

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2015

№ 3(35)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), В.Ю. Хайруллина (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конец, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 17.06.2015.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 8,71. Уч.-изд. л. 9,75. Тираж 300 экз. Заказ № 4.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 975.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Азаров Д.Н. Аппроксимационные свойства абелевых групп	5
Зюзьков В.М. Достаточные условия существования неразрешимых косвенно рефлексивных предложений	12
Рахмелевич И.В. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями	18
Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения возмущенного эллиптического уравнения, когда предельное уравнение имеет особые точки	26

МЕХАНИКА

Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Минькова Н.П., Бабушкин Н.А. О влиянии металлического экрана на подводное зажигание двухосновного твердого топлива спиралью накаливания, нагреваемой конденсатором	35
Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Рогаев К.С. Исследование газодинамических особенностей ствольного старта модели с импульсным реактивным двигателем	45
Гамзаев Х.М. О численном моделировании движения жидкости в двухпластовой водоносной системе	52
Darya zadeh S., Lvov G.I. The calculation of effective elastic constants in a composite with 3D orthogonal nonwoven fibers	60
Попов И.П. Групповая скорость волнового пакета, образованного двумя свободными идентичными частицами с разными нерелятивистскими скоростями	69
Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А. О механизмах роста гидратной оболочки на поверхности всплывающих газовых пузырьков	73
Яковлев И.А., Скрипняк В.А. Математическое моделирование сложных технических объектов с нелинейными свойствами на примере исследования надежности конструкции реактора фильтрационного горения газов	87
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	107

CONTENTS

MATHEMATICS

Azarov D.N. Residual properties of abelian groups	5
Zyuz'kov V.M. Sufficient conditions for the existence of undecidable indirectly reflective sentences.....	12
Rakhmelevich I.V. On some new solutions of the multi-dimensional first order partial differential equation with power-law non-linearities	18
Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansion of the solution of a perturbed elliptic equation when the limit equation has singular points	26

MECHANICS

Barsukov V.D., Goldaev S.V., Minkova N.P., Babushkin N.A. betal shield influence on underwater ignition of a dibasic solid propellant with a spiral heated by a capacitor.....	35
Burkin V.V., Diachkovsky A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S. Investigation of gas-dynamic features of a moving model with a pulse jet engine (CPJE) inside a barrel.....	45
Gamzaev Kh.M. On numerical simulation of the fluid flow in a dual-completion water-bearing system	52
Darya zadeh S., Lvov G.I. The calculation of effective elastic constants in a composite with 3D orthogonal nonwoven fibers	60
Popov I.P. The group velocity of a wave packet formed by two free identical particles with different non-relativistic velocities.....	69
Shagapov V. Sh., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. On mechanisms of the hydrate shell growth on the surface of supernatant gas bubbles	73
Yakovlev I. A., Skripnyak V.A. Mathematical modeling of complex technical objects with nonlinear properties illustrated by the investigation of porous media reactor reliability.....	87
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	107

МАТЕМАТИКА

УДК 512.543

DOI 10.17223/19988621/35/1

Д.Н. Азаров

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Для произвольной абелевой группы получено необходимое и достаточное условие почти аппроксимирруемости конечными π -группами. Получена также характеристика мощных абелевых групп.

Ключевые слова: абелева группа, финитно аппроксимируемая группа.

Введение

Пусть K – некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса K (или, короче, K -аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса K , при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом K , если она содержит K -аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если F обозначает класс всех конечных групп, то понятие F -аппроксимирруемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимирруемости. Наряду с финитной аппроксимирруемостью изучается также более тонкое свойство F_π -аппроксимирруемости, где π – некоторое множество простых чисел, F_π – класс всех конечных π -групп. Напомним, что конечная группа называется конечной π -группой, если ее порядок является π -числом, т.е. если все его простые делители принадлежат множеству π . Если π состоит из всех простых чисел, то понятие F_π -аппроксимирруемости совпадает с понятием финитной аппроксимирруемости. Очевидно, что группа G финитно аппроксимируема (F_π -аппроксимируема) тогда и только тогда, когда пересечение всех подгрупп конечного индекса (всех нормальных подгрупп конечного π -индекса) группы G совпадает с единичной подгруппой. Очевидно также, что произвольная F_π -аппроксимируемая группа является почти F_π -аппроксимируемой. С другой стороны, любая почти F -аппроксимируемая (и, в частности, любая почти F_π -аппроксимируемая) группа является F -аппроксимируемой. Действительно, если H – подгруппа конечного индекса группы G , то любая подгруппа конечного индекса группы H имеет конечный индекс в G , и поэтому из финитной аппроксимирруемости группы H следует финитная аппроксимирруемость группы G .

Таким образом, свойство почти F_π -аппроксимирруемости является промежуточным между финитной аппроксимирруемостью и F_π -аппроксимирруемостью. Особый интерес представляет случай, когда множество π состоит из одного простого числа p . В этом случае класс F_π совпадает с классом F_p всех конечных p -групп.

Понятие финитно аппроксимируемой группы было введено еще А. И. Мальцевым в [1]. В этой работе доказана финитная аппроксимируемость конечно порожденных линейных групп. Частным случаем этой теоремы является результат К. Гирша [2] о финитной аппроксимируемости произвольной полициклической группы. В дальнейшем выяснилось, что полициклические группы почти F_p -аппроксимируемы для каждого простого числа p [3]. Свойством F_p -аппроксимируемости полициклические группы, вообще говоря, не обладают, и соответствующий критерий получить до сих пор не удастся. Еще сложнее дело обстоит с изучением финитной аппроксимируемости и других аппроксимационных свойств разрешимых групп. Некоторые результаты о разрешимых группах конечного ранга, полученные в этом направлении, упомянуты ниже. Для абелевых групп вопросы F_π -аппроксимируемости и почти F_π -аппроксимируемости полностью исследованы. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Пусть, как и выше, π – непустое множество простых чисел. В исследованиях F_π -аппроксимируемости абелевых групп и некоторых разрешимых групп особое значение имеет понятие π -полного элемента группы. Напомним, что элемент a группы G называется π -полным (или, в другой терминологии, π -радикабельным), если для любого целого положительного π -числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G . Если множество π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятие π -полного элемента совпадает с классическим понятием полного элемента. В теории абелевых групп вместо термина «полный элемент» используется также термин «делимый элемент». Если множество π состоит из одного простого числа p , то вместо термина « π -полный элемент» используют термин « p -полный элемент».

Связь финитной аппроксимируемости группы с полнотой ее элементов впервые была обнаружена еще А.И. Мальцевым в [4], где он заметил, что в произвольной финитно аппроксимируемой группе нет полных элементов отличных от 1 и что абелева группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет полных элементов отличных от 1. Это простое утверждение легко проверяется с помощью хорошо известной теоремы Прюфера о разложимости периодической абелевой группы с ограниченными порядками элементов в прямое произведение циклических. Более того, теорема Прюфера позволяет обобщить утверждение А.И. Мальцева на случай F_π -аппроксимируемости следующим образом [5].

Теорема 1. Пусть G – абелева группа. И пусть π – множество простых чисел. Группа G F_π -аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π -полных элементов отличных от 1.

Эта теорема является простым следствием следующего утверждения, доказанного ниже.

Лемма. Пусть G – абелева группа, π – множество простых чисел, $\omega_\pi(G)$ – множество всех π -полных элементов группы G , $\sigma_\pi(G)$ – пересечение всех подгрупп конечного π -индекса группы G . Тогда $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$.

Рассмотрим теперь вопрос о почти F_π -аппроксимируемости для абелевых групп. В случае, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, свойство почти F_π -аппроксимируемости совпадает со свойством почти F -аппроксимируемости, которое, как легко видеть, равносильно свойству F -аппроксимируемости, и поэтому в данном случае поставленный вопрос решается упомянутой выше тео-

ремой Мальцева. Теперь мы можем предполагать, что π не совпадает с множеством всех простых чисел. При этом предположении здесь доказан следующий критерий почти F_π -аппроксимируемости абелевых групп.

Теорема 2. Пусть G – абелева группа; π – множество простых чисел, не совпадающее с множеством Π всех простых чисел; π' – дополнение множества π в множестве Π . И пусть T – π' -компонента группы G , т. е. множество всех элементов группы G , порядки которых конечны и являются π' -числами. Тогда следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G почти F_π -аппроксимируема.
2. Подгруппа T конечна и фактор-группа G/T F_π -аппроксимируема.
3. Подгруппа T конечна и совпадает с множеством всех π -полных элементов группы G .

В качестве следствия из теоремы 2 приведем следующее утверждение, дающее полную информацию о месте F_π -аппроксимируемых групп среди почти F_π -аппроксимируемых абелевых групп.

Следствие. Пусть G – абелева группа. И пусть π , π' и T такие же, как в теореме 2. Группа G является F_π -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она почти F_π -аппроксимируема и $T = 1$. В частности, для абелевой группы без кручения свойства F_π -аппроксимируемости и почти F_π -аппроксимируемости равносильны между собой.

Необходимость в этом утверждении очевидна, так как в любой F_π -аппроксимируемой группе нет π' -кручения. Для проверки достаточности предположим, что абелева группа G почти F_π -аппроксимируема и что $T = 1$. Тогда по теореме 2 фактор-группа G/T F_π -аппроксимируема. Отсюда и из того, что $T = 1$, следует F_π -аппроксимируемость группы G .

Заметим, что теорема 1 не может быть распространена с абелевых групп на нильпотентные группы. Соответствующий пример был подсказан автору настоящей работы А.Л. Шмелькиным и представляет собой обобщенное прямое произведение бесконечного числа экземпляров группы кватернионов с объединенными центрами. Такая группа не является финитно аппроксимируемой, но при этом в ней нет полных элементов, кроме 1. С другой стороны, в работе [5] теорема 1 без каких-либо изменений переносится на произвольную нильпотентную группу конечного ранга, т. е. на нильпотентную группу, для которой существует целое положительное число r такое, что любая ее конечно порожденная подгруппа порождается не более чем r элементами.

На разрешимые группы конечного ранга теорема 1 уже не может быть распространена, но она оказывается справедливой для разрешимых групп конечного ранга в случае, когда множество π совпадает с множеством всех простых чисел. Критерий финитной аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга в терминах полноты элементов был получен еще Д. Робинсоном (см., например, [6, п. 5.3.2]). Для произвольного множества π простых чисел вопрос об F_π -аппроксимируемости разрешимой группы G конечного ранга не исследован даже в простейшем случае, когда группа G является полициклической, а множество π состоит из одного простого числа. Значительно лучше изучен вопрос о почти F_π -аппроксимируемости разрешимых групп конечного ранга (см., например, [7, 8]).

Среди финитно аппроксимируемых групп особое место занимают мощные группы, т. е. группы, все элементы которых являются мощными. Напомним, что элемент a бесконечного (конечного) порядка группы G называется мощным, если для каждого натурального числа n (для каждого натурального делителя n порядка элемента a) существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором порядок образа элемента a равен n .

Мощные абелевы группы могут быть легко описаны в терминах полноты элементов следующим образом.

Теорема 3. Абелева группа G является мощной тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема и не содержит p -полных элементов бесконечного порядка ни для какого простого числа p .

Выше отмечалось, что теорема 1 доказана в работе [5]. Здесь доказаны теоремы 2 и 3. В процессе их доказательства будет заново доказана и теорема 1.

Доказательство теорем

1. Доказательство леммы. Пусть G – абелева группа, π – непустое множество простых чисел, $\omega_\pi(G)$ – множество всех π -полных элементов группы G , $\sigma_\pi(G)$ – пересечение всех подгрупп конечного π -индекса группы G . Введенные здесь обозначения сохраняются всюду в этой статье. Докажем справедливость сформулированной выше леммы, т.е. покажем, что $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$.

В самом деле, пусть a – произвольный элемент из $\omega_\pi(G)$, т.е. a – π -полный элемент группы G . И пусть F – подгруппа группы G конечного π -индекса. Так как в конечной π -группе G/F , очевидно, нет π -полных элементов отличных от 1, а элемент aF наследует π -полноту от элемента a , то $aF = 1$, т.е. a принадлежит F . Следовательно, a принадлежит $\sigma_\pi(G)$. Таким образом, мы видим, что $\omega_\pi(G)$ содержится в $\sigma_\pi(G)$.

Теперь для доказательства равенства $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$ остается проверить, что любой элемент a группы G , не принадлежащий $\omega_\pi(G)$, не принадлежит и некоторой подгруппе конечного π -индекса группы G . Так как элемент a не является π -полным, то он не принадлежит некоторой степенной подгруппе $H = G^n$ группы G , где n – π -число. Так как G/H – абелева π -группа с ограниченными порядками элементов, то по хорошо известной теореме Прюфера (см., например, [9, с. 85]) группа G/H раскладывается в прямое произведение циклических π -подгрупп. Поэтому группа G/H F_π -аппроксимируема. Отсюда и из того, что aH – неединичный элемент группы G/H следует, что в группе G/H существует подгруппа F/H конечного π -индекса, не содержащая элемент aH . Тогда F – подгруппа конечного π -индекса группы G , не содержащая элемент a . Равенство $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$ доказано.

2. Доказательство теоремы 1. Так как F_π -аппроксимируемость группы G , очевидно, равносильна условию $\sigma_\pi(G) = 1$, то справедливость теоремы 1 вытекает из доказанной выше леммы, утверждающей, что $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$.

3. Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 будем далее предполагать, что π не совпадает с множеством Π всех простых чисел. Как и в формулировке теоремы 2 через π' будем обозначать дополнение множества π в множестве Π , а через T – π' -компоненту группы G . Покажем, что следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G почти F_π -аппроксимируема.
2. Подгруппа T конечна и фактор-группа G/T F_π -аппроксимируема.

3. Подгруппа T конечна и совпадает с множеством $\omega_\pi(G)$.

Предположим сначала, что выполняется условие 1, т. е. что G почти F_π -аппроксимируема. Обозначим через P какую-нибудь F_π -аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G . Так как в любой F_π -аппроксимируемой группе, очевидно, нет π' -кручения, то пересечение подгрупп T и P тривиально. Отсюда и из того, что индекс подгруппы P в группе G конечен, следует, что подгруппа T конечна. Очевидно, что если порядок элемента группы конечен и является π' -числом, то этот элемент является π -полным. Поэтому все элементы из T являются π -полными, т. е. T содержится в $\omega_\pi(G)$. Для доказательства обратного включения обозначим через L подгруппу группы G , содержащую P и такую, что индекс $l = [G : L]$ является π' -числом, а индекс $[L : P]$ является π -числом. Из последнего обстоятельства и F_π -аппроксимируемости группы P следует F_π -аппроксимируемость группы L . Пусть a – произвольный элемент из $\omega_\pi(G)$. Так как a – π -полный элемент группы G , и L – подгруппа группы G индекса l , то a^l – π -полный элемент группы L . Отсюда и из F_π -аппроксимируемости группы L по теореме 1 следует, что $a^l = 1$. Так как l – π' -число, то последнее равенство означает, что a принадлежит T . Тем самым доказано, что $\omega_\pi(G)$ содержится в T . Мы видим, таким образом, что подгруппа T конечна и совпадает с $\omega_\pi(G)$. Иными словами, выполняется условие 3.

Пусть теперь выполняется условие 3, т. е. подгруппа T конечна и совпадает с $\omega_\pi(G)$. Тогда в силу доказанного выше равенства $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$ (см. лемму) подгруппа T совпадает с пересечением всех подгрупп конечного π -индекса группы G . Отсюда следует, что в фактор-группе G/T пересечение всех подгрупп конечного π -индекса тривиально, т. е. что группа G/T F_π -аппроксимируема. Мы видим, что выполняется условие 2.

Предположим теперь, что выполняется условие 2, т. е. что подгруппа T конечна и фактор-группа G/T F_π -аппроксимируема. Обозначим через m порядок подгруппы T . Пусть элемент t принадлежит пересечению подгрупп T и G^m . Поскольку элемент t содержится в подгруппе T порядка m , то $t^m = 1$. Так как t принадлежит еще и подгруппе G^m , то $t = g^m$ для некоторого элемента g из G . Из последних двух равенств следует, что порядок элемента g делит m^2 . Отсюда и из того, что $m = |T|$ – π' -число, следует, что g содержится в T . Но тогда $g^m = 1$, т. е. $t = 1$. Таким образом, пересечение подгрупп T и G^m тривиально. По теореме Приюфера фактор-группа G/G^m раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп и поэтому является финитно аппроксимируемой группой. Поскольку пересечение подгрупп T и G^m тривиально, то естественный гомоморфизм ϵ группы G на фактор-группу G/G^m инъективен на подгруппе T . Так как $T\epsilon$ – конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G/G^m , то существует гомоморфизм ϕ группы G/G^m на конечную группу K , инъективный на $T\epsilon$. Тогда произведение $\epsilon\phi$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу K , инъективным на T . Поэтому ядро N гомоморфизма $\epsilon\phi$ является подгруппой конечного индекса группы G , и при этом N тривиально пересекает T . Отсюда следует, что естественный гомоморфизм ρ группы G на фактор-группу G/T инъективен на N . Поэтому группа N вложима в группу G/T . Отсюда и из того, что G/T F_π -аппроксимируема, следует, что и N F_π -аппроксимируема. Таким образом, N – F_π -аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы G . Следовательно, G почти F_π -аппроксимируема, т. е. выполняется условие 1. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Докажем сначала необходимость в теореме 3. Пусть G – мощная абелева группа. Очевидно, что группа G финитно аппроксими-

руема. Пусть a – элемент бесконечного порядка группы G . Тогда из определения мощного элемента следует, что для произвольного простого числа p существует гомоморфизм группы G на конечную группу P , при котором порядок образа элемента a равен p , причем ввиду разложимости группы P в прямое произведение примарных компонент можно считать, что P – конечная p -группа. Следовательно, элемент a не принадлежит пересечению $\sigma_p(G)$ всех подгрупп конечного p -индекса группы G , которое, как мы видели выше, совпадает с множеством $\omega_p(G)$ всех p -полных элементов группы G . Таким образом, группа G финитно аппроксимируема и не содержит p -полных элементов бесконечного порядка. Это доказывает необходимость в теореме 3.

Для доказательства достаточности в теореме 3 предположим, что абелева группа G финитно аппроксимируема и не содержит p -полных элементов бесконечного порядка ни для какого простого числа p . Покажем, что произвольный элемент a группы G является мощным. Если порядок элемента a конечен, то ввиду финитной аппроксимируемости группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, сохраняющий порядок элемента a , и тогда мощность элемента a обеспечивается тем очевидным обстоятельством, что любая конечная абелева группа является мощной. Предположим теперь, что порядок элемента a бесконечен и H – циклическая подгруппа группы G , порожденная элементом a . Покажем, что элемент a является мощным, т. е. что для каждого натурального числа n в группе G существует подгруппа N конечного индекса, высекающая в H подгруппу H^n . Доказательство этого утверждения очевидным образом сводится к доказательству того же самого утверждения для случая, когда $n = p^k$ – степень простого числа p . Пусть $m = p^{k-1}$. Элемент a^m имеет бесконечный порядок, и поэтому он не является p -полным. Таким образом, элемент a^m не принадлежит подмножеству $\omega_p(G)$, которое, как мы видели, совпадает с $\sigma_p(G)$. Поэтому существует гомоморфизм φ группы G на конечную p -группу P , переводящий элемент a^m в элемент отличный от 1, причем мощность группы P позволяет без потери общности считать, что образ элемента a^m относительно φ имеет порядок p . Тогда порядок образа элемента a относительно φ равен n , и поэтому в качестве искомой подгруппы N можно взять ядро гомоморфизма φ . Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8. № 3. С. 405–422.
2. Hirsh K.A. On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
3. Шмелькин А.Л. Полициклические группы // Сиб. мат. ж. 1968. Т. 9. С. 234–235.
4. Мальцев А.И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. Вып. 5. С. 49–60.
5. Азаров Д.Н. Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21(2). С. 50–55.
6. Lennox J., Robinson D. The theory of infinite soluble groups. Oxford.: Clarendon press. 2004.
7. Азаров Д.Н. Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Известия вузов. Математика. 2014. № 8. С. 18–29.
8. Азаров Д.Н. Некоторые аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15. № 1(49). С. 7–18.
9. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука. 1972.

Azarov D. N. RESIDUAL PROPERTIES OF ABELIAN GROUPS

DOI 10.17223/19988621/35/1

Let π be a set of primes. For Abelian groups, the necessary and sufficient condition to be a virtually residually finite π -group is obtained, as well as a characterization of potent Abelian groups. Recall that a group G is said to be a residually finite π -group if for every nonidentity element a of G there exists a homomorphism of the group G onto some finite π -group such that the image of the element a differs from 1. A group G is said to be a virtually residually finite π -group if it contains a finite index subgroup which is a residually finite π -group. Recall that an element g in G is said to be π -radicable if g is an m th power of an element of G for every positive π -number m . Let A be an Abelian group. It is well known that A is a residually finite π -group if and only if A has no nonidentity π -radicable elements. Suppose now that π does not coincide with the set Π of all primes. Let π' be the complement of π in the set Π . And let T be a π' -component of A , i.e., T be a set of all elements of A whose orders are finite π' -numbers. We prove that the following three statements are equivalent to each other: (1) the group A is a virtually residually finite π -group; (2) the subgroup T is finite and the quotient group A/T is a residually finite π -group; (3) the subgroup T is finite and T coincides with the set of all π -radicable elements of A .

Keywords: Abelian group, residually finite group.

AZAROV Dmitrii Nikolaevich (Candidate of Physics and Mathematics,
Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation)
E-mail: azarovdn@mail.ru

REFERENCES

УДК 519.95
DOI 10.17223/19988621/35/2

В.М. Зюзьков

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕРАЗРЕШИМЫХ КОСВЕННО РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

Изучаются косвенно рефлексивные предложения в арифметике Пеано (в предположении, что данная теория ω -непротиворечива), говорящие о доказуемости или опровержимости. Доказываются достаточные условия существования неразрешимых косвенно рефлексивных предложений.

Ключевые слова: арифметика Пеано, косвенная рефлексия, неразрешимые предложения.

Формула F языка теории первого порядка T называется неразрешимой в T , если ни сама формула F , ни её отрицание $\neg F$ не являются теоремами этой теории. Арифметика Пеано PA является одной из хорошо известных теорий первого порядка и играет важную роль в логике. В теории PA можно построить неразрешимое в этой теории предложение.

Нелогическими символами PA являются константа 0 , унарный функциональный символ S (который обозначает функцию следования) и два бинарных функциональных символа $+$ и $\times$. Для любого неотрицательного целого n терм $SS...S0$ (S повторяется n раз) будем обозначать n . Такие термы называются *нумералами*.

Курт Гёдель первым построил неразрешимое предложение для теории PA . Он сделал это посредством процедуры, которая сейчас называется арифметизацией.

Пусть U есть объединение трех множеств: множества символов теории T , множества всех выражений (термов и формул) T и множества всех конечных последовательностей выражений T . Пусть N – множество целых неотрицательных чисел и функция $g: U \rightarrow N$ инъективна. Функция g называется *арифметизацией* теории T , если выполнены следующие условия:

- (1) g эффективно вычислима;
- (2) существует алгоритм, который определяет, принадлежит ли данное положительное целое m множеству значений функции g и, если это так, то алгоритм находит объект $x \in U$ такой, что $g(x) = m$.

Функция g определяется стандартным способом [1, 2]. Число $g(x)$ называется гёделевым номером объекта x . Если $g(x) = n$, мы определяем $\lceil x \rceil$ как нумерал n . Это позволяет заменить утверждения о формальной теории эквивалентными теоретико-числовыми предложениями и затем выразить такие предложения в самой формальной теории.

В работе [3] изучались косвенно рефлексивные предложения в PA (в предположении, что данная теория ω -непротиворечива [1]), говорящие о доказуемости и/или опровержимости. Рассматривались некоторые совокупности таких предложений, и доказывалось, что среди них существуют неразрешимые предложения. Настоящая работа является продолжением и обобщением [3]. Мы формулируем общие условия и доказываем, что они достаточны для существования неразрешимых косвенно рефлексивных предложений.

Исходным утверждением является следующая теорема о косвенной рефлексивности, доказанная в [3].

Теорема 1. Пусть m – положительное целое число и $B_1, B_2, \dots, B_m$ – формулы теории **PA**, для которых свободные переменные содержатся в списке $x_1, x_2, \dots, x_m$. Тогда существуют такие формулы $G_1, G_2, \dots, G_m$, что

$$\vdash G_1 \sim B_1(\ulcorner G_1 \urcorner, \ulcorner G_2 \urcorner, \dots, \ulcorner G_m \urcorner),$$

$$\vdash G_2 \sim B_2(\ulcorner G_1 \urcorner, \ulcorner G_2 \urcorner, \dots, \ulcorner G_m \urcorner),$$

...

$$\vdash G_m \sim B_m(\ulcorner G_1 \urcorner, \ulcorner G_2 \urcorner, \dots, \ulcorner G_m \urcorner)$$

в теории **PA**.

Как известно [1], отношение $Provable(n, m)$: «формула с гёделевым номером n является выводимой (доказуемой) в **PA** и ее доказательство имеет номер m » выражимо в **PA** некоторой формулой $Pr(x, y)$, т.е.:

1) если $Provable(n, m)$ истинно, то $\vdash Pr(n, m)$,

2) если $Provable(n, m)$ ложно, то $\vdash \neg Pr(n, m)$.

Формула $P(n) \equiv \exists y Pr(n, y)$ выражает следующее свойство: «формула с гёделевым номером n является выводимой (доказуемой) в **PA**».

Из теоремы 1 при $m = 1$ получаем известную лемму о рефлексии. Пусть $B(x)$ произвольная формула формальной арифметики, имеющая единственную свободную переменную x . Тогда можно построить замкнутую формулу A , такую, что $\vdash A \sim B(\ulcorner A \urcorner)$. Формула A рефлексивна и «говорит о себе», что она обладает свойством B . В частности, имеется формула G , для которой $\vdash G \sim \neg P(\ulcorner G \urcorner)$, т.е. G «говорит о себе», что она недоказуема в **PA**. Гёдель, неявно используя лемму о рефлексии, получил формулу G и доказал, что она неразрешима в **PA** (предполагая, что **PA** является ω -непротиворечивой теорией).

Определение ω -непротиворечивости [1, с. 158]. Пусть T – теория первого порядка с теми же самыми символами, что и **PA**. Теория T называется ω -непротиворечивой, если для всякой формулы $\varphi(x)$ этой теории из того, что при любом n выполнено $\vdash_T \varphi(n)$, следует невозможность $\vdash_T \exists x \neg \varphi(x)$.

Мы говорим, что формула A *опровержима* в **PA**, если $\neg A$ доказуема в **PA**. Раймонд Смаллиан обнаружил формулу $R(n)$, которая выражает следующее свойство: «отрицание формулы с гёделевым номером n доказуемо в **PA**». Формула $R(\ulcorner F \urcorner)$ «утверждает» опровержимость формулы F . Лемма о рефлексии дает формулу L , для которой $\vdash L \sim R(\ulcorner L \urcorner)$. Формула Смаллиана L «утверждает» свою собственную опровержимость.. Формула L также неразрешима [4, 3].

Будем считать, что арифметика Пеано является ω -непротиворечивой. Это свойство используется при доказательстве следующей леммы.

Лемма 1 [3]. Для любой формулы F теории **PA** выполнено: 1) $\vdash P(\ulcorner F \urcorner)$ тогда и только тогда, когда $\vdash F$; 2) $\vdash R(\ulcorner F \urcorner)$ тогда и только тогда, когда $\vdash \neg F$.

В силу теоремы 1 имеем, что формулы теории **PA**, «косвенно утверждающие» собственную доказуемость или опровержимость, существуют. И в некоторых конечных множествах таких формул удастся доказать существование неразрешимых формул.

Например, формулы A и B , для которых выполнено

$$\vdash A \sim R(\ulcorner B \urcorner),$$

$$\vdash B \sim P(\ulcorner A \urcorner),$$

являются неразрешимыми [3].

Пусть для данных формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 1$, выполнено $\vdash A_i \sim Z_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Причем каждая формула Z_i построена из некоторых формул вида $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ и $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ с помощью пропозициональных связок. Рассмотрим следующую формулу φ пропозициональной логики:

$$(A_1 \sim W_1) \& (A_2 \sim W_2) \& \dots \& (A_n \sim W_n),$$

где каждая формула W_i получена из соответствующей формулы Z_i заменой $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ на A_j и заменой $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ на $\neg A_k$. Символы A_i трактуются в формуле φ как пропозициональные переменные.

Теорема 2 (достаточное условие для неразрешимости). Если формула φ является невыполнимой формулой пропозициональной логики, то, по крайней мере, одна из формул A_i неразрешима.

Для доказательства потребуется две леммы. Введем обозначение. Пусть Z – произвольная формула арифметики Пеано, построенная из некоторых формул вида $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ и $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ с помощью пропозициональных связок. Обозначим через $w(Z)$ формулу, полученную из Z заменой $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ на A_j и заменой $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ на $\neg A_k$.

Лемма 2. Пусть Z – произвольная формула арифметики Пеано, построенная из некоторых формул вида $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ и $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ с помощью пропозициональных связок. Тогда если $\vdash Z$, то $\vdash w(Z)$.

Заметим, что тогда из $\vdash Z$ следует $\vdash Z \sim w(Z)$. Для этого достаточно воспользоваться тавтологией $\alpha \& \beta \supset (\alpha \sim \beta)$.

Доказательство. Проведем математическую индукцию по построению формулы Z .

Базис индукции. Если формула Z вообще не содержит подформул вида $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ и $R(\ulcorner A_k \urcorner)$, то, очевидно, $w(Z) = Z$. И поэтому утверждение леммы в данном случае выполнено. Рассмотрим случаи, когда формула Z есть $P(\ulcorner A_i \urcorner)$ или $R(\ulcorner A_i \urcorner)$. В первом случае $w(P(\ulcorner A_i \urcorner)) = A_i$. По лемме 1, $\vdash P(\ulcorner A_i \urcorner)$ влечет $\vdash A_i$. Если же формула Z есть $R(\ulcorner A_i \urcorner)$, то $w(R(\ulcorner A_i \urcorner)) = \neg A_i$. Отношение $\vdash R(\ulcorner A_i \urcorner)$ влечет $\vdash \neg A_i$, по лемме 1

Отрицание. Пусть формула Z имеет вид $\neg Z_1$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$. Имеем также $w(\neg Z_1) = \neg w(Z_1)$. Из $\vdash \neg Z_1$, используя тавтологию $\neg \alpha \& (\alpha \sim \beta) \supset \neg \beta$, получаем $\vdash \neg w(Z_1)$.

Конъюнкция. Пусть формула Z имеет вид $Z_1 \& Z_2$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$ и $\vdash Z_2 \sim w(Z_2)$. Имеем также $w(Z_1 \& Z_2) = w(Z_1) \& w(Z_2)$. Используя тавтологию

$$\alpha 1 \& \alpha 2 \& (\alpha 1 \sim \beta 1) \& (\alpha 2 \sim \beta 2) \supset (\beta 1 \& \beta 2),$$

из $\vdash Z_1 \& Z_2$ получаем $\vdash w(Z_1) \& w(Z_2)$.

Дизъюнкция. Пусть формула Z имеет вид $Z_1 \vee Z_2$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$ и $\vdash Z_2 \sim w(Z_2)$. Имеем также $w(Z_1 \vee Z_2) = w(Z_1) \vee w(Z_2)$. Используя тавтологию

$$(\alpha 1 \vee \alpha 2) \& (\alpha 1 \sim \beta 1) \& (\alpha 2 \sim \beta 2) \supset (\beta 1 \vee \beta 2),$$

из $\vdash Z_1 \vee Z_2$ получаем $\vdash w(Z_1) \vee w(Z_2)$.

Импликация. Пусть формула Z имеет вид $Z_1 \supset Z_2$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$ и $\vdash Z_2 \sim w(Z_2)$. Имеем также $w(Z_1 \supset Z_2) = w(Z_1) \supset w(Z_2)$. Используя тавтологию

$$(\alpha 1 \supset \alpha 2) \& (\alpha 1 \sim \beta 1) \& (\alpha 2 \sim \beta 2) \supset (\beta 1 \supset \beta 2),$$

из $\vdash Z_1 \supset Z_2$ получаем $\vdash w(Z_1) \supset w(Z_2)$.

Эквиваленция. Пусть формула Z имеет вид $Z_1 \sim Z_2$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$ и $\vdash Z_2 \sim w(Z_2)$. Имеем также $w(Z_1 \sim Z_2) = w(Z_1) \sim w(Z_2)$.

Используя тавтологию

$$(\alpha_1 \sim \alpha_2) \& (\alpha_1 \sim \beta_1) \& (\alpha_2 \sim \beta_2) \supset (\beta_1 \sim \beta_2),$$

из $\vdash Z_1 \sim Z_2$ получаем $\vdash w(Z_1) \sim w(Z_2)$. ■

Лемма 3. Если формула A_i разрешима, то $\vdash A_i \sim Z_i$ влечет $\vdash A_i \sim w(Z_i)$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\vdash A_i$. Тогда, используя тавтологию $\alpha \& (\alpha \sim \beta) \supset \beta$, получаем $\vdash Z_i$. По лемме 2 имеем $\vdash w(Z_i)$. Воспользуемся тавтологией $\alpha \& \beta \supset (\alpha \sim \beta)$ и получим $\vdash A_i \sim w(Z_i)$.

2. Пусть $\vdash \neg A_i$. Тогда, используя тавтологию $(\alpha \sim \beta) \supset (\neg \alpha \sim \neg \beta)$, из $\vdash A_i \sim Z_i$ получаем $\vdash \neg A_i \sim \neg Z_i$. Теперь из $\vdash \neg A_i$ и $\vdash \neg A_i \sim \neg Z_i$ с помощью тавтологии $\alpha \& (\alpha \sim \beta) \supset \beta$, получаем $\vdash \neg Z_i$. По лемме 2, имеем $\vdash \neg w(Z_i)$. Из $\vdash \neg A_i$ и $\vdash \neg w(Z_i)$, воспользовавшись тавтологией $\alpha \& \beta \supset (\alpha \sim \beta)$, получаем $\vdash \neg A_i \sim \neg w(Z_i)$. И снова, с помощью тавтологии $(\alpha \sim \beta) \supset (\neg \alpha \sim \neg \beta)$, имеем $\vdash A_i \sim w(Z_i)$. ■

Доказательство теоремы 2. От противного допустим, что все формулы $A_1, A_2, \dots, A_n$ разрешимы. Так как $\vdash A_i \sim Z_i$, то формулы $A_i \sim Z_i$ истинны для всех i . Пусть W_i обозначает формулу $w(Z_i)$. По лемме 3 имеем $\vdash A_i \sim W_i$ для всех i . Если трактовать все A_k входящие в $A_i \sim W_i$ как пропозициональные переменные, то формула

$$(A_1 \sim W_1) \& (A_2 \sim W_2) \& \dots \& (A_n \sim W_n)$$

является истинной формулой пропозициональной логики, но это противоречит невыполнимости φ . Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Введем следующее обозначение: если i – индекс, пробегающий диапазон 1, 2, ..., n , то $i+$ обозначает $i+1$ для $i = 1, \dots, n-1$, и $i+ = 1$ для $i = n$. Теперь можем сформулировать следствие из теоремы 2.

Следствие 1. Допустим, что для $i = 1, \dots, n$, каждое A_i есть одно из следующих утверждений:

- (i) A_{i+} – доказуемо;
- (ii) A_{i+} – не доказуемо;
- (iii) A_{i+} – опровержимо;
- (iv) A_{i+} – не опровержимо.

Пусть количество значений индекса i , для которых A_i утверждает (ii) или (iii), нечетно. Тогда, по крайней мере, одна из формул A_i неразрешима.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть все формулы A_i разрешимы. Переведем исходные условия на точный язык. Для $i = 1, \dots, n$ каждое A_i удовлетворяет одному из следующих отношений:

- (i) $\vdash A_i \sim P(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$;
- (ii) $\vdash A_i \sim \neg P(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$;
- (iii) $\vdash A_i \sim R(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$;
- (iv) $\vdash A_i \sim \neg R(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$.

