюду.} \quad (20)$$

Умножим теперь (9) на $\|u_m\|_{p,\Omega}^p g'_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, и просуммируем по j . Для полученного уравнения запишем априорную оценку (7) в виде

$$\int_0^t \left(\|u_m\|_{p,\Omega}^p \|\partial_t u_m\|_{2,\Omega} \right)^2 dt \leq C_6(t),$$

откуда следует, что в пространстве $L_2(Q)$ имеет место слабая сходимость

$$\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p \partial_t u_\mu \rightarrow \chi. \quad (21)$$

Вернемся к (17) и перейдем в этом равенстве к пределу при $m = \mu$. Из (19), (20) и (21) следует выполнение в пространстве $L_\infty(0, T)$ слабой сходимости

$$(\partial_t u_\mu, w_j) \rightarrow (u_t, w_j), \quad (\partial_x u_\mu, \partial_x w_j) \rightarrow (u_x, \partial_x w_j), \quad \left(\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p \partial_t u_\mu, w_j \right) \rightarrow (\chi, w_j).$$

Для того чтобы функция u была обобщенным решением задачи (1) – (3), требуется выполнение равенства $\chi = \|u\|_{p,\Omega}^p u_t$. Его справедливость следует из леммы 4, для применения которой необходимо, чтобы

$$\chi_\mu = \|u_\mu\|_{p,\Omega}^p \partial_t u_\mu \rightarrow \|u\|_{p,\Omega}^p u_t = \chi.$$

Указанная сходимость устанавливается с помощью лемм 2 и 3, а также первого неравенства (18). Следовательно, функция u удовлетворяет уравнению

$$(u_t, w) + \int_0^t \left((u_x, w_x) + \|u\|_{p,\Omega}^p (u_t, w) \right) dt = 0$$

для всех j , то есть является обобщенным решением задачи (1) – (3).

Убедимся в выполнении начальных условий. Обратимся к первому из них. Согласно (19), (20) и (4) следует слабая сходимость $u_\mu(x, 0) \rightarrow u(x, 0)$ в $H^1(Q)$, а из (16) имеем $u_\mu \rightarrow 0$ в $H^1(Q)$, тогда $u(x, 0) = 0$. Аналогично, (20) и (18) означают слабую сходимость $\partial_t u_\mu(x, 0) \rightarrow u_t(x, 0)$ в $L_2(Q)$ и $\partial_t u_\mu(x, 0) \rightarrow 0$. Следовательно, $u_t(x, 0) = 0$.

3. Единственность слабого решения

Теорема 2. Слабое решение задачи (1) – (3) единственно.

Доказательство. Воспользуемся процедурой, применяемой в теории линейных и нелинейных гиперболических уравнений [6, с.28]. Предположим, что задача (1) – (3) имеет два решения – u_1 и u_2 . Записывая для каждого из них уравнение (1), для их разности, где $v = u_1 - u_2$, получим задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} + b \left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t} - \|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} \right) = 0; \quad (21)$$

$$v(x, 0) = 0, v_t(x, 0) = 0. \quad (22)$$

Будем искать решение задачи (21), (22) – функцию

$$v \in L_\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad v_t \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)).$$

Для этого от (21) перейдем к уравнению

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} + b \|u_1\|_{p,\Omega}^p (u_{1t} - u_{2t}) + b u_{2t} \left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p - \|u_2\|_{p,\Omega}^p \right) = 0,$$

умножая которое скалярно на v_t найдём

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_t^2 + a^2 v_x^2) dx + b \|u_1\|_{p,\Omega}^p \int_{\Omega} v_t^2 dx + b (\|u_1\|_{p,\Omega}^p - \|u_2\|_{p,\Omega}^p) \int_{\Omega} v_t u_{2t} dx = 0.$$

После его интегрирования в границах от 0 до t получим

$$\int_{\Omega} (v_t^2 + a^2 v_x^2) dx + 2b \int_0^t \|u_1\|_{p,\Omega}^p \int_{\Omega} v_t^2 dx dt + 2b \int_0^t (\|u_1\|_{p,\Omega}^p - \|u_2\|_{p,\Omega}^p) \int_{\Omega} v_t u_{2t} dx dt = 0.$$

Далее повторяем все рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2. После применения леммы Гронуолла в итоге получаем, что

$$\int_{\Omega} (v_t^2 + a^2 v_x^2) dx \leq 0,$$

то есть

$$\int_{\Omega} ((u_{1t} - u_{2t})^2 + a^2 (u_{1x} - u_{2x})^2) dx = 0.$$

Покажем, что $u_1 = u_2$. Для этого при $s \in (0, T)$ положим

$$w(x, t) = \begin{cases} -\int v(x, \sigma) d\sigma, & t \leq s, \\ 0, & t > s. \end{cases}$$

Пусть, кроме того,

$$v_1(x, t) = \int_0^t v(x, \sigma) d\sigma,$$

откуда следует, что $w(x, t) = v_1(x, t) - v_1(x, s)$ при $t \leq s$.

Рассмотрим скалярное произведение обеих частей (21) с $w(x, t)$:

$$(v_{tt}, w) - a^2 (v_{xx}, w) = b (\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} - \|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}, w),$$

от которого перейдем к равенству

$$\frac{d}{dt} (v_t, w) - (v_t, w_t) + a^2 (v_x, w_x) = b \left(\|u_2\|_{1,\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \|u_1\|_{1,\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial t}, w \right).$$

Его интегрирование по t с учетом того, что $w(x, t) = 0$ при $t > s$, дает

$$-\int_0^s (v_t, w_t) dt - a^2 \int_0^s (v_x, w_x) dt = b \int_0^s (\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} - \|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}, w) dt,$$

а так как $w_t = v$, $w(x, 0) = -v_1(x, s)$, то

$$-\frac{1}{2} (\|v(x, s)\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_1(x, s)\|_{2,\Omega}^2) = b \int_0^s (\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} - \|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}, w) dt.$$

Оценивая правую часть по абсолютной величине, перейдем к неравенству

$$\|v(x, s)\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_1(x, s)\|_{2,\Omega}^2 \leq 2b \int_0^s (\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} - \|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}, w) dt.$$

Обратимся к подынтегральному выражению в правой части, для которого имеем

$$\begin{aligned} \left| \left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} - \|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}, w \right) \right| &\leq \sup \left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p, \|u_2\|_{p,\Omega}^p \right) \int_0^l |v| |w| dx \leq \\ &\leq \left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p + \|u_2\|_{p,\Omega}^p \right) \int_0^l |v| |v_1(x,t) - v_1(x,s)| dx \leq \\ &\leq \left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p + \|u_2\|_{p,\Omega}^p \right) \int_0^l |v| |v_1(x,t) + v_1(x,s)| dx. \end{aligned}$$

Усилим последнее неравенство, оценивая слагаемые в первом сомножителе с помощью (5), а ко второму сомножителю применяя неравенства Гельдера и Фридрихса:

$$\begin{aligned} \left| \left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} - \|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}, w \right) \right| &\leq 2C_2 \|v\|_{2,\Omega} \|v_1(x,t) + v_1(x,s)\|_{2,\Omega} \leq \\ &\leq \frac{lc_1(t)}{8a^2} \left(\|v\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_{1x}\|_{2,\Omega}^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{lbC_1(t)}{4a^2} \int_0^s \left(\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2 \right) dt.$$

Неравенство Гронуолла, примененное к последнему, приводит к равенству

$$\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2 = 0,$$

откуда следует нужный нам результат:

$$v(x,s) = u_1(x,s) - u_2(x,s) = 0,$$

а именно – единственность слабого решения исследуемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бозиев О.Л. Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/51/1.
2. Lions J.-L., Strauss W. Some non-linear evolution equation.// Bulletin de la S. M. F. 1965. V. 93. P. 43–96.
3. Medeiros L.A. On the weak solutions of nonlinear partial differential equations // Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1981. V. 53. No. 1. P. 13–15.
4. Бозиев О.Л. О слабых решениях одного гиперболического уравнения // Сообщения Академии наук Грузинской ССР. 1987. Т. 128. № 3. С. 485–488.
5. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 151 с.
6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.

Статья поступила 02.08.2019 г.

Boziev O.L. (2020) ON WEAK SOLUTIONS OF A LOADED HYPERBOLIC EQUATION WITH HOMOGENEOUS INITIAL CONDITIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/63/1

Keywords: loaded partial differential equations, a priori estimates, weak solution, existence and uniqueness.

A mixed problem with homogeneous initial conditions for the loaded wave equation is considered. It contains an integral over the spatial variable from the natural degree of the solution module. The definition of the weak solution of this problem is introduced, for which the questions of existence and uniqueness are investigated. The compactness method is used to prove the existence of the solution. Its idea is that in proving the convergence of an approximate solution constructed by the Galerkin method, completely continuous embeddings of Sobolev spaces are essentially used. Based on a priori estimates partially established in the previous works of the author, other estimates are established in the proposed article. Following this, approximate Galerkin solutions are constructed. The existence of approximate solutions is proved by the existence theorem for ordinary differential equations. After that, a passage to the limit is performed. The main difficulty of applying the method is in proving the compactness of a family of approximate solutions. For this purpose, theorems on the compactness of embedding Sobolev spaces of a given order in Sobolev spaces of a smaller order are used. The uniqueness of the weak solution is proved by a standard procedure from the theory of hyperbolic equations.

AMS Mathematical Subject Classification: 35L20, 35L72, 35D30.

Oleg L. BOZIEV (Candidate of Physics and Mathematics, associate professor of Kabardino-Balkarian State University; senior staff scientist of Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences., Nalchik, Russian Federation). E-mail: boziev@yandex.ru

REFERENCES

1. Boziev O.L. (2018) Resheniye nelineynogo giperbolicheskogo uravneniya priblizhenno-analiticheskim metodom [Solution of a nonlinear hyperbolic equation by an approximate analytical method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 5–14 DOI: 10.17223/19988621/51/1.
2. Lions J.-L., Strauss W. (1965) Some non-linear evolution equation. *Bulletin de la S. M. F.* 93. pp. 43–96.
3. Medeiros L. A. (1981) On the weak solutions of nonlinear partial differential equations. *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*. 53(1). pp. 13–15.
4. Boziev O.L. (1987) O slabykh resheniyakh odnogo giperbolicheskogo uravneniya [On weak solutions of one hyperbolic equation]. *Soobshcheniya Akademii Nauk Gruzinskoy SSR – Bulletin of the Academy of Sciences of the Georgian SSR*. 128(3). pp. 485–488.
5. Filatov A.N., Sharova L.V. (1976) *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy*. [Integral inequalities and theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka. 151 p.
6. Lions J.-L. (1969) *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris: Dunod Gauthier-Villars.

Received: August 2, 2019

А.В. Иванов

О ФУНКТОРЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР И РАЗМЕРНОСТЯХ КВАНТОВАНИЯ¹

Размерности квантования вероятностной меры, заданной на метрическом компакте, совпадают с размерностями финитной аппроксимации для функтора вероятностных мер. Установлены некоторые функториальные свойства размерностей квантования. Показано, что для любого $b > 0$ существует метрический компакт X_b емкостной размерности $\dim_B X_b = b$, на котором имеются вероятностные меры с носителем равным X , размерность квантования которых принимает все возможные значения из отрезка $[0, b]$.

Ключевые слова: размерность квантования, функтор вероятностных мер, метрика Канторовича – Рубинштейна, размерность финитной аппроксимации.

Размерность финитной аппроксимации в пространствах вида $F(X)$ определена в [1]². Пусть F – полунормальный метризуемый функтор, (X, ρ) – метрический компакт и ρ_F – функториальное продолжение метрики ρ на $F(X)$. Через $F_n(X)$, $n \in N$, обозначим подпространство $F(X)$, состоящее из точек ξ , носитель которых $\text{supp}(\xi)$ содержит не более n элементов. Известно, что объединение подпространств $F_n(X)$, $n \in N$, всюду плотно в $F(X)$. Для каждого $\xi \in F(X)$ и числа $\varepsilon > 0$ положим $N(\xi, \varepsilon) = \min \{n : \rho_F(\xi, F_n(X)) \leq \varepsilon\}$. Для точки ξ с бесконечным носителем число $N(\xi, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow 0$. Скорость этого возрастания характеризует величина

$$\dim_F(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\xi, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon},$$

которую мы называем размерностью финитной аппроксимации ξ (если указанный предел не существует, рассматриваются верхний или нижний пределы, и мы получаем соответственно верхнюю $\overline{\dim}_F(\xi)$ или нижнюю $\underline{\dim}_F(\xi)$ размерности финитной аппроксимации ξ).

Если в качестве F взять функтор экспоненты $\exp$ с метрикой Хаусдорфа, размерность финитной аппроксимации $\dim_F(A)$ для любого $A \in \exp(X)$ совпадает с

¹ Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

² В [1] эта размерность названа «метрическим порядком». Такая терминология была заимствована из работы Л.С.Понтрягина и Л.Г.Шнирельмана [5], где данное понятие было впервые рассмотрено для функтора экспоненты $\exp$. Однако в современных исследованиях в подобных случаях устойчиво используется термин «размерность».

емкостной размерностью $\dim_B(A)$, которая широко исследована и находит приложения в теории динамических систем (см. [2]). Размерность финитной аппроксимации для функтора суперрасширения λ была рассмотрена в [3].

В настоящей работе рассматривается функтор вероятностных мер P с метрикой Канторовича – Рубинштейна. Оказывается, что в этом случае размерность финитной аппроксимации $\dim_P(\mu)$ совпадает с размерностью квантования $D(\mu)$ меры $\mu \in P(X)$. Теория размерностей квантования мотивирована задачами теории вероятностей и построена в терминах этой теории (см. [4]) для вероятностных мер, определенных в R^n (в том числе и мер с компактным носителем), где метрика задается с помощью нормы (при этом размерность $D(\mu)$ не зависит от выбора нормы). Предложенный общий подход распространяет понятие размерности квантования на вероятностные меры, заданные на произвольном метрическом компакте (X, ρ) . В этом случае размерность $D(\mu)$ меры $\mu \in P(X)$ зависит от выбора совместимой с топологией метрики ρ на X и может варьироваться в широких пределах. Показано, что ряд утверждений теории квантования, известных для мер в R^n , остается верным и в общем случае. При этом доказательства этих утверждений, проведенные в терминах метрики и топологии, оказываются более компактными.

Для функтора P справедливо неравенство $\dim_P(\mu) = D(\mu) \leq \dim_B \operatorname{supp}(\mu)$, связывающее размерность квантования меры μ с емкостной размерностью ее носителя, аналог которого выполняется также для суперрасширения и экспоненты (тривиально). С этим неравенством связан вопрос о промежуточных значениях размерности квантования: верно ли, что для любого метрического компакта (X, ρ) и любого числа a , удовлетворяющего неравенствам $0 \leq a \leq \dim_B X$, существует мера $\mu_a \in P(X)$, такая, что $D(\mu_a) = a$ и $\operatorname{supp}(\mu_a) = X$? Для суперрасширения аналогичный вопрос решен положительно [3], для вероятностных мер в общем виде он остается открытым. При этом показано (теорема 1), что для любого $b > 0$ существует метрический компакт X_b размерности $\dim_B X_b = b$, на котором имеются вероятностные меры с носителем равным X , размерность квантования которых принимает все возможные значения из отрезка $[0, b]$.

Автор выражает благодарность профессору А.М. Зубкову, который обратил его внимание на исследования в области квантования вероятностных мер.

Предварительные сведения

Через F мы будем обозначать полунормальный функтор, действующий из категории $\mathbf{Comp}$ компактов и непрерывных отображений в ту же категорию (см. [6]). Для любого полунормального функтора F и любого компакта X имеет место естественное вложение $X \subset F(X)$, и для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ пространство $F(A)$ естественно вкладывается в $F(X)$. Для точки $\xi \in F(X)$ ее носитель $\operatorname{supp}(\xi)$ есть минимальное (по включению) замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\xi \in F(A)$. Для каждого $n \in N$ определено замкнутое подпространство $F_n(X) = \{\xi \in F(X) : |\operatorname{supp}(\xi)| \leq n\} \subset F(X)$. Известно,

что для любого полунормального функтора F и любого компакта X множество $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$ всюду плотно в $F(X)$ (см. [7]).

Функтор F называется *метризуемым* [8], если для любого метрического компакта (X, ρ) на $F(X)$ определена совместимая с топологией метрика ρ_F так, что выполняются следующие условия:

- 1) для любого изометрического вложения $i : (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$ отображение $F(i) : (F(X_1), (\rho_1)_F) \rightarrow (F(X_2), (\rho_2)_F)$ также является изометрическим вложением;
- 2) естественное вложение $(X, \rho) \rightarrow (F(X), \rho_F)$ является изометрией;
- 3) $\text{diam}(F(X)) = \text{diam}(X)$.

Точки с конечными носителями можно считать «простыми» точками $F(X)$ и число элементов в носителе простой точки трактовать как ее «степень сложности»: чем больше элементов, тем «сложнее» точка. Пусть $\xi \in F(X)$ и $\varepsilon > 0$. Очевидно, что наименьшая «степень сложности» ε -приближения³ ξ определяется по формуле

$$N(\xi, \varepsilon) = \min \{n : \rho_F(\xi, F_n(X)) \leq \varepsilon\}.$$

Если точка ξ не является простой, то в силу замкнутости множеств $F_n(X)$ число $N(\xi, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow 0$. Скорость этого возрастания характеризуют верхняя и нижняя размерности финитной аппроксимации ξ :

$$\overline{\dim}_F(\xi) = \inf \{ \alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon) = 0 \} = \sup \{ \alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon) = \infty \},$$

$$\underline{\dim}_F(\xi) = \inf \{ \alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon) = 0 \} = \sup \{ \alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon) = \infty \}.$$

Очевидно, что $0 \leq \underline{\dim}_F(\xi) \leq \overline{\dim}_F(\xi) \leq \infty$. В случае выполнения равенства $\underline{\dim}_F(\xi) = \overline{\dim}_F(\xi)$ для размерностей финитной аппроксимации используется обозначение $\dim_F(\xi)$. В [1] показано, что имеют место следующие равенства:

$$\overline{\dim}_F(\xi) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\xi, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}, \quad \underline{\dim}_F(\xi) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\xi, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}.$$

Справедливо также

Предложение 1 [1]. Пусть монотонно убывающая последовательность ε_n такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, и существует число $c > 0$, такое, что для любого n выполняется неравенство $\varepsilon_{n+1} \geq c\varepsilon_n$. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\xi, \varepsilon_n)}{-\ln \varepsilon_n} = \overline{\dim}_F(\xi), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\xi, \varepsilon_n)}{-\ln \varepsilon_n} = \underline{\dim}_F(\xi).$$

В ряде случаев требуется указывать компакт X , для которого определяются введенные выше понятия. Тогда для $\xi \in F(X)$ мы будем использовать обозначения $N(\xi, \varepsilon, X)$ и $\dim_F(\xi, X)$ соответственно.

Определение 1 [3]. Размерности финитной аппроксимации для функтора F сохраняются при переходе к подпространству, если для любого компакта X ,

³ Точка η называется ε -приближением ξ , если $\rho_F(\xi, \eta) \leq \varepsilon$.

любого его замкнутого подмножества A и любой точки $\xi \in F(A)$ выполняются равенства

$$\overline{\dim}_F(\xi, A) = \overline{\dim}_F(\xi, X), \quad \underline{\dim}_F(\xi, A) = \underline{\dim}_F(\xi, X).$$

Аппроксимационным спектром точки $\xi \in F(X)$ мы будем называть множество $\text{as}(\xi) = \{N(\xi, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Спектр $\text{as}(\xi)$ всегда содержит единицу и является бесконечным множеством, если бесконечен носитель ξ .

Рассмотрим в качестве F функтор экспоненты exp (напомним, что $\text{exp}(X)$ – пространство непустых замкнутых подмножеств компакта X с топологией Вьеториса), метризованный метрикой Хаусдорфа ρ_H . Тогда для любого $A \in \text{exp}(X)$ и $\varepsilon > 0$ число $N(A, \varepsilon)$ есть наименьшее количество ε -шаров⁴, покрывающих A . Таким образом, размерности финитной аппроксимации для функтора exp совпадают соответственно с верхней $\overline{\dim}_B A$ и нижней $\underline{\dim}_B A$ емкостными размерностями множества A (см. [2]). Нетрудно показать, что емкостные размерности сохраняются при переходе к подпространству.

Пример. Аппроксимационные спектры подмножеств отрезка. Легко проверить, что для функтора exp и стандартного канторовского совершенного множества $\Pi \in \text{exp} I$, где I – отрезок $[0, 1]$, имеет место равенство $\text{as}(\Pi) = \{2^{n-1} : n \in \mathbb{N}\}$. При этом $\text{as}(I) = \mathbb{N}$.

Пусть X – компакт и $P(X)$ – пространство вероятностных мер на X со слабой топологией. Для $\mu \in P(X)$ и непрерывной функции $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ через $\mu(g)$ обозначается $\int_X g d\mu$. Для всякого непрерывного отображения компактов $f : X \rightarrow Y$ определено отображение $P(f) : P(X) \rightarrow P(Y)$, действующее по формуле $P(f)(\mu)(A) = \mu(f^{-1}A)$, где $\mu \in P(X)$ и A – борелевское подмножество Y . Известно, что P – нормальный функтор в категории Comp (см. [7]). Функтор P метризуем метрикой Канторовича – Рубинштейна ρ_P (см. [8]), которая определяется следующим образом:

$$\rho_P(\mu_1, \mu_2) = \inf_{X^2} \left\{ \int \rho(x_1, x_2) d\eta : \eta \in P(\pi_1^{-1}(\mu_1) \cap \pi_2^{-1}(\mu_2)) \right\},$$

где π_i , $i = 1, 2$, – проекции X^2 на 1-й и 2-й сомножители соответственно. Известно [9], что

$$\rho_P(\mu_1, \mu_2) = \sup \{ |\mu_1(f) - \mu_2(f)| : f \in \text{Lip}_1(X) \},$$

где $\text{Lip}_1(X)$ – множество нестягивающих отображений метрического компакта (X, ρ) в $\mathbb{R}^1$:

$$f \in \text{Lip}_1(X) \leftrightarrow \forall x, y \in X \quad |f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y).$$

⁴ ε -шаром с центром в точке x в метрическом пространстве (X, ρ) называется множество $B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Свойства размерностей квантования

Предложение 2. Пусть (X, ρ) – метрический компакт, A – конечное подмножество X и $\mu \in P(X)$. Тогда

$$\rho_P(\mu, P(A)) = \int_X \rho(x, A) d\mu.$$

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Положим

$$C_i = \{x \in X : \rho(x, a_i) = \rho(x, A)\} \text{ и } D_i = C_i \setminus \bigcup_{j < i} C_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Легко проверить, что семейство $\{D_i\}$ является разбиением X на борелевские множества. По построению для каждого $x \in D_i$ выполняется равенство $\rho(x, a_i) = \rho(x, A)$. Пусть $\nu = \sum_i \mu(D_i) \delta_{a_i} \in P(A)$. Рассмотрим множество $D = \bigcup_i (D_i \times \{a_i\}) \subset X^2$. Для любого борелевского множества $A \subset X^2$ положим $\eta(A) = \mu(\pi_1(A \cap D))$. Поскольку $\pi_1(D) = X$ и π_1 взаимно однозначно на D , η является вероятностной мерой на X^2 и $\eta(D) = 1$. При этом $P(\pi_1)(\eta) = \mu$, $P(\pi_2)(\eta) = \nu$. Следовательно,

$$\rho_P(\mu, \nu) \leq \int_{X^2} \rho(x_1, x_2) d\eta = \sum_i \int_{D_i \times \{a_i\}} \rho(x_1, a_i) d\eta = \sum_i \int_{D_i} \rho(x, A) d\mu = \int_X \rho(x, A) d\mu. \quad (1)$$

С другой стороны, для каждой меры $\kappa \in P(A)$ имеем

$$\kappa(\rho(x, A)) = \int_A \rho(x, A) d\kappa = 0,$$

поскольку $\rho(x, A) = 0$ при $x \in A$. При этом $\rho(x, A) \in Lip_1(X)$, следовательно,

$$\rho_P(\mu, \kappa) \geq |\mu(\rho(x, A)) - \kappa(\rho(x, A))| = \int_X \rho(x, A) d\mu. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение предложения.

Предложение 3. Аппроксимационный спектр $as(\mu)$ любой вероятностной меры μ с бесконечным носителем равен N .

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $n \in N$ выполняется неравенство $\rho_P(\mu, P_{n+1}(X)) < \rho_P(\mu, P_n(X))$.

Пусть мера $\nu \in P_n(X)$ такова, что $\rho_P(\mu, \nu) = \rho_P(\mu, P_n(X))$, и пусть $\text{supp}(\nu) = A$, $|A| \leq n$. Выберем точку $y \in \text{supp}(\mu) \setminus A$ и положим $A' = A \cup \{y\}$. Покажем, что

$$\rho_P(\mu, P_n(X)) = \int_X \rho(x, A) d\mu > \int_X \rho(x, A') d\mu = \rho_P(\mu, P_{n+1}(A')). \quad (3)$$

Утверждение предложения тем самым будет доказано.

Пусть $a = \rho(y, A)$. Рассмотрим множество $U = \{z \in X : \rho(y, z) < a/3\}$. Поскольку U – окрестность точки $y \in \text{supp}(\mu)$, $\mu(U) > 0$. Для любой точки $x \in U$

$$\rho(x, A) \geq \frac{2}{3}a \text{ и } \rho(x, A') \leq \frac{1}{3}a.$$

Следовательно, $\int_U \rho(x, A) d\mu > \int_U \rho(x, A') d\mu$. При этом всегда $\rho(x, A) \geq \rho(x, A')$.

Поэтому $\int_{X \setminus U} \rho(x, A) d\mu \geq \int_{X \setminus U} \rho(x, A') d\mu$, откуда следует неравенство (3).

Для вероятностных мер, заданных на R^n (метрика в R^n при этом порождается нормой), широко исследованы верхняя и нижняя размерности квантования $\overline{D}$ и $\underline{D}$, которые не зависят от выбора нормы (см. [4]). Эти размерности могут быть определены и для мер $\mu \in P(X)$, заданных на произвольном метрическом компакте (X, ρ) :

$$\overline{D}(\mu) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{-\ln \rho_P(\mu, P_n(X))}, \quad \underline{D}(\mu) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{-\ln \rho_P(\mu, P_n(X))}. \quad (4)$$

У выражений (4) есть недостаток: они не работают для мер с конечным носителем (выражение под знаком логарифма в знаменателе обращается в ноль). При этом имеет место

Предложение 4. Для всякой меры $\mu \in P(X)$ с бесконечным носителем, заданной на метрическом компакте (X, ρ) , размерности квантования совпадают с размерностями финитной аппроксимации:

$$\overline{D}(\mu) = \overline{\dim}_P(\mu), \quad \underline{D}(\mu) = \underline{\dim}_P(\mu).$$

Доказательство. Положим $\rho_P(\mu, P_n(X)) = \varepsilon_n$. В силу равенства $as(\mu) = N$ последовательность ε_n монотонно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. При $\delta \in [\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$ $N(\mu, \delta) = n$.

Следовательно,

$$\frac{\ln n}{-\ln \varepsilon_n} \leq \frac{\ln N(\mu, \delta)}{-\ln \delta} < \frac{\ln n}{-\ln \varepsilon_{n-1}}, \quad (5)$$

при $\delta \in [\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$. Переходя в неравенствах (5) к верхнему и нижнему пределам при $n \rightarrow \infty$ и $\delta \rightarrow 0$, получаем искомые равенства.

Предложение 5. Размерность квантования сохраняется при переходе к подпространству. Для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ и любой меры $\mu \in P(A)$ выполняются равенства

$$\overline{D}(\mu, A) = \overline{D}(\mu, X), \quad \underline{D}(\mu, A) = \underline{D}(\mu, X).$$

Доказательство. Пусть $n = N(\mu, \varepsilon, X)$. Существует мера с конечным носителем $\mu_1 = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i} \in P_n(X)$, такая, что $\rho_P(\mu, \mu_1) \leq \varepsilon$. Для каждой точки x_i из носителя меры μ_1 выберем точку $y_i \in A$ так, что $\rho(x_i, y_i) = \rho(x_i, A)$, и рассмотрим меру $\mu_2 = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{y_i} \in P_n(A)$. Функция $g(x) = \rho(x, A)$ принадлежит $Lip_1(X)$. Кроме того, $\mu(g) = 0$, поскольку $\text{supp}(\mu) \subset A$ и $g(x) = 0$ при $x \in A$. Возьмем произвольную функцию $f \in Lip_1(X)$. Имеем

$$\begin{aligned} |\mu_1(f) - \mu_2(f)| &= |\sum a_i (f(x_i) - f(y_i))| \leq \sum a_i |f(x_i) - f(y_i)| \leq \\ &\leq \sum a_i \rho(x_i, y_i) = \sum a_i \rho(x_i, A) = |\mu_1(g) - \mu_2(g)| \leq \rho_P(\mu_1, \mu) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho_P(\mu_1, \mu_2) \leq \varepsilon$ и, значит, $\rho_P(\mu, \mu_2) \leq 2\varepsilon$. Таким образом, мера μ_2 является 2ε -приближением μ . Следовательно, $N(\mu, 2\varepsilon, A) \leq N(\mu, \varepsilon, X)$. Кроме того, очевидно, что $N(\mu, \varepsilon, X) \leq N(\mu, \varepsilon, A)$. Из этих двух неравенств следует утверждение предложения.

Предложение 6. Для любой меры $\mu \in P(X)$ $\underline{D}(\mu) \leq \underline{\dim}_B \text{supp}(\mu)$, $\overline{D}(\mu) \leq \overline{\dim}_B \text{supp}(\mu)$.

Доказательство. Поскольку размерности квантования и емкостные размерности сохраняются при переходе к подпространству, без ограничения общности можно считать, что $\text{supp}(\mu) = X$. Пусть $N(X, \varepsilon)$ – наименьшее число ε -шаров, покрывающих X , и A – подмножество X мощности $N(X, \varepsilon)$, для которого $\rho(x, A) \leq \varepsilon$ для любого $x \in X$. Тогда $\rho_P(\mu, P(A)) = \int_X \rho(x, A) d\mu \leq \varepsilon$. Таким образом,

для любого $\varepsilon > 0$ $N(\mu, \varepsilon) \leq N(X, \varepsilon)$, откуда следует утверждение предложения.

Пусть $\mu \in P(X)$ и $\varepsilon > 0$. Мере $\nu \in P(X)$ будем называть *оптимальным ε -приближением* μ , если $|\text{supp}(\nu)| = N(\mu, \varepsilon)$ и $\rho_P(\mu, \nu) = \rho_P(\mu, P_{N(\mu, \varepsilon)}(X))$. Будем говорить, что конечное множество $A \subset X$ является *n -оптимальным* для меры $\mu \in P(X)$, если $|A| = n$ и $\rho_P(\mu, P_n(X)) = \rho_P(\mu, P(A))$.

Предложение 7. Пусть $\mu_i \in P(X)$, $i = 1, \dots, k$, – конечный набор мер и для каждого i определена размерность $D(\mu_i)$. Тогда для любой вероятностной меры вида $\mu = \sum_i p_i \mu_i$, где $p_i > 0$ и $\sum_i p_i = 1$, справедливо равенство $D(\mu) = \max_i D(\mu_i)$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть ν_i – оптимальные ε -приближения мер μ_i соответственно ($i = 1, \dots, k$). Тогда мера $\nu = \sum_i p_i \nu_i$ является ε -приближением меры μ . При этом $\text{supp}(\nu) = \bigcup_i \text{supp}(\nu_i)$. Следовательно,

$$N(\mu, \varepsilon) \leq \sum_i N(\mu_i, \varepsilon). \quad (6)$$

Пусть j таково, что $D(\mu_j) = \max_i D(\mu_i)$ и ν' – оптимальное $p_j \varepsilon$ -приближение меры μ_j . Пусть $\text{supp}(\nu') = A$, тогда $|A| = N(\mu_j, p_j \varepsilon)$. Имеем:

$$p_j \varepsilon \geq \rho_P(\mu, \nu') = \rho_P(\mu, P(A)) = \int_X \rho(x, A) d\mu = \sum_i p_i \int_X \rho(x, A) d\mu_i.$$

$$\rho_P(\mu_j, P(A)) = \int_X \rho(x, A) d\mu_j \leq \varepsilon. \text{ Таким образом, } N(\mu_j, \varepsilon) \leq N(\mu, p_j \varepsilon). \text{ Откуда в силу}$$

(6) получаем, что

$$N(\mu_j, \frac{\varepsilon}{p_j}) \leq N(\mu, \varepsilon) \leq \sum_i N(\mu_i, \varepsilon). \quad (7)$$

Из неравенств (7) и выбора меры μ_j следует утверждение предложения.

Предложение 8. Для любого метрического компакта (X, ρ) существует мера $\mu \in P(X)$ такая, что $\text{supp}(\mu) = X$ и $D(\mu) = 0$.

Доказательство. Пусть $\{x_k : k \in N\}$ – счетное всюду плотное подмножество X , состоящее из попарно различных точек (для конечного X утверждение пред-

ложения очевидно). Положим $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_{x_k}$. Очевидно, что $\text{supp}(\mu) = X$. Пусть $A_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. В силу предложения 2

$$\rho_P(\mu, P(A_n)) = \int_X \rho(x, A_n) d\mu = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \rho(x_k, A_n) \leq \frac{1}{2^n} \text{diam}(X) = \varepsilon_n.$$

Следовательно, $N(\mu, \varepsilon_n) \leq n$. Откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\mu, \varepsilon_n)}{-\ln \varepsilon_n} = 0$. Таким образом, в силу предложения 1 $D(\mu) = 0$.

Теорема 1. Для любого $b: 0 \leq b \leq \infty$ существует компактное метрическое пространство X_b с единственной неизолированной точкой, такое, что $\dim_B X_b = b$, и для любого $a \in [0, b]$ существует вероятностная мера $\mu_a \in P(X_b)$, для которой $D(\mu_a) = a$ и $\text{supp}(\mu_a) = X_b$.

Доказательство. Положим $X_b = \bigcup_{i \in N} Z_i \cup \{p\}$, где Z_i – попарно дизъюнктные конечные множества, не содержащие точку p . При этом $|Z_i| = [2^{bi}]$, если $b < \infty$, и $|Z_i| = 2^{i^2}$ при $b = \infty$. Метрику ρ на X_b зададим следующим образом: если $x \in Z_i$, $y \in Z_j$ ($x \neq y$), то $\rho(x, y) = \frac{1}{2^{\min(i, j)}}$, и $\rho(x, p) = \frac{1}{2^i}$ при $x \in Z_i$. Легко видеть, что X_b – компактное метрическое пространство с единственной неизолированной точкой p .

Вычислим емкостную размерность $\dim_B X_b$. При $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ любая ε_k -сеть в X_b содержит $\bigcup_{i < k} Z_i$. При этом множество $\bigcup_{i < k} Z_i \cup \{p\}$ является ε_k -сетью в X_b . Следовательно, $N(X_b, \varepsilon_k) = \sum_{i < k} |Z_i| + 1$. Откуда в силу предложения 1 $\dim_B X_b = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(X_b, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k} = b$.

Случай $b = 0$ тривиален, поэтому дальнейшие рассуждения будем вести в предположении $b > 0$. Определим меру μ_b на X_b следующим образом. Пусть $c = \sum_{i \in N} \frac{1}{i^2}$. При $x \in Z_i$ положим $\mu_b(\{x\}) = \frac{1}{ci^2 |Z_i|}$, для точки p $\mu_b(\{p\}) = 0$. Меру произвольного подмножества $A \subset X_b$ определим как сумму мер его точек. Легко проверить, что $\mu_b \in P(X_b)$.

Вычислим размерность квантования меры μ_b . Пусть $n_k = \sum_{i \leq k} |Z_i| + 1$, где $k \in N$. В дальнейшем нас будет интересовать поведение n_k при $k \rightarrow \infty$, так что при необходимости будем считать, что k достаточно велико. Покажем, что множество $A = \bigcup_{i \leq k} Z_i \cup \{p\}$ мощности $|A| = n_k$ является n_k -оптимальным для меры μ_b .

Пусть B – произвольное n_k -оптимальное подмножество для μ_b . Покажем, что $p \in B$. Предположим противное. Пусть $i = \max\{j: B \cap Z_j \neq \emptyset\}$ и $y \in B \cap Z_i$.

Рассмотрим множество $B' = B \cup \{p\} \setminus \{y\}$ и покажем, что $\rho_P(\mu_b, P(B')) < \rho_P(\mu_b, P(B))$. В силу предложения 2 имеем

$$\rho_P(\mu_b, P(B)) = \int_{X_b} \rho(x, B) d\mu = \sum_{x \in X \setminus B} \rho(x, B) \mu_b(\{x\}). \quad (8)$$

Аналогично

$$\rho_P(\mu_b, P(B')) = \sum_{x \in X \setminus B'} \rho(x, B') \mu_b(\{x\}). \quad (9)$$

В силу определения метрики ρ для всех точек $x \notin B$

$$\rho(x, B) \geq \rho(x, B'). \quad (10)$$

В сумме, стоящей в правой части равенства (9), есть положительное слагаемое

$$\rho(y, B') \mu_b(\{y\}) = \frac{1}{2^i c i^2 |Z_i|}, \quad (11)$$

которого нет в сумме (8). При этом для любого $x \in Z_{i+1}$ справедливо равенство

$$\rho(x, B) = 2\rho(x, B') = \frac{1}{2^i}. \text{ Следовательно,}$$

$$\sum_{x \in Z_{i+1}} (\rho(x, B) - \rho(x, B')) \mu_b(\{x\}) = \frac{1}{2^{i+1} c (i+1)^2}. \quad (12)$$

При достаточно больших i имеет место неравенство $\frac{1}{2^{i+1} c (i+1)^2} > \frac{1}{2^i c i^2 |Z_i|}$.

Таким образом, в силу (10), (11) и (12) $\rho_P(\mu_b, P(B)) > \rho_P(\mu_b, P(B'))$, то есть B не является n_k -оптимальным множеством для меры μ_b (при достаточно больших k).

Итак, если B – оптимальное множество для меры μ_b мощности n_k , то $p \in B$. Покажем теперь, что $\bigcup_{i \leq k} Z_i \subset B$. Предположим, что существует точка $y \in Z_i \setminus B$, где $i \leq k$. Тогда в B найдется точка $z \in Z_j \cap B$ при $j > k$. Положим $B' = B \cup \{y\} \setminus \{z\}$. Поскольку при $x \notin B \cup \{y\}$ $\rho(x, B) = \rho(x, B')$ и $\rho(y, B) \mu_b(\{y\}) > \rho(z, B') \mu_b(\{z\})$, мы получаем неравенство $\rho_P(\mu_b, P(B)) > \rho_P(\mu_b, P(B'))$, противоречащее оптимальности B .

Таким образом, n_k -оптимальное множество B , которое заведомо существует, совпадает с A , что и требовалось. Положим

$$\varepsilon_k = \rho_P(\mu_b, P(A)) = \sum_{i > k} \int_{Z_i} \rho(x, A) d\mu_b = \sum_{i > k} \frac{1}{2^i c i^2}. \quad (13)$$

Из определения ε_k и n_k -оптимальности A следует равенство $N(\mu_b, \varepsilon_k) = n_k = \sum_{i \leq k} |Z_i| + 1$.

Обозначим для краткости через a_i i -й член ряда из (13): $a_i = \frac{1}{2^i c i^2}$. Поскольку

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{1}{2}, \text{ для больших } i \text{ заведомо выполняется неравенство } a_{i+1} > \frac{1}{4} a_i.$$

Откуда следует, что $\varepsilon_{k+1} > \frac{1}{4}\varepsilon_k$ при больших k . Таким образом, в силу предложения 1 при $b < \infty$

$$\begin{aligned} b = \dim_B X_b &\geq \underline{D}(\mu_b) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\mu_b, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{i \leq k} [2^{bi}] + 1)}{-\ln \sum_{i > k} \frac{1}{2^i c i^2}} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln[2^{bk}]}{\ln(2^{k+1} c(k+1)^2)} = b. \end{aligned}$$

Следовательно, $\underline{D}(\mu_b) = b$. Поскольку $\dim_B X_b \geq \overline{D}(\mu_b) \geq \underline{D}(\mu_b)$, имеют место равенства $\overline{D}(\mu_b) = \underline{D}(\mu_b) = b$.

Аналогично, при $b = \infty$

$$\underline{D}(\mu_b) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{i \leq k} 2^{i^2} + 1)}{-\ln \sum_{i > k} \frac{1}{2^i c i^2}} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{k^2}}{\ln(2^{k+1} c(k+1)^2)} = \infty$$

и, следовательно, $D(\mu_b) = \infty$.

Пусть теперь $a < b$. В каждом множестве Z_i выберем подмножество Z'_i мощности $|Z'_i| = [2^{ai}]$ и положим $X_a = \bigcup_i Z'_i \cup \{p\}$. Очевидно, что X_a является замкнутым подпространством X_b . На X_a рассмотрим меру μ_a , которая определяется аналогично мере μ_b на X_b . Поскольку размерность квантования сохраняется при переходе к подпространству, мы получаем, что $D(\mu_a) = a$ в $P(X_b)$. При этом $\text{supp}(\mu_a) = X_a$. Рассмотрим вероятностную меру ν на X_b , для которой $D(\nu) = 0$ и $\text{supp}(\nu) = X_b$ (ν существует в силу предложения 8). Положим $\mu'_a = \frac{1}{2}(\mu_a + \nu) \in P(X_b)$. Очевидно, что $\text{supp}(\mu'_a) = X_b$. При этом в силу предложения 7 $D(\mu'_a) = a$. Теорема доказана.

Замечание. Все пространства X_b гомеоморфны сходящейся последовательности S . Из теоремы 1 и предложения 6 следует, что размерность квантования фиксированной меры $\mu \in P(S)$ зависит от метрики на S и может варьироваться от нуля до бесконечности (включительно).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanov A.V.* On metric order of the spaces of the form $F(X)$ // Topology and its Applications. 2017. V. 221. P. 107–113. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.051.
2. *Песин Я.Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.
3. *Иванов А.В., Фомкина О.В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2019. № 7. С. 5–14. DOI: 10.17076/mat1034.
4. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of Quantization for Probability Distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p.

5. Pontryagin L., Shnirelman L. On one metric property of dimension // Annals of Mathematics. 1932. No. 33. P. 156–162.
6. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.
7. Fedorchuk V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. V. 76. P. 125–150.
8. Федорчук В.В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т. 54. № 2. С. 396–417.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

Статья поступила 29.10. 2019 г.

Ivanov A.V. (2020) ON THE FUNCTOR OF PROBABILITY MEASURES AND QUANTIZATION DIMENSIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 15–26

DOI 10.17223/19988621/63/2

Keywords: quantization dimension, functor of probability measures, Kantorovich–Rubinstein metric, dimension of finite approximation.

Let F be a seminormal metrizable functor, (X, ρ) a metric compact, ρ_F a functorial extension of the metric ρ to $F(X)$, and let $F_n(X)$ be the subspace of $F(X)$ consisting of points ξ , the support $\text{supp}(\xi)$ of which contains not more than n elements ($n \in \mathbb{N}$). For each $\xi \in F(X)$ and a real number $\varepsilon > 0$ we set $N(\xi, \varepsilon) = \min\{n : \rho_F(\xi, F_n(X)) \leq \varepsilon\}$ ($N(\xi, \varepsilon)$ is well defined since $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$ is everywhere dense in $F(X)$). For any point $\xi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$ the number $N(\xi, \varepsilon)$ increases unlimitedly as $\varepsilon \rightarrow 0$. The rate of this increase is characterized by

$$\dim_F(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\xi, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon},$$

which we call the dimension of finite approximation of the point ξ (if the specified limit does not exist, we consider the upper or lower limits and get the upper $\overline{\dim}_F(\xi)$ or the lower $\underline{\dim}_F(\xi)$ dimensions of finite approximation).

For the probability functor P , which is metrized by the Kantorovich–Rubinstein metric, the dimension of finite approximation $\dim_P(\xi)$ coincides with the quantization dimension $D(\mu)$ of the measure $\mu \in P(X)$. The theory of quantization dimensions is motivated by problems of probability theory and is constructed in terms of this theory for probability measures defined in R^n (where the metric is defined by the norm; in this case the dimension $D(\mu)$ is independent of the choice of the norm). The proposed functorial approach extends the notion of quantization dimension to probability measures defined on an arbitrary metric compact (X, ρ) . In this case, the dimension $D(\mu)$ of the measure $\mu \in P(X)$ depends on the choice of the metric ρ compatible with the topology on X and can vary widely. It is shown that a number of statements of the theory of quantization, known for measures in R^n , remains true in the general case. Moreover, the proofs of these statements, carried out in terms of metric and topology, are more compact.

It is proved that for any $b \in [0, \infty]$ there is a metric compact X_b such that the box-dimension $\dim_B X_b = b$; on X_b , there exist probability measures with the support equal to X_b quantization dimensions of which take all possible values from the interval $[0, b]$.

Financial support. The study was carried out under state order to the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

AMS Mathematical Subject Classification: 54B30, 60B05

Aleksandr V. IVANOV (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mathematics of Karelian Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russian Federation).
E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. *Ivanov A. V.* (2017) On metric order of the spaces of the form $F(X)$. *Topology and its Applications*. 221. pp. 107–113. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.051.
2. *Pesin Ya.B.* (1997) *Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications*. The University of Chicago Press. 397 p.
3. *Ivanov A.V., Fomkina O.V.* (2019) On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions. *Trans. of Karelian Research Centre of RAS*. 7. pp. 3–12. DOI: 10.17076/mat1034.
4. *Graf S., Luschgy H.* (2000) *Foundations of Quantization for Probability Distributions*. Springer-Verlag. 231 p.
5. *Pontryagin L., Shnirelman L.* (1932) On one metric property of dimension. *Annals of Mathematics*. 33. pp. 156–162.
6. *Fedorchuk V.V., Filippov V.V.* (1988) *General topology. Basic constructions*. MSU Press. 252 p.
7. *Fedorchuk V., Todorčević S.* (1997) Cellularity of covariant functors. *Topology and its Applications*. 76. pp. 125–150.
8. *Fedorchuk V.V.* Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Math. USSR Izv.* 36(2). pp. 411–433.
9. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* (1977) *Functional analysis*. Moscow: Nauka.

Received: October 29, 2019

УДК 512.541
DOI 10.17223/19988621/63/3

MSC: 20K15, 20K21

Нгуен Тхи Куннь Чанг

АБЕЛЕВЫ SACR-ГРУППЫ

Абелевы группы, на которых любое кольцо является ассоциативным и коммутативным, называются SACR-группами. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Абелева группа G называется TI-группой, если любое ассоциативное кольцо на G является филиальным. Получено описание однородных вполне разложимых факторно делимых абелевых SACR-групп, а также показано, что любая неразложимая абелева группа без кручения ранга 2 является SACR-группой. В частности, получено описание TI-групп в классе неразложимых абелевых групп без кручения ранга 2.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на группе, SACR-группы, TI-группы.

Одним из направлений теории аддитивных групп колец является изучение абелевых групп, на которых любое кольцо принадлежит определённому классу. Для определения кольцевой структуры на абелевой группе G необходимо указать гомоморфизм $\mu: G \otimes G \rightarrow G$, который называется умножением на группе G . Умножение задает структуру кольца на группе G . Изучению аддитивных групп колец посвящен целый раздел в знаковой монографии Л. Фукса [1], наиболее полный обзор содержится в двухтомной монографии С. Фейгельстока [2].

Проблема изучения взаимосвязи между строением абелевой группы и свойствами колец на ней весьма многогранна. В [3] изучаются абелевы группы, на которых любое кольцо коммутативно, такие группы называются CR-группами. В связи с этим в [3] введено понятие SACR-группы (от «Strongly Associative and Commutative Ring»), SACR-группа — это абелева группа, на которой любое кольцо является ассоциативным и коммутативным. В той же работе, показано, что в классе всех периодических абелевых групп понятия CR-группы и SACR-группы эквивалентны. До настоящего времени CR-группы и SACR-группы были описаны в классах абелевых групп: периодических групп [3], вполне разложимых групп без кручения [4], алгебраически компактных групп [5]. Далее, в настоящей работе мы рассматриваем аддитивные группы филиальных колец. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Согласно [6], подкольцо A ассоциативного кольца R называется метаидеалом индекса n , если существует такой ряд $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = R$, что A_i является идеалом A_{i+1} для всех $i = 0, \dots, n-1$. Нетрудно видеть, что ассоциативное кольцо является филиальным тогда и только тогда, когда в нем отношение «быть идеалами» транзитивно [7]. Филиальные кольца систематически изучались многими авторами, наиболее значительные результаты содержатся в [7–9]. В [10] Р. Андрушкевич и М. Воронович ввели понятие TI-группы, т.е. такой абелевой группы G , что любое ассоциативное кольцо с аддитивной группой G филиально. Проблема изучения TI-групп сформулирована в [10], там же получено

описание периодических ТП-групп. Кроме того, что ТП-группы были описаны в классах абелевых групп: алгебраически компактных групп [5], почти вполне разложимых групп [11].

Настоящая работа посвящена изучению аддитивных групп ассоциативных и коммутативных колец. В разделе 1, получено описание однородных вполне разложимых факторно делимых SACR-групп (теорема 7). Доказательство этой теоремы опирается на теорему о том, что любая факторно делимая группа ранга 1 является SACR-группой. Далее, в разделе 2 показано, что любая неразложимая группа без кручения ранга 2 является SACR-группой. Кроме того, доказано, что понятие ТП-группы и nil-группы в классе неразложимых групп без кручения ранга 2 эквивалентны. До настоящего времени все найденные ТП-группы без кручения являются SACR-группами. Однако обратное утверждение неверно, пример приведен в разделе 2.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа». Будем использовать следующие обозначения и определения. Умножение $\mu: G \otimes G \rightarrow G$ на группе G часто обозначается также знаком $\times$ и т.п., т.е. $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ определяет кольцо на группе G , которое обозначается $(G, \times)$. Кольцо $(G, \times)$ называется нуль-кольцом, если $g_1 \times g_2 = 0$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Группа G называется nil-группой, если любое кольцо на G является нуль-кольцом. Как обычно, $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{P}$ — множества натуральных, целых неотрицательных, всех простых чисел соответственно, $\mathbb{Z}$ — группа (кольцо) всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ — группа (поле) всех рациональных чисел, $\mathbb{Z}(n)$ — циклическая группа порядка n , $\mathbb{Z}_n$ — кольцо $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Через $\hat{\mathbb{Z}}_p, \mathbb{Q}_p^*$ обозначим аддитивную группу и кольцо целых p -адических чисел соответственно. Пусть G — группа, $g \in G$ и $(G, \times)$ — кольцо на G , через $(g)_\times$ обозначим идеал кольца $(G, \times)$, порожденный элементом g , $\langle g \rangle_*$ — сервантная подгруппа, порожденная элементом g , $\chi(g)$ — характеристика элемента g , $o(g)$ — порядок элемента g . Под $T(G)$ понимается частично упорядоченное множество типов $t(g)$ для $g \in G \setminus \{0\}$, $r(G)$ — ранг группы G . Элемент прямого произведения $G = \prod_{i \in I} G_i$ групп G_i ($i \in I$) будем записывать в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$ для всех $i \in I$. За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [1].

1. Однородные факторно делимые SACR-группы

В этом разделе описаны однородные вполне разложимые факторно делимые SACR-группы. Понятие факторно делимой группы было введено Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в [12] для описания групп, допускающих кольцевую структуру, которая вкладывается в полупростую сепарабельную алгебру. В совместной работе А.А. Фомина и У. Уиклесса [13], это понятие распространено на случай смешанных групп, в той же работе показано, что смешанные факторно делимые группы двойственны группам без кручения конечного ранга.

Определение 1 [13]. Группа G называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую, что G/F — делимая периодическая группа.

Базисом и рангом факторно делимой группы G будем называть всякий базис и ранг свободной группы F .

Несмотря на то, что факторно делимые группы широко изучаются в алгебраической литературе (см. [13–17]), многие свойства колец на таких группах до сих пор не исследованы. В настоящее время класс факторно делимых групп — один из самых исследуемых в теории абелевых групп. В [16] получено описание факторно делимых групп ранга 1 с помощью кохарактеристик. Известно, что умножение на произвольной группе продолжается однозначно до умножения на её сервантно-инъективной и копериодических оболочках, в связи с этим при изучении колец на факторно делимых группах возникает необходимость исследования кольцевых структур на алгебраически компактных группах. Описание всех умножений на редуцированной алгебраически компактной группе получено в [18].

Предложение 2 [5]. Редуцированная алгебраически компактная группа A является SACR-группой тогда и только тогда, когда $A = \prod_{p \in P_0} A_p$, где $P_0 \subseteq P$,

$$A_p = \hat{\mathbb{Z}}_p \text{ или } A_p = \mathbb{Z}(p^k) \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ при любом } p \in P_0.$$

Лемма 3. Пусть G — редуцированная факторно делимая группа ранга 1, являющаяся подгруппой группы $A = \prod_{p \in P_0} A_p$, где $P_0 \subseteq P$, $A_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ или $A_p = \mathbb{Z}(p^k)$ ($k \in \mathbb{N}$) при любом $p \in P_0$. Тогда любое умножение на G может быть продолжено до умножения на группе A .

Доказательство. Покажем, что фактор-группа A/G — делима, то есть она является p -делимой группой для любого простого числа p . Фиксируем простое число p . Тогда $A = A_p \oplus A'$, где $A' = \prod_{q \neq p} A_q$, q — простое число. Группа A

может быть представлена в виде $A = \prod_p \mathbb{Q}_p^* e_p$, где $o(e_p) = \infty$ или

$o(e_p) = p^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Согласно [18], на группе A существует такое умножение $\cdot$, что $e_p \cdot e_p = e_p$ и $e_p \cdot e_q = 0$ при любом простом $q \neq p$. Ясно, что кольцо $(A, \cdot)$ ассоциативно и коммутативно по предложению 2 и $e = (e_p)_p$ — единица этого кольца. Пусть $g \in A$. Запишем элементы e и g в виде $e = e_p + e'$, $g = g_p + g'$, где $e_p, g_p \in A_p$ и $e', g' \in A'$. Тогда найдутся целые числа s_i , $0 < s_i < p-1$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) и $x \in \mathbb{Q}_p^*$ такие, что $g_p = (s_0 + s_1 p + \dots + s_{k-1} p^{k-1} + p^k x) e_p$ ($k \in \mathbb{N}$).

Положим $m = s_0 + s_1 p + \dots + s_{k-1} p^{k-1}$. Тогда получаем, что $g_p = (m + p^k x) e_p$, где $m, k \in \mathbb{N}$. Так как G — редуцированная факторно делимая группа ранга 1, то группа G изоморфна аддитивной группе кольца $R^\chi = \langle e \rangle_*$ [16, теорема 4], откуда, $me \in G$. Тогда имеем

$$g + G = g - me + G = (g_p + g') - m(e_p + e') + G = (g_p - me_p) + (g' - me') + G.$$

Так как $g' - me' \in A'$ и A' является p -делимой группой, то $g' - me'$ делится на любую степень простого числа p . Кроме того, $g_p - me_p = p^k x$, то есть $g_p - me_p$ делится на p^k для произвольного натурального числа k . Следовательно, A/G — p -делима для всех $p \in P$ и, значит, A/G — делима. Следовательно, A является сервантно-инъективной оболочкой группы G по лемме 48.1 в [1]. В силу теоремы 119.3 в [1] получаем, что любое умножение на группе G продолжается до умножения на A .

Теорема 4. Пусть G — факторно делимая группа ранга 1. Тогда G является SACR-группой.

Доказательство. Пусть G — факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики $\chi = (m_p)$. Тогда определим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} A_p$, где $\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$, если $m_p < \infty$, и

$A_p = \mathbb{Q}_p^*$, если $m_p = \infty$. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. χ принадлежит нулевому типу и соответствует целому неотрицательному числу m . В силу теоремы 4 в [16] группу G можно представить в виде $G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}(m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$). Так как $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}(m)$ — вполне характеристические подгруппы группы G , то разложение группы G также является и разложением в кольцевом смысле. Нетрудно убедиться, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}(m)$ являются SACR-группами, тогда любое кольцо на группе G ассоциативно и коммутативно.

Случай 2. χ принадлежит ненулевому типу. В этом случае, группа G изоморфна аддитивной группе кольца R^χ , где $R^\chi = \langle e \rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$, e — единица кольца $\mathbb{Z}_\chi$ [16, теорема 4]. В силу предложения 2 аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}_\chi$ — SACR-группа. Откуда любое кольцо на G ассоциативно и коммутативно по лемме 4. Таким образом, G является SACR-группой.

Теперь перейдем к описанию однородных вполне разложимых факторно делимых SACR-групп.

Замечание 5. Всякое ненулевое прямое слагаемое SACR-группы является SACR-группой. Однако прямая сумма и прямое произведение SACR-групп не обязаны быть SACR-группами.

Определение 6 [17]. Факторно делимая группа G называется вполне разложимой, если она раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. Если все эти факторно делимые группы ранга 1 изоморфны между собой, то есть определяются одной и той же кохарактеристикой χ , то группа G называется однородной вполне разложимой факторно делимой группой кохарактеристики χ . Таким образом, однородная вполне разложимая факторно делимая группа $G = \bigoplus_n R^\chi$ полностью определяется своим рангом n и кохарактеристикой χ .

Теорема 7. Пусть G — однородная вполне разложимая факторно делимая группа кохарактеристики $\chi = (m_p)$. Группа G является SACR-группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$.

Доказательство. Пусть $G = \bigoplus_n G_i$, где $G_i \cong \langle R^\chi, + \rangle$ и G — SACR-группа. Если $r(G) = 1$, то по теореме 4 G является SACR-группой. Допустим, $r(G) > 1$. Без потери общности можно считать, что $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G'$, где G_1, G_2 — факторно делимые группы ранга 1, G' — однородная вполне разложимая факторно делимая группа кохарактеристики χ . Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. Если в χ есть m_p , такое, что $0 < m_p < \infty$, то группы G_1 и G_2 можно записать в виде $G_1 = \mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus G'_1$, $G_2 = \mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus G'_2$. Откуда $\mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus \mathbb{Z}(p^{m_p})$ служит прямым слагаемым для группы G . В силу теоремы 5 в [3], существует некоммутативное кольцо на $\mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus \mathbb{Z}(p^{m_p})$. Следовательно, $\mathbb{Z}(p^{m_p}) \oplus \mathbb{Z}(p^{m_p})$, и G не являются SACR-группами.

Случай 2. Если в χ нет конечных ненулевых чисел m_p , то в χ содержатся только 0 и символ ∞ . Тогда G_i — группа без кручения ранга 1 идемпотентного типа по предложению 5.15 в [15]. Отсюда $G = \bigoplus_n G_i$ — однородная вполне разложимая группа идемпотентного типа. Согласно теореме 8 в [3], существует некоммутативное кольцо на G и, значит, G не является SACR-группой.

Во всех случаях получилось противоречие, следовательно, $r(G) = 1$.

2. Неразложимые SACR-группы, ПГ-группы без кручения 2

Напомним, что в классе вполне разложимых групп без кручения описаны SACR-группы [3] и ПГ-группы [11]. В свою очередь, SACR-группы и ПГ-группы изучаются в классе неразложимых групп без кручения ранга 2. Кольцам на неразложимых группах без кручения ранга 2 посвящены многие работы (см. [19–23]).

Теорема 8 [19]. Пусть G — неразложимая группа без кручения ранга 2. Если G допускает ненулевую кольцевую структуру, то $T(G)$ содержит единственный минимальный тип и не более 3 типов.

Замечание 9. Согласно доказательству теоремы 8, неразложимая группа без кручения ранга 2 G не является ПГ-группой тогда и только тогда, когда выполняется один из следующих случаев:

- 1) $|T(G)| = 1$, причем этот тип обязан быть идемпотентным;
- 2) $|T(G)| = 2$, причем один из них минимален, а другой максимален;
- 3) $|T(G)| = 3$, причем один из этих типов минимален, а два других максимальны; в этом случае один из максимальных типов обязан быть идемпотентным.

Для изучения взаимосвязи между ПГ- и ПГ-группами введём следующее определение. Будем говорить, что $T(G)$ удовлетворяет (*nil*)-условию, если ни одно из предыдущих условий не выполняется.

Теорема 10. Пусть G — однородная неразложимая группа без кручения ранга 2. Тогда G является SACR-группой. Более того, G является ПГ-группой тогда и только тогда, когда G имеет неидемпотентный тип.

Доказательство. Утверждение о том, что G является SACR-группой следует из теоремы 4.5 в [23]. Теперь докажем второе утверждение.

Пусть G — однородная неразложимая группа без кручения ранга 2 неидемпотентного типа. В силу замечания 9, G — nil-группа, откуда G является TI-группой.

Обратно, пусть G — TI-группа. Допустим, что G имеет идемпотентный тип. Согласно теореме 1 в [8], кольцо $(G, \times)$ — филиально тогда и только тогда, когда

$$(g)_\times = (g)_\times^2 + \mathbb{Z}g$$

для любого $g \in G$. Пусть $\{x, y\}$ — множество независимых элементов в группе G . Определим кольцо $(G, \times)$ на G , положив

$$x \times x = mx, \quad x \times y = y \times x = my, \quad y \times y = 0,$$

где m — положительное целое число. В кольце $(G, \times)$ рассмотрим множество

$$I = (y)_\times = mRy + \mathbb{Z}y,$$

где R — такая подгруппа группы $\mathbb{Q}$, что $x \times x = mx, x \times y = y \times x = my, y \times y = my$ является кольцом на G . С другой стороны,

$$J = (y)_\times^2 + \mathbb{Z}y = 0 + \mathbb{Z}y = \mathbb{Z}y.$$

Ясно, что $R \neq \mathbb{Z}$, откуда $I \neq J$ и, значит, $(G, \times)$ не филиально, получается противоречие. Следовательно, G — группа неидемпотентного типа.

Лемма 11. Пусть G — неразложимая группа без кручения ранга 2, $T(G) = \{t_1, t_2 \mid t_1 < t_2\}$. Тогда G является SACR-группой, но не является TI-группой.

Доказательство. Пусть $x, y \in G$, такие, что $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. В силу леммы 3 в [21], любое кольцо $(G, \times)$ на G определяется следующим образом:

$$x \times x = ay, \quad x \times y = y \times x = y \times y = 0,$$

для некоторого $a \in \mathbb{Q}$. Нетрудно проверить, что $(G, \times)$ ассоциативно и коммутативно. Следовательно, G является SACR-группой. Теперь определим кольцо $(G, \times)$ на G , положив

$$x \times x = y, \quad x \times y = y \times x = y \times y = 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 10 получаем, что кольцо $(G, \times)$ не филиально. Таким образом, G не является TI-группой.

Пример. Пусть $G = \left\langle \frac{1}{p}x, \frac{1}{p^2}x + \frac{1}{p^5}y \right\rangle$ для всех $p \in P$. Тогда $T(G) = \{t_1, t_2 \mid t_1 < t_2\}$, где $t_1 = (1, 1, \dots)$ и $t_2 = (4, 4, \dots)$. Определим кольцо $(G, \times)$ на G , положив $x \times x = y, x \times y = y \times x = y \times y = 0$. Имеем: $(x)_\times = \frac{1}{p}\mathbb{Z}y + \frac{1}{p^2}\mathbb{Z}y + \mathbb{Z}x$, и $(x)_\times^2 + \mathbb{Z}x = \mathbb{Z}y + \mathbb{Z}x$. Следовательно, $(x)_\times \neq (x)_\times^2 + \mathbb{Z}x$, откуда $(G, \times)$ не филиально. Значит, G не является TI-группой.

Лемма 12. Пусть G — неразложимая группа без кручения ранга 2, $T(G) = \{t_0, t_1, t_2\}$, где $t_0 < t_1$, $t_0 < t_2$ и хотя бы один из $\{t_1, t_2\}$ идемпотентный. Тогда G является SACR-группой, но не является TI-группой.

Доказательство. Пусть $x, y \in G$, такие, что $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. В силу теоремы 2 в [22], любое кольцо $(G, \times)$ на G определяется следующим образом:

$$x \times x = ax, \quad x \times y = y \times x = 0, \quad y \times y = by,$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}$. Нетрудно проверить, что $(G, \times)$ ассоциативно и коммутативно. Следовательно, G является SACR-группой. Без потери общности можно считать, что t_1 — идемпотентный тип. Тогда определим кольцо $(G, \times)$ на G , положив

$$x \times x = x, \quad x \times y = y \times x = y \times y = 0.$$

Пусть $p \in P$, такое, что p не делит x в группе G . Положим $g = px + y \in G$. Тогда имеем:

$$I = (g)_\times = pRx + \mathbb{Z}g,$$

$$J = (g)_\times^2 + \mathbb{Z}g = p^2R^2x + p^2Rx + p^2\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}g,$$

для некоторой подгруппы R группы $\mathbb{Q}$. Очевидно, $px \in I$. Допустим, что $px \in J$. Тогда найдутся $r_1 \in R^2$, $r_2 \in R$, $k, l \in \mathbb{Z}$, такие, что $px = p^2r_1x + p^2r_2x + kp^2x + l(px + y)$. Отсюда, $px = (p^2r_1 + p^2r_2 + kp^2 + lp)x + ly$. Из этого следует, что $l = 0$, откуда $px = p^2(r_1 + r_2 + k)x$ и, значит, $p \mid x$, что противоречит выбору числа p . Следовательно, $I \neq J$, откуда кольцо $(G, \times)$ не филиально по теореме 1 в [8]. Таким образом, G не является TI-группой.

Следствие 13. Любая неразложимая группа без кручения ранга 2 является SACR-группой.

Доказательство. Вытекает из замечания 9, теоремы 10 и лемм 11, 12.

Теорема 14. Неразложимая группа без кручения ранга 2 G является TI-группой тогда и только тогда, когда $T(G)$ удовлетворяет (nil) -условию.

Доказательство. Пусть G — неразложимая группа без кручения ранга 2. Если группа G удовлетворяет одному из 4 предыдущих условий, то G — nil-группа по замечанию 9. Следовательно, G является TI-группой.

Обратно, пусть G — TI-группа. Мы рассмотрим следующие случаи:

С л у ч а й 1. Если $T(G) = \{t\}$, то t — неидемпотентен по теореме 10.

С л у ч а й 2. $T(G) = \{t_1, t_2\}$. В этом случае, допустим, что $t_1 < t_2$. Тогда в силу леммы 11, G не является TI-группой. Наоборот, если t_1, t_2 — несравнимые типы, то G является nil-группой по замечанию 9. Следовательно, G — TI-группа.

С л у ч а й 3. $|T(G)| = 3$. Допустим, $T(G)$ выполняет условие 3 в замечании 9. Без потери общности можно считать, что t_1 — идемпотентный тип. Тогда в силу леммы 11, G не является TI-группой. Наоборот, если $|T(G)| = 3$ и также не выполняет условие 3 в замечании 9, то G является nil-группой. Следовательно, G — TI-группа.

С л у ч а й 4. Если $|T(G)| > 3$, то G — nil-группа по замечанию 9. Таким образом, теорема доказана.

Следствие 15. *Неразложимая группа без кручения ранга 2 G является TI -группой тогда и только тогда, когда G — nil -группа.*

Благодарность. Автор благодарит профессора Е. И. Компанцеву за поддержку и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы: М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
2. Feigelshtock S. Additive Groups of Rings. Boston-London: Pitman Advanced Publishing Program, 1983. V. I. 113 p.; 1988. V. II. 100 p.
3. Feigelshtock S. Additive groups of commutative rings // J. Quaest. Math. 2000. V. 23. P. 241–245. DOI: 10.2989/16073600009485973.
4. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On additive groups of associative and commutative rings // J. Quaest. Math. 2017. V. 40. No. 4. P. 527–537. DOI: 10.2989/16073606.2017.1302019.
5. Компанцева Е.И., Нгуен Т.К.Ч. Алгебраически компактные абелевы TI -группы // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 1. С. 202–211. DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-202-211.
6. Baer R. Meta ideals // Report Conf. Linear Algebras. June. 1956. Publ. National Acad. Sci. Nat. Res. Council. 1957. No. 502. P. 33–52.
7. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983–1984. V. 42. P. 185–194.
8. Andruszkiewicz R., Puczyłowski E. On filial rings // Portugal. Math. 1988. V. 45. No. 2. P. 139–149.
9. Filipowicz M., Puczyłowski E. R. On filial and left filial rings // Publ. Math. Debrecen. 2005. V. 66. P. 257–267.
10. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI -groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33–41.
11. Нгуен Т.К.Ч. Вполне разложимые абелевы TI -группы // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019». М.: МАКС Пресс, 2019. URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2019/data/16175/85633_uid105565_report.pdf.
12. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math. 1961. V. 5. P. 61–98.
13. Fomin A.A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. No. 1. P. 45–52.
14. Фомин А.А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17. № 8. С. 153–167.
15. Фомин А.А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Т. 20. № 5. С. 157–196.
16. Давыдова О.И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 25–33.
17. Гордеева Е.В., Фомин А.А. Вполне разложимые однородные факторно делимые абелевы группы // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. № 2. С. 376–387. DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-376-387.
18. Компанцева Е.И. Кольца без кручения // Фундамент. и прикл. матем. 2009. Т. 15. № 8. С. 95–143.
19. Stratton A.E. The typeset of torsion-free rings of finite rank // Comment Math. Unit. St. 1979. V. 27. P. 199–211.
20. Beaumont R., Wisner R. Ring with additive group which is a Torsion-free groups of rank two // Acta Sci. Math. 1959. V. 20. P. 105–116.
21. Aghdam A.M. On the strong nilstufе of rank two torsion-free groups // Acta. Sci. Math. (Szeged) 1985. V. 49. P. 53–61.
22. Aghdam A.M. Rings on indecomposable torsion free groups of rank two // Int. Math. Forum 1. 2006. V. 3. P. 141–146.
23. Aghdam A.M., Najafizadeh A. On torsion-free rings with indecomposable additive group of rank two // Southeast Asian Bull. Math. 2008. V. 32. P. 199–208.

Статья поступила 01.11.2019 г.

Nguyen T.Q.T. (2020) ABELIAN SACR-GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 27–36

DOI 10.17223/19988621/63/3

Keywords: abelian group, ring on group, SACR-group, TI-group.

A homomorphism $\mu: G \otimes G \rightarrow G$ is called a multiplication on an abelian group G . An abelian group G with a multiplication on it is called a ring on G . The study of abelian groups supporting only a certain ring is one of the trends in the additive group theory. An abelian group on which every ring is associative and commutative is called an SACR-group (this abbreviation comes from: “strongly associative and commutative ring”). In this paper, we study SACR-groups in the following classes of abelian groups: homogeneous completely decomposable quotient divisible groups and indecomposable torsion-free groups of rank 2. Together with associative and commutative rings, we are also interested in additive groups of filial rings. An associative ring in which all meta-ideals of finite index are ideals is called filial. Certainly, an associative ring R is called filial if the relation of being an ideal in R is transitive. An abelian group on which every associative ring is filial is called a TI-group.

In Section 1, homogeneous completely decomposable quotient divisible abelian SACR-groups are described (Theorem 7). The proof of this theorem is based on Theorem 4: every quotient divisible group of rank 1 is an SACR-group. Further, in Section 3, it is shown that every indecomposable torsion-free group of rank 2 is an SACR-group. In particular, TI-groups are described in the class of indecomposable torsion-free abelian groups of rank 2. It is shown that the concepts of a TI-group and a nil-group in the class of rank 2 torsion-free indecomposable groups are equivalent. Until now, all known torsion-free TI-groups are SACR-groups. However, the converse is not true; an example is given in Section 3.

AMS Mathematical Subject Classification: 20K15, 20K21

Thi Quynh Trang NGUYEN (PhD-student, Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russia). E-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

REFERENCES

1. Fuchs L. (1970, 1973) *Infinite Abelian Groups*. I, II. (1970, 1973). New York; London: Academic Press.
2. Feigelstock S. (1983, 1988) *Additive Groups of Rings*. I, II. Boston; London: Pitman Advanced Publishing Program.
3. Feigelstock S. (2000) Additive groups of commutative rings. *J. Quaest. Math.* 23. pp. 241–245.
4. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. (2017) On additive groups of associative and commutative rings. *J. Quaest. Math.* 40(4). pp. 527–537.
5. Kompantseva E.I., Nguyen T.Q.T. Algebraicheski kompaktnye abelevy TI-gruppy [Algebraically compact abelian TI-groups] (2019) *Chebyshevskii sbornik*. 20(1). pp. 202–211.
6. Baer R. (1957) Meta ideals. *Report conf. linear algebras. June. 1956*. Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Council. 502. pp. 33–52.
7. Ehrlich G. (1983–1984) Filial rings. *Portugal. Math.* 42. pp. 185–194.
8. Andruszkiewicz R., Puczyłowski E. (1988) On filial rings. *Portugal. Math.* 45(2). pp. 139–149.
9. Filipowicz M., Puczyłowski E. R. (2005) On filial and left filial rings. *Publ. Math. Debrecen*. 66. pp. 257–267.
10. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. (2014) On TI-groups. *Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie*. pp. 33–41.
11. Nguyen T.Q.T. Completely decomposable abelian TI-groups. *International scientific conference of students and young scientists "Lomonosov-2019", Moscow, 8 – 12 April 2019*.

12. Beaumont R., Pierce R. (1961) Torsion free rings. *Illinois J. Math.* 5. pp. 61–98.
13. Fomin A.A., Wickless W. (1998) Quotient divisible abelian groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126(1). pp. 45–52.
14. Fomin A.A. (2014) To quotient divisible group theory. I. *J. Math. Sci.* 197(5). pp. 688–697.
15. Fomin A.A. (2018) To quotient divisible group theory. II. *J. Math. Sci.* 230(3). pp. 457–483.
16. Davydova O.I. (2008) Rank-1 quotient divisible groups. *J. Math. Sci.* 154(3). pp. 295–300.
17. Gordeeva E.V., Fomin A.A. (2018) Vpolne razlozhimye odnorodnye faktorno delimye abelevy gruppy [Completely decomposable homogeneous quotient divisible abelian groups]. *Chebyshevskii sbornik.* 19(2). pp. 376–387.
18. Kompantseva E.I. (2010) Torsion-free rings. *J. Math. Sci.* 171(2). pp. 213–247.
19. Stratton A.E. (1979) The typeset of torsion-free rings of finite rank. *Comment Math. Unit. St.* 27. pp. 199–211.
20. Beaumont R., Wisner R. (1959) Ring with additive group which is a Torsion-free groups of rank two. *Acta Sci. Math.* 20. pp. 105–116.
21. Aghdam A.M. (1985) On the strong nilstufe of rank two torsion-free groups *Acta. Sci. Math. (Szeged)*. 49. pp. 53–61.
22. Aghdam A.M. (2006) Rings on indecomposable torsion free groups of rank two *Int. Math. Forum I.* 3. pp. 141–146.
23. Aghdam A.M., Najafizadeh A. (2008) On torsion-free rings with indecomposable additive group of rank two *Southeast Asian Bull. Math.* 32. pp. 199–208.

Received: November 1, 2019

Д.А. Турсунов, М.О. Орозов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА, КОГДА СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ НЕВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ РЕГУЛЯРНУЮ ОСОБУЮ ОКРУЖНОСТЬ

Исследуется задача Дирихле для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка, с малым параметром при старших производных. Строится полное равномерное асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца. Особенностью задачи является то, что малый параметр стоит перед лапласианом и соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую линию. Поэтому при построении асимптотического решения возникают дополнительные трудности. Формальное асимптотическое решение строится обобщенным методом пограничных функций, а оценка для остаточного члена получена принципом максимума.

Ключевые слова: асимптотическое решение, сингулярно возмущенная задача Дирихле для кольца, малый параметр, регулярная особая линия, обобщенный метод пограничных функций.

Многие физические процессы, связанные с неравномерными переходами, описываются дифференциальными уравнениями с большими или малыми параметрами. Примером, где малый параметр естественным образом находится при главной части дифференциального оператора, является уравнение Шредингера, в котором в роли малого параметра выступает величина кванта действия. Если эту величину устремить к нулю, то некоторые законы квантовой механики переходят в законы классической механики. Кроме того, сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения (дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной) выступают в качестве математических моделей многих задач механики, физики, техники, химии, океанологии и других областей науки [1]. Поэтому построение асимптотических решений сингулярно возмущенных задач представляет теоретический и практический интерес [1–10]. Обычно для построения асимптотических решений сингулярно возмущенных задач применяют либо метод сращивания Ван-Дайка (метод согласования А.М. Ильина), либо метод пограничных функций Вишика – Люстерника – Василевой – Иманалиева, либо метод регуляризации С.А. Ломова и др. Нами в работах [11–16] предложен аналог метода пограничных функций. В данной работе, используя эту идею, построим асимптотику решения нового класса бисингулярных задач, т.е. когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую границу – окружность.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для кольца

$$\varepsilon \Delta v + (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v}{\partial \rho} - q(\varphi)v = f(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D; \quad (1)$$

$$v(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_1(\varphi), \quad v(b, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $0 < a, b, -\text{const}$, $D = \{((\rho, \varphi)) | a < \rho < b, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, $q(\varphi) > 0$ $\varphi \in [0, 2\pi]$, $v = v(\rho, \varphi, \varepsilon)$, $f \in C^\infty(\bar{D})$, $q, \psi_k \in C^\infty[0, 2\pi]$, $k = 1, 2$, $\frac{\partial f(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} \neq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Требуется построить полное равномерное асимптотическое решение задачи (1) – (2), когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Задача

$$(\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial z(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)z(\rho, \varphi) = f(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D; \quad (3)$$

$$z(b, \varphi) = \psi_2(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

имеет единственное решение, представимое в виде

$$z(\rho, \varphi) = \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{f(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds + \psi_2(\varphi) \frac{\rho - a}{b - a}, \quad (5)$$

а также справедливо соотношение

$$z(\rho, \varphi) = Q_0(\varphi)(\rho - a) \ln(\rho - a) + Q_1(\rho, \varphi),$$

где $Q_1 \in C^\infty(\bar{D})$, $Q_0 \in C^\infty[0, 2\pi]$.

Доказательство. Отметим, что уравнение (3) на окружности $\rho = a$ имеет слабую особенность. Эту окружность назовем регулярно особой окружностью.

Уравнение (3) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{z(\rho, \varphi)}{\rho - a} \right) = \frac{f(\rho, \varphi)}{q(\varphi)(\rho - a)^2},$$

интегрируя последнее равенство по ρ , учитывая условие (4), получим равенство (5).

Подынтегральную функцию в (5) запишем в виде

$$f(s, \varphi) = f_0(\varphi) + f_1(\varphi)(s - a) + (s - a)^2 F(s, \varphi), \quad (6)$$

Здесь $F_0(a, \varphi) = F(s, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} f_k(\varphi)(s - a)^{k-2}$, $f_k(\varphi) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(s, \varphi)}{\partial s^k} \Big|_{s=a}$, $k = 0, 1, \dots$.

Учитывая разложение (6) из равенства (5) имеем

$$\begin{aligned} z(\rho, \varphi) &= \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{f_0(\varphi) + f_1(\varphi)(s - a) + (s - a)^2 F(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds + \psi_2(\varphi) \frac{\rho - a}{b - a} = \\ &= \frac{\rho - a}{q(\varphi)} f_1(\varphi) \ln(\rho - a) - \frac{\rho - a}{q(\varphi)} f_1(\varphi) \ln(b - a) + \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{f_0(\varphi) + (s - a)^2 F(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds + \psi_2(\varphi) \frac{\rho - a}{b - a}. \end{aligned}$$

Если ввести обозначение

$$Q_0 = f_1(\varphi)/q(\varphi),$$

$$Q_1(\rho, \varphi) = -\frac{\rho - a}{q(\varphi)} f_1(\varphi) \ln(b - a) + \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{f_0(\varphi) + (s - a)^2 F(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds + \psi_2(\varphi) \frac{\rho - a}{b - a},$$

то имеем $z(\rho, \varphi) = Q_0(\varphi)(\rho - a) \ln(\rho - a) + Q_1(\rho, \varphi)$.

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим классическое внешнее асимптотическое решение задачи (1), (2), которое будем искать методом малого параметра в виде

$$V(\rho, \varphi, \varepsilon) = v_0(\rho, \varphi) + \varepsilon v_1(\rho, \varphi) + \varepsilon^2 v_2(\rho, \varphi) + \dots + \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \dots \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (1), учитывая граничное условие на внешней окружности $\rho = b$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε , получаем

$$\begin{aligned} (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v_0(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)v_0(\rho, \varphi) &= f(\rho, \varphi), \\ (\rho, \varphi) \in D, v_0(b, \varphi) &= \psi_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)v_k(\rho, \varphi) &= -\Delta v_{k-1}(\rho, \varphi), \\ (\rho, \varphi) \in D, v_k(b, \varphi) &= 0, \varphi \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (9)$$

На основании леммы 1, для решения задачи (8) имеем

$$v_0(\rho, \varphi) = Q_0(\varphi)(\rho - a) \ln(\rho - a) + Q_1(\rho, \varphi),$$

где $Q_1 \in C^\infty(\bar{D})$, $Q_0 \in C^\infty[0, 2\pi]$.

Отсюда следует, что

$$\Delta v_0(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)), \rho \rightarrow a.$$

Из соотношения (9) при $k = 1$ имеем

$$(\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v_1(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)v_1(\rho, \varphi) = -\Delta v_0(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, v_1(b, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi].$$

На основании леммы 1, эта задача имеет единственное решение и для решения справедлива асимптотическая оценка

$$v_1(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)) \text{ при } \rho \rightarrow a,$$

следовательно,

$$\Delta v_1(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)^3) \text{ при } \rho \rightarrow a.$$

Из (9) при $k = 2$ получим

$$(\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v_2(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)v_2(\rho, \varphi) = -\Delta v_1(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, v_2(b, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi],$$

Решение этой задачи существует и для решения справедлива оценка

$$v_2(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)^3) \text{ при } \rho \rightarrow a,$$

следовательно,

$$\Delta v_2(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)^5) \text{ при } \rho \rightarrow a.$$

Аналогично, продолжая этот процесс, получим

$$v_k(\rho, \varphi) = O(1/(\rho - a)^{2k-1}), \rho \rightarrow a, k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, внешнее решение (7) можно записать в виде

$$V(\rho, \varphi, \varepsilon) = v_0(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon}{\rho - a} \tilde{v}_1(\rho, \varphi) + \dots + \frac{\varepsilon^k}{(\rho - a)^{2k-1}} \tilde{v}_k(\rho, \varphi) + \dots,$$

где $\tilde{v}_k(\rho, \varphi) \in C(\bar{D})$, $k \in \mathbb{N}$.

Внешнее решение (7) имеет нарастающие особенности [7], поэтому задачу (1), (2) можно называть бисингулярной.

Равномерное асимптотическое решение задачи (1), (2) строим методом [11–16], т.е. особенности внешнего решения выбрасываем во внутреннее решение.

Для начала построим формальное асимптотическое решение, которое будем искать в виде

$$v(\rho, \varphi, \varepsilon) = u(\rho, \varphi, \varepsilon) + w(t, \varphi, \mu), \quad (10)$$

где $t = (\rho - a)/\mu$, $\varepsilon = \mu^2$.

Уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon \Delta v + (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial v}{\partial \rho} - q(\varphi)v = f(\rho, \varphi) - h(\rho, \varphi, \varepsilon) + h(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (11)$$

где $h(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\rho, \varphi)$, $h_k(\rho, \varphi)$ – пока неизвестные функций. С помощью этих функций убираем особенности из внешнего решения и потребуем, чтобы оно было гладким.

Подставляя (11) в (10) и учитывая граничные условия (2), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta u + (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial u}{\partial \rho} - q(\varphi)u &= f(\rho, \varphi) - h(\rho, \varphi, \varepsilon), \\ (\rho, \varphi) \in D, u(b, \varphi, \varepsilon) &= \psi_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu c \frac{\partial w}{\partial t} + \mu^2 c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + tq(\varphi) \frac{\partial w}{\partial t} - q(\varphi)w = h(a + \mu t, \varphi, \mu^2); \quad (13)$$

$$w(0, \varphi, \mu) = \psi_1(\varphi) - u(a, \varphi, \varepsilon), w((b-a)/\mu, \varphi, \mu) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], \quad (14)$$

где $c = (a + \mu t)^{-1}$, $b^{-1} < c < a^{-1}$,

Асимптотическое решение задачи (12) ищем в виде

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = u_0(\rho, \varphi) + \varepsilon u_1(\rho, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(\rho, \varphi) + \dots + \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi) + \dots \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε , имеем

$$\begin{aligned} (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial u_0(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)u_0(\rho, \varphi) &= f(\rho, \varphi), \\ (\rho, \varphi) \in D, u_0(b, \varphi) &= \psi_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial u_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)u_k(\rho, \varphi) &= g_k(\rho, \varphi), \\ (\rho, \varphi) \in D, u_k(b, \varphi) &= 0, \varphi \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $g_k(\rho, \varphi) = -(\Delta v_{k-1}(\rho, \varphi) + h_{k-1}(\rho, \varphi))$, $g_k \in C^\infty(\bar{D})$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение задачи (16) представимо в виде (5). Дифференцируя, получаем

$$\Delta u_0(\rho, \varphi) = \frac{f_1(\varphi)}{\rho - a} + \frac{f_1(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) + \frac{f_1''(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a) + \tilde{u}_0(\rho, \varphi),$$

где $\tilde{u}_0 \in C^\infty(\bar{D})$.

$$\text{Пусть} \quad h_0(\rho, \varphi) = -\frac{f_1(\varphi)}{\rho - a} - \frac{f_1(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - 1) - \frac{f_1''(\varphi)}{\rho^2} (\rho - 1) \ln(\rho - 1), \quad \text{тогда}$$

$$g_1(\rho, \varphi) = \tilde{u}_0(\rho, \varphi).$$

Из (17) при $k = 1$ получаем

$$(\rho - a)q(\varphi) \frac{\partial u_1(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - q(\varphi)u_1(\rho, \varphi) = g_1(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad u_1(b, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

Решение этого уравнения, в силу леммы, представимо в виде

$$u_1(\rho, \varphi) = \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^\rho \frac{g_1(s, \varphi)}{(s - a)^2} ds.$$

Дифференцируя, получаем

$$\Delta u_1(\rho, \varphi) = \frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho - a} + \frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) + \frac{g''_{1,1}(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a) + \tilde{u}_1(\rho, \varphi),$$

где $\tilde{u}_1 \in C^\infty(\bar{D})$, $g_{1,1}(\varphi) = \frac{\partial g_1(a, \varphi)}{\partial \rho}$.

Пусть

$$h_1(\rho, \varphi) = -\frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho - a} - \frac{g_{1,1}(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) - \frac{g''_{1,1}(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a),$$

тогда

$$g_2(\rho, \varphi) = \tilde{u}_1(\rho, \varphi).$$

Аналогично продолжая этот процесс, получаем:

$$\Delta u_k(\rho, \varphi) = \frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho - a} + \frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) + \frac{g''_{k,1}(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a) + \tilde{u}_k(\rho, \varphi),$$

$$h_k(\rho, \varphi) = -\frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho - a} - \frac{g_{k,1}(\varphi)}{\rho} \ln(\rho - a) - \frac{g''_{k,1}(\varphi)}{\rho^2} (\rho - a) \ln(\rho - a),$$

$$g_{k+1}(\rho, \varphi) = \tilde{u}_k(\rho, \varphi),$$

где $\tilde{u}_k \in C^\infty(\bar{D})$, $g_{k,1}(\varphi) = \frac{\partial g_k(a, \varphi)}{\partial \rho}$.

Теперь переходим к решению задачи (13), (14). Пусть

$$h_k(a + \mu t, \varphi) = \frac{1}{\mu t} G_k(\mu t, \varphi),$$

где

$$G_k(\mu t, \varphi) = -g_{k,1}(\varphi) - c g_{k,1}(\varphi) \mu t \ln \mu t - c^2 g''_{k,1}(\varphi) (\mu t)^2 \ln \mu t.$$

Тогда уравнение (13) можно записать как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + tq(\varphi) \frac{\partial w}{\partial t} - q(\varphi)w = -\mu c \frac{\partial w}{\partial t} - \mu^2 c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\mu}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k} G_k(\mu t, \varphi). \quad (18)$$

Асимптотическое решение задачи (18) – (14) ищем в виде

$$w(t, \varphi, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_{k,\mu}(t, \varphi). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18) и учитывая (14) имеем

$$lw_{0,\mu} \equiv \frac{\partial^2 w_{0,\mu}}{\partial t^2} + tq(\varphi) \frac{\partial w_{0,\mu}}{\partial t} - q(\varphi)w_{0,\mu} = 0, \\ (t, \varphi) \in D_1, \quad w_{0,\mu}(0, \varphi) = \psi_1(\varphi) - u_0(a, \varphi), \quad w_{0,\mu}((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (20)$$

$$lw_{1,\mu} = -c \frac{\partial w_{0,\mu}}{\partial t} + \frac{1}{t} G_0(\mu t, \varphi),$$

$$(t, \varphi) \in D_1, w_{1,\mu}(0, \varphi) = 0, w_{1,\mu}((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi]; \quad (21)$$

$$lw_{2n,\mu} = -c \frac{\partial w_{2n-1,\mu}}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_{2n-2,\mu}}{\partial \varphi^2},$$

$$(t, \varphi) \in D_1, w_{2n,\mu}(0, \varphi) = -u_n(a, \varphi), w_{2n,\mu}((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], n \in \mathbf{N}; \quad (22)$$

$$lw_{2n+1,\mu} = -c \frac{\partial w_{2n,\mu}}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_{2n-1,\mu}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{t} G_n(\mu t, \varphi),$$

$$(t, \varphi) \in D_1, w_{2n+1,\mu}(0, \varphi) = 0, w_{2n+1,\mu}((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], n \in \mathbf{N}, \quad (23)$$

где $D_1 = \{(t, \varphi) | 0 < t < (b-a)/\mu, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.