И количество значений индекса i , для которых A_i удовлетворяют отношениям (ii) или (iii), нечетно. Заменим $P(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$ на A_{i+} и $R(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$ на $\neg A_{i+}$. Тогда отношения (i)–(iv) в силу леммы 3 преобразуются в отношения

- (I) $\vdash A_i \sim A_{i+}$;
- (II) $\vdash A_i \sim \neg A_{i+}$;
- (III) $\vdash A_i \sim \neg A_{i+}$;
- (IV) $\vdash A_i \sim A_{i+}$.

Причем общее количество выражений вида $A_i \sim \neg A_{i+}$ является нечетным.

Будем рассматривать все A_i как пропозициональные переменные. Чтобы применить теорему 2, рассмотрим формулу φ , которая в данном случае есть

$$(A_1 \sim B_2) \& (A_2 \sim B_3) \& \dots \& (A_{n-1} \sim B_n) \& (A_n \sim B_1),$$

где каждое B_k есть A_k или $\neg A_k$. Так как мы предположили, что все формулы A_i разрешимы, то по теореме 2 формула φ должна быть выполнимой.

Удалим из формулы φ все эквивалентности вида $A_i \sim A_{i+}$, причем удаляя каждую такую эквивалентность, будем делать перенумерацию переменных так, чтобы соседние переменные по-прежнему имели последовательные номера.

Полученная формула равносильна φ и имеет вид

$$(A_1 \sim \neg A_2) \& (A_2 \sim \neg A_3) \& \dots \& (A_k \sim \neg A_1), \quad (1)$$

где k нечетно.

Докажем, что формула (1) не может быть выполнимой. От противного. Пусть формула (1) истинна при некотором распределении истинностных значений переменных $A_1, A_2, \dots, A_k$. При этом распределении все эквивалентности в скобках должны иметь значение *истина*. Рассмотрим два возможных истинностных значения для переменной A_1 .

- Пусть A_1 есть *истина*, тогда A_2 – *ложь*, A_3 – *истина*, A_4 – *ложь*, ..., A_k – *истина*, так как k нечетно.

- Если же A_1 есть *ложь*, то A_2 – *истина*, A_3 – *ложь*, A_4 – *истина*, ..., A_k – *ложь*, так как k нечетно.

В любом случае для выполнимости формулы (1) истинностные значения переменных A_k и A_1 должны совпадать, но тогда последняя эквивалентность $A_k \sim \neg A_1$ имеет ложное значение и формула (1) ложна при любом значении A_1 . Поэтому формула (1) невыполнима. Так как формулы (1) и φ равносильны, то формула φ невыполнима. Полученное противоречие доказывает, что, по крайней мере, одна из формул A_i неразрешима. ■

Если в формулировке следствия $n = 1$, то тогда мы имеем одну формулу A_1 , для которой выполнено $\vdash A_1 \sim \neg P(\lceil A_1 \rceil)$ или $\vdash A_1 \sim R(\lceil A_1 \rceil)$. И из следствия 1 и леммы 1 сразу получаем

Следствие 2 (после Гёделя). Если $\vdash G \sim \neg P(\lceil G \rceil)$, то формулы G и $P(\lceil G \rceil)$ неразрешимы.

Следствие 3 (после Смаллиана). Если $\vdash L \sim R(\lceil L \rceil)$, то формулы L и $R(\lceil L \rceil)$ неразрешимы.

Замечание. Все чистые теоремы существования неразрешимых косвенно рефлексивных предложений, доказанные в [3], являются частными случаями следствия 1.

Автор благодарит профессора Heinrich Rolletschek (Research Institute for Symbolic Computation, Linz, Austria) за плодотворное обсуждение результатов из [3], вследствие чего появилась настоящая статья.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.
2. Булос Дж., Джефффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994. 396 с.
3. Зюзьков В.М. Неразрешимые косвенно рефлексивные предложения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 21–33.
4. Smullyan R.M. Gödel's Incompleteness Theorem. Oxford: Oxford University Press, 1992.

Статья поступила 14.03.2015 г.

Zyuz'kov V.M. SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF UNDECIDABLE INDIRECTLY REFLECTIVE SENTENCES

DOI 10.17223/19988621/35/2

Indirectly reflective sentences in the ω -consistent theory of formal arithmetic are studied. Sufficient conditions for the existence of undecidable indirectly reflective sentences are proved.

Keywords: formal arithmetic, indirect reflexion, undecidable sentences.

ZYUZ'KOV Valentin Mikhailovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: vmz@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic, Chapman & Hall, 1998.
2. Boolos G. Jeffrey R. Computability and Logic, Cambridge University Press, 1974.
3. Зюзьков В.М. Неразрешимые косвенно рефлексивные предложения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 21–33.
4. Smullyan R.M. Gödel's Incompleteness Theorem, Oxford, Oxford University Press, 1992.

УДК 517.952

DOI 10.17223/19988621/35/3

И.В. Рахмелевич

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Проведён анализ решений многомерного уравнения в частных производных первого порядка, содержащего степенные функции от производных. Для исследования данного уравнения применяется метод двухуровневого функционального разделения переменных (РП), являющийся новым вариантом метода функционального РП. В результате получены новые решения рассматриваемого уравнения в неявной форме, содержащие некоторые обобщенные полиномы от независимых переменных.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность.

Теория нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка является важной составной частью современной математической физики [1, 2]. Одним из наиболее эффективных методов решения нелинейных уравнений в частных производных является метод разделения переменных (РП) [1, 3, 4]. В работах [3, 4] подробно изложены основы метода и его современные варианты (обобщенное и функциональное РП). В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвященных исследованию нелинейных уравнений указанным методом. Так, в работах [5–7] методом РП исследованы некоторые многомерные уравнения в частных производных, включающие однородные и мультиоднородные функции. В [8–11] с помощью указанного метода были получены решения некоторых нелинейных уравнений эллиптического и гиперболического типов. В настоящей работе предлагается новый вариант метода – двухуровневое функциональное разделение переменных. На примере многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями проиллюстрированы возможности метода и получены новые точные решения указанного уравнения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение в частных производных первого порядка относительно неизвестной функции $u(x_1, \dots, x_N)$:

$$\prod_{n=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{\beta_n} = \varphi(u). \quad (1)$$

В справочнике [1, с. 402] приведен полный интеграл более общего уравнения с правой частью вида $\varphi(u) \prod_{n=1}^N f(x_n)$, который можно получить методом функционального РП. Это уравнение может быть сведено к уравнению (1) с помощью за-

мены независимых переменных, при этом указанный полный интеграл сводится к решению типа бегущей волны:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = \sum_{n=1}^N c_n x_n + c_0, \quad (2)$$

где $\beta_\Sigma = \sum_{n=1}^N \beta_n$.

Целью данной работы является нахождение новых решений уравнения (1), имеющих более сложную зависимость от переменных x_n , с использованием метода функционального РП.

2. Двухуровневое функциональное разделение переменных

Для нахождения решений уравнения (1) более сложного вида используем следующее выражение для искомой функции $u(x_1, \dots, x_N)$:

$$u(x_1, \dots, x_N) = U \left\{ \sum_{k=1}^K V_k \left(\sum_{n \in I_k} X_n(x_n) \right) \right\}. \quad (3)$$

Предполагается, что множество значений $I = \{1, \dots, N\}$ индекса n , нумерующего независимые переменные, разбито на K непересекающихся подмножеств I_k ($k \in \Xi$). Здесь и далее $\Xi = \{1, \dots, K\}$ – множество значений индекса k ; $U(y)$, $V_k(z_k)$, $X_n(x_n)$ – неизвестные функции, подлежащие определению в дальнейшем. Также будем использовать обозначения:

$$y = \sum_{k=1}^K V_k(z_k), \quad z_k = \sum_{n \in I_k} X_n(x_n). \quad (4)$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (1) и учитывая (4), приходим к соотношению

$$\prod_{k=1}^K \left\{ [V'_k(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{n \in I_k} [X'_n(x_n)]^{\beta_n} \right\} = \frac{\varphi(U(y))}{[U'(y)]^{\beta_\Sigma}}, \quad (5)$$

где $\beta_\Sigma = \sum_{n=1}^N \beta_n$, $\beta_{\Sigma k} = \sum_{n \in I_k} \beta_n$. Далее всюду будем предполагать, что выполнены условия

$$\beta_\Sigma \neq 0, \quad \beta_{\Sigma k} \neq 0 \quad (k \in \Xi).$$

Так как правая часть уравнения (5) является функцией от y , то, учитывая первую из формул (4), легко видеть, что выражение в фигурных скобках в левой части (5) должно зависеть только от z_k . Тогда из уравнения (5) следует

$$\prod_{k=1}^K \psi_k(z_k) = \Phi(y); \quad (6)$$

$$\psi_k(z_k) = [V'_k(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{n \in I_k} [X'_n(x_n)]^{\beta_n}, \quad \Phi(y) = \frac{\varphi(U(y))}{[U'(y)]^{\beta_\Sigma}}. \quad (7)$$

Пусть $l \in \Xi$ – некоторое значение индекса k . Дифференцируя по z_l уравнение (6) и учитывая первую из формул (4), получаем

$$\frac{\psi'_l(z_l)}{\psi_l(z_l)V'_l(z_l)} \prod_{k=1}^K \psi_k(z_k) = \Phi'(y). \quad (8)$$

Тогда, из соотношений (6) и (8) следует

$$\frac{\psi'_l(z_l)}{\psi_l(z_l)V'_l(z_l)} = \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)}. \quad (9)$$

Так как l было выбрано произвольно, то соотношение (9) должно выполняться при всех $l \in \Xi$.

С учетом первого из выражений (4), отсюда следует

$$\frac{\psi'_k(z_k)}{\psi_k(z_k)V'_k(z_k)} = \mu, \quad \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \mu, \quad (10)$$

причем первое из уравнений (10) должно удовлетворяться при всех $k \in \Xi$ (здесь произведена замена индекса $l \rightarrow k$), μ – некоторая постоянная.

Далее рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\mu = 0$.

Тогда, используя второе из уравнений (10), с учетом выражения (7) для $\Phi(y)$, получаем следующее:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = C_0 y + D_0 \quad (11)$$

или, с учетом выражения (4) для y :

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = C_0 \sum_{k=1}^K V_k(z_k) + D_0. \quad (12)$$

В формулах (11), (12) C_0, D_0 – произвольные постоянные.

Целью дальнейшего анализа является нахождение функций $V_k(z_k)$, $X_n(x_n)$.

Первую из формул (7) перепишем в виде

$$\prod_{n \in I_k} [X'_n(x_n)]^{\beta_n} = \Psi_k(z_k), \quad (13)$$

где

$$\Psi_k(z_k) = \frac{\psi_k(z_k)}{[V'_k(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}}}. \quad (14)$$

Пусть $m \in I_k$ – некоторое значение индекса n . Продифференцируем (13) по x_m , отсюда получаем

$$\beta_m \frac{X''_m(x_m)}{[X'_m(x_m)]^2} \prod_{n \in I_k} [X'_n(x_n)]^{\beta_n} = \Psi'_k(z_k). \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражение для $\Psi_k(z_k)$ из (13), находим

$$\beta_m \frac{X''_m(x_m)}{[X'_m(x_m)]^2} = \frac{\Psi'_k(z_k)}{\Psi_k(z_k)}. \quad (16)$$

Поскольку при заданном k соотношение (16) должно выполняться для всех $m \in I_k$, то функции $X_m(x_m)$, $\Psi_k(z_k)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\beta_m \frac{X_m''(x_m)}{[X_m'(x_m)]^2} = \lambda_k, \quad \frac{\Psi_k'(z_k)}{\Psi_k(z_k)} = \lambda_k, \quad (17)$$

где λ_k – некоторые постоянные. Рассмотрим отдельно два случая.

1) $\lambda_k = 0$. Тогда при данном k и для всех $n \in I_k$ из уравнений (17) с учетом (13) получаем

$$X_n(x_n) = c_n x_n + c_{n0}, \quad \Psi_k(z_k) = C_k \equiv \prod_{n \in I_k} c_n^{\beta_n}. \quad (18)$$

Из первого уравнения (10) для данного случая следует

$$\psi_k(z_k) = A_k = \text{const}. \quad (19)$$

Тогда из формул (14), (18) и (19) получим

$$[V_k'(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} = \frac{A_k}{C_k}. \quad (20)$$

При $\beta_{\Sigma k} \neq 0$ решением уравнения (20) является линейная функция

$$V_k(z_k) = \left(\frac{A_k}{C_k} \right)^{1/\beta_{\Sigma k}} (z_k - z_{k0}). \quad (21)$$

2) $\lambda_k \neq 0$. Решая уравнения (17), находим

$$X_n = -\frac{\beta_n}{\lambda_k} \ln \left[-\frac{\lambda_k}{\beta_n} c_n (x_n - x_{n0}) \right]; \quad (22)$$

$$\Psi_k(z_k) = C_k \exp(\lambda_k z_k). \quad (23)$$

Из соотношений (19), (22), (23), (14) и второй формулы (4) можно получить уравнение для $V_k(z_k)$:

$$[V_k'(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \exp(\lambda_k z_k) = \frac{A_k}{C_k}. \quad (24)$$

При $\beta_{\Sigma k} \neq 0$ решением уравнения (24) является функция

$$V_k(z_k) = -\frac{\beta_{\Sigma k}}{\lambda_k} \left(\frac{A_k}{C_k} \right)^{1/\beta_{\Sigma k}} \exp \left(-\frac{\lambda_k}{\beta_{\Sigma k}} z_k \right). \quad (25)$$

Учитывая выражение (22) и вторую из формул (4), преобразуем (25) к виду

$$V_k = A_k^{1/\beta_{\Sigma k}} \prod_{n \in I_k} \left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_n} (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n / \beta_{\Sigma k}}. \quad (26)$$

Введем множества

$$\Xi_1 = \{k : k \in \Xi, \lambda_k = 0\},$$

$$\Xi_2 = \{k : k \in \Xi, \lambda_k \neq 0\}.$$

Тогда из соотношений (12), (22), (26), с учетом (4), получаем решение уравнения (1) в неявной форме для случая $\mu = 0$:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = C_0 \left\{ \sum_{k \in \Xi_1} \tilde{A}_k \left(\sum_{n \in I_k} c_n x_n - z_{k0} \right) + \sum_{k \in \Xi_2} A_k^{1/\beta_{\Sigma k}} \prod_{n \in I_k} \left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_n} (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n / \beta_{\Sigma k}} \right\} + D_0, \quad (27)$$

где $\tilde{A}_k = \left(\frac{A_k}{C_k} \right)^{1/\beta_{\Sigma k}}$.

Вводя новые произвольные постоянные по формулам

$$b_n|_{n \in I_k} = C_0 c_n \tilde{A}_k, \quad B_k = C_0 A_k^{1/\beta_{\Sigma k}}, \quad B_0 = -C_0 \sum_{k \in \Xi_1} z_{k0} \tilde{A}_k + D_0,$$

решение (27) представим в более простом виде:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = \sum_{k \in \Xi_1} \sum_{n \in I_k} b_n x_n + \sum_{k \in \Xi_2} B_k \prod_{n \in I_k} \left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_n} (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n / \beta_{\Sigma k}} + B_0. \quad (28)$$

Подставив решение (28) в уравнение (1), находим, что постоянные b_n, B_k должны удовлетворять условию

$$\prod_{k \in \Xi_1} \prod_{n \in I_k} b_n^{\beta_n} \cdot \prod_{k \in \Xi_2} B_k^{\beta_{\Sigma k}} = 1. \quad (29)$$

В частном случае, когда $\Xi_1 = \Xi, \Xi_2 = \emptyset$, второй член в правой части (28) отсутствует и решение (28) совпадает с известным решением (2).

Случай 2. $\mu \neq 0$.

Тогда, решая второе из уравнений (10) и используя выражение (7) для $\Phi(y)$, получаем следующее:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = -\frac{\beta_\Sigma}{\mu} C_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\beta_\Sigma} y\right) + D_0 \quad (30)$$

или, с учетом выражения (4) для y :

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = -\frac{\beta_\Sigma}{\mu} C_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\beta_\Sigma} \sum_{k=1}^K V_k(z_k)\right) + D_0. \quad (31)$$

В формулах (30), (31) C_0, D_0 – произвольные постоянные.

Далее, для нахождения функций $V_k(z_k)$, аналогично приведенным выше рассуждениям для $\mu = 0$, необходимо различать два случая.

а) $\lambda_k = 0$. Тогда, используя выражения (14) и (18), находим

$$\psi_k(z_k) = C_k [V'_k(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в первое из уравнений (10), получаем уравнение для $V_k(z_k)$:

$$\frac{\beta_{\Sigma k} V''_k(z_k)}{[V'_k(z_k)]^2} = \mu. \quad (33)$$

Решение уравнения (33) запишем в виде

$$V_k(z_k) = -\frac{\beta_{\Sigma k}}{\mu} \ln(z_k - z_{k0}) - \ln V_{k0}. \quad (34)$$

При этом функции $X_n(x_n)$ определяются первой из формул (18).

б) $\lambda_k \neq 0$. Тогда из (23) и (14) получаем выражение

$$\Psi_k(z_k) = C_k [V'_k(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \exp(\lambda_k z_k), \quad (35)$$

Подставляя (35) в первое из уравнений (10), получаем уравнение для $V_k(z_k)$:

$$\frac{\beta_{\Sigma k}}{V'_k(z_k)} \left(\frac{V''_k(z_k)}{V'_k(z_k)} + \frac{\lambda_k}{\beta_{\Sigma k}} \right) = \mu. \quad (36)$$

Решение уравнения (36) можно записать в виде

$$V_k(z_k) = -\frac{\beta_{\Sigma k}}{\mu} \ln \left\{ \frac{\mu}{\lambda_k} \left[\exp \left(-\frac{\lambda_k}{\beta_{\Sigma k}} (z_k - z_{k0}) \right) + V_{k0} \right] \right\}. \quad (37)$$

Функции $X_n(x_n)$ определяются формулой (22).

Для последующего преобразования решения (31), используя выражения (4) и (22), получим

$$\exp \left(-\frac{\lambda_k}{\beta_{\Sigma k}} (z_k - z_{k0}) \right) = \prod_{n \in I_k} \left[-\frac{\lambda_k}{\beta_n} c_n (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n / \beta_{\Sigma k}}. \quad (38)$$

Учитывая (37), (38), решение (31) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_{\Sigma}}} &= B_1 \prod_{k \in \Xi_1} \left(\sum_{n \in I_k} c_n x_n - z_{k0} \right)^{\beta_{\Sigma k} / \beta_{\Sigma}} \times \\ &\times \prod_{k \in \Xi_2} \left\{ B_{k0} + B_{k2} \prod_{n \in I_k} \left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_n} (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n / \beta_{\Sigma k}} \right\}^{\beta_{\Sigma k} / \beta_{\Sigma}}. \end{aligned} \quad (39)$$

В состав решения (39) входят произвольные постоянные $B_1, B_{k0}, B_{k2}, c_n, z_{k0}, x_{n0}$. Подставив это решение в уравнение (1), после некоторых преобразований получаем условие, которому должны удовлетворять произвольные постоянные:

$$B_1^{\beta_{\Sigma}} \cdot \prod_{k=1}^K \left(\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_{\Sigma}} \right)^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{k \in \Xi_1} C_k \cdot \prod_{k \in \Xi_2} B_k^{\beta_{\Sigma k}} = 1, \quad (40)$$

где C_k выражаются через c_n по формуле (18).

Отметим также, что формула (39) описывает семейство решений, которые отличаются между собой как значениями произвольных постоянных, так и множествами I_k ($k = 1, \dots, K$), Ξ_j ($j = 1, 2$); аналогичное утверждение справедливо в отношении формулы (28).

В частном случае, когда $\Xi_1 = \Xi$, $\Xi_2 = \emptyset$, второй сомножитель в правой части (39) отсутствует и это решение принимает более простой вид:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_{\Sigma}}} = B_1 \prod_{k=1}^K \left(\sum_{n \in I_k} c_n x_n - z_{k0} \right)^{\beta_{\Sigma k} / \beta_{\Sigma}}. \quad (41)$$

Если при этом $K=1$, то (41) сводится к приведенному выше известному решению (2).

Заключение

Таким образом, в данной работе предложен метод двухуровневого функционального разделения переменных для уравнений в частных производных. Данный метод применяется к решению многомерного уравнения в частных производных первого порядка (1) со степенными нелинейностями от производных. Получены новые решения указанного уравнения в неявном виде, определяемые формулами (28) и (39), содержащие обобщенные полиномы от независимых переменных. С помощью подстановки решений (28) и (39) в уравнение (1) получены условия (29) и (40), которым должны удовлетворять входящие в эти решения произвольные постоянные. Результаты данной работы могут быть обобщены на другие типы уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.
2. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
4. Полянин А.Д., Журов А.И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 606–611.
5. Рахмелевич И.В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(28). С. 37–44.
6. Рахмелевич И.В. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(33). С. 42–50.
7. Рахмелевич И.В. О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. № 4–1. С. 374–381.
8. Рахмелевич И.В. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 12–19.
9. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // Journal of Physics A. 1993. V. 26. P. 1901–1913.
10. Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation // Journal of Physics A. 1994. V. 27. P. L291–L297.
11. Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions // Journal of Mathematical Physics. 1992. V. 33. No 7. P. 2498–2503.

Статья поступила 13.04.2015 г.

Rakhmelevich I.V. ON SOME NEW SOLUTIONS OF THE MULTI-DIMENSIONAL FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH POWER-LAW NON-LINEARITIES

DOI 10.17223/19988621/35/3

Investigations of nonlinear partial differential equations of the first order with an arbitrary number of independent variables are an important part of up-to-date mathematical physics. For many equations of this class, only solutions of the simplest kind are known, in particular, solu-

tions of the travelling wave type. The present work is devoted to finding solutions of a more complex form for the multi-dimensional equation of the first order with power-law non-linearity in derivatives.

To solve this problem, in this paper we propose a new variant of the method of separation of variables – the method of two-level functional separation of variables. The characteristic feature of this method is that the desired function depends on a superposition of functions of the first and second levels of one variable, and these functions are determined as the result of solving some ordinary differential equations.

Based on the method proposed in the paper, new exact solutions of the considered equation are obtained in an implicit form. The solutions contain some generalized polynomials of independent variables. Conditions of the existence of these solutions are specified. The results of this work can be generalized to other non-linear first order equations and equations of higher orders with many independent variables.

Keywords: partial differential equation, functional separation of variables, power-law non-linearity.

RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof., Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

REFERENCES

- Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.
- Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. – 260 с.
- Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Полянин А.Д., Журов А.И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН. 2002. Т. 382. №5. С. 606–611.
- Рахмелевич И.В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3. С. 37–44.
- Рахмелевич И.В. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1. С. 42–50.
- Рахмелевич И.В. О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. № 4-1. С. 374–381.
- Рахмелевич И.В. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1. С. 12–19.
- Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // Journal of Physics A. 1993. V.26. P.1901–1913.
- Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. // Journal of Physics A. 1994. V.27. P. L291–L297.
- Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein - Gordon equations and their solutions.// Journal of Mathematical Physics. 1992. V. 33. No 7. P. 2498–2503.

УДК 517.955.8

DOI 10.17223/19988621/35/4

Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, КОГДА ПРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Доказана возможность применения метода пограничных функций для построения равномерного асимптотического разложения решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения, когда предельное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с особыми точками, причем в этих точках условие теоремы А.Н. Тихонова не выполняется. Получена оценка остаточного члена, т.е. обосновано формальное асимптотическое разложение решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: асимптотика, решение, бисингулярное возмущение, уравнение эллиптического типа, особая точка, задача Дирихле, обобщенный метод пограничных функций, пограничные функции, малый параметр.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического дифференциального уравнения

$$\varepsilon \Delta u - (1-x^2)u_y = f(x,y), (x,y) \in D = \{(x,y) | y > x^2-1, y < 0\}; \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = \psi(x,y), \Gamma = \partial D, \quad (2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $u = u(x,y,\varepsilon)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y) \in C^{(\infty,\infty)}(D)$,

$0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $\Gamma = \partial D$ – граница области D .

Сначала покажем бисингулярность задачи (1), (2). Первая сингулярность – решение предельного уравнения

$$-(1-x^2)u_y = f(x,y)$$

не может удовлетворять граничному условию (2). Чтобы показать вторую особенность (сингулярность), рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), (2), которое ищем в виде

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(x,y), \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-(1-x^2) \frac{\partial \tilde{v}_0(x,y)}{\partial y} = f(x,y),$$

$$(1-x^2) \frac{\partial \tilde{v}_k(x,y)}{\partial y} = \Delta \tilde{v}_{k-1}(x,y), k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда определяем $\tilde{v}_k(x, y)$:

$$\tilde{v}_0(x, y) = -\frac{1}{1-x^2} \int_{x^2-1}^y f(x, s) ds + \psi(x, x^2-1),$$

$$\tilde{v}_k(x, y) = \frac{1}{1-x^2} \int_{x^2-1}^y \Delta \tilde{v}_{k-1}(x, s) ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $\tilde{v}_k(x, y) \in C^{(\infty, \infty)}(\bar{D} \setminus (\pm 1, 0))$, т.е. в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ все эти функции $\tilde{v}_k(x, y)$ имеют нарастающую особенность вида

$$\tilde{v}_k(x, y) = O(1/(1-x^2)^{1+3k}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(Термин нарастающая особенность означает, что с увеличением номера k растет и особенность (порядок полюсов) функции $\tilde{v}_k(x, y)$.)

Внешнее решение имеет вид

$$V = \frac{1}{(1-x^2)} \left(-f(x, r) + \frac{\varepsilon}{(1-x^2)^2} F_1(x, y) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{(1-x^2)^3} \right)^m F_m(x, y) + \dots \right), \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $F_k(x, y) \in C^{(\infty, \infty)}(\bar{D})$, $k \in \mathbb{N}$.

Поэтому задача (1), (2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. В окрестности этих точек ряд (3) не только не приближает решение $u(x, y, \varepsilon)$, но даже теряет асимптотический характер [1].

Построение формального асимптотического разложения

Для построения формального асимптотического разложения (ФАР) решения задачи (1), (2) применяем модифицированный метод погранфункций [2, 3]. Этим же методом в работах [4, 5] исследованы бисингулярно возмущенные эллиптические уравнения, в которых предельное уравнение не является дифференциальным уравнением.

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(x, y, \varepsilon) = V(x, y, \varepsilon) + \Pi(x, \tau, \varepsilon) + W(\eta, y, \mu) + Q(\zeta, y, \mu), \quad (4)$$

где

$$V(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x, y)$$

– регулярное внешнее решение;

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(x, \tau)$$

– классическая пограничная функция;

$$W(\eta, y, \mu) = \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k w_k(\eta, y), \quad Q(\zeta, y, \mu) = \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k q_k(\zeta, y)$$

– обобщенные пограничные функции; $\tau = y/\varepsilon$, $\eta = (1-x)/\mu$, $\zeta = (1+x)/\mu$, $\varepsilon = \mu^3$.

Учитывая граничное условие (2), имеем

$$V(x, y, \varepsilon) \Big|_{y=x^2-1} = \psi(x, x^2-1); \quad (5)$$

$$P(x, \tau, \varepsilon) \Big|_{\tau=0} = \psi(x, 0) - V(x, 0, \varepsilon), \quad P(x, \tau, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty; \quad (6)$$

$$W(0, 0, \mu) = 0, \quad W(\eta, y, \mu) \rightarrow 0, \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty; \quad (7)$$

$$Q(0, 0, \mu) = 0, \quad Q(\zeta, y, \mu) \rightarrow 0, \quad \text{при } \zeta \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Подставляя (4) в (1), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \Delta v_k(x, y) - (1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial v_k(x, y)}{\partial y} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left(\frac{\partial^2 \pi_k(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_k(x, \tau)}{\varepsilon^2 \partial \tau^2} \right) - (1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \pi_k(x, \tau)}{\varepsilon \partial \tau} + \\ & + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \left(\frac{\partial^2 w_k(\eta, y)}{\partial \eta^2} - \eta(2-\mu\eta) \frac{\partial w_k(\eta, y)}{\partial y} + \mu^2 \frac{\partial^2 w_k(\eta, y)}{\partial y^2} \right) + \\ & + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \left(\frac{\partial^2 q_k(\zeta, y)}{\partial \zeta^2} - \zeta(2-\mu\zeta) \frac{\partial q_k(\zeta, y)}{\partial y} + \mu^2 \frac{\partial^2 q_k(\zeta, y)}{\partial y^2} \right) = \\ & = f(x, y) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} h_k(x, y). \end{aligned} \quad (9)$$

По идее метода, мы в правую часть последнего равенства ввели новую, пока неизвестную функцию $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(x, y)$, функции $h_k(x, y)$ конкретизируются ниже.

Регулярное внешнее решение

Из (5) и (9) для функции $v_k(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\Delta v_{k-1}(x, y) - (1-x^2) \frac{\partial v_{k-1}(x, y)}{\partial y} + h_{k-1}(x, y) \right) - \\ & - (1-x^2) \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} = f(x, y) - h_0(x, y), \end{aligned}$$

$$v_0(x, y) \Big|_{y=x^2-1} = \psi(x, x^2-1), \quad v_k(x, y) \Big|_{y=x^2-1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получим

$$-(1-x^2) \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} = f(x, y) - h_0(x, y), \quad v_0(x, y) \Big|_{y=x^2-1} = \psi(x, x^2-1); \quad (10)$$

$$(1-x^2) \frac{\partial v_k(x, y)}{\partial y} = \Delta v_{k-1}(x, y) + h_{k-1}(x, y), \quad v_k(x, y) \Big|_{y=x^2-1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Решения задач (10), (11) имеют соответственно вид

$$v_0(x, y) = -\frac{1}{(1-x^2)} \int_{x^2-1}^y (f(x, s) - h_0(x, s)) ds + \psi(x, x^2-1),$$

$$v_k(x, y) = -\frac{1}{(1-x^2)} \int_{x^2-1}^y (\Delta_{k-1}(x, s) + h_k(x, s)) ds.$$

Пусть $g_k(x, y) = -\Delta_{k-1}(x, y),$

тогда $v_k(x, y) \in C^{(\infty, \infty)}(\bar{D}), k = 0, 1, \dots,$

при $h_0(x, y) = (f(1, y)(1+x) + f(-1, y)(1-x))/2,$

$$h_k(y) = (g_k(1, y)(1+x) + g_k(-1, y)(1-x))/2, k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, мы построили регулярное внешнее решение:

$$V(x, y, \varepsilon) = \psi(x, x^2-1) + \frac{1}{(1-x^2)} \left\{ \int_{x^2-1}^y \left(\frac{f(1, s)(1+x) + f(-1, s)(1-x)}{2} - f(x, s) \right) ds + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\int_{x^2-1}^y \left(g_k(x, s) - \frac{g_k(1, s)(1+x) + g_k(-1, s)(1-x)}{2} \right) ds \right) \right\}.$$

Классическая пограничная функция

Из (6) и (9) для функции $\pi_k(x, \tau)$ имеем

$$\left(\frac{\partial^2 \pi_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} - (1-x^2) \frac{\partial \pi_0(x, \tau)}{\partial \tau} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \pi_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} - (1-x^2) \frac{\partial \pi_1(x, \tau)}{\partial \tau} \right) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\partial^2 \pi_k(x, \tau)}{\partial \tau^2} - (1-x^2) \frac{\partial \pi_k(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \pi_{k-2}(x, \tau)}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$\pi_0(x, 0) = \psi(x, 0) - v_0(x, 0), \pi_k(x, 0) = -v_k(x, 0), k \in \mathbb{N};$$

$$\pi_k(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$l\pi_0 \equiv \frac{\partial^2 \pi_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} - (1-x^2) \frac{\partial \pi_0(x, \tau)}{\partial \tau} = 0,$$

$$\pi_0(x, 0) = \psi(x, 0) - v_0(x, 0), \pi_0(x, \tau) \rightarrow 0, \text{ при } \tau \rightarrow -\infty; \quad (12)$$

$$l\pi_1 = 0, \pi_1(x, 0) = -v_1(x, 0), \pi_1(x, \tau) \rightarrow 0, \text{ при } \tau \rightarrow -\infty; \quad (13)$$

$$l\pi_k = -\frac{\partial^2 \pi_{k-2}(x, \tau)}{\partial x^2}, \pi_k(x, 0) = -v_k(x, 0), \pi_k(x, \tau) \rightarrow 0, \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, k > 1. \quad (14)$$

Задачи (12) – (14) имеют единственные решения, представимые соответственно в виде

$$\pi_0(x, \tau) = (\psi(x, 0) - v_0(x, 0)) e^{(1-x^2)\tau},$$

$$\pi_1(x, \tau) = -v_1(x, 0) e^{(1-x^2)\tau},$$

$$\pi_k(x, \tau) = e^{(1-x^2)\tau} (-v_k(x, 0) + \tau P_k(x, \tau)),$$

$k > 1, P_k(x, \tau)$ – ограниченная, гладкая функция.

Обобщенные пограничные функции

Функцию $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(x, y)$ представим в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} h_{1k}(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} h_{2k}(x, y),$$

где

$$h_{1k}(x, y) = f(1, y) - \frac{1-x}{2} f(1, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(g_k(1, y) - \frac{1-x}{2} g_k(1, y) \right),$$

$$h_{2k}(x, y) = f(-1, y) - \frac{1+x}{2} f(-1, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(g_k(-1, y) - \frac{1+x}{2} g_k(-1, y) \right).$$

Из (7) и (9) для функции $w_k(\eta, y)$ имеем

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \left(\frac{\partial^2 w_k(\eta, y)}{\partial \eta^2} - \eta(2 - \mu\eta) \frac{\partial w_k(\eta, y)}{\partial y} + \mu^2 \frac{\partial^2 w_k(\eta, y)}{\partial y^2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} h_{1k}(1 - \mu\eta, y),$$

$$w_k(0, 0) = 0, w_k(\eta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \eta \rightarrow +\infty.$$

Отсюда получим

$$Lw_{-1} \equiv \frac{\partial^2 w_{-1}(\eta, y)}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial w_{-1}(\eta, y)}{\partial y} = f(1, y),$$

$$w_{-1}(0, 0) = 0, w_{-1}(\eta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \eta \rightarrow +\infty; \quad (15)$$

$$Lw_0 = -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 w_{-1}(\eta, y)}{\partial \eta^2},$$

$$w_0(0, 0) = 0, w_0(\eta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \eta \rightarrow +\infty; \quad (16)$$

$$Lw_1 = -\eta^2 \frac{\partial w_0(\eta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_{-1}(\eta, y)}{\partial y^2},$$

$$w_1(0, 0) = 0, w_1(\eta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \eta \rightarrow +\infty; \quad (17)$$

$$Lw_{3k-1} = -\eta^2 \frac{\partial w_{3k-2}(\eta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_{3k-3}(\eta, y)}{\partial y^2} + g_k(1, y),$$

$$w_{3k-1}(0, 0) = 0, w_{3k-1}(\eta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \eta \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}; \quad (18)$$

$$Lw_{3k} = -\frac{\eta}{2} \left(2\eta \frac{\partial w_{3k-1}(\eta, y)}{\partial y} + g_k(1, y) \right) - \frac{\partial^2 w_{3k-2}(\eta, y)}{\partial y^2},$$

$$w_{3k}(0, 0) = 0, w_{3k}(\eta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \eta \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}; \quad (19)$$

$$Lw_{3k+1} = -\eta^2 \frac{\partial w_{3k}(\eta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_{3k-1}(\eta, y)}{\partial y^2},$$

$$w_{3k+1}(0, 0) = 0, w_{3k+1}(\eta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \eta \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Все эти задачи имеют единственные решения, удовлетворяющие заданным граничным условиям. Задачи такого типа встречаются в задачах диффузионного пограничного слоя [6].