Лемма 2. Решение задачи

$$lw = t^{-k} G(\mu t, \varphi), (t, \varphi) \in D_1, w(0, \varphi) = \gamma(\varphi), w((b-a)/\mu, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], \quad (24)$$

единственно, где G – непрерывная функция.

Доказательство. Однородное уравнение $lw = 0$ имеет два независимых решения:

$$w_1(t, \varphi) = t, \quad \text{и} \quad w_2(t, \varphi) = t \int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} \tau^{-2} d\tau.$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} \tau^{-2} d\tau - e^{-t^2 q(\varphi)/2} t^{-1} =$$

$$= -e^{-(b-a)^2 q(\varphi)/2\varepsilon} \frac{\varepsilon}{(b-a)^2} - q(\varphi) \int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} d\tau;$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = q(\varphi) e^{-t^2 q(\varphi)/2} q(\varphi) e^{-t^2 q(\varphi)/2} + tq(\varphi) \left(\int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} \tau^{-2} d\tau - e^{-t^2 q(\varphi)/2} t^{-1} \right) -$$

$$- q(\varphi) t \int_t^{(b-a)/\mu} e^{-\tau^2 q(\varphi)/2} \tau^{-2} d\tau \equiv 0.$$

Отметим некоторые свойства функции $w_2(t, \varphi)$:

$$w_2(0, \varphi) = 1, \quad w_2(t, \varphi) \sim \frac{1}{t^2 q(\varphi)} e^{-t^2 q(\varphi)/2}, \quad t \rightarrow \infty, \quad w_2 \in C^\infty(\bar{D}).$$

При фиксированных значениях φ , функция $w_2(t, \varphi)$ убывает $\left(\frac{\partial w_2}{\partial t} < 0 \right)$. Вронскиан

$$W(w_1, w_2) = e^{-t^2 q(\varphi)/2}.$$

Докажем, что следующее выражение является решением уравнения:

$$w(t, \varphi) = w_2(t, \varphi) \int_0^t \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds - w_1(t, \varphi) \int_{\frac{b-a}{\mu}}^t \frac{w_2(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \gamma(\varphi) w_2(t, \varphi).$$

Проверим граничные условия:

$$w(0, \varphi) = w_2(0, \varphi) \int_0^0 \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds -$$

$$- w_1(0, \varphi) \int_{\frac{b-a}{\mu}}^0 \frac{w_2(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \gamma(\varphi) w_2(0, \varphi) = \gamma(\varphi),$$

$$w\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) = w_2\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) \int_0^{\frac{b-a}{\mu}} \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds - \\ - w_1\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) \int_{\frac{b-a}{\mu}}^{\frac{b-a}{\mu}} \frac{w_2(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \gamma(\varphi) w_2\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) \equiv 0.$$

Теперь вычислим производные $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w_2(t, \varphi)}{\partial t} \int_0^t \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds - \frac{\partial w_1(t, \varphi)}{\partial t} \int_{\frac{b-a}{\mu}}^t \frac{w_2(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \gamma(\varphi) \frac{\partial w_2(t, \varphi)}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_2(t, \varphi)}{\partial t^2} \int_0^t \frac{w_1(s, \varphi) G(\mu s, \varphi)}{s^k W} ds + \frac{G(\mu t, \varphi)}{t^k} + \gamma(\varphi) \frac{\partial^2 w_2(t, \varphi)}{\partial t^2}.$$

Подставляя их в уравнение, а потом, упростив, имеем $t^{-k} G(\mu t, \varphi) = t^{-k} G(\mu t, \varphi)$.

Нетрудно заметить, что однородное уравнение с однородными краевыми условиями имеет только тривиальное решение. Отсюда следует единственность решения неоднородного уравнения.

Лемма 2 доказана.

С помощью этой леммы доказываются существование и единственность решения задач (20) – (23). Решение задачи (20) экспоненциально мало при $t \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$, а решения задач (21) – (23) степенным образом убывают при $t \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$.

Таким образом, нами определены все члены асимптотических решений $u(\rho, \varphi, \varepsilon)$ и $w(t, \varphi, \mu)$. Теперь оценим остаточный член асимптотического разложения $u(\rho, \varphi, \varepsilon) + w(t, \varphi, \mu)$.

Обоснование разложения. Пусть $v(\rho, \varphi, \varepsilon) = v_n(\rho, \varphi, \varepsilon) + R(\rho, \varphi, \varepsilon)$, где

$$v_n(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{2n} \mu^k w_{k, \mu}(t, \varphi),$$

$R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ – остаточная функция.

Тогда для остаточной функции имеем

$$\varepsilon \Delta R + (\rho - a) q_1(\rho, \varphi) \frac{\partial R}{\partial \rho} - q_0(\rho, \varphi) R = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\rho, \varphi) \in D,$$

$$R(a, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad R(b, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Применяя принцип максимума [17], получаем $R(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$.

Нами доказана

Теорема. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$v(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_{k, \mu}(t, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\rho, \varphi) \in \bar{D},$$

а также предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\rho, \varphi, \varepsilon) = v_0(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in \{(\rho, \varphi) \mid a < \rho \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Заключение

Нами исследована задача Дирихле для кольца. Задача Дирихле ставится для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка, с малым параметром перед лапласианом. Особенностью задачи является то, что малый параметр присутствует перед лапласианом и соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую линию. Поэтому при построении асимптотического решения возникают дополнительные трудности. Обобщенным методом пограничных функций построено полное равномерное асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца. Построенный ряд является асимптотическим в смысле Эрдея. Оценка для остаточного члена получена принципом максимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chang-Yeol Jung and Roger Temam* Singularly perturbed problems with a turning point: the noncompatable case // *Analysis and Applications*. 2014. V. 12. No 3. P. 293–321.
2. *Butuzov V. F.* Asymptotic behavior and stability of solutions of a singularly perturbed elliptic problem with a triple root of the degenerate equation // *Izvestiya: Mathematics*. 2017. V. 81. No 3. P. 481–504.
3. *Anastasia-Dimitra Lipitakis* The numerical solution of singularly perturbed nonlinear partial differential equations in three space variables: the adaptive explicit preconditioning approach // *Modelling and Simulation in Engineering*. 2019.
4. *Gung-Min Gie, Chang-Yeol Jung, and Roger Temam* Recent progresses in boundary layer theory // *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*. 2014. V. 36. No 5. P. 2521–2583.
5. *Levinson N.* The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε // *Ann. of Math*. 1950. V. 51. P. 428–445.
6. *Eckhaus W.* Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems // *SIAM Review*. 1972. V. 14. No 2. P. 225–270.
7. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
8. *Зубова С.П., Усков В.И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай // *Матем. заметки*. 2018. Т. 103. № 3. С. 392–403. <https://doi.org/10.4213/mzm11199>.
9. *Зверьяев Е.М.* Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2018. № 83. 19 с. doi:10.20948/prepr-2018-83.
10. *Биматов В.И., Савкина Н.В., Фарапонов В.В.* Сверхзвуковое обтекание и аэродинамические характеристики острого конуса для различных моделей турбулентной вязкости // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016, № 5(43). С. 35–42. <https://doi.org/10.17223/19988621/43/4>.
11. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 54. С. 46–57 DOI: 10.17223/19988621/54/4.
12. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем // *Изв. вузов. Математика*. 2018. № 3. С. 70–78. DOI: 10.3103/S1066369X18030088.
13. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2017. Т. 14. С. 10–21. DOI 10.17377/semi.2017.14.002
14. *Турсунов Д.А.* Обобщенный метод погранфункций для бисингулярных задач в круге // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2017. Т. 23. № 2. С. 239–249. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-239-249>.
15. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2016. Т. 22. № 1. С. 271–281.

16. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 42–52. DOI 10.17223/19988621/39/5.
17. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

Статья поступила 04.11.2019 г.

Tursunov D.A., Orozov M.O. (2020) ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A RING, WHEN THE CORRESPONDING UNPERTURBED EQUATION HAS A REGULAR SPECIAL CIRCLE. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 37–46

DOI 10.17223/19988621/63/4

Keywords: asymptotic solution, singularly perturbed Dirichlet problem for a ring, small parameter, regular singular line, generalized boundary function method.

The article investigates the Dirichlet problem in a ring for a linear inhomogeneous second-order elliptic equation with two independent variables. In the equation under consideration, there is a small parameter at the highest derivatives, i.e. at the Laplacian. A solution to the Dirichlet problem for a ring, based on the theory of partial differential equations, exists and is unique. However, attempts to construct an explicit solution to the Dirichlet problem and to determine the dependence of the solution on a small parameter directly failed. It is required to construct a complete uniform asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring in powers of a small parameter. The problem under consideration has two features: the first one is a small parameter at the Laplacian and the second one is that the corresponding unperturbed equation has a regular special line. This line is a circle. Therefore, when constructing an asymptotic solution, there appear additional difficulties. The formal asymptotic solution of the Dirichlet problem for a ring is constructed by the generalized method of boundary functions. Using the maximum principle, the constructed formal asymptotic solution is substantiated. The constructed decomposition is asymptotic in the sense of Erdélyi.

The results obtained can find applications in continuum mechanics, hydro- and aerodynamics, magneto hydrodynamics, oceanology, etc.

AMS Mathematical Subject Classification: 35J15, 35J25, 35B25, 35B40, 35C20

Dilmurat A. TURSUNOV (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Osh State University, Kyrgyzstan). E-mail: tdaosh@gmail.com

Maksatbek O. OROZOV (PhD-student, Osh State University Osh, Kyrgyzstan) E-mail: gnezdo1983@mail.ru

REFERENCES

1. Chang-Yeol Jung and Roger Temam (2014) Singularly perturbed problems with a turning point: the noncompatable case. *Analysis and Applications*. 12(3). pp. 293–321.
2. Butuzov V.F. (2017) Asymptotic behavior and stability of solutions of a singularly perturbed elliptic problem with a triple root of the degenerate equation. *Izvestiya: Mathematics*. 81(3). pp. 481–504.
3. Anastasia-Dimitra Lipitakis (2019) The numerical solution of singularly perturbed nonlinear partial differential equations in three space variables: the adaptive explicit preconditioning approach. *Modelling and Simulation in Engineering*. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/5157145>
4. Gung-Min Gie, Chang-Yeol Jung, and Roger Temam (2014) Recent progresses in boundary layer theory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*. 36(5). pp. 2521–2583.

5. Levinson N. (1950) The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε . *Ann. of Math.* 51. pp. 428–445.
6. Eckhaus W. (1972) Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems. *SIAM Review*. 14(2). pp. 225–270.
7. Il'in A.M. (1989) *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach* [Matching of asymptotic expansions of boundary problems]. Moscow: Nauka.
8. Zubova S.P., Uskov V.I. (2018) Asymptotic solution of the Cauchy problem for a first-order equation with a small parameter in a Banach space. The regular case. *Math Notes*. 103. pp. 395–404. DOI:10.1134/S0001434618030069.
9. Zverayayev E.M. (2018) Metod Sen-Venana – Pikara – Banakha integrirvaniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh s malym parametrom [The Saint-Venant–Picard–Banach method of integrating partial differential equations with a small parameter]. *Keldysh Institute preprints*. 83.
10. Bimatova V.I., Savkinaab N.V., Faraponova V.V. (2016) Sverkhzvukovoye obtekaniye i aerodinamicheskiye kharakteristiki ostrogo konusa dlya razlichnykh modeley turbulentnoy vyazkosti [Supersonic flow over a sharp cone and its aerodynamic characteristics for different models of turbulent viscosity]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 35–42. <https://doi.org/10.17223/19988621/43/4>.
11. Tursunov D.A. (2018) Asimptotika resheniya zadachi Koshi pri narushenii ustoychivosti tochki pokoya v ploskosti «bystrykh dvizheniy» [Asymptotics of the Cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of "rapid motions"]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 46–57. DOI: 10.17223/19988621/54/4.
12. Tursunov D.A. (2018) Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer. *Russian Mathematics*. 62(3). pp 60–67. DOI: 10.3103/S1066369X18030088.
13. Tursunov D.A. (2017) Asimptoticheskoye resheniye bisingulyarnoy zadachi Robena [The asymptotic solution of the bisingular Robin problem]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 14. pp. 10–21. DOI 10.17377/semi.2017.14.002.
14. Tursunov D.A. (2017) Obobshchennyy metod pogramfunksiy dlya bisingulyarnykh zadach v krughe [The generalized boundary function method for bisingular problems in a disk]. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 23(2). pp. 239–249. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-239-249>.
15. Tursunov D.A. (2016) Asimptoticheskoye razlozheniye resheniya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s tremya tochkami povorota [Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points]. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 22(1). pp. 271–281.
16. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. (2016) Asimptoticheskoye razlozheniye resheniya zadachi Dirikhle dlya kol'tsa s osobennost'yu na granitse [Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 42–52. DOI: 10.17223/19988621/39/5.
17. Gilbarg D., Trudinger N.S. (1983) *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag.

Received: November 4, 2019

УДК 517.956.22
DOI 10.17223/19988621/63/5

MSC 35A08, 35J25, 35J70, 35J75

Т.Г. Эргашев, Н.Д. Комилова

ЗАДАЧА ХОЛЬМГРЕНА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Основные краевые задачи для двумерного и трехмерного эллиптических уравнений с двумя сингулярными коэффициентами в конечной и бесконечной областях изучались многими авторами, однако исследование задачи Хольмгрена ограничивалось двумерным случаем. Настоящая работа посвящена нахождению единственного решения задачи Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в области, ограниченной в одной четверти пространства. Используя свойства одного из фундаментальных решений, построена функция Грина и с помощью известной формулы разложения для гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных решение поставленной задачи в конечной области, ограниченной с двумя перпендикулярными гиперплоскостями и четвертью многомерной сферы, найдено в явном виде.

Ключевые слова: многомерное эллиптическое уравнение с двумя сингулярными коэффициентами; задача Хольмгрена; фундаментальное решение; формула Гаусса – Остроградского; функция Грина.

Известно, что теория краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами является одним из центральных разделов современной теории уравнений в частных производных, которые встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера [1, 2]. Подробную библиографию и изложений исследований основных краевых задач для вырождающихся уравнений различного типа, в частности для двумерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, можно найти в монографиях [3–5].

Исследованию краевых задач для многомерных (более двумерных) эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами посвящено сравнительно мало работ. Как известно, для эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом в конечной области рассматриваются две основные (классические) задачи: задача Дирихле и задача Н (Хольмгрена, по имени ученого, впервые исследовавшего такую задачу для уравнения Лапласа). В 1937 году С. Агостинелли [6] рассмотрел задачу Дирихле для трехмерного уравнения с одним сингулярным коэффициентом

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + \frac{2\alpha_1}{x_1}u_{x_1} = 0, \quad 0 < 2\alpha_1 < 1,$$

в области, ограниченной в полупространстве $x_1 > 0$, однако в 1949 году М.Н. Олевский [7] обнаружил ошибку в исследованиях С. Агостинелли и объявил в явном виде решение задачи Дирихле в многомерном полушаре для более общего многомерного уравнения

$$\sum_{k=1}^m u_{x_kx_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1}u_{x_1} = 0, \quad 0 < 2\alpha_1 < 1, \quad m \geq 2, \quad (1)$$

а решение задачи Хольмгрена для уравнения (1) в полушаре найдено совсем недавно [8]. В работе [9] построены фундаментальные решения уравнения (1) и найдены решения внешних задач Дирихле и Неймана в бесконечной области (в полупространстве $x_1 > 0$). В настоящее время известны фундаментальные решения [10, 11] для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом

$$\sum_{k=1}^m u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \lambda u = 0, \quad 0 < 2\alpha_1 < 1, \quad \lambda \in R, \quad m \geq 2.$$

Следует отметить, что в двумерном случае фундаментальные решения уравнения (1) были известны еще в первой половине прошлого столетия и они успешно использованы при решении основных краевых задач и построении теории потенциала для этого уравнения [3–5]. Кроме того, работа [12] посвящена исследованию задачи Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с одним сингулярным коэффициентом.

Рассмотрим уравнение

$$H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m, \lambda)}(u) := \sum_{k=1}^m u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} + \lambda u = 0 \quad (H)$$

в области $R_m^{2+} = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, где $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geq 2$; α_1, α_2 и λ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_1, 2\alpha_2 < 1$.

При $\lambda = 0$ фундаментальные решения уравнения (H) в случаях $m = 2$ и $m = 3$ построены в работах [13] и [14] соответственно, а при наличии λ и при любой размерности уравнения – в [15]. Оказывается, все фундаментальные решения уравнения (H) при $\lambda = 0$ выражаются через гипергеометрические функции Аппеля двух переменных. Используя известную формулу разложения [16] функций Аппеля по гипергеометрическим функциям Гаусса, в случае $m = 2$ и $\lambda = 0$ решены основные краевые задачи для уравнения (H) в конечной [17] и бесконечной [18, 19] областях, а в трехмерном случае ($m = 3, \lambda = 0$) задачи Дирихле и Дирихле – Неймана исследованы лишь в конечной области [14, 20]. Отметим, что в работах [21–24] исследованы потенциалы двойного слоя для уравнения $H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2, 0)}(u) = 0$.

Недавно появились работы [25, 26], в которых построены и исследованы фундаментальные решения для следующих многомерных уравнений Гельмгольца с тремя и более сингулярными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} + \frac{2\alpha_3}{x_3} u_{x_3} + \lambda u = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m \left(u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha_i}{x_i} u_{x_i} \right) + \lambda u = 0,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и λ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи Хольмгрена для уравнения

$$H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m, 0)}(u) := \sum_{k=1}^m u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} = 0, \quad m \geq 2, \quad 0 < 2\alpha_1, 2\alpha_2 < 1, \quad (2)$$

в конечной односвязной области, ограниченной в R_m^{2+} .

1. Постановка и единственность решения задачи

Пусть $\Omega \subset R_m^{2+}$ – область, ограниченная двумя областями $D_1 = \{x: x_1 = 0, 0 < x_2 < a_2, -b_k < x_k < c_k, k = \overline{3, m}\}$, $D_2 = \{x: x_2 = 0, 0 < x_1 < a_1, -b_k < x_k < c_k, k = \overline{3, m}\}$ и поверхностью S , которая пересекается с D_1 и D_2 , где $a_1, a_2, b_k, c_k = \text{const} > 0, k = \overline{3, m}$. Линии пересечения обозначим через $l_1 = S \cap D_1$ и $l_2 = S \cap D_2$. Поверхность S пересекает оси Ox_1 и Ox_2 при $x_1 = a > 0$ и $x_2 = b > 0$ соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (x_2, x_3, x_4, \dots, x_m) \in R_{m-1}, \quad \tilde{x}_2 = (x_1, x_3, x_4, \dots, x_m) \in R_{m-1}; \\ dx &:= dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad d\tilde{x}_1 = dx_2 dx_3 dx_4 \dots dx_m, \quad d\tilde{x}_2 = dx_1 dx_3 dx_4 \dots dx_m; \\ x_1^0 &= (0, x_2, x_3, \dots, x_m) \in R_m, \quad x_2^0 = (x_1, 0, x_3, \dots, x_m) \in R_m.\end{aligned}$$

Задача Хольмгрена. Найти в области Ω регулярное решение $u(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial u(x; \xi)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = v_1(\tilde{x}_1), \quad \tilde{x}_1 \in D_1; \quad (3)$$

$$x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial u(x; \xi)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = v_2(\tilde{x}_2), \quad \tilde{x}_2 \in D_2; \quad (4)$$

$$u|_S = \varphi(x), \quad x \in \bar{S}, \quad (5)$$

где $v_1(\tilde{x}_1)$, $v_2(\tilde{x}_2)$ и $\varphi(x)$ – заданные непрерывные функции, причем функции $v_1(\tilde{x}_1)$ и $v_2(\tilde{x}_2)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше, чем $1 - 2\alpha_1$ и $1 - 2\alpha_2$ на краях областей D_1 и D_2 соответственно.

Докажем единственность решения поставленной задачи. Для этого рассмотрим тождество

$$x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(w) - w H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(u) \right] = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left[x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left(u \frac{\partial w}{\partial x_k} - w \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \right].$$

Интегрируем обе части последнего тождества по области Ω , расположенной в R_m^{2+} и пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, получим

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(w) - w H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(u) \right] dx &= \\ &= \int_{\Gamma} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \sum_{k=1}^m \left[\left(u \frac{\partial w}{\partial x_k} - w \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \cos(n, x_k) \right] d\Gamma, \quad (6)\end{aligned}$$

где Γ – граничная поверхность области Ω , n – внешняя нормаль к поверхности Γ .

Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u H_{\alpha_1 \alpha_2}^{(m,0)}(u) dx = - \int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx.$$

Пусть u – решение уравнения (2). Применяя опять формулу Гаусса – Остроградского, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx &= \int_S x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \varphi(S) \frac{\partial u}{\partial n} dS + \\ &+ \int_{D_1} x_2^{2\alpha_2} v_1(\tilde{x}_1) u(x_1^0) d\tilde{x}_1 + \int_{D_2} x_1^{2\alpha_1} v_2(\tilde{x}_2) u(x_2^0) d\tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Если теперь рассмотреть однородный случай задачи Хольмгрена (т.е. $\varphi(x) \equiv 0$, $v(\tilde{x}_1) \equiv 0$, $v(\tilde{x}_2) \equiv 0$), то из (7) получается

$$\int_{\Omega} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x) = 0$ в $\bar{\Omega}$. Тем самым доказана единственность решения задачи Хольмгрена.

2. Существование решения задачи Хольмгрена

Существование решения задачи Хольмгрена докажем методом функции Грина. Для этого положим, что $a_1 = a_2 = b_k = c_k$, $k = \overline{3, m}$, и S является четвертью сферы с центром в начале координат и радиусом R , т.е. $S = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + \dots + x_m^2 = R^2\}$. Кроме того, для определенности положим $m > 2$.

Определение. Функцией Грина задачи Хольмгрена для уравнения (2) называется функция $G_0(x; \xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) внутри области Ω , кроме точки ξ , эта функция есть регулярное решение уравнения (2);

2) она удовлетворяет условиям

$$\left(x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial G_0(x; \xi)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial G_0(x; \xi)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad G_0(x; \xi)|_S = 0; \quad (8)$$

3) функция может быть представлена в виде

$$G_0(x; \xi) = q_0(x; \xi) + w_0(x; \xi), \quad (9)$$

где $q_0(x; \xi)$ – фундаментальное решение уравнения (2), определенное формулой [15]:

$$\begin{aligned} q_0(x; \xi) &= \gamma_0 r^{-2\beta_0} F_2(\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2), \\ \beta_0 &= \frac{m}{2} - 1 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \gamma_0 = 2^{2\beta_0-m} \frac{\Gamma(\beta_0) \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\pi^{m/2} \Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2)}, \\ \xi &:= (\xi_1, \dots, \xi_m); \quad \sigma_1 = 1 - \frac{r_1^2}{r^2} = -\frac{4x_1\xi_1}{r^2}, \quad \sigma_2 = 1 - \frac{r_2^2}{r^2} = -\frac{4x_2\xi_2}{r^2}, \\ r^2 &= \sum_{k=1}^m (x_k - \xi_k)^2, \quad r_i^2 = (x_i + \xi_i)^2 + \sum_{k=1, k \neq i}^m (x_k - \xi_k)^2, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+l} (b_1)_k (b_2)_l}{k! l! (c_1)_k (c_2)_l} x^k y^l, \quad |x| + |y| < 1, \quad c_1, c_2 \neq 0, -1, -2, \dots$$

– гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных [27], а $(\kappa)_v$ есть символ Похгаммера: $(\kappa)_0 = 1$, $(\kappa)_v = \frac{\Gamma(\kappa + v)}{\Gamma(\kappa)}$, $v \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$; $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Здесь $w_0(x; \xi)$ – регулярное решение уравнения (2) везде внутри Ω .

Нетрудно видеть, что

$$\left(x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = 0.$$

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $w_0(x; \xi)$, которая в силу (8) и (9) должна удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} \left(x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial w_0(x; \xi)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} &= - \left(x_1^{2\alpha_1} \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0}, \\ \left(x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial w_0(x; \xi)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} &= - \left(x_2^{2\alpha_2} \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0}, \quad w_0(x; \xi)|_S = -q_0(x; \xi)|_S. \end{aligned}$$

Для области Ω , ограниченной плоскостями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и четвертью сферы S , функция Грина задачи Хольмгрена имеет вид

$$G_0(x; \xi) = q_0(x; \xi) - \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2\beta_0} q_0(x; \bar{\xi}),$$

где
$$\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2, \quad \bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m), \quad \bar{\xi}_k = \frac{R^2}{\rho^2} \xi_k.$$

Пусть $\xi \in \Omega$. Вырежем из области Ω m -мерный шар малого радиуса ε с центром в точке ξ и оставшуюся часть Ω обозначим через Ω_ε , а через C_ε – m -мерную сферу вырезанного шара. Используя формулу (6), получим

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u_0 \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right] dC_\varepsilon &= - \int_S x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \varphi(S) \frac{\partial G_0(x; \xi)}{\partial n} dS - \\ &- \int_{D_1} v_1(\tilde{x}_1) x_2^{2\alpha_2} G_0(x_1^0; \xi) d\tilde{x}_1 - \int_{D_2} v_2(\tilde{x}_1) x_1^{2\alpha_1} G_0(x_2^0; \xi) d\tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (11)$$

В равенстве (11) совершим предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предварительно преобразуем левую часть (11) в виде суммы трех интегралов:

$$I = \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u_0 \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right] dC_\varepsilon = I_1 + I_2 + I_3, \quad (12)$$

где

$$I_1 = \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial n} dC_\varepsilon,$$

$$I_2 = -\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\beta_0} \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) \frac{\partial q_0(x, \xi)}{\partial n} dC_\varepsilon,$$

$$I_3 = -\int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} G_0(x, \xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} dC_\varepsilon.$$

Используя формулу дифференцирования для гипергеометрических функций Аппеля

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{i+j} F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; \sigma_1, \sigma_2)}{\partial \sigma_1^i \partial \sigma_2^j} = \\ & = \frac{(a)_{i+j} (b_1)_i (b_2)_j}{(c_1)_i (c_2)_j} F_2(a+i+j, b_1+i, b_2+j; c_1+i, c_2+j; \sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \quad (13)$$

и смежное соотношение

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \frac{b_1}{c_1} F_2(a+1, b_1+1, b_2; c_1+1, c_2; \sigma_1, \sigma_2) + \sigma_2 \frac{b_2}{c_2} F_2(a+1, b_1, b_2+1; c_1, c_2+1; \sigma_1, \sigma_2) = \\ & = F_2(a+1, b_1, b_2; c_1, c_2; \sigma_1, \sigma_2) - F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; \sigma_1, \sigma_2), \end{aligned} \quad (14)$$

вычислим производную по внешней нормали к границе области Ω формулой

$$\frac{\partial q_0}{\partial n} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial q_0}{\partial x_k} \cos(n, x_k). \quad (15)$$

Подробно остановимся на вычислении $\frac{\partial q_0}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial q_0}{\partial x_2}$. Действительно, используя формулу дифференцирования (13), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0}{\partial x_1} &= -2\beta_0 \gamma_0 (x_1 - \xi_1) r^{-2\beta_0-2} F_2(\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 (x_1 - \xi_1) r^{-2\beta_0-2} \frac{\alpha_1}{2\alpha_1} \sigma_1 F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 (x_1 - \xi_1) r^{-2\beta_0-2} \frac{\alpha_2}{2\alpha_2} \sigma_2 F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2), \\ \frac{\partial q_0}{\partial x_2} &= -2\beta_0 \gamma_0 (x_2 - \xi_2) r^{-2\beta_0-2} F_2(\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 (x_2 - \xi_2) r^{-2\beta_0-2} \frac{\alpha_1}{2\alpha_1} \sigma_1 F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 (x_2 - \xi_2) r^{-2\beta_0-2} \frac{\alpha_2}{2\alpha_2} \sigma_2 F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2). \end{aligned}$$

Отсюда в силу смежного соотношения (14) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0}{\partial x_1} &= -2\beta_0 \gamma_0 (x_1 - \xi_1) r^{-2\beta_0-2} F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) - \\ & - 2\beta_0 \gamma_0 \xi_1 r^{-2\beta_0-2} F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0}{\partial x_2} = & -2\beta_0\gamma_0(x_2 - \xi_2)r^{-2\beta_0-2}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \\ & -2\beta_0\gamma_0\xi_2r^{-2\beta_0-2}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично вычисляются производные по переменным $x_3, x_4, \dots, x_m$:

$$\frac{\partial q_0}{\partial x_k} = -2\beta_0\gamma_0(x_k - \xi_k)r^{-2\beta_0-2}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2), \quad 3 \leq k \leq m. \quad (18)$$

Подставляя (16) – (18) в (15), получим искомую нормальную производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0(x, \xi)}{\partial n} = & 2\beta_0\gamma_0r^{-2\beta_0}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln \frac{1}{r} \right] - \\ & -2\beta_0\gamma_0r^{-2\beta_0-2}\xi_1F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \cos(n; x_1) - \\ & -2\beta_0\gamma_0r^{-2\beta_0-2}\xi_2F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \cos(n; x_2). \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично вычисляется производная по нормали и от функции $q_0(x; \bar{\xi})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0(x, \bar{\xi})}{\partial n} = & 2\beta_0\gamma_0\bar{r}^{-2\beta_0}F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln \frac{1}{\bar{r}} \right] - \\ & -2\beta_0\gamma_0\bar{r}^{-2\beta_0-2}\bar{\xi}_1F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \cos(n; x_1) - \\ & -2\beta_0\gamma_0\bar{r}^{-2\beta_0-2}\bar{\xi}_2F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \cos(n; x_2), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 = & 1 - \frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}^2}, \quad \bar{\sigma}_2 = 1 - \frac{\bar{r}_2^2}{\bar{r}^2}, \quad \bar{r}^2 = \sum_{k=1}^m \left(x_k - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_k \right)^2, \\ \bar{r}_i^2 = & \left(x_i + \frac{R^2}{\rho^2} \xi_i \right)^2 + \sum_{k=1, k \neq i}^m \left(x_k - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_k \right)^2, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (19), перепишем интеграл I_1 в виде

$$I_1 = \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) \frac{\partial q_0(x; \xi)}{\partial n} dC_\varepsilon = I_4 + I_5 + I_6,$$

где

$$\begin{aligned} I_4 = & 2\beta_0\gamma_0 \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) r^{-2\beta_0} F_2(1+\beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln \frac{1}{r} \right] dC_\varepsilon, \\ I_5 = & -2\beta_0\gamma_0 \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) r^{-2\beta_0-2} \xi_1 F_2(1+\beta_0, 1+\alpha_1, \alpha_2; 1+2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \cos(n; x_1) dC_\varepsilon, \\ I_6 = & -2\beta_0\gamma_0 \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} u_0(x) r^{-2\beta_0-2} \xi_2 F_2(1+\beta_0, \alpha_1, 1+\alpha_2; 2\alpha_1, 1+2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \cos(n; x_2) dC_\varepsilon. \end{aligned}$$

В интеграле I_4 переходим в обобщенную сферическую систему координат

$$x_1 = \xi_1 + \varepsilon \Phi_1, \dots, x_m = \xi_m + \varepsilon \Phi_m,$$

где $\Phi_1 = \cos \varphi_1$, $\Phi_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$, $\Phi_3 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$, ...,
 $\Phi_{m-1} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$, $\Phi_m = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$
 $[\varepsilon \geq 0, 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, \dots, 0 \leq \varphi_{m-2} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{m-1} \leq 2\pi]$.

Тогда мы имеем

$$I_4 = 2\beta_0 \gamma_0 \varepsilon^{-2\beta_0-2+m} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots$$

$$\dots \int_0^\pi (\xi_1 + \varepsilon \Phi_1)^{2\alpha_1} (\xi_2 + \varepsilon \Phi_2)^{2\alpha_2} u_0(\xi_1 + \varepsilon \Phi_1, \dots, \xi_m + \varepsilon \Phi_m) F_2(\varepsilon) \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1,$$

где $F_2(\varepsilon, \varphi) := F_2\left(1 + \beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; 1 - \frac{r_{1\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}, 1 - \frac{r_{2\varepsilon}^2}{\varepsilon^2}\right),$

$$r_{i\varepsilon}^2 = (2\xi_i + \varepsilon \Phi_i(\varphi))^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1, k \neq i}^{\infty} [\Phi_k(\varphi) \xi_k]^2, i = 1, 2.$$

Для полного вычисления I_4 сначала вычислим $F_2(\varepsilon, \varphi)$. Используя последовательно формулу разложения [16]

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b_1)_k (b_2)_k}{k! (c_1)_k (c_2)_k} \times$$

$$\times x^k y^k F(a+k, b_1+k; c_1+k; x) F(a+k, b_2+k; c_2+k; y)$$

и известную формулу Больца [27]

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right),$$

получим

$$F_2(\varepsilon, \varphi) := \varepsilon^{2\alpha_1+2\alpha_2} r_{1\varepsilon}^{-2\alpha_1} r_{2\varepsilon}^{-2\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\beta_0)_k (\alpha_1)_k (\alpha_2)_k}{(2\alpha_1)_k (2\alpha_2)_k k!} \left(\frac{\varepsilon^2 - r_{1\varepsilon}^2}{r_{1\varepsilon}^2}\right)^k \left(\frac{\varepsilon^2 - r_{2\varepsilon}^2}{r_{2\varepsilon}^2}\right)^k \times$$

$$\times F\left(2\alpha_1 - \beta_0 - 1, \alpha_1 + k; 2\alpha_1 + k; 1 - \frac{\varepsilon^2}{r_{1\varepsilon}^2}\right) F\left(2\alpha_2 - \beta_0 - 1, \alpha_2 + k; 2\alpha_2 + k; 1 - \frac{\varepsilon^2}{r_{2\varepsilon}^2}\right),$$

где $F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$ – гипергеометрическая функция Гаусса [27].

Теперь рассмотрим предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2\alpha_1-2\alpha_2} F_2(\varepsilon, \varphi)$. Применив несколько раз формулу суммирования [27]

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0,$$

будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2\alpha_1-2\alpha_2} F_2(\varepsilon, \varphi) := (2\xi_1)^{-2\alpha_1} (2\xi_2)^{-2\alpha_2} \frac{\Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2) \Gamma(m/2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(1+\beta_0)}. \quad (21)$$

Нетрудно вычислить, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{m-3} d\varphi_{m-3} \dots \int_0^\pi \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1 = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}. \quad (22)$$

Принимая во внимание (21) и (22), а также имея в виду значения β_0 и γ_0 (см. формулу (10)), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_4 = u(\xi). \quad (23)$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_5 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_6 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3 = 0. \quad (24)$$

Таким образом, в силу (12), (23) и (24) левая часть равенства (11) при переходе к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ стала известной:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \left[u_0 \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right] dC_\varepsilon = u_0(\xi). \quad (25)$$

Теперь займемся правой частью равенства (11). Рассмотрим интеграл

$$\int_S x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \varphi(S) \frac{\partial G_0(x, \xi)}{\partial n} dS.$$

Поскольку на сфере S выполняются равенства $\bar{r}^2 = r^2$, $\bar{r}_1^2 = r_1^2$, $\bar{r}_2^2 = r_2^2$, $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1$ и $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2$, то, с учетом формул (19) и (20), после нескольких элементарных преобразований, найдем

$$\left. \frac{\partial G_0(x, \xi)}{\partial n} \right|_S = 2\beta_0 \gamma_0 F_2(1 + \beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^{2+2\beta_0}}. \quad (26)$$

Подставив теперь (25) и (26) в формулу (11), получим решение задачи Хольмгрена с условиями (3) – (5) для уравнения (2) в явном виде:

$$\begin{aligned} u_0(\xi) = & 2\beta_0 \gamma_0 \int_S x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} F_2(1 + \beta_0, \alpha_1, \alpha_2; 2\alpha_1, 2\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^{2+2\beta_0}} \varphi(S) dS - \\ & - \gamma_0 \int_{D_1} x_2^{2\alpha_2} \left[\frac{F(\beta_0, \alpha_2; 2\alpha_2; \sigma_2^0)}{X_1^{2\beta_0}} - \frac{F(\beta_0, \alpha_2; 2\alpha_2; \bar{\sigma}_2^0)}{\bar{X}_1^{2\beta_0}} \right] v_1(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 - \\ & - \gamma_0 \int_{D_2} x_1^{2\alpha_1} \left[\frac{F(\beta_0, \alpha_1; 2\alpha_1; \sigma_1^0)}{X_2^{2\beta_0}} - \frac{F(\beta_0, \alpha_1; 2\alpha_1; \bar{\sigma}_1^0)}{\bar{X}_2^{2\beta_0}} \right] v_2(\tilde{x}_2) d\tilde{x}_2, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\sigma_2^0 = \sigma_2|_{x_1=0}, \quad \sigma_1^0 = \sigma_1|_{x_2=0}, \quad \bar{\sigma}_2^0 = \bar{\sigma}_2|_{x_1=0}, \quad \bar{\sigma}_1^0 = \bar{\sigma}_1|_{x_2=0}, \quad X_k^2 = \xi_k^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^m (x_i - \xi_i)^2,$$

$$\bar{X}_k^2 = \sum_{i=1, i \neq k}^m \left(R - \frac{x_i \xi_i}{R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1, i \neq k}^m \sum_{j=1, j \neq i}^m x_i^2 \xi_j^2 - (m-2)R^2, \quad k=1, 2.$$

Формула (27), а с ней и все доказательство, требует, чтобы $m > 2$. Однако формула (27) верна и для $m = 2$.

Таким образом, доказана

Теорема. Существует единственное решение задачи Хольмгрена с условиями (3) – (5) для уравнения (2) при $m \geq 2$ и оно представляется формулой (27).

ЛИТЕРАТУРА

1. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961. 208 с.
2. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 712 с.
3. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.
4. Gilbert R.P. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. New York; London: Academic Press, 1969. 308 p.
5. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. Agostinelli C. Integrazione dell'equazione differenziale $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + x^{-1}u_x = f$ e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. 1937. V. 26. No. 6. P. 7–8.
7. Олевский М.Н. Решения задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = f$ в полусферической области // ДАН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 767–770.
8. Эргашев Т.Г. Задача Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом // Бюллетень Института математики. 2019. № 2. С. 23–32.
9. Салахитдинов М.С., Хасанов А. К теории многомерного уравнения Геллерстедта // Узбекский математический журнал. 2007. № 3. С. 95–109.
10. Уринов А.К. Фундаментальные решения для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами // Научный вестник Ферганского государственного университета. 2006. № 1. С. 5–11.
11. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2017 V. 62. No. 3. P. 287–296. <http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2016.1218853>.
12. Назинов И.Т. Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 69–85.
13. Салахитдинов М.С., Хасанов А. Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Трикоми // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1979. № 6. С. 29–33.
14. Karimov E.T., Nieto J.J. The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients // Computers and Mathematics with Applications. 2011. No. 62. P. 214–224. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.09.013>.
15. Ergashev T.G., Hasanov A. Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No. 1. P. 55–64.
16. Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart. J. Math. (Oxford). 1940. Ser. 11. P. 249–270.
17. Хасанов А. Об одной смешанной задаче для уравнения $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1982. № 2. С. 28–32.
18. Аманов Д. Некоторые краевые задачи для вырождающегося эллиптического уравнения в неограниченной области // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1984. № 1. С. 8–13.
19. Аманов Д. Краевая задача для уравнения $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ в неограниченной области // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1984. № 2. С. 8–10.
20. Salakhiddinov M.S., Karimov E.T. Spatial boundary problem with the Dirichlet–Neumann condition for a singular elliptic equation // Applied Mathematics and Computation. 2012. V. 219. P. 3469–3476. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.09.013>.

21. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // *Sohag J. Math.* 2015. V. 2. No. 1. P.1–10.
22. Berdyshev A.S., Hasanov A., Ergashev T.G. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2019. P. 1–19. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219>
23. Эргашев Т.Г. Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца // *Уфимский математический журнал*. 2018. Т. 10. Вып. 4. С. 111–122. DOI:10.13108/2018-10-4-111.
24. Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2017. № 50. С. 45–56. DOI 10.17223/19988621/50/4.
25. Ergashev T.G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients // *Computers and Mathematics with Applications*. 2019. V. 77. P. 69–76. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.014>.
26. Уринов А.К., Эргашев Т.Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 55. С. 45–56. DOI 10.17223/19988621/55/5.
27. Бейтмен Г., Эрдёи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.

Статья поступила 30.11.2019 г.

Ergashev T.G., Komilova N.J. (2020) HOLMGREN PROBLEM FOR MULTUDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATION WITH TWO SINGULAR COEFFICIENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63 pp. 47–59

DOI 10.17223/19988621/63/5

Keywords: multidimensional elliptic equation with two singular coefficients; Holmgren problem; fundamental solution; Gauss – Ostrogradsky formula; Green function.

Fundamental solutions of the two-dimensional elliptic equation were known in the first half of the last century and they were successfully used in solving the basic boundary value problems and constructing the theory of potential for this equation. Relatively few papers have been devoted to the study of boundary value problems for multidimensional (greater than two-dimensional) elliptic equations with singular coefficients. For example, main boundary value problems for two-dimensional and three-dimensional elliptic equations with two singular coefficients in finite and infinite domains have been studied by many authors; however, the study of the Holmgren problem was limited to the two-dimensional case. This work is devoted to finding a unique solution to the Holmgren problem for a multidimensional elliptic equation with two singular coefficients in a quarter of a ball. Using the “abc” method, the uniqueness for the solution of the Holmgren problem is proved. Applying the method of Green’s function, we are able to find the solution of the problem in an explicit form. Moreover, the decomposition formula, formula of differentiation, and some adjacent relations for Appell’s hypergeometric functions were used in order to find the explicit solution for the formulated problem.

AMS Mathematical Subject Classification: 35A08, 35J25, 35J70, 35J75

Tuhtasin G. ERGASHEV (Candidate of Physics and Mathematics, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan), E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Nigora J. KOMILOVA (Fergana State University, Fergana, Uzbekistan).
E-mail: nigora.komilova@bk.ru

REFERENCES

1. Bers L. (1958) *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*. New York: Dover Publications Inc.
2. Frankl F.I. (1973) *Izbrannye trudy po gazovoy dinamike* [Selected works on gas dynamics]. Moscow: Nauka.
3. Smirnov M.M. (1966) *Vyrozhdaiushchiesya ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniya* [Degenerate elliptic and hyperbolic equations]. Moscow: Nauka.
4. Gilbert R. (1969) *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations*. New York, London: Academic Press.
5. Bitsadze A.V. (1981) *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Nauka.
6. Agostinelli C. (1937) Integrazione dell'equazione differenziale $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + x^{-1}u_x = f$ e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*. 6(26). pp. 7–8.
7. Olevskii M.N. (1949) Resheniya zadachi Dirikhle, odnosyashyeysya k uravneniyu $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = f$ dlya polusfericheskoy oblasti [Dirichlet problem solutions related to the equation $\Delta u + px_n^{-1}u_{x_n} = f$ for a hemispherical region]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Reports of the Academy of Sciences of USSR*. 64(6). pp. 767–770.
8. Ergashev T.G. (2019) Zadacha Kholmgrena dlya mnogomernogo ellipticheskogo uravneniya s odnim singulyarnym koeffitsiyentom [Holmgren problem for a multidimensional elliptic equation with one singular coefficient]. *Byulleten' Instituta matematiki – Bulletin of the Institute of Mathematics*. 2. pp. 23–32.
9. Salakhiddinov M.S., Hasanov A. (2007) K teorii mnogomernogo uravneniya Gellerstedta [On the theory of the multidimensional Gellerstedt equation]. *Uzbekskiy matematicheskiy zhurnal – Uzbek Mathematical Journal*. 3. pp. 95–109.
10. Urinov A.K. (2006) Fundamental'nye resheniya dlya nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa s singulyarnymi koeffitsiyentami [On fundamental solutions for the some type of the elliptic equations with singular coefficients]. *Nauchnyy vestnik Ferganskogo gosudarstvennogo universiteta – Scientific Records of the Fergana State University*. 1. pp. 5–11.
11. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. (2017) Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation. *Complex variables and elliptic equations*. 62(3). pp. 287–296. <http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2016.1218853>.
12. Nazipov I.T. (2011) Solution of the special Tricomi problem for a singular mixed-type equation by the method of integral equations. *Russian Mathematics*. 55(3). pp. 61–76. DOI: 10.3103/S1066369X1103008X.
13. Salakhiddinov M.S., Hasanov A. (1979) Ob odnoy kraevoy zadache dlya obobshennogo uravneniya Trikomy [On a boundary value problem for the generalized Tricomi equation]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk – Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. of phys. and math. sciences*. 6. pp. 29–33.
14. Karimov E.T., Nieto J.J. (2011) The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*. 62. pp. 214–224. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.068.
15. Ergashev T.G., Hasanov A. (2018) Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 55–64.
16. Burchnall J.L., Chaundy T.W. (1940) Expansions of Appell's double hypergeometric functions. *Quart. J. Math. (Oxford)*. 11. pp. 249–270.
17. Hasanov A. (1982) Ob odnoy smeshannoy zadache dlya uravneniya $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ [On a mixed problem for the equation $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk – Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. of phys. and math. sciences*. 2. pp. 28–32.