Действительно, задачу

$$\frac{\partial^2 w(\eta, y)}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial w(\eta, y)}{\partial y} = \Phi(\eta, y),$$

$$w(0, 0) = 0, w(\eta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \eta \rightarrow +\infty$$

с помощью преобразования $t = 9y/8, z = \eta^{3/2}$ можно привести к уравнению

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} + \frac{1}{3z} \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} - \frac{4}{9\sqrt[3]{z^2}} \Phi(z, t),$$

$$w(0, 0) = 0, w(z, t) \rightarrow 0, \text{ при } z \rightarrow +\infty,$$

которое имеет решение [6]

$$w(z, t) = -\frac{2}{9} \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi, \tau) \frac{z^{1/3}}{t - \tau} e^{-\frac{z^2 + \xi^2}{4(t - \tau)}} I_{1/3} \left(\frac{z\xi}{2(t - \tau)} \right) d\xi d\tau,$$

где $I_{1/3}(s)$ – модифицированная функция Бесселя.

Асимптотическое поведение решения задач (15) – (20) при $\eta \rightarrow +\infty$, можно оп-
ределить с помощью ряда:

$$w_{-1}(\eta, y) = \frac{a_1(y)}{\eta} + \frac{a_2(y)}{\eta^2} + \dots + \frac{a_n(y)}{\eta^n} + \dots \quad (21)$$

Подставляя (21) в (15), имеем:=

$$\left\{ \frac{2a_1(y)}{\eta^3} + \dots + \frac{n(n+1)a_n(y)}{\eta^{n+2}} \right\} - 2\eta \left\{ \frac{a'_1(y)}{\eta} + \dots + \frac{a'_n(y)}{\eta^n} \right\} = f(1, y),$$

Отсюда

$$w_{-1}(\eta, y) = \frac{a_1(y)}{\eta} + \frac{a_4(y)}{\eta^4} + \dots + \frac{a_{3n+1}(y)}{\eta^{3n+1}} + \dots,$$

$$\text{где } a'_1(y) = -f(1, y)/2, \quad a'_{3n+1}(y) = (3n-2)(3n-1)a_{3n-2}(y),$$

$$a_{3n-1}(y) \equiv a_{3n}(y) \equiv 0, n \in \mathbb{N}.$$

Для решения задач (16) – (20) получим

$$w_0(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta^3}\right), w_1(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta^2}\right), w_{3k-1}(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta}\right),$$

$$w_{3k}(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta^3}\right), w_{3k+1}(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta^2}\right), k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, справедливо

$$\forall k, w_k(\eta, y) \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow +\infty;$$

$$w_k(\eta, y) \in C^\infty(\bar{D}), k = -1, 0, 1, \dots$$

Аналогично, из (8) и (9) для функции $q_k(\zeta, y)$ получим

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \left(\frac{\partial^2 q_k(\zeta, y)}{\partial \zeta^2} - \zeta(2 - \mu\zeta) \frac{\partial q_k(\zeta, y)}{\partial y} + \mu^2 \frac{\partial^2 q_k(\zeta, y)}{\partial y^2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} h_{2k}(1 - \mu\zeta, y),$$

$$q_k(0, 0) = 0, q_k(\zeta, y) \rightarrow 0 \text{ при } \zeta \rightarrow +\infty.$$

Отсюда, имеем

$$\begin{aligned}
 Pq_{-1} &\equiv \frac{\partial^2 q_{-1}(\zeta, y)}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial w_{-1}(\zeta, y)}{\partial y} = f(-1, y), \\
 q_{-1}(0, 0) &= 0, q_{-1}(\zeta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \zeta \rightarrow +\infty; \\
 Pq_0 &= -\frac{\zeta}{2} \frac{\partial^2 q_{-1}(\zeta, y)}{\partial \zeta^2}, q_0(0, 0) = 0, q_0(\zeta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \zeta \rightarrow +\infty; \\
 Pq_1 &= -\zeta^2 \frac{\partial q_0(\zeta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 q_{-1}(\zeta, y)}{\partial y^2}, q_1(0, 0) = 0, q_1(\zeta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \zeta \rightarrow +\infty; \\
 Pq_{3k-1} &= -\zeta^2 \frac{\partial q_{3k-2}(\zeta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 q_{3k-3}(\zeta, y)}{\partial y^2} + g_k(-1, y), \\
 q_{3k-1}(0, 0) &= 0, q_{3k-1}(\zeta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \zeta \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}; \\
 Pq_{3k} &= -\frac{\zeta}{2} \left(2\zeta \frac{\partial q_{3k-1}(\zeta, y)}{\partial y} + g_k(-1, y) \right) - \frac{\partial^2 q_{3k-2}(\zeta, y)}{\partial y^2}, \\
 q_{3k}(0, 0) &= 0, q_{3k}(\zeta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \zeta \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}; \\
 Pq_{3k+1} &= -\zeta^2 \frac{\partial q_{3k}(\zeta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 q_{3k-1}(\zeta, y)}{\partial y^2}, \\
 q_{3k+1}(0, y) &= 0, q_{3k+1}(\zeta, y) \rightarrow 0, \text{ при } \zeta \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Асимптотическое поведение решения этих задач при $\zeta \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$q_{3k-1}(\zeta, y) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right), q_{3k}(\zeta, y) = O\left(\frac{1}{\zeta^3}\right), q_{3k+1}(\zeta, y) = O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

Обоснование ФАР решения задачи (1), (2)

Пусть $R(x, y, \varepsilon) = u(x, y, \varepsilon) - u_n(x, y, \varepsilon)$,

$$\text{где } u_n(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k(x, y) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \pi_k(x, \tau) + \sum_{k=-1}^{3n} \mu^k w_k(\eta, y) + \sum_{k=-1}^{3n} \mu^k q_k(\zeta, y),$$

$R(x, y, \varepsilon)$ – остаточный член.

Тогда для $R(x, y, \varepsilon)$ получим задачу:

$$\varepsilon \Delta R - (1 - x^2) R_y = O(\varepsilon^{n+1/3}), R|_{\Gamma} = O(\varepsilon^{n+1/3}).$$

Из принципа максимума следует, что

$$R = O(\varepsilon^{n+1/3}).$$

Нами доказана

Теорема. Если $f(x, y) \in C^{(\infty, \infty)}(\bar{D})$, $f(\pm 1, y) \neq 0$, тогда для решения задачи (1), (2) справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{k/3} w_k\left(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, y\right) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{k/3} q_k\left(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, y\right)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заключение

Построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с граничными особыми точками, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет простые точки поворота на границе области. Главный член асимптотики решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру. Построенная равномерная асимптотика решения поставленной задачи не улучшаемая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
2. Alymkulov K. Analog of method of boundary layer function for the solution of the Lighthill's model equation with the regular singular point // American Journal Math. & Statistics. 2013. V. 3. No. 1. P. 53–61.
3. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 4. С. 484–487.
4. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6(26). С. 37–44.
5. Турсунов Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324. № 2. С. 31–35.
6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

Статья поступила 27.10.2014 г.

Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF A PERTURBED ELLIPTIC EQUATION WHEN THE LIMIT EQUATION HAS SINGULAR POINTS
DOI 10.17223/19988621/35/4

The classical method of boundary functions is used to construct asymptotic expansions of solutions of perturbed Prandtl–Tikhonov type equation in the case of the exponential asymptotic stability of solutions of the equation in the fast variable, i.e. when the condition of A.N. Tikhonov's theorem is satisfied. When this condition is not satisfied, the boundary functions method cannot be applied directly. For this reason, in such cases, many researchers previously used the Van Dyke matching principle. But the disadvantage of the method of matching is that the formal asymptotic expansion of the solution constructed by matching cannot be justified in all cases. We have proved the possibility of applying the method of boundary functions for constructing a uniform asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for the bisingular perturbed elliptic equation when the limit equation is the first order differential equation with singular points, and the condition of A.N. Tikhonov's theorem is not satisfied at these points. An estimate of the remainder term has been obtained, i.e., the formal asymptotic expansion solution of the problem has been justified. The uniform asymptotic expansion of the solution of the problem we have constructed consists of four solutions: the regular (smooth) external solution, the classical boundary layer solution, and two generalized boundary layer solution. The regular external part of the solution satisfies the boundary condition, and this solution has no singularities, i.e. is an everywhere smooth function. The classical boundary layer solution satisfies the second part of the boundary condition, and tends exponentially to zero outside the border inside the area. The generalized boundary functions satisfy the boundary condition at the singular points, and have the power damping property outside the singular points inside the region.

Keywords: asymptotic, solution, bisingular perturbed, elliptic type equation, singular point, Dirichlet problem, generalized method of boundary functions, boundary function, small parameter.

TURSUNOV Dilmurat A. (Doctor of Physics and Mathematics,
Ural State Pedagogical University, Yekaterinburg, Russian Federation)
E-mail: d_osh@rambler.ru

ERKEBAEV Ulukbek Zairbekovich, (Osh State University, Osh, Kyrgyzstan)
E-mail: uluk3188@mail.ru

REFERENCES

МЕХАНИКА

УДК 536.46:662.3

DOI 10.17223/19988621/35/5

В.Д. Барсуков, С.В. Голдаев, Н.П. Минькова, Н.А. Бабушкин**О ВЛИЯНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ЭКРАНА
НА ПОДВОДНОЕ ЗАЖИГАНИЕ ДВУХОСНОВНОГО
ТВЕРДОГО ТОПЛИВА СПИРАЛЬЮ НАКАЛИВАНИЯ,
НАГРЕВАЕМОЙ КОНДЕНСАТОРОМ¹**

Для варианта открытого газогенератора, в котором на поверхности шашки отсутствует бронировка, а локализация зоны горения обеспечивается с помощью термостойкого стакана, осуществлено обобщение ранее разработанной модели зажигания двухосновного твердого топлива под водой спиралью накаливания, разогреваемой при разряде конденсатора. Присутствие термостойкого стакана на торцевой поверхности шашки учтено в граничном условии с помощью «отрицательного источника», и он существенно влияет на время задержки зажигания, поэтому следует принимать во внимание влияние этого фактора.

Ключевые слова: газогенератор, твердое топливо, термостойкий стакан, металлический экран, спираль накаливания, электрическое сопротивление, электрическая емкость, конденсатор, напряжение, ток, зажигание, жидкая среда.

Среди многообразия газогенераторов на двухосновном твердом топливе (ДТТ), применяющихся в различных отраслях техники, можно выделить генераторы, которые работают в водной среде: при термогазохимическом воздействии на нефтяносные пласты [1], проведении аварийно-спасательных и подводно-технических операций [2] и др. Это обусловлено следующими факторами [3]: потенциальная энергия ДТТ в 2–5 раз превышает энергию сжатого воздуха, а генератор весит в 7 раз меньше, чем баллон высокого давления. Они допускают многолетнее хранение без регламентных проверок. Важно также наличие освоенной технологии изготовления ДТТ.

В ходе совершенствования подобных источников рабочего тела разработаны открытые генераторы (ОГ), у которых в качестве корпуса были сами шашки, имеющие защитные покрытия [1, 2]. Поэтому отпала необходимость упрочнения шашек, что позволило повысить их габаритно-массовые характеристики [4]. Охлаждение продуктов сгорания, подаваемых в оболочку плавучести из термостойкого материала, осуществлялось за счет их барботажа через окружающую во-

¹ Работа проведена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение № 14.578.21.0034, уникальный идентификатор ПНИ RFMEF157814X0034.

ду. Гидродинамика всплывающих пузырьков имеет сложный характер, о чем свидетельствует опыт исследования процессов, сопровождающих работу аппаратов погружного горения [5]. Малая скорость истечения газов из работающего в дозвуковом режиме ОГ, снижала дальнобойность струи, уменьшала потери рабочего тела из пространства, окруженного кожухом, внутри которого устанавливались ОГ. Однако ОГ не позволяли прекращать их работу в случае какой-либо нештатной ситуации, например отрыва от грунта одной оконечности поднимаемого объекта [2].

Для преодоления отмеченного недостатка был разработан способ [6] подводного сжигания ДТТ, защищенный патентом [7], согласно которому в жидкости размещается шашка топлива 1 в вертикальном положении (рис. 1).

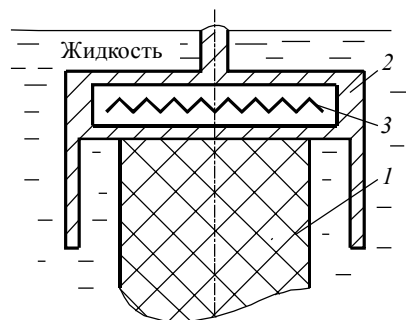


Рис. 1. Схема расположения шашки и термостойкого стакана при зажигании

В локализации зоны горения на верхнем торце перед зажиганием используется в перевернутом положении термостойкий стакан 2 (ТС), который охватывает верхнюю часть шашки, причём жидкость может полностью заполнять и образующийся между стенками и шашкой зазор. Донная часть ТС нагревается плоской спиралью накаливания 3 (ПСН) до температуры, превышающей температуру воспламенения $T_{\text{вс}}$ ДТТ. В результате обеспечивается кипение прилегающей жидкости и последующее зажигание топлива. Затем продукты горения вытесняют воду из зазора и всплывают.

За счет принудительного движения ТС вниз осуществляется поддержание горения, а погасание ДТТ происходит после остановки ТС или отвода его вверх.

Требуемая нагрузка на ТС определялась из условия, чтобы сила тяжести ТС была равна сумме сил тяги и Архимеда, создаваемых газами при оттекании от горячей поверхности и заполнении зазора между донным концом ТС и торцом шашки.

Опытная проверка предложенной схемы сжигания ДТТ в водной среде осуществлена в лабораторных условиях в резервуаре с прозрачными стенками [6]. ПСН была изготовлена из нихромовой проволоки диаметром 0.25 мм и длиной 70 мм. После подачи напряжения порядка 5 В, она развивала мощность 15 Вт, через 6–8 с осуществлялось воспламенение торцевой поверхности образца. После выхода на стационарный режим ТС отводился вверх, и горение прекращалось в течение долей секунды. Суммарное время процесса в зависимости от длины образцов изменялось в пределах 24–120 с. Результаты испытаний показали, что предложенный способ сжигания ДТТ обеспечивают безотказное воспламенение, стабильное горение, надёжное прерывание горения.

Параметры ПСН в работе [6] подбирались эмпирически, применительно к размерам зажигаемого образца и внешним условиям. В реальном подъемном устройстве могут использоваться шашки диаметром 0.2–0.4 м, а гидростатическое давление может достигать несколько МПа.

Расчет характеристик электровоспламенителя, используемого для зажигания под водой ДТТ с ТС, по упрощенной методике [9], в которой использовался критерий зажигания – достижение «температуры вспышки», а присутствие ТС на торцевой поверхности шашки учтено в граничном условии с помощью дополни-

тельного «отрицательного источника», показал, что ТС существенно влияет на время задержки, поэтому следует принимать во внимание влияние этого элемента.

Для обеспечения экстренного зажигания ДТТ можно использовать энергию заряженного конденсатора, входящего в конструкцию подрывных машинок (КПМ), широко применяемых в горнорудной промышленности [10] в качестве малогабаритного источника питания.

Характеристики серийных источников питания импульсного действия [10] приведены в таблице. Запасенная конденсаторами энергия вычислялась по формуле $E_0 = C_0 U_0^2 / 2$.

Параметры источников питания импульсного действия

№ п/п	Марка	Емкость C_0 , мкФ	Напряжение U_0 , В	Энергия E_0 , Дж	Масса, кг
1	ПИВ-100 м	10	650	2	2.7
2	КПМ –3	4	1600	5	1.6
3	ВП – 2000 м	50	1200	35	5.2

В монографии [2] представлены результаты теоретического и экспериментального анализа критических условий зажигания в водной среде стенок канала в образце ДТТ при импульсном подводе теплоты к поверхности контакта его с ПСН.

Источником энергии служили конденсаторы К-50-12, соединенные между собой параллельно, при этом емкость батареи изменялась в пределах 600...900 мкФ. Номинальное напряжение варьировалось в пределах 200–300 В. ПСН выполнялась из нихромовой проволоки $d_h = 0.25$ мм, сопротивление ПСН достигало 3–4 Ом.

Вначале цепь замыкалась на заряд конденсаторов до определенной емкости. С помощью другого переключателя производился разряд на ПСН. Возникновение устойчивого горения определялось визуально по началу истечения продуктов сгорания из канала образца в воду.

Рассмотрим вначале процесс зажигания стенок торцевой части образца ДТТ с помощью ПСН, когда пространство внутри ТС заполнено воздухом (рис. 1).

В работе [11] рассмотрена близкая задача, в которой проанализирована роль инертного вещества в виде хорошо проводящей теплоту пластинки толщиной δ_1 , идеально контактирующей одной своей поверхностью с ДТТ. На другую (внешнюю) сторону пластинки в течение времени экспозиции t_{ex} подается радиационный поток q_s .

Установлено, что если время воздействия лучистого нагрева мало, то после его отсечки образуется выпуклый температурный профиль, пластинка все время остается источником теплоты, идущей на создание расширяющегося теплового слоя [11]. Быстро понижающаяся температура поверхности ДТТ не дает возможностей для развития химической реакции. Если t_{ex} достаточно велико, то после отсечки импульса тепловой пограничный слой продолжает расти, «откачивая» теплоту из пластины. Однако достаточно высокая температура, сохраняющаяся в экране, при некотором значении толщины теплового слоя возбуждает прогрессирующее выделение теплоты от химического источника. В случае импульсного зажигания в течение некоторого времени развития процесса экран может стать стоком теплоты. Поэтому точка зажигания сдвигается внутрь ДТТ. Чем меньше t_{ex} , тем дальше от поверхности находится координата зажигания.

Физическая и математическая постановка задачи

В схеме зажигания ДТТ, изображенной на рис. 1, наличие ТС является экраном между торцевым участком поверхности образца ДТТ и ПСН, а возможность попадания воды в полость ТС будет дополнительным фактором, влияющим на результирующее количество теплоты, поступающее в ДТТ [9]. Затраты на нагрев донного участка ТС будут учтены аналогично варианту непрерывного выделения теплоты в ПСН [9] в граничном условии на поверхности образца, где расположено начало координат, а ось Ox – направлена в глубь ДТТ.

Воспользуемся опытом проектирования КПМ [10]. Считаем, что разряд конденсатора емкостью C_0 и заряженного до напряжения U_0 происходит во внешнюю цепь, имеющую только активное сопротивление. Изменение силы тока с течением времени t описывается выражением

$$I = \frac{U_0}{R_h} \exp\left(-\frac{t}{R_h \cdot C_0}\right), \quad (1)$$

где R_h – электрическое сопротивление проволоочки.

Плотность теплового потока, создаваемого ПСН, представляется в виде функции, экспоненциально убывающей со временем [10]:

$$q_h = q_{h0} \exp\left(-\frac{2t}{R_h \cdot C_0}\right), \quad (2)$$

где $q_{h0} = U_0^2 / (R_h \cdot S_h)$ – создаваемый ПСН максимальный тепловой поток в момент замыкания цепи; S_h – площадь нагрева, охватываемая ПСН.

В рамках тепловой теории зажигания, с использованием адиабатического критерия [12], температурное поле в ДТТ описывается дифференциальным уравнением теплопроводности, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_k}{\partial \xi^2} + \exp\left(\frac{\Theta_k}{1 + \beta \Theta_k}\right). \quad (3)$$

Начальное и граничные условия записываются как

$$\Theta_k(\xi; 0) = \Theta_0 = \text{const} \quad \text{при} \quad \tau = 0; \quad (4)$$

$$\Theta_k(\infty; \tau) = \Theta_0 = \text{const} \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty; \quad (5)$$

$$\text{при} \quad \xi = 0 \quad -\frac{\partial \Theta_k}{\partial \xi} = q e^{(-\sigma \tau)} - n \frac{\partial \Theta_k}{\partial \tau} - \text{Bi}_c (\Theta_k - \Theta_c), \quad (6)$$

где $\Theta = (T_k / T - 1) / \beta$, $\tau = t / t_m$, $\xi = x / l_m$.

Входящий в формулу (6) параметр $\sigma = 2t_m / (R_h C_0)$ характеризует отношение времени адиабатической индукции t_m к времени полного разряда конденсатора, равного $t_r \cong 2.3 \cdot R_h \cdot C_0$ [10].

Масштабная температура вычислялась по формуле, предложенной в монографии [2]:

$$T_m = \left(\frac{E_k}{R_u}\right) / \ln \left[\frac{q_{h0} c_k}{(c_h \rho_h d_h z_0 Q_k)} \right], \quad (7)$$

которая следует из граничного условия (6) в предположении, что

$$Bi_c = 0, \quad \partial \Theta_k / \partial \tau = 1, \quad \partial \Theta_k / \partial \xi = 0.$$

При этом сокращается число параметров задачи, так как $q = n$.

Масштабные время, координата и плотность теплового потока находятся так [12]:

$$t_m = \beta \frac{c_k \cdot T_m}{Q_k z_0} \exp\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad l_m = \sqrt{a_k t_m}, \quad q_m = \beta \cdot \frac{\lambda_k \cdot T_m}{l_m},$$

а безразмерные параметры определяются следующим образом:

$$\beta = \frac{R_u \cdot T_m}{E_k}, \quad q = \frac{q_s}{q_m}, \quad \Theta_0 = \left(\frac{T_0}{T_k} - 1\right) \frac{1}{\beta},$$

$$Bi_c = \frac{\alpha_{\text{eff}} l_m}{\lambda_k}, \quad q_m = \frac{q_h l_m}{\beta \lambda_k T_m}, \quad n = \frac{c_h \cdot \rho_h \cdot d_h + c_s \cdot \rho_s \cdot d_s}{c_k \cdot \rho_k \cdot x_a}. \quad (8)$$

Здесь ρ_k – плотность, кг/м³; c_k – удельная массовая теплоемкость, Дж/(кг·К); λ_k , a_k – коэффициенты теплопроводности, Вт/(м·К) и температуропроводности, м²/с; Q_k – тепловой эффект реакции, отнесенный к единице массы, Дж/кг; z_0 – предэкспоненциальный множитель, 1/с; E_k – энергия активации, Дж/моль; R_u – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К); c_h , ρ_h и d_h – удельная массовая теплоемкость, плотность и диаметр проволоочки; c_s , ρ_s и d_s – удельная массовая теплоемкость, плотность и толщина донной части ТС; α_{eff} – эффективный коэффициент теплоотдачи, соответствующий свободной конвекции над горизонтальной внезапно нагретой пластинкой.

Для обоснования выбора варианта расчета α_{eff} использовались результаты экспериментальных исследований нестационарной передачи теплоты в атмосфере от тонкой пластины, лежащей на горизонтальном нетеплопроводном основании, разогреваемой при разряде батареи высоковольтных конденсаторов емкостью 2400 мкФ, имеющей начальное напряжение 500–1500 кВ. Это обеспечивало варьирование температуры в центре теплового пятна в диапазоне 300–800 К [13].

Оценки с привлечением предложенного критерия показали, что для условий импульсного разогрева ПСН, коэффициент теплоотдачи имеет квазистационарное значение, которое можно вычислить по формулам для свободной конвекции.

Приближенный аналитический метод решения

Описываемая ниже приближенная методика расчета характеристик воспламенения основана на использовании адиабатического критерия – достижения равенства в месте контакта ДТТ с ПСН скорости изменения температуры инертного нагрева ($d\Theta_{\text{ins}}/d\tau$) скорости выделения теплоты от химических реакций. Для зависимости температуры поверхности образца ДТТ от времени на инертной стадии нагрева использовалось аналитическое решение, которое имеет вид [2]

$$\Theta_{\text{ins}}(\tau) = \Theta_c + \frac{qe^{(-\sigma\tau)}}{n(a_2 - a_1)} \int_0^\tau e^{(\sigma z)} [a_2 \Psi_2(a_2 \sqrt{z}) - a_1 \Psi_1(a_1 \sqrt{z})] dz, \quad (9)$$

где для краткости одинаковые комплексы обозначены таким образом:

$$\Psi_i(a_i \sqrt{\tau}) = \exp(a_i \sqrt{\tau})^2 \operatorname{erfc}(a_i \sqrt{\tau}). \quad (10)$$

Здесь $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$ – дополнительный интеграл вероятностей.

Входящие в (9) параметры a_1 и a_2 вычисляются по формулам

$$a_1 = n(1 - \delta_1)/2, \quad a_2 = n(1 + \delta_1)/2, \quad \delta_1 = \sqrt{1 - 4n \text{Bi}_c}, \quad 1 - 4n \text{Bi}_c > 0.$$

Для нахождения момента времени, когда будет выполнено условие зажигания по адиабатическому методу, требуется многократно находить значение определенного интеграла от специальной функции. С целью сокращения объема вычислений и аварийной остановки программы из-за переполнения при нахождении значений экспоненты, формула (9) была преобразована путем выполнения операции интегрирования. Получено следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Theta_s(\tau) = \Theta_c + \frac{w_2 \Psi_2(a_2 \sqrt{z}) - w_1 \Psi_1(a_1 \sqrt{z}) + e^{(-\sigma\tau)}(w_1 - w_2)}{(a_2 - a_1)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(w_{22} - w_{12})}{(a_2 - a_1)} \int_0^\tau \frac{e^{[\sigma(z-\tau)]}}{\sqrt{z}} dz, \end{aligned} \quad (11)$$

где $w_1 = a_1 / (\sigma + a_1^2)$, $w_2 = a_2 / (\sigma + a_2^2)$; $w_{12} = a_1^2 / (\sigma + a_1^2)$, $w_{22} = a_2^2 / (\sigma + a_2^2)$.

Оценки показали, что для интересующих нас вариантов обеспечения безотказного зажигания $a_1^2 \ll \sigma$, $a_2^2 \ll \sigma$, поэтому $w_1 \cong a_1 / \sigma$, $w_2 \cong a_2 / \sigma$; $w_{12} \cong a_1^2 / \sigma$, $w_{22} \cong a_2^2 / \sigma$ и выражение (11) упрощается:

$$\Theta_{sp}(\tau) = \Theta_c + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{a_2 \Psi_2(a_2 \sqrt{z}) - a_1 \Psi_1(a_1 \sqrt{z})}{a_2 - a_1} - e^{(-\sigma\tau)} + \frac{(a_2 + a_1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{e^{[\sigma(z-\tau)]}}{\sqrt{z}} dz \right]. \quad (12)$$

Сравнение результатов, полученных по формулам (11) и (12), показало практическое их совпадение.

Дифференцируя (12) по τ , получаем

$$\frac{d\Theta_{sp}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{a_2^3 \Psi_2(a_2 \sqrt{z}) - a_1^3 \Psi_1(a_1 \sqrt{z})}{a_2 - a_1} + \sigma e^{(-\sigma\tau)} + \frac{(a_2 + a_1)}{\sqrt{\pi\tau}} \right].$$

В этом выражении первым слагаемым в квадратной скобке можно пренебречь вследствие его малости:

$$\frac{d\Theta_{sp}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\sigma} \left[\sigma e^{(-\sigma\tau)} + \frac{(a_2 + a_1)}{\sqrt{\pi\tau}} \right]. \quad (13)$$

Вычисление интеграла вероятностей осуществлялось по интерполяционной формуле из [14]:

$$\text{erf}(x) = 1 - z[k_1 + z(k_2 + k_3 z)] \exp(-x^2), \quad (14)$$

где $z = 1/(1 + k_0 \cdot x)$; $k_0 = 0.471$, $k_1 = 0.348$, $k_2 = -0.096$, $k_3 = 0.748$.

Использование зависимости (14) особенно удобно при нахождении произведения функций $\exp(x^2)[1 - \text{erf}(x)]$, имеющегося в (12) и (13), которое заменяется полиномом вида $z[k_1 + z(k_2 + k_3 z)]$.

Поскольку в рассматриваемой задаче тепловой поток является переменным (быстро убывающим), то при обработке результатов численных расчетов использовалось осредненное его значение, вычисляемое по формуле

$$q_{hc} = \frac{1}{t_r} \int_0^{t_r} q_h dt = \frac{U_0^2}{4,6R_h \cdot S_h}. \quad (15)$$

Отметим, что q_{hc} косвенно зависит от C_0 через t_r и влияет на параметр σ , уменьшая его с увеличением C_0 . Другой вариант обработки данных – привлечение начального значения удельной электрической энергии, равного отношению $A_0 = E_{c0} / S_h$.

Результаты численных расчетов

Параметрический анализ проведен для ПСН из нихромовых проволочек с разными диаметрами. На рис. 2 представлены расчетные данные t_z от A_0 для ДТТ типа Н. ПСН предполагалась выполненной из проволоки длиной 140 мм и диаметром: для вариантов 1 и 2 – 0.1 мм, а в варианте 3 – 0.25 мм. При фиксированном начальном напряжении $U_0 = 1600$ В значения емкости варьировались в пределах от 4 до 40 мкФ. Тепловая нагрузка A_0 изменялась от 0.06 до 0.69 МДж/м². Время зажигания уменьшилось от 9.1 до 8.3 мс.

Установка ТС на торцевую часть шашки приводит к появлению экрана между поверхностью ДТТ и ПСН толщиной 1 мм. Варьирование U_0 от 950 до 2000 В увеличило энергию конденсатора от 22.6 до 100 Дж, соответствующая тепловая нагрузка возросла от 0.3 до 1.34 МДж/м², а время зажигания уменьшилось от 347 до 60 мс (кривая 1). Для варианта с $C_0 = 5$ мкФ и напряжением 1600 В за время разряда температура нагреваемой поверхности шашки достигла только 396 К.

В следующей серии расчетов емкость конденсатора изменялась от 10 до 80 мкФ, а напряжение оставлено равным 1600 В. Результаты представлены в виде кривой 2. Как видно, эти кривые пересекаются при $A_0 = 0.85$ МДж/м².

Для меньших значений A_0 времена задержки зажигания существенно выше, когда начальная емкость конденсатора C_0 больше. Из структуры зависимости (2) для плотности теплового потока, создаваемого ПСН, следует, что его амплитуду определяет начальное напряжение U_0 . Значение емкости оказывает влияние на развитие процесса нагрева образца во времени – при больших C_0 (параметр σ меньше) повышение температуры происходит медленнее и время зажигания повышается. Такая зависимость

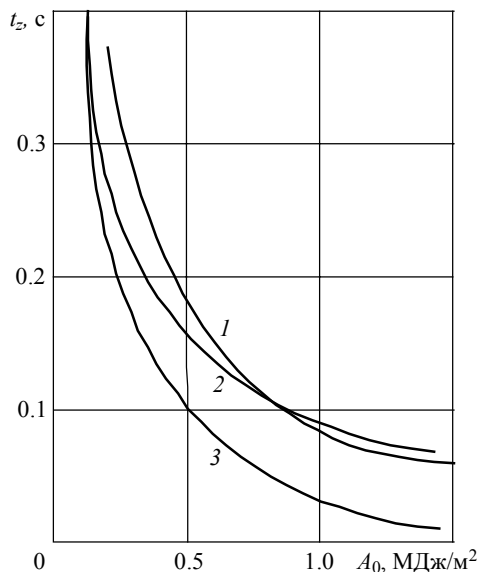


Рис. 2. Зависимость времени зажигания от тепловой нагрузки для различных диаметров проволочек при наличии экрана между ПСН и поверхностью ДТТ

характерна для источников питания с фиксированным запасом энергии, интенсивность выделения в которых зависит от U_0 и C_0 .

Изменение диаметра проволоочки сказывается через параметры n и q_{hc} . В варианте 3 была использована проволочка в 2.5 раза толще, в результате значение параметра n стало в 2.5 раз больше. Однако ее электрическое сопротивление уменьшилось в 6.25 раз, при этом осредненное значение теплового потока возросло в 6.25 раз, что привело к уменьшению времени зажигания.

Как показано ранее [2], необходимым условием зажигания ДТТ под водой является создание на его поверхности кризиса теплообмена, существенно снижающего «сток» теплоты в окружающую среду. Рассмотрен вариант, когда выделение теплоты в нагревателе происходило с постоянной интенсивностью и соответствовало квазистационарной стадии теплообмена, при котором время перехода к новому режиму было меньше времени изменения q_{h} .

При резком увеличении мощности нагревателя возможен переход от однофазного конвективного теплообмена к пленочному кипению с последующим нестационарным повышением температуры [15]. Поэтому в случае использования источника тока импульсного действия можно ожидать кратковременного возникновения обстановки, необходимой для зажигания [2].

Заключение

На основе адиабатического метода получены выражения для расчета характеристик зажигания торцевой части шашки ДТТ, имеющей термостойкий стакан, во внутренней полости которого размещена ПСН, нагреваемая при разряде конденсатора. Проведенный анализ показал, что наличие тонкого стального экрана между ПСН и торцевой поверхностью шашки из ДТТ приводит к существенной задержке зажигания. Для реализации этого процесса требуются источники энергии, позволяющие создавать на участке нагрева ДТТ плотность энергии более 30 МДж/м². В частности, могут быть использованы взрывные приборы типа ВП-2000.

Разработанная и реализованная на персональном компьютере методика прогнозирования дает возможность целенаправленно выбирать элементы цепи, обеспечивающие безотказное зажигание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чазов Г.А., Азаматов В.И., Якимов В.В. и др. Термогазохимическое воздействие на малодобитные и осложненные скважины. М.: Недра, 1986. 150 с.
2. Барсуков В.Д., Голдаев С.В. Подводное зажигание и горение унитарных твердых топлив. Теория, эксперимент, технические предложения. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. 343 с.
3. Шишков А.А., Румянцев Б.В. Газогенераторы ракетных систем. М.: Машиностроение, 1981. 152 с.
4. Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Минькова Н.П. Совершенствование открытых газогенераторов для проведения аварийно – спасательных и подводно-технических работ // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады Всероссийской конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012. С. 49–50.
5. Алабовский А.Н., Удыма П.Г. Аппараты погружного горения. М.: Издательство МЭИ, 1994. 256 с.
6. Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Минькова Н.П., Полечук С.Н. Новый способ подводного сжигания унитарного твёрдого топлива при движении фронта горения сверху вниз // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 64–65.

7. Патент 2345277 РФ. Способ сжигания унитарного твердого топлива в жидкой среде / В.Д. Барсуков, С.В. Голдаев, Н.П. Минькова, С.Н. Поленчук. Оpubл. в БИ № 3 от 27.01.2009.
8. Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Минькова Н.П. О докритическом режиме подводного сжигания унитарного твёрдого топлива при движении фронта горения сверху вниз // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: материалы конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 63–64.
9. Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Минькова Н.П., Бабушкин Н.А. О зажигании под водой двухосновного твердого топлива с термостойким стаканом спиралью накалывания средней мощности // Материалы Двадцатой Всероссийской научно-технической конференции «Энергетика: эффективность, надежность, безопасность»: в 2 т. Т. 1. Томск: СПБ Графикс, 2014. С. 163–166.
10. Граевский М.М. Справочник по электрическому взрыванию зарядов. М.: Недра, 2001. 240 с.
11. Дик И.Г., Зурер А.Б., Князева А.Г. О зажигании конденсированного вещества импульсным тепловым потоком через непрозрачный экран с большой теплопроводностью // Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25. № 6. С. 3–9.
12. Виллюнов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука, 1984. 185 с.
13. Заславский Б.И., Юрьев Б.В. О конвективном теплоотводе от внезапно возникшего горизонтального теплового пятна // Журнал прикладной механики и технической физики. 1989. № 4. С. 112 – 116.
14. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
15. Павлов Ю.М., Бабич В.И. Расчет кризиса теплоотдачи при быстром росте теплового потока на поверхности кипения // Теплоэнергетика. 1987. № 2. С. 8–12.

Статья поступила 26.01.2015 г.

Barsukov V.D., Goldaev S.V., Minkova N.P., Babushkin N.A. METAL SHIELD INFLUENCE ON UNDERWATER IGNITION OF A DIBASIC SOLID PROPELLANT WITH A SPIRAL HEATED BY A CAPACITOR

DOI 10.17223/19988621/35/5

The earlier developed model of underwater ignition of the dibasic solid propellant (DSP) by a spiral filament is generalized for an open gas generator in which there is no surface armor protection and burning zone localization is provided by means of a heat-resistant glass that is considered under a model boundary condition by means of an additional “negative source”. The calculations were based on the adiabatic method. The presence of a heat-resistant glass on the end face essentially affects the ignition delay time. The spiral filament is heated during the discharge of the capacitor.