18. Amanov D. (1984) Nekotorye kraevye zadachi dlya vyrozhdayushchegosya ellipticheskogo uravneniya v neogranichennoy oblasti [Some boundary value problems for a degenerate elliptic equation in an unbounded domain]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. fiz.-mat.nauk – Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. of phys. and math. sciences.* 1. pp. 8–13.
19. Amanov D. (1984) Krayevaya zadacha dlya uravneniya $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ [A boundary value problem for the equation $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. fiz.-mat.nauk – Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. of phys. and math. sciences.* 2. pp. 8–10.
20. Salakhiddinov M.S., Karimov E.T. (2012) Spatial boundary problem with the Dirichlet-Neumann condition for a singular elliptic equation. *Applied Mathematics and Computation.* 219. pp. 3469–3476. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.09.013>.
21. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. (2015) Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Sohag J. Math.* 2(1). pp. 1–10.
22. Berdyshev A.S., Hasanov A., Ergashev T.G. (2019) Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II. *Complex Variables and Elliptic Equations.* pp. 1–19. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219>.
23. Ergashev T.G. (2018) Third double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Ufa Mathematical Journal.* 10(4). pp. 111–121. DOI:10.13108/2018-10-4-111.
24. Ergashev T.G. (2017) Chetverty potentsial dvoynogo sloya dlya obobshennogo dvouesimmetricheskogo uravneniya Gel'mgol'tsa [The fourth double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 50. pp. 45–56. DOI 10.17223/19988621/50/4.
25. Ergashev T.G. (2019) On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications.* 77. pp. 69–76. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.014>
26. Urinov A.K., Ergashev T.G. (2018) Konflyuentnye gipergeometricheskie funktsii mnogikh peremennykh i ikh primenenie k nakhozhdeniyu fundamental'nykh resheniy obobshchennogo uravneniya Gel'mgol'tsa s singulyarnymi koeffitsiyentami [Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to finding fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with singular coefficients]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 55. pp. 45–56. DOI 10.17223/19988621/55/5.
27. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. (1953) *Higher Transcendental Functions.* 1. New York; Toronto; London: McGraw-Hill Book Company.

Received: November 30, 2019

МЕХАНИКА

УДК 531:536-12

DOI 10.17223/19988621/63/6

М.А. Анисимова, А.Г. Князева

**ОЦЕНКА НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ
В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ
МЕЖДУ ЧАСТИЦЕЙ И МАТРИЦЕЙ¹**

Представлена модель для оценки напряжений и деформаций в процессе формирования переходного слоя между сферической частицей и матрицей в процессе синтеза композита. Модель включает в себя задачу реакционной диффузии с подвижными границами в квазистационарном приближении. Подзадача о нахождении положения границ раздела фаз решается численно. Далее находится распределение концентрации. Задача о механическом равновесии решается аналитически. Результат зависит от положения границ и распределения концентраций.

Ключевые слова: *переходный слой, новая фаза, композит, подвижная граница, напряжения, деформации, концентрация.*

При получении композитов состав и ширина переходного слоя между включениями и матрицей изменяются в процессе синтеза и зависят от многочисленных технологических параметров процесса (температуры, давления, времени синтеза и т.п.). Используя подходящую модель формирования переходного слоя, можно изучить эволюцию размеров переходной зоны и свойств получаемых материалов в динамике в зависимости от условий синтеза [1, 2]. В общем случае такие модели могут быть реализованы лишь численно, в особенности для многокомпонентных сред и при условии формирования нескольких фаз.

Один из вариантов постановки задачи о росте новых фаз – задача реакционной диффузии, когда граница раздела движется вследствие роста новой фазы [3]. В этом случае явно принимается, что скорость собственно реакции много выше скорости диффузии, что позволяет заменить зону реакции поверхностью раздела [4].

Кроме того, процесс образования новой фазы и движение границы сопровождаются диффузией, приводящей к перераспределению концентраций. Эти процессы приводят к появлению диффузионных (концентрационных) напряжений из-за разницы в подвижности диффузанта в фазах и различия свойств фаз. В работах [5, 6] представлены примеры моделей с аналитическими решениями для описания реакционной диффузии в сферической и цилиндрической неоднородных оболочках. Там же продемонстрировано влияние напряжений на реакционную диффузию, следовательно, и на процесс формирования переходного слоя.

В данной работе предложена модель, которая позволяет исследовать влияние условий синтеза композита на ширину формируемого переходного слоя между

¹ Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы, направление III.23.

матрицей и включением и оценить возникающие при этом напряжения в динамике.

Задача о росте новой фазы

Постановка задачи

Рассмотрим задачу в следующей постановке (рис. 1). Полагаем, что синтез композита осуществляется при заданных значениях температуры и давления. Включения имеют сферическую форму. Между материалами частицы и матрицы возможно образование переходной зоны (а) диффузионного типа или (б) в виде новой фазы (или последовательности новых фаз). Ширина этой переходной зоны зависит от условий синтеза и изменяется во времени. В случае (а) мы имеем диффузионную задачу вида [1]. В случае (б) мы должны учесть формирование новых химических соединений, опираясь, например, на диаграммы состояния. Примем для простоты, что между материалами может образоваться лишь одна новая фаза. Рост размеров фазы опишем на основе теории реакционной диффузии [4].

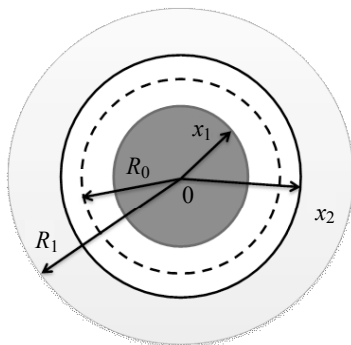


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи

Fig. 1. Illustration for the problem formulation

Тогда задача о росте новой фазы между сферическими включениями и матрицей примет вид

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} = \frac{D_k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial C_k}{\partial r}, \quad (1)$$

где C_k – концентрация материала частицы в разных областях: в материале включения ($0 \leq r < x_1$) – C_p , в материале матрицы ($x_1 \leq r < x_2$) – C_m и в материале образовавшейся фазы ($x_2 \leq r < R_0$) – C_f ; D_k – коэффициент диффузии; x_1 и x_2 – положения подвижных границ, которые отделяют новую фазу от исходных и являются функциями времени $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Граничные и начальные условия имеют следующий вид:

$$r = 0: \frac{\partial C_p}{\partial r} = 0; \quad (2)$$

$$r = x_1(t): C_f = C_1; (1 - C_1) \frac{dx_1}{dt} = D_f \frac{\partial C_f}{\partial r}; \quad (3)$$

$$r = x_2(t) : C_f = C_2, C_m = C_3; (C_2 - C_3) \frac{dx_2}{dt} = D_m \frac{\partial C_m}{\partial r} - D_f \frac{\partial C_f}{\partial r}; \quad (4)$$

$$r = R_1 : \frac{\partial C_m}{\partial r} = 0; \quad (5)$$

$$t = 0: C_p = 1, C_m = 0, C_f = 0; x_1 = x_{10} < R_0; x_2 = x_{20} > R_0. \quad (6)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 – пределы растворимости материала частицы в материале матрицы, которые известны из диаграммы состояния. Условие (2) есть условие симметрии; (3) и (4) учитывают наличие пределов растворимости и разрыв в диффузионных потоках, связанный с движением межфазных границ. Условие (5) – условие непроницаемости внешней границы выделенной мезоячейки, размер которой R_1 определяется количеством матрицы, приходящимся на одну частицу; R_0 – начальный радиус частицы. Начальные значения положений границ раздела близки к R_0 .

Метод решения

Чтобы решить задачу, можно использовать какой-либо численный метод, которых для задач с подвижными границами существует достаточно много. Однако для качественных оценок удобно применить приближенный подход, основанный на предположении о квазистационарности распределения концентраций на уровне мезоячейки. Аналогично [7], примем

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} = 0; \frac{\partial C_m}{\partial t} = 0; \frac{\partial C_f}{\partial t} = 0.$$

Тогда диффузионная задача разделится на две. Первая – о нахождении распределения концентрации в областях заданных размеров, вторая – об определении положения границ раздела фаз.

Примем $C_3 = 0$. Это означает, что материалы частицы и матрицы нерастворимы друг в друге. Тогда первая задача примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dC_f}{dr} \right) &= 0, \\ r = x_1(t) : C_f &= C_1, \\ r = x_2(t) : C_f &= C_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Концентрация материала частицы в области частицы $C_p = 1$, в области матрицы $C_m = 0$.

Задача (7) решается простым интегрированием; решение имеет вид

$$C_f(r) = -\frac{1}{r} \frac{(C_2 - C_1)(x_1 x_2) - r(C_2 x_2 - C_1 x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (8)$$

Следующий шаг – определение положения границ. Подставляя (8) в условия (3) и (4) для потоков, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= D_f \frac{x_2}{x_1} \frac{(C_2 - C_1)}{(x_2 - x_1)} \frac{1}{(1 - C_1)}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -D_f \frac{x_1}{x_2} \frac{(C_2 - C_1)}{(x_2 - x_1)} \frac{1}{C_2}, \end{aligned}$$

с условиями

$$t = 0: x_1 = x_{10}; x_2 = x_{20}.$$

Для удобства представления результатов перейдем к безразмерным переменным. Тогда распределение концентрации в области новой фазы и задача для подвижных границ примут вид

$$C_f(\xi) = -\frac{1}{\xi} \frac{(C_2 - C_1)(\xi_1 \xi_2) - \xi(C_2 \xi_2 - C_1 \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}; \quad (9)$$

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{(C_2 - C_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} \frac{1}{(1 - C_1)},$$

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = -\frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{(C_2 - C_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} \frac{1}{C_2}, \quad (10)$$

$$\tau = 0: \xi_1 = \xi_{10}; \xi_2 = \xi_{20},$$

где

$$\xi = \frac{r}{R_0}, \quad \bar{R}_0 = \frac{R_0}{R_0} = 1, \quad \bar{R}_1 = \frac{R_1}{R_0};$$

$$\xi_{10} = \frac{x_{10}}{R_0}; \xi_{20} = \frac{x_{20}}{R_0}; \xi_{10} = \frac{x_{10}}{R_0} < 1; \xi_{20} = \frac{x_{20}}{R_0} > 1; \tau = \frac{t}{R_0^2} D_f.$$

Полученные уравнения решаем численно методом Эйлера. На рис. 2 представлено распределение концентраций в начальный момент времени (а) и в процессе формирования новой фазы (b).

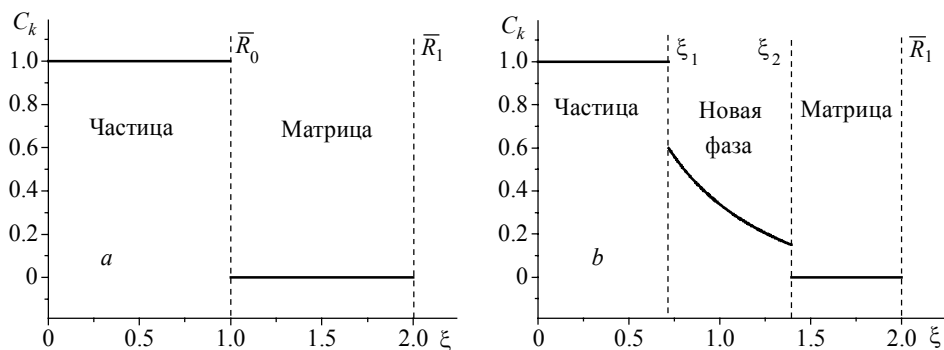


Рис. 2. Распределение концентраций материала частицы и положение границ новой фазы в процессе роста переходного слоя для значений пределов растворимости $C_1 = 0.6$ и $C_2 = 0.15$ в моменты времени τ : а – 0, б – 0.05

Fig. 2. Distribution of the particles' concentration and the position of new phase boundaries during a transition layer growth for solubility limits of $C_1 = 0.6$ and $C_2 = 0.15$ at time instants τ : (a) 0 and (b) 0.05

Таким образом, ширина сформировавшегося переходного слоя h может быть рассчитана как разность между положениями границ в данный момент времени:

$$h = \xi_2 - \xi_1.$$

Очевидно, что скорость движения границ зависит от значений пределов растворимости. Из рис. 3 видно, что изменение предела растворимости на границе с материалом частицы (рис. 3, а) более интенсивно влияет на скорость роста новой фазы, чем изменение предела на границе с материалом матрицы (рис. 3, б).

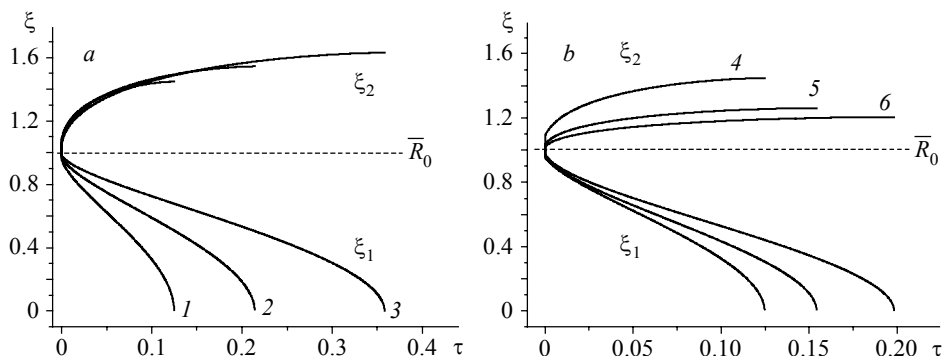


Рис. 3. Движение границ новой фазы в процессе роста переходного слоя относительно начального положения при разных значениях пределов растворимости: а – $C_2 = 0.15$; $C_1 = 1 - 0.7$; 2 – 0.6; 3 – 0.5; б – $C_1 = 0.7$; $C_2 = 4 - 0.15$; 5 – 0.3; 6 – 0.4

Fig. 3. The movement of the new phase boundaries during the transition layer growth relative to the initial position at various solubility limits: а) $C_2 = 0.15$; $C_1 = (1) 0.7$, (2) 0.6, and (3) 0.5; б) $C_1 = 0.7$; $C_2 = (4) 0.15$, (5) 0.3, and (6) 0.4

Задача об оценке напряжений и деформаций

Для оценки напряжений и деформаций рассмотрим частицу как «упругий» шар с неоднородным распределением концентраций, симметричным относительно центра шара, так что $C_k = C_k(r)$ (поскольку диффузия и рост новой фазы – процессы необратимые, то напряжения называем упругими, так как их приращения линейно связаны с изменением концентрации) [8].

Обобщенные соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций и концентрацией имеют вид

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \delta_{ij} [\lambda\epsilon_{kk} - K\omega], \quad (11)$$

где $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коэффициенты Ламе; E – модуль Юнга; ν –

коэффициент Пуассона; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – объемный модуль; $\omega = 3 \sum_{k=1}^n \alpha_k (C_k - C_{k0})$ – объемное изменение состава вследствие изменения концентраций;

$\alpha_k = \frac{1}{3V} \left(\frac{\partial V}{\partial C_k} \right)$ – коэффициент концентрационного расширения; δ_{ij} – символ

Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$; $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$).

Массовые силы отсутствуют, и условия симметрии позволяют считать, что

$$\sigma_{0r} = \sigma_{0\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0,$$

$$\epsilon_{0r} = \epsilon_{0\varphi} = \epsilon_{\varphi r} = 0,$$

а остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций являются функциями только радиальной координаты и времени как параметра. В этих условиях

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (12)$$

С учетом соотношений (11) и (12) получим уравнения, связывающие напряжения и перемещения:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \frac{du}{dr} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) - \frac{E}{3(1-2\nu)} \omega; \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1+\nu} \frac{u}{r} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) - \frac{E}{3(1-2\nu)} \omega. \quad (14)$$

В сферической системе координат уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (15)$$

Подставляем (13) и (14) в уравнение равновесия (15). Полагая, что свойства не зависят от координаты, приходим к уравнению равновесия в перемещениях в сферической системе координат

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right] = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{d\omega}{dr}. \quad (16)$$

Последующее интегрирование дает

$$u = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_x^r \omega(r) r^2 dr + \frac{A}{3} r + \frac{B}{r^2}, \quad (17)$$

где A и B – константы интегрирования.

Так как в предыдущем разделе было принято, что концентрация в частице и в матрице постоянная, то объемное изменение состава в этих областях равно нулю. В области переходного слоя концентрация задана функцией (9), в этом случае объемное изменение состава отлично от нуля и имеет вид [9]

$$\omega_f = 3(\alpha_p - \alpha_f)(C_f - C_{f0}).$$

В безразмерных переменных $\bar{u}_1 = \frac{u_1}{R_0}$; $\bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E_1}$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_1} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{E_1}$ задача

имеет следующее решение:

- в частице:

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{A}_1}{3} \xi + \frac{\bar{B}_1}{\xi^2},$$

$$\bar{\sigma}_{rr,1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-2\nu_1} \frac{\bar{A}_1}{\xi} - 2 \frac{\bar{B}_1}{\xi^3} \frac{1}{1+\nu_1},$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta,1} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi,1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-2\nu_1} \frac{\bar{A}_1}{\xi} + \frac{\bar{B}_1}{\xi^3} \frac{1}{1+\nu_1},$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr,1} = \frac{\bar{A}_1}{3} - 2 \frac{\bar{B}_1}{\xi^3}; \quad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta,1} = \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi,1} = \frac{\bar{A}_1}{3} + \frac{\bar{B}_1}{\xi^3};$$

- в матрице:

$$\bar{u}_3 = \frac{\bar{A}_3}{3} \xi + \frac{\bar{B}_3}{\xi^2},$$

$$\bar{\sigma}_{rr,3} = \frac{1}{3} \frac{E_3/E_1}{1-2\nu_3} \bar{A}_3 - 2 \frac{\bar{B}_3}{\xi^3} \frac{E_3/E_1}{1+\nu_3},$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta,3} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi,3} = \frac{1}{3} \frac{E_3/E_1}{1-2\nu_3} \bar{A}_3 + \frac{\bar{B}_3}{\xi^3} \frac{E_3/E_1}{1+\nu_3},$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr,3} = \frac{\bar{A}_3}{3} - 2 \frac{\bar{B}_3}{\xi^3}; \quad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta,3} = \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi,3} = \frac{\bar{A}_3}{3} + \frac{\bar{B}_3}{\xi^3};$$

- в переходном слое:

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{3} \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \frac{1}{\xi^2} \int_{\xi_1}^{\xi} \omega_f(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{\bar{A}_2}{3} \xi + \frac{\bar{B}_2}{\xi^2},$$

$$\bar{\sigma}_{rr,2} = -\frac{2}{3} \frac{E_2/E_1}{1-\nu_2} \frac{1}{\xi^3} \int_{\xi_1}^{\xi} \omega_f(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{1}{3} \frac{E_2/E_1}{1-2\nu_2} \bar{A}_2 - 2 \frac{\bar{B}_2}{\xi^3} \frac{E_2/E_1}{1+\nu_2},$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta,2} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi,2} = \frac{1}{3} \frac{E_2/E_1}{1-\nu_2} \left[\frac{1}{\xi^3} \int_{\xi_1}^{\xi} \omega_f(\xi) \xi^2 d\xi - \omega_f(\xi) \right] + \frac{1}{3} \frac{E_2/E_1}{1-2\nu_2} \bar{A}_2 + \frac{\bar{B}_2}{\xi^3} \frac{E_2/E_1}{1+\nu_2},$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr,2} = \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{\xi^3} \int_{\xi_1}^{\xi} \omega_f(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{1}{3} \omega_f(\xi) \right) + \frac{\bar{A}_2}{3} - 2 \frac{\bar{B}_2}{\xi^3},$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta\theta,2} = \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi,2} = \frac{1}{3} \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \frac{1}{\xi^3} \int_{\xi_1}^{\xi} \omega_f(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{\bar{A}_2}{3} + \frac{\bar{B}_2}{\xi^3}.$$

Так как границы раздела фаз – функции времени, а время в этой задаче – внешний параметр, то интегралы от концентраций легко берутся

$$\int_{\xi_1}^{\xi} C_f(\xi) \xi^2 d\xi = - \left[\frac{(C_2 - C_1)(\xi_1 \xi_2)(\xi^2 - \xi_1^2)}{2(\xi_2 - \xi_1)} - \frac{(C_2 \xi_2 - C_1 \xi_1)(\xi^3 - \xi_1^3)}{3(\xi_2 - \xi_1)} \right].$$

Константы интегрирования определяются с помощью граничных условий:

$$\xi = 0: \quad \bar{u}_1 = 0;$$

$$\xi = \xi_1: \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}_{rr,1} = \bar{\sigma}_{rr,2};$$

$$\xi = \xi_2: \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_3 \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}_{rr,2} = \bar{\sigma}_{rr,3};$$

$$\xi = \bar{R}_1: \quad \bar{u}_3 = 0.$$

Подставив полученное решение в граничные условия, получим систему шести алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования: $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{A}_3, \bar{B}_3$. Окончательный результат не приводим в силу его громоздкости.

Анализ результатов

На рис. 4 представлено изменение напряжений в рассматриваемых областях относительно модуля упругости частицы. Из рисунка видно, что при увеличении ширины переходного слоя напряжения уменьшаются. Аналогичный результат наблюдается при расчете деформаций (рис. 5). При малой ширине образующейся фазы, деформации на границах раздела велики и они уменьшаются с ростом фазы. Это позволяет утверждать, что напряжения могут привести к локальным повреждениям на начальной стадии роста переходного слоя.

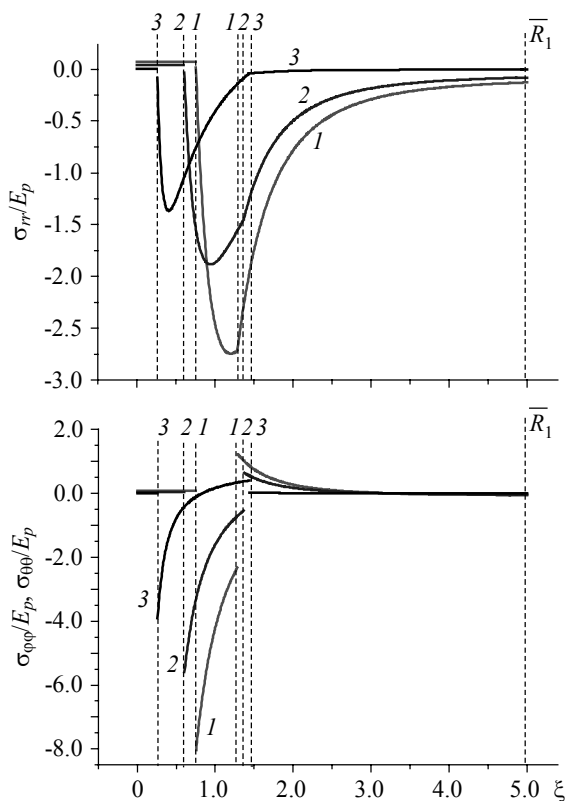


Рис. 4. Отношение напряжений к модулю упругости частицы (сплошная) и положение границ (пунктиром) в моменты времени τ : 1 – 0.05, $h = 0.53$; 2 – 0.1, $h = 0.76$; 3 – 0.2, $h = 1.18$

Fig. 4. The ratio of the stress to the elastic modulus of the particle (solid lines) and the position of the boundaries (dotted line) at time instants τ : (1) 0.05, $h = 0.53$; (2) 0.1, $h = 0.76$; and (3) 0.2, $h = 1.18$

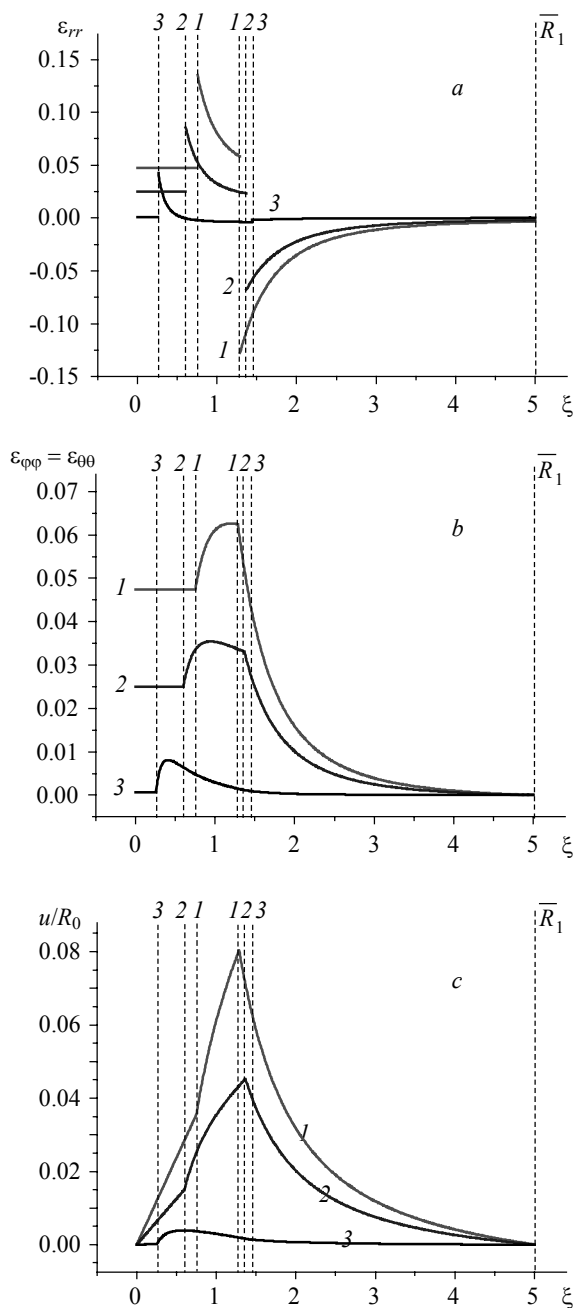


Рис. 5. Деформации (a, b) и отношение перемещений к начальному радиусу частицы (c) в моменты времени τ : 1 – 0.05, $h = 0.53$; 2 – 0.1, $h = 0.76$; 3 – 0.2, $h = 1.18$

Fig. 5. (a, b) Strains and (c) the ratio of displacements to the initial radius of the particle at time instants τ : (1) 0.05, $h = 0.53$; (2) 0.1, $h = 0.76$; and (3) 0.2, $h = 1.18$

Заключение

Таким образом, в работе предложена модель формирования поля напряжений в окрестности индивидуального включения, окруженного растущим слоем новой фазы. Показано, что максимальные значения напряжений наблюдаются в начальной стадии роста.

Предложенная модель может быть использована в задачах с многоуровневым подходом при исследовании механических свойств композитов [10, 11], в том числе при описании процесса синтеза композита из порошковых смесей, когда реальный материал заменяется эффективным с выделением реакционной ячейки [12, 13]. В зависимости от исходного состава композита, переходный слой может содержать несколько фаз, последовательность формирования которых зависит от условий синтеза. Усовершенствование модели возможно за счет учета динамики изменения температуры и условий нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kryukova O.N., Knyazeva A.G., Pogrebenkov V.M., Kostikov K.S., and Sevostianov I. Effective thermal expansion coefficient of a sintered glass-eucryptite composite // *J. Mater Sci.* 2017. V. 52. P. 11314–11325. DOI: 10.1007/s10853-017-1298-9.
2. Knyazeva A.G., Kryukova O.N., Lurie S.A., Solyaev Y.O., and Shavnev A.A. Intermediate layer formation between inclusion and matrix during synthesis of unidirectional fibrous composite // *AIP Conference Proceedings*. 2014. V. 1623. P. 263–266. DOI: 10.1063/1.4898932.
3. Wagner C.Z. Beitrag zur theorie des anlaufvorgangs // *Phys. Chem.* 1933. V. 21. P. 25–36.
4. Dybkov V.I. Solid state reaction kinetics. Kyiv: IPMS publications, 2013. 400 p.
5. Erde'lyi Z., Schmitz G. Reactive diffusion and stresses in spherical geometry // *Acta Materialia*. 2012. V. 60. P. 1807–1817. DOI: 10.1016/j.actamat.2011.12.006.
6. Roussel M., Erde'lyi Z., Schmitz G. Reactive diffusion and stresses in nanowires or nanorods // *Acta Materialia*. 2017. V. 131. P. 315–322. DOI: 10.1016/j.actamat.2017.04.001.
7. Ковалев О.Б., Беляев В.В. Математическое моделирование металлохимических реакций в двухкомпонентной реагирующей дисперсной смеси // *Физика горения и взрыва*. 2013. Т. 49. № 5. С. 64–76.
8. Назаренко Н.Н., Князева А.Г. Механические напряжения в сферолитах в процессе растворения кальций-фосфатов в биологических жидкостях // *Физическая мезомеханика*. 2010. Т. 13. № 3. С. 95–99.
9. Князева А.Г. Введение в локально-равновесную термодинамику физико-химических превращений в деформируемых средах: монография. Томск: Изд-во Том. ун-та, 146 с.
10. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к определению эффективных свойств композита с учетом повреждаемости // *Физическая мезомеханика*. 2013. Т. 16. № 5. С. 59–65.
11. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к исследованию влияния объемного соотношения компонентов волокнистого однонаправленного углепластика на его механические характеристики // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 2(28). С. 77–89.
12. Некрасов Е.А., Смоляков В.К., Максимов Ю.М. Математическая модель горения системы титан-углерод // *Физика горения и взрыва*. 1981. Т. 17. № 5. С. 39–46.
13. Лапишин О.В., Овчаренко В.Е. Математическая модель высокотемпературного синтеза интерметаллического соединения Ni_3Al на стадии воспламенения // *Физика горения и взрыва*. 1996. Т. 32. № 2. С. 46–54.

Статья поступила 25.06.2019 г.

Anisimova M.A., Knyazeva A.G. (2020) EVALUATION OF THE STRESS AND STRAIN DURING TRANSITION LAYER FORMATION BETWEEN A PARTICLE AND A MATRIX. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 60–71

DOI 10.17223/19988621/63/6

Keywords: transition layer, new phase, composite, moving boundary, stresses, strains, concentration.

When manufacturing composites, a transition layer is formed between a particle and a matrix. The composition and width of the layer both depend on technological parameters of the process. Application of the appropriate model of transition layer formation makes it possible to study in dynamics the evolution of transition zone size and the properties of obtained materials depending on the synthesis conditions. In addition, a new phase formation and boundary movement are accompanied by diffusion resulting in the redistribution of concentrations. These processes cause diffusion (concentration) stresses due to a difference in the phases' properties and a difference in the diffusant mobility in the phases.

The paper presents a model for estimating the stresses and strains during the transition layer formation between a spherical particle and a matrix. The model includes the problem of the reaction diffusion with the boundaries moving due to a new phase growth. In a quasi-steady-state approximation, the diffusion problem involves finding the concentration distribution in the regions of given sizes and the determining of the phase boundaries' position. The latter subproblem is solved numerically. It is followed by finding the concentration distribution. The problem of mechanical equilibrium is solved analytically. The resulting data depend on the position of the boundaries and distribution of the concentrations.

Financial support. This work was performed within the frame of the Fundamental Research Program of the State Academies of Sciences for 2013–2020, line of research III.23.

Mariia A. ANISIMOVA (Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anisimova_mawa@mail.ru

Anna G. KNYAZEVA (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anna-knyazeva@mail.ru

REFERENCES

1. Kryukova O.N., Knyazeva A.G., Pogrebenkov V.M., Kostikov K.S., Sevostianov I. (2017) Effective thermal expansion coefficient of a sintered glass–eucryptite composite. *Journal of Materials Science*. 52. pp. 11314–11325. DOI: 10.1007/s10853-017-1298-9.
2. Knyazeva A.G., Kryukova O.N., Lurie S.A., Solyaev Y.O., Shavnev A.A. (2014) Intermediate layer formation between inclusion and matrix during synthesis of unidirectional fibrous composite. *AIP Conference Proceedings. International Conference on Physical Mesomechanics of Multilevel Systems*. 1623. pp. 263–266. DOI: 10.1063/1.4898932.
3. Wagner C.Z. (1933) Beitrag zur theorie des anlaufvorgangs. *Journal of Physical Chemistry*. 21. pp. 25–36. DOI: 10.1515/zpch-1933-2105.
4. Dybkov V.I. (2013) *Solid State Reaction Kinetics*. Kyiv: IPMS Publications.
5. Erde'lyi Z., Schmitz G. (2012) Reactive diffusion and stresses in spherical geometry. *Acta Materialia*. 60(4). pp. 1807–1817. DOI: 10.1016/j.actamat.2011.12.006.
6. Roussel M., Erde'lyi Z., Schmitz G. (2017) Reactive diffusion and stresses in nanowires or nanorods. *Acta Materialia*. 131(1). pp. 315–322. DOI: 10.1016/j.actamat.2017.04.001.
7. Kovalev O.B., Belyaev V.V. (2013) Mathematical modeling of metallochemical reactions in a two-species reacting disperse mixture. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 49(5). pp. 563–574. DOI: 10.1134/S0010508213050080.

8. Nazarenko N.N., Knyazeva A.G. (2010) Mechanical stress in spherulites in dissolution of calcium phosphate in biological fluids. *Physical Mesomechanics*. 13(3). pp. 95–99.
9. Knyazeva A.G. (1996). *Vvedenie v lokal'no-ravnovesnyuyu termodinamiku fiziko-khimicheskikh prevrashcheniy v deformiruemyykh sredakh*. [Introduction to the local equilibrium thermodynamics of physicochemical transformations in deformable media]. Tomsk: TSU Publ.
10. Sovetova Yu.V., Sidorenko Yu.N., Skripnyak V.A. (2013) Multiscale approach to estimation of effective properties of a composite with regard to its damaging. *Physical Mesomechanics*. 16(5). pp. 59–65.
11. Sovetova Yu.V., Sidorenko Yu.N., Skripnyak V.A. (2014) Mnogourovnevyy podkhod k issledovaniyu vliyaniya ob"emnogo sootnosheniya komponentov voloknistogo odnonapravlenного ugleplastika na ego mekhanicheskie kharakteristiki [The multilevel approach to studying the influence of the volumetric ratio in components of unidirectional carbon fiber composite on its mechanical properties]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 77–89.
12. Nekrasov E.A., Smolyakov, V.K., Maksimov Yu.M. (1981) Matematicheskaya model' gorenii sistemy titan uglerod [Mathematical model of the combustion of a titanium carbon system]. *Fizika gorenii i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 17(5). pp. 39–46.
13. Lapshin O.V., Ovcharenko V.E. (1996) A mathematical model of high-temperature synthesis of nickel aluminide Ni3Al by thermal shock of a powder mixture of pure elements. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 32(2). pp. 299–305. DOI: 10.1007/BF01998460.

Received: June 25, 2019

УДК 539.313

DOI 10.17223/19988621/63/7

С.В. Бакушев

РАЗРЕШАЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Для математической модели сплошной среды, в которой переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига – только функцией интенсивности касательных напряжений, рассматривается построение разрешающего дифференциального уравнения – физически нелинейного аналога уравнения Леви линейной теории упругости – физически-нелинейной теории упругости в напряжениях для случая плоской деформации. Вводя обычным образом функцию напряжений, физически нелинейный аналог уравнения Леви будет представлять собой физически нелинейный аналог бигармонического уравнения для случая плоской деформации.

Ключевые слова: *теория упругости, плоская деформация, физическая нелинейность, разрешающее дифференциальное уравнение, решение в напряжениях.*

Оценка напряжённого и деформированного состояния многих ответственных частей зданий и сооружений выполняется в предположении, что эти части находятся в условиях плоской деформации. Сюда можно отнести, в частности, расчёт оснований под здания и сооружения, расчёт протяжённых фундаментов, расчёт канализационных каналов, расчёт трубопроводов больших диаметров и так далее. В настоящее время выполнение расчётов в предположении упругой работы материала конструкции уже нельзя считать достаточно удовлетворительным. В расчётах необходимо учитывать их реальные механические свойства, в частности физическую нелинейность, внутреннее трение в материале, взаимное влияние объёмного и сдвигового деформирования, геометрическую нелинейность и так далее. Тем более, что теоретические основы расчёта конструкций с учётом их реального механического поведения в настоящее время разработаны уже достаточно подробно [1– 6].

Однако от теоретических изысканий до практического внедрения разработанных методик проходит, как правило, достаточно длительное время. Это обусловлено и необходимостью экспериментальных обоснований разработанных методик, и необходимостью разработки расчётных соотношений для решения тех или иных задач или классов задач, и необходимостью выполнения поверочных расчётов, а также сравнения и анализ результатов решения тестовых задач по известным и предлагаемым методикам.

Целью данной работы является получение разрешающих дифференциальных уравнений физически-нелинейной теории упругости в напряжениях в случае плоской деформации для математической модели сплошной среды, в которой переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига – только функцией интенсивности касательных напряжений.

В настоящее время вопросам расчёта деформируемых твёрдых тел с учётом физической нелинейности уделяется пристальное внимание. В работе [7] представлена методика решения физически нелинейной плоской задачи теории упругости в перемещениях и её приложение к расчёту балок, взаимодействующих со средой, имеющих нелинейную диаграмму деформирования. Работа [8] посвящена разработке методики расчёта физически нелинейных пластинчатых систем типа призматических оболочек, взаимодействующих с упругой средой. В качестве примера рассмотрена П-образная система, контактирующая с упругой средой и представлена оценка влияния упругой среды и физической нелинейности на напряжённо-деформированное состояние пластинчатой системы. В статье [9] проанализированы вопросы целесообразности расчёта железобетонных конструкций по деформационной модели с учётом физической и геометрической нелинейности как конструктивных железобетонных систем в целом, так и их отдельных элементов. Работа [10] посвящена разработке разрешающих уравнений, описывающих напряжённо-деформированное состояние тонкостенных оболочечных конструкций, имеющих изломы поверхности, с учётом физически нелинейного деформирования. На базе использования обобщённых функций, содержащих разрывные функции Дирака и Хевисайда, предложен аналитический метод их решения. В статье [11], на основе решения плоской задачи физически нелинейной теории упругости, разработан метод расчёта нормальных нагрузок на крепь капитальных выработок и обделки тоннеля, проложенного в массиве, деформационные свойства которого описываются моделью физически нелинейного тела. В работе [12] рассматривается постановка физически нелинейно-пластической задачи о распределении напряжений вокруг выработки кругового очертания, сооружаемой в физически нелинейном массиве с начальным гидростатическим полем напряжений. Для исследования напряжённо-деформированного состояния использованы уравнения деформационной теории пластичности с условиями Кулона и А.Н. Ставругина. Показано, что учёт нелинейности приводит к снижению размера области предельного состояния вокруг выработки. В работе [13] предлагается метод решения плоских задач физически нелинейной теории упругости, основанный на применении методов комплексного анализа, начатого в работах Колосова, Мусхелишвили, Векуа и их учеников. Работа [14] посвящена построению решения плоской статической задачи нелинейной теории упругости через комплексные потенциалы, обобщающие известные формулы Колосова. Решение строится для материалов с линейной зависимостью между деформациями Альманси и напряжениями Коши. В работе [15] рассматривается основанный на применении средств комплексного анализа в сочетании со стандартными численными методами оптимизации аналитико-численный метод решения трёхмерных краевых задач нелинейной теории упругости Мурнагана, позволяющий учитывать поведение материала при больших деформациях. Работа [16] посвящена общим подходам к решению пространственных физически нелинейных задач теории упругости, основанным на использовании аналитических функций – кватернионов. При квадратичном законе деформирования получены решения в напряжениях и смещениях. Авторы [17] рассматривают обобщённую плоскую задачу нелинейной теории упругости для полуплоскости, нагруженной на границе внешней сосредоточенной силой (нелинейная задача Фламана). Аналитические решения получены для двух моделей несжимаемого материала: неогукковского и Бартенева – Хазановича и одной модели сжимаемого полуплоского (гармонического) материала. В статье [18]

описывается нелинейное поведение бетона как гиперупругого ортотропного материала на базе экспериментальных диаграмм деформирования при одноосном растяжении и сжатии: осевое напряжение – осевая деформация, осевое напряжение – поперечная деформация. В работе [19] рассматриваются вопросы проницаемости пород, составляющих резервуары хранения сланцевого газа. Показана исключительная чувствительность проницаемости породы от характера изменения её напряжённого состояния. Расчёты показали, что учёт нелинейной упругости материала породы наиболее точно описывает её сланцевую проницаемость, пористость, поровое давление и распределение эффективного напряжения. В работе [20] рассмотрена проблема учёта физической нелинейности при расчёте конструкций и их элементов из анизотропных материалов. Методика расчёта конструкций и их элементов основана на деформационной теории пластичности с использованием модифицированного метода Ньютона – Рафсона. Работа [21] посвящена разработке методики расчёта предварительно напряжённых железобетонных ферм с учётом физической и геометрической нелинейности. В основу методики положены алгоритмы нелинейного расчёта, реализованные и апробированные в вычислительном комплексе ПРИНС на базе метода конечных элементов шагово-итерационным методом. В статье [22] предложена конечно-элементная итерационная процедура для анализа напряжённо-деформированного состояния стальных плоских рам с учётом упругопластической работы материала и влияния продольных сил в стержнях на деформации изгиба. На каждой итерации решается линейная задача с использованием для конечных элементов текущих матриц жёсткости и матриц устойчивости. Статья [23] посвящена компьютерному моделированию деформированного состояния физически нелинейных трансверсально-изотропных тел с отверстием. Анизотропия механических свойств материалов описывается структурно-феноменологической моделью, согласно которой исходный материал представляется в виде комплекса из двух совместно работающих изотропных материалов: основного (связующего), рассматриваемого с позиций механики сплошной среды, и материала волокон, ориентированных вдоль направления анизотропии исходного материала. Для решения задачи теории пластичности применяется упрощённая теория малых упругопластических деформаций для трансверсально-изотропного тела, развитая Б.Е. Победрей. Работа [24] посвящена решению краевых задач обобщённой плоской деформации для упругого неогуковского тела, находящегося в поле объёмных сил. Общее решение, с использованием номинального тензора напряжений и функции напряжений, записывается через две голоморфные функции, а основные краевые задачи нелинейной теории упругости приводятся к задаче Римана – Гильберта для голоморфного вектора. Окончательное решение записывается в квадратурах с помощью интеграла Шварца. В работе [25] с использованием аналитических и численных методов рассмотрены фундаментальные вопросы математической корректности и численного решения краевых задач нелинейной теории упругости как в стационарной, так и в эволюционной постановках. Авторами [26] на основе комплексного подхода, позволившего получить более компактные и обозримые зависимости, была предложена предельно простая (без потери общности) версия общей нелинейной теории упругости. Предложенная теория позволяет получать точные решения двумерных краевых задач (плоская задача, антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения). В статье [27] представлен метод расчёта на динамическую устойчивость пластинчатых систем из физически нелинейных материалов, а также

получена система нелинейных дифференциальных уравнений для исследования динамической устойчивости таких систем. В качестве примера выполнен расчёт на устойчивость П-образной оболочки. В работе [28] выполнен асимптотический анализ соотношений теории деформации сплошной среды с целью выявить возможности их упрощения. Критерий упрощения включает как масштаб изменения напряжённо-деформированного состояния, так и величину относительных удлинений и сдвигов. Это позволило конкретизировать и развить известный подход В.В. Новожилова к упрощению нелинейных соотношений механики сплошных сред, установить асимптотическую погрешность их приближенных вариантов.

Разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости в общем случае трёхмерного деформирования при произвольных перекрёстных зависимостях между первыми инвариантами тензоров σ , ε и вторыми инвариантами девиаторов T , Γ напряжений и деформаций получены в работе [29]. Для случая плоской задачи, в частности обобщённого плоского напряжённого состояния, разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости при произвольных перекрёстных зависимостях между первыми инвариантами тензоров σ , ε и вторыми инвариантами девиаторов T , Γ напряжений и деформаций получены в работе [30]. Для случая плоской деформации разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости представлены в работе [31].

Вывод расчётных уравнений.

Рассмотрим сплошную среду, находящуюся в условиях плоской деформации, механическое поведение которой описывается математической моделью, в которой переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига – только функцией интенсивности касательных напряжений, то есть

$$K = K(\sigma); \quad G = G(T). \quad (1)$$

В формуле (1), в частности, обозначено:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y; \\ T &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2}; \\ \Gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Физические соотношения при этом запишем в следующей форме:

$$\varepsilon_x = a\sigma_x + b\sigma_y; \quad \varepsilon_y = a\sigma_y + b\sigma_x; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \text{причём} \quad \sigma_z = c(\sigma_x + \sigma_y). \quad (3)$$

Здесь

$$a = \frac{3K + 4G}{4G(3K + G)}; \quad b = \frac{2G - 3K}{4G(3K + G)}; \quad c = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}. \quad (4)$$

Ввиду этого коэффициенты

$$a = a(\sigma, T); \quad b = b(\sigma, T); \quad c = c(\sigma, T). \quad (5)$$

С учётом формул (3), соотношения (2) получают вид

$$\begin{aligned}\sigma &= (1+c)(\sigma_x + \sigma_y); \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y; \\ T &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(c^2 - c + 1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + (2c^2 - 2c - 1)\sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}; \\ \Gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2}.\end{aligned}\quad (6)$$

Подставляя физические соотношения (3) в уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

и учитывая уравнения равновесия при постоянных объёмных силах:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0, \quad (7)$$

($F_x = \text{const}$, $F_y = \text{const}$), получим уравнение неразрывности деформаций для физически нелинейной теории упругости для случая плоской деформации, записанное в напряжениях:

$$\begin{aligned}\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= \left(\frac{1}{G^2} \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{\partial b}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \left(\frac{1}{G^2} \frac{\partial G}{\partial y} - 2 \frac{\partial b}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - 2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) \sigma_x - \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) \sigma_y - \frac{1}{G^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{2}{G} \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \right) \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – гармонический оператор.

В правой части уравнения (8) производные определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y}; \\ \frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{\partial b}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial a}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial a}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 b}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 b}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial b}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.\end{aligned}\quad (9)$$

При этом, как это следует из зависимостей (4)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a}{\partial \sigma} &= -\frac{9G}{4G(3K+G)^2} \frac{\partial K}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial b}{\partial \sigma} = \frac{3(6K-G)}{4G(3K+G)^2} \frac{\partial K}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{3(6K-G)}{2(G+3K)^2} \frac{\partial K}{\partial \sigma}; \\
 \frac{\partial a}{\partial T} &= \frac{4G(3K+G) - (3K+4G)(3K+2G)}{4G^2(3K+G)^2} \frac{\partial G}{\partial T}; \\
 \frac{\partial b}{\partial T} &= \frac{2G(3K+G) - (2G-3K)(2G+3K)}{4G^2(3K+G)^2} \frac{\partial G}{\partial T}; \\
 \frac{\partial c}{\partial T} &= -\frac{18K}{(2G+6K)^2} \frac{\partial G}{\partial T}; \\
 \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} &= -\frac{9G}{4G(3K+G)^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \sigma^2} + \frac{27G}{2G(3K+G)^3} \left(\frac{\partial K}{\partial \sigma} \right)^2; \\
 \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} &= -\frac{9G}{4G(3K+G)^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \sigma^2} + \frac{27G}{2G(3K+G)^3} \left(\frac{\partial K}{\partial \sigma} \right)^2; \\
 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} &= -\frac{3(6K-G)}{2(3K+G)^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \sigma^2} - \frac{27G}{(3K+G)^3} \left(\frac{\partial K}{\partial \sigma} \right)^2; \\
 \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} &= \frac{4G(3K+G) - (4G+3K)(2G+3K)}{4G^2(3K+G)^2} \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} + \\
 &+ \frac{4G(3K+G)(3K+2G) - (3K+4G)[G^2 + G(3K+G) + (3K+G)^2]}{2G^3(3K+G)^3} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)^2; \\
 \frac{\partial^2 b}{\partial T^2} &= \frac{2G(3K+G) + (3K-2G)(3K+2G)}{4G^2(3K+G)^2} \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} - \\
 &- \frac{2G(3K+G)(3K+2G) + (3K-2G)[G^2 + G(3K+G) + (3K+G)^2]}{2G^3(3K+G)^3} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)^2; \\
 \frac{\partial^2 c}{\partial T^2} &= -\frac{9K}{2(3K+G)^2} \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} + \frac{2(6K-G)}{(3K+G)^3} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{10}$$

причём

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}. \tag{11}$$

В формулах (9), (10) и (11) в соответствии с зависимостями (2)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \frac{1+c}{\alpha - \gamma \delta} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + \frac{\gamma}{\beta(\alpha - \gamma \delta)} \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \frac{1+c}{\alpha-\gamma\delta} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + \frac{\gamma}{\beta(\alpha-\gamma\delta)} \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + \right. \\
&\quad \left. + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right]; \\
\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{\beta-\delta} \frac{\gamma}{\alpha} \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{(1+c)\delta}{\alpha} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \right]; \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\beta-\delta} \frac{\gamma}{\alpha} \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{(1+c)\delta}{\alpha} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \right].
\end{aligned} \tag{12}$$

В формулах (12) введены обозначения:

$$A = c^2 - c + 1; \quad B = 2c^2 - 2c - 1; \quad \alpha = 1 - (\sigma_x + \sigma_y) \frac{\partial c}{\partial \sigma};$$

$$\beta = 6T - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \frac{\partial A}{\partial T} - \sigma_x \sigma_y \frac{\partial B}{\partial T}; \quad \gamma = (\sigma_x + \sigma_y) \frac{\partial c}{\partial T}; \quad \delta = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \frac{\partial A}{\partial \sigma} - \sigma_x \sigma_y \frac{\partial B}{\partial \sigma}.$$

Формулы для вторых производных получают вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= \frac{1}{(\alpha-\gamma\delta)^2} \left\{ (\alpha-\gamma\delta) \left[\frac{\partial c}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + (1+c) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) \right] + \right. \\
&\quad + \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right] + \\
&\quad + \frac{\gamma}{\beta} \left[2 \frac{\partial A}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + 2A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) + \right. \\
&\quad + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + B \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) + \\
&\quad + 6 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + 6\tau_{xy} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} \left. \right] - \left\langle (1+c) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + \frac{\gamma}{\beta} \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right] \right\rangle \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \delta \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \delta}{\partial x} \right); \\
\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= \frac{1}{(\alpha-\gamma\delta)^2} \left\{ (\alpha-\gamma\delta) \left[\frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + (1+c) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \right] + \right. \\
&\quad + \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) + 6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{\beta} \left[2 \frac{\partial A}{\partial y} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + 2A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial B}{\partial y} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) + B \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) + \\
& + 6 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 6 \tau_{xy} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} \left. \right] - \left\langle (1+c) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + \frac{\gamma}{\beta} \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) + 6 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] \right\rangle \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \delta \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) \Bigg\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} = & \frac{1}{(\alpha - \gamma \delta)^2} \left\{ (\alpha - \gamma \delta) \left[\frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + (1+c) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) \right] + \right. \\
& + \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + 6 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{\gamma}{\beta} \left[2 \frac{\partial A}{\partial y} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + 2A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial B}{\partial y} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + B \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} \right) + \\
& + 6 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + 6 \tau_{xy} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \left. \right] - \left\langle (1+c) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + \frac{\gamma}{\beta} \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + 6 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right] \right\rangle \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \delta \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) \Bigg\}; \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = & \frac{\alpha^2}{(\alpha \beta - \gamma \delta)^2} \left\{ \left(\beta - \delta \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left[2 \frac{\partial A}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
& + 2A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + \\
& + B \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) + 6 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + 6 \tau_{xy} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \\
& + \frac{\partial c}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \frac{\delta}{\alpha} + (1+c) \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) \frac{\delta}{\alpha} + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{\delta}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \right] \Bigg\} - \\
& - \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + 6 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \right. \\
& \left. + (1+c) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \frac{\delta}{\alpha} \right] \left[\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial \delta}{\partial x} - \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = & \frac{\alpha^2}{(\alpha\beta - \gamma\delta)^2} \left\{ \left(\beta - \delta \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left\langle 2 \frac{\partial A}{\partial y} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
& + 2A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial B}{\partial y} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) + \\
& + B \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) + 6 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 6 \tau_{xy} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \\
& + \frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \frac{\delta}{\alpha} + (1+c) \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \frac{\delta}{\alpha} + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \delta}{\partial y} - \frac{\delta}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right] \Bigg\} - \\
& - \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) + 6 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \right. \\
& + (1+c) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \frac{\delta}{\alpha} \Bigg] \left[\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial \delta}{\partial y} - \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = & \frac{\alpha^2}{(\alpha\beta - \gamma\delta)^2} \left\{ \left(\beta - \delta \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left\langle 2 \frac{\partial A}{\partial y} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
& + 2A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial B}{\partial y} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + \\
& + B \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} \right) + 6 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + 6 \tau_{xy} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \\
& + \frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \frac{\delta}{\alpha} + (1+c) \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) \frac{\delta}{\alpha} + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \delta}{\partial y} - \frac{\delta}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right] \Bigg\} - \\
& - \left[2A \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) + B \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + 6 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \right. \\
& + (1+c) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \frac{\delta}{\alpha} \Bigg] \left[\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial \delta}{\partial y} - \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right].
\end{aligned}$$

В формулах (13)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x} &= (2c-1) \frac{\partial c}{\partial x}; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = (2c-1) \frac{\partial c}{\partial y}; \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 2(2c-1) \frac{\partial c}{\partial x}; \quad \frac{\partial B}{\partial y} = 2(2c-1) \frac{\partial c}{\partial y}; \\
\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \frac{\partial c}{\partial \sigma} - (\sigma_x + \sigma_y) \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial x}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \frac{\partial c}{\partial \sigma} - (\sigma_x + \sigma_y) \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial y}; \\
\frac{\partial \beta}{\partial x} &= 6 \frac{\partial T}{\partial x} - 2 \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \frac{\partial A}{\partial T} - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial x} - \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) \frac{\partial B}{\partial T} - \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial x}; \\
\frac{\partial \beta}{\partial y} &= 6 \frac{\partial T}{\partial y} - 2 \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \frac{\partial A}{\partial T} - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial y} - \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) \frac{\partial B}{\partial T} - \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial y};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \frac{\partial c}{\partial T} + (\sigma_x + \sigma_y) \frac{\partial^2 c}{\partial T \partial x}; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \frac{\partial c}{\partial T} + (\sigma_x + \sigma_y) \frac{\partial^2 c}{\partial T \partial y}; \\
\frac{\partial \delta}{\partial x} &= 2 \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right) \frac{\partial A}{\partial \sigma} - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial x} + \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) \frac{\partial B}{\partial \sigma} + \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial x}; \\
\frac{\partial \delta}{\partial y} &= 2 \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \frac{\partial A}{\partial \sigma} - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial y} + \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right) \frac{\partial B}{\partial \sigma} + \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial y},
\end{aligned} \quad (14)$$

причём

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial c}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y}; \\
\frac{\partial A}{\partial \sigma} &= (2c-1) \frac{\partial c}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial A}{\partial T} = (2c-1) \frac{\partial c}{\partial T}; \quad \frac{\partial B}{\partial \sigma} = 2(2c-1) \frac{\partial c}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial B}{\partial T} = 2(2c-1) \frac{\partial c}{\partial T}; \\
\frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial x} &= \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial T}{\partial y}; \\
\frac{\partial^2 A}{\partial T \partial x} &= \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial y}; \\
\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial x} &= \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial y} = \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial T}{\partial y}; \\
\frac{\partial^2 B}{\partial T \partial x} &= \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial y} = \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial y}; \\
\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial x} &= \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial y} = \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial T}{\partial y}; \\
\frac{\partial^2 c}{\partial T \partial x} &= \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 c}{\partial T \partial y} = \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial y}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial \sigma^2} &= 2 \frac{\partial c}{\partial \sigma} \frac{\partial c}{\partial \sigma} + (2c-1) \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = 2 \frac{\partial c}{\partial T} \frac{\partial c}{\partial T} + (2c-1) \frac{\partial^2 c}{\partial T^2}; \\
\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma^2} &= 4 \frac{\partial c}{\partial \sigma} \frac{\partial c}{\partial \sigma} + 2(2c-1) \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}; \quad \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} = 4 \frac{\partial c}{\partial T} \frac{\partial c}{\partial T} + 2(2c-1) \frac{\partial^2 c}{\partial T^2}; \\
\frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \partial T} &= 2 \frac{\partial c}{\partial \sigma} \frac{\partial c}{\partial T} + (2c-1) \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial T}; \quad \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial T} = 4 \frac{\partial c}{\partial \sigma} \frac{\partial c}{\partial T} + 2(2c-1) \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial T}.
\end{aligned} \quad (16)$$

Введём обычным образом функцию напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$ так, что

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (17)$$

При этом уравнения равновесия (7) без учёта объёмных сил удовлетворяются тождественно.

С учётом формул (17) уравнение неразрывности деформаций (8) будет представлять собой физически нелинейный аналог бигармонического уравнения для плоской деформации. Вполне понятно, что в отличие от физически линейной теории упругости, где бигармоническое уравнение является однородным, аналог бигармонического уравнения для физически нелинейной теории упругости является неоднородным. Вид правой части уравнения (8) существенно определяется видом рассматриваемой математической модели сплошной среды.

Если механическое поведение сплошной среды описывается линейным законом, то есть

$$K = \text{const}, \quad G = \text{const}, \quad (18)$$

то уравнение (8) приводится к уравнению Леви линейной теории упругости:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (19)$$

Заключение

Полученные в статье результаты – разрешающие дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости в напряжениях для плоской деформации, когда переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига – только функцией интенсивности касательных напряжений – могут найти применение при решении задач расчёта деформируемых тел и сплошных сред, находящихся в условиях плоской деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел: в 2 ч. Часть 1. Малые деформации: пер. с англ. / под ред. А.П. Филина. М.: Наука, 1984. 600 с.
2. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел: в 2 ч. Часть II. Конечные деформации: пер. с англ. / под ред. А.П. Филина. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 780 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. Новожиллов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
6. Гениев Г.А., Лейтес В.С. Вопросы механики неупругих тел. М.: Стройиздат, 1981. 160 с.
7. Иванов С.П., Ахметшин М.Н. Решение физически нелинейной плоской задачи теории упругости и её приложение к расчёту балок, контактирующих со средой // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 33–36.
8. Иванов С.П., Иванов О.Г. Расчёт физически нелинейных пластинчатых систем, взаимодействующих с упругой средой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 1. С. 146–155.
9. Дудина И.В., Жердева С.А. Учёт физической нелинейности материалов при оценке надёжности железобетонных конструкций // Системы. Методы. Технологии. 2009. № 2 (2). С. 66–68.
10. Пичугин С.Н. Расчёт оболочечных конструкций в виде резервуаров с физически нелинейным деформированием // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2010. № 3. С. 64–69.
11. Протосеня А.Г., Семенов В.И., Супрун И.К. Расчёт нагрузок на крепь выработок и тоннелей, сооружаемых в физически нелинейных массивах // Записки Горного института. 2012. Т. 199. С. 173–175.
12. Протосеня А.Г. Физически нелинейно-пластическая задача о распределении напряжений вокруг выработки кругового очертания // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2014. № 2. С. 43–48.

13. Александрович А.И., Горлова А.В. Исследование плоской задачи для физически нелинейного упругого тела методами теории функций комплексного переменного. // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2007. № 3. С. 63–72.
14. Бондарь В.Д. Метод комплексных потенциалов в нелинейной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41. № 1 (239). С. 133–143.
15. Шеина А.А., Александрович А.И. Решение пространственных задач нелинейной теории упругости методами многомерного комплексного анализа // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–4. С. 1862–1863.
16. Ницагин В.А., Севрук А.Б. Общие приближенные решения основных задач пространственной нелинейной теории упругости в аналитических многомерных функциях матричной переменной // Наука и техника. 2007. № 1. С. 60–65. DOI 10.21122/2227-1031-2007-0-1-60-65.
17. Мальков В.М., Малькова Ю.В. Анализ сингулярности напряжений в нелинейной задаче Фламана для некоторых моделей материала // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 4. С. 652–660.
18. Lavrov Kirill, Semenov Artem, Benin Andrey. Modeling of nonlinear multiaxial deformation of concrete on the base of hyperelastic orthotropic model // MATEC Web of Conferences. 2016. 53:01043. DOI 10.1051/mateconf/20165301043.
19. Chenji Wei, Liangang Wang, Baozhu Li, Lihui Xiong, Shuangshuang Liu, Jie Zheng, Suming Hu, Hongqing Song. A study of nonlinear elasticity effects on permeability of stress sensitive shale rocks using an improved coupled flow and geomechanics model: a case study of the longmaxi shale in China // Energies. 2018. 11(2): 329. DOI 10.3390/en11020329.
20. Блохина Н.С. Расчёт конструкций из анизотропных материалов с учётом физической нелинейности // Строительная механика и расчёт сооружений. 2012. № 1 (240). С. 3–5.
21. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Применение метода конечных элементов с учётом физической и геометрической нелинейности для расчёта предварительно напряжённых железобетонных ферм // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017. Т. 44. № 1. С. 127–137. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137.
22. Серпик И.Н., Балабин П.Ю., Школяренко Р.О. Расчёт рамных конструкций в физически нелинейной постановке с учётом влияния продольных сил на изгиб // Проблемы инновационного биосферно-совместимого социально-экономического развития в строительстве, жилищно-коммунальном и дорожном комплексах: Материалы 4-й Международной научно-практической конференции, посвященной 55-летию строительного факультета и 85-летию БГИТУ. 2015. С. 363–366.
23. Полатов А.М. Компьютерное моделирование деформированного состояния физически нелинейных трансверсально-изотропных тел с отверстием // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 1. С. 25–35. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.1.3.
24. Мартынов Н.И. Краевые задачи для неограниченного материала в нелинейной теории упругости // Наука и мир. 2014. № 9 (13). С. 25–31.
25. Бригаднов И.А., Бухштабер В.М., Антонова И.А., Соколова Е.Г., Шаров С.А. Математическая корректность и методы решения краевых задач нелинейной упругости: Отчёт о НИР № 96-01-00054 (Российский фонд фундаментальных исследований).
26. Черных К.Ф. Вариант нелинейной теории упругости. его структура и возможности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. № 3–4. С. 55–62.
27. Иванов С.П., Иванова А.С. Динамическая устойчивость физически нелинейных пластичных систем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 4. С. 9–18.
28. Шамина В.А., Веселков С.Ю., Слепнева Л.В. Основные модели нелинейной механики деформируемого тела: Отчёт о НИР № 95-01-00334 (Российский фонд фундаментальных исследований)
29. Бакушев С.В. Уравнения физически нелинейной теории упругости в напряжениях // Региональная архитектура и строительство. 2011. №1(12). С. 117–123.

30. Бакушев С.В. Плоская задача физически нелинейной теории упругости – решение в напряжениях // Региональная архитектура и строительство. 2014. №1(18). С. 82–88.
31. Бакушев С.В. Плоская деформация физически нелинейной теории упругости – решение в напряжениях // Строительная механика и расчёт сооружений. 2014. № 2. С. 2–9.

Статья поступила 18.03.2019 г.

Bakushev S.V.(2020) RESOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PHYSICALLY NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY IN TERMS OF STRESSES FOR A PLANE STRAIN. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 72–86

DOI 10.17223/19988621/63/7

Keywords: theory of elasticity, plane strain, physical nonlinearity, resolving differential equation, solution in terms of stresses.

The paper is aimed to obtain resolving differential equations of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses for a plane strain. These equations represent a mathematical model of the continuum whose variable coefficient of the volume expansion (compressibility) is a function of average stress only, and the variable coefficient of the shear is a function of tangential stress intensity only. The resolving differential equations are obtained by inserting the physical relations, in which the strains are expressed in terms of stresses, into Saint-Venant's compatibility condition written for a plane problem. As a result, a physically nonlinear analogue of the Levy equation for linear theory of elasticity is derived. When balance equations are satisfied irrespective of volume forces, stress function introducing yields a physically nonlinear analogue of the Levy equation represented as a physically nonlinear analogue of the biharmonic equation for a plane strain. As opposed to physically linear theory of elasticity, where biharmonic equations are homogeneous, the analogue to the biharmonic equation of physically nonlinear theory of elasticity is inhomogeneous. The form of the right side of the biharmonic equation is governed by the analyzed mathematical model of continuum. The obtained results can be used when solving the problems of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses.

Sergey V. BAKUSHEV (Doctor of Technical Sciences, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation). E-mail: bakuchsv@mail.ru

REFERENCES

1. Bell Dzh.F. (1984) *Ekspperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel. Chast I. Malye deformatsii*. [Experimental basis of the deformable solid mechanics. Part 1. Small strains]. Moscow: Nauka.
2. Bell Dzh.F. (1984) *Ekspperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel. Chast II. Konechnye deformatsii*. [Experimental basis of the deformable solid mechanics. Part 2. Finite strains]. Moscow: Nauka.
3. Kauderer G. (1961) *Nelineynaya mekhanika* [Nonlinear Mechanics]. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury.
4. Lurie A.I. (1990) *Nonlinear Theory of Elasticity*. Amsterdam: North-Holland.
5. Novozhilov V.V. (1958) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Leningrad: Sudpromgiz.
6. Geniev G.A., Leytes V.S. (191) *Voprosy mekhaniki neuprugikh tel* [Issues of the mechanics of inelastic bodies]. Moscow: Stroyizdat.
7. Ivanov S.P., Akhmetshin M.N. (2012) Reshenie fizicheskii nelineynoy ploskoy zadachi teorii uprugosti i ee prilozhenie k raschetu balok, kontaktiruyushchikh so sredoy [Solution to the physically nonlinear plane problem of the theory of elasticity and its application in the calculation of the beams interacting with medium]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2. pp. 33–36.

8. Ivanov S.P., Ivanov O.G. (2005) Raschet fizicheski nelineynykh plastinchatykh sistem, vzaimodeystvuyushchikh s uprugoy sredoy [Calculation of physically non-linear plate systems, interacting with elastic medium]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsey – Mechanics of Composite Materials and Structures*. 11(1). pp. 146–155.
9. Dudina I.V., Zherdeva S.A. (2009) Uchet fizicheskoy nelineynosti materialov pri otsenke nadezhnosti zhelezobetonnykh konstruktsey [Allowance for physical nonlinearity of materials when estimating the reliability of reinforced concrete structures]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii – Systems. Methods. Technologies*. 2(2). pp. 66–68.
10. Pichugin S.N. (2010) Raschet obolochечnykh konstruktsey v vide rezervuarov s fizicheski nelineynym deformirovaniem [Calculation of shell constructions in the form of reservoirs with a physically nonlinear strain]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Neft' i gaz – Oil and Gas Studies*. 3. pp. 64–69.
11. Protosenya A.G., Semenov V.I., Suprun I.K. (2014) Raschet nagruzok na krep' vyrabotok i tonneley, sooruzhaemykh v fizicheski nelineynykh massivakh [Analysis of load formation on lining of tunnel constructed in soil with nonlinear behavior]. *Zapiski Gornogo instituta – Journal of Mining Institute*. 199. pp. 173–175.
12. Protosenya A.G. (2014) Fizicheski nelineyno-plasticheskaya zadacha o raspredelenii napryazheniy vokrug vyrabotki krugovogo ochertaniya [Physically nonlinear plastic problem of the stress distribution around a circular groove]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyy zhurnal – News of the Higher Institutions. Mining Journal*. 2. pp. 43–48.
13. Aleksandrovich A.I., Gorlova A.V. (2007) Issledovanie ploskoy zadachi dlya fizicheskogo nelineynogo uprugogo tela metodami teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo [Testing of the planar problem of a physically nonlinear elastic body by methods of the theory of functions of a complex variable]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 3. pp. 63–72.
14. Bondar' V.D. (2000) Metod kompleksnykh potentsialov v nelineynoy teorii uprugosti [Method of complex potentials in nonlinear theory of elasticity]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 41(1). pp. 133–143.
15. Sheina A.A., Aleksandrovich A.I. (2011) Reshenie prostranstvennykh zadach nelineynoy teorii uprugosti metodami mnogomernogo kompleksnogo analiza [Solution of three-dimensional boundary value problems of the nonlinear theory of elasticity using the methods of multi-dimensional complex analysis]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4–4. pp. 1862–1863.
16. Nifagin V.A., Sevrouk A.V. (2007) Common approximate solutions of main problems of spatial non-linear elasticity theory in analytical multi-dimensional functions of matrix variable. *Science and Technique*. 1. pp. 60–65 DOI: 10.21122/2227-1031-2007-0-1-60-65.
17. Mal'kov V.M., Mal'kova Yu.V. (2008) Analysis of a stress singularity in a non-linear Flamant problem for certain models of a material. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 72(4). pp. 468–474. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2008.08.006.
18. Lavrov K., Semenov A., Benin A. (2016) Modeling of nonlinear multiaxial deformation of concrete on the base of hyperelastic orthotropic model. *MATEC Web of Conferences*. 53(01043). DOI: 10.1051/mateconf/20165301043.
19. Wei Ch., Wang L., Li B., Xiong L., Liu Sh., Zheng J., Hu S., Song H. (2018) A study of non-linear elasticity effects on permeability of stress sensitive shale rocks using an improved coupled flow and geomechanics model: a case study of the longmaxi shale in China. *Energies*. 11(2). pp. 329–345. DOI: 10.3390/en11020329.
20. Blokhina N.S. (2012) Raschet konstruktsey iz anizotropnykh materialov s uchedom fizicheskoy nelineynosti [Calculation of the constructions made of anisotropic material with account for physical nonlinearity]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1(240). pp. 3–5.
21. Agapov V.P., Aydemirov K.R. (2017) Primenenie metoda konechnykh elementov s uchedom fizicheskoy i geometricheskoy nelineynosti dlya rascheta predvaritel'no napryazhennykh zhelezobetonnykh ferm [Application of finite element method taking into account physical

- and geometric nonlinearity for the calculation of prestressed reinforced concrete beams]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 44(1). pp. 127–137. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137.
22. Serpik I.N., Balabin P.Yu., Shkolyarenko R.O. (2015) Raschet ramnykh konstruktсий v fizicheski nelineynoy postanovke s uchetom vliyaniya prodol'nykh sil na izgib [Calculation of frame constructions in a physically nonlinear formulation with account for the effect of central forces on a bend]. *The collected papers of the IV International research to practice conference “Problems of innovative biosphere-compatible socio-economic development in the building, housing and communal, and road complexes”*. pp. 363–366.
 23. Polatov A.M. (2018) Komp'yuternoe modelirovanie deformirovannogo sostoyaniya fizicheskii nelineynykh transversal'no-izotropnykh tel s otverstiem [Computer modeling of deformed state of physically non-linear transversal-isotropic bodies with hole]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 11(1). pp. 25–35. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.1.3.
 24. Martynov N.I. (2014) Kraevye zadachi dlya neogukovskogo materiala v nelineynoy teorii uprugosti [Boundary value problems for neo-Hookean material in nonlinear elasticity]. *Nauka i mir – Science and World*. 9(13). pp. 25–31.
 25. Brigadnov I.A., Bukhshtaber V.M., Antonova I.A., Sokolova E.G., Sharov S.A. *Matematicheskaya korrektnost' i metody resheniya kraevykh zadach nelineynoy uprugosti* [Mathematical accuracy and problem-solving techniques for boundary problems of nonlinear elasticity]. Research report (project No. 96-01-00054).
 26. Chernykh K.F. (2004) Variant nelineynoy teorii uprugosti. ego struktura i vozmozhnosti [Variant of nonlinear elasticity theory. Its structure and potential]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg University Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 3–4. pp. 55–62.
 27. Ivanov S.P., Ivanova A.S. (2014) Dinamicheskaya ustoychivost' fizicheskii nelineynykh plastychnykh sistem [The dynamic stability of physically nonlinear plate systems]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktсий i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 4. pp. 9–18.
 28. Shamina V.A., Veselkov S.Yu., Slepneva L.V. *Osnovnye modeli nelineynoy mekhaniki deformiruemogo tela* [Basic models in nonlinear mechanics of deformable solids]. Research report (project No. 95-01-00334).
 29. Bakushev S.V. (2011) Uravneniya fizicheskii nelineynoy teorii uprugosti v napryazheniyakh [Equations of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses]. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo – Regional Architecture and Construction*. 1(12). pp. 117–123.
 30. Bakushev S.V. (2014) Ploskaya zadacha fizicheskii nelineynoy teorii uprugosti – reshenie v napryazheniyakh [Plane problem of physically nonlinear theory of elasticity – solution in terms of stresses]. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo – Regional Architecture and Construction*. 1(18). pp. 82–88.
 31. Bakushev S.V. (2014) Ploskaya deformatsiya fizicheskii nelineynoy teorii uprugosti – reshenie v napryazheniyakh [Plane strain in physically nonlinear theory of elasticity – solution in terms of stresses]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2. pp. 2–9.

Received: March 18, 2019

УДК 533.17; 519.62

DOI 10.17223/19988621/63/8

А.А. Глазунов, А.М. Кагенов, К.В. Костюшин, И.В. Еремин,
К.Л. Алигасанова, В.А. Котоногов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОДИНОЧНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ С ПРЕГРАДАМИ¹

Представлены результаты математического моделирования взаимодействия сверхзвуковой одиночной струи с преградами. Исследовано взаимодействие сверхзвуковой струи с числом Маха на срезе сопла $M = 4$ с преградами. В параметрических расчетах варьировался угол наклона плоской поверхности и форма криволинейной поверхности. Получено, что с увеличением угла наклона плоской преграды увеличивается максимум давления и наблюдается переход автоколебательного режима к стационарному.

Ключевые слова: математическое моделирование, газовая динамика, метод Годунова, сверхзвуковая струя, OpenFOAM.

В настоящее время практический интерес представляет изучение сверхзвукового взаимодействия струй ($M > 3$ на срезе сопла) с преградами для задач старта и посадки космических аппаратов. Взаимодействию струй с преградами посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ. Большой цикл расчетно-экспериментальных работ проведен в Институте теоретической и прикладной механики СО РАН [1–5]. Экспериментальные работы проводились на специально созданной вертикальной струйной установке. Установка оснащена современными приборами и датчиками регистрации, которые в реальном времени накапливают информацию и позволяют следить за протекающим экспериментом. Для визуализации эксперимента используются прибор Теплера ИАБ-451 и камера со сверхчувствительной матрицей. В широком диапазоне рассмотрены степени нерасчетности и числа Маха на срезе сопла. Результаты экспериментального исследования натекания сверхзвуковых нерасчетных струй на плоскую преграду, установленную перпендикулярно оси струи в непосредственной близости за срезом сопла представлены в работе [6]. В данной работе приведены эмпирические формулы для приближенного построения эпюр давления на преграде с указанными границами применимости. Подобные исследования приведены в работе [7]. В ней рассмотрены три струи со степенью нерасчетности 1.2, 2 и 4 и три случая расположения преграды: перпендикулярно оси струи и расположенного по центру оси клина с углом основания 60 и 45°. Работа [8] дополняет предыдущее исследование. В ней анализируются углы наклонных преград, которые варьировались от 90 до 30°. Показано, что давление на наклонных преградах может реализовываться выше значения давления, чем на перпендикулярно расположенной преграде. Особенностей нестационарного обтекания безграничной преграды недорасширенной струей проведено в экспериментальном исследовании [9]. Рассмотрены различные автоколебательные режимы взаимодействия струй с преградой и их особенности.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19–41–703005.

Результаты численного исследования стационарных режимов взаимодействия сверхзвуковой осесимметричной струи невязкого и нетеплопроводного газа с плоской преградой, расположенной перпендикулярно оси струи приведены в [10]. Решение задачи в окрестности дозвуковой области потока около преграды получено с помощью метода С.К. Годунова. Для расчета сверхзвукового участка струи и сверхзвуковой части потока применен метод сквозного счета. На примере недорасширенной и перерасширенной струи проведено сравнение численных результатов с экспериментальными данными [6]. Влияние геометрических и газодинамических параметров на структуру течения и параметры автоколебаний в сверхзвуковых перерасширенных струях, взаимодействующих с нормально расположенной плоской ограниченной преградой, экспериментально и теоретически исследовано также в работе [11]. Установлено, что на процесс взаимодействия существенное влияние оказывает число Маха на срезе сопла и его полуугол раствора. В исследовании работы [12] представлено нестационарное взаимодействие осесимметричной сверхзвуковой струи с плоской расположенной по центру оси преградой. Эксперимент обработан методом PIV, а расчетная часть основана на компьютерной программе WIND. В WIND реализовано решение осредненных уравнений Навье – Стокса по Рейнольдсу совместно с моделью турбулентности Вилкокка, Лаундера и Ментера. Здесь проведено сравнение результатов расчетов, полученных с применением различных моделей турбулентности, с экспериментальными данными. Показано, что полученные результаты с использованием модели турбулентности Ментера SST, по сравнению с другими моделями турбулентности, дают лучшее совпадение с экспериментальными данными. Численное исследование с применением составных компактных схем высокого порядка при решении задачи взаимодействия сверхзвуковой струи с поверхностью рассмотрено в работе [13]. Математическая модель состоит из осредненных уравнений Навье – Стокса по Рейнольдсу для турбулентного режима течения вязкого газа с дифференциальной двухпараметрической моделью турбулентности. В качестве тестового расчета приведены результаты моделирования взаимодействия осесимметричной струи с плоской преградой. Число Маха на срезе сопла составляло $M = 2$, расстояние от среза сопла до преграды соответствовало $4d_a$, для двух степеней нерасчетности $n = 0.639$ и 1.565 . Цикл работ расчетно-экспериментального исследования взаимодействия одиночных и многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой проведен в работах [14–17]. Данные исследования посвящены изучению процессов, протекающих при старте изделий ракетно-космической техники. Показаны различные особенности физических процессов, сопровождающиеся истечением струй продуктов сгорания ракетных топлив. Математическая модель состоит из трехмерных осредненных уравнений Навье – Стокса по Рейнольдсу совместно с моделью турбулентности Ментера SST. Моделирование выполнялось на пакете прикладных программ ЛОГОС. В монографиях [18, 19] обобщен опыт разработки методов и алгоритмов решения задач механики жидкости и газа, численного решения осредненных по Рейнольдсу и по Фавру уравнений Навье – Стокса на неструктурированных сетках на основе метода конечных объемов и моделирования турбулентных струйных течений на основе статистических моделей. Даются рекомендации по программированию. Приводятся результаты расчетов турбулентных течений и теплообмена в инженерных, технических и технологических приложениях.

Слабо изучено натекание сверхзвуковых струй на поверхности сложной геометрии при числах Маха на срезе сопел $M = 4–5$. Поэтому целью настоящей рабо-

В ряде экспериментальных и теоретических работ [14 – 17] показано два возможных режима взаимодействия струй с преградами: автоколебательный и стационарный. При автоколебательном режиме наблюдается нестационарное взаимодействие струй с преградами, в критической точке C образуется минимум давления, а максимум находится на периферии. Такой режим характерен, когда преграда приходится на область убывания чисел Маха и возрастания давления в струе. Стационарный режим взаимодействия струи с преградой, как правило, реализуется, когда преграда расположена в зоне возрастания чисел Маха и убывания давления в струе, а в критической точке наблюдается максимум давления.

Для математического описания физической постановки задачи, использовалась система уравнений Навье – Стокса, осредненная по Фавру [21 – 23] в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 :

- Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j] = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность, кг/м^3 ; t – время, с; u_j – скорость, м/с; x_j – координата, м.

- Уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ji}] = 0, \quad (2)$$

где $i = 1, 2, 3$; p – давление, Па; δ_{ij} – символ Кронекера.

- Тензор вязких напряжений имеет следующий вид:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right],$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, Па·с.

- Уравнение энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j E + u_j p + q_j - u_i \tau_{ij}] = 0, \quad (3)$$

где E – полная внутренняя энергия, Дж; q_j – тепловой поток, Дж/(м²·с).

Система (1) – (3) замыкается уравнением состояния совершенного газа:

$$p = \rho R T,$$

где T – температура, К; R – удельная газовая постоянная, Дж/(кг·К).

Для разрешения системы уравнений вязкого газа использовалась модель турбулентности SST [24].

Расчеты выполнялись аналогично работе [15] от критического сечения сопла. На рис. 2 представлен вид расчетной области и приведены обозначения границ для постановки граничных условий.

На границах Γ_1 задаются следующие граничные условия: полное давление и температура: $p = p_{\text{total}}$, $T = T_{\text{total}}$, кинетическая энергия турбулентности и диссипация кинетической энергии турбулентности: $k = k_0$, $\omega = \omega_0$, компонента скорости 2 равна скорости звука: $u_1 = 0$, $u_2 = a$, $u_3 = 0$. Для границ Γ_2 и Γ_5 использу-

ются следующие условия: для давления условия непроницаемости: $\text{grad}(p) = 0$; для скорости условия прилипания (все компоненты вектора скорости равны нулю) $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$; для температуры (стенки сопла полагаются теплоизолированными) $\text{grad}(T) = 0$. Для кинетической энергии турбулентности и удельной диссипации кинетической энергии турбулентности используются пристеночные функции KqWallfunction и OmegaWallFunction. Граничные условия для Г3 имеют следующий вид: $p = p_a$, $T = T_a$, $u_j = 0$. Для Г4 используются комбинированные граничные условия: $p = p_a$, $T = T_a$, $u_j = 0$. где p_a – давление окружающей среды, T_a – температура окружающей среды. Как только, возмущения достигают границ Г4, используются мягкие граничные условия: $\partial/\partial n = 0$.

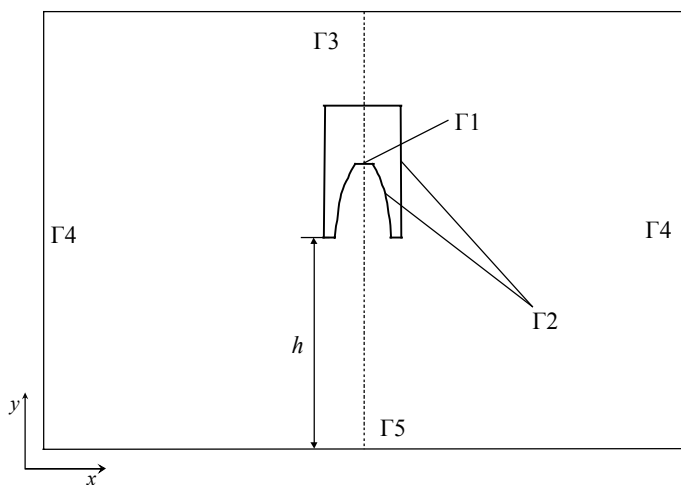


Рис. 2. Расчетная область и обозначения ГУ: Г1 – критическое сечение сопла; Г3, Г4 – внешние границы расчетной области; Г2, Г5 – твердые непроницаемые поверхности

Fig. 2. Computational domain and boundary conditions: Г1 – nozzle throat; Г3, Г4 – external boundaries of the domain; Г2, Г5 – solid impermeable boundaries

Для реализации физико-математической модели и проведения параметрических численных исследований применялось свободное программное обеспечение OpenFOAM Extended [25]. Использовался решатель dbnsTurbFoam, модифицированный авторами работы. Модификация позволяет использовать метод С.К. Годунова для определения потоков через грани ячеек из точного решения задачи Римана [26, 27]. Для интегрирования по пространству использовалась схема второго порядка точности TVD с ограничителем Venkatakrishnan [28]. Дискретизация по времени производилась четырех шаговым методом Рунге – Кутты второго порядка аппроксимации. Все численные исследования выполнены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютера Национального исследовательского Томского государственного университета «СКИФ Cyberia».

Результаты численных исследований

Экспериментальная работа [6] посвящена исследованию натекания сверхзвуковой струи на плоскую преграду, установленную перпендикулярно оси струи в непосредственной близости за срезом сопла. Численное решение задачи [10] в окрестности дозвуковой области потока около преграды получено с помощью метода установления с использованием схемы С.К. Годунова для невязкого идеального газа. В данной работе с использованием разработанного решателя на примере натекания недорасширенной сверхзвуковых струй на преграду проведено сравнение тестовых расчетов с экспериментальными и численными данными [6, 10].

В расчетах использовалось коническое сопло с углом раствора $\theta = 7^\circ 15'$ и числом Маха на срезе $M = 2.52$. Степень нерасчетности составляла $n = 0.46$. Расстояние от среза сопла до преграды равно $1.84 R_a$ радиуса среза сопла. На рис. 3 представлено сравнение результатов расчетов с использованием решателей sonicFoam и dbnsTurbFoam с данными авторов [6, 10]. Видно, что получено хорошее совпадение для распределений давления на преграде. При этом решение модифицированного решателя dbnsTurbFoam дает близкое распределение давления с расчетами [10] для невязкого газа. Результаты расчетов по решателю sonicFoam имеют значительное отклонение от [10] в периферийной области струи.

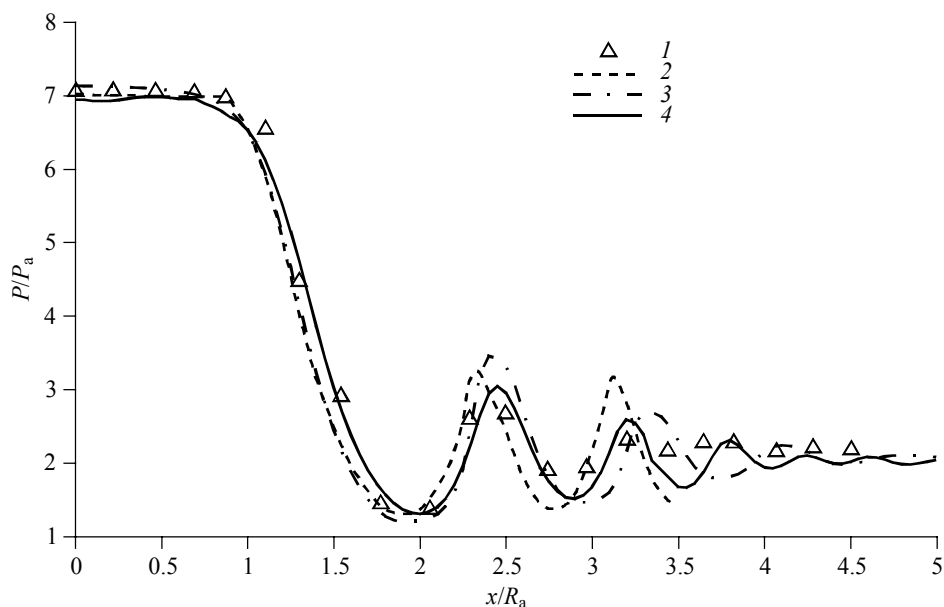


Рис. 3. Сравнение распределения давления на преграде с экспериментальными и численными данными [6, 10] при $n = 0.46$: 1 – эксперимент; 2 – расчет авторов [10]; 3 – sonicFoam; 4 – dbnsTurbFoam

Fig. 3. Comparison of the pressure distribution on the obstacle with experimental and numerical data from [6, 10] for $n = 0.46$: 1, experiment; 2, calculations from [10]; 3, sonicFoam; and 4, dbnsTurbFoam

Проведены тестовые расчеты и сравнение с работой [14] для двух режимов взаимодействия струи с преградой – автоколебательного и стационарного. Рабочее тело – сухой воздух, полное давление – 105 атм, полная температура 300 К, число Маха на срезе сопла $M = 4$. Размер расчетной области составлял: длина – 10000 мм, ширина – 10000 мм, высота – 5000 мм. Для проведения расчетов строилась гексаэдральная расчетная сетка. Расчетная сетка обеспечивала 20 ячеек на радиус среза сопла. Общее число ячеек – 4 млн.

Результаты сравнения расчетов по решателю dbnsTurbFoam с экспериментальными данными [14] представлены на рис. 4 (стационарный) и 5 (автоколебательный).

Из сравнения стационарного режима $h = 590$ мм взаимодействия струи с преградой (рис. 4) видно хорошее совпадение по распределению давления на преграде. На автоколебательном режиме $h = 308$ мм (рис. 5) проведен дополнительный расчет для невязкого газа. Видно, что результат расчета для невязкого газа дает лучшее совпадение с экспериментальным данным [14], чем расчет для вязкого газа. Уровень давления на преграде для модели вязкого газа выше 12 ати. При этом перемещения диска Маха относительно вертикальной оси на автоколебательном режиме происходят с меньшей амплитудой, чем для невязкого газа. Такое различие обуславливается влиянием модели турбулентности, вследствие чего реализуются различные конфигурации ударных волн в области торможения струи (рис. 6). Результаты исследования для автоколебательного режима коррелируют с результатами работы [15], полученными с использованием программного пакета ЛОГОС и моделью турбулентности SST.