To enable the required ignition process, the energy sources should produce an energy density of more than 30 MJ/m² at the DSP heating area.

Keywords: gas generator, propellant, heat-resistant glass, metal screen, spiral filament, electrical resistance, electrical capacitance, capacitor, voltage, current, ignition, fluid medium

BARSUKOV Vitaly Dementevich (Doctor of technical Sciences,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: barsukov@niipmm.tsu.ru

GOLDAEV Sergey Vasilevich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: svgoldaev@rambler.ru

MINKOVA Natalia Petrovna (Candidate of technical Sciences,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: n.p.minkova@mail.ru

BABUSHKIN Nikita Aleksandrovich (graduate student,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: atikin89@tpu.ru

REFERENCES

- Термогазохимическое воздействие на малодобитные и осложненные скважины / Г.А. Чазов, В.И. Азаматов, В.В. Якимов и др. М.: Недра, 1986. 150 с.
- Барсуков В.Д., Голдаев С.В. Подводное зажигание и горение унитарных твердых топлив. Теория, эксперимент, технические предложения Томск: Изд-во Том. ун-та. 2003. 343 с.
- Шишков А.А., Румянцев Б.В. Газогенераторы ракетных систем. М.:Машиностроение, 1981. 152 с.
- Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Минькова Н.П. Совершенствование открытых газогенераторов для проведения аварийно –спасательных и подводно-технических работ /В кн.: Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады Всероссийской конференции. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012. – С.49 – 50.
- Алабовский А. Н., Удыма П. Г. Аппараты погружного горения. – М.: Издательство МЭИ. 1994. – 256 с.
- Новый способ подводного сжигания унитарного твёрдого топлива при движении фронта горения сверху вниз / В. Д. Барсуков, С. В. Голдаев, Н. П. Минькова, С. Н. Поленчук // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы конференции. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. – С. 64–65.
- Патент 2345277 РФ Способ сжигания унитарного твердого топлива в жидкой среде //В. Д. Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Минькова Н.П., Поленчук С.Н. Оpubл. в БИ №3 от 27.01.2009.
- Барсуков В.Д. О докритическом режиме подводного сжигания унитарного твёрдого топлива при движении фронта горения сверху вниз /В.Д. Барсуков, С.В. Голдаев, Н. П. Минькова //Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы конференции. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. – С. 63–64.
- О зажигании под водой двухосновного твердого топлива с термостойким стаканом спиралью накаливания средней мощности/ В.Д. Барсуков, С.В. Голдаев, Н.П. Минькова, Н.А. Бабушкин/Энергетика: эффективность, надежность, безопасность: Материалы двадцатой всероссийской научно-технической конференции в 2-х томах – Т.1 Томск: СПБ Графискс, 2014 – С. 163–166.
- Граевский М.М. Справочник по электрическому взрыванию зарядов М.: Недра, 2001. 240 с.
- Дик И.Г., Зурер А.Б., Князева А.Г. О зажигании конденсированного вещества импульсным тепловым потоком через непрозрачный экран с большой теплопроводностью //Физика горения и взрыва. 1989. Т.25, № 6. С. 3 – 9.
- Виллюнов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ / Новосибирск: Наука, 1984. 185 с.
- Заславский Б.И., Юрьев Б.В. О конвективном теплоотводе от внезапно возникшего горизонтального теплового пятна //Журнал прикладной механики и технической физики. 1989. №4. С.112 – 116.
- Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
- Павлов Ю.М., Бабич В.И. Расчет кризиса теплоотдачи при быстром росте теплового потока на поверхности кипения //Теплоэнергетика. 1987. №2. С.8 – 12.

УДК 531.5

DOI 10.17223/19988621/35/6

В.В. Буркин, А.С. Дьячковский, А.Н. Ищенко, В.З. Касимов, К.С. Рогаев

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТВОЛЬНОГО СТАРТА МОДЕЛИ С ИМПУЛЬСНЫМ РЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ¹

Представлена математическая модель, позволяющая описывать внутрибаллистические процессы как в ствольном ускорителе, так и в камере сгорания малогабаритного импульсного реактивного двигателя (МИРД), расположенного внутри модели, при движении ее в стволе. Посредством данной модели исследованы газодинамические особенности ствольного старта модели с МИРД.

Ключевые слова: математическое моделирование, внутренняя баллистика, импульсный реактивный двигатель.

Экспериментальное исследование движения модели с работающим реактивным двигателем в ствольном ускорителе затруднено отсутствием информации о времени включения двигателя и положении модели в канале ускорителя. Для исследования таких процессов привлекаются различные математические модели. Одной из современных математических моделей внутрибаллистических процессов является разработка, приведенная в [1] и реализованная в виде программного комплекса [2].

Данная математическая модель позволяет проводить баллистическое проектирование с различными схемами заряжания, в том числе с использованием схемы с дополнительным реактивным подгоном за счет присоединенного заряда (ПЗ). Учет особенностей той или иной схемы заряжания производится путем конкретизации граничных условий.

Для классической схемы заряжания на модели задаются граничные условия непротекания, при этом для определения скорости и положения снаряда интегрируется уравнение движения:

$$m_m \frac{d^2 x_m}{dt^2} = S(p_l - p_r) - F_{fr}, \quad (1)$$

где m_m – масса модели; x_m – координата левого торца модели; F_{fr} – сила трения; p_l, p_r – давления слева и справа от модели соответственно.

Если при проведении расчетов учитывается влияние противодействия, то величина p_r определяется из решения автомодельной задачи о скачке уплотнения, движущемся по покоящейся среде, подчиняющейся соответствующему уравнению состояния.

Уравнение движения модели в виде (1) записано в предположении, что задняя поверхность модели плоская и полностью перекрывает поперечное сечение ствола. Вместе с тем известно, что это не выполняется для реальных конфигураций

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 2014/223 (код проекта 1362).

кормовых частей моделей. Учет этих конфигураций возможен в рамках квазиодномерной постановки. Это достигается путем надлежащего задания функции $s(x, t)$, определяющей зависимость площади поперечного сечения от пространственной координаты и времени. Поясним это на примере присоединенного к модели подвижного заряда (ПЗ), показанного на рис. 1. Введем подвижную систему координат, связанную с моделью, ось 0ξ которой направим по оси симметрии канала ствола в сторону, противоположную направлению движения модели. Если не рассматривать наличие ПЗ, то сечение $\xi=0$ является границей, отделяющей пороховые газы и модель. В лабораторной системе координат этому сечению соответствует координата $x = x_m(t)$. Если аппроксимировать площадь поперечного сечения хвостовика, расположенного левее сечения $\xi=0$, функцией $s_f(\xi)$, то

$$s(x, t) = s_g(x) - s_f(x_m(t) - x). \quad (2)$$

Здесь $s_g(x)$ – зависимость площади поперечного сечения камеры и ствола установки.

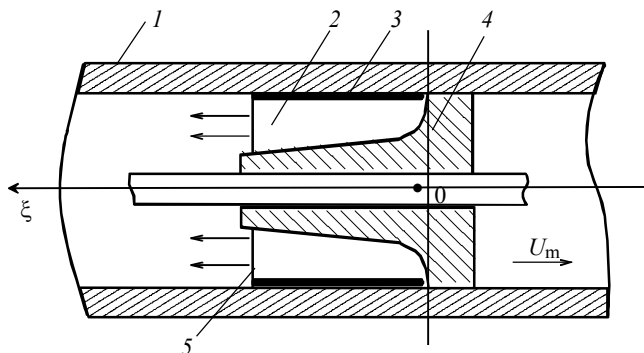


Рис. 1. Схема размещения присоединенного заряда: 1 – ствол; 2 – присоединенный заряд; 3 – бронирующее покрытие; 4 – ведущее устройство с хвостовиком; 5 – фронт горения

Аналог уравнения (1) для определения скорости и положения модели имеет вид

$$m_m \frac{d^2 x_m}{dt^2} = \int_{x_m - \xi_0}^{x_m} p s'_t(x_m - x) dx + p(x_m) s(x_m, t) - F_{fr}, \quad (3)$$

где ξ_0 – координата левого торца хвостовика в системе координат 0ξ .

Для схемы с ПЗ уравнение движения сборки ПЗ – модель в неподвижной системе координат будет иметь вид

$$\left[m_m + \int_{x_m - \xi_0}^{x_m - \xi_1} \delta_s s(x, t) dx \right] \frac{d^2 x_m}{dt^2} = \int_{x_m - \xi_0}^{x_m - \xi_1} p s'_t(x_m - x) dx + p_s s(x_m - \xi_1, t) - F_{fr} \quad (4)$$

где δ_s – средняя плотность ПЗ; ξ_1 – координата фронта горения в системе координат 0ξ ; p_s – давление в топливе ПЗ справа от разрыва.

В результате проведенных модификаций математической модели появляется возможность описания внутрибаллистических процессов как в ствольном ускорителе, так и в камере сгорания малогабаритного импульсного реактивного двигателя (МИРД), расположенном внутри модели, при движении его в стволе. При этом

возможно моделировать внутрибаллистические процессы как на этапе развитого горения внутри МИРД, когда реализуются условия критического истечения из камеры сгорания двигателя, так и при начале горения топлива.

Для демонстрации газодинамических особенностей ствольного старта МИРД использовалась зависимость скорости послыонного горения топлива в МИРД в виде

$$u_g(p) = Ap^{0.8}. \quad (5)$$

Расчеты по модифицированной модели выстрела проводились для модели с МИРД, показанной на рис. 2.

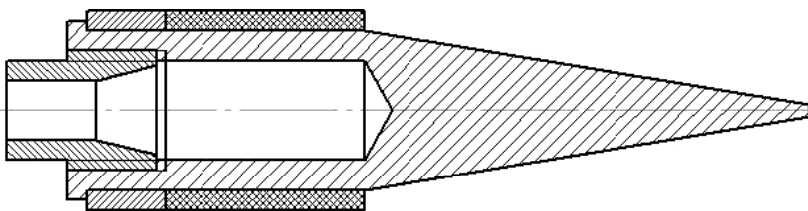


Рис. 2. Общий вид модели с МИРД

Поскольку модификация математической модели заключается в задании зависимости $s(x,t)$ и вычислении действующей на подвижную часть хвостовика модели силы со стороны продуктов сгорания, а зависимость $s(x,t)$ может быть задана как за счет выбора внешней образующей камеры сгорания, так и за счет задания образующей центрального тела, то для унификации программной реализации был выбран второй способ. Образующая центрального тела, эквивалентная по зависимости $s(x,t)$, показана на рис. 3.

С использованием модифицированной методики были проведены расчеты старта модели с МИРД при следующих условиях. Для заряда МИРД массой 3.06 г плотностью 1.5 г/см³ начальная координата левого торца топлива равна примерно $\xi = -2.6$ см. Для более точного расчета процессов в МИРД строилась расчетная сетка, неподвижная относительно траектории $\xi = 0$. Стыковка с подвижной расчетной сеткой внутри ускорителя проводилась в сечении с координатой $\xi = -4.5$ см.

На рис. 4 – 7 показаны результаты расчетов для коэффициента в законе горения $A = 0.18$, при этом размерность скорости – см/мс, а давления – 0.1 МПа. Представлены распределения давления (рис. 4), скорости продуктов сгорания (рис. 5), величины числа Маха относительно движущейся модели с учетом вектора скорости газа в лабораторной системе координат (рис. 6) по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени с шагом

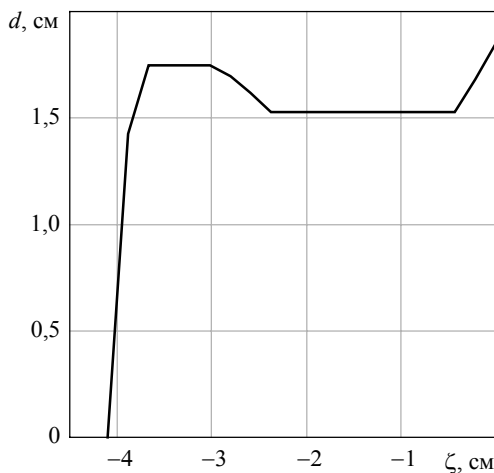


Рис. 3. Образующая центрального тела, эквивалентная по площади поперечного сечения модели МИРД, с учетом направления движения

в 0.1 мс. Также показана эпюра максимальных давлений в различных сечениях ствола (рис. 7).

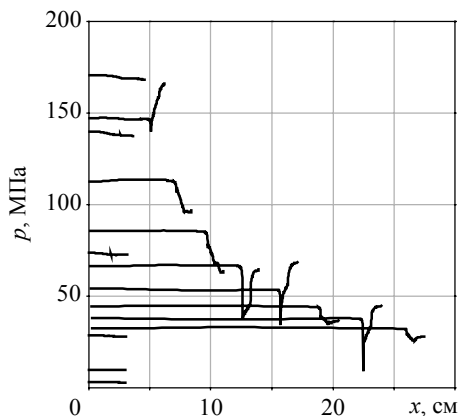


Рис. 4. Распределение давления по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени для $A = 0.18$

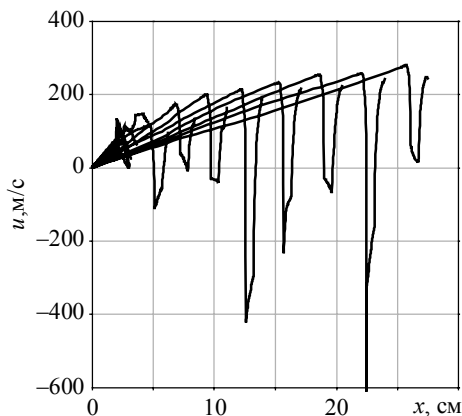


Рис. 5. Распределение скорости продуктов сгорания по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени для $A = 0.18$

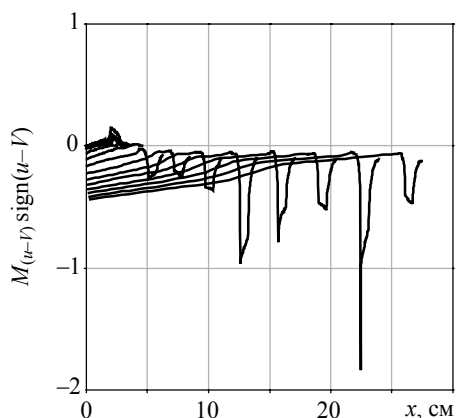


Рис. 6. Распределение величины числа Маха продуктов сгорания относительно движущейся модели с учетом вектора скорости газа в лабораторной системе координат по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени для $A=0.18$

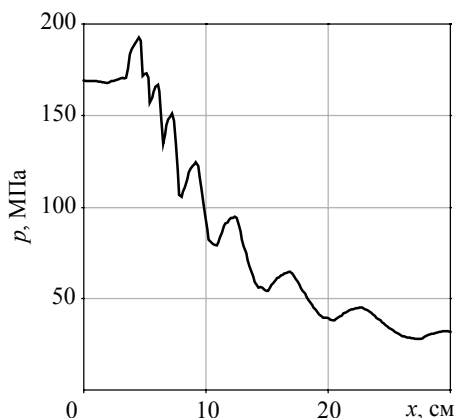


Рис. 7. Эпюра максимальных давлений в различных сечениях ствола для $A = 0.18$

Режим работы ствольного ускорителя с МИРД при данном коэффициенте скорости горения характеризуется интенсивными волновыми процессами, распространяющимися по заснарядному объему ствольного ускорителя и камере сгорания МИРД. Недостаточно высокая скорость послойного горения топлива внутри камеры сгорания не позволяет установиться стабильному критическому режиму истечения из сопла МИРД. В результате режим работы МИРД внутри ускорителя имеет колебательный характер.

Для иллюстрации отличий режимов совместной работы МИРД со ствольным ускорителем на рис. 8 – 11 показаны результаты расчетов для коэффициента $A=0.4$. На рис. 8 представлены распределения давления по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени с шагом в 0.1 мс. После включения МИРД в работу в момент времени 0.6 мс в течение некоторого промежутка времени происходит согласование режимов течения в ствольном ускорителе и внутри МИРД. Это иллюстрируется данными, показанными на рис. 9, где представлены зависимости, аналогичные показанным на рис. 8, но соответствующими моментам времени 0.6, 0.62, 0.64, 0.66 мс. В дальнейшем течение продуктов сгорания в МИРД происходит в режиме критического истечения через сопловой блок

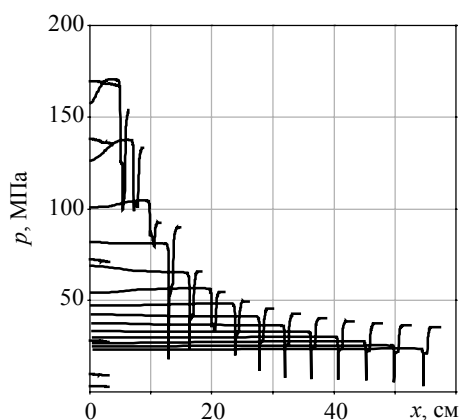


Рис. 8. Распределение давления продуктов сгорания по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени для $A=0.4$

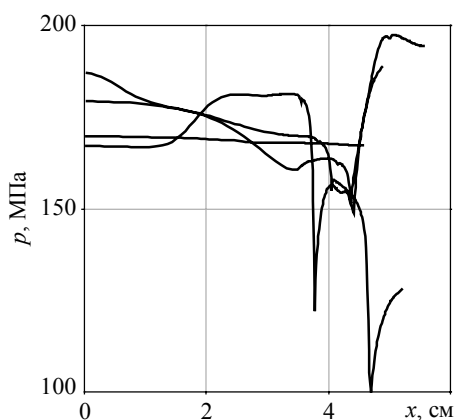


Рис. 9. Распределение давления продуктов сгорания по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени с 0.6 до 0.66 мс с шагом 0.02 мс для $A=0.4$

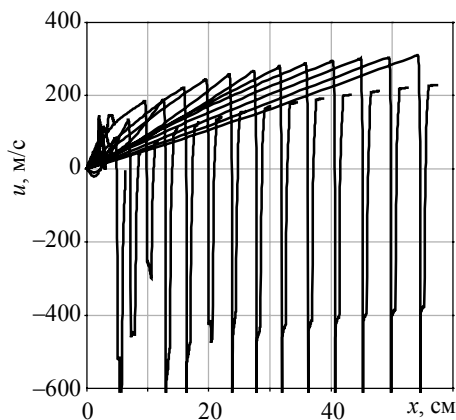


Рис. 10. Распределение скорости продуктов сгорания по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени для $A=0.4$

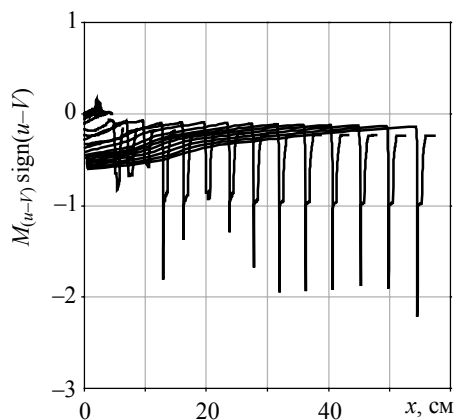


Рис. 11. Распределение величины числа Маха продуктов сгорания относительно движущейся модели с учетом вектора скорости газа в лабораторной системе координат по осевой координате ускорителя и МИРД в различные моменты времени для $A = 0.4$

в условиях спада давления в ускорителе и соответствующего понижения давления в камере сгорания вследствие увеличения объема, занятого продуктами сгорания. На рис. 10 и 11 показаны зависимости, аналогичные представленным на рис. 5 и 6.

На рис. 12 показана модель с работающим МИРД на внешнетраекторном участке полета. Видна струя истекающих газов из двигателя.

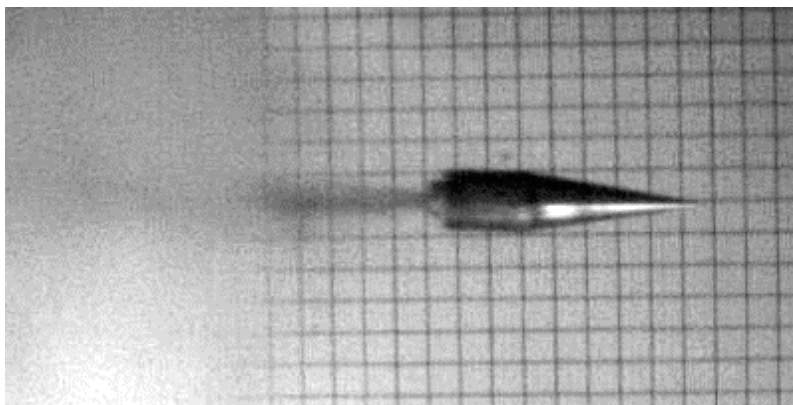


Рис. 12. Модель с работающим МИРД на внешнетраекторном участке полета

Представленные результаты расчетов внутрибаллистических процессов в ствольном ускорителе и в камере МИРД в сопряженной постановке соответствуют известным закономерностям внутрикамерных процессов в реактивных двигателях. Расчетные и экспериментальные значения скорости модели совпадают с точностью 3–5 %. Это позволяет использовать модифицированную модель артиллерийского выстрела с использованием моделей с реактивным двигателем в стволе баллистической установки при проведении прогнозных расчетов по оценке возможностей применения ствольных ускорителей для метания моделей с МИРД.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
2. Касимов В.З., Хоменко Ю.П., Тихонов А.Н., Шехобалов А.А. Программа газодинамического расчета внутрибаллистических процессов в ствольных системах. № 2000611040 // Программы для ЭВМ, базы данных и топологии интегральных микросхем. Офиц. бюлл. Роспатент. М., 2001. № 1(34). С. 42–43.

Статья поступила 30.03.2015 г.

Burkin V. V., Diachkovsky A. S., Ishchenko A.N., Kasimov V. Z., Rogaev K.S. Investigation of GAS-DYNAMIC FEATURES OF A MOVING MODEL WITH A PULSE JET ENGINE (CPJE) INSIDE A BARREL

DOI 10.17223/19988621/35/6

The mathematical model allowing one to describe interior ballistics processes in the barrel and in the combustion chamber of a compact pulse jet engine (CPJE) located within the model while it moves in the barrel is presented. On the basis of the scheme with a traveling charge (TC), a modification creating various conditions of charge burning in the combustion chamber of the

engine of the mathematical model is described. The calculation of the interior ballistics processes in the barrel and chamber of CPJE in adjoint problem formulation corresponds to the known laws of inside-chamber processes in jet engines. The critical mode expiration of the nozzle and transient mode of the CPJE behavior are discussed. The calculated curves of the maximum pressure distribution along the barrel and graphs of pressure products combustion in the axial coordinate at different times are presented. The calculated and experimental values of the velocity coincide with an accuracy of 3–5 %. The gas-dynamic features of the moving model with a CPJE inside the barrel were researched via this mathematical model. Experimental results of the body motion during the exterior part of the trajectory with a running CPJE are presented.

Keywords: mathematical modeling (simulation), interior ballistics, pulse jet engine

BURKIN Viktor Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Scientific research institute of applied mathematics and mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: rozaburkina@yandex.ru

DIACHKOVSKY Alexey Sergeevich (Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: Lex_okha@mail.ru

ISHCHENKO Alex Nikolayevich (Doctor of Physics and Mathematics, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

KASIMOV Vladimir Zinatovich (Doctor of Physics and Mathematics, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ksm@niipmm.tsu.ru

ROGAEV Konstantin Sergeevich (Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: rogaev@ff.tsu.ru

REFERENCES

УДК 532.546: 519.63

DOI 10.17223/19988621/35/7

Х.М. Гамзаев

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ДВУХПЛАСТОВОЙ ВОДОНОСНОЙ СИСТЕМЕ

Рассматривается процесс движения несжимаемой жидкости в одномерном водоносном пласте при наличии гидродинамической связи с нижележащим пластом. Гидравлический напор в нижнем пласте считается неизвестным. Вопрос моделирования процесса сводится к решению обратной задачи по восстановлению правой части дифференциального уравнения движения жидкости. Построен разностный аналог обратной задачи и предложен вычислительный алгоритм решения полученной системы разностных уравнений.

Ключевые слова: водоносный пласт, гидродинамическая связь, обратная задача по восстановлению правой части, разностный метод.

Исследование движения жидкостей в водоносных пластах имеет большое значение во многих областях: в орошении и осушении земель, накоплении подземных вод в природных емкостях, искусственном вытеснении ресурсов подземных вод, фильтрационных потерях из водохранилищ, сбросе и захоронении сточных вод, внедрении морской воды в пресноводные горизонты и т.д. [1–3]. Обычно под водоносным пластом понимается проницаемый или слабопроницаемый пласт горных пород, способный в естественных условиях пропускать значительное количество воды. Известно, что при моделировании движения жидкостей в безнапорных водоносных пластах применяются методы гидравлической теории [1]. Согласно этой теории гидравлический напор h в любом сечении пласта принимается за уровень жидкости в этом сечении, а горизонтальные составляющие скорости u и v выражаются через гидравлический напор по закону Дарси

$$u = -\frac{k}{\gamma} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\gamma} \frac{\partial h}{\partial y},$$

где x, y – горизонтальные оси; k – коэффициент фильтрации; $\gamma = \rho g$ – удельный вес жидкости, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

Подставляя эти соотношения в уравнение неразрывности фильтрационного потока

$$\frac{\partial m \rho h}{\partial t} + \frac{\partial u \rho h}{\partial x} + \frac{\partial v \rho h}{\partial y} = 0,$$

можно получить дифференциальное уравнение нестационарной фильтрации жидкостей в безнапорных водоносных пластах

$$\frac{\partial m \rho h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \rho h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \rho h \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где t – время; m – коэффициент пористости.

Часто водоносные комплексы представляют собой многопластовую систему, состоящую из этажно-расположенных водоносных пластов, разделенных слабо-проницаемыми слоями. При наличии гидродинамической связи между пластами процессы в многопластовых системах происходят в условиях взаимодействия пластов. Следовательно, при моделировании процессов движения жидкостей в многопластовых водоносных системах на основе уравнения (1) необходимо учитывать обменные процессы между отдельными пластами. Однако выявления механизма и интенсивности перетоков между пластами практическими методами не представляется возможным. В связи с этим очень важное научное и практическое значение имеет задача численного моделирования процессов в многопластовых водоносных системах при наличии гидродинамической связи между пластами.

1. Постановка задачи

Предположим, что рассматривается движение несжимаемой жидкости в недеформируемом, горизонтально расположенном замкнутом цилиндрическом водоносном пласте протяженностью R . В центре пласта расположена гидродинамически совершенная скважина радиусом r_w . Пренебрегая вертикальными составляющими скорости фильтрации, поток в пласте можно считать плоскорадиальным и осесимметричным. Тогда уравнение движения (1) для данного фильтрационного процесса в отсутствие инфильтрации на свободной поверхности примет вид

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rkh \frac{\partial h}{\partial r}), \quad (r, t) \in \Omega = \{r_w < r < R, 0 < t \leq T\}. \quad (2)$$

Пусть водоносный пласт подстилается слабопроницаемым горизонтальным прослоем, ниже которого расположен хорошо проницаемый мощный пласт с гидравлическим напором $H(t)$. Тогда из нижнего пласта будет происходить подпитывание верхнего пласта с интенсивностью

$$w = -\frac{\chi}{d}(h - H),$$

где χ – коэффициент фильтрации подстилающего прослоя, d – его толщина.

Учитывая перетоки из нижнего пласта, уравнение (2) можно представить в виде

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rkh \frac{\partial h}{\partial r}) - \frac{\chi}{d}(h - H), \quad (r, t) \in \Omega = \{r_w < r < R, 0 < t \leq T\}. \quad (3)$$

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ распределение гидравлического напора в пласте известно, т.е. для уравнения (3) имеем следующее начальное условие:

$$h(r, 0) = \varphi(r). \quad (4)$$

Предполагая, что изменение во времени расхода жидкости на скважине описывается функцией $q(t)$, граничное условие для уравнения (3) при $r = r_w$ можно записать в виде

$$2\pi rkh \frac{\partial h}{\partial r} = q(t), \quad r = r_w, \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

Так как водоносный пласт считается замкнутым, то на его внешней границе будем иметь условие

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad 0 < t \leq T. \quad (6)$$

Необходимо отметить, что гидравлический напор в нижнем пласте $H(t)$ недоступен для непосредственного измерения. Следовательно, функция $H(t)$ неизвестна и также подлежит определению одновременно с решением $h(r, t)$ задачи (3)–(6). Очевидно, что для корректной постановки задачи необходимо задавать дополнительное условие. Предположим, что дополнительное условие для уравнения (3) задается на скважине

$$h(r, t) = f(t), \quad r = r_w, \quad 0 < t \leq T. \quad (7)$$

Таким образом, задача заключается в определении функций $h(r, t)$, $H(t)$, удовлетворяющих уравнению (3) и условиям (4)–(7). Задача (3)–(7) относится к классу обратных задач, связанных с восстановлением зависимостей правых частей параболических уравнений от времени [4].

2. Метод решения

Уравнение (3) и условие (4) – (7) представим в безразмерной форме. Следует отметить, что представление уравнение в безразмерной форме позволяет выбрать диапазон изменения безразмерных переменных таким образом, чтобы улучшить обусловленность задачи. Введем следующие безразмерные переменные:

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h^*}, \quad \bar{H} = \frac{H}{h^*}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k^*}, \quad \bar{q} = \frac{q}{q^*},$$

$$\bar{f} = \frac{f}{h^*}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{h^*}, \quad \bar{r}_w = \frac{r_w}{R}, \quad \bar{T} = \frac{T}{t^*}, \quad \bar{w} = \frac{R^2 \chi}{h^* k^* d},$$

где h^* , k^* , $t^* = \frac{mR^2}{k^* h^*}$, $q^* = 2\pi k^* h^{*2}$ – характерные размерные величины.

Опуская черточки над безразмерными переменными, задачи (3) – (7) запишем в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k h \frac{\partial h}{\partial r} \right) - w h + w H, \quad (r, t) \in \Omega = \{r_w < r < 1, 0 < t \leq T\}; \quad (8)$$

$$h(r, 0) = \varphi(r); \quad (9)$$

$$r k h \frac{\partial h}{\partial r} = q(t), \quad r = r_w, \quad 0 < t \leq T; \quad (10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad r = 1, \quad 0 < t \leq T; \quad (11)$$

$$h(r, t) = f(t), \quad r = r_w, \quad 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Для численного решения задачи (8) – (12) используем подход, предложенный в [5, 6].

С этой целью введем равномерную разностную сетку

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(r_i, t_j) : r_i = r_0 + i\Delta r, t_j = j\Delta t, r_0 = r_w, i = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, M\}$$

с шагами $\Delta r = 1/N$ по переменной r и $\Delta t = T/M$ по времени t . Пользуясь интегро-интерполяционным методом, разностный аналог задачи (8)–(12) на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ представим в виде

$$\frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{r_i \Delta r} \left[r_{i+\frac{1}{2}} k_{i+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2}}^j \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta r} - r_{i-\frac{1}{2}} k_{i-\frac{1}{2}} h_{i-\frac{1}{2}}^j \frac{h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{\Delta r} \right] - w h_i^{j+1} + w H^{j+1},$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N-1, j = 0, 1, 2, 3, \dots, M-1,$$

$$h_i^0 = \varphi_i, i = \overline{0, N},$$

$$r_0 k_0 h_0^j \frac{h_1^{j+1} - h_0^{j+1}}{\Delta r} = q^{j+1},$$

$$\frac{h_N^{j+1} - h_{N-1}^{j+1}}{\Delta r} = 0,$$

$$h_0^{j+1} = f^{j+1},$$

где $\varphi_i = \varphi(r_i), q^{j+1} = q(t_{j+1}), f^{j+1} = f(t_{j+1}), h_i^j \approx h(r_i, t_j),$

$$H^{j+1} \approx H(t_{j+1}), r_{i \pm \frac{1}{2}} = r_i \pm \frac{\Delta r}{2}, k_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{k(r_i) + k(r_{i \pm 1})}{2}, h_{i \pm \frac{1}{2}}^j = \frac{h_i^j + h_{i \pm 1}^j}{2}.$$

Преобразуем полученную систему разностных уравнений к следующему виду:

$$a_i h_{i-1}^{j+1} - c_i h_i^{j+1} + b_i h_{i+1}^{j+1} = -\left(\frac{r_i \Delta r^2}{\Delta t} h_i^j + w r_i \Delta r^2 H^{j+1}\right), i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, M-1}; \quad (13)$$

$$h_i^0 = \varphi_i, i = \overline{0, N}; \quad (14)$$

$$h_0^{j+1} = h_1^{j+1} + v; \quad (15)$$

$$h_N^{j+1} = h_{N-1}^{j+1}; \quad (16)$$

$$h_0^{j+1} = f^{j+1}, j = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (17)$$

где $a_i = r_{i-\frac{1}{2}} k_{i-\frac{1}{2}} h_{i-\frac{1}{2}}^j$; $b_i = r_{i+\frac{1}{2}} k_{i+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2}}^j$; $c_i = a_i + b_i + \frac{r_i \Delta r^2}{\Delta t} + w r_i \Delta r^2$, $v = -\frac{q^{j+1}}{r_0 k_0 h_0^j}$.

Представим решение задачи (13)–(17) в виде

$$h_i^{j+1} = \alpha_{i+1} h_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (18)$$

где $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ – неизвестные пока коэффициенты. Запишем аналогичное выражение для h_{i-1}^{j+1} :

$$h_{i-1}^{j+1} = \alpha_i h_i^{j+1} + \beta_i.$$

Подставляя выражения для h_i^{j+1} , h_{i-1}^{j+1} в уравнение (13), получим следующие нелинейные уравнения для определения коэффициентов $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + \frac{r_i \Delta r^2}{\Delta t} h_i^j + w r_i \Delta r^2 H^{j+1}}{c_i - a_i \alpha_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Начальные значения коэффициентов α_i, β_i находим из требования эквивалентности соотношения (18) при $i = 0$, т.е. $h_0^{j+1} = \alpha_1 h_1^{j+1} + \beta_1$, условию (15):

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = v.$$

Нелинейное уравнение для β_{i+1} преобразуем к виду

$$\beta_{i+1} = \frac{a_i}{c_i - a_i \alpha_i} \beta_i + \frac{r_i \Delta r^2}{\Delta t (c_i - a_i \alpha_i)} h_i^j + \frac{w r_i \Delta r^2}{c_i - a_i \alpha_i} H^{j+1},$$

или

$$\beta_{i+1} = s_i \beta_i + y_i + z_i H^{j+1}, \quad (19)$$

где

$$s_i = \frac{a_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad y_i = \frac{r_i \Delta r^2}{\Delta t (c_i - a_i \alpha_i)} h_i^j, \quad z_i = \frac{w r_i \Delta r^2}{c_i - a_i \alpha_i}.$$

Введем новые переменные $\tilde{\beta}_i, \tilde{z}_i, i = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющие уравнениям

$$\tilde{\beta}_{i+1} = s_i \tilde{\beta}_i + y_i,$$

$$\tilde{z}_{i+1} = s_i \tilde{z}_i + z_i,$$

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1, \quad \tilde{z}_1 = 0.$$

С учетом вновь введенных переменных, уравнение (19) можно представить в виде рекуррентного соотношения

$$\beta_{i+1} = \tilde{\beta}_{i+1} + \tilde{z}_{i+1} H^{j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (20)$$

Теперь найдем зависимость между h_0^{j+1} и h_N^{j+1} в явном виде. Для этого соотношение (18) запишем при $i = 0$:

$$h_0^{j+1} = \alpha_1 h_1^{j+1} + \beta_1.$$

Подставив сюда выражение для h_1^{j+1} , т.е. $h_1^{j+1} = \alpha_2 h_2^{j+1} + \beta_2$, будем иметь

$$h_0^{j+1} = \alpha_1 (\alpha_2 h_2^{j+1} + \beta_2) + \beta_1.$$

Далее, подставляя в последнее уравнение выражения для $h_2^{j+1}, h_3^{j+1}, \dots, h_{N-1}^{j+1}$, получим формулу, в которой h_0^{j+1} выражается через h_N^{j+1} :

$$h_0^{j+1} = h_N^{j+1} \prod_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{i=2}^N \beta_i \prod_{l=1}^{i-1} \alpha_l + \beta_1. \quad (21)$$

Теперь исключив h_{N-1}^{j+1} из следующей системы уравнений:

$$h_{N-1}^{j+1} = \alpha_N h_N^{j+1} + \beta_N,$$

$$h_N^{j+1} = h_{N-1}^{j+1},$$

получим соотношение, связывающее h_N^{j+1} и β_N :

$$h_N^{j+1} = \frac{\beta_N}{1 - \alpha_N}. \quad (22)$$

Подставляя соотношение (22) в уравнение (21), будем иметь

$$h_0^{j+1} = \frac{\beta_N}{1 - \alpha_N} \prod_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{i=2}^N \beta_i \prod_{l=1}^{i-1} \alpha_l + \beta_1.$$

Последнее уравнение с учетом рекуррентного соотношения (20) запишется в виде

$$h_0^{j+1} = \frac{\tilde{\beta}_N}{1 - \alpha_N} \prod_{i=1}^N \alpha_i + H^{j+1} \frac{\tilde{z}_N}{1 - \alpha_N} \prod_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{i=2}^N \tilde{\beta}_i \prod_{l=1}^{i-1} \alpha_l + H^{j+1} \sum_{i=2}^N \tilde{z}_i \prod_{l=1}^{i-1} \alpha_l + \beta_1.$$

Из полученного уравнения можно найти приближенное значение искомой функции $H(t)$ при $t = t_{j+1}$:

$$H^{j+1} = \frac{h_0^{j+1} - \frac{\tilde{\beta}_N}{1 - \alpha_N} \prod_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{i=2}^N \tilde{\beta}_i \prod_{l=1}^{i-1} \alpha_l - \beta_1}{\frac{\tilde{z}_N}{1 - \alpha_N} \prod_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{i=2}^N \tilde{z}_i \prod_{l=1}^{i-1} \alpha_l}.$$

Определив H^{j+1} , по формуле (22) можно найти h_N^{j+1} и далее по рекуррентной формуле (18) последовательно определить $h_{N-1}^{j+1}, h_{N-2}^{j+1}, \dots, h_1^{j+1}$. При переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений снова повторяется.