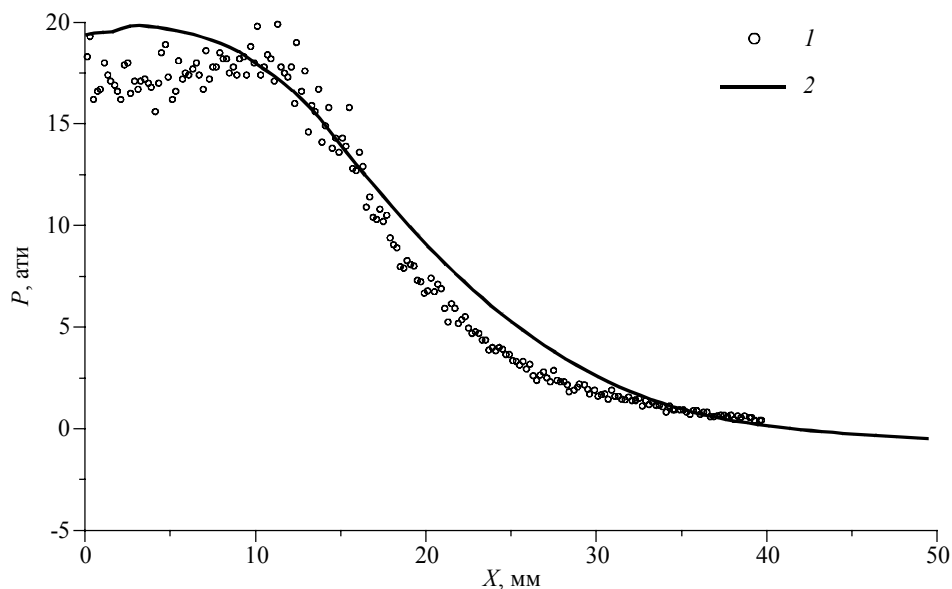


Рис. 4. Сравнение распределения давления вдоль преграды с экспериментальными данными [14], $h = 590$ мм: 1 – экспериментальные данные; 2 – dbnsTurbFoam

Fig. 4. Comparison of the pressure distribution along the obstacle with experimental data from [14] for $h = 590$ mm: 1, experimental data and 2, dbnsTurbFoam

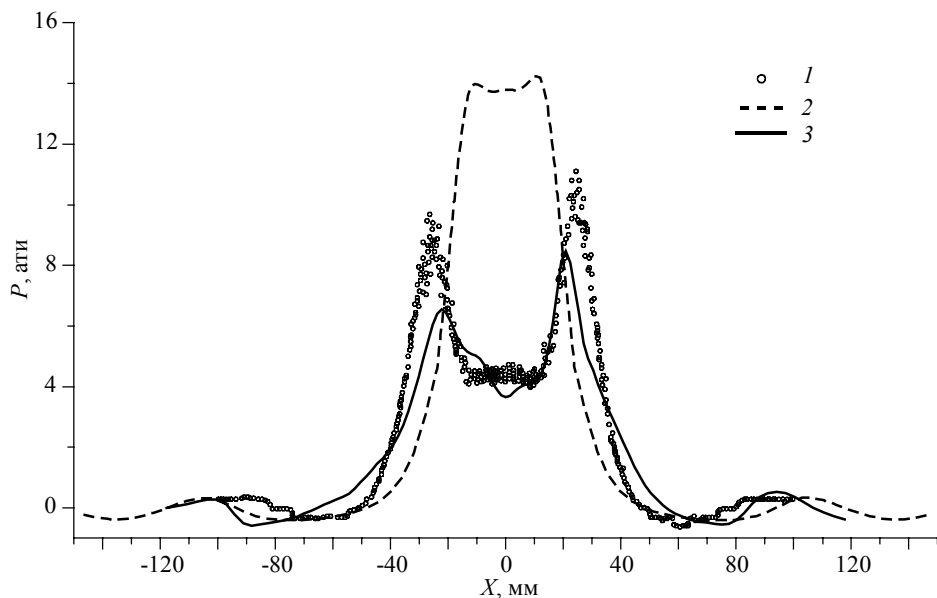


Рис. 5. Сравнение распределения давления вдоль преграды с экспериментальными данными [14], $h = 308$ мм: 1 – экспериментальные данные; 2 – невязкий газ (dbnsFoam); 3 – вязкий газ (dbnsTurbFoam)

Fig. 5. Comparison of the pressure distribution along the obstacle with experimental data from [14] for $h = 308$ mm: 1, experimental data; 2, inviscid gas (dbnsFoam); and 3, viscous gas (dbnsTurbFoam)

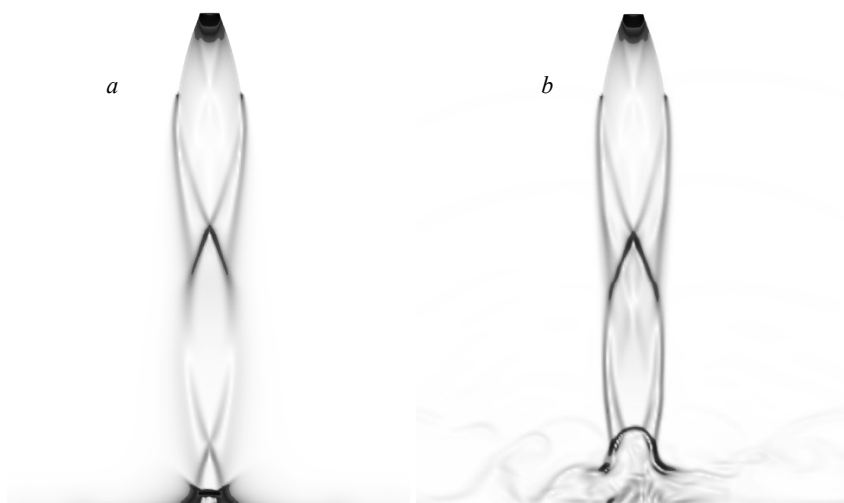


Рис 6. Градиент плотности, $h = 308$ мм:
а – вязкий газ (dbnsTurbFoam); б – невязкий газ (dbnsFoam)

Fig. 6. Density gradient, $h = 308$ mm:
(a) viscous gas (dbnsTurbFoam) and (b) inviscid gas (dbnsFoam)

Проведено исследование взаимодействия сверхзвуковой струи с числом Маха на срезе сопла $M = 4$ с преградами. В параметрических расчетах для варианта с расстоянием от среза сопла до плоской преграды $h = 308$ мм варьировался угол наклона плоской поверхности от 5 до 20° , и форма криволинейной поверхности. Схема построения образующей дуги криволинейной поверхности приведена на рис. 7. Проводилась прямая d под углом α к горизонтальной поверхности на расстоянии h от среза сопла относительно точки B . Затем определялись точки пересечения A и C с внешними границами расчетной области и по трем точкам ABC строилась дуга e . Длина l в расчетах принималась равной 10000 мм.

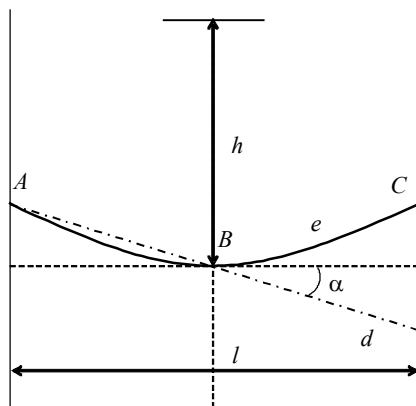


Рис. 7. Схема образующей криволинейной поверхности
Fig. 7. Scheme of the generatrix of a curved surface

Плоская горизонтальная преграда приходится на начало третьей «бочки» струи и область возрастания чисел Маха. Сравнение результатов расчетов для проведенных параметрических исследований показано на рис. 8 и 9, где для иллюстрации ударно-волновой структуры изображен градиент плотности. Изменение угла наклона плоской преграды от 0 до 20° не приводит к существенному изменению ударно-волновой структуры струй. Значительное различие в ударно-волновой структуре по сравнению с горизонтальной плоской преградой наблюдается для криволинейной поверхности с углом 10° (рис. 9, *b*), где на конце второй «бочки» наблюдается форма центрального скачка, отличного от других вариантов расчета.

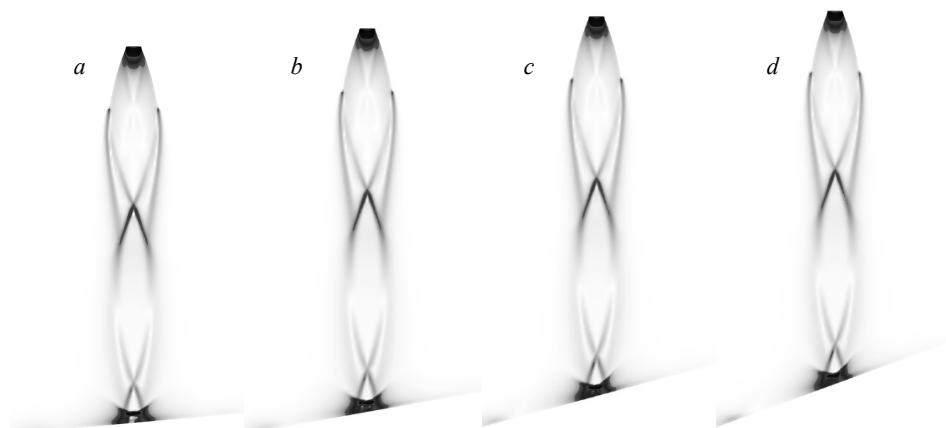


Рис. 8. Градиент плотности, $h = 308$ мм, плоская преграда:
 a – угол 5° ; b – угол 10° ; c – угол 15° ; d – угол 20°

Fig. 8. Density gradient, $h = 308$ mm, a flat obstacle:
an angle of (a) 5° , (b) 10° , (c) 15° , and (d) 20°

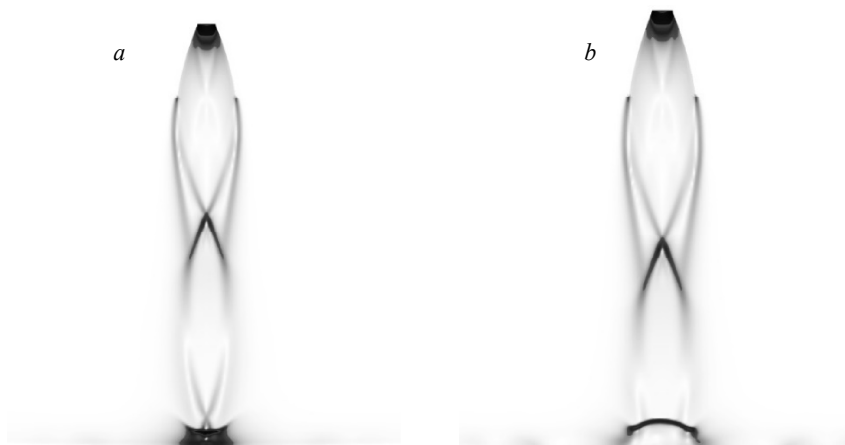


Рис. 9. Градиент плотности, $h = 308$ мм, криволинейная преграда:
 a – угол 5° ; b – угол 10°

Fig. 9. Density gradient, $h = 308$ mm, a curved obstacle:
 an angle of (a) 5 and (b) 10 degrees

Распределение избыточного давления вдоль преграды для всех вариантов расчета показано на рис. 10 в сечении вдоль оси струи. На автоколебательном режиме взаимодействия струи с преградой, реализуемого для горизонтальной преграды (рис. 5) и для преграды с углом наклона 5° (рис. 10), наблюдаются два максимума давления. При увеличении угла наклона плоской преграды от 10 до 20° , левый максимум давления пропадает, а избыточное давление правого максимума возрастает с 30 до 37 ати. Кроме того, увеличение угла наклона плоской преграды приводит к переходу автоколебательного режима к стационарному.

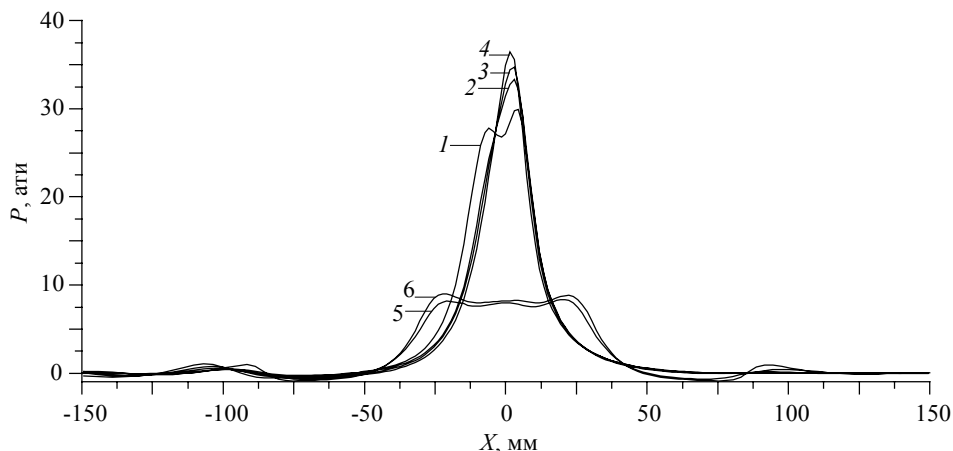


Рис. 10. Распределение давления вдоль преграды, $h = 308$ мм (плоская преграда – кривые 1–4, криволинейная преграда – кривые 5, 6): 1 – 5° ; 2 – 10° ; 3 – 15° ; 4 – 20° ; 5 – 5° ; 6 – 10°
Fig. 10. Pressure distribution along the obstacle, $h = 308$ mm (the flat obstacle – curves 1–4; the curved obstacle – curves 5, 6): (1) 5° , (2) 10° , (3) 15° , (4) 20° , (5) 5° , and (6) 10°

Распределение давления вдоль преграды для криволинейных поверхностей отличается в сравнении с плоской преградой (рис. 10, кривые 5, 6). В обоих случаях наблюдаются два максимума давления, уровень которых в три раза меньше, чем для расчета с плоской преградой (рис. 5, кривая 3).

Заключение

Проведено математическое моделирование взаимодействия сверхзвуковой одиночной струи с преградами. Модифицирован решатель *dbnsTurbFoam* в *OpenFOAM*, позволяющий проводить расчеты по схеме С.К. Годунова. Выполнены численные исследования по взаимодействию сверхзвуковых струй с числом Маха на срезе сопла $M = 4$ с преградами. В параметрических расчетах варьировался угол наклона плоской поверхности от 5 до 20°, и форма криволинейной поверхности. Показано, что с увеличением угла наклона плоской преграды увеличивается максимум давления и наблюдается переход автоколебательного режима к стационарному. Распределения давления вдоль преграды для криволинейных поверхностей с углом 5 и 10° и плоской горизонтальной преграды отличаются по характеру и уровню.

ЛИТЕРАТУРА

1. Запрыгаев В.И., Солотчин А.В., Кавун И.Н., Яровский Д.А. Нтекание сверхзвуковой недорасширенной струи на преграды различной проницаемости // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 5. С. 60–67.
2. Dyadkin A.A., Sukhorukov V.P., Trashkov G.A., Volkov V.F., Zapryagaev V.I., Kiselev N.P. Flow structure in the base region of re-entry vehicle with supersonic braking plumes impinging with landing surface // 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences. 7–12 September. St. Petersburg, 2014. Paper no. 2014_0640.
3. Запрыгаев В.И., Киселев Н.П., Кундасев С.Г. Структура течения при взаимодействии сверхзвуковой перерасширенной струи с плоской наклонной преградой // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. № 45. С. 32–49. DOI: 10.15593/2223-9982/2016.45.02.
4. Kundasev S.G., Kiselev N.P., Zapryagaev V.I. Experimental investigation of the flow structure of the supersonic jet impinging on an inclined flat obstacle // International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2016). 2016. P. 1–10. DOI: 10.1063/1.4963973.
5. Dyadkin A.A., Sukhorukov V.P., Rybak S.P., Zapryagaev V.I., Kiselev N.P., Kundasev S.G., Sobolev A.V., Gubanov D.A. Simulation of the reentry vehicle supersonic brake jets interaction with landing surface // 7th European Conference of Aeronautics and Space Sciences (EUCASS). 2017. DOI: 10.13009/EUCASS2017-116.
6. Мельникова М.Ф., Нестеров Ю.Н. Воздействие сверхзвуковой нерасчетной струи на плоскую преграду, перпендикулярную оси струи // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 5. С. 44–58.
7. Lamont P.J., Hunt B.L. The impingement of underexpanded axisymmetric jets on wedges // Journal of Fluid Mechanics. 1976. V. 76. P. 307–336.
8. Lamont P.J., Hunt B.L. The impingement of underexpanded, axisymmetric jets on perpendicular and inclined flat plates // Journal of Fluid Mechanics. 1980. V. 80. P. 471–511.
9. Горшков Г.Ф., Усков В.Н. Особенности автоколебаний, возникающих при обтекании ограниченной преграды сверхзвуковой недорасширенной струей // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 4. С. 143–149.
10. Дубинская Н.В., Иванов М.Я. К расчету взаимодействия сверхзвуковой струи идеального газа с плоской преградой, перпендикулярной ее оси // Ученые записки ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 5. С. 38–44.
11. Горшков Г.Ф., Усков В.Н. Автоколебания в сверхзвуковых перерасширенных импактных струях // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 5. С. 49–54.

12. Alvi F.S., Ladd J.A., Bower W.W. Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets // *AIAA Journal*. 2002. V. 40. No. 4. P. 599–609.
13. Савельев А.Д. Использование составных компактных схем высокого порядка при решении задачи взаимодействия сверхзвуковой струи с поверхностью // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. Т. 53. № 10. С. 1746–1759.
14. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Результаты экспериментальных исследований взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. 2013. № 69. С. 1–11.
15. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. 2013. № 70. С. 1–14.
16. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Прикладные задачи газодинамики и теплообмена в энергетических установках ракетной техники. М.: Изд-во МАИ, 2014. 168 с.
17. Дегтярь В.Г., Меркулов Е.С., Хлыбов В.И., Сафронов А.В. Результаты расчетно-экспериментальных исследований газодинамических процессов при взаимодействии многоблочных струй ракетных двигателей с газоотражателем стартового сооружения // *Космонавтика и ракетостроение*. 2013. Т. 70. № 1. С. 37–45.
18. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Зазимко В.А. Турбулентные струи – статистические модели и моделирование крупных вихрей. М.: Физматлит, 2014. 360 с.
19. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012. 468 с.
20. Дулов В.Г., Лукьянов Г.А. Газодинамика процессов истечения. Новосибирск: Наука, 1984. 226 с.
21. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. California: DCW Industries, Inc. 1993. 460 p.
22. Глазунов А.А., Еремин И.В., Кагенов А.М., Тырышкин И.М. Применение пакета OpenFOAM для расчетов течений газа в соплах и струях // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2013. Т. 56. № 9-3. С. 66–68.
23. Глазунов А.А., Еремин И.В., Кагенов А.М., Кувишинов Н.Е. Численное исследование взаимодействия продуктов сгорания двигателей космических аппаратов с обтекаемыми поверхностями в условиях Марса // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2014. Т. 57. № 8-2. С. 97–103.
24. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Begell House Inc., West Redding. 2003. P. 625–632.
25. OpenFOAM // Официальный сайт OpenFOAM. URL: <http://openfoam.com> (дата обращения 11.10.2019).
26. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. P. 315–344. DOI 10.1007/b7976–1 10.
27. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
28. Venkatakrishnan V. On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady-State Solutions // *AIAA paper 93–0880*. 1993. P. 1–11. DOI: 10.2514/6.1993-880.

Статья поступила 10.11.2019 г.

Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aligasanova K.L. (2020) MATHEMATICAL MODELING OF THE INTERACTION OF A SINGLE SUPERSONIC JET WITH OBSTACLES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 87–101

DOI 10.17223/19988621/63/8

Keywords: mathematical modeling, gas dynamics, Godunov method, supersonic jet, OpenFOAM.

The paper presents the results of mathematical modeling of the supersonic single jet interaction with obstacles. The calculations are performed using the developed solver based on Godunov's scheme and the method of linear reconstruction of solution in the OpenFOAM software package. The modified solver is tested on the problem of the supersonic jet interaction with a flat obstacle in the steady-state and self-oscillating modes. The calculated results on jets' structure and pressure distribution on the obstacle under a shock wave are in a good agreement with experimental and theoretical data of other authors. The interaction of the supersonic jet with obstacles is studied at a Mach number of 4 in the nozzle exit section. The angle of inclination of the flat surface and the shape of the curved surface are varied in the parametric studies. It is shown that with an increase in the angle of inclination of the flat obstacle, the maximum pressure increases, and the self-oscillating mode changes to a steady-state one. Pressure distributions along the curved obstacles with an angle of 5 and 10 degrees differ in pattern and level from those along the flat horizontal obstacles.

Financial support. The reported study was funded by RFBR and the Tomsk region according to the research project No. 19–41–703005.

Anatoliy A. GLAZUNOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Anuar M. KAGENOV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

Kirill V. KOSTYUSHIN (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushin@niipmm.tsu.ru

Ivan V. EREMIN (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Vasily A. KOTONOGOV (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kot@niipmm.tsu.ru

Kristina L. ALIGASANOVA (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aligasanova@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Zapryagaev V.I., Solotchin A.V., Kavun I.N., Yarovskiy D.A. (2011) Natekanie sverkhzvukovoy nedorasshirennoy strui na pregrady razlichnoy pronitsaemosti [Leakage of a supersonic underexpanded jet on obstacles of various permeability]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52. pp. 60–67.
2. Dyadkin A.A., Sukhorukov V.P., Trashkov G.A., Volkov V.F., Zapryagaev V.I., Kiselev N.P. (2014) Flow structure in the base region of re-entry vehicle with supersonic braking plumes impinging with landing surface. *29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*. Paper no. 2014_0640.
3. Zapryagaev V.I., Kiselev N.P., Kundasev S.G. (2016) Struktura techeniya pri vzaimodeystvii sverkhzvukovoy pererasshirennoy strui s ploskoy naklonnoy pregradoy [Flow structure during the interaction of a supersonic overexpanded jet with a flat inclined obstacle]. *Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika – PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*. 45. pp. 32–49. DOI: 10.15593/2223–9982/2016.45.02.
4. Kundasev S.G., Kiselev N.P., Zapryagaev V.I. (2016) Experimental investigation of the flow structure of the supersonic jet impinging on an inclined flat obstacle. *International Conference on the Methods of Aerophysical Research*. pp. 1–10. DOI: 10.1063/1.4963973.
5. Dyad'kin A.A., Sukhorukov V.P., Rybak S.P., Zapryagaev V.I., Kiselev N.P., Kundasev S.G., Sobolev A.V., Gubanov D.A. (2017) Simulation of the reentry vehicle supersonic brake jets

- interaction with landing surface. *7th European Conference of Aeronautics and Space Sciences*. DOI: 10.13009/EUCASS2017-116.
6. Mel'nikova M.F., Nesterov Yu.N. (1971) Vozdeystvie sverkhzvukovoy neraschetnoy strui na ploskuyu pregradu, perpendikulyarnuyu osi strui [Effect of a supersonic non-calculated jet on a flat obstacle perpendicular to the axis of the jet]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. pp. 44–58.
 7. Lamont P.J., Hunt B.L. (1976) The impingement of underexpanded axisymmetric jets on wedges. *Journal of Fluid Mechanics*. 76. pp. 307–336. DOI: 10.1017/S0022112076000657.
 8. Lamont P.J., Hunt B.L. (1980) The impingement of underexpanded, axisymmetric jets on perpendicular and inclined flat plates. *Journal of Fluid Mechanics*. 80. pp. 471–511. DOI: 10.1017/S0022112080001255.
 9. Gorshkov G.F., Uskov V.N. (1999) Osobennosti avtokolebaniy, voznikayushchikh pri obtekanii ogranicennoy pregrady sverkhzvukovoy nedorasshirennoy struey [Features of self-oscillations arising during the flow around a limited obstacle by a supersonic underexpanded jet]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 40. pp. 143–149.
 10. Dubinskaya N.V., Ivanov M.Ya. (1975) K raschetu vzaimodeystviya sverkhzvukovoy strui ideal'nogo gaza s ploskoy pregradoy, perpendikulyarnoy ee osi [On the calculation of the interaction of a supersonic jet of an ideal gas with a flat obstacle perpendicular to its axis]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. 6. pp. 38–44.
 11. Gorshkov G.F., Uskov V.N. (2002) Avtokolebaniya v sverkhzvukovykh pererasshirennykh impaktnykh struyakh [Self-oscillations in supersonic overexpanded impact jets]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 43. pp. 49–54.
 12. Alvi F.S., Ladd J.A., Bower W.W. (2002) Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets. *AIAA Journal*. 40(4). pp. 599–609. DOI: 10.2514/2.1709.
 13. Savel'ev A.D. (2013) Ispol'zovanie sostavnykh kompaktnykh skhem vysokogo poryadka pri reshenii zadachi vzaimodeystviya sverkhzvukovoy strui s poverkhnost'yu [The use of composite compact high-order schemes in solving the problem of the interaction of a supersonic jet with a surface]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 53. pp. 1746–1759.
 14. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tretyakova O.N. (2013) Rezul'taty eksperimental'nykh issledovaniy vzaimodeystviya mnogoblochnykh sverkhzvukovykh turbulentnykh struy s pregradoy [The results of experimental studies on the interaction of multiblock supersonic turbulent jets with an obstacle]. *Trudy MAI*. 69. pp. 1–11.
 15. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tretyakova O.N. (2013) Chislennoe modelirovanie vzaimodeystviya mnogoblochnykh sverkhzvukovykh turbulentnykh struy s pregradoy [Numerical simulation of the interaction of multiblock supersonic turbulent jets with an obstacle]. *Trudy MAI*. 70. pp. 1–14.
 16. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tretyakova O.N. (2014). *Prikladnye zadachi gazodinamiki i teploobmena v energeticheskikh ustanovkakh raketnoy tekhniki* [Applied problems of gas dynamics and heat transfer in power plants of rocket technology]. Moscow: Izdatel'stvo MAI.
 17. Degtyar' V.G., Merkulov E.S., Hlybov V.I., Safronov A.V. (2013) Rezul'taty raschetno-eksperimental'nykh issledovaniy gazodinamicheskikh processov pri vzaimodeystvii mnogoblochnykh struy raketnykh dvigateley s gazootrazhatelem startovogo sooruzheniya [The results of computational and experimental studies of gas – dynamic processes in the interaction of multi-block jets of rocket engines with a gas reflector of a launch facility]. *Kosmonavtika i raketostroenie – Cosmonautics and Rocket Engineering*. 70. pp. 37–45.
 18. Volkov K.N., Emel'yanov V.N., Zazimko V.A. (2014) *Turbulentnye strui – statisticheskie modeli i modelirovanie krupnykh vikhrey* [Turbulent jets – statistical models and modeling of large eddies]. Moscow: Fizmatlit.
 19. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2012) *Vychislitel'nye tekhnologii v zadachakh mekhaniki zhidkosti i gaza* [Computational technologies in the problems of fluid and gas mechanics]. Moscow: Fizmatlit.

20. Dulov V.G., Luk'yanov G.A. (1984) *Gazodinamika protsessov istecheniya* [Gas dynamics of outflows]. Novosibirsk: Nauka.
21. Wilcox D.C. (1993) *Turbulence Modeling for CFD*. California: DCW Industries.
22. Glazunov A.A., Eremin I.V., Kagenov A.M., Tyryshkin I.M. (2013) Primenenie paketa OpenFOAM dlya raschetov techeniy gaza v soplakh i struyakh [Application of the OpenFOAM software package for calculating gas flows in nozzles and jets]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeni. Fizika*. 56(9-3). pp. 66–68.
23. Glazunov A.A., Eremin I.V., Kagenov A.M., Kuvshinov N.E. (2014) Chislennoe issledovanie vzaimodeystviya produktov sgoraniya dvigateley kosmicheskikh apparatov s obtekaemymi poverkhnostyami v usloviyakh Marsa [Numerical study of the interaction of combustion products of spacecraft engines with streamlined surfaces on Mars]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeni. Fizika*. 57(8-2). pp. 97–103.
24. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003) Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. pp. 625–632.
25. Official OpenFOAM website. URL: <http://openfoam.com>.
26. Toro E.F. (2009) *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/b7976-1 10.
27. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution to multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
28. Venkatakrishnan V. (1993) On the accuracy of limiters and convergence to steady-state solutions. *31st AIAA, Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. DOI: 10.2514/6.1993-880.

Received: November 10, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/63/9

В.В. Козлов, А.А. Маркин

АПРОБАЦИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ОСЕВОМ СДВИГЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА¹

Рассматривается один из видов нагружения нелинейно-упругих материалов – осевой сдвиг полого цилиндра. На основании результатов решения задачи предлагается методика определения адекватности представления свойств материала выбранной связью напряжений и деформаций. В частности, используются соотношения, в рамках которых можно контролируемо учитывать различные механические эффекты, удовлетворить частному постулату изотропии Ильюшина.

Ключевые слова: осевой сдвиг, полый цилиндр, нелинейная упругость, определяющие соотношения.

Развитие нелинейной теории упругости является одним из актуальных направлений механики сплошных сред, что подтверждается широким распространением подобных материалов и наличием новых публикаций по данной тематике [1–4].

Одной из ключевых проблем нелинейной теории упругости является формулировка связей между напряжениями и деформациями [5, 6]. Адекватность представления материала определяющим соотношением можно оценить, рассматривая различные нагружения нелинейно-упругих материалов. В данной работе в рамках такой оценки рассмотрено осесимметричное нагружение, представляющее равновесный процесс осевого сдвига полого цилиндра.

Выбор данной схемы обусловлен широким распространением подобных деталей, что находит отражение в ряде работ по нелинейной теории упругости [7–10].

Рассмотрим отличия данного процесса от исследований, проводимых в отношении похожих видов нагружений. Так, в работах Э.Э. Лавендела [11], В.И. Бидермана [12] рассматривается задача кругового сдвига (приложен момент M к внешней обойме) для несжимаемого материала. Л.И. Лурье [13] также рассматривал круговой сдвиг, но в рамках модели сжимаемого материала. В статье Beatty [14] рассматривается круговой сдвиг сжимаемого материала: на кинематические характеристики процесса накладываются ограничения, упрощающие выкладки, в результате использования которых изменение объема в процессе деформирования не происходит. Вследствие этого авторы устанавливают, каким дополнительным условиям должны удовлетворять определяющие соотношения для того, чтобы их можно было применить к фактически несжимаемым материалам. Таким образом, в данной статье рассматривается другой вид осесимметричного нагружения цилиндра, изначально на кинематику не накладываются дополнительных ограничений.

Результаты решения задачи об осевом сдвиге полого цилиндра могут быть использованы для апробации определяющего соотношения. В работе представлены

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1) и РФФИ (проект № 18-31-20053).

результаты моделирования для классических соотношений, к которым можно отнести связи между деформациями и напряжениями Гузя [15], Мурнагана [12] и т.п. Также моделирование осуществлено для определяющих соотношений, построенных в рамках подхода, представленного в работах Л.А. Толоконникова [16], А.А. Маркина [17], А.В. Муравлева [18], позволяющего контролируемо учитывать различные механические эффекты и удовлетворить частному постулату изотропии Ильюшина.

1. Расчетная схема и кинематические соотношения

Внутренняя и внешняя поверхности цилиндра скреплены с жесткими обоймой и валом соответственно. Вал закреплён неподвижно. К обойме приложен сила в направлении оси симметрии цилиндра Oz . Внутренний радиус цилиндра обозначим R_2 , внешний – R_1 .

Задачу об исследовании напряжённо-деформированного состояния полого цилиндра при осевом сдвиге естественно решать в цилиндрической системе координат.

Пусть $(x^1, x^2, x^3) = (R, \theta, z_0)$ – цилиндрические координаты материальной точки цилиндра в начальном состоянии, (r, φ, z) – цилиндрические координаты этой же точки в деформированном состоянии (ось Oz совпадает с осью симметрии цилиндра).

В рамках данной модели связь между указанными координатами будет выглядеть следующим образом:

$$r = r(R); \quad \varphi = \theta; \quad z = z_R(R) + z_0. \quad (1)$$

Из представлений (1) следует форма записи радиус-вектора положения точки в деформированном состоянии $\vec{x}$:

$$\vec{x} = r \vec{e}_R + z \vec{e}_{z_0}.$$

Запишем выражения векторов материального базиса $\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}$:

$$\vec{\varepsilon}_1 = r' \vec{e}_r + z'_R \vec{e}_{z_0}, \quad \vec{\varepsilon}_2 = r \vec{e}_\theta, \quad \vec{\varepsilon}_3 = \vec{e}_{z_0}.$$

Из последних формул можно найти базис $\vec{\varepsilon}^i$, взаимный по отношению к материальному:

$$\vec{\varepsilon}^1 = \frac{\vec{e}_r}{r'}, \quad \vec{\varepsilon}^2 = \frac{\vec{e}_\theta}{r}, \quad \vec{\varepsilon}^3 = \vec{e}_{z_0} - \frac{z'_R}{r'} \vec{e}_R. \quad (2)$$

Приведём диадное представление аффинора деформации:

$$\Phi = \vec{\nabla} \vec{x} = r' \vec{e}_R \vec{e}_R + z'_R \vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \frac{r}{R} \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0} = \Phi^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j. \quad (3)$$

Из соотношения (3) и определения $\Phi \cdot \Phi^{-1} = \underline{E}$ можно найти обратный тензор Φ^{-1} :

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{r'} \vec{e}_R \vec{e}_R - \frac{z'_R}{r'} \vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \frac{R}{r} \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0}.$$

Из формулы (3) получаем выражение меры деформаций Коши – Грина $G = \Phi \cdot \Phi^T$:

$$G = (r'^2 + z_R'^2) \bar{e}_R \bar{e}_R + z'_R (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R) + \frac{r^2}{R^2} \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0} = G^{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad (4)$$

$$\text{где } G^{ij} = \begin{pmatrix} r'^2 + z_R'^2 & 0 & z'_R \\ 0 & r^2/R^2 & 0 \\ z'_R & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_1 = \bar{e}_R, \quad \bar{e}_2 = \bar{e}_\theta, \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_{z_0}.$$

С помощью (4) получим тензор деформаций Коши – Грина $\varepsilon = 1/2(G - E)$:

$$\varepsilon = 1/2 \left[(r'^2 + z_R'^2 - 1) \bar{e}_R \bar{e}_R + z'_R (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R) + \left(r^2/R^2 - 1 \right) \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta \right]. \quad (5)$$

Опишем подход к нахождению полярного разложения аффинора деформаций [17]

$$\Phi = U \cdot R, \quad (6)$$

где U – левая мера искажения, R – тензор поворота.

Для нахождения левой меры искажения U используем её связь с мерой G [17]:

$$G = U^2.$$

Из последнего выражения следует

$$U = \sqrt{\lambda_i^G} \bar{a}_i^G \bar{a}_i^G, \quad (7)$$

где λ_i^G – собственные значения меры Коши – Грина, $\bar{a}_i^G$ – собственные векторы меры Коши – Грина.

В предположении, что для определенных значений $r(R), r'(R), z'_R(R)$ найдены λ_i^G и $\bar{a}_i^G$, соответствующая левая мера искажения определяется формулой (7).

Из (6) следует соотношение для тензора поворота R :

$$R = U^{-1} \cdot \Phi, \quad (8)$$

где Φ определен формулой (3), а обратный тензор U^{-1} получим на основании (7):

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^G}} \bar{a}_i^G \bar{a}_i^G.$$

Из приведенной схемы нахождения меры U при заданных $r(R), r'(R), z'_R(R)$, а также выражения левого тензора Генки [17] $\Gamma = \ln U$, тензор Генки может быть найден в виде

$$\Gamma = \ln \left(\sqrt{\lambda_i^G} \right) \bar{a}_i^G \bar{a}_i^G. \quad (9)$$

Отметим, что из выражения (4) для G^{ij} следуют упрощения относительно вида собственных векторов меры G :

$$\bar{a}_1 = a_1^R \bar{e}_R + a_1^{z_0} \bar{e}_{z_0}, \quad \bar{a}_2 = \bar{e}_\theta, \quad \bar{a}_3 = a_3^R \bar{e}_R + a_3^{z_0} \bar{e}_{z_0}. \quad (10)$$

Из формул (10) и (3) также можно сделать вывод, что компоненты левой меры искажений $\underline{U}$, тензора поворота $\underline{R}$, левого тензора Генки $\underline{\Gamma}$ при диадах $\bar{e}_R \bar{e}_\theta$, $\bar{e}_\theta \bar{e}_R$, $\bar{e}_\theta \bar{e}_{z_0}$, $\bar{e}_{z_0} \bar{e}_\theta$ равны нулю. Аналогичные выводы из (3) – (5) справедливы для тензоров $\underline{\Phi}$, $\underline{G}$, $\underline{\varepsilon}$. Таким образом, любую рассмотренную меру описания деформированного состояния $\underline{M}$ можно представить в общем виде

$$\underline{M} = M^{RR} \bar{e}_R \bar{e}_R + M^{\theta\theta} \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta + M^{z_0 z_0} \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0} + M^{Rz_0} \bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + M^{z_0 R} \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R. \quad (11)$$

В рамках дополнительного кинематического ограничения

$$r = R \quad (12)$$

меры деформированного состояния могут быть записаны аналитически:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{(z_R'^2 + 2) \bar{e}_R \bar{e}_R + z_R' (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R) + 2 \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0}}{\sqrt{z_R'^2 + 4}} + \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta, \\ \underline{R} &= \frac{1}{\sqrt{z_R'^2 + 4}} \left[2 (\bar{e}_R \bar{e}_R + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0}) + z_R' (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} - \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R) \right] + \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta, \\ \underline{\Gamma} &= \ln \left(\frac{\sqrt{z_R'^2 + 4} + z_R'}{2} \right) \frac{z_R' (\bar{e}_R \bar{e}_R - \bar{e}_{z_0} \bar{e}_{z_0}) + 2 (\bar{e}_R \bar{e}_{z_0} + \bar{e}_{z_0} \bar{e}_R)}{\sqrt{z_R'^2 + 4}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Первый инвариант левого тензора Генки $\theta = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{33}$ в формуле (13), характеризующий изменение объема, равен нулю. Таким образом, в случае наложения кинематического ограничения (12) среду необходимо считать несжимаемой.

При необходимости могут быть конкретизированы и другие меры описания деформированного состояния. Формулы данного пункта показывают, что компоненты тензоров деформаций зависят от обобщенных перемещений, их производных, зависящих от радиальной координаты, и от самой радиальной координаты.

2. Определяющие соотношения и условия равновесия

Напряженное состояние среды может быть конкретизировано при известных соотношениях, определяющих связи между напряжениями и деформациями. В данной работе рассматриваются определяющие соотношения, подходы к построению которых описаны в [17].

В качестве первого определяющего соотношения используется выражение для энергетического тензора напряжений $\underline{T}$:

$$\underline{T} = 2G \underline{\varepsilon} + K J_1 \underline{E}, \quad (14)$$

где G – модуль сдвига; K – модуль объемного расширения; J_1 – первый алгебраический инвариант тензора деформаций Коши – Грина $\underline{\varepsilon}$ (5).

Тензор истинных напряжений Коши $\underline{S}$ связан с тензором $\underline{T}$ и может быть представлен в виде

$$\underline{S} = \sqrt{g/G} \Phi^T \cdot \underline{T} \cdot \Phi, \quad (15)$$

где $\underline{T}$ имеет вид (14), аффинор деформации Φ определен выражением (3).

Следующим определяющим соотношением выбрана формулировка для «повернутого» обобщенного тензора напряжений Коши $\underline{\sigma}_R$ [17]:

$$\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + K\theta\tilde{E}, \quad (16)$$

где $\tilde{\Gamma}$ – девиатор левого тензора деформаций Генки, определенного формулой (9).

Для кинематического ограничения (12) применяется определяющее соотношение [17] для несжимаемого материала

$$\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + \sigma_0(R)\tilde{E}, \quad (17)$$

где σ_0 – гидростатическое напряжение.

Для определяющих соотношений (16), (17) тензор истинных напряжений Коши вычисляется по следующей формуле [17]:

$$\underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{g}{G}} \underline{R}^{-1} \cdot \underline{\sigma}_R \cdot \underline{R}, \quad (18)$$

где $\underline{R}$ определяется соотношением (8).

Диадное представление $\underline{\underline{s}}$ имеет вид

$$\underline{\underline{s}} = s^{RR} \vec{e}_R \vec{e}_R + s^{\theta\theta} \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta + s^{z_0 z_0} \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0} + s^{Rz_0} (\vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_R), \quad (19)$$

компоненты тензора $\underline{\underline{s}}$ зависят от перемещений $r(R)$, $z_R(R)$, их производных и радиальной координаты R .

Для кинематического ограничения (12) $r = R$ и определяющего соотношения (17) с учетом (18) тензор напряжений $\underline{\underline{s}}$ можно записать аналитически:

$$\underline{\underline{s}} = \frac{4G}{\sqrt{z_R'^2 + 4}} \ln \left(\frac{\sqrt{z_R'^2 + 4} + z_R'}{2} \right) \left[\frac{z_R'}{2} (-\vec{e}_R \vec{e}_R + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0}) + (\vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_R) \right] + \sigma_0 \tilde{E}. \quad (20)$$

Отметим, что гидростатическое напряжение σ_0 входит только в диагональные компоненты тензора напряжений (20).

Ввиду отсутствия в постановке задачи массовых сил уравнение равновесия примет вид [19]

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{s}} = \vec{0},$$

где $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – оператора Гамильтона в актуальном базисе.

Рассмотрев выражение (19) и найдя производные $\frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial x^i}$, с учетом (2) получаем уравнение равновесия в виде

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{s}} = \left(\frac{1}{r'} \frac{ds^{RR}}{dR} + \frac{s^{RR} - s^{\theta\theta}}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r'} \frac{ds^{Rz_0}}{dR} + \frac{s^{Rz_0}}{r} \right) \vec{e}_{z_0} = \vec{0}.$$

Для решения задачи и интерпретации результатов удобнее работать с безразмерными переменными. Введём переменную $\rho = R/R_1$ и безразмерный тензор

напряжений Коши $\underline{S}(\rho)/(2G)$ (далее $\underline{S}$). Запишем безразмерные уравнения равновесия в координатной форме:

$$\begin{cases} \frac{1}{r'} \frac{ds^{RR}}{dR} + \frac{s^{RR} - s^{\theta\theta}}{r} = 0, \\ \frac{1}{r'} \frac{ds^{Rz_0}}{d\rho} + \frac{s^{Rz_0}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим постановку задачи в случае, когда накладывается дополнительное кинематическое ограничение (12) $r = \rho$. Тогда уравнения равновесия сводятся к системе

$$\begin{cases} \frac{ds^{RR}}{d\rho} + \frac{s^{RR} - s^{\theta\theta}}{\rho} = 0, \\ \frac{ds^{Rz_0}}{d\rho} + \frac{s^{Rz_0}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Второе уравнение данной системы является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно компоненты s^{Rz_0} и позволяет независимо от первого уравнения найти s^{Rz_0} в виде $s^{Rz_0} = \frac{c}{\rho}$ с точностью до произвольной постоянной.

3. Граничные условия и разрешающее уравнение

Сформулируем естественные для рассматриваемой модели граничные условия в перемещениях. На внутреннем радиусе осевые перемещения отсутствуют, а на внешнем достигается осевое смещение h_z . Значения функции $r(\rho)$ на внешнем $\hat{R}_1 = R_1/R_1$ и внутреннем $\hat{R}_2 = R_2/R_1$ безразмерных начальных радиусах совпадают с соответствующими значениями этих радиусов. В безразмерных переменных данные граничные условия принимают вид

$$z_R(\hat{R}_2) = 0, \quad z_R(\hat{R}_1) = h_z; \quad (23)$$

$$r(\hat{R}_2) = \hat{R}_2, \quad r(\hat{R}_1) = \hat{R}_1. \quad (24)$$

Таким образом, система уравнений равновесия (21) с формулировкой тензора истинных напряжений Коши в виде (15) или (18) для определяющих соотношений (14) или (16) и граничные условия (23), (24) образуют краевую задачу с нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно неизвестных функций перемещений $r(\rho)$, $z_R(\rho)$.

Как было отмечено, использование кинематического ограничения (12) $r = \rho$ приводит к необходимости использовать определяющее соотношение для несжимаемых материалов (17) и появлению неизвестной функции – гидростатического напряжения $\sigma_0(\rho)$. Однако если рассмотреть второе уравнение системы (22), то с учётом выражения (20) для $\underline{S}$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестного перемещения $z_R(\rho)$:

$$z_R''(\rho) = - \frac{\operatorname{arcsch}(z_R'(\rho)/2)(z_R'(\rho)^2 + 4)}{\rho \left[\sqrt{z_R'(\rho)^2 + 4} - z_R'(\rho) \operatorname{arcsch}(z_R'(\rho)/2) \right]}. \quad (25)$$

Таким образом, для несжимаемого материала задача сводится к краевой для дифференциального уравнения (25) с граничными условиями (23). Решение данной задачи позволит полностью конкретизировать деформированное состояние цилиндра, а также сдвиговые напряжения s^{Rz_0} формулы (20).

4. Численный метод

Рассмотрим особенности численного метода на примере краевой задачи (23), (25), полученной для кинематического ограничения (12) относительно функции $z_R(\rho)$.

Область значений радиальной координаты $\rho \in [\hat{R}_2, \hat{R}_1]$ разбивается на последовательность дискретных значений с постоянным шагом h :

$$\rho_i = \hat{R}_2 + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{\hat{R}_1 - \hat{R}_2}{n}. \quad (26)$$

Точки ρ_0, ρ_n будем называть граничными, прочие точки – внутренними. Произведем аппроксимацию производных, входящих в (25) с точностью $O(h^2)$:

а) во внутренних точках используем выражения:

$$\begin{aligned} z_R'|_{\rho=\rho_i} &= (z_R')_i = \frac{z_R|_{\rho=\rho_{i+1}} - z_R|_{\rho=\rho_{i-1}}}{2h} = \frac{(z_R)_{i+1} - (z_R)_{i-1}}{2h} + O(h^2), \\ z_R''|_{\rho=\rho_i} &= (z_R'')_i = \frac{(z_R)_{i+1} - 2(z_R)_i + (z_R)_{i-1}}{h^2} + O(h^2); \end{aligned} \quad (27)$$

б) на левой граничной точке

$$\begin{aligned} z_R'|_{\rho=\rho_0} &= (z_R')_0 = \frac{-3(z_R)_0 + 4(z_R)_1 - (z_R)_2}{2h} + O(h^2), \\ z_R''|_{\rho=\rho_0} &= (z_R'')_0 = \frac{2(z_R)_0 - 5(z_R)_1 + 4(z_R)_2 - (z_R)_3}{h^2} + O(h^2); \end{aligned} \quad (28)$$

в) на правой граничной точке

$$\begin{aligned} z_R'|_{\rho=\rho_n} &= (z_R')_n = \frac{3(z_R)_n - 4(z_R)_{n-1} + (z_R)_{n-2}}{2h} + O(h^2), \\ z_R''|_{\rho=\rho_n} &= (z_R'')_n = \frac{2(z_R)_n - 5(z_R)_{n-1} + 4(z_R)_{n-2} - (z_R)_{n-3}}{h^2} + O(h^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Используя (26) – (29), запишем уравнение равновесия (25) для каждой внутренней точки. Дополняя эту систему граничными условиями (23), получаем замкнутую систему нелинейных уравнений. Процесс нахождения решения этой системы реализован итерационным численным методом Левенберга – Марквардта [20, 21].

В качестве начального приближения для функции z_R использовалось аналитическое решение задачи осевого сдвига несжимаемого материала из линейной

теории упругости:

$$z_R = \frac{h_z (\ln \rho - \ln \hat{R}_2)}{\ln \hat{R}_1 - \ln \hat{R}_2}. \quad (30)$$

Записав соотношения для функции $r(\rho)$, аналогичные (27) – (29), решаем краевую задачу для системы уравнений равновесия (21) с формулировкой тензора истинных напряжений Коши в виде (15) или (18) и граничными условиями (23), (24). В качестве начального приближения для $r(\rho)$ используем зависимость $r = \rho$.

5. Результаты

С помощью авторского программного комплекса были получены решения для осевого сдвига полого цилиндра в рамках трех постановок:

а) краевой задачи для системы уравнений (21) с граничными условиями (23), (24), тензора истинных напряжений вида (15), соответствующего определяющему соотношению сжимаемого материала в виде (14) $\underline{T} = 2G\tilde{\epsilon} + KJ_1\tilde{E}$;

б) краевой задачи для системы уравнений (21) с граничными условиями (23), (24), тензора истинных напряжений вида (18), соответствующей определяющему соотношению сжимаемого материала (15) $\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + K\theta\tilde{E}$;

с) краевой задачи для уравнения (25) с граничными условиями (23), полученная в рамках кинематического допущения (12) $r = \rho$ с определяющим соотношением (17) $\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + \sigma_0\tilde{E}$.

Все расчеты произведены для цилиндра с геометрическими характеристиками $R_2 = 0.6$, $R_1 = 1$. Также было принято $K = 100G$.

Приведем зависимость $z_R(\rho)$ для перемещения 0.5 на внешней обойме (рис. 1). Таким образом, перемещения для расчетов b , c практически совпадают, однако очевидно несовпадение результатов постановок a и b .

Также существенные различия результатов постановок a , b будем наблюдать, если рассмотрим радиальные перемещения (для перемещения 0.5 внешней обоймы) (рис. 2).

Для расчетов a , b , c приведем графики сдвигового напряжения $s^{Rz_0}(\rho)$ для перемещения 0.05 на внешней обойме (рис. 3)

Как следует из рис. 3, зависимости компоненты s^{Rz_0} от радиальной координаты для расчетов b , c практически совпадают, однако существенно отличаются от расчета a .

Найдем значения силы $F(h_z)$, приложенной к внешней обойме, которую можно наблюдать в эксперименте. Сила F в безразмерном виде, приходящаяся на единицу высоты цилиндра (в качестве таковой возьмем значение $\hat{R}_1$), сводится к выражению

$$F = 2\pi \hat{R}_1^2 s^{Rz_0}(\hat{R}_1).$$

Приведем графики зависимости силы $F(h_z)$ от перемещения внешней обоймы для расчетов a , b , c (рис. 4).

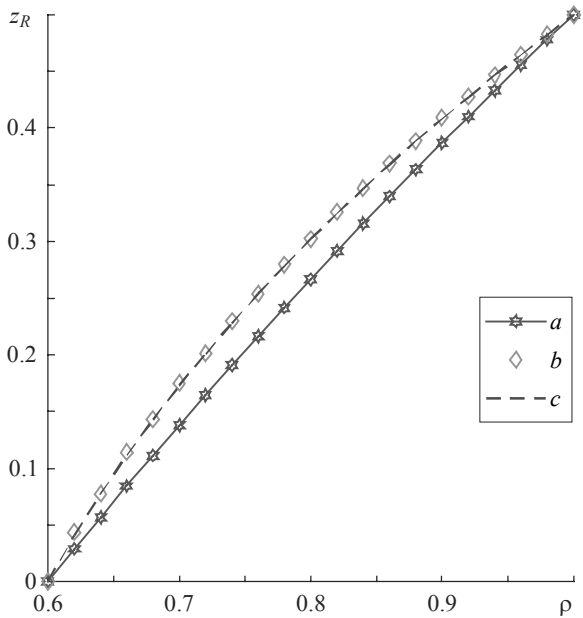


Рис. 1. Зависимости осевого перемещения z_R от радиальной координаты для расчетов a, b, c
Fig. 1. Axial displacement z_R as a function of the radial coordinate for calculations (a), (b), and (c)

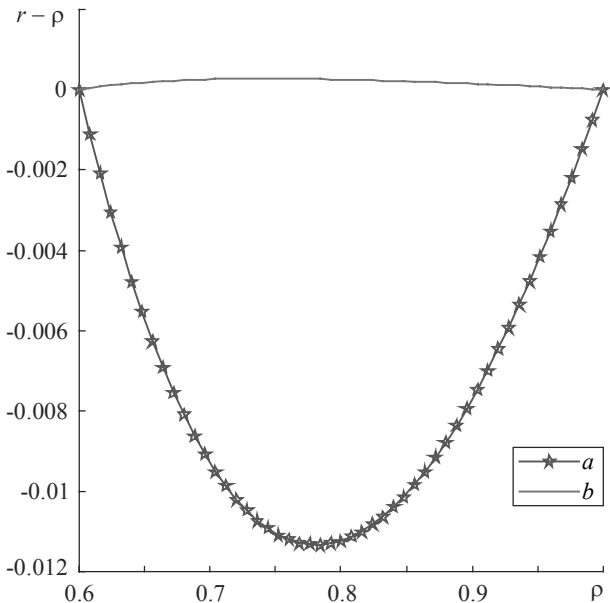


Рис. 2. Радиальное перемещение для расчетов a, b
Fig. 2. Radial displacement for calculations (a) and (b)

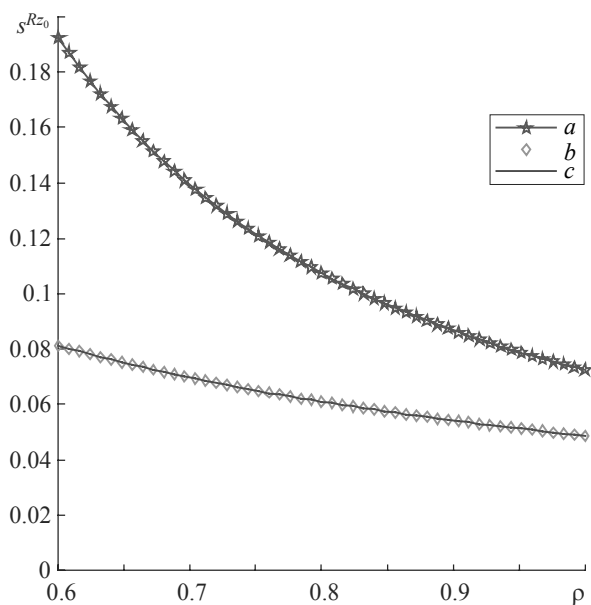


Рис. 3. Зависимости компоненты s^{Rz_0} от радиальной координаты для расчетов a, b, c

Fig. 3. Component s^{Rz_0} as a function of the radial coordinate for calculations (a), (b), and (c)

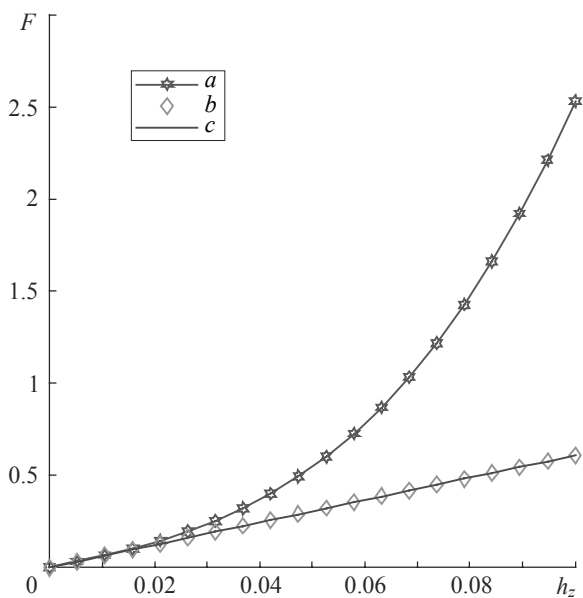


Рис. 4. Зависимость $F(h_z)$ для расчетов a, b, c

Fig. 4. Functional dependency $F(h_z)$ for calculations (a), (b), and (c)

Очевидны различия в поведении зависимости $F(h_z)$ от выбора определяющего соотношения. Таким образом, сравнивая модельные и экспериментальные зависимости, $F(h_z)$, можно сделать выводы об адекватности представления материала выбранным определяющим соотношением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зингерман К.М., Зубов Л.М. Точные решения задач теории многократного наложения больших деформаций для тел, образованных последовательным соединением деформированных частей // Чебышевский сборник. Т. XVIII. Вып. 3. 2017. С. 255–279. DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-255-279.
2. Андреева Ю.Ю., Жуков Б.А. Точные аналитические решения одной задачи нелинейной теории упругости для двух потенциалов энергии деформации несжимаемого материала // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 2 (46). С. 64–76. DOI: 10.21685/2072-3040-2018-2-7.
3. Astapov Y.V., Khristich D.V. Finite deformations of an elastic cylinder during indentation // International Journal of Applied Mechanics. 2018. V. 12. No. 3. DOI: 10.1142/S1758825118500266
4. Щукина Н.А. Особенности решений задач нелинейной теории упругости в рамках эффектов второго порядка // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2016. № 3–4. С. 543–547.
5. Губаев К.В. Метод построения определяющих соотношений для текучих анизотропных нелинейно упругих тел // Труды МФТИ. 2014. Т. 6. № 3. С. 122–128.
6. Козлов В.В., Маркин А.А. Вопросы конкретизации определяющих соотношений нелинейной теории упругости на основе рассмотрения одноосного однородного растяжения // Известия ТулГУ. Естественные науки. Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. Вып. 4. С. 137–143
7. Zubov L.M. Universal solution of nonlinear elasticity for a hollow cylinder with prestressed coatings // Acta Mechanica. 2018. DOI: 10.1007/s00707-018-2333-x.
8. Merodio J., Ogden R.W. Extension, inflation and torsion of a residually stressed circular cylindrical tube // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. V. 28. P. 157–174. DOI: 10.1007/s00161-015-0411-z.
9. Карякин М.И., Шубчинская Н.Ю. Об устойчивости нелинейно-упругого цилиндра с собственными напряжениями при растяжении и сжатии // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки. 2016. № 2 (190). С. 54–60. DOI: 10.18522/0321-3005-2016-2-54-60.
10. Колтак Е.П. Полый цилиндр из несжимаемого материала при больших деформациях // Нелинейные проблемы механики и физики твердого тела: Труды научной школы академика В.В. Новожилова. СПб., 1998. № 1. С. 96–117.
11. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976. 228 с.
12. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М.: Машгиз, 1958. 975 с.
13. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
14. Beatty Millard. F., Qing Jiang On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: Rotational shear of isotropic hyperelastic materials // Q. J. Mechanics Appl. Math. 1997. V. 50. No. 2. P. 211–237. DOI: 10.1093/qjmath/50.2.211.
15. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 270 с.
16. Толоконников Л.А. Вариант соотношений разномодульной теории упругости // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 102–104.
17. Маркин А.А., Христич Д.В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 92 с.
18. Муравлёв А.В. О представлении упругого потенциала в обобщенном пространстве деформаций А.А. Ильюшина // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 99–102.
19. Маркин А.А. Термомеханика сплошной среды: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. 140 с.

20. Levenberg K. A method for the solution of certain problems in last squares // Quart. Appl. Math. 1944. V. 2. P. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666.
21. Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1963. V. 11. No. 2. P. 431–441. DOI:10.1137/0111030.

Статья поступила 14.05.2019 г.

Kozlov V.V., Markin A.A. (2020) TESTING OF DEFINING RELATIONS OF NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY IN AN AXIAL STRAIN OF A HOLLOW CYLINDER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 102–114

DOI 10.17223/19988621/63/9

Keywords: axial strain, hollow cylinder, nonlinear elasticity, defining relations.

An attempt to validate the accuracy of the defining relations of nonlinear theory of elasticity is made using the model of static axial strain of a hollow cylinder. A closed system of nonlinear differential equations for two unknown functions is obtained. The first function describes the cylinder points' movement in the radial direction, and the second, in the axial direction. Displacements of the inner and outer surfaces of the cylinder are specified as boundary conditions. A difference scheme for resulting system transition to a system of nonlinear equations is described. The dependences of the axial force on the outer holder displacement are obtained for three quasilinear defining relations. In the first case, the energy stress tensor is related to the Cauchy – Green deformation tensor. In the second case, the «rotated» tensor of true stresses and the Hencky tensor are used. In the third case, the incompressibility condition is imposed. It is shown that the dependence of the axial force on the axial displacement of the outer cylinder surface significantly depends on the defining relation chosen. The obtained dependencies can be used to verify the reliability of the defining relations.

Financial support. The reported study was partially funded by the grant of the President of the Russian Federation according to the research project MD-1803.2019.1 and by RFBR according to the research project No. 18-31-20053.

Viktor V. KOZLOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Aleksey A. MARKIN (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

REFERENCES

1. Zingerman M., Zubov L.M. (2017) Tochnye resheniya zadach teorii mnogokratnogo nalozheniya bol'shikh deformatsiy dlya tel, obrazovannykh posledovatel'nym soedineniem deformirovannykh chastey [Exact solutions to the problems of the theory of repeated superposition of large strains for the bodies derived from a successive junction of deformed parts]. *Chebyshevskiy sbornik*. 18(3). pp. 255–279. DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-255-279.
2. Andreeva Yu.Yu., Zhukov B.A. (2018) Tochnye analiticheskie resheniya odnoy zadachi nelineynoy teorii uprugosti dlya dvukh potentsialov energii deformatsii neszhimaemogo materiala [Exact analytical solutions to a problem of the nonlinear theory of elasticity for two strain energy potentials of an incompressible material]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki – University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*. 2(46). pp. 64–76. DOI: 10.21685/2072-3040-2018-2-7.
3. Astapov Y.V., Khristich D.V. (2018) Finite deformations of an elastic cylinder during indentation. *International Journal of Applied Mechanics*. 12(3). DOI: 10.1142/S1758825118500266.

4. Shchukina N.A. (2016) Osobennosti resheniy zadach nelineynoy teorii uprugosti v ramkakh effektivov vtorogo poriyadka [Features of solutions of problems of nonlinear elasticity theory in the framework of second order effects]. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy – International Journal of Applied and Fundamental Research*. 3–4. pp. 543–547.
5. Gubaev K.V. (2014) Metod postroeniya opredelyayushchikh sootnosheniy dlya tekuchikh anizotropnykh nelineyno uprugikh tel [Developing of constitutive equations for flowing anisotropic nonlinearly elastic materials]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta (gosudarstvennogo universiteta) – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (State University)*. 6(3). pp. 122–128.
6. Kozlov V.V., Markin A.A. (2015) Voprosy konkretizatsii opredelyayushchikh sootnosheniy nelineynoy teorii uprugosti na osnove rassmotreniya odnoosnogo odnorodnogo rastyazheniya [Questions specification of the defining relationships of nonlinear elasticity theory by considering uniaxial homogeneous tension]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki – Bulletin of the Tula State University*. 4. pp. 137–143.
7. Zubov L.M. (2018) Universal solution of nonlinear elasticity for a hollow cylinder with prestressed coatings. *Acta Mechanica*. DOI: 10.1007/s00707-018-2333-x.
8. Merodio J., Ogden R.W. (2016) Extension, inflation and torsion of a residually stressed circular cylindrical tube. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 28. pp. 157–174. DOI: 10.1007/s00161-015-0411-z.
9. Karyakin M.I., Shubchinskaya N.Yu. (2016) Ob ustoychivosti nelineyno-uprugogo tsilindra s sobstvennymi napryazheniyami pri rastyazhenii i szhatii [On stability of a nonlinearly elastic cylinder with internal stresses under tension and compression]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki – Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science*. 2(190). pp. 54–60. DOI: 10.18522/0321-3005-2016-2-54-60.
10. Kolpak E.P. (1998) Polyv tsilindr iz neszhimaemogo materiala pri bol'shikh deformatsiyakh [A hollow cylinder made of incompressible material under large deformations]. *Nelineynye problemy mekhaniki i fiziki tverdogo tela. Trudy nauchnoy shkoly akademika V.V. Novozhilova*. 1. pp. 96–117.
11. Lavendel E.E. (1976) *Raschet rezinotekhnicheskikh izdeliy* [Calculation of rubber-technical products]. Moscow: Mashinostroenie.
12. Ponomarev S.D., Biderman V.L. (1958) *Raschety na prochnost' v mashinostroenii*. [Strength calculations in mechanical engineering]. Vol. 2. Moscow: Mashgiz.
13. Lurie A.I. (1990) *Nonlinear Theory of Elasticity*. Amsterdam – North-Holland.
14. Beatty M.F. (1997) On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: rotational shear of isotropic hyperelastic materials. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 50(2). pp. 211–237. DOI: 10.1093/qjmam/50.2.211.
15. Guz' A.N. (1973) *Ustoychivost' uprugikh tel pri konechnykh deformatsiyakh* [Stability of elastic bodies under finite strains]. Kyiv: Naukova dumka.
16. Tolokonnikov L.A. (1971) Variant sootnosheniy raznomodul'noy teorii uprugosti [Alternate version of relations of the multimodulus elasticity theory]. *Prochnost' i plastichnost'*. 1. pp. 102–104.
17. Markin A.A., Khristich D.V. (2007) *Nelineynaya teoriya uprugosti: uchebnoe posobie* [Nonlinear theory of elasticity: tutorial]. Tula: TulGU.
18. Muravlev A.V. (2011) On a representation of an elastic potential in A.A. Il'yushin's generalized strain space. *Mechanics of Solids*. 46. pp. 77–79. DOI: 10.3103/S0025654411010122.
19. Markin A.A. (2009) *Termomekhanika sploshnoy sredy: uchebnoe posobie* [Continuum thermomechanics: tutorial]. Tula: TulGU.
20. Levenberg K. (1944) A method for the solution of certain problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2. pp. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666.
21. Marquardt D. (1963) An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 11(2). pp. 431–441. DOI: 10.1137/0111030.

Received: May 14, 2019

УДК 533.69
DOI 10.17223/19988621/63/10

С.В. Пейгин, С.А. Орлов

ОПТИМАЛЬНОЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ «КРЫЛО – ФЮЗЕЛЯЖ» ШИРОКОФЮЗЕЛЯЖНОГО ДАЛЬНЕМАГИСТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА¹

Приведены результаты многоточечного оптимального аэродинамического проектирования конфигурации «крыло – фюзеляж» широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета. Решение задачи получено на основе сочетания численных решений полных уравнений Навье – Стокса для турбулентных течений вязкого сжимаемого газа с методом глобального оптимального поиска на базе Генетических Алгоритмов с учетом конструктивных параметров и конструктивных ограничений. Показано, что оптимальное решение (форма широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета) отвечает всем заданным ограничениям на форму проектируемого самолета и его аэродинамические свойства, обладает достаточно малым полным сопротивлением при заданных условиях крейсерского полета.

Ключевые слова: *оптимальное аэродинамическое проектирование, полные уравнения Навье – Стокса, коэффициент полного сопротивления, коэффициент подъемной силы, момент тангажа.*

Оптимальное аэродинамическое проектирование является важной составной частью создания летательного аппарата, поскольку именно на этом этапе определяется возможность проектирования такой геометрии самолета, которая, с одной стороны, гарантирует выполнение всех основных технических характеристик полета (дальность, грузоподъемность и топливная эффективность), а с другой – удовлетворяет всем геометрическим и аэродинамическим ограничениям, включая требование на устойчивость полета. При этом, поскольку издержки на определение внешнего облика самолета на последнем этапе детального проектирования очень велики, ключевую роль в успехе проекта играет стадия предварительного проектирования.

Традиционный подход к предварительному аэродинамическому проектированию носит «ручной» характер и использует подход «проб и ошибок». В связи с этим временные, трудовые и материальные издержки на проведение таких работ чрезвычайно велики: аэродинамический дизайн среднемагистрального трансзвукового лайнера требует работы свыше 150 высококвалифицированных специалистов в течение 2 лет с общими издержками свыше ста миллионов USD.

С математической точки зрения задача проектирования сводится к задаче определения формы, доставляющей минимум полного сопротивления самолета. Именно эта задача и была решена в настоящей работе применительно оптимальному аэродинамическому проектированию широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета с крейсерской скоростью $M = 0.86$.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации Проекта RFMEFI57617X0103.

Постановка задачи

С математической точки зрения задача состоит в нахождении оптимальной формы летательного аппарата (с точки зрения минимизации полного сопротивления), которая отвечает всем необходимым ограничениям на его геометрию и аэродинамику.

Вначале решается задача для условий крейсерского полета, когда ищется форма, доставляющая минимум коэффициента полного сопротивления C_X для $M = 0.86$ с учетом ограничений различного типа геометрического и аэродинамического характера. Речь идет об ограничении на коэффициент подъемной силы, максимально допустимый момент тангажа, относительных толщин базовых секций крыла, радиусов затупления передней кромки этих секций крыла и т.д.

На втором этапе в рассмотрение включаются и другие точки полета: более высокое число Маха (для обеспечения безопасности по бафтингу) и условия взлета (для обеспечения достижения величины подъемной силы, гарантирующей взлет самолета с заданной массой).

В целом, данная задача представляет собой пример задачи многоходовки, поскольку основные вызовы, с которыми сталкивается исследователь при решении такой задачи носят разнонаправленный характер: наряду с необходимостью рассчитать сопротивление самолета, нужно обеспечить вычислительно-эффективный поиск минимума нелинейной функции многих переменных с учетом множества конструктивных параметров и конструктивных ограничений наряду с требованием проведения расчетов в разумное время, поскольку если для решения задачи требуется десятки дней вычислений, то такое решение носит чисто академический характер и не представляет интереса для практических приложений.

Метод решения задачи

Для решения поставленной выше задачи был использован программный продукт OPTIMENGA_AERO_WB. В его основе лежат три базовых алгоритма:

- численное решение полных уравнений Навье – Стокса для турбулентного течения вязкого газа в широком диапазоне условий полета;
- определение оптимального набора дизайн-параметров с учетом конструктивных параметров и конструктивных ограничений на геометрию и аэродинамику самолета;
- интенсивная многоуровневая параллелизация вычислительного потока при вычислениях на многопроцессорных вычислительных системах с MIMD-архитектурой.

То, что для расчета сопротивления используется модель уравнений Навье – Стокса, связано с тем, что только данная математическая модель течения может обеспечить необходимый для практических приложений уровень точности расчета интегральных аэродинамических характеристик самолета (включая коэффициент полного сопротивления C_X) во всем диапазоне изменения условий полета при трансзвуковых числах Маха с учетом вязко-невязкого взаимодействия.

Следующим по очереди (но не по важности) является вопрос об уровне порядка аппроксимации разностной схемы, используемой при численных расчетах: нужно найти правильный компромисс между точностью схемы (и связанной с этим сложностью и устойчивостью вычислительного алгоритма) и вычислительной эффективностью численных расчетов. Правильным ответом на этот вопрос,

по нашему мнению, был выбор схемы ENO (Essentially Non-Oscillatory Scheme) [1, 2], которая давала при использовании многосеточного подхода с поправкой на дефект (defect-correction) необходимую точность на достаточно грубых много-блочных вычислительных сетках.

При расчете конвективного оператора использовалась характеристическая схема 1-го порядка, что требовало относительно мало арифметических операций для своего обращения. Поскольку при данном подходе схема высокого порядка (требующая сравнительно много арифметических операций при обращении) применялась лишь на вершине многосеточного цикла, то уровень вычислительной эффективности алгоритма в целом был очень высок.

Сравнение с тестовыми результатами AIAA Drag Prediction Workshop (который можно назвать чемпионатом мира среди программных продуктов для расчета сопротивления самолетов в условиях реального полета) показало, что алгоритм обеспечивает необходимую для приложений точность. Дополнительные сравнения с программой OVERFLOW, используемой компанией Boeing, подтвердили данный вывод [3].

Для решения собственно задачи оптимизации используется генетический алгоритм с вещественным кодированием точки в пространстве поиска. Генетические Алгоритмы (ГА) относятся к эвристическим алгоритмам, которые можно отнести к классу алгоритмов управляемого случайного поиска. В качестве основного варианта используется ГА, в котором реализованы оператор турнирной селекции, одноточечный оператор скрещивания и оператор неравномерной мутации.

В задачах условной оптимизации аэродинамических форм принципиальным является учет ограничений на искомое оптимальное решение. Основная проблема состоит в том, что при решении практически важных задач искомое решение часто лежит либо очень близко, либо точно на границе области допустимых значений, положение которой заранее неизвестно и, в свою очередь, является вычислительно-тяжелой задачей (как, например, граница по моменту тангажа самолета)

В данной работе был использован принципиально новый подход [4, 5] к учёту нелинейных ограничений, который заключался в следующем:

- в отличие от классического метода, при котором путь к оптимуму лежал только через геометрии, соответствующие заданным ограничениям (путь внутри области допустимых значений), допускались пути, в которых внутренняя часть маршрута могла лежать и в области недопустимых значений – важно было только, чтобы конечная геометрия была в области допустимых значений. В основе этого лежала простая идея – информация из «запретных» геометрий позволяла существенно сократить (с вычислительной точки зрения) путь к искомому минимуму;
- необходимое для этого расширение оптимизируемой функции на область недопустимых значений строилось достаточно легко, поскольку, методы оптимизации, основанные на ГА, не требуют гладкости оптимизируемых функций.

Следующим важным аспектом алгоритма оптимального поиска является вычислительная эффективность, которая становится решающей в случае, когда для расчета искомого функционала требуется большой объем вычислений. Требовалось найти такое решение, в котором, с одной стороны, была гарантирована точность и быстрота оптимального генетического поиска, а с другой – число вызовов процедуры расчета полных уравнений Навье – Стокса было относительно невелико.

Для эффективной реализации данной идеи на основе использования ГА был разработан метод, при котором расчет требуемых для оптимального поиска величин базировался на аппроксимации локальной базы данных, построение которой основывалось на расчете обтекания вариаций тестируемой геометрии в ее дискретной окрестности в заданной области поиска. Чтобы гарантировать точность и глобальность поиска, использовалось сочетание метода предикции-верификации с методом глобальных итераций. При этом количество таких глобальных итераций, требующихся для сходимости всего процесса оптимального поиска было достаточно невелико.

В программном продукте OPTIMENGA_AERO_WB исходная геометрия оптимизируемого крыла задавалась его формой в плане и формой базовых секций крыла в заданных фиксированных точках по координате Z вдоль размаха крыла. Геометрия крыла в плане определялась распределением углов скоса передней и задней кромок крыла, значением хорды бортовой секции крыла (секции стыковки крыла и фюзеляжа) и величинами координаты Z базовых секций крыла.

Форма базовых секций определялась коэффициентами Безье верхней и нижней поверхности профиля при условии непрерывности радиуса кривизны в передней кромке крыла. Дополнительными параметрами были локальная крутка базового профиля относительно задней кромки и величина поперечного V (которое представляет собой сдвиг в направлении вверх-вниз по отношению к плоскости плана).

Для проведения оптимизации наряду с вышеперечисленными параметрами дополнительно задавались:

- количество глобальных шагов проектирования;
- аэродинамические ограничения;
- геометрические ограничения;
- условия полета в точках проектирования.

Результаты оптимального аэродинамического дизайна

Как уже ранее отмечалось, оптимальный аэродинамический дизайн дальнемагистрального широкофюзеляжного пассажирского самолета с компоновкой крыло – фюзеляж был проведен с применением программного продукта OPTIMENGA_AERO_WB. Дополнительные технические детали указанного ПО могут быть найдены в [6, 7].

В процессе аэродинамического дизайна крыло было представлено пятью базовыми секциями по размаху крыла. Базовое крыло и накладываемые на него ограничения были описаны в работе [7], в которой рассматривалась оптимизация изолированного крыла.

Было рассмотрено проектирование с учетом двух точек, соответствующих транзвуковым скоростям полета, и одной точки сугубо дозвукового обтекания на режиме взлета:

- скорость $M = 0.86$, $C_Y = 0.55$ (с весовым коэффициентом 0.70);
- скорость $M = 0.87$, $C_Y = 0.55$ (с весовым коэффициентом 0.25);
- скорость $M = 0.20$, $C_Y = 0.55$ (с весовым коэффициентом 0.05).

В качестве ограничения рассматривалось условие на момент тангажа, необходимое для гарантирования устойчивости полета – момент тангажа всей оптимальной геометрии крыло – фюзеляж конфигурации был не меньше чем момент тангажа для исходной геометрии самолета.

На начальном этапе было проведен детальный аэродинамический анализ исходной компоновки крыло – фюзеляж. Вычислительная сетка была двухслойной, а общее количество вычислительных блоков равнялось 30 (15 блоков вблизи поверхности самолета и 15 блоков на бесконечности). Для блоков, прилегающих к крылу, количество точек сетки вдоль потока составляло 101, по нормали к поверхности – 37, а вдоль размаха крыла – 61. Общее количество точек в вычислительной сетки составляло около 1.3 миллиона.

Для обеспечения точности расчетов сетка была неравномерная со сгущением и в окрестности поверхности самолета. В частности, в окрестности передней кромки крыла размер шага вдоль секции крыла равнялся 0.2 % от текущей хорды профиля, в окрестности задней кромки был порядка 0.45 % от текущей хорды профиля, а значение шага по нормали к крылу равнялось 0.02 мм.

Представление о расчетной сетке верхней поверхности компоновки крыло – фюзеляж дано на рис. 1.

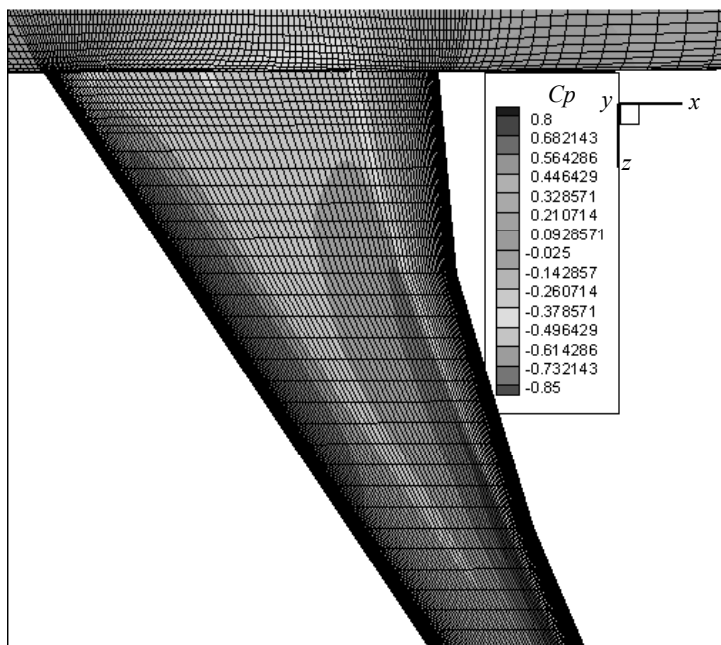


Рис. 1. Вид расчетной сетки на верхней поверхности конфигурации крыло – фюзеляж

Fig. 1. Computational grid on the upper surface of the wing-body configuration

Проведенные расчеты начальной компоновки показали, что исходная конфигурация при $C_Y = 0.55$ обладает неплохим аэродинамическим качеством (порядка 18 в основной точке аэродинамического дизайна):

- $C_X = 269.7$ аэродинамических каунта (при $M = 0.84$);
- $C_X = 280.8$ аэродинамических каунта (при $M = 0.85$);
- $C_X = 302.0$ аэродинамических каунта (при $M = 0.86$);
- $C_X = 332.6$ аэродинамических каунта (при $M = 0.87$);
- $C_X = 370.5$ аэродинамических каунта (при $M = 0.88$).

Основываясь на анализе полученных результатов, можно сделать следующие выводы:

- Начальная компоновка крыло – фюзеляж имеет приемлемое полное сопротивление в точке проектирования.
- Начиная с $M = 0.85$, происходит значительный рост сопротивления, который свидетельствует о начале волнового кризиса – при увеличении числа Маха на 0.01 сопротивление увеличивается на 21.2 аэродинамических каунта.

Исходя из этого, обоснованным является предположение, что имеется потенциальная возможность улучшения аэродинамических характеристик самолета на более высоких точках по числу Маха, однако данная задача представляет собой серьезный вызов и является достаточно нетривиальной, поскольку необходимо уменьшить общее сопротивление существенно трехмерной компоновки «крыло – фюзеляж» при достаточно высоком значении коэффициента подъемной силы и высоких значениях числа Маха набегающего потока и с учетом всех ограничений, наложенных на форму крыла и на его аэродинамические характеристики.

Результаты аэродинамического проектирования подтвердили, что данная задача была успешно решена. С учетом ограничения на момент тангажа коэффициент полного сопротивления оптимальной геометрии в главной точке дизайна был на 29.4 каунта меньше по сравнению с начальной конфигурацией (аэродинамическое качество выросло до 20.1), а во второй точке снижение составило 37.8 каунта. Соответствующие сравнения оптимальных секционных аэродинамических профилей крыла (полученных по результатам данного аэродинамического дизайна), с профилями начального крыла приведены на рис. 2.

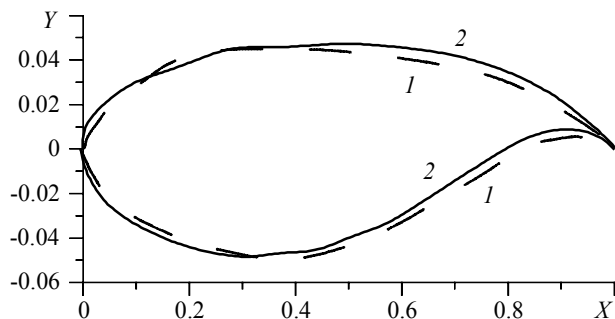


Рис. 2. Концевая секция. Сравнение формы начального (1) и оптимального (2) крыла

Fig. 2. Tip profiles. Comparison of the shapes of original (1) and optimal (2) wings

Важную информацию о характеристиках течения около оптимальной геометрии можно получить из рис. 3 и 4, на которых приведены распределения коэффициента давления по верхней поверхности самолета и секционные распределения давлений для условий полета в главной точке проектирования.

Как видно из этих рисунков, оптимальная геометрия обладает значительно лучшими аэродинамическими характеристиками по всему размаху крыла, поскольку индикация на подход к зоне отрыва течения во внешней по размаху части крыла, отмеченная при анализе начальной формы «крыло – фюзеляж», отсутствует для оптимальной геометрии при $M = 0.85–0.86$, а значительное улучшение наблюдается при $M = 0.87$ (см. рис. 6).

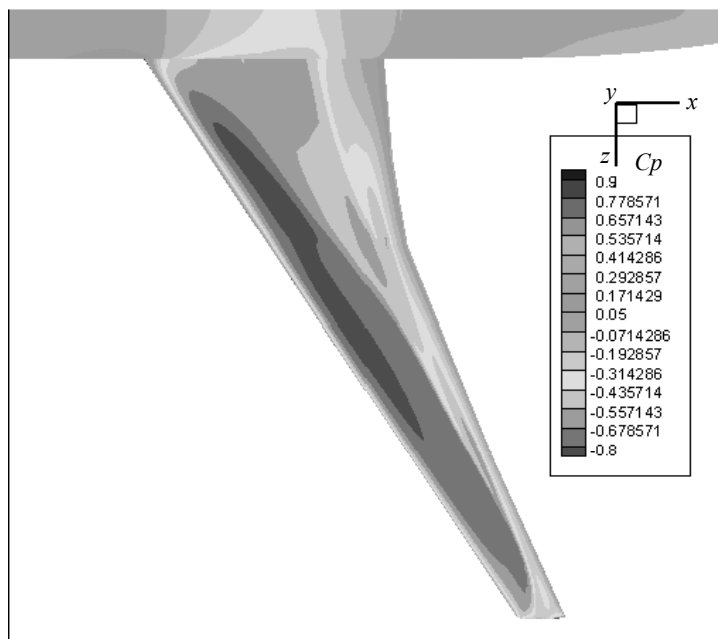


Рис. 3. Оптимальная геометрия при $C_Y = 0.55$, $M = 0.86$.

Распределение давлений по верхней поверхности

Fig. 3. Optimal geometry at $C_Y = 0.55$ and $M = 0.86$.

Pressure distributions over the upper surface

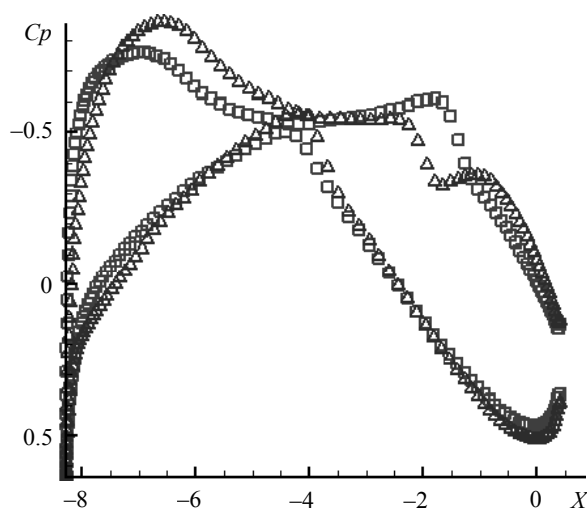


Рис. 4. Сравнение распределений давления в сечении $Z = 8.0$ м по размаху крыла при $C_Y = 0.55$ для $M = 0.86$ для базового ($\square$) и оптимального крыла (Δ)

Fig. 4. Comparison of the pressure distributions in the cross section $Z = 8.0$ m over the wingspan at $C_Y = 0.55$ and $M = 0.86$ for the original ($\square$) and optimal (Δ) wings

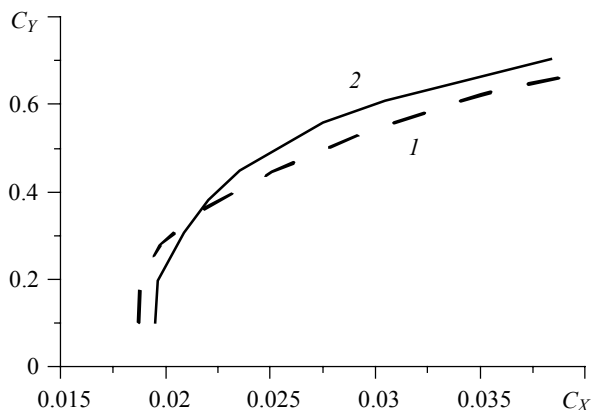


Рис. 5. Сравнение поляр сопротивления начальной (1) и оптимальной конфигураций (2) при $M = 0.86$

Fig. 5. Comparison of the drag polars for the original (1) and optimal (2) wing-body configurations at $M = 0.86$

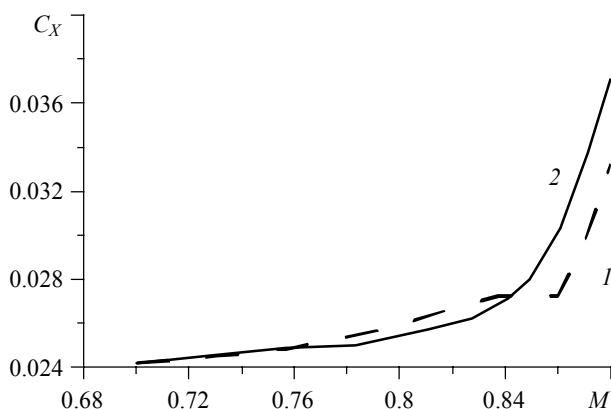


Рис. 6. Зависимость полного сопротивления от числа Маха набегающего потока при фиксированном значении коэффициента подъемной силы $C_Y = 0.55$ для начальной (2) и оптимальной конфигурации «крыло – фюзеляж» (1)

Fig. 6. Dependence of the resultant drag on the Mach number of the approach flow at a fixed value of the lift coefficient $C_Y = 0.55$ for the original (2) and optimal (1) wing-body configurations

В заключение отметим, что на основе тщательного анализа аэродинамических характеристик оптимальной геометрии можно сделать вывод, что проведенный аэродинамический дизайн позволил успешно решить задачу оптимального проектирования, поскольку:

- оптимальная геометрия обладает малым полным сопротивлением в условиях крейсерского полета;
- проектирование дало возможность сдвинуть точку начала волнового кризиса в сторону больших чисел Маха не менее чем на 0.02;

- оптимальная конфигурация «крыло – фюзеляж» обладает значительно лучшими аэродинамическими характеристиками по сравнению с начальной формой летательного аппарата в значительном диапазоне изменения чисел Маха и коэффициента подъемной силы;
- оптимальная геометрия «крыло – фюзеляж» отвечает всем заданным конструктивным параметрам и конструктивным ограничениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Epstein B., Averbuch A., and Yavneh I. An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // Journal of Computational Physics. 2001. V. 168. P. 316–338. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
2. Epstein B., Peigin S.V. Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) approach to Navier-Stokes computations // International Journal of CFD. 2004. V. 18. No. 3. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.
3. Epstein B., Jameson J., Peigin S., Roman D., Harrison N. and Vassberg J. Comparative study of 3D wing drag minimization by different optimization techniques // Journal of Aircraft. 2009. V. 46. No. 2. DOI: 10.2514/1.38216.
4. Peigin S. and Epstein B. Robust handling of non-linear constraints for GA optimization of aerodynamic shapes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2004. V. 45. P. 1339–1362.
5. Орлов С.А., Пейгин С.В., Степанов К.А., Тимченко С.В. Эффективная реализация нелинейных ограничений при оптимизации трехмерных трансзвуковых крыльев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.
6. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO // Source of the Document 52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA Science and Technology Forum and Exposition, SciTech 2014. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
7. Пейгин С.В., Пуцин Н.А., Болсуновский А.Л., Тимченко С.В. Оптимальное аэродинамическое проектирование крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 117–129. DOI: 10.17223/19988621/51/10.