Таким образом, предложенный численный метод позволяет в каждом временном слое последовательно определить напор в нижнем пласте и распределение гидравлического напора в верхнем пласте.

3. Результаты численных расчетов

Для выяснения эффективности практического применения предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента заключалась в следующем. Для заданных функций $H(t), q(t), \phi(r)$ решалась прямая задача (8)–(11). Найденная зависимость $h(r_w, t) = f(t)$ считалась точной и использовалась для численного решения обратной задачи по восстановлению $H(t)$.

Первая серия расчетов выполнялась с использованием этих невозмущенных зависимостей. Вторая серия расчетов проводилась при наложении на $f(t)$ некоторой функции, моделирующей погрешность экспериментальных данных

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \delta\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ – случайный процесс, моделируемый с помощью датчика случайных чисел, δ – уровень погрешности.

Расчеты выполнялись на пространственно-временной разностной сетке с шагами $h = 0.0499$, $\tau = 0.04$. Результаты численного эксперимента, проведенного для случая $k = 2$, $w = 40$, $q = 0.02$, $H(t) = 20 - 5 \sin \frac{\pi}{3} t$, $\varphi(r) = 15$, с использованием невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в таблице; в ней t – время, H^t – точные значения функции $H(t)$, $\bar{H}$ и $\tilde{H}$ – вычисленные значения функции $H(t)$ при невозмущенных и возмущенных данных. Для возмущения входных данных использовались погрешности уровня $\delta = 0.5$ и $\delta = 1.2$.

Результаты численного эксперимента

T	H^t	$\bar{H}$	$\tilde{H}$	
			$\delta = 0.5$	$\delta = 1.2$
0.4	17.966	17.978	18.207	18.529
0.8	16.284	16.290	16.314	16.348
1.2	15.245	15.246	15.214	15.170
1.6	15.027	15.027	14.785	14.446
2.0	15.670	15.672	16.006	16.475
2.4	17.061	17.068	17.097	17.137
2.8	18.960	18.974	18.874	18.735
3.2	21.040	21.059	21.577	22.303
3.6	22.939	22.963	23.574	24.429
4.0	24.330	24.358	24.768	25.343
4.4	24.973	25.002	25.165	25.395
4.8	24.755	24.784	24.923	25.117
5.2	23.716	23.742	24.100	24.600
5.6	22.034	22.057	22.369	22.805
6.0	20.00	20.018	20.393	20.919

Как показывают результаты численного эксперимента, при использовании невозмущенных входных данных максимальная погрешность восстановления значений искомой функции $H(t)$ не превышает 0.1 %. При использовании возмущенных входных данных, в которых погрешность имеет флуктуационный характер, проявляется слабая чувствительность восстановления функции $H(t)$ от погрешности во входных данных. Так, при задании погрешности во входных данных 5.07 %, значение искомой функции определяется с погрешностью 6.01 %. При уменьшении уровня погрешности решение восстанавливается более точно. Анализ результатов численного экспериментирования свидетельствует, что предложенный вычислительный алгоритм можно использовать при изучении гидродинамической связи между водоносными пластами.

Заключение

При исследовании процессов в многопластовых водоносных системах необходимо учитывать обменные процессы между пластами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
2. Веригин Н.Н. и др. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. М.: Недра, 1977.
3. Бондаренко Н.Ф. Физика движения подземных вод. М.: Недра, 1973.
4. Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009.
5. Гамзаев Х.М. Численный метод решения обратной задачи поршневого вытеснения нефти из пласта водой // Инженерно-физический журнал. 2012. Т. 85. № 5. С. 925–930.
6. Гамзаев Х.М. Численный метод решения обратной задачи упруговодонапорного режима разработки нефтяного пласта // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 4. С. 392–396.

Статья поступила 16.12.2014 г.

Gamzaev Kh.M. ON NUMERICAL SIMULATION OF THE FLUID FLOW IN A DUAL-COMPLETION WATER-BEARING SYSTEM

DOI 10.17223/19988621/35/7

The motion of an incompressible fluid in a one-dimensional water-bearing stratum is considered in the presence of a pressure communication with the underlying stratum. The hydraulic pressure head in the lower stratum is considered to be unknown. The question of modeling the process is reduced to solving the inverse problem of reconstructing the right-hand side of differential equations of the fluid motion. A finite-difference analog of the inverse problem is constructed and a computational algorithm for solving the resulting system of finite-difference equations is proposed.

Keywords: water-bearing stratum, pressure communication, inverse problem of reconstructing the right-hand side, finite-difference method.

GAMZAEV KhanlarMekhvaly oğly (Doctor of technical Sciences,
Azerbaijan State Oil Academy, Baku, Azerbaijan)
E-mail: xan.h@rambler.ru

UDK 539.3

DOI 10.17223/19988621/35/8

S. Darya zadeh, G.I. Lvov**THE CALCULATION OF EFFECTIVE ELASTIC CONSTANTS
IN A COMPOSITE WITH 3D ORTHOGONAL NONWOVEN FIBERS**

The paper is devoted to the research of the effective characteristics of 3D orthogonal nonwoven fibers composites. The results were received via ANSYS software package. In this research a volume element of fibers in cubic unit cell is considered. The effective elastic properties of fiber reinforced composite have been defined by the numerical stress analysis of the unit cell.

Keywords: *composite, fiber, effective elastic constants, numerical method.*

1. Introduction

Composite materials which consist of two or more constituent materials are commonly used in advanced structural applications, e.g. in the marine and aerospace industry. This is because of appropriate mechanical properties such as high specific strength and stiffness, low density and high resistance to corrosion. However, the limited understanding of the composite material behavior requires more research. This is further complicated by the fact that these materials behavior is dependent on lay-up, loading direction, specimen size and environmental effects such as temperature and moisture. Research on determination of effective elastic constants for anisotropic materials is very important in composite structures.

A orthogonal nonwoven fibers reinforced resin matrix composites are used in some structural applications, due to their various reasons especially to their excellent mechanical behavior in terms of their specific stiffness in the direction of the fibers. The prediction of the mechanical properties of composites has been the main objective of many researchers. The well-known models that have been proposed and used to evaluate the properties of cross-ply laminate composites are Voigt [1], 1989 and Reuss [2], 1829 models. The Voigt model is also known as the rule of mixture model or the iso-strain model, while the Reuss model is also known as the inverse of mixture model or the iso-stress model. The study will be using complex functions to determine the effective elastic coefficients of the unidirectional plates as presented by Vanin [3] (1961). Semi empirical models have emerged to correct the rule of mixture model where correcting factors are introduced. Under this category, it is noticed three important models: the modified rule of mixture, the Halpin – Tsai [4] model (Halpin et al., 1976) and Chamis [5] model (Chamis, 1989). The Halpin – Tsai model emerged as a semi-empirical model that tends to correct the transverse Young's modulus and longitudinal shear modulus. The Chamis micromechanical model is the most used and trusted model which give a formulation for all five independent elastic properties. Hashin and Rosen [6] (Hashin et al., 1964) initially proposed a composite cylinder assemblage model to evaluate the elastic properties of cross-ply laminate composites. Alfootov [7] determined the mechanical properties of cross-ply laminate reinforced composites with perpendicular fibers. Christensen [8], 1990 proposed a generalized self-consistent model in order to better evaluate the transversal shear modulus. Also the Mori – Tanaka model

[9] (Mori et al., 1990) is a famous model which is widely used for modeling different kinds of composite materials. This is an inclusion model where fibers are simulated by inclusions embedded in a homogeneous medium. The self-consistent model has been proposed by Hill [10], 1965 and Budiansky [11], 1965 to predict the elastic properties of composite materials reinforced by isotropic spherical particulates. Later the model was presented and used to predict the elastic properties of short fibers composites [12] (Chou et al., 1980). Recently, a new micromechanical model has been proposed by Huang [13, 14], 2001. The model is developed to predict the stiffness and the strength of cross-ply laminate composites.

Assuming cubic symmetry structure and using ANSYS software, effective characteristics of this composite are studied. Numerical studies are performed for some stress states in a representative unit cell for determination the effective elastic properties of fibers reinforced orthogonal nonwoven composite.

2. Computational procedure

2.1. Definition and elasticity effective parameters in cubic symmetry composite

The present approach is based on the theory anisotropic elasticity. A numerical method is able to simplify the problem by satisfy the stress – strain boundary conditions directly into the expression for defining the elastic properties in a composite material. This study considers a composite material with 3D orthogonal nonwoven fibers. In this structure of material fibers are parallel to x , y and z directions as follows and are said to define a cubic symmetry array. Theory of elasticity can be used for investigating the stress – strain state of fiber reinforced composite materials. The generalized Hook's law relating strains to stresses can be written as follows:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = [a_{ijkl}] \langle \sigma_{kl} \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Where $[A] = [a_{ijkl}]$ is the compliance matrix and $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, $\langle \sigma_{ij} \rangle$ are the strain and stress components, respectively. In this study, composites with orthogonal nonwoven fibers and constant radius are investigated as cubic symmetry materials.

The simplest anisotropic case, that of cubic symmetry has three independent elements.

These materials with volume V , stress and strain are described as follows:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad \text{and} \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (2)$$

In Cartesian coordinates, Hook's law for cubic symmetry material is as follows:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= b_{11} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{12} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{12} \langle \varepsilon_z \rangle, \\ \langle \sigma_y \rangle &= b_{21} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{11} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{12} \langle \varepsilon_z \rangle, \\ \langle \sigma_z \rangle &= b_{21} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{21} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{11} \langle \varepsilon_z \rangle, \\ \langle \tau_{xy} \rangle &= b_{44} \langle \gamma_{xy} \rangle, \quad \langle \tau_{yz} \rangle = b_{44} \langle \gamma_{yz} \rangle, \quad \langle \tau_{zx} \rangle = b_{44} \langle \gamma_{zx} \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Where b_{ij} are the coefficients of stiffness matrix $[B]$ for composite material. The stiffness matrix (inverse of the elastic compliance matrix) is symmetric.

$$b_{12} = b_{21}. \quad (4)$$

Hence, the three unknown coefficients b_{11} , b_{12} , b_{44} need to be defined for determining properties of for cubic symmetry material.

2.2. Finite Element Modeling

A regular three-dimensional arrangement of fiber in a matrix was adequate to describe the overall behavior of the composite, and was modeled as a regular uniform arrangement, as illustrated in Fig. 1a. In this paper a composite in Cartesian coordinates system is considered. This model assumed that the fiber was a perfect cylinder of radius 0.4, in a cubic unit cell ($1 \times 1 \times 1$) of the matrix. It is assumed that the geometry, material and loading of the cell are symmetrical with respect to $x - y$, $y - z$ and $z - x$ planes of coordinate system as shown in Fig. 1a. In this work, a cubic cell is considered and the three sides of a cell have equal lengths to $d_0 = 1$. Therefore, 37.7 % volume fraction fibers were inserted.

The numerical finite element modeling is widely used in predicting the mechanical properties of composites. In this paper for numerical analysis, a volume element of fibers is considered which plane symmetric exists on all of its planes. In order to investigate the numerical finite element modeling, the modeling of a unit cell for a cubic array is considered using ANSYS software as shown in Fig. 1b.

The usage of the designated volume as a representative cell is substantiated by the following: when dealing with infinite composite material that consists of infinite number of repetitive cells, the stress conditions of each cell are identical. At that, the specified boundary conditions for the designated volume correspond to the homogeneous state of equivalent homogeneous material. For determining the components of the stiffness matrix (b_{ij}), stress analysis is performed for considered volume with noting to boundary conditions. In the present procedure, normal strain is applied to one direction and shear strain is applied to one plane as follows. For numerical analysis, finite element software ANSYS is used and 36321 SOLID 95 elements with 20 nodes are utilized as shown in Fig. 1b. All the geometrical parameters and displacements are used in a dimensionless form based on the length of the edge of the representative volume. This allows receiving elastic averaged characteristics of the investigated type of composite, assigning only relative volume contents of fibers. The stresses are indicated in Pascal.

The first numerical testing is unidirectional tension in x direction. In this condition, tensor of average values for strains is obtained the following forms:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 10^{-3}, \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0, \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0, \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0, \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \quad (5)$$

The case of unidirectional tension in x direction the boundary conditions for this structural analysis are as follows:

In plane $x = 1$:

$$u_x(x = 1, y, z) = 10^{-3} \quad \text{and} \quad \tau_{xy} = \tau_{xz},$$

In this situation, there are symmetric conditions in other planes and the boundary conditions are therefore

$$u_x(x = 0, y, z) = 0, \quad u_y(x, y = 0, z) = 0, \quad u_y(x, y = 1, z) = 0, \\ u_z(x, y, z = 0) = 0 \quad \text{and} \quad u_z(x, y, z = 1) = 0,$$

where u_i ($i = x, y, z$) is displacement in x, y and z directions, respectively.

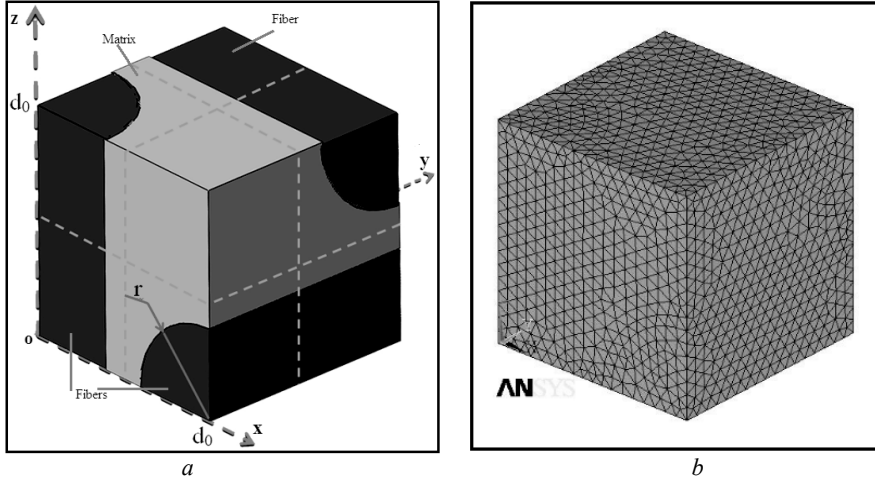


Fig. 1. Volume: *a* – representative unit cell model; *b* – element in mesh formed

Stress components are determined as

$$\langle \sigma_x \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_x dy dz, \quad \langle \sigma_y \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_y dx dz. \quad (6)$$

Therefore, according to Eq. 3, by the first numerical testing two coefficients of elasticity can be determined as follows:

$$b_{11} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \epsilon_x \rangle}, \quad b_{12} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \epsilon_x \rangle}. \quad (7)$$

In this analysis polymer epoxy is considered as matrix and its mechanical properties are as follows [15]:

$$E_m = 4200 \text{ MPa}; \quad G_m = 1500 \text{ MPa}; \quad \nu_m = 0.4.$$

Mechanical properties of glass fibers are as follows:

$$E_a = 74800 \text{ MPa}; \quad G_a = 31000 \text{ MPa}; \quad \nu_a = 0.2.$$

For composite with fibers in constant radius as $0 < r < 1$, fiber-volume fraction is calculated as follows:

$$\xi = \frac{V'}{V}, \quad (8)$$

where $V = d_0^3$ – the volume of a cubic cell and $V' = \frac{3}{4} \pi r^2 d_0$ – fiber volume content in material.

Effective elasticity properties for $\xi = 0.377$ ($r = 0.4$) is determined by Numerical Method. In Fig. 2 the result of the first condition is shown.

The second numerical testing is shearing in xz plane. In this condition, tensor of average values for strains is obtained:

$$\langle \epsilon_x \rangle = 0, \quad \langle \epsilon_y \rangle = 0, \quad \langle \epsilon_z \rangle = 0, \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0, \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0, \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 10^{-3}. \quad (9)$$

Therefore, the displacement in plane $z = 1$: $u_x(x, y, z = 1) = 10^{-3}$ and $\sigma_z = \tau_{zy} = 0$.

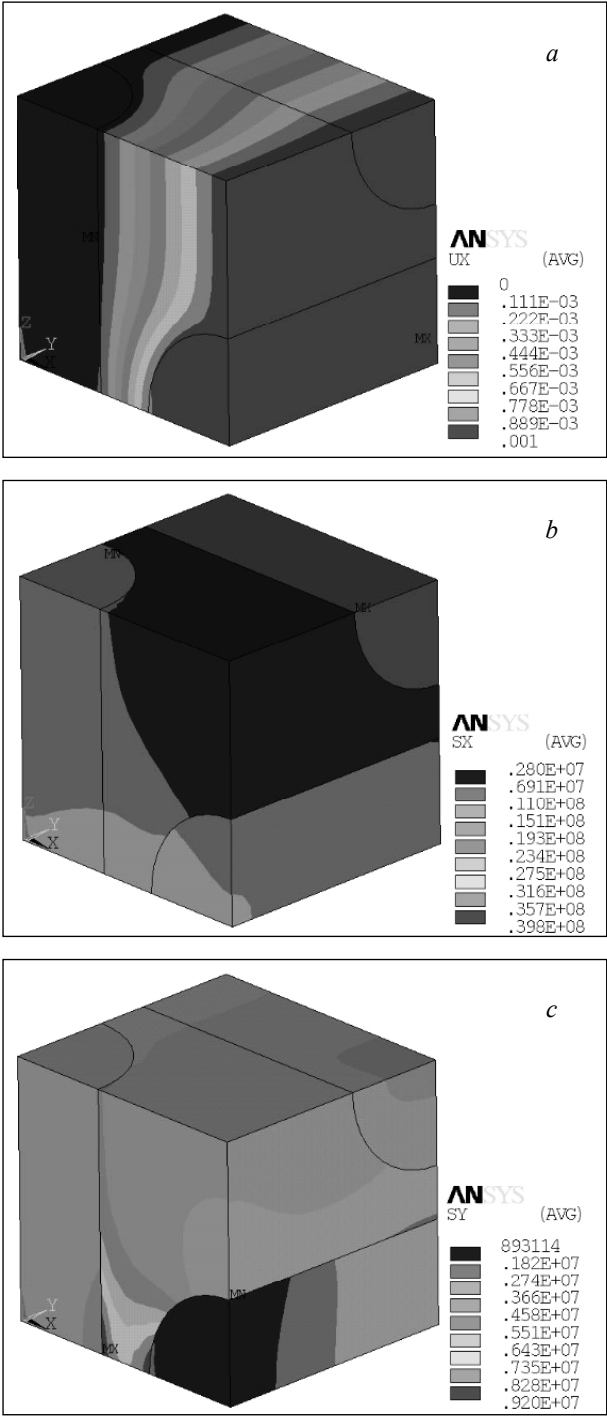


Fig. 2. The result of: *a* – displacement in *x* direction when $u_x = 10^{-3}$,
b and *c* – stress distribution of normal stresses σ_x, σ_y

Now, as the boundary conditions are symmetrical for this structural analysis are as follows:

In plane $z = 0$ the displacement in the direction of x axis is zero ($u_x(x, y, z = 0) = 0$) and two are symmetric conditions in planes $y = 0, y = 1$ therefore, in these planes: $u_y(x, y = 0, z) = 0$ and $u_y(x, y = 1, z) = 0$,

In planes $x = 0$ and $x = 1$: $u_z(x = 0, y, z) = 0$, $u_z(x = 1, y, z) = 0$; and $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$. The shear stress component in xz plane is given by

$$\langle \tau_{xz} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \tau_{xz} dy dz. \quad (10)$$

Therefore, the unknown coefficient b_{44} , can then be calculated by substituting value $\langle \tau_{xz} \rangle$ into Eq. 3 and take following form:

$$b_{44} = \langle \tau_{xz} \rangle / \langle \gamma_{xz} \rangle. \quad (11)$$

In this case for solving the problem, Hook's law is used directly:

$$\langle \epsilon \rangle = [A] \cdot \langle \sigma \rangle, \quad (12)$$

where $[A]$ is the compliance matrix: $[A] = [B]^{-1}$.

Obviously, considering matrix $[A]$, elasticity coefficient such as poison ratio and shear modulus of composite material can be obtained as follows:

$$\begin{aligned} \langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle = \frac{1}{a_{11}}, \quad \langle \nu_{xy} \rangle = \langle \nu_{xz} \rangle = \langle \nu_{yz} \rangle = -a_{12} \cdot \langle E_y \rangle \\ \text{and } \langle G_{xy} \rangle = \langle G_{xz} \rangle = \langle G_{yz} \rangle = \frac{1}{a_{44}} = b_{44}. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Results and discussion

In this approach work, effective elasticity properties for $\xi = 0.377$ is determined by numerical procedure proposed in this research. Table 1 shows numerical results for the effective elastic constants of composite material.

Table 1

Numerical results of effective elasticity properties for $\xi = 0.377$

Elasticity properties	Modulus of elasticity, MPa	Modulus of shear, MPa	Poisson's coefficient
	$\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle$	$\langle G_{xy} \rangle = \langle G_{xz} \rangle = \langle G_{yz} \rangle$	$\langle \nu_{xy} \rangle = \langle \nu_{xz} \rangle = \langle \nu_{yz} \rangle$
Numerical Method	17501	3098	0.26

The variation of $E_1 = \langle E_x \rangle / E_m$, $G = \langle G_{xy} \rangle / G_m$ versus different values of ξ are obtained for cubic symmetry material glass fibers. Mechanical properties of composite are determined by the proposed method in this paper (numerical method) with finite element method. Numerical values are calculated by ANSYS. It is obvious that $\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle$, $\langle G_{xy} \rangle = \langle G_{xz} \rangle = \langle G_{yz} \rangle$ and $\langle \nu_{xy} \rangle = \langle \nu_{xz} \rangle = \langle \nu_{yz} \rangle$.

Fig. 3 shows the variation of E_i ($i = 1,2,3$) with respect to different values of ξ for orthogonal nonwoven glass fibers composite. E_i is the ratio modulus of elasticity of composite to E_m in fibers direction and E_m is modulus of elasticity of matrix. In this figure, the curve is obtained by the method of this paper. As it can be seen, the behavior of curve is nonlinear. In this result, should be reminded that the curve E_i is linear for the unidirectional composite. Fig. 3 shows that in small value of ξ , the value of E_1 ($i = 1,2,3$) is near to 1. Also for the maximum value of ξ ($\xi = 0.58875$), the value of E_1 is near to the modulus of elasticity of fibers E_a/E_m , as it is predicted. E_a is modulus of elasticity of fiber.

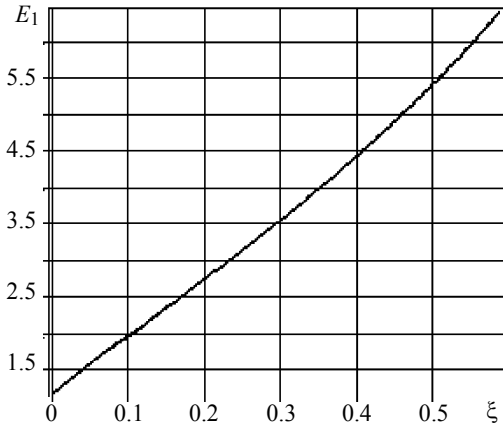


Fig. 3. The variation of E_i ($i = 1,2,3$) versus values of ξ for orthogonal nonwoven glass fibers

Fig. 4 shows the variation of G_i ($i = 1,2,3$) versus different values of ξ for orthogonal nonwoven glass fibers composite in a cubic pattern. G_i is the ratio shear modulus of composite to G_m in xy , xz and yz planes and G_m is the shear modulus of matrix. As it can be seen, the behavior of the present work is sowed that curve G_i is nonlinear.

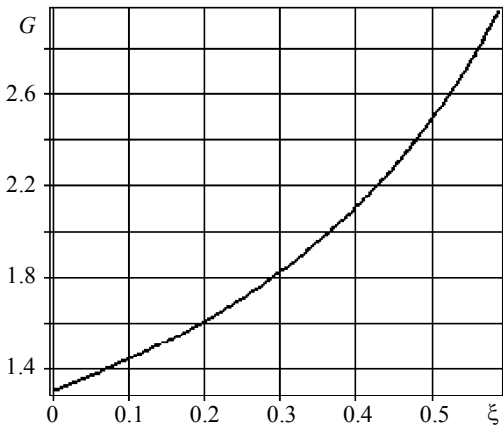


Fig. 4. The variation of G_i ($i = 1,2,3$) versus values of ξ for orthogonal nonwoven glass fibers

Fig. 4 shows that in small value of ξ , the value of G_i ($i = 1, 2, 3$) is near to 1. Also for the maximum value of ξ ($\xi = 0.58875$), G_i is near to a value that is smaller than the shear modulus of fibers G_a/G_m , where G_a is the shear modulus of fiber.

The results of the numerical calculation of effective elastic properties were not compared with theoretical or experimental methods. The authors do not have the complete set of the necessary data at their disposal as there are no such data in open literature. The similar approach was used by the authors [16, 17] for unidirectional fibrous composite, where it was managed to receive the evidence of the results accuracy. The following technique was applied for the evaluation of the results accuracy in this research – finite elements grid clustering and intrinsic criteria parameters of error in ANSYS.

Conclusions

The procedure of finding the effective elastic characteristics for 3D orthogonal non-woven fiber composites has been developed. In this research a volume element of fibers in cubic symmetry cell is considered which plane symmetric exists on all of its planes. The effective elastic properties of fiber-glass composite which polymer epoxy have been defined via ANSYS software package. The finite-element method has been used for the research.

After considering the results set out in this section the following observations could be made:

Minimum requirement unit cells have been defined for different types of reinforcement as well as the boundary conditions for them, which enable composite behavior modeling under basic experiments conditions.

The procedure of finding effective elastic constants for reinforced composites allows receiving results with the reasonable degree of accuracy for practical application.

Apart from effective elastic constants finding, the advantage of the developed procedure is the ability to investigate local stress concentration in the unit cell area.

The developed procedure enables to carry out the multivariate analysis of the elastic properties of composite material at the design stage as well as to set and solve the tasks associated with the optimal design of composites.

REFERENCES

1. Voigt W. Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten Isotroper Körper. *Wied. Ann.*, 1889, vol. 38, pp. 573–587.
2. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1929, no. 9, pp. 49–58.
3. Vanin G.A. *Micro-Mechanics of Composite Materials*. Kiev, Nauka Dumka Publ., 1985.
4. Halpin J.C, Kardos J.L. The Halpin-Tsai equations: A review. *Polymer Engineering and Science*, 1976, May, vol. 16, no. 5.
5. Chamis C.C. Mechanics of composite materials: past, present and future. *J. Compos. Technol. Res. ASTM*, 1989, no. 11, pp. 3–14.
6. Hashin Z., Rosen B.W. The elastic moduli of fiber reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics, Trans ASME*, 1964, vol. 31, pp. 223–232.
7. Alfootov N.A. *Calculation of laminated plates and shells made of composite materials*. Moscow, Mashinostroitelni Publ., 1984.
8. Christensen R.M. A critical evaluation for a class of micromechanical models. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1990, vol. 38, no. 3, pp. 379–404.
9. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 1973, vol. 21, pp. 571–574.

10. Hill R. Theory of mechanical properties of fiber-strengthen materials-3. Self-consistent model. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1965, vol. 13, pp. 189–198.
11. Bubiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of Mechanics and Physics of solids*, 1965, vol. 13, pp. 223–227.
12. Chou Tw., Nomura S., Taya M. A self-consistent approach to the elastic stiffness of short-fiber composites. *J. Compos. Mater.*, 1980, vol. 14, pp. 178–188.
13. Huang Z.M. Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model. *Composites: Part A*, 2001, vol. 32, pp. 143–172.
14. Huang Z.M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, pp. 4147–4172.
15. Carpeenosa D.M. Composite Materials. Kiev, Nauka Dumka Publ., 1985.
16. Darya zadeh S. A numerical method for determination of the effective characteristics of unidirectionally reinforced composites. *Vestnik KhPI*, 2013, vol. 58, pp. 71–77.
17. Darya zadeh S., Lvov G.I. A numerical method for determination of the effective characteristics of unidirectionally reinforced composites with hexagonal structure. *Aviation – Aerospace Technology and Technology “KhAI”* 2014, no. 2(109), pp. 59–65.

Статья поступила 18.02.2015 г.

Darya zadeh S., Lvov G.I. THE CALCULATION OF EFFECTIVE ELASTIC CONSTANTS IN A COMPOSITE WITH 3D ORTHOGONAL NONWOVEN FIBERS

DOI 10.17223/19988621/35/8

The paper is devoted to the research of the effective characteristics of 3D orthogonal non-woven fibers composites. The results were received via ANSYS software package. In this research a volume element of fibers in cubic unit cell is considered. The effective elastic properties of fiber reinforced composite have been defined by the numerical stress analysis of the unit cell.

Keywords: composite, fiber, effective elastic constants, numerical method.

DARYA ZADEH SAEED Massaieb (PhD, National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine)

E-mail: s_daryazadeh@yahoo.com

LVOV Gennadii Ivanivich (PhD, National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine)

E-mail: lvovgi@list.ru

УДК 530.145.65

DOI 10.17223/19988621/35/9

И.П. Попов

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА, ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ИДЕНТИЧНЫМИ ЧАСТИЦАМИ С РАЗНЫМИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМИ СКОРОСТЯМИ

Доказаны две теоремы, связывающие групповую скорость волнового пакета, образованного двумя свободными идентичными частицами с разными нерелятивистскими скоростями, с параметрами гармоник.

Ключевые слова: *циклическая частота, волновое число, постоянная Планка, фазовая скорость.*

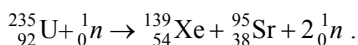
В ряде задач исследуются квантовые системы, состоящие из двух частиц [1–3]. При этом преимущественно рассматриваются частицы, связанные взаимодействием в большей [1, 2] или меньшей [3] степени. Потенциал взаимодействия существенно влияет на вид волновой функции и в любом случае обуславливает непрерывный спектр ее гармоник. Установление квазиимпульса двухчастичной системы [1] и интерпретация волновой функции как ядра интегрального оператора (Гильберта – Шмидта) [3] предполагают определение групповых скоростей волновых пакетов, что не представляет затруднений в силу непрерывности их спектров.

При движении частиц (не связанных взаимодействием) с неравными фиксированными скоростями частоты волн де Бройля образуют дискретный спектр, в связи с чем для определения групповой скорости волнового пакета формула

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1)$$

[4] не подходит, поскольку предполагает, по крайней мере, кусочно-непрерывную зависимость $\omega(k)$. Здесь ω – циклическая частота, k – волновое число.

Задача, таким образом, заключается в отыскании формулы групповой скорости для дискретных значений ω и k . Результаты решения этой задачи могут быть применены к классу частиц, не связанных полевыми взаимодействиями, в том числе нейтронам, которые в результате некоторых ядерных реакций образуют двухчастичные квантовые системы, например



Пусть две частицы образуют квантовую систему в пространстве $\mathbb{R}^3$, имеют одинаковые массы m и движутся с фиксированными нерелятивистскими скоростями v_1 и v_2 . В начальный момент координаты частиц совпадают. Соответствующий им волновой пакет имеет вид

$$\Psi(x, t) = C e^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + C e^{-i(\omega_2 t - k_2 x)}, \quad (2)$$

где C определяется из условий нормировки волновой функции.

При этом

$$\omega = \frac{mv^2}{2\hbar}, \quad (3)$$

$$k = \frac{mv}{\hbar}, \quad (4)$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}, \quad (5)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, v_ϕ – фазовая скорость [4, 5].

Для названных условий имеют место две теоремы, первую из которых предвещает следующая

Лемма. Справедлива формула

$$e^{iz_1} + e^{iz_2} = 2 \cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) e^{\frac{i}{2}(z_1 + z_2)}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^{iz_1} + e^{iz_2} &= \cos z_1 + i \sin z_1 + \cos z_2 + i \sin z_2 = \\ &= \cos z_1 + \cos z_2 + i(\sin z_1 + \sin z_2) = \\ &= 2 \cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) \cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + 2i \cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) \sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \\ &= 2 \cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \right] = \\ &= 2 \cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) e^{\frac{i}{2}(z_1 + z_2)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Групповая скорость волнового пакета (2) определяется выражением

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}. \quad (6)$$

Доказательство. В соответствии с леммой выражение (2) приводится к виду

$$\Psi(x, t) = 2C \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right) e^{\frac{i}{2}[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x]}.$$

Модуль волновой функции

$$|\Psi| = 2C \left| \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right) \right|.$$

Групповая скорость – это скорость перемещения максимума модуля [4], который достигается при условии

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x = 0.$$

За время t максимум модуля перемещается на расстояние x [6]. Таким образом, его скорость, или групповая скорость,

$$v_g = \frac{x}{t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}.$$

Теорема доказана.

Замечание. (6) можно представить в виде

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Таким образом (1) является предельным случаем (6).

Теорема 2. Групповая скорость волнового пакета (2) равна сумме фазовых скоростей его гармоник

$$v_g = v_{\phi 1} + v_{\phi 2} = \frac{\omega_1}{k_1} + \frac{\omega_2}{k_2}.$$

Доказательство. Очевидно тождество

$$\frac{mv_1^2}{2m^2v_1^2} = \frac{mv_2^2}{2m^2v_2^2}.$$

В соответствии с (3) и (4) оно приводится к виду

$$\frac{\hbar\omega_1}{\hbar^2k_1^2} = \frac{\hbar\omega_2}{\hbar^2k_2^2}, \quad (7)$$

$$\omega_1k_2^2 - \omega_2k_1^2 = 0,$$

$$\omega_2k_1k_2 - \omega_1k_1k_2 = \omega_1k_2^2 - \omega_2k_1^2 + \omega_2k_1k_2 - \omega_1k_1k_2,$$

$$k_1k_2(\omega_2 - \omega_1) = \omega_1k_2(k_2 - k_1) + \omega_2k_1(k_2 - k_1),$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\omega_1k_2 + \omega_2k_1}{k_1k_2} = \frac{\omega_1}{k_1} + \frac{\omega_2}{k_2}.$$

Или с учетом (5) и (6)

$$v_g = v_{\phi 1} + v_{\phi 2}.$$

Теорема доказана.

В [7–9] показано, что

$$\omega = \frac{mv^2}{\hbar}. \quad (8)$$

При этом вместо (7) следует записать

$$\frac{\hbar\omega_1}{2\hbar^2k_1^2} = \frac{\hbar\omega_2}{2\hbar^2k_2^2}.$$

Дальнейшие рассуждения не изменяются и теорема 2 справедлива также при условии (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лакаев С.Н., Алладустов Ш.У. Положительность собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 178. № 3. С. 390–402.

2. Бутлицкий М.А., Зеленер Б.Б., Зеленер Б.В., Маныкин Э.А. Двухчастичная матрица плотности и псевдопотенциал электрон-протонного взаимодействия для ультранизких температур // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 1. С. 154–158.
3. Хренников А.Ю. Интегральная интерпретация двухчастичной волновой функции и представление квантовых корреляций с помощью случайных полей // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 164. № 3. С. 386–393.
4. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
5. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 384 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 4. Оптика. М.: Наука, 1980. 752 с.
7. Попов И.П. Об одном проявлении инертности // Естественные и технические науки. 2013. № 1(63). С. 23–24.
8. Попов И.П. О влиянии инертности частицы на ее волновое представление // Вестник Забайкальского государственного университета. 2013. № 04(95). С. 90–94.
9. Попов И.П. О волновой энергии инертной частицы // Зауральский научный вестник. 2013. № 1(3). С. 60–61.

Статья поступила 29.07.2013 г.

Popov I.P. THE GROUP VELOCITY OF A WAVE PACKET FORMED BY TWO FREE IDENTICAL PARTICLES WITH DIFFERENT NON-RELATIVISTIC VELOCITIES

DOI 10.17223/19988621/35/9

Two theorems relating the group velocity of a wave packet formed by two identical free particles with different non-relativistic velocities with the parameters of harmonics are proved.

Keywords: angular frequency, wave number, Planck's constant, phase velocity.

POPOV Igor Pavlovich (Government of the Kurgan region, Kurgan, Russian Federation)

E-mail: ip.popov@yandex.ru

REFERENCES

- Лакаев С.Н., Алладустов Ш.У. Положительность собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. 2014. Том 178. № 3. С. 390–402.
- Бутлицкий М.А., Зеленер Б.Б., Зеленер Б.В., Маныкин Э.А. Двухчастичная матрица плотности и псевдопотенциал электрон-протонного взаимодействия для ультранизких температур // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 1. С. 154–158.
- Хренников А.Ю. Интегральная интерпретация двухчастичной волновой функции и представление квантовых корреляций с помощью случайных полей // Теоретическая и математическая физика. 2010. Том 164. № 3. С. 386–393.
- Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
- Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 384 с.
- Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 4. Оптика. М.: Наука, 1980. 752 с.
- Попов И.П. Об одном проявлении инертности // Естественные и технические науки. 2013. № 1(63). С. 23–24.
- Попов И.П. О влиянии инертности частицы на ее волновое представление // Вестник Забайкальского государственного университета. 2013. № 04(95). С. 90–94.
- Попов И.П. О волновой энергии инертной частицы // Зауральский научный вестник. 2013. № 1(3). С. 60–61.

УДК 532.546

DOI 10.17223/19988621/35/10

В.Ш. Шагапов, А.С. Чиглинцева, А.А. Русинов**О МЕХАНИЗМАХ РОСТА ГИДРАТНОЙ ОБОЛОЧКИ
НА ПОВЕРХНОСТИ ВСПЛЫВАЮЩИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ¹**

Предложена и построена теоретическая модель процесса роста гидратной оболочки на поверхности всплывающих метановых пузырьков в восходящем потоке воды в вертикальном канале. Рассмотрены два предельных механизма, определяющие кинетику гидратообразования в процессе всплытия газовых пузырьков. Установлено, что если интенсивность гидратообразования определяется отводом тепла от поверхности пузырьков жидкостью, то высота реактора составляет доли метров, а в случае, когда лимитируется диффузией газа через гидратную корку, – десятки метров. Получены критические значения массовых расходов газа и воды, необходимые для процесса полного образования гидрата. Проведен анализ влияния гидростатического давления на динамику процесса гидратообразования.

Ключевые слова: гидратная оболочка, вода, газ, трубчатый канал, тепло-съем, диффузия.

В настоящее время большой теоретический, а также прикладной интерес представляют газогидраты углеводородных газов, особенно метана. Это связано не только с тем, что природные гидраты метана представляют собой практически неисчерпаемый источник энергии и пресной воды, но также являются причиной аварийных ситуаций и экологических катастроф при добыче углеводородного сырья на шельфе и транспорте газа по трубопроводам. Появление газовых пузырьков в воде может быть следствием как природного характера (подводные грязевые вулканы, разломы осадочных пород), так и техногенного (аварии на подводных трубопроводах, буровых установках) [1–9]. Имеющиеся экспериментальные данные показывают возможность образования гидратной корки на поверхности всплывающих пузырьков газа на больших глубинах в области высокого гидростатического давления, которое может приводить к значительному росту времени растворения газа в морской воде при их всплытии [1–7, 9–11]. Теоретические исследования предлагают различные интерпретации физических явлений, так процесс миграции газовых пузырьков в воде может проходить и без образования гидрата [12]. Диффузионная же кинетика образования гидрата, предложенная в работе [13], предполагает, что образующаяся гидратная корка имеет поровую структуру. Отметим, что в большинстве случаев главный практический интерес вышеперечисленных работ связан с изучением интенсивности выброса метана в атмосферу из водоемов.

В зависимости от качества воды [14] и содержания в ней примесных частиц, солей и капиллярных добавок [15, 16], а также «чистоты» гидратообразующего газа возможны различные лимитирующие механизмы, определяющие рост гидратной

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № РФФИ 13-01-00550 А).

массы при контакте воды и газа при определенных термобарических условиях. В данной работе для интенсивности гидратообразования примем две предельные схемы. Согласно первой будем полагать, что газогидратная корка является достаточно рыхлой и не оказывает диффузионного сопротивления на процесс переноса гидратообразующих компонент (воды или газа через нее). Следовательно, интенсивность образования гидрата определяется лишь способностью окружающей частицу воды отводить тепло, выделившееся за счет гидратообразования [17–20]. Согласно второй схеме, будем считать, что интенсивность гидратообразования лимитируется диффузией метана через гидратную корку [3, 12, 18–22].

Постановка задачи и основные уравнения

Пусть на дне водоема расположен источник газа, из которого с некоторым массовым расходом поступает газ. Полагаем, что на данной глубине реализуются термобарические условия (соответствующие значения давления и температуры), способствующие образованию и существованию гидрата. По мере всплытия газовых пузырьков на поверхности контакта газ – жидкость происходит образование и дальнейший рост гидратной оболочки. Для того чтобы организовать направленный поток пузырьков, над газовым источником предлагается установка цилиндрического вертикального канала, в который снизу поступает вода и газ (рис. 1).

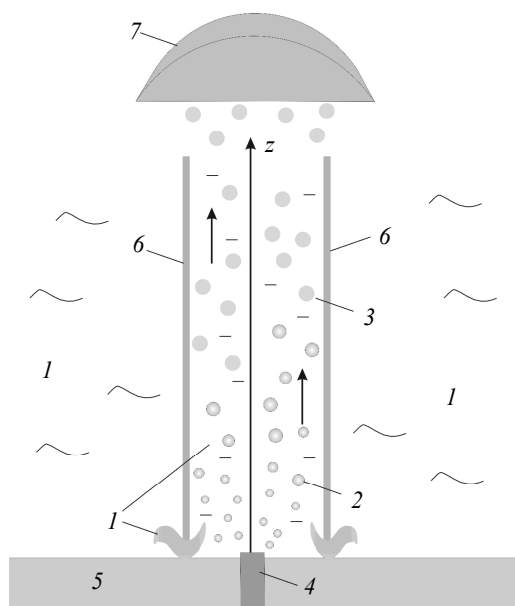


Рис. 1. Технологическая схема: 1 – вода, 2 – газовый пузырек, 3 – гидратный пузырек, 4 – источник газа, 5 – осадочные породы, 6 – вертикальный канал, 7 – ловушка

Ось z направим по оси цилиндрического канала вертикально вверх. Будем полагать, что все основные параметры течения трехфазной системы, состоящей из газа, воды и гидрата однородны по сечению цилиндра. Миграция пузырьков газа, поднимающихся вверх вдоль оси z , сопровождается образованием гидрата.

Пусть n – число пузырьков в единице объема. Дроблением и слипанием гидратных пузырьков, поднимающихся со скоростью w_g , будем пренебрегать. Тогда уравнение сохранения числа пузырьков будет иметь вид [23]

$$\frac{d}{dz}(Snw_g) = 0, \quad S = \pi R^2,$$

где S – площадь сечения канала. Нижние индексы «g», «l», «h» относятся к параметрам газа, воды и гидрата.

Запишем уравнения сохранения масс соответственно для газа, воды и гидрата, при этом будем полагать, что скорости газовой и гидратной фазы

$$\frac{dM_g}{dz} = -J_g, \quad \frac{dM_l}{dz} = -J_l, \quad \frac{dM_h}{dz} = J_h, \quad (1)$$

$$M_g = S\rho_g^0\alpha_gw_g, \quad M_l = S\rho_l^0\alpha_lw_l, \quad M_h = S\rho_h^0\alpha_hw_h, \quad (w_g = w_h). \quad (2)$$

Здесь $M_i, \rho_i^0, \alpha_i, w_i$ ($i = g, l, h$) – массовые расходы, истинные плотности, объемные содержания и скорости фаз; J_g, J_l, J_h – интенсивности расхода газа, воды и образования гидрата.

Поскольку газогидрат – клатратное соединение с массовым содержанием газа G , то интенсивности расхода газа, воды и образования гидрата связаны как

$$J_g = GJ_h, \quad J_l = (1 - G)J_h. \quad (3)$$

Приведенную систему уравнений необходимо дополнить следующими кинематическими соотношениями:

$$\alpha_g + \alpha_l + \alpha_h = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3}\pi a_g^3n, \quad \alpha_h = \frac{4}{3}\pi(a_{gh}^3 - a_g^3)n, \quad (4)$$

где a_g – радиус газовых пузырьков, a_{gh} – радиус гидратных пузырьков.

Уравнение импульсов для трехфазного потока в рамках вышеприведенных допущений может быть записано в виде [23]

$$\frac{d}{dz}(M_lw_l + (M_g + M_h)w_g) = -S\frac{dp}{dz} - Sg(\alpha_l\rho_l^0 + \alpha_g\rho_g^0 + \alpha_h\rho_h^0) - 2\pi R\tau_c, \quad (5)$$

где τ_c – сила трения между потоком и стенкой канала, отнесенная к единице площади его поверхности.

Для замыкания системы уравнений запишем уравнение миграции для газового пузырька относительно жидкости, которое будет иметь вид [23]

$$w_g \frac{d}{dz}(m_{gh}w_g + m_{pr}w) = -m_{gh}g - \frac{4}{3}\pi a_{gh}^3 \frac{dp}{dz} - \pi a_{gh}^2 \tau_b, \quad (6)$$

$$m_{gh} = \frac{4}{3}\pi a_g^3\rho_g^0 + \frac{4}{3}\pi(a_{gh}^3 - a_g^3)\rho_h^0, \quad m_{pr} = \frac{2}{3}\pi a_{gh}^3\rho_l^0, \quad (7)$$

$$w = w_g - w_l, \quad (8)$$

где m_{gh}, m_{pr} – соответственно масса гидратного пузырька и присоединенная масса; τ_b – сила трения между пузырьком, покрытым гидратной оболочкой и потоком жидкости, отнесенная к единице площади сечения поверхности пузырька, w – скорость миграции газового пузырька относительно жидкости.

При записи уравнения сохранения энергии воды в канале будем пренебрегать потерями тепла через стенки канала. Тогда можем записать следующее уравнение баланса тепла, которое будет иметь вид:

$$\frac{d}{dz}(M_1 c_1 T_1) = Q_{ls} - J_1 c_1 T_{hs}, \quad Q_{ls} = Sn4\pi a_{gh}^2 q_{ls}. \quad (9)$$

Здесь T_1 – температура воды в канале, c_1 – теплоемкость воды (при постоянном давлении); q_{ls} – интенсивность теплообмена между жидкостным потоком в канале и поверхностью гидратной оболочки пузырька, отнесенная к единице его площади, T_{hs} – температура поверхности гидратного пузырька.

Жидкость будем считать несжимаемой, а газ – калорически совершенным:

$$\rho_l^0 = \text{const}, \quad p = \rho_g^0 R_g T_{hs}.$$

Силовое и тепловое взаимодействия потока со стенками канала и гидратным пузырьком

Силу трения между потоком и каналом примем в виде [23]:

$$\tau_c = \xi_c \frac{\rho w_l^2}{2}, \quad \rho = (\alpha_g \rho_g^0 + \alpha_l \rho_l^0 + \alpha_h \rho_h^0), \quad \xi_c = \frac{0.3165}{\text{Re}_l^{0.25}}, \quad \text{Re}_l = \frac{2R\rho_l^0 w_l}{\mu_l}$$

Здесь выражение для коэффициента гидравлического сопротивления ξ_c соответствует формуле Блазиуса для гладких труб; Re_l – критерий Рейнольдса и μ_l – коэффициент динамической вязкости для жидкостного потока.

Сила трения между гидратным пузырьком и потоком жидкости может быть записана в виде [17, 24]:

$$\tau_b = \xi_b \frac{\rho_l^0 w^2}{2}, \quad \xi_b = \frac{12}{\text{Re}} (1 + 0.0811 \text{Re}^{0.879}), \quad \text{Re} = \frac{2a_{gh}\rho_l^0 w}{\mu_l}.$$

Будем полагать, что температура поверхности гидратного пузыря T_{hs} равна равновесной температуре образования гидрата T_s , которая соответствует значению давления p для данной глубины ($T_{hs} = T_s(p)$). Для зависимости $T_s(p)$ будем использовать выражение [25]

$$T_s(p) = T_{h0} + T_* \ln(p/p_{h0}). \quad (10)$$

Описание интенсивности образования гидратных пузырьков в случае теплообмена с окружающей водой

Интенсивность образования гидрата J_h представим:

$$J_h = Sn4\pi a_{gh}^2 j_h, \quad (11)$$

где j_h – интенсивность образования гидрата, отнесенная на единицу площади поверхности гидратного пузырька.

Согласно первой схемы, считаем, что гидратная корка имеет рыхлую структуру. Поэтому ее диффузионным сопротивлением при прохождении через нее газа будем пренебрегать. Следовательно, интенсивность образования гидрата опреде-

ляется лишь способностью окружающей частицы воды отводить тепло, выделившееся за счет гидратообразования.

Пренебрегая затратами тепла на изменение температуры всей газогидратной части, можем записать следующее условие баланса тепла как

$$j_h = \frac{q_{ls}}{l_h}. \quad (12)$$

Здесь l_h – удельная теплота образования гидрата.

Для интенсивности теплового потока между жидкостью в канале и поверхностью пузырька будем использовать формулу [23]

$$q_{ls} = \beta(T_{hs} - T_l), \quad \beta = \frac{\lambda_l Nu}{2a_{gh}}, \quad Nu = 2 + 0.46 Re^{0.55} Pr^{0.33}, \quad Pr = \frac{\mu_l c_l}{\lambda_l},$$

где Pr и Nu – приведенные числа Прандтля и Нуссельта; λ_l – эффективный коэффициент теплопроводности для жидкости.

Описание интенсивности образования гидратных пузырьков в случае диффузионного переноса газа через гидратную корку

Согласно второй схеме, будем считать, что интенсивность гидратообразования лимитируется диффузией газа через гидратную корку. Здесь происходит диффузия метана к внешней поверхности газогидратной частицы, где газ мгновенно переходит в состав гидратной корки. При этом температура пузырька полностью следует за температурой окружающей воды ($T_{hs} = T_l$). Прочностными эффектами гидратной корки пренебрегаем ($p_g = p_l = p$).

Для описания процесса переноса газа через гидратную корку запишем уравнение диффузии как

$$\frac{\partial \rho'_g}{\partial t} = \frac{D_g}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho'_g}{\partial r} \right), \quad a_g < r < a_{gh}, \quad (14)$$

где ρ'_g – средняя плотность газа в твердом гидрате, который не входит в состав гидрата (свободный газ), D_g – коэффициент диффузии газа через гидратную корку.

Кроме того, пусть на внутренней ($r = a_g$) и на внешней ($r = a_{gh}$) поверхностях корки плотность удовлетворяет граничным условиям

$$\rho'_g = \rho_{g(s)} \quad \text{и} \quad \rho'_g = 0 \quad (15)$$

Здесь первое условие означает, что вблизи внутренней границы корки реализуется некоторое насыщение гидрата газом со значением плотности $\rho_{g(s)}$, второе – означает, что диффундирующий газ через гидратную корку на внешней поверхности частицы мгновенно переходит в состав гидрата. Квазистационарное ($\partial \rho'_g / \partial t = 0$) решение уравнение (14) при граничных условиях (15) имеет вид:

$$\rho'_g = \frac{\rho_{g(s)} (1/r - 1/a_{gh})}{(1/a_g - 1/a_{gh})}. \quad (16)$$

При этом для диффузионного притока газа к внешней поверхности гидратной корки ($r = a_{gh}$), можем записать

$$j_g = -D_g \left(\frac{\partial p'_g}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_{gh}}. \quad (17)$$

Используя решение (16), отсюда можем получить

$$j_g = \frac{\rho_{g(s)} D_g}{(1/a_g - 1/a_{gh}) a_{gh}^2}. \quad (18)$$

Поскольку массовое содержание метана G и воды $(1 - G)$ в составе гидрата постоянно ($G = \text{const}$), то параметры j_l, j_h , а также j_g , выражающая интенсивность потребления газа, связаны как

$$j_g = G j_h, \quad j_l = (1 - G) j_h. \quad (19)$$

Тогда с учетом (18) и (19) интенсивность образования гидрата будет определяться как

$$j_h = \frac{D^* \rho_g^0}{G(1/a_g - 1/a_{gh}) a_{gh}^2}, \quad (20)$$

где $D^* = \rho_{g(s)} D_g / \rho_g^0$ – приведенный коэффициент диффузии газа.

Результаты расчетов

В расчетах полагаем, что источник газа расположен на глубине $h = 1500$ м. Для базовых параметров, определяющих геометрию и режим работы канала, принимались следующие численные величины для параметров: $R = 1$ м, $a_{g0} = 1$ мм, $M_{g0} = 1$ кг/с, $T_{i0} = 277$ К, $p = 15 \cdot 10^6$ Па. Коэффициент диффузии газа через гидратную корку принимался равным $D^* = 5 \cdot 10^{-10}$ м²/с [20, 21]. Тогда соответствующая равновесная температура для данного значения давления, согласно формуле (10), равна $T_s(p) = 290.6$ К.

На рис. 2 и рис. 3 представлены распределения массовых расходов газа и гидрата, скоростей газовых пузырьков и воды, температуры воды вдоль канала, а также радиусов газового и гидратного пузырька, когда интенсивность образования гидратной частицы лимитируется отводом тепла от поверхности пузырьков жидкостью для массовых расходов воды соответственно $M_{i0} = 100$ кг/с и $M_{i0} = 50$ кг/с. Из рис. 2, а и 2, в видно, что процесс гидратообразования заканчивается, т. е. газ в пузырьке полностью переходит в гидратное состояние на высоте порядка 0.5 м. При этом температура воды в канале не достигает равновесной температуры образования гидрата, что проиллюстрировано на рис. 2, в. Из рис. 2, б видно, что газовые пузырьки при заданной начальной скорости ускоряются и принимают максимальную скорость на высоте порядка 2.5 см, после чего скорости всплытия гидратных пузырьков уменьшаются. Из рис. 3, в видно, что процесс гидратообразования заканчивается на высоте порядка 1 м вследствие достижения водой равновесной температуры образования гидрата в канале. При этом газ в пузырьках не полностью переходит в гидратное состояние и пузырьки частично состоят из гидратной и газовой фаз, что показано на рис. 3, а и рис. 3, г.

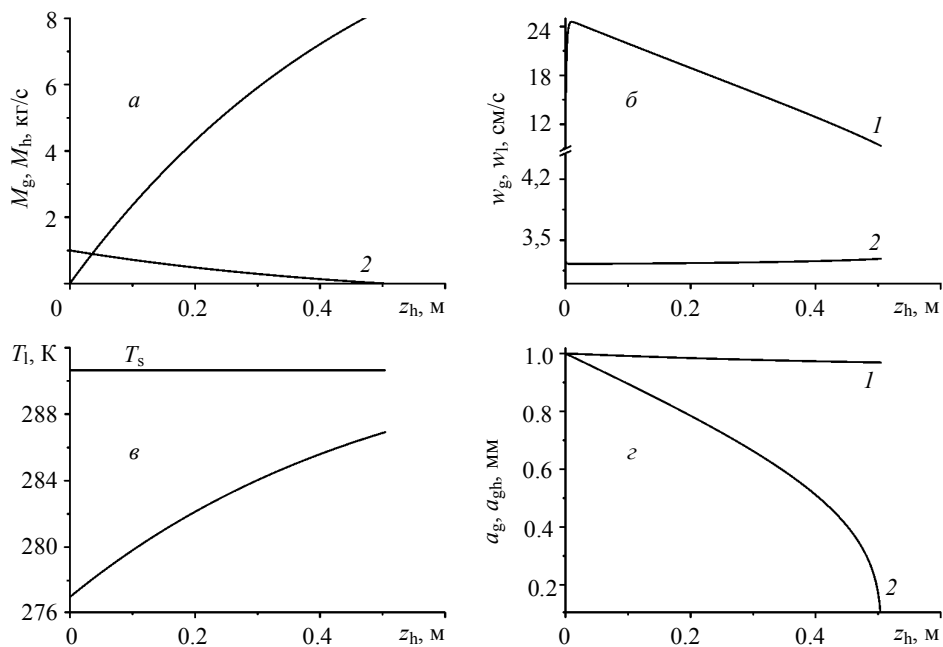


Рис. 2. Распределения массовых расходов (*a*): кр. 1 – гидрата и кр. 2 – газа; скоростей (*б*): кр. 1 – газовых пузырьков и кр. 2 – воды; температуры воды вдоль канала (*в*); радиусов (*г*): кр. 1 – газогидратного и кр. 2 – газового пузырька при полном образовании гидрата

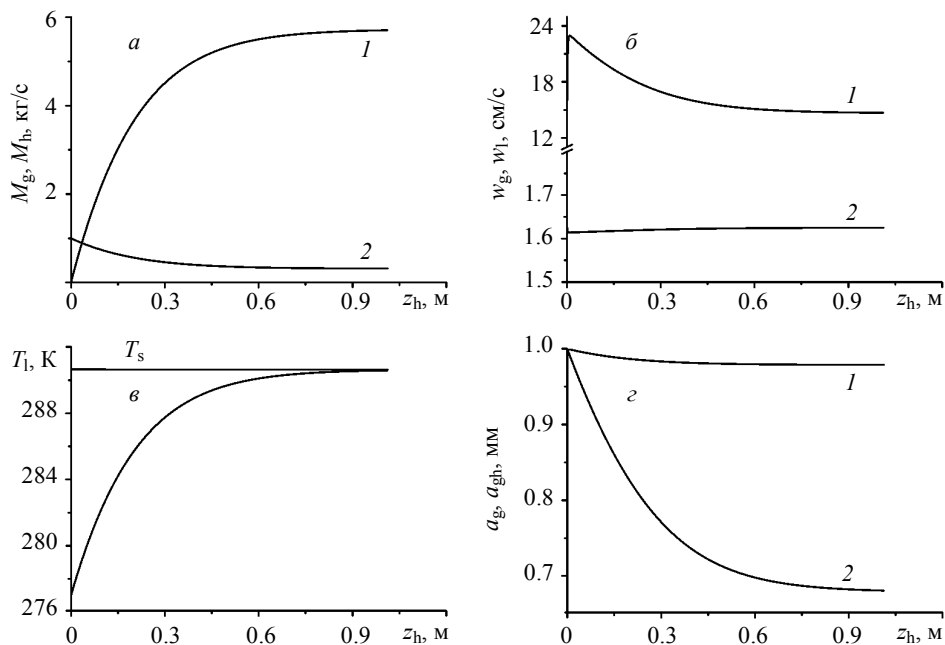


Рис. 3. Распределения массовых расходов (*a*): кр. 1 – гидрата и кр. 2 – газа; скоростей (*б*): кр. 1 – газовых пузырьков и кр. 2 – воды; температуры воды вдоль канала (*в*); радиусов (*г*): кр. 1 – газогидратного и кр. 2 – газового пузырька при частичном образовании гидрата

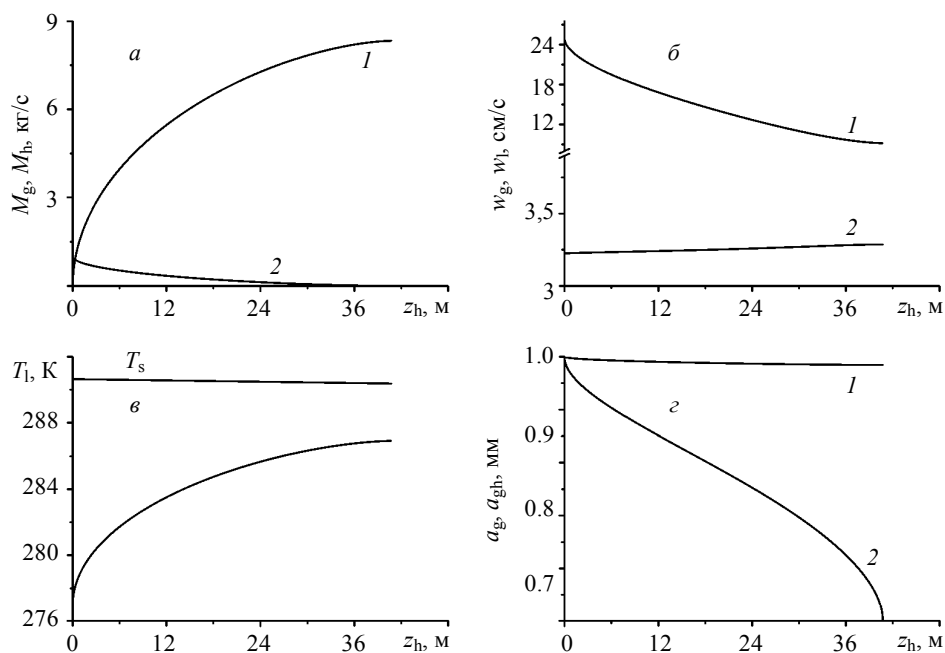


Рис. 4. Распределения массовых расходов (*a*): кр. 1 – гидрата и кр. 2 – газа; скоростей (*б*): кр. 1 – газовых пузырьков и кр. 2 – воды; температуры воды вдоль канала (*в*); радиусов (*г*): кр. 1 – газогидратного и кр. 2 – газового пузырька при полном образовании гидрата

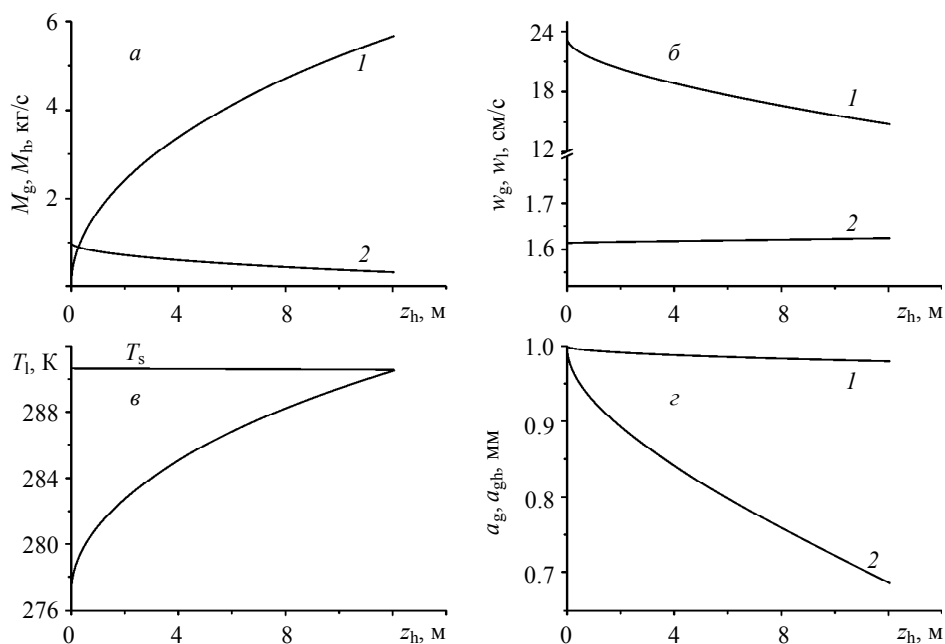


Рис. 5. Распределения массовых расходов (*a*): кр. 1 – гидрата и кр. 2 – газа; скоростей (*б*): кр. 1 – газовых пузырьков и кр. 2 – воды; температуры воды вдоль канала (*в*); радиусов (*г*): кр. 1 – газогидратного и кр. 2 – газового пузырька при частичном образовании гидрата

На рис. 4 и рис. 5 представлены распределения массовых расходов газа и гидрата, скоростей газовых пузырьков и воды, температуры воды вдоль канала, а также радиусов газового и гидратного пузырьков, когда интенсивность образования гидратных пузырьков лимитируется диффузией газа через гидратную корку для массовых расходов воды соответственно $M_{10} = 100$ и 50 кг/с.

Так же, как и для случая, результаты которого представлены на рис. 2, видно, что процесс гидратообразования заканчивается, когда газ в пузырьке полностью переходит в гидратное состояние (рис. 4, а и з), а температура воды в канале не достигает равновесной температуры образования гидрата (рис. 4, в). При этом высота, на которой завершается образование гидрата, составляет порядка 40 м.

Из рис. 5 аналогично, как и для случая, результаты которого представлены на рис. 3, видно, что процесс гидратообразования заканчивается вследствие достижения температуры воды в канале равновесной температуры образования гидрата для данного значения давления (рис. 5, в), а газ в пузырьках не полностью переходит в гидратное состояние и пузырьки частично состоят из гидратной и газовой фаз (рис. 5, а и з). При этом высота, на которой завершается образование гидрата, составляет порядка 12 м.

Из представленных результатов видно, что если интенсивность гидратообразования определяется отводом тепла от поверхности пузырьков жидкостью, то высота, на которой завершается процесс образования гидрата, составляет доли метров, а в случае диффузии газа через гидратную корку – десятки метров.

Таким образом, первая схема в случае, когда интенсивность образования гидрата определяется лишь способностью окружающей частицу воды отводить тепло, выделившееся за счет гидратообразования, реализует наибольший темп образования гидрата. Это обстоятельство не всегда характерно для условий океана. Однако такое рассмотренное приближение не лишено смысла. Данный случай может наблюдаться в лабораторных условиях в зависимости от качества воды и содержащихся в ней примесных частиц. В морской же воде интенсивность гидратообразования может значительно усиливаться при внедрении физико-химических добавок [15, 16].

Однако обзор литературы по миграции газовых пузырьков в условиях гидратообразования показал, что процесс образования гидратной корки является достаточно медленным [5, 10, 12]. Поэтому схема диффузионного переноса газа через гидратную корку наиболее адекватно описывает процесс роста газогидратной частицы, который наблюдался в опытах при всплытии метановых пузырьков в морской воде.

Критические значения массовых расходов газа и воды для процесса образования гидрата

В результате численного эксперимента было получено, что при различных значениях начального массового расхода воды возможно несколько случаев завершения процесса гидратообразования, когда либо температура воды в канале достигнет равновесной температуры ($M_{10} = 50$ кг/с), либо газовые пузырьки полностью превратятся в гидратные частицы ($M_{10} = 100$ кг/с). Поэтому существует некоторое критическое значение массового расхода воды при фиксированном значении расхода газа, необходимого для полного образования гидрата:

$$M_1^* = \frac{M_{g,h}^*}{c_1 \Delta T G} \quad (21)$$

Здесь M_g^* , M_1^* – критические значения массовых расходов газа и воды.

Таким образом, при миграции газовых пузырей в вертикальном канале возможны три режима протекания процесса гидратообразования газовых пузырьков. Если при данном значении массового расхода газа M_{g0} начальное значение массового расхода воды больше критического $M_{10} > M_1^*$, то газовые пузырьки полностью превращаются в гидратные частицы, при этом температура воды в канале не достигает равновесной температуры образования гидрата. Если $M_{10} < M_1^*$, то газовые пузырьки частично состоят из гидратной и газовой фаз, а при этом температура воды в канале достигает равновесной, и процесс гидратообразования завершается.

Если $M_{10} = M_1^*$, то в данном случае, как только газовые пузырьки полностью превратятся в гидратные частицы, так температура воды в канале достигает равновесной и процесс гидратообразования завершается.

На рис.6 представлена зависимость влияния начального массового расхода воды на процесс гидратообразования при различных значениях глубины функционирования газового источника для двух случаев.

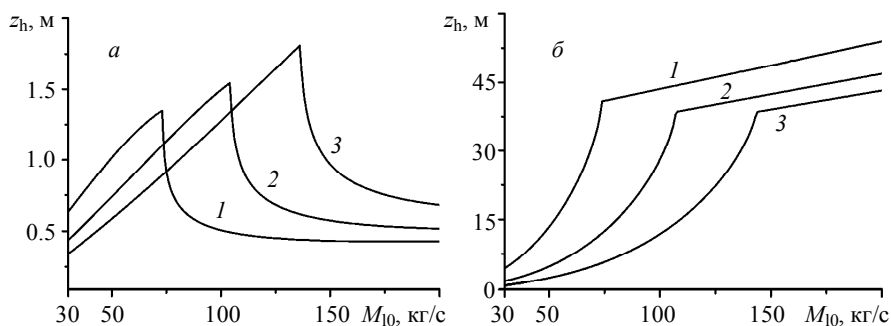


Рис. 6. Зависимость длины реактора от начального массового расхода воды при различной глубине источника газа: кр. 1 – $p = 15$ МПа, кр. 2 – $p = 10$ МПа, кр. 3 – $p = 8$ МПа для двух случаев: а – процесс гидратообразования лимитируется отводом тепла, б – диффузией газа через гидратную корку

Согласно формуле (1), для данных значений давлений равновесные температуры соответственно равны: $T_s(p) = 290.6$, 286.6 и 284.3 К. Тогда по формуле (21) минимальные значения массовых расходов воды будут соответственно равны: $M_1^* = 76$, 103 и 136 кг/с. Это означает, что чем выше расположен газовый источник от дна океана, тем критические значения расходов воды больше и пик на графиках смещается вправо.

Из рис. 6, а видно, что при увеличении начального массового расхода воды высота, на которой завершается процесс гидратообразования, растет до некоторого максимального значения, а затем начинает уменьшаться. Это связано с тем, что, если $M_{10} < M_1^{(\min)}$, процесс гидратообразования завершается при достижении

температуры жидкости в канале T_l равновесной температуры $T_s(p)$ для данного значения давления. С увеличением массового расхода жидкости, тепла необходимо затратить больше для того, чтобы температура воды достигла равновесной. Поэтому данный процесс заканчивается на больших высотах. При $M_{10} > M_1^{(\min)}$ процесс гидратообразования завершается при полном переходе газовых пузырей в гидратное состояние: чем больше M_{10} , тем больше увеличивается скорость движения воды, что, следовательно, приводит к интенсивному теплосъему с поверхности гидратных пузырьков и соответственно к полному переходу газа в гидратное состояние.

Для случая диффузии газа через гидратную корку, когда протекает процесс частичного образования гидрата (до критического значения), видно (рис. 6, б), что с увеличением донного давления происходит рост высоты всплытия пузырьков. Это объясняется тем, что равновесная температура образования гидрата растет и данный процесс замедляется. При полном переходе газа в гидратное состояние (рис. 6, б), с увеличением массового расхода воды вновь происходит рост высоты реактора. Это объясняется тем, что с увеличением массового расхода воды происходит увеличение объемного содержания воды в реакторе, что приводит к уменьшению газосодержания и числа частиц в потоке, которое сопровождается ростом скорости их всплытия.

Заключение

Предложена и построена теоретическая модель процесса роста гидратной оболочки на поверхности всплывающих в восходящем потоке воды в вертикальном канале метановых пузырьков. Рассмотрены два механизма, определяющие кинетику гидратообразования в процессе всплытия газовых пузырьков. Согласно численным расчетам, установлено, что если интенсивность гидратообразования определяется отводом тепла от поверхности пузырьков жидкостью, то высота реактора составляет доли метров, а в случае, когда лимитируется диффузией газа через гидратную корку, – десятки метров.

Получены критические значения массовых расходов газа и воды, необходимые для процесса полного образования гидрата. Установлено, что при миграции газовых пузырьков в реакторе возможны два режима протекания процесса гидратообразования в зависимости от начального значения массового расхода воды: газовые пузырьки либо полностью переходят в гидратное состояние в виде отдельных включений, либо частично, образуя пузыри с гидратной скорлупой. Проведен анализ влияния гидростатического давления (глубин, на которых функционируют газовые источники) на динамику процесса гидратообразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sauter E.J. et al. Methane discharge from a deep-sea submarine mud volcano into the upper water column by gas hydrate-coated methane bubbles // *Earth and Planetary Science Letters*. 2006. No. 243(3–4). P. 354.
2. Maksimov A.O., Sosedko E.V. Dynamics of sea bubbles covered by a hydrate skin // XVI Session of the Russian Acoustical Society, Moscow. November 14–18. 2005. P. 459.
3. Haeckel M. et al. Rising methane gas bubbles form massive hydrate layers at the seafloor // *Geochimica et Cosmochimica Acta*. 2004. V. 68. No. 21. P. 4335.
4. Егоров А.В., Нигматулин Р.И., Рожков А.Н. Переход глубоководных метановых пузырей в твердые гидратные формы // Препринт ИПМех РАН № 1038. 2013.

5. Greinert J. *et al.* 1300-m-high rising bubbles from mud volcanoes at 2080m in the Black Sea: Hydroacoustic characteristics and temporal variability // *Earth and Planetary Science Letters*. 2006. V. 244. P. 1.
6. Römer M. *et al.* Geological control and magnitude of methane ebullition from a high-flux seep area in the Black Sea – the Kerch seep area // *Marine Geology*. 2012. No. 319–322. P. 57.
7. Römer M. *et al.* The role of gas bubble emissions at deep-water cold seep systems: an example from the Makran continental margin, offshore Pakistan // *Proceedings of the 7th International Conference on Gas Hydrates (ICGH 2011)*, Edinburgh, Scotland, United Kingdom. July 17–21. 2011.
8. Skarke A. *et al.* Widespread methane leakage from the sea floor on the northern US Atlantic margin // *Nature Geoscience*. September 2014. V. 7. P. 657. DOI: 10.1038/NGEO2232
9. Gentz T. *et al.* A water column study of methane around gas flares located at the West Spitsbergen continental margin // *Continental Shelf Research*. 2014. V. 72. P. 107.
10. Rehder G. *et al.* Enhanced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean // *Geophysical Research Letters*. 2002. No. 29. P. 21.
11. Smith A.J. *et al.* Thermogenic methane injection via bubble transport into the upper Arctic Ocean from the hydrate-charged Vestnesa Ridge, Svalbard // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. May 2014. V. 15. I. 5. P. 1945.
12. McGinnis D.F. *et al.* Fate of rising methane bubbles in stratified waters: How much methane reaches the atmosphere? // *Journal of Geophysical Research*. 2006. V. 111. P. 382.
13. Власов В.А. Диффузионно-феноменологическая теория образования гидрата из ледяного порошка // *Теоретические основы химической технологии*. 2012. Т. 46. № 6. С. 612 [Vlasov V.A. Phenomenological diffusion theory of formation of gas hydrate from ice powder // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2012. V. 46. No. 6. P. 576].
14. Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992.
15. Мельников В.П., Нестеров А.Н. Применение ПАВ в технологиях транспорта и хранения природного газа в форме газогидратов // *Фундаментальные проблемы разработки нефтегазовых месторождений, добычи и транспортировки углеводородного сырья: Материалы Междунар. конф.* 2004. С. 98.
16. Нестеров А.Н. Применение поверхностно-активных веществ для интенсификации процессов образования гидратов в технологиях транспорта и хранения газа // *Современное состояние газогидратных исследований в мире и практические результаты для газовой промышленности*. М.: ООО ИРЦ Газпром. 2004. С. 66.
17. Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И., Нурисламов О.Р. К теории образования и разложения газогидратных частиц в процессе их всплытия в воде // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2013. № 6 (26). С. 106–113.
18. Gumerov N.A., Chahine G.L. Dynamics of bubbles in conditions of gas hydrate formation // *Fluid Dynamics*. 1992. No. 5. P. 664.
19. Zheng L., Yapa P.D. A model for simulating deepwater oil and gas blowouts – Part I: Theory and model formulation // *Journal of Hydraulic Research*. 2002. V. 41. No. 4. P. 339.
20. Гумеров Н.А. Автомодельный рост слоя газового гидрата, разделяющего газ и жидкость // *Механика жидкости и газа*. 1992. № 5. С. 78.
21. Макогон Ю.Ф. Гидраты природных газов М.: Недра, 1974.
22. Luo Y.-T. *et al.* Study on the kinetics of hydrate formation in a bubble column // *Chemical Engineering Science*. 2007. No. 62. P. 1000.
23. Нугматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1. 464 с.
24. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запryanov З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А. Химическая гидродинамика: Справочное пособие. М.: Квантум, 1996.
25. Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Kunsbaeva G.A. Теоретическое моделирование реактора, для процесса вымывания газа из гидрата // *Теорет.основы хим. технологии*. 2013. Т. 47. № 2. С. 208. [Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Kunsbaeva G.A. Theoretical modeling of a reactor for washing gas out of hydrates // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2013. V. 47. No. 2. P. 159].

Статья поступила 13.12.2014 г.

Shagapov V. Sh., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. ON MECHANISMS OF THE HYDRATE SHELL GROWTH ON THE SURFACE OF SUPERNATANT GAS BUBBLES

DOI 10.17223/19988621/35/10

A theoretical model of the methane bubble migration under conditions of the hydrate development in an upward flow of water in a vertical pipe is proposed and constructed. We consider two limiting mechanisms that determine the hydrate development kinetics in the process of gas bubble floating-up. If the hydrate development intensity is determined by the heat removal from the bubble surface by a liquid, the height at which the hydrate formation process terminates amounts to fractions of meters; in the case where the process is limited by gas diffusion through the hydrated peel, tens of meters.

The critical mass flow rates of gas and water needed to complete the process of hydrate formation have been obtained. It is found that the migration of gas bubbles in the reactor is accompanied by two possible modes of the hydrate development depending on the initial mass flow rate of water: gas bubbles go over into the hydrated state either completely as separate inclusions or partially with the formation of bubbles with a hydrate shell. The influence of the initial mass flow of water on the dynamics of the hydrate formation process is analyzed at different values of hydrostatic pressure (or gas source operation depths).

Keywords: hydrate shell, water, gas, tubular reactor, heat removal, diffusion.

SHAGAPOV Vladislav Shaihulagzamovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mechanics of Ufa Branch, RAS, Ufa, Russian Federation)

E-mail: Shagapov@rambler.ru

CHIGLINTSEVA Angelina Sergeevna (Candidate of Physics and Mathematics, Bashkir State University, Birsik, Russian Federation)

E-mail: changelina@rambler.ru

RUSINOV Aleksey Aleksandrovich (Bashkir State University, Birsik, Russian Federation)

E-mail: irtysh2009@mail.ru

REFERENCES

- Sauter E.J. et al.* Methane discharge from a deep-sea submarine mud volcano into the upper water column by gas hydrate-coated methane bubbles // *Earth and Planetary Science Letters*. 2006. № 243(3–4). P. 354.
- Maksimov A.O., Sosledko E.V.* Dynamics of sea bubbles covered by a hydrate skin // XVI Session of the Russian Acoustical Society, Moscow. November 14–18. 2005. C. 459.
- Haeckel M. et al.* Rising methane gas bubbles form massive hydrate layers at the seafloor // *Geochimica et Cosmochimica Acta*. 2004. V. 68. № 21. P. 4335.
- Егоров А.В., Нугматулин Р.И., Рожков А.Н.* Переход глубоководных метановых пузырей в твердые гидратные формы // Препринт ИПМех РАН № 1038. 2013.
- Greinert J. et al.* 1300-m-high rising bubbles from mud volcanoes at 2080m in the Black Sea: Hydroacoustic characteristics and temporal variability // *Earth and Planetary Science Letters* 244 2006. P. 1.
- Römer M. et al.* Geological control and magnitude of methane ebullition from a high-flux seep area in the Black Sea—the Kerch seep area // *Marine Geology*, № 319-322. 2012. P. 57.
- Römer M. et al.* The role of gas bubble emissions at deep-water cold seep systems: an example from the Makran continental margin, offshore Pakistan // *Proceedings of the 7th International Conference on Gas Hydrates (ICGH 2011)*, Edinburgh. Scotland. United Kingdom. July 17-21. 2011.
- Skarke A. et al.* Widespread methane leakage from the sea floor on the northern US Atlantic margin // *Nature geoscience*. September 2014. V.7. P.657. DOI: 10.1038/NGEO2232
- Gentz T. et al.* A water column study of methane around gas flares located at the West Spitsbergen continental margin // *Continental Shelf Research*. 2014. V. 72. P. 107.

Rehder G et al. Enhanced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean // Geophysical research letters. 2002. № 29. P. 21.

Smith A.J. et al. Thermogenic methane injection via bubble transport into the upper Arctic Ocean from the hydrate-charged Vestnesa Ridge, Svalbard Geochemistry, Geophysics, Geosystems May 2014. V. 15. I. 5. P. 1945.

McGinnis D.F. et al. Fate of rising methane bubbles in stratified waters: How much methane reaches the atmosphere? // Journal of geophysical research. 2006. V. 111. P. 382.

Власов В.А. Диффузионно-феноменологическая теория образования гидрата из ледяного порошка // Теоретические основы химической технологии, 2012 Т. 46. № 6. С. 612 [Vlasov V.A. Phenomenological diffusion theory of formation of gas hydrate from ice powder // Theor. Found. Chem. Eng. 2012. V. 46. № 6. P. 576].

Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условиях М.: Недра, 1992.

Мельников В.П., Нестеров А.Н. Применение ПАВ в технологиях транспорта и хранения природного газа в форме газогидратов // Фундаментальные проблемы разработки нефтегазовых месторождений, добычи и транспортировки углеводородного сырья. Материалы межд. конф. 2004. С. 98.

Нестеров А.Н. Применение поверхностно – активных веществ для интенсификации процессов образования гидратов в технологиях транспорта и хранения газа // Современное состояние газогидратных исследований в мире и практические результаты для газовой промышленности. М.: ООО ИРЦ Газпром. 2004. С. 66.

Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И., Нурисламов О.Р. К теории образования и разложения газогидратных частиц в процессе их всплытия в воде // Вестник Томского государственного университета. – 2013. – № 6 (26). – С. 106-113.

Gumerov N.A., Chahine G.L. Dynamics of bubbles in conditions of gas hydrate formation // Fluid Dynamics. 1992. № 5. P. 664.

Zheng L., Yapa P.D. A model for simulating deepwater oil and gas blowouts – Part I: Theory and model formulation // Journal of Hydraulic Research. 2002. V. 41. N. 4. P. 339.

Гумеров Н.А. Автомодельный рост слоя газового гидрата, разделяющего газ и жидкость // Механика жидкости и газа, №5, 1992. С. 78.

Макогон Ю.Ф. Гидраты природных газов М.: Недра, 1974.

Luoa Y.-T. et al. Study on the kinetics of hydrate formation in a bubble column // Chemical Engineering Science. 2007. № 62. P. 1000.

Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1. 464 с.

Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запryanов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А. Химическая гидродинамика: Справочное пособие. М.: Квантум, 1996.

Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Kunsbaeva G.A. Теоретическое моделирование реактора, для процесса вымывания газа из гидрата. // Теорет.основы хим. технологии. 2013. Т. 47. № 2. С. 208. [Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Kunsbaeva G.A. Theoretical modeling of a reactor for washing gas out of hydrates // Theor. Found. Chem. Eng. 2013. V. 47. № 2. P. 159].

УДК: 531:66.011

DOI 10.17223/19988621/35/11

И.А. Яковлев, В.А. Скрипняк

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИИ РЕАКТОРА ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ГАЗОВ¹

Рассмотрен подход к решению сопряженных термомеханических задач для оценки НДС и вязкости разрушения при воздействии высокотемпературного газового потока на конструкцию реакторов фильтрационного горения. Приведены результаты численного решения сопряженных термомеханических задач и расчета прочности элементов конструкций реакторов, когда тепловые поля по элементам конструкции определялись исходя из аналитических теплотехнических расчетов. Показано, что при численном решении сопряженных задач прогнозируемые напряжения распределяются в соответствии с локальными изменениями коэффициента теплоотдачи, обусловленными эффектами турбулентности и неравномерности поля скорости потока высокотемпературного газа.

Ключевые слова: энергетические и нефтегазовые установки, реакторы фильтрационного горения, компьютерный инжиниринг, моделирование работы, расчеты на прочность, сопряженные задачи.

При проведении инжинирингового анализа проектируемых энергетических установок (ЭУ) возникает необходимость решения сопряженных термомеханических задач, обеспечивающих повышение эффективности и безопасности конструкций. Для снижения временных и финансовых затрат на проектирование широко используются системы компьютерного моделирования физико-механических процессов в ЭУ, что позволяет устанавливать и оптимизировать рабочие параметры процессов, прогнозировать надежность и работоспособность конструкций на этапе подготовки проектной документации [1 – 4].

Создание новых и повышение эффективности традиционных технологических процессов в нефтехимической промышленности, тепловой энергетике, сфере утилизации вредных веществ связано с необходимостью использования более высоких рабочих температур и давлений. Указанные экстремальные условия должны поддерживаться в режиме нормального функционирования при эксплуатации устройств.

В связи с необходимостью повышения достоверности прогнозов компьютерного моделирования прочности элементов конструкций энергетических установок и устройств энергетического и нефтегазового машиностроения, актуальной задачей является разработка подходов решения сопряженных термомеханических задач для широкого диапазона температур и давлений.

Решение указанного класса сопряженных термомеханических задач лежит в основе технических решений, нацеленных на обеспечения максимального уровня

¹ Данное научное исследование выполнено при поддержке Программы «Научный фонд им. Д.И. Менделеева Томского государственного университета».

безопасности эксплуатации энергетических объектов, так как аварии и отказы оборудования приводят не только к материальным потерям, но и к человеческим жертвам и экологическим катастрофам. Особенно это важно при разработке технологических процессов, связанных с достижением сверхadiaбатических температур, высоких давлений, с использованием химически активных, токсичных и агрессивных сред, а также при эксплуатации объектов в сложных метеорологических условиях.

Совершенствование методов компьютерного инжиниринга при создании аппаратов энергетики приводит к закономерному снижению отраслевого коэффициента запаса прочности, что способствует существенному снижению металлоемкости и производственных материальных затрат.

Нормативные документы, регламентирующие нормы и аналитические методы расчета прочности устройств, применяемых в нефтехимической, энергетической и смежных отраслях промышленности, не позволяют в достаточной мере учесть влияние высокотемпературных процессов на реализующееся напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкций [5, 6]. Сложность связана с определением локальных значений температур соответствующих элементов конструкций, так как реальная картина их распределения по конструкции является неоднородной, что вызывает сложности при определении осредненных констант материала в области с большими градиентами температур. Проблема усугубляется тем, что чаще всего неравномерный тепловой прогрев наблюдается в области конструктивных элементов, таких, как отводы, ребра, переходы, соединения и т.п., которые, в свою очередь, являются концентраторами напряжений сложной формы, где применение упрощенных аналитических формул для определения уровня напряжений необоснованно [7]. В конечном итоге это приводит к необходимости повышения соответствующих коэффициентов запаса прочности и удорожанию производства.

Ввиду того, что изменение положения стенок устройства вследствие температурных деформаций не оказывает существенного влияния на процессы, происходящие внутри ЭУ, при математическом моделировании может быть сформулирован подход к решению сопряженной задачи термомеханики, когда задача разбивается на последовательные подзадачи, связанные через граничные условия. Первая подзадача – определение параметров течения среды в реакционной камере устройства и определение контуров температур по элементам конструкции [8]. Вторая – определение НДС конструкции, возникающего в результате действия тепловых деформаций [9].

Отметим, что в энергетическом машиностроении в процессе изготовления устройств наиболее часто в качестве сборочной операции используется сварка. В процессе сварки могут образовываться технологические дефекты в виде трещин, обусловленные как конструкцией, так и образующиеся в результате нарушения технологии или локального перегрева металла. В процессе эксплуатации устройства зона сварки может подвергаться действию напряжений (часто циклических) сложной конфигурации [10], и наличие в этой области дефектов может привести к квазихрупкому разрушению с образованием магистральной трещины вблизи сварного шва [11]. Проблема усугубляется тем, что часто в качестве заготовок при производстве аппаратов подобного класса используются различные профили, получаемые методом деформирования (трубы, листы) и склонные к слоистому растрескиванию вдоль направления проката. Поэтому при исследовании надежности подобных конструкций важно проводить оценку вязкости разрушения с применением методов механики разрушения.

В работе рассматривается реактор фильтрационного горения газов. В реакционной камере данного устройства протекает процесс конверсии метана в стационарной волне горения с достижением сверхадиабатических температур сгорания. Исследуется влияние толщины и степени износа слоя футеровки реакционной области на распределение температур по элементам конструкции, а также на НДС и вязкость разрушения элементов конструкции при наличии технологических трещин в сварных швах реактора фильтрационного горения газов (РФГГ) в рамках комплексного подхода к моделированию сложных технических систем.

Модель реактора фильтрационного горения газов

Рассмотрим конструктивную схему реактора фильтрационного горения. Типовая конструкция реактора включает цилиндрическую камеру сгорания 1 (рис. 1), заполненную керамическими шарами Al_2O_3 диаметром 5 мм. Камера 1 футерована слоем термостойкого бетона 2, заключенного в металлический корпус 3. В камеру распределения 4 подача метановоздушной смеси осуществляется через сопловой патрубок 5. Инициация реакции осуществляется электродом поджига 6. Отвод высокотемпературных продуктов сгорания производится через штуцер 7. С использованием датчиков температуры 8 осуществляется контроль параметров процесса. Реактор дополняется рекуперативной системой активного охлаждения, состоящей из камеры 9, куда хладагент подается через штуцер 10. Через фланец 11 реактор соединяется с последующими узлами комплекса. Опорные кронштейны 12 жестко соединяются с монтажной рамой установки. В качестве реакционной смеси используется смесь метана и воздуха с эквивалентным соотношением $\phi = 2.5$ при давлении p_0 в 2.5 атм. Удельный массовый расход смеси g через реактор составляет $0.2 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Схема наложения сварных швов по ГОСТ 16037-80 и определяющие габаритные размеры реакторного блока показаны на рис. 1. В качестве материала футеровки используется теплоизоляционная смесь СМКРБТ на основе 70 % пористого алюмосиликатного заполнителя и 30 % гидравлического вяжущего (глиноземного цемента) с физико-механическими характеристиками по ТУ 14-8-567-88. Материал несущих элементов конструкции – хромоникелевая сталь аустенитного класса марки 12Х18Н10Т по ГОСТ 9940-81 и ГОСТ 7350-77.

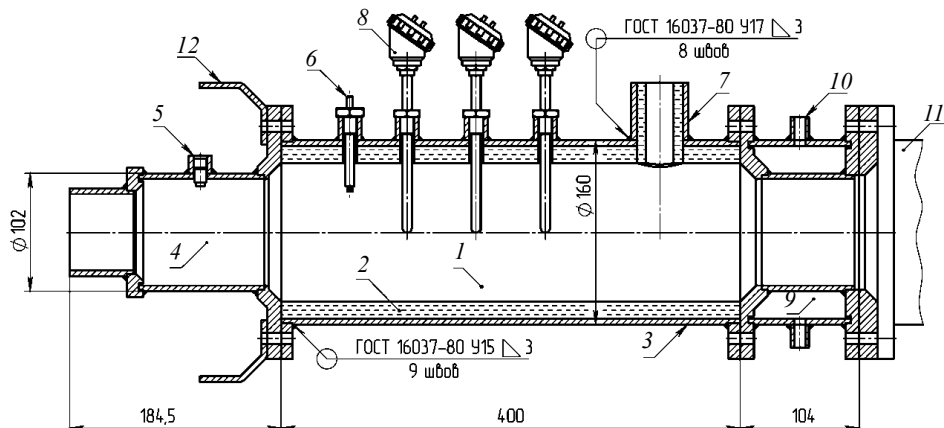


Рис. 1. Схема исследуемого реакторного блока конверсии метана

В конструкции содержится технологическая трещина l в корне углового шва опорного фланца в соответствии со схемой, приведенной на рис. 2.

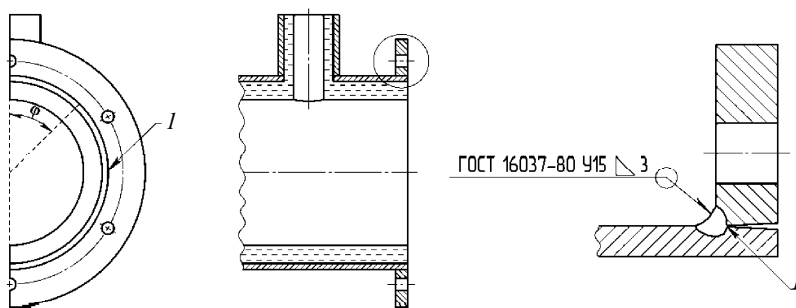


Рис. 2. Схема сварного присоединения опорного фланца к обечайке с кольцевой технологической трещиной

Постановка сопряженной термомеханической задачи для моделирования рабочего процесса реактора фильтрационного горения газов

При формулировании математической модели целесообразно производить декомпозицию расчетной области на пространственные подобласти двух типов. В подобласти первого типа решается система уравнений механики деформируемого твердого тела в лагранжевой системе координат, в подобласти второго решается задача механики жидкости и газа в эйлеровой системе координат.

Система разрешающих уравнений для определения параметров течения многокомпонентной горючей смеси в реакционной и холодильной камерах устройства, а также для определения контуров температур по элементам конструкции имеет следующий вид [12]:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla(\rho_f \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

где ρ_f – плотность газа, $\mathbf{v}$ – вектор массовой скорости, ∇ – оператор Гамильтона, t – время;

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \mathbf{v}) + \nabla(\rho_f \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla(\boldsymbol{\tau}), \quad (2)$$

где p – давление, $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений, определяемый соотношением:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left[(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} \right].$$

Здесь μ – коэффициент вязкости, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, верхний индекс T соответствует операции транспонирования вектора.

Уравнение сохранения энергии записано в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f E_f) + \nabla(\mathbf{v}(\rho_f E_f + p)) = \nabla \left(k_f \nabla T_f - \sum_j h_j \mathbf{J}_j + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \right) + S_c + hA(T_p - T_f), \quad (3)$$

где E_f – полная энергия среды, k_f – теплопроводность, включающая турбулентные эффекты, h_j и $\mathbf{J}_j$ – энтальпия и диффузионный поток j -й компоненты смеси, T_f – температура газовой среды, T_p – температура инертного пористого каркаса; h –

коэффициент межфазной теплоотдачи, A – удельная межфазная поверхность, S_c – источник тепла за счет химических реакций.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f Y_j) + \nabla(\rho_f \mathbf{v} Y_j) = -\nabla \mathbf{J}_j + R_j, \quad (4)$$

где Y_j – массовая доля j -й компоненты смеси, R_j – скорость производства j -й компоненты смеси вследствие химических реакций.

Для учета турбулентности базовая система уравнений (1) – (4) дополняется соотношениями, принятыми в рамках двухпараметрической модели, основанной на рассмотрении кинетической энергии пульсаций скорости k и скорости диссипации энергии ε (k – ε -модель) [13]. В рамках принятой модели турбулентности для определения параметров потока вблизи стенок реактора используется масштабированная пристеночная функция течения с обеспечением соответствующих значений безразмерной толщины слоя y^+ на сеточном уровне.

Для моделирования процесса сгорания богатых смесей в условиях фильтрации через пористую среду в режиме низких скоростей [14] используется двухтемпературная модель. В систему базовых уравнений включается дополнительное связанное уравнение энергии для учета перераспределения тепла по пористому каркасу:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p E_p = \nabla(k_p \nabla T_p) + hA(T_f - T_p), \quad (1)$$

где ρ_p – плотность пористой среды, k_p – эффективная теплопроводность пористого каркаса, в квазирасселандовском приближении включающая теплопроводность за счет излучения, E_p – полная энергия твердой фазы.

Полная система уравнений со всеми дополнительными соотношениями для учета специфических эффектов, присущих явлению фильтрационного горения газов, в том числе эффектов дисперсии и лучистой теплопередачи по пористому каркасу, рассмотрена в работе [15].

Уравнение состояния использовано в форме

$$\rho_f = \frac{p \sum_j M_j Y_j}{RT_f}, \quad (2)$$

где M_j – молекулярная масса j -й компоненты смеси, R – универсальная газовая постоянная.

Для определения температуры в элементах конструкции решается уравнение теплопереноса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s h_s) = \nabla(k_s \nabla T_s), \quad (3)$$

где ρ_s , h_s , $k_s = k_s(T_s)$, T_s – плотность, энтальпия, теплопроводность и температура материала соответственно.

Схема расчетной области показана на рис. 3.

Система уравнений (1) – (3) замыкается следующими граничными и начальными условиями. В точке $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ входной границы Γ_1 области Ω_1 задается условие (рис. 3)

$$\mathbf{v}(\bar{x}) = g \iint_{\Gamma_1} d\Gamma_1, \quad Y_j(\bar{x}) = Y_j^0, \quad T_f(\bar{x}) = T_0, \quad \frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial T_p(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_1 \subset \Omega_1,$$

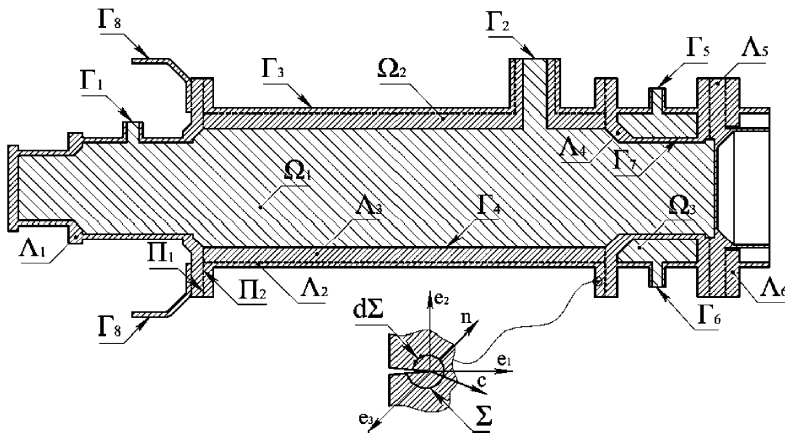


Рис. 3. Схема расчетной области

на выходной Γ_2

$$\frac{\partial Y_j(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial T_p(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_2 \subset \Omega_1.$$

На внешних стенках Γ_3 области Ω_2 , которая соответствует элементам конструкции реактора, задается граничное условие

$$k_s \frac{\partial T_s(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = a(T_s^4 - T_0^4) + b(T_s - T_0), \quad \bar{x} \in \Gamma_3 \subset \Omega_2,$$

где $a = a(T_s)$ – коэффициент излучения поверхности материала, $b = b(T_s)$ – коэффициент теплоотдачи от внешних стенок реактора в окружающую среду.

На внутренних стенках реактора, ограничивающих реакцию камеру Γ_4 , для межфазной поверхности задается условие для теплового потока и температур:

$$T_f(\bar{x}) = T_s(\bar{x}), \quad k_f \frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = k_s \frac{\partial T_s(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{x} \in \Gamma_4 = \Omega_1 \cap \Omega_2,$$

и условие прилипания потока:

$$\mathbf{v}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_4 = \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

В исследуемой конструкции РФГГ в полости, соответствующей движению хладагента Ω_3 , нет пористой засыпки, а в качестве рабочего тела используется атмосферный воздух. В соответствии с этим для расчетной области Ω_3 из системы уравнений (1) – (3) исключаются уравнения (4) и (1), а $\sum_j h_j J_j = 0$, $\sum_j M_j Y_j = M_a$, где M_a – молекулярная масса воздуха.

Граничное условие на входе в камеру теплообменника Γ_5 имеет вид:

$$\mathbf{v}(\bar{x}) = \mathbf{v}_0, \quad T_f(\bar{x}) = T_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_5 \subset \Omega_3,$$

на выходной границе Γ_6

$$\frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_6 \subset \Omega_3,$$

на поверхности раздела областей Γ_7

$$T_f(\bar{x}) = T_s(\bar{x}), \quad k_f \frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = k_s \frac{\partial T_s(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{x} \in \Gamma_7 = \Omega_2 \cap \Omega_3.$$

Начальные условия записываются в виде

$$p(\bar{x}, 0) = p_0, \quad \bar{x} \in \Omega_1, \Omega_3,$$

$$v(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_1, \Omega_3,$$

$$T(\bar{x}, 0) = F(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega_1,$$

$$T(\bar{x}, 0) = T_0, \quad \bar{x} \in \Omega_2, \Omega_3,$$

где $p_0 = 0.5$ атм, $T_0 = 300$ К, функция $F(\bar{x})$ соответствует распределению температур в виде теплового импульса в области инициации горения.

Система дифференциальных уравнений (1) – (3) с соответствующими граничными и начальными условиями решалась методом конечных элементов, реализованным в программном пакете FLUENT для трехмерной расчетной области в декартовой системе координат. Для реализации специфических физико-математических моделей, характерных для явления фильтрационного горения, использовались возможности встроенных языков программирования C UDF, UDS. Для обеспечения устойчивости численного решения шаг временного интегрирования подбирался из условия Куранта.

Ввиду того, что работа устройства протекает в условиях постоянства расхода, а параметры соответствуют стационарной волне фильтрационного горения, процесс в некотором приближении можно считать стационарным. Следовательно, система уравнений, решаемая в рамках подхода Лагранжа, для определения НДС конструкции с технологическим дефектом в виде трещины может быть записана для статического случая [16]:

$$\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad (4)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, u_i – компоненты вектора перемещений.

Определяющее соотношение записывается в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\Delta T_s]\delta_{ij}, \quad (6)$$

где μ , λ – коэффициенты Ляме, δ_{ij} – символ Кронекера, $\alpha = \alpha(T_s)$ – коэффициент температурного линейного расширения, T_s – значение температуры, рассчитываемое из уравнения (3).

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (7)$$

$\nu = \nu(T_s)$ – коэффициент Пуассона, $E = E(T_s)$ – модуль упругости материала.

В процессе определения НДС конструкции, подверженной температурным деформациям вблизи дефекта в виде трехмерной трещины с учетом конфигурационных сил производится расчет J-интеграла Черепанова – Райса, который отражает некоторую среднюю характеристику поля напряжений и деформаций в окрест-

ности вершины дефекта с неравномерным полем температур [17–19]:

$$J = c_l \int_{\Sigma} (W \delta_{ij} - \sigma_{ij} u_{i,l}) n_j d\Sigma + \iint_S \sigma_{ij} \delta_{ij} \alpha \Delta T_s dS, \quad (8)$$

где Σ – контур, окружающий вершину трещины (рис. 3), S – площадь, охваченная контуром Σ , n_j – единичная нормаль к контуру Σ , c_l – единичный вектор, перпендикулярный фронту трещины, W – плотность энергии деформации, определяемая как $W = 0.5 \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$.

При вычислении интеграла (8) в точке, принадлежащей фронту трещины, строится локальная система координат $\{e_1, e_2, e_3\}$, ориентированная относительно глобальной $\{x_1, x_2, x_3\}$ таким образом, чтобы ось e_1 была перпендикулярна фронту трещины, ось e_2 перпендикулярна плоскости дефекта, а ось e_3 была касательной к фронту (рис. 3).

Система уравнений (4) – (8) замыкается граничными условиями (рис. 3):

$$n_i \sigma_{ij}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_3,$$

для Ω_1, Ω_3 принимается $p(\bar{x}) = p_0$, тогда:

$$n_i \sigma_{ij}(\bar{x}) = p_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_4 \subset \Omega_2,$$

$$n_i \sigma_{ij}(\bar{x}) = p_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_7 \subset \Omega_3.$$

опорные кронштейны РФГ жестко соединяются с монтажной рамой:

$$u_i(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_8 \subset \Omega_2.$$

Область пространства Ω_2 , занимаемая элементами конструкции, состоит из подобластей Λ , так что $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5 = \Omega_2$, тогда на границе подобластей Λ_1 и Λ_2 выполняется условие

$$u_i(\bar{x}) = u_i(\bar{x}'), \quad \bar{x} \in \Pi_1 \subset \Lambda_1, \quad \bar{x}' \in \Pi_2 \subset \Lambda_2.$$

Аналогичное условие задается на границе для любых соседних подобластей Λ .

Для численного решения методом конечных элементов [20, 21] системы уравнений (4) – (8) в декартовых координатах вместе с соответствующими граничными условиями использовался решатель ANSYS Mechanical APDL.

В результате исследования сеточной сходимости установлена оптимальная мелкость пространственного разбиения трехмерных областей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 , когда дальнейшее измельчение сетки не оказывает существенного влияния на результаты моделирования.

Для верификации сформулированной физико-математической модели был решен ряд тестовых задач с известными аналитическими решениями или достоверными экспериментальными данными.

Проводилось численное моделирование турбулентного течения газа в цилиндрическом канале с обратным уступом с учетом конвективного теплообмена с подогреваемой стенкой. Геометрическая форма и размеры расчетной области, а также параметры течения принимались в соответствии с данными, приведенными в работе [22]. Максимальная разница рассчитанных по (1) – (3) и экспериментально измеренных значений локального числа Нуссельта вблизи теплопроводящей стенки составила 8.5 %.

Решалась тестовая задача определения нормальных и касательных напряжений в трубе с различной температурой на внешней и внутренней стенке. Сравнение результатов моделирования с данными расчетов, приведенными в работе [23] для аналогичной геометрии трубы и условий деформирования, показало различие в 1 %.

Тестирование метода численного определения вязкости разрушения с вычислением интеграла Черепанова – Райса (8) проводилось на задачах определения коэффициентов интенсивности напряжений K_I , K_{II} вблизи фронта полубесконечной поверхностной трещины с частично нагруженными берегами и поверхностной полуэллиптической трещины в бруске при одноосном растяжении. Полученные значения K_I , K_{II} сравнивались со значениями коэффициентов интенсивности напряжений, рассчитанными по формулам в работе [24] для аналогичных конфигураций и размеров трещин. Разница составила не более 5.5 %.

Результаты и обсуждение

Для определения допускаемых напряжений, при расчете на прочность конструкций сварных сосудов и аппаратов с учетом температурных воздействий в качестве расчетной температуры принимается наибольшая температура, полученная в результате теплотехнических расчетов в соответствии с п. 5 ГОСТ Р 52857.1–2007 [5]. При решении сопряженной термомеханической задачи в некотором приближении может быть определено поле температур в элементах конструкции, обусловленное воздействием течения высокотемпературной среды в реакционной зоне и эффектами локального изменения скоростных параметров потока, приводящих к интенсификации или замедлению процессов теплообмена со стенками устройства. Были проанализированы тепловые поля и НДС в конструкции энергетических установок при численном решении сопряженной задачи и при использовании аналитических методов расчета тепловых полей.

На рис. 4 показан контур распределения температур в осевом сечении потока горячего газа и конструкции, полученный решением системы уравнений (1) – (3) при толщине футеровочного слоя 15 мм.

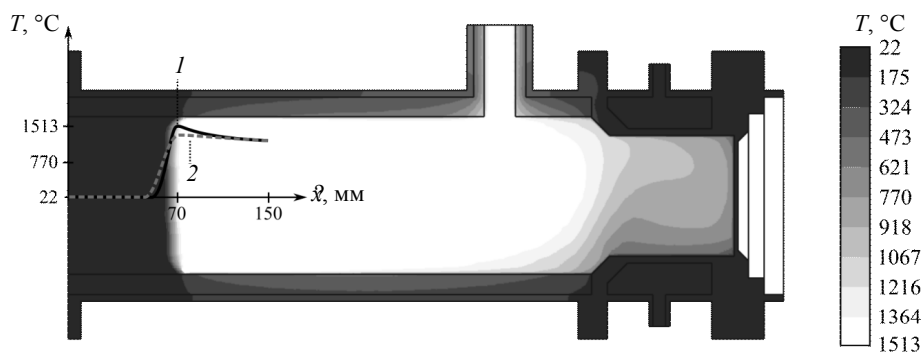


Рис. 4. Контур распределения температур в осевом сечении устройства при толщине слоя футеровки 15 мм

Максимальное значение температуры газа наблюдается в волне горения и составляет 1513 °С, что свидетельствует о достижении в системе сверхадиабатических температур сгорания. Вследствие того, что при моделировании процессов внутри реакционной зоны используется двухтемпературная модель (совместно решаются два уравнения энергии (3) и (1)), для газообразной среды и пористой закладки реактора наблюдается различие тепловых профилей вблизи фронта волны горения. Пересечение графиков функций $T_f(\hat{x})$ и $T_p(\hat{x})$ (линии 1, 2 на рис. 4)

свидетельствует об изменении направления теплового потока «пористый каркас → газ» на противоположное. На расстоянии ~80 мм от фронта горения профили температур выравниваются.

В футеровочном слое наибольший нагрев наблюдается в области выпускного отвода, где скорость высокотемпературных продуктов сгорания в ядре потока достигает 87 м/с и происходит активная теплоотдача.

Важным технологическим параметром работы исследуемого устройства является концентрация H_2 , CO , CO_2 и доля несгоревшего метана на выходе из реактора. В данной работе распределение концентраций продуктов сгорания в реакторе и их зависимость от других параметров рассматриваться не будет, так как это было подробно показано в предшествующей работе [15]. Отметим только, что на расстоянии 110 мм от поперечного сечения, соответствующего максимуму температуры, состав высокотемпературного газа стабилизируется и в молярных долях составляет: H_2 – 14.3 %, CO – 8.6 %, CO_2 – 2.7 %, CH_4 – 2 %.

Контур распределения температур по элементам конструкции реактора фильтрационного горения, полученный решением системы уравнений (1) – (3) для толщины футеровочного слоя 15 мм показан на рис. 5, а. Контур, полученные на основе аналитических теплотехнических расчетов [25, 26] в соответствии с рекомендациями п. 5 нормативного документа [5], показаны на рис. 5, б. При том, что оба расчета проводились для идентичных условий процесса, наблюдается существенное различие картин распределения теплового поля.

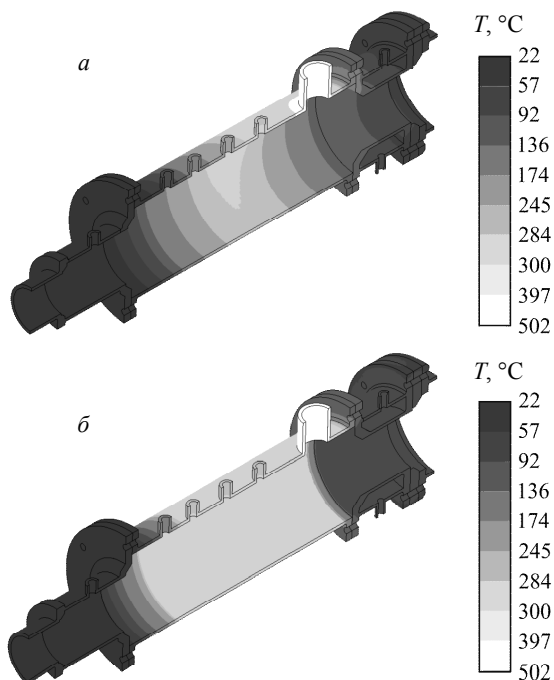


Рис. 5. Контур распределения температур по элементам конструкции, полученные при решении: а – сопряженной задачи; б – на основании теплотехнических расчетов для слоя футеровки толщиной 15 мм (футеровка на рисунке не показана)

Применение аналитических методов дает большую равномерность прогрева элементов конструкции по сравнению с методом вычислительной газодинамики и теплообмена, когда локально учитывается изменение коэффициента теплоотдачи, обусловленное эффектами турбулентности и неравномерности поля скорости потока высокотемпературного газа. Разница полученных разными методами значений температур достигает 35–40 %. Наибольшую тепловую нагрузку конструкция претерпевает вблизи выходного патрубка, где максимальная температура составляет 502 °С, что позволяет сделать вывод о возможности применения в устройстве стали марки 12Х18Н10Т, так как порог ее применяемости по температуре составляет 610 °С.

На рис. 6, *а* показан контур распределения эквивалентных напряжений, полученных в рамках комплексного подхода с использованием единой расчетной модели (1) – (7). Показанные на рис. 6, *б* эквивалентные напряжения рассчитывались с использованием уравнений (4) – (7), с распределением по элементам конструкции тепловых полей, полученных на основании теплотехнических расчетов, проведенных для идентичных условий процесса.

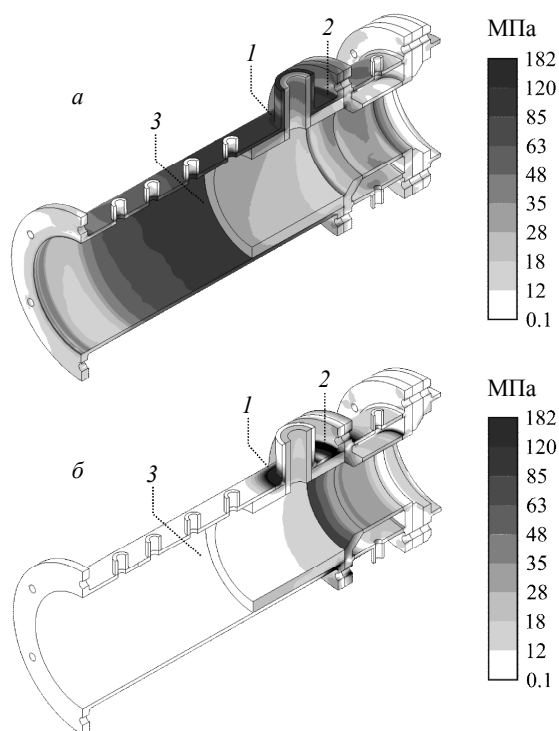


Рис. 6. Контур распределения эквивалентных напряжений по элементам конструкции, полученные: *а* – в рамках комплексного подхода; *б* – на основании теплотехнических расчетов для слоя футеровки толщиной 15 мм (слой показан частично)

При проектировании энергетических установок сжигания топлива для обеспечения условий эксплуатации материала, соответствующих допустимой области

применения, осуществляют футеровку камеры сгорания с целью ее теплоизоляции, а также для защиты несущих металлических стенок реактора от воздействия химически агрессивных сред, часто имеющих в своем составе водород. В процессе эксплуатации под воздействием высоких температур, скоростей потока, химически активных сред, циклической смены температурных режимов и т.д. неизбежно возникает поверхностная эрозия слоя футеровки, приводящая к его утонению. Важно определить значение критической толщины футеровочного слоя, когда температура несущих элементов конструкции может привести к ее разрушению или кораблению. Не менее важной задачей является определение достаточной толщины на этапе проектирования энергетических установок, так как она во многом определяет массогабаритные характеристики устройств и сказывается на стоимости изделия.

На рис. 7, а, 8, а, 9, а показаны зависимости эквивалентных напряжений от толщины футеровочного слоя l в основании отвода (область 1 на рис. 6), опорного фланца (область 2) и в центральном сечении обечайки (область 3). Линия 1 получена при численном решении сопряженной задачи, 2 – на основании теплотехнических расчетов, 3 – при равномерном прогреве конструкции, 4 – уровень допускаемых напряжений в соответствии с ГОСТ Р 52857.1-2007 [5].

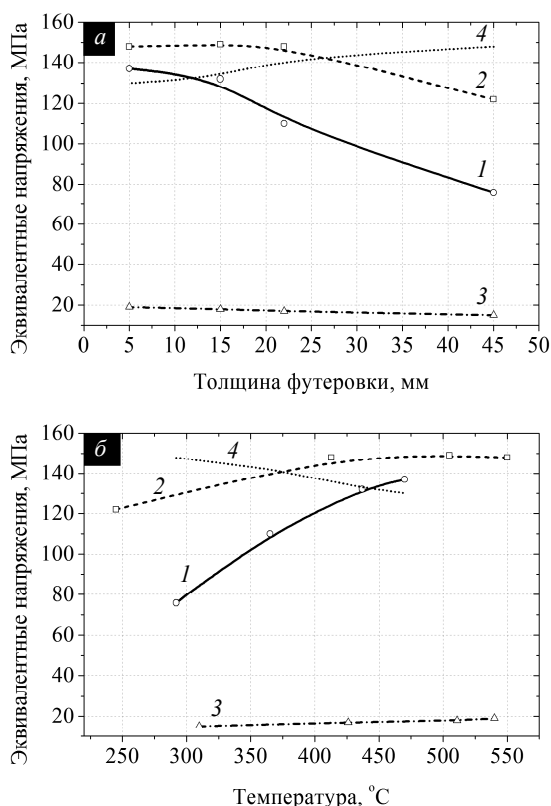


Рис. 7. Зависимость эквивалентных напряжений в основании отвода от толщины футеровочного слоя (а) и от температуры (б)

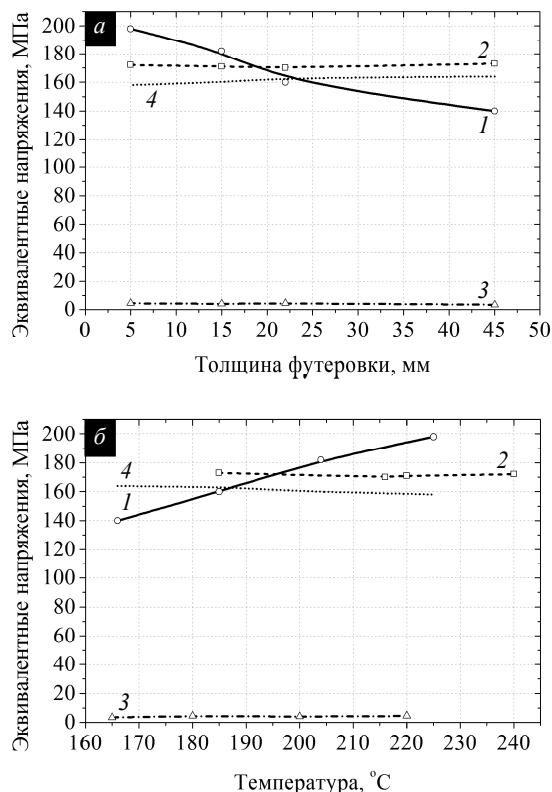


Рис. 8. Зависимость эквивалентных напряжений в основании опорного фланца от толщины футеровочного слоя (а) и от температуры (б)

Наблюдается снижение уровня максимальных эквивалентных напряжений при увеличении толщины футеровки, что может быть связано с повышением термического сопротивления слоя и соответствующим уменьшением уровня термической напряженности конструкции. График функции $\sigma_{\text{eqv}}(l)$, полученный при комплексном подходе (линии 1 на рис. 7, а, 8, а, 9, а), сверху и снизу может быть ограничен некоторыми асимптотами. Наличие нижней асимптоты обуславливается тем, что при увеличении толщины футеровочного слоя тепловое влияние процесса горения снижается и НДС конструкции определяется главным образом влиянием собственной массы установки и давлением среды. Верхняя асимптота при стремлении толщины футеровочного слоя к нулю характеризуется уровнем напряжений, обусловленным температурами, которых способен достичь материал металлического корпуса при заданном уровне конвективных и радиационных потерь в окружающую среду. Разница эквивалентных напряжений, рассчитанных на основании аналитических теплотехнических расчетов и при использовании комплексного подхода, составляет от 7 до 31 %. Уровень прогнозируемых напряжений при допущении идеально равномерного прогрева узлов конструкции минимум в 6.5 раз меньше, чем при использовании двух других рассматриваемых подходов. Для конструкции реактора фильтрационного горения газов, показанной на рис. 1 в качестве рекомендуемого значения минимально допустимой толщины футеровоч-

ного слоя (смесь марки СМКРБТ по ТУ 14-8-567-88), при которой обеспечивается регламентированный коэффициент запаса прочности, может приниматься значение в 23 мм.

На рис. 7, б, 8, б, 9, б показаны расчетные зависимости эквивалентных напряжений от значений температуры. При повышении температуры для всех рассматриваемых областей наблюдается рост эквивалентных напряжений. Это обусловлено деформациями конструкции вследствие теплового расширения стали марки 12Х18Н10Т. В расчетах учитываются зависимости модуля упругости $E = E(T_s)$, и коэффициента Пуассона $\nu = \nu(T_s)$ [5].

Расчетные эквивалентные напряжения в исследуемом интервале температур, полученные в результате численного решения сопряженной термомеханической задачи, показаны линиями 1 на рис. 7, б, 8, б, 9, б. Зависимости эквивалентных напряжений от температуры в рассмотренных случаях являются монотонно возрастающими и могут аппроксимироваться линейными функциями с 5 %-й точностью.

Зависимости эквивалентных напряжений от температуры, полученные при использовании температур, рассчитанных с помощью аналитических методов теплотехники, показаны линиями 2 на рис. 7, б, 8, б, 9, б. Эти зависимости могут быть аппроксимированы функцией вида $\sigma_{eqv} = \text{const}$ в 20 %-м интервале.

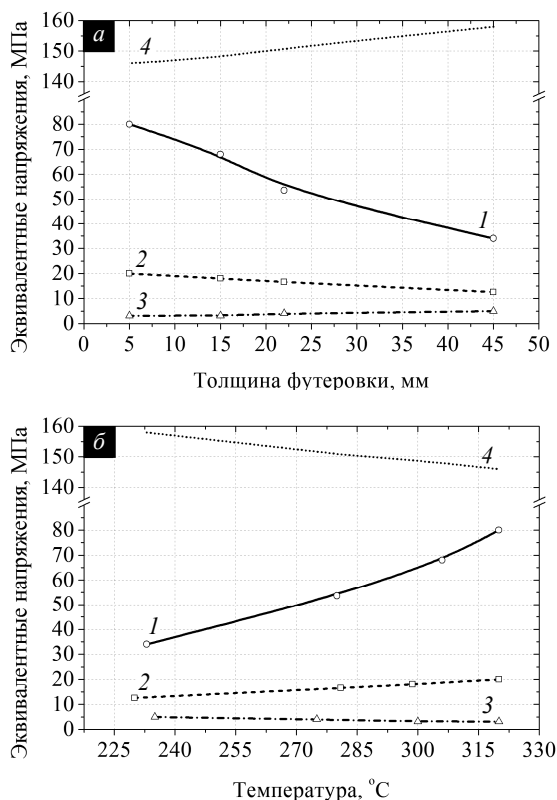


Рис. 9. Зависимость эквивалентных напряжений в центральном сечении обечайки от толщины футеровочного слоя (а) и от температуры (б)

Вблизи фронта трещины расчетная температура не превышает 220°C для всего исследуемого диапазона изменения толщин слоя футеровки. Распределение рассчитанных значений J -интеграла вдоль фронта кольцевой технологической трещины (рис. 2) в полярных координатах показано на рис. 10 для различных толщин футеровочного слоя. Оно получено с использованием комплексного подхода (кривая с индексом 1) и при определении поля температур аналитическими методами теплотехники (кривая 2). Оценка значений вязкости разрушения по упрощенной методике дает распределение параметра J вдоль фронта трещины, укладывающееся в 47 %-й диапазон, а при комплексном подходе прогнозируются большие градиенты величины J и разница достигает 79 % и 910 Дж/м^2 .

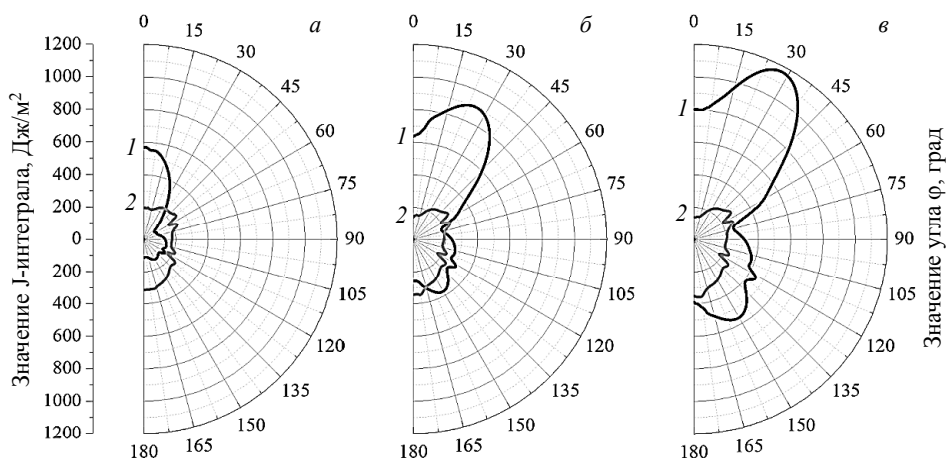


Рис. 10. Распределение значений J -интеграла вдоль фронта трещины при использовании футеровки толщиной 45 мм (а), 15 мм (б), 5 мм (в) в полярных координатах

Различие в величине прогнозируемых значений для используемых подходов лежит в интервале 30–73 % на участке вблизи концентратора напряжений в зависимости от тепловой напряженности конструкции обусловленной толщиной футеровочного слоя или степенью его износа. Максимальное значение J -интеграла при толщине футеровки в 5 мм составляет 1265 Дж/м^2 , что соответствует 17-кратному запасу вязкости разрушения до начала роста трещины [27].

Заключение

В работе рассмотрен подход к решению сопряженных термомеханических задач для оценки НДС, реализующемуся в результате воздействия высокотемпературных процессов на конструкцию энергетических установок и аппаратов переработки нефти и газа.

Сформулирована физико-математическая постановка сопряженной термомеханической задачи, позволяющая получать прогнозы деформаций, прочности и распределения температуры в элементах конструкции реакторов фильтрационного горения с максимальной температурой в рабочей зоне $\sim 1500^\circ\text{C}$.

На основе численного решения сопряженной термомеханической задачи проведено трехмерное моделирование технологического процесса и прочности конструкции реактора фильтрационного горения для конверсии метана.

Получен контур тепловых полей по реакционной области и элементам конструкции реакторного блока с различной толщиной футеровки зоны горения. Показано, что для исследуемых толщин футеровки при нормальном функционировании реактора в элементах конструкции реализуется сложное НДС. Установлены области концентрации напряжений вблизи геометрических неоднородностей (отводы, фланцы, выступы и т.д.) в условиях формирующихся градиентов температур.

Установлена нелинейная зависимость реализующихся максимальных эквивалентных напряжений от толщины футеровочного слоя. При уменьшении толщины футеровки происходит рост максимальных эквивалентных напряжений в элементах конструкции.

Показано, что на основании результатов решения сопряженной термомеханической задачи может быть определено рациональное значение толщины футеровки, при которой обеспечивается нормативный коэффициент запаса прочности.

Проведено сравнение температур и напряжений в элементах конструкций реакторов фильтрационного горения, полученных при использовании численного решения сопряженных задач и с применением результатов аналитических теплотехнических расчетов в соответствии с ГОСТ Р 52857.1–2007 [5] и рекомендациями [25, 26].

Сравнение расчетных НДС, полученных при использовании обсуждаемых методов, показало, что прогнозируемые максимальные эквивалентные напряжения могут различаться до 30 %. На величину напряжений в элементах конструкций влияют локальные изменения коэффициента теплоотдачи, обусловленные эффектами турбулентности и неравномерности поля скорости потока высокотемпературного газа.

В рамках рассмотренного в работе подхода к решению сопряженных задач термомеханики может быть проведена теоретическая оценка энергетических затрат вблизи фронта пространственных трещин сложной формы с помощью вычисления J -интеграла (8) по огибающему замкнутому контуру.

Для аналогичных режимов работы реактора проводилась оценка вязкости разрушения корпуса реактора при наличии кольцевой технологической трещины. Распределение значений J -интеграла вдоль фронта трещины неравномерно вследствие неравномерности локального поля напряжений вблизи дефекта, обусловленной наличием конструктивных и температурных неоднородностей.

Показана возможность теоретического прогнозирования трещиностойкости элементов конструкций с трещинами и определения критических условий эксплуатации энергетических установок, при которых наступает хрупкое разрушение, путем сравнения расчетных значений J с критическими значениями J_c , определяемыми экспериментально для широкого круга конструкционных сталей (метод Бигли – Ландеса) [27, 28].

Сравнение расчетных значений вязкости разрушения, полученных в рамках решения сопряженной термомеханической задачи и при использовании аналитических методов теплотехники, показало, что различие значений J -интеграла для идентичных условий нагружения достигает 73 %.

Предложенный в работе подход к решению сопряженных термомеханических задач может использоваться для получения данных о реализующемся НДС и вязкости разрушения элементов конструкций энергетических установок с учетом влияния на уровень достигаемых напряжений параметров течения высокотемпературных сред и режимов функционирования устройства. При использовании предложенной комплексной методики расчета на 25–30 % может быть снижен от-

раслевой коэффициент запаса прочности, что с учетом использования в аппаратах подобного класса дорогостоящих хромоникелетитановых сталей аустенитного класса позволит снизить материальные затраты на производство на 5–10 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковеня В.М. Некоторые тенденции развития математического моделирования // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 2. С. 59–73.
2. Слесаренко А.П., Кобринович Ю.О., Марченко А.А. Математическое моделирование тепловых процессов в пространственных конструкциях энергетических устройств // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2012. Т. 5. № 4. С. 4–9.
3. Кузнецов Г.В., Санду С.Ф. Математическое моделирование работы высокотемпературных тепловых труб в теплопередающих устройствах современных энергетических установок // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2004. № 2. С. 102–109.
4. А. да Роза. Возобновляемые источники энергии: физико-технические основы: Учебное пособие: пер. с англ. Долгопрудный; Москва: МЭИ/Интеллект, 2010. 704 с.
5. ГОСТ Р 52857.1-2007 «Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования» М.: Стандартиформ, 2008. 24 с.
6. ГОСТ Р 52630-2012. Сосуды и аппараты стальные сварные. Общие технические условия. М.: Стандартиформ, 2013. 83 с.
7. Данилов А.М., Гарькина И.А. Математическое моделирование сложных систем: состояние, перспективы, пример реализации // Вестник гражданских инженеров. 2012. № 2. С. 333–337.
8. Кузнецов Г.В., Крайнов А.Ю., Коришунов А.В. Сопряженный теплоперенос и гидродинамика при движении вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в открытой полости с учётом охлаждения внешнего контура // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4(12). С. 102–108.
9. Hokuu Moona, Kyung Min Kimb, Yun Heung Jeonc, Sangwoo Shina, Jun Su Parka, Hyung Hee Cho. Effect of thermal stress on creep lifetime for a gas turbine combustion liner // Engineering Failure Analysis. 2015. V. 47A. P. 34–40.
10. Кректулева Р.А., Черепанов О.И., Черепанов Р.О. Численное решение квазистатической задачи расчета остаточных напряжений в сварных швах с учетом фазовых превращений // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 6. С. 51–57.
11. Леонов В.П., Мизецкий А.В. Влияние локальных остаточных сварочных напряжений на начальную стадию развития трещин в сварных соединениях // Вопросы материаловедения. 2008. № 4. С. 54–65.
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
13. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы: курс лекций. Часть I. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1998. 108 с.
14. Dobrego K.V., Gnezdilov N.N., Lee S.H., Choi H.K. Partial oxidation of methane in a reverse flow porous media reactor // Int. J. Hydrogen Energy. 2008. V. 33. P. 5535–5544.
15. Яковлев И.А., Замбалов С.Д., Скрипняк В.А. Математическое моделирование процесса получения синтез-газа в реакторе фильтрационного горения при повышенных давлениях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 6(32). С. 103–120.
16. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 310 с.
17. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Учебное пособие. Самара: Самарский университет, 2001. 562 с.
18. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.
19. Hongjun Yu, Linzhi Wu, Licheng Guo, Huaping Wu, Shanyi Du. An interaction integral method for 3D curved cracks in nonhomogeneous materials with complex interfaces // International Journal of Solids and Structures. 2010. V. 47. P. 2178–2189.

20. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Запорожье: ООО «ИПО Запорожье», 2009. 400 с.
21. Рояк М.Э. и др. Сеточные методы решения краевых задач математической физики. Новосибирск: НГТУ, 1998. 120 с.
22. Vogel J.C., Eaton J.K. Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward-Facing Step // Journal of Heat Transfer. 1985. V. 107. P. 922–929.
23. Timoshenko S. Strength of Materials, Part I, Elementary Theory and Problems. N.Y.: D. Van Nostrand Company, 1955. 234 p.
24. Мураками Ю. (ред.) Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1990. 448 с.
25. Тымчак В.М., Гусовский В.Л. Расчёт нагревательных и термических печей. Справ. изд. М.: Металлургия, 1983. 480 с.
26. Нащокин В.В. Техническая термодинамика и теплопередача: учебник. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1975. 497 с.
27. Москвичев В.В., Махутов Н.А., Черняев А.П. и др. Трещиностойкость и механические свойства конструкционных материалов. Новосибирск: Наука, 2002. 334 с.
28. Begley J.R., Landes J.D. The J-integral as a fracture criterion // Fracture analysis. ASTM STP. 1972. No. 514. P. 1–20.

Статья поступила 03.04.2015 г.

Yakovlev I. A., Skripnyak V.A. MATHEMATICAL MODELING OF COMPLEX TECHNICAL OBJECTS WITH NONLINEAR PROPERTIES ILLUSTRATED BY THE INVESTIGATION OF POROUS MEDIA REACTOR RELIABILITY

DOI 10.17223/19988621/35/11

The paper considers the approach to solving coupled thermomechanical problems for investigation of stresses, strains and crack resistance of high-temperature porous media combustion reactors and others energy setups. A coupled physical-mathematical model for definition of strains, stresses and temperatures in porous media reactors is formulated. In this paper, the three-dimensional simulation of technological process and reliability of a methane conversion reactor in filtrating mode is carried out. Thermal contours of the reaction region and structural elements of the reactor unit are obtained for different thicknesses of combustion zone lining. Structural elements of the reactor have a complex strain-stress state under normal operation conditions. Stress concentrators are detected near geometrical and thermal gradients. Results of numerical solution of coupled thermomechanical problems and calculation of structural elements strength where thermal contours were determined on the basis of analytical thermal calculations were analyzed. The comparison of the calculated strain-stress states shows that the maximum equivalent stress may differ to 30 % for considered methods. In the numerical solution of coupled problems, predicted stresses are distributed according to local changes of the heat transfer coefficient due to the effects of turbulence and non-uniformity of the hot gas velocity field.

The considered approach to solving coupled thermomechanical problems can be used for analyzing strain-stress states and crack resistance of energy setups. The influence of the parameters of high-temperature gas flow and modes of device operation on the stress level can be taken into account.

Keywords: energy and oil-gas setups, porous media combustion reactors, computer-aided engineering, simulation of setups operation, strength analysis, coupled problems

YAKOVLEV Igor Aleksandarovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: yakovlev-i-a@yandex.ru

SKRIPNYAK Vladimir Albertovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: skrp@ftf.tsu.ru

REFERENCES

- Ковеня В.М. Некоторые тенденции развития математического моделирования // Вычислительные технологии. 2002. Т.7. №2. С. 59-73.
- Слесаренко А.П., Кобринович Ю.О., Марченко А.А. Математическое моделирование тепловых процессов в пространственных конструкциях энергетических устройств // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2012. Т.5. №4. С. 4-9.
- Кузнецов Г.В., Санду С.Ф. Математическое моделирование работы высокотемпературных тепловых труб в теплопередающих устройствах современных энергетических установок // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. 2004. №2. С. 102-109.
- А. да Роза. Возобновляемые источники энергии: физико-технические основы Учебное пособие. /Пер. с англ. – Долгопрудный-Москва: МЭИ/Интеллект, 2010. – 704 с.
- ГОСТ Р 52857.1-2007 «Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования» М.: Стандартинформ, 2008. – 24 с.
- ГОСТ Р 52630-2012. Сосуды и аппараты стальные сварные. Общие технические условия. - М.: Стандартинформ, 2013. – 83 с.
- Данилов А. М., Гарькина И. А. Математическое моделирование сложных систем: состояние, перспективы, пример реализации // Вестник гражданских инженеров. 2012. №2. С. 333-337.
- Кузнецов Г.В., Крайнов А.Ю., Корицунов А.В. Сопряжённый теплоперенос и гидродинамика при движении вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в открытой полости с учётом охлаждения внешнего контура // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. №4. С. 102-108.
- Hokyu Moona, Kyung Min Kimb, Yun Heung Jeonc, Sangwoo Shina, Jun Su Parka, Hyung Hee Cho. Effect of thermal stress on creep lifetime for a gas turbine combustion liner // Engineering Failure Analysis. 2015. V.47A. P. 34-40.
- Крекутлева Р.А., Черепанов О.И., Черепанов Р.О. Численное решение квазистатической задачи расчета остаточных напряжений в сварных швах с учетом фазовых превращений // Физическая мезомеханика. 2013. Т.16. №6. С. 51-57.
- Леонов В.П., Мизецкий А.В. Влияние локальных остаточных сварочных напряжений на начальную стадию развития трещин в сварных соединениях // Вопросы материаловедения. 2008. №4. С. 54-65.
- Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
- Фрик. П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть I. – Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1998. – 108 с.
- Dobrego K.V., Gnezdilov N.N., Lee S.H., Choi H.K. Partial oxidation of methane in a reverse flow porous media reactor//Int. J. Hydrogen Energy. 2008. Vol. 33. P. 5535-5544.
- Яковлев И.А., Замбалов С.Д., Скрипник В.А. Математическое моделирование процесса получения синтез-газа в реакторе фильтрационного горения при повышенных давлениях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. №6. С. 103-120.
- Дж. Мейз. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 310 с.
- Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Учебное пособие. – Самара: Самарский университет, 2001. – 562 с.
- Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
- Hongjun Yu, Linzhi Wu, Licheng Guo, Huaping Wu, Shanyi Du. An interaction integral method for 3D curved cracks in nonhomogeneous materials with complex interfaces // International Journal of Solids and Structures. 2010. V.47. P. 2178-2189.
- Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. – Запорожье: ООО "ИПО Запорожье", 2009. – 400 с.
- Рояк М.Э. и др. Сеточные методы решения краевых задач математической физики. – Новосибирск: НГТУ, 1998 г. –120 с.
- Vogel J.C., Eaton J.K. Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward-Facing Step // Journal of Heat Transfer. 1985. V.107. P. 922-929.

Timoshenko S. Strength of Materials, Part I, Elementary Theory and Problems. – NY: D. Van Nostrand Company, 1955. – 234 p.

Мураками Ю. (ред.) Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений (в 2-х томах). Т1. – М.: Мир, 1990. – 448 с.

Тымчак В.М., Гусовский В.Л. Расчёт нагревательных и термических печей. Справ. изд. – М.: Металлургия, 1983. – 480с.

Нащокин В.В. Техническая термодинамика и теплопередача Учебник. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высшая Школа, 1975. – 497 с.

Москвичев В.В., Махутов Н.А. и др. Трещиностойкость и механические свойства конструкционных материалов Москвичев В.В., Махутов Н.А., Черняев А.П. и др. Монография. – Новосибирск: Наука, 2002. – 334 с.

Begley J.R., Landes J.D. The J-integral as a fracture criterion // Fracture analysis. ASTM STP. 1972. №514. P. 1-20.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЗАРОВ Дмитрий Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Ивановского государственного университета. E-mail: azarovdn@mail.ru

БАБУШКИН Никита Александрович – аспирант кафедры теоретической и промышленной теплотехники Энергетического института Томского политехнического университета. E-mail: atikin89@tpu.ru

БАРСУКОВ Виталий Дементьевич – доктор технических наук, заведующий лабораторией НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: barsukov@niipmm.tsu.ru

БУРКИН Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 70 Научно-исследовательского института математики и механики Томского государственного университета. E-mail: rozaburkina@yandex.ru

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглы – доктор технических наук, доцент кафедры прикладной математики Азербайджанской государственной нефтяной академии. E-mail: xan.h@rambler.ru

ГОЛДАЕВ Сергей Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и промышленной теплотехники Томского политехнического университета. E-mail: svgoldaev@rambler.ru

ДАРИЯ ЗАДЕ Санд – аспирант кафедры динамики и прочности машин Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». E-mail: s_daryazadeh@yahoo.com

ДЬЯЧКОВСКИЙ Алексей Сергеевич – инженер-исследователь Научно-исследовательского института математики и механики Томского государственного университета (Томск). E-mail: Lex_okha@mail.ru

ЗЮЗЬКОВ Валентин Михайлович, старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: vmz@math.tsu.ru

ИЩЕНКО Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, заместитель директора по научно-исследовательской работе Научно-исследовательского института математики и механики Томского государственного университета (Томск). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

КАСИМОВ Владимир Зинатович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией 72 Научно-исследовательского института математики и механики Томского государственного университета. E-mail: ksm@niipmm.tsu.ru

ЛЬВОВ Геннадий Иванович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой динамики и прочности машин Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». E-mail: lvovgi@list.ru

МИНЬКОВА Наталия Петровна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: n.p.minkova@mail.ru

ПОПОВ Игорь Павлович – ведущий специалист отдела инновационного развития Департамента экономического развития, торговли и труда правительства Курганской области. E-mail: ip.porow@yandex.ru

РАХМЕЛЕВИЧ Игорь Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Института экономики и предприниматель-

ства Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского. E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

РОГАЕВ Константин Сергеевич – аспирант, инженер-исследователь Научно-исследовательского института математики и механики Томского государственного университета. E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

РУСИНОВ Алексей Александрович – ассистент кафедры высшей и прикладной математики Бирского филиала ФГБОУ «Башкирский государственный университет». E-mail: irtysh2009@mail.ru

СКРИПНЯК Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета. E-mail: skrp@ftf.tsu.ru

ТУРСУНОВ Дилмурат Абдиллажанович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Уральского государственного педагогического университета. E-mail: d_osh@rambler.ru

ЧИГЛИНЦЕВА Ангелина Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Бирского филиала ФГБОУ «Башкирский государственный университет». E-mail: changelina@rambler.ru

ШАГАПОВ Владислав Шайхулаззамович – академик Академии наук РБ, профессор, доктор физико-математических наук, зав. каф. высшей и прикладной математики Бирского филиала ФГБОУ «Башкирский государственный университет». E-mail: Shagapov@rambler.ru

ЭРКЕБАЕВ Улукбек Заирбекович – аспирант Ошского государственного университета, Кыргызстан. E-mail: uluk3188@mail.ru

ЯКОВЛЕВ Игорь Александрович – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета. E-mail: yakovlev-i-a@yandex.ru