Статья поступила 18.11.2019 г.

Peygin S.V., Orlov S.A. (2020) OPTIMAL AERODYNAMIC DESIGN OF A WING-BODY CONFIGURATION FOR A WIDE-BODY LONG-RANGE AIRCRAFT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 115–124

DOI 10.17223/19988621/63/10

Keywords: optimal aerodynamic design, full Navier-Stokes equations, resultant drag coefficient, lift coefficient, pitch moment.

This paper presents the results of a multi-point optimal aerodynamic design of a “wing-body” configuration for a wide-body long-range aircraft. The solution to the problem is obtained on the basis of a combination of numerical solution to full Navier-Stokes equations for turbulent flows of viscous compressible gas and method of global optimal search based on the Genetic Algorithms with account for design parameters and constraints. The applied method implies the calculation of the drag coefficient, which is required for optimal search, on the basis of the approximation of the local database established using the calculated flow around the tested geometry in its discrete vicinity in the given search area. To ensure the accuracy of the calculated results, the irregular grid refining is used in the vicinity of the aircraft surface. The considered designing takes into account two points corresponding to the transonic flight speeds and one point corresponding to the subsonic flow around in the take-off mode.

The optimal geometry is characterized by low full drag in cruising conditions. The designing made it possible to shift the point of the shock stall initiation towards the large Mach numbers by at least 0.02. The aerodynamic characteristics of the optimal “wing-body” configuration are significantly better than those of the aircraft of initial shape in a wide range of the Mach number and lift coefficient. The optimal “wing-body” geometry meets all the given design parameters and design constraints.

Financial support. This work was financially supported by applied research of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation: a unique identifier – RFMEFI57617X0103.

Sergey V. PEYGIN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation). E-mail: mishpahat_peiguine@yahoo.com

Sergey A. ORLOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Epstein B., Averbuch A., Yavneh I. (2001) An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*. 168(2). pp. 316–338. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
2. Epstein B., Peigin S.V. (2004) Implementation of WENO (Weighted Essentially Nonoscillatory) approach to Navier-Stokes computations. *International Journal of CFD*. 18(3). pp. 289–293. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.
3. Epstein B., Jameson J., Peigin S., Roman D., Harrison N., Vassberg J. (2009) Comparative study of 3D wing drag minimization by different optimization techniques *Journal of Aircraft*. 46(2). pp. 526–541. DOI: 10.2514/1.38216.
4. Peigin S., Epstein B. (2004) Robust handling of non-linear constraints for GA optimization of aerodynamic shapes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 45(12). pp. 1339–1362. DOI: 10.1002/fld.747.
5. Orlov S.A., Peygin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2015) Effektivnaya realizatsiya nelineynykh ogranicheniy pri optimizatsii trekhmernykh transzvukovykh kryl'ev [Effective implementation of nonlinear constraints in optimization of three-dimensional transonic wings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 33(1). pp. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.
6. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. (2014) Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO. *52nd Aerospace Sciences Meeting, AIAA Science and Technology, Forum, and Exposition*. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
7. Peygin S.V., Pushchin N.A., Bolsunovskiy A.L., Timchenko S.V. (2018) Optimal'noe aerodynamicheskoe proektirovanie kryla shirokofyuzelyazhnogo dalnemagistral'nogo samoleta [An optimal aerodynamic design for the wing of a wide-body long-range aircraft]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 117–129. DOI: 10.17223/19988621/51/10.

Received: November 18, 2019

УДК 532.542.2

DOI 10.17223/19988621/63/11

И.А. Рыльцев, К.Е. Рыльцева, Г.Р. Шрагер

**КИНЕМАТИКА ТЕЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ
В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ¹**

Исследуется установившееся осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения при наличии участка сужения/расширения. Для математического описания потока жидкости используются уравнения в переменных вихрь – функция тока, записанные в цилиндрической системе координат. Реологическое поведение рассматриваемой среды описывается степенной моделью Оствальда – де Ваала. Численное решение задачи осуществляется конечно-разностным методом с использованием метода установления. Расчеты выполнены для трех реологических сред: ньютоновской, псевдопластичной и дилатантной жидкостей.

Ключевые слова: *труба переменного сечения, участок сужения/расширения, степенная жидкость, модель Оствальда – де Ваала, преобразование координат, конечно-разностный метод.*

Течение жидкости в осесимметричных трубах переменного радиуса является предметом исследования многих численных и экспериментальных работ [1 – 15]. Актуальность изучения характеристик течения неньютоновских сред в каналах с участком сужения/расширения обусловлена их широким распространением как в природе, так и в технических приложениях. Ряд работ по исследованию подобных течений выполнен в области биомеханики, где данная геометрия используется при моделировании различных сосудистых патологий в кровеносных системах. Развитие некоторых болезней сосудов связано с параметрами течения крови, что обуславливает интерес к исследованию характера и структуры течения крови в организме. Кроме того, трубы переменного сечения встречаются в промышленности в качестве комплектующих элементов буровой техники, теплообменников и реакторов.

Множество численных и экспериментальных исследований выполнено для ламинарных и турбулентных режимов течения в каналах с различной формой твердых стенок, образующих сужение, с использованием ньютоновской модели жидкости. Работа [1] является одной из первых по исследованию течения жидкости в канале переменного сечения. Авторами рассматривалось течение ньютоновской жидкости в трубе, в которой форма сужения задавалась Гауссовой функцией. Расчеты проводились для числа Рейнольдса в диапазоне от 0 до 25. При этом не удалось получить результаты для более высоких значений числа Рейнольдса по причине численной неустойчивости используемого алгоритма. В работе [2] содержатся экспериментальные данные о течении в трубе с локальным сужением/расширением. Особое внимание уделяется исследованию характеристик течения в зависимости от геометрических параметров канала, а также от числа Рейнольдса. Кроме того, определяется критическое значение числа Рейнольдса, при

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00021).

котором происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному для заданных геометрических параметров сужения.

Серия работ [3 – 5] посвящена исследованию течений ньютоновской среды в трубках, геометрия которых включает несколько участков сужения. Авторами исследуется влияние количества сужений и их положения относительно друг друга на кинематические и динамические характеристики потока. Анализ результатов численного моделирования гемодинамического потока в артериях, включающих стеноз, для различных режимов течения крови приводится в работе [6], целью которой является изучение параметров течения от формы стеноза. В отдельное направление изучения влияния формы стенозов можно выделить исследования течений жидкости в каналах с асимметричными сужениями. Например, в [7] представлено численное исследование течения ньютоновской жидкости через асимметричное сужение и показано его влияние на характеристики потока.

Ползущие течения, реализуемые при малых числах Рейнольдса, хорошо описывают поведение различного рода смазок в технических установках, которые характеризуются наличием каналов с участками сужения/расширения [8]. В работе [9] исследуется течение в трубе, конструкция которой предполагает наличие жестких перегородок, моделирующих сужения. Особенность этой работы заключается в использовании трех различных реологических моделей жидкой среды.

Пульсирующие течения ньютоновской и неньютоновской жидкостей в осесимметричных трубках с участком сужения/расширения рассматриваются в работах [10, 11]. В [11] приводятся результаты численного исследования течения жидкости, реологические свойства которой описываются моделью Балкли – Гершеля. Использование данной модели позволяет рассмотреть следующие частные случаи: модели Ньютона, Шведова – Бингама и Оствальда – де Ваале. Течения данных реологических сред реализуются в трубках, площадь перекрытия которых составляет 25 и 75 % как в стационарном, так и в пульсирующем режиме. Случай с пульсирующим течением в канале с двумя смежными сужениями рассматривается в [12]. Особенности физиологического пульсирующего течения крови в артериях со стенозом, выявленные в ходе численного моделирования, отражены в [13]. Исследование динамических и кинематических характеристик течения неньютоновской жидкости при наличии неровности поверхности приведено в работе [14]. Показано, что падение давления в артерии со стенозом практически не зависит от неровностей на поверхности артерии при малых числах Рейнольдса. В случае больших чисел Рейнольдса влияние поверхности артерии становится существенным.

Целью данной работы является исследование кинематических характеристик течения степенной жидкости в цилиндрической трубе с участком сужения/расширения в зависимости от числа Рейнольдса, степени нелинейности и геометрических параметров области течения.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся ламинарное течение несжимаемой степенной жидкости в осесимметричном канале с локальным сужением/расширением заданной формы. Геометрия канала схематично представлена на рис. 1.

Математическая постановка задачи формулируется в переменных функция тока – вихрь, которая в безразмерном виде в цилиндрической системе координат записывается в виде [16]

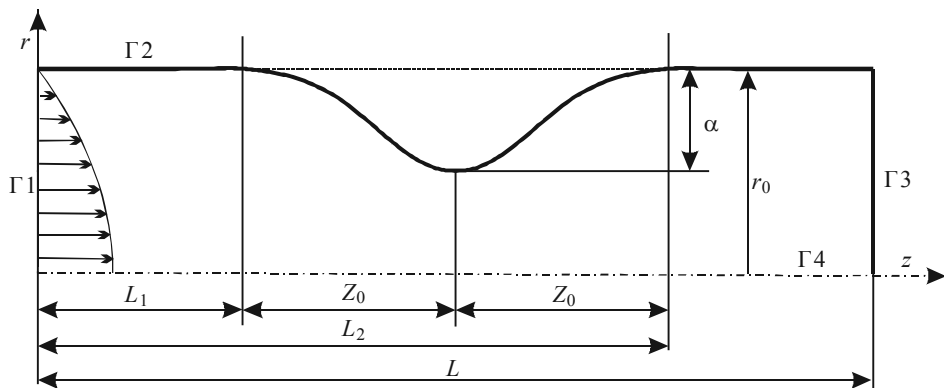


Рис. 1. Область течения

Fig. 1. Flow region

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial z} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \frac{B}{\text{Re}} \left(\nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{S}{\text{Re}}; \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega, \quad (2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$S = 2 \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\omega}{r} \frac{\partial B}{\partial r},$$

где безразмерные компоненты скорости и вихрь определяются выражениями

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Система уравнений (1), (2) замыкается реологическим уравнением Освальда – де Ваале [17], согласно которому выражение для безразмерной эффективной вязкости имеет вид

$$B = A^{m-1}.$$

Здесь u , v – аксиальная и радиальная компоненты скорости соответственно,

$\text{Re} = \frac{\rho U^{2-m} r_0^m}{k}$ – число Рейнольдса, ρ – плотность, U – среднерасходная скорость,

$A = (2e_{ij}e_{ji})^{1/2}$, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций, k – консистенция жидкой среды, m – степень нелинейности жидкости. В качестве масштабов обезразмеривания приняты следующие величины: длины – радиус трубы r_0 ; скорости – среднерасходная скорость U .

В рассматриваемой задаче степенная жидкость подается в канал через входное сечение Γ_1 с постоянным расходом, профиль скорости при этом соответствует установившемуся течению в трубе. На границе Γ_2 выполняются условия прилипания, на оси симметрии Γ_4 задаются условия симметрии, на выходной границе Γ_3 используются мягкие граничные условия. Таким образом, граничные условия в переменных функция тока – вихрь имеют вид [16]

$$(\Gamma_1): \psi = \int_0^r u r dr, \quad \omega = -\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$(\Gamma_2): \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2},$$

$$(\Gamma_3): \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

$$(\Gamma_4): \psi = 0, \quad \omega = 0,$$

где n – нормаль к границе Γ_2 , $u = [(3m+1)/(m+1)](1-r^{1/m+1})$.

Граница Γ_2 описывается функцией

$$f(z) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi(z-L_1)}{Z_0} \right), & z \in [L_1; L_2], \\ 1, & z \in [0; L_1] \cup (L_2; L]. \end{cases}$$

Величины L_1 и L_2 задаются из условия достаточного удаления криволинейного участка от границ Γ_1 и Γ_3 с целью исключения его влияния на характер течения в окрестности входной и выходной границ. Таким образом, решение задачи определяется числом Рейнольдса (Re), степенью нелинейности жидкости (m) и геометрическими параметрами (α, Z_0).

Метод решения

Численное решение задачи осуществляется конечно-разностным методом с использованием метода установления, в результате применения которого стационарная задача преобразуется в нестационарную и процесс сводится к пошаговому приближению решения нестационарной задачи к решению исходной стационарной задачи [18]. При этом в уравнения (1), (2) добавляются производные по времени искомых функций ψ, ω , расчет по времени продолжается до обнуления введенных производных. Физическая область течения с криволинейной границей $f(z)$ преобразуется в прямоугольную введением новых координат $\xi = z, \eta = r/f(z)$.

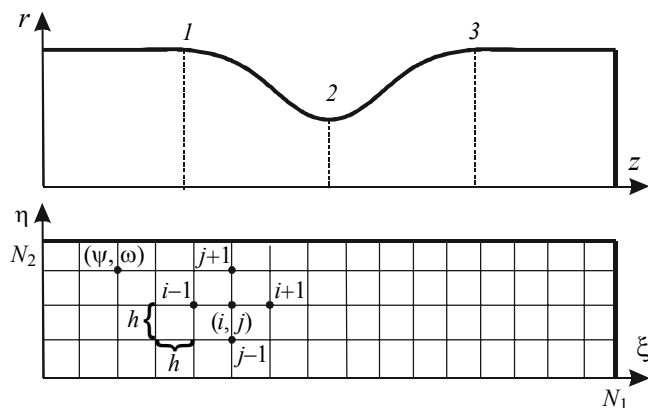


Рис. 2. Преобразование геометрии области течения
Fig. 2. Transformation of the flow region geometry

В координатах ξ, η уравнения (1), (2) с добавленными производными по времени переписуются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial \xi} - g \frac{\partial(u\omega)}{\partial \eta} + \frac{1}{f} \frac{\partial(v\omega)}{\partial \eta} = \\ & = \frac{B}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + H \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + G \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{f^2 \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\omega}{f^2 \eta^2} \right) + \frac{S}{\text{Re}}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \left(H - \frac{1}{f^2 \eta} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = -f\eta \omega, \quad (4)$$

где

$$G = \frac{1}{f^2} + \left(\eta \frac{f'}{f} \right)^2, \quad H = \eta \left(2 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} \right), \quad g = \eta \frac{f'}{f},$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

$$S_1 = 2 \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{g}{f\eta} \frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{g}{f} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{1}{f} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + g \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$S_2 = 2 \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} - g \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - g \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + 2 \frac{1}{f^2} \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta},$$

$$S_3 = \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + H \frac{\partial B}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta} + \left(g^2 - \frac{1}{f^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - g \frac{\partial v}{\partial \eta} \right),$$

$$S_4 = \frac{\omega}{f^2 \eta} \frac{\partial B}{\partial \eta}.$$

В области решения строится равномерная в каждом направлении квадратная разностная сетка $\Omega_h = \{\xi_i = ih, \eta_j = jh, i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2\}$, где h – шаг сетки. Разностные аналоги уравнений (3), (4), записываются с использованием явной разностной схемы, производные по пространственным координатам аппроксимируются со вторым порядком точности. Для аппроксимации конвективных слагаемых в уравнении переноса вихря используется схема против потока. В качестве критерия сходимости итерационного процесса используются условия

$$\begin{aligned} \max_{i,j} \left| 1 - \frac{\omega_{i,j}^t}{\omega_{i,j}^{t+1}} \right| &< \varepsilon, \\ \max_{i,j} \left| 1 - \frac{\Psi_{i,j}^t}{\Psi_{i,j}^{t+1}} \right| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

где ε – заданный итерационный параметр, t – номер шага по фиктивному времени. Значение параметра ε принималось равным 10^{-5} .

Для определения вихря на стенке используется выражение

$$\omega = -\frac{1}{f\eta} G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2},$$

разностное представление которого осуществляется согласно формуле Тома [16].

Для проверки аппроксимационной сходимости алгоритма выполнена серия расчетов на последовательности сеток. На рис. 3 показаны профили скорости в сечении 2 (рис. 2) при $\alpha = 0.5$, $Z_0 = 1$ для $m = 1$, $Re = 1$. Для заданного набора параметров в таблице приведены результаты расчетов аксиальной скорости на оси симметрии в выходном сечении трубы в зависимости от шага сетки. Анализ результатов демонстрирует аппроксимационную сходимость алгоритма. Все дальнейшие расчеты выполняются на сетке с шагом $h = 0.025$.

h	$u_{\max}$
0.1	1.992
0.05	1.998
0.025	2.000
0.0125	2.000

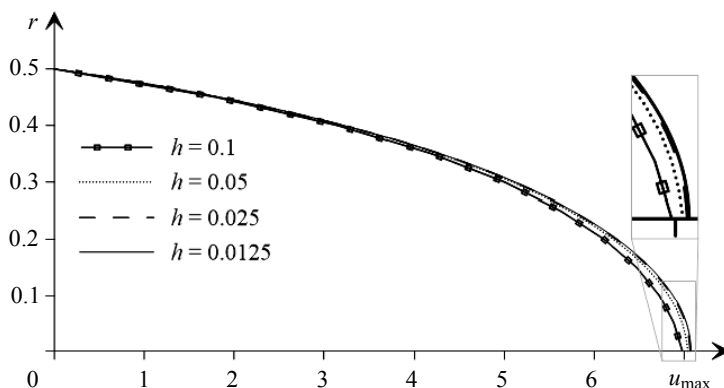


Рис. 3. Распределение аксиальной скорости в сечении 2 ($Re = 1$, $m = 1$)

Fig. 3. Axial velocity distribution in cross section 2 ($Re = 1$, $m = 1$)

Результаты

Результаты выполненных расчетов согласуются с существующими данными по структуре течения как для ньютоновской, так и для степенной жидкости. Наблюдаемая картина стационарного течения степенной жидкости состоит из зон одномерного течения в окрестности входной и выходной границ и области двумерного течения в области сужения/расширения с образованием циркуляционной зоны. Геометрический параметр Z_0 был принят равным единице для всех расчетов. На рис. 4 представлены характерные структуры потоков псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. Наблюдается, что с ростом степени нелинейности размер циркуляционной зоны за сужением уменьшается.

Распределения линий тока в зависимости от глубины перекрытия трубы демонстрируются на рис. 5. При перекрытии трубы на треть линии тока огибают сужение, при этом отсутствует циркуляционная зона; увеличение значения перекрытия ($\alpha = 0.5$) приводит к появлению циркуляционной зоны; при $\alpha = 0.667$ размер зоны становится значительно больше.

Влияние Re на структуру течения показано на рис. 6. Рост числа Рейнольдса приводит к усилению преобладания инерционных сил над вязкими, что в свою очередь является причиной увеличения размера циркуляционной зоны за сужением.

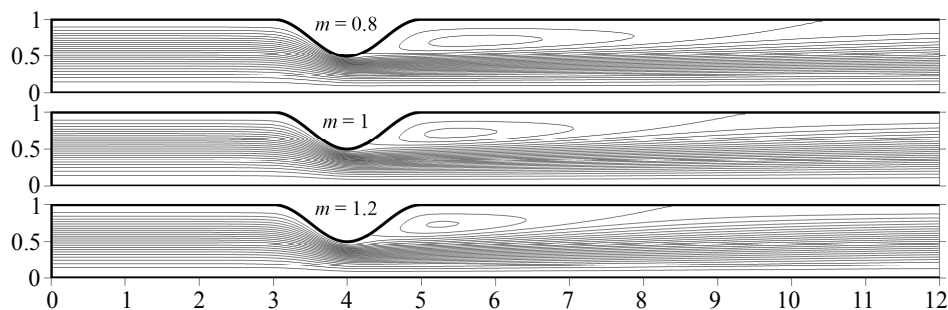


Рис. 4. Распределения линий тока при различных значениях реологического параметра ($Re = 50$, $\alpha = 0.5$)

Fig. 4. Streamline distributions at various rheological parameters ($Re = 50$, $\alpha = 0.5$)

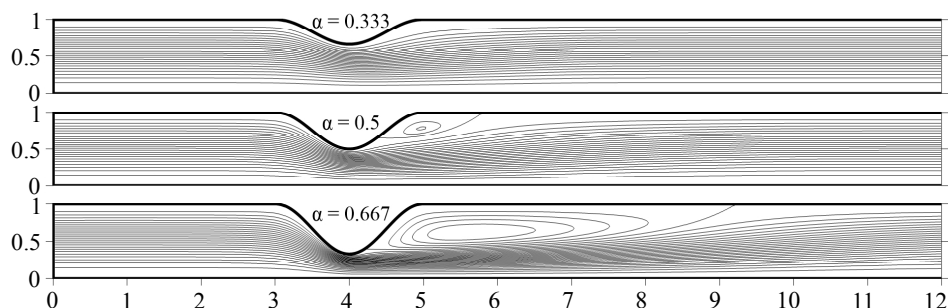


Рис. 5. Распределения линий тока при различных значениях геометрического параметра ($Re = 10$, $m = 0.8$)

Fig. 5. Streamline distributions at various geometric parameters ($Re = 10$, $m = 0.8$)

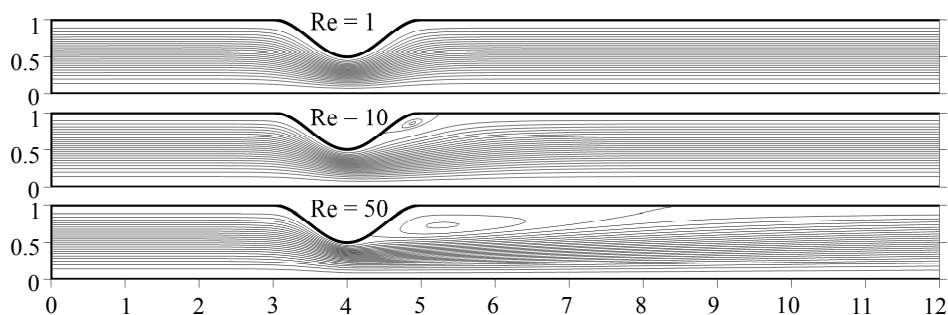


Рис. 6. Распределения линий тока при различных значениях Re ($\alpha = 0.5$, $m = 1.2$)

Fig. 6. Streamline distributions at various Re ($\alpha = 0.5$, $m = 1.2$)

На рис. 7 представлены восстановленные распределения аксиальной скорости, характерные для различных значений параметра нелинейности. Наблюдается, что при заданных параметрах с уменьшением m зона двумерного течения увеличивается. Таким образом, при уменьшении значения параметра нелинейности для достижения установившегося поля скорости требуется увеличивать расстояние от участка сужения/расширения до выходной границы.

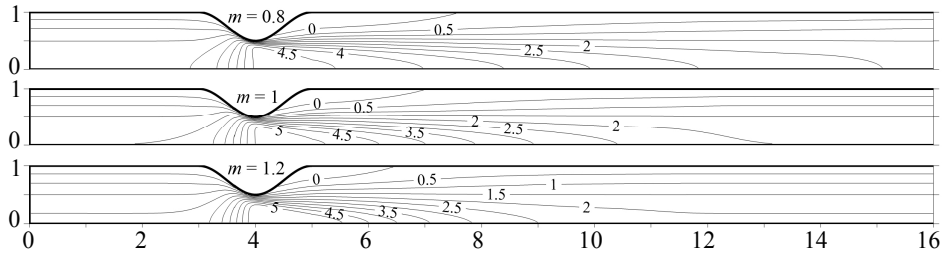


Рис. 7. Распределения изолиний аксиальной скорости при различных значениях m ($\alpha = 0.5$, $Re = 25$)
Fig. 7. Velocity contours at various m ($\alpha = 0.5$, $Re = 25$)

Рисунок 8, *a*, *b* иллюстрирует распределения эффективной вязкости в области течения. Для псевдопластичной жидкости максимальное значение вязкости наблюдается в зоне одномерного течения в окрестности линии симметрии. В случае дилатантной жидкости в данной области вязкость принимает минимальные значения.

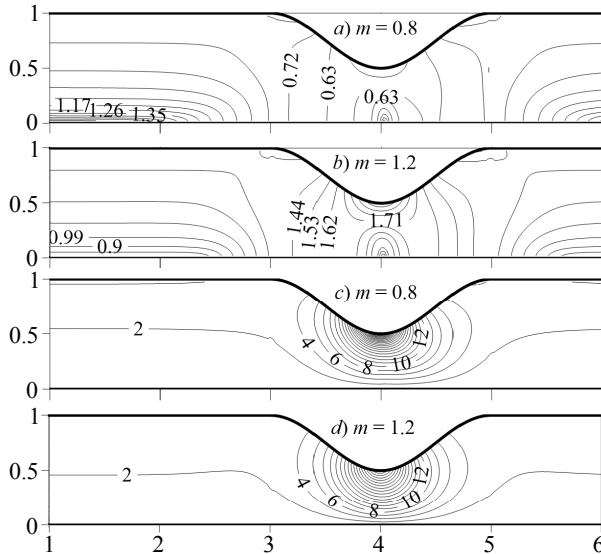


Рис. 8. Изолинии эффективной вязкости (*a*, *b*);
 изолинии вихря (*c*, *d*) ($Re = 0.5$, $\alpha = 0.5$)
Fig. 8. (*a*), (*b*) apparent viscosity contours
 and (*c*), (*d*) vortex contours ($Re = 0.5$, $\alpha = 0.5$)

На рис. 9 приведены распределения максимального значения вихря на твердой стенке в зависимости от числа Рейнольдса, полученные в настоящем исследовании и в работах других авторов. Для верификации расчетов имеющиеся данные приведены в соответствие с результатами настоящей работы. Рисунок 9 демонстрирует качественное совпадение зависимостей. Для количественного сравнения выбрана работа [5], в которой реализуется аналогичное преобразование координат. Наибольшее расхождение в результатах расчетов наблюдается при $Re = 50$ и составляет 4.1 %.

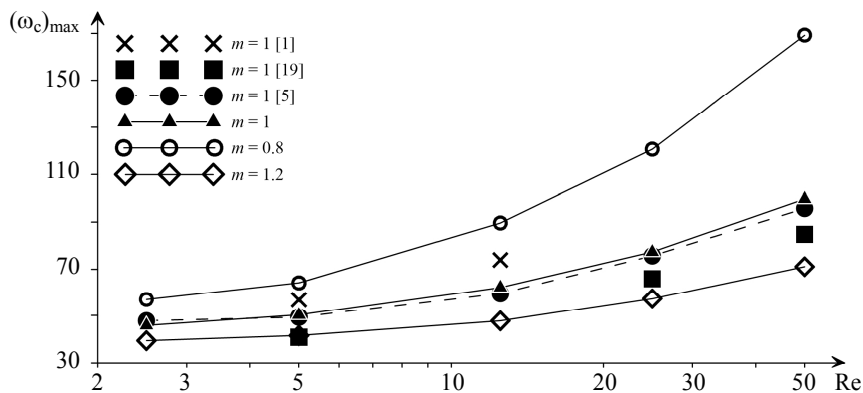
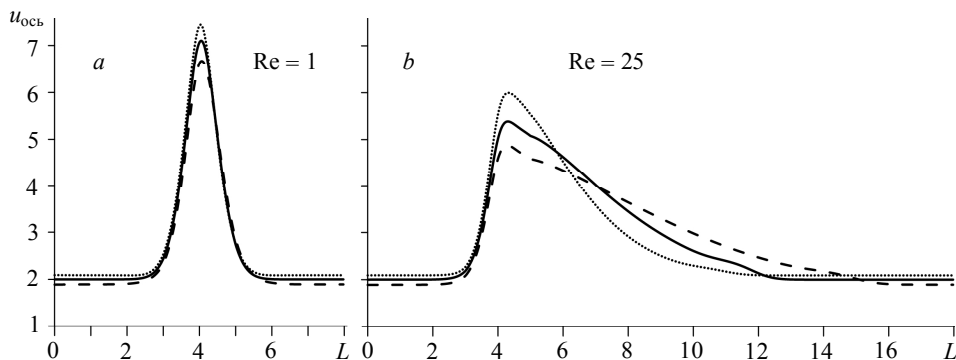


Рис. 9. Распределение максимального значения вихря на стенке в зависимости от Re

Fig. 9. Maximum vorticity on the wall as a function of Re

Рисунок 10 демонстрирует распределения аксиальной скорости на оси симметрии для трех значений показателя нелинейности. Расчеты показали, что при $Re = 1$ для установившегося течения жидкости в рассматриваемой трубе с глубиной перекрытия 0.5 распределение аксиальной скорости на линии симметрии симметрично относительно участка сужения/расширения. Варьирование показателя нелинейности не способствует качественному изменению характера распределения. При этом увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению максимального значения скорости и нарушению симметрии относительно участка сужения/расширения.

Рис. 10. Распределения аксиальной скорости на оси симметрии ($\alpha = 0.5$).Обозначения: --- $m = 0.8$, — $m = 1$, $m = 1.2$ Fig. 10. Axial velocity distributions along the symmetry axis ($\alpha = 0.5$).Notations: --- $m = 0.8$, — $m = 1$, and $m = 1.2$

На рис. 11 (a) приведены распределения значений касательных напряжений ($\tau = B \omega$) на твердой стенке для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. Во всех трех случаях максимальное значение напряжения наблюдается в непосредственной близости от сужения, при этом для $Re = 1$ рост показателя нелинейности приводит к увеличению максимального значения напряжения на стенке. С ростом числа Рейнольдса данная тенденция сохраняется (рис. 11, b, c).

На рис. 11, с наряду с результатами настоящей работы приведена аналогичная зависимость из работы [3]. Сравнение результатов демонстрирует согласование данных.

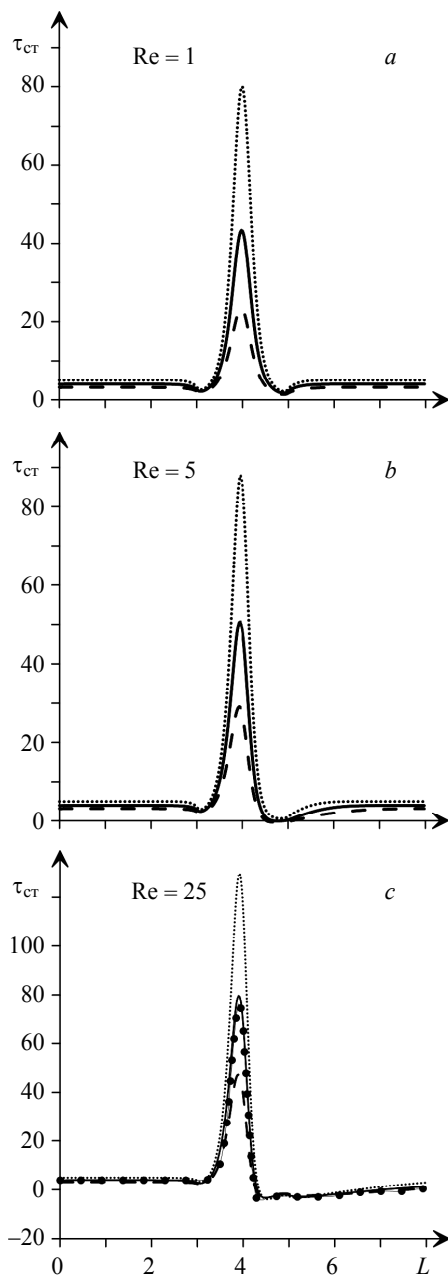


Рис. 11. Распределения напряжений на стенке ($\alpha = 0.5$).
 Обозначения: --- $m = 0.8$, — $m = 1$, $m = 1.2$, ●●● $m = 1$ [3]
Fig. 11. Shear stress distributions on the wall ($\alpha = 0.5$).
 Notations: --- $m = 0.8$, — $m = 1$, $m = 1.2$, and ●●● $m = 1$ [3]

На рис. 12 показаны зависимости касательных напряжений на стенке от геометрических параметров участка сужения/расширения трубы для трех жидкостей.

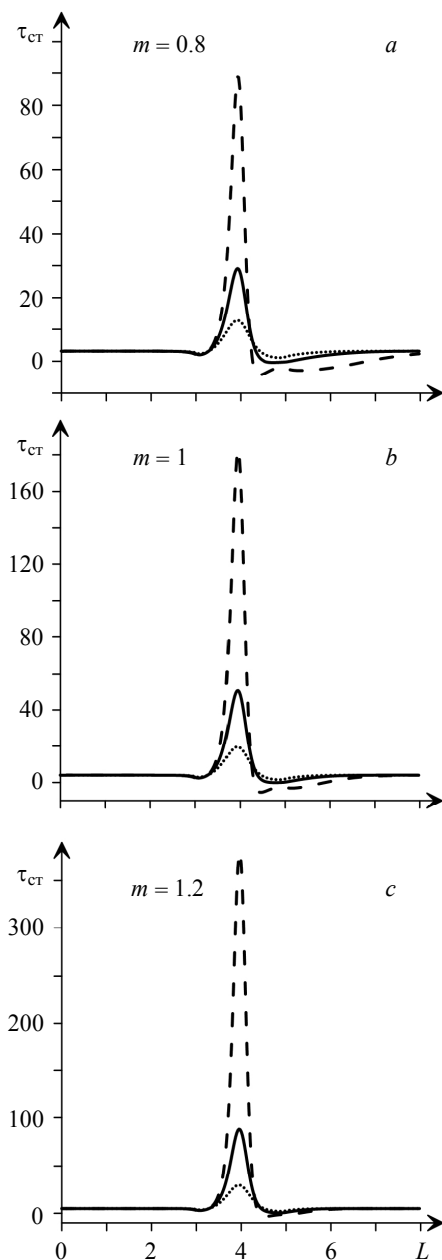


Рис. 12. Распределения напряжений на стенке ($Re = 5$).
Обозначения: $\alpha = 0.333$, — $\alpha = 0.5$, --- $\alpha = 0.667$

Fig. 12. Shear stress distributions on the wall ($Re = 5$).
Notations: $\alpha = 0.333$, — $\alpha = 0.5$, and --- $\alpha = 0.667$

Увеличение значения глубины перекрытия канала приводит к росту максимального значения вихря на стенке. Данная тенденция наблюдается для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей.

Заключение

В результате выполненной работы реализовано численное решение задачи о течении неньютоновской жидкости в трубе с участком переменного радиуса. Получены картины стационарного течения жидкости, которые характеризуются наличием зоны двумерного течения в окрестности сужения и зон одномерного течения вне ее. Исследованы три типа жидких сред, продемонстрировано влияние значений числа Рейнольдса и глубины перекрытия канала на структуру потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee J.S., Fung Y.C. Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers // Journal of Applied Mechanics. 1970. V. 37. Iss. 1. P. 9–16.
2. Young D.F., Tsai F.Y. Flow characteristics in model of arterial stenoses-I. Steady flow // Journal of Biomechanics. 1973. V. 6. Iss. 4. P. 395–402.
3. Lee T.S. Numerical studies of fluid flow through tubes with double constrictions // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1990. V. 11. Iss. 8. P. 1113–1126.
4. Lee T.S. Steady laminar fluid flow through variable constrictions in vascular tubes // Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME. 1994. V. 116. Iss. 1. P. 66–71.
5. Lee T.S., Liao W., Low H.T. Numerical simulation of turbulent flow through series stenosis // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2003. V. 42. Iss. 7. P. 717–740.
6. Banerjee M.K., Nag D., Ganguly R., Datta A. Hemodynamics in stenosed arteries effects of stenosis shapes // International Journal of Computational Methods. 2010. V. 7. Iss. 3. P. 397–419.
7. Mandal D.K., Manna N.K., Chakrabarti S. Influence of different bell-shaped stenosis on the progression of the disease atherosclerosis // Journal of Mechanical Science and Technology. 2011. V. 25. Iss. 8. P. 1933–1947.
8. Sisavath S., Jing X., Zimmerman R.W. Creeping flow through a pipe of varying radius // Physics of Fluids. 2001. V. 13. Iss. 10. P. 2762–2772.
9. Nag D., Datta A. Steady laminar flow of blood through successive restrictions in circular conduits of small diameter // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2008. V. 222. Iss. 8. P. 1557–1573.
10. Tu C., Deville M., Dheur L., Vanderschuren L. Finite element simulation of pulsatile flow through arterial stenosis // Journal of Biomechanics. 1992. V. 25. Iss. 10. P. 1141–1152.
11. Tu C., Deville M. Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis // Journal of Biomechanics. 1996. V. 29. Iss. 7. P. 899–908.
12. Mukhopadhyay S., Mandal M.S., Mukhopadhyay S. Effects of variable viscosity on pulsatile flow of blood in a tapered stenotic flexible artery // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2019. V. 42. Iss. 2. P. 488–504.
13. Zendehebudi G.R., Moayeri M.S. Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries // Journal of Biomechanics. 1999. V. 32. Iss. 9. P. 959–965.
14. Manimaran R. CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in arterial stenoses with surface irregularities // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2011. V. 73. P. 957–962.
15. Борзенко Е.И., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 36–48.
16. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
17. Ostwald W. Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität // Kolloid Zeitschrift. 1929. V. 47. Iss. 2. P. 176–187.

18. Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.
19. Deshpande M.D., Giddens D.P., Mabon R.F. Steady laminar flow through modelled vascular stenosis // *Journal of Biomechanics*. 1976. V. 9. Iss. 4. P. 165–174.

Статья поступила 21.10.2019 г.

Ryltsev I.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2020). KINEMATICS OF A POWER-LAW FLUID FLOW IN A PIPE WITH A VARYING CROSS SECTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 125–138

DOI 10.17223/19988621/63/11

Keywords: pipe of varying cross section, contraction/expansion, power-law fluid, Ostwald-de Waele model, coordinate transformation, finite-difference method.

Fluid transportation through channels with varying cross-section is widely spread in a number of technical applications. This circumstance determines constant interest of researchers to study such flows.

This paper presents an investigation of the steady-state axisymmetric flow of an incompressible power-law fluid in a pipe of varying cross section with contraction followed by expansion. The mathematical formulation of the problem is developed using the equations in a cylindrical coordinate system in terms of vortex-stream function variables. Rheological behavior of the considered medium is described by the Ostwald – de Waele power-law model. To implement the numerical algorithm, a coordinate transformation is carried out. The problem is solved using the finite-difference method. An asymptotic time solution of the unsteady flow equation is applied to obtain steady-state fields of the vortex and stream function in the computational domain. To verify the developed numerical algorithm, an approximation convergence is examined on the sequence of square grids.

The calculations of the flow of three rheological media (Newtonian, pseudoplastic, and dilatant) are carried out. A parametric study is performed to reveal the effect of the Reynolds number and power-law index on the flow structure. The shear stress distributions on the wall are demonstrated at various geometric parameters.

Financial support. The research is implemented at the expanses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021).

Ivan A. RYLITSEV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: Ryltsev_I@ftf.tsu.ru

Kira E. RYLITSEVA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: kiraworkst@gmail.com

Gennady R. SHRAGER (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Lee J.S., Fung Y.C. (1970) Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers. *Journal of Applied Mechanics*. 37(1). pp. 9–16. DOI: 10.1115/1.3408496.
2. Young D.F., Tsai F.Y. (1973) Flow characteristics in model of arterial stenoses-I. Steady flow. *Journal of Biomechanics*. 6(4). pp. 395–402. DOI: 10.1016/0021-9290(73)90099-7.
3. Lee T.S. (1990) Numerical studies of fluid flow through tubes with double constrictions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 11(8). pp. 1113–1126. DOI: 10.1002/flid.1650110805.

4. Lee T.S. (1994) Steady laminar fluid flow through variable constrictions in vascular tubes. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*. 116(1). pp. 66–71. DOI: 10.1115/1.2910244.
5. Lee T.S., Liao W., Low H.T. (2003) Numerical simulation of turbulent flow through series stenoses. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 42(7). pp. 717–740. DOI: 10.1002/flid.550.
6. Banerjee M.K., Nag D., Ganguly R., Datta A. (2010) Hemodynamics in stenosed arteries effects of stenosis shapes. *International Journal of Computational Methods*. 7(3). pp. 397–419. DOI: 10.1142/S021987621000226X.
7. Mandal D.K., Manna N.K., Chakrabarti S. (2011) Influence of different bell-shaped stenosis on the progression of the disease atherosclerosis. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 25(8). pp. 1933–1947. DOI: 10.1007/s12206-011-0621-7.
8. Sisavath S., Jing X., Zimmerman R.W. (2001) Creeping flow through a pipe of varying radius. *Physics of Fluids*. 13(10). pp. 2762–2772. DOI: 10.1063/1.1399289.
9. Nag D., Datta A. (2008) Steady laminar flow of blood through successive restrictions in circular conduits of small diameter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 222(8). pp. 1557–1573. DOI: 10.1243/09544062JMES829.
10. Tu C., Deville M., Dheur L., Vanderschuren L. (1992) Finite element simulation of pulsatile flow through arterial stenosis. *Journal of Biomechanics*. 25(10). pp. 1141–1152. DOI: 10.1016/0021-9290(92)90070-H.
11. Tu C., Deville M. (1996) Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis. *Journal of Biomechanics*. 29(7). pp. 899–908. DOI: 10.1016/0021-9290(95)00151-4.
12. Mukhopadhyay S., Mandal M.S., Mukhopadhyay S. (2019) Effects of variable viscosity on pulsatile flow of blood in a tapered stenotic flexible artery. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 42(2). pp. 488–504. DOI: 10.1002/mma.5355.
13. Zendehebudi G.R., Moayeri M.S. (1999) Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries. *Journal of Biomechanics*. 32(9). pp. 959–965. DOI: 10.1016/s0021-9290(99)00053-6.
14. Manimaran R. (2011) CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in arterial stenoses with surface irregularities. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 73. pp. 957–962.
15. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2019) Chislennoe issledovanie kharakteristik techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Numerical investigation of non-Newtonian fluid flow through a pipe sudden contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 56–70. DOI: 10.17223/19988621/58/5.
16. Roache P.J. (1982) Computational Fluid Dynamics. *Hermosa: Albuquerque*. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90297-9.
17. Ostwald W. (1929) Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität. *Kolloid Zeitschrift*. 47(2). pp. 176–187. DOI: 10.1007/BF01496959.
18. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.
19. Deshpande M.D., Giddens D.P., Mabon R.F. (1976) Steady laminar flow through modelled vascular stenoses. *Journal of Biomechanics*. 9(4). pp. 165–174. DOI: 10.1016/0021-9290(76)90001-4.

Received: October 21, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛИГАСАНОВА Кристина Лачиновна – техник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: aligasanova@niipmm.tsu.ru

АНИСИМОВА Мария Александровна – младший научный сотрудник ЛНМММС ИФПМ СО РАН, ассистент отделения материаловедения инженерной школы новых производственных технологий Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: anisimova_mawa@mail.ru

БАКУШЕВ Сергей Васильевич – доктор технических наук, профессор кафедры механики Пензенского государственного университета архитектуры и строительства, г. Пенза, Россия. E-mail: bakuchsv@mail.ru

БОЗИЕВ Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационной безопасности Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, старший научный сотрудник Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Россия. E-mail: boziev@yandex.ru

ГЛАЗУНОВ Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

ЕРЕМИН Иван Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

ИВАНОВ Александр Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института прикладных математических исследований федерального исследовательского центра «Карельский научный центр РАН», г. Петрозаводск, Республика Карелия, Россия. E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

КАГЕНОВ Ануар Магжанович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

КНЯЗЕВА Анна Георгиевна – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ЛНМММС ИФПМ СО РАН, профессор отделения материаловедения инженерной школы новых производственных технологий Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: anna-knyazeva@mail.ru

КОЗЛОВ Виктор Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

КОМИЛОВА Нигора Джуроевна – ассистент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа Ферганского государственного университета, г. Фергана, Узбекистан. E-mail: nigora.komilova@bk.ru

КОСТЮШИН Кирилл Владимирович – младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

КОТОНОВОВ Василий Александрович – техник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kot@niipmm.tsu.ru

МАРКИН Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: markin-nikram@yandex.ru

НГУЕН Тхи Куинь Чанг – аспирант кафедры алгебры математического факультета Московского педагогического государственного университета. E-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

ОРЛОВ Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

ОРОЗОВ Максатбек Омурбекович – аспирант кафедры информатики Ошского государственного университета, г. Ош, Кыргызстан. E-mail: gnezdo1983@mail.ru

ПЕЙГИН Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, директор ООО «Оптименга-777», г. Москва, Россия. E-mail: mishpahat_peiguine@yahoo.com

РЫЛЬЦЕВ Иван Александрович – аспирант кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: stalak133@mail.ru

РЫЛЬЦЕВА Кира Евгеньевна – аспирант кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kiraworkst@gmail.com

ТУРСУНОВ Дилмурат Абдиллажанович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики Ошского государственного университета, г. Ош, Кыргызстан. E-mail: tdaosh@gmail.com

ШРАГЕР Геннадий Рафаилович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: shg@ftf.tsu.ru

ЭРГАШЕВ Тухтасин Гуламжанович – кандидат физико-математических наук, докторант Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.

Подписано к печати 14.02.2020. Выпуск в свет 27.02.2020.

Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».

Усл. п. л. 11.29. Уч.-изд. л. 12.64. Тираж 250 экз. Заказ № 2. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4239.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru