

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2020

№ 65

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Абдуллаев А.А., Эргашев Т.Г. Задача Пуанкаре – Трикоми для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа второго рода	5
Баянова Н.В., Зенков А.В., Прусакова Г.В. К теории многообразий o -аппроксимруемых решеточно упорядоченных групп	22
Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя	30
Цыденов Б.О. Математическая модель для воспроизведения биогеохимических процессов в пресноводном озере	53

МЕХАНИКА

Валиев А.А., Ахметов А.Т., Рахимов А.А. Неустойчивое вытеснение в плоскопараллельном микроканале	68
Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой	83
Кальмова М.А., Ратманова О.В. Анализ взаимодействия тел вращения с балкой, соответствующей модели Кельвина	92
Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Ограничения на компоненты напряжений и нагрузки в вершине четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием	98
Потеряева В.А. Математическая модель селективной нанопоры	114
Скрипняк Н.В., Иохим К.В. Влияние распределения зерен по размерам на прочностные и деформационные свойства сплавов Zr–Nb при высокоскоростном растяжении	124
Тулубаев Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного турбулентного течения и процесса классификации частиц в вихревой камере центробежного аппарата	137

МЕМОАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Малютина А.Н., Михайлов М.Д. Рыцарь науки Виктор Андреевич Топоногов	148
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	157

CONTENTS

MATHEMATICS

Abdullayev A.A., Ergashev T.G. Poincare–Tricomi problem for the equation of a mixed elliptico-hyperbolic type of second kind	5
Bayanova N.V., Zenkov A.V., Prusakova G.V. On the theory of representable varieties of lattice-ordered groups.....	22
Ivanov D.Y. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential.....	30
Tsydenov B.O. A mathematical model for simulating the biogeochemical processes in a freshwater lake.....	53

MECHANICS

Valiev A.A., Akhmetov A.T., Rakhimov A.A. Unstable displacement in a plane-parallel microchannel	68
Gladkov S.O., Bogdanova S.B. To the theory of motion of bodies with variable mass	83
Kalmova M.A., Ratmanova O.V. Analysis of interaction between solids of revolution and a beam corresponding to the Kelvin model	92
Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Restrictions on stress components and loads at the top of a four-corner pyramid with a rhombic base.....	98
Poteryaeva V.A. A mathematical model of a selective nanopore	114
Skripnyak N.V., Iokhim K.V. Effect of grain size distribution on the strength and strain properties of Zr–Nb alloys under tension at high strain rates.....	124
Turubaev R.R., Shvab A.V. Numerical study of swirling turbulent flow aerodynamics and classification of particles in a vortex chamber of a centrifugal machine.....	137

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

Malyutina A.N., Mikhaylov M.D. The knight of science Viktor Andreevich Toponogov.....	148
--	-----

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	157
--	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.6

DOI 10.17223/19988621/65/1

MSC 35M10, 35M12

А.А. Абдуллаев, Т.Г. Эргашев

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ – ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Изучается задача Пуанкаре – Трикоми для вырождающегося эллиптико-гиперболического уравнения второго рода. Единственность решения поставленной задачи установлена с помощью метода интегралов энергии. В гиперболической и эллиптической частях смешанной области ищутся обобщенное и классическое решения соответствующих вспомогательных задач и выводятся функциональные соотношения между следами искомой функции и ее производной на линии вырождения. Исключив из этих двух функциональных соотношений одну из двух неизвестных функций, процесс решения поставленной задачи эквивалентным образом сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно предельного значения искомой функции на линии изменения типа уравнения. При определенных ограничениях на заданные функции и параметры задачи Пуанкаре – Трикоми это сингулярное интегральное уравнение методом Карлемана удаётся привести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из альтернативы Фредгольма и теоремы единственности поставленной задачи.

Ключевые слова: обобщенное решение, задача Пуанкаре – Трикоми, уравнение второго рода, интегральное уравнение, метод интегралов энергии, функция Грина.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} + \mu |y|^m u = 0 \quad (-1 < m < 0, \quad -\infty < \mu < +\infty) \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где D^+ – область, ограниченная кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком $AB(y=0)$, а D^- – область, ограниченная отрезком AB и характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1).

Известно, что при исследовании краевых задач для уравнения (1) важную роль играют фундаментальные решения (в эллиптической части) и функция Римана (в гиперболической части) этого же уравнения.

При $y > 0$, т.е. в эллиптической части смешанной области с помощью известной замены переменных $x = x$, $y = \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2}$ уравнение (1) переходит в урав-

нение Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом вида

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y}u_y + \lambda u = 0, \quad (2)$$

где β и λ – параметры, выражаемые через m и μ соответственно.

Фундаментальные решения уравнения (2) выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию Горна H_3 (см., например, [1]). В недавней работе [2] найдены фундаментальные решения для более общего (многомерного) уравнения Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^n \left(u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha_i}{x_i} u_{x_i} \right) + \lambda u = 0, \quad (3)$$

где α_i и λ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Отметим, что для уравнения (3) в двумерном случае ($n = 2$) и при отсутствии спектрального параметра ($\lambda = 0$) авторами [3–6] построена теория потенциала двойного слоя.

При $y < 0$, т.е. в гиперболической части смешанной области для уравнения (1) прямая параболического вырождения является особой характеристикой – огибающей обоих семейств характеристик. В зависимости от степени вырождения m предельные значения $\tau(x) \equiv u(x, -0)$, $v(x) \equiv u_y(x, -0)$ могут иметь особенности. Чтобы обеспечить необходимую гладкость решения $u(x, y)$ вне линии характеристического вырождения, необходимо требовать повышенную гладкость функций $\tau(x)$ и $v(x)$. С целью ослабить это требование в [7] дано определение и изучены свойства так называемого класса R_2^λ обобщенных решений уравнения (1) в области D_2 , который при $\lambda = 0$ совпадает с классом R_2 , введенным и изученным И.Л.Каролем [8]. Кроме того, на основе известной формулы классического решения задачи Коши для уравнения (1) в [7] получен явный и удобный для дальнейших исследований вид обобщенного решения этой же задачи в классе R_2^λ и исследованы обобщенные решения, для которых $\tau'(x)$, $v(x) \in C(a, b)$ вместо требуемого $C^2[a, b]$.

В работе [9] представлены исследования задачи Коши – Гурса и Гурса для уравнения (1) в классе обобщенных решений R_2^λ и приведен пример, показывающий важность введения понятия такого класса.

Известно, что с помощью замены переменных $x = x$, $y = \frac{1}{(m+2)^2} \operatorname{sgn} y \cdot |y|^{m+2}$

уравнение (1) можно представить в виде

$$u_{xx} + y u_{yy} + \left(\beta + \frac{1}{2} \right) u_y + \lambda u = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad \lambda - \text{комплексное число} \right). \quad (4)$$

В работе [10] в специальной области методом разделения переменных найдены собственные значения и построена система соответствующих собственных

функций спектральной задачи Трикоми – Неймана для уравнения (4). К такому направлению исследований примыкает работа [11], в которой сформулированы краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в области, состоящей из двух секторов круга и двух характеристических треугольников, доказана однозначная разрешимость поставленных задач.

При отсутствии спектрального параметра для уравнения (4) в [12] получены классические решения задачи Трикоми в ограниченной и неограниченной областях, а в [13] исследован класс R_2 обобщенных решений в конечной области гиперболичности при $2\beta < -1$ и $2\beta \neq -3, -5, \dots$. В работах [7, 14] авторам удалось построить специальные классы решений для уравнения (4) со спектральным параметром при $y < 0$ и $\beta \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$.

В настоящей работе для уравнения смешанного типа второго рода

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (-1 < m < 0) \quad (5)$$

в области D исследуется краевая задача Пуанкаре – Трикоми.

При решении поставленной задачи в конечной области эллиптичности уравнения (5) важную роль играет одна вспомогательная задача, являющаяся естественным обобщением известных задач (задачи Дирихле [15] и смешанной задачи [16]), исследованных авторами лишь при положительных значениях m , т.е. для вырождающегося эллиптического уравнения первого рода. В работе [17] решение задачи Дирихле для многомерного сингулярного уравнения Гельмгольца в полусферической области найдено в явном виде.

Проведенный анализ состояния дел в этом направлении показывает, что несмотря на то, что в настоящее время известны фундаментальные решения для более общих сингулярных уравнений, краевые задачи с условием Пуанкаре – Трикоми для вырождающихся уравнений эллиптического и эллиптико-гиперболического типов второго рода изучены сравнительно мало. Отметим лишь работы [18, 19]. Монография [20] посвящена постановке и исследованию локальных и нелокальных краевых задач, в том числе, задаче Пуанкаре – Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.

Прежде чем перейти к изложению основных результатов приведем некоторые известные факты из теории интегродифференциальных операторов дробного порядка и теории гипергеометрической функции Гаусса.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b) . Интегралом дробного порядка $(-\alpha)$ ($\alpha < 0$) от функции $f(x)$ называется выражение вида

$$D_{ax}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-(\alpha+1)} f(t) dt \quad (a \leq x \leq b). \quad (6)$$

Функция $D_{ax}^\alpha f(x)$ существует для почти всех x и интегрируема; для $\alpha \leq -1$ она непрерывна.

Если $\alpha > 0$, $n < \alpha < n+1$ (n – целое число), и существует $f^{(n+1)}(t)$, интегрируемая в (a, b) , то производной порядка α от $f(x)$ называется выражение

$$D_{ax}^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + D_{ax}^{\alpha-(n+1)} f^{(n+1)}(x); \quad (7)$$

так как $\alpha - (n+1) < 0$, то последнее слагаемое в (7) определяется из (6). Производная порядка α от $f(x)$ может быть записана еще в следующем виде:

$$D_{ax}^{\alpha} f(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{ax}^{\alpha-(n+1)} f(x) \quad (n < \alpha < n+1).$$

Это определение имеет смысл и для целых значений $\alpha = n$:

$$D_{ax}^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x).$$

Нетрудно видеть, что если $\alpha < 0$ и $\beta < 0$, то

$$D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{\beta} f(x) = D_{ax}^{\alpha+\beta} f(x).$$

Если

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad (8)$$

то, применяя оператор $D_{ax}^{-\alpha}$ при $n < \alpha < n+1$ к функции $D_{ax}^{\alpha} f(x)$, определенной формулой (7), мы получим

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} f(x) = f(x).$$

Пусть $f(x) = D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x)$ при $n < \alpha < n+1$, тогда справедливо (8) и имеет место

$$D_{ax}^{\alpha} f(x) = D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) = \varphi(x). \quad (9)$$

Гипергеометрическая функция Гаусса $F(a, b; c; z)$ определяется внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда [15]

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k, \quad (10)$$

а при $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В формуле (10) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c \neq 0, -1, \dots$. Здесь $(\kappa)_n$ обозначает символ Похгаммера:

$$(\kappa)_0 = 1, (\kappa)_n = \kappa(\kappa+1) \cdot \dots \cdot (\kappa+n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Если $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, то имеет место формула Эйлера [16]

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad |\arg(1-z)| < \pi. \quad (11)$$

Если $a, b, c-a$ или $c-b$ не являются неположительными целыми числами, то при $|z| < 1$ справедлива формула автотрансформации [15]

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z). \quad (12)$$

Для гипергеометрической функции Гаусса справедливы следующие оценки [15]:

$$F(a, b, c, z) \leq \begin{cases} C & \text{при } \operatorname{Re}(c-a-b) > 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \\ C(1-z)^{c-a-b} & \text{при } \operatorname{Re}(c-a-b) < 0, \quad 0 < z < 1, \\ C[1 + \ln(1-z)] & \text{при } \operatorname{Re}(c-a-b) = 0, \quad 0 < z < 1, \end{cases} \quad (13)$$

где $C = \text{const} > 0$.

Постановка задачи Пуанкаре – Трикоми и единственность решения задачи

Введем обозначения:

$$J = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}; \quad \partial D = \bar{\sigma} \cup \overline{AB}; \quad 2\beta = \frac{m}{m+2}.$$

Легко видеть, что $-1 < 2\beta < 0$.

Задача Пуанкаре – Трикоми. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cup C^1(D \cup \sigma \cup J)$, причем производные u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы и -2β в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ соответственно;

2) функция $u(x, y) \in C^2(\bar{D}^+)$ является регулярным решением уравнения (5) в области D^+ , а в области D^- – обобщенным решением из класса R_2 ;

3) выполняется условие склеивания в виде

$$u_y(x, -0) = -u_y(x, +0); \quad (14)$$

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\{\delta(s)A_s[u] + \rho(s)u\}|_{\sigma} = \varphi(s), \quad 0 < s < l; \quad (15)$$

$$u(x, y)|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (16)$$

где $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(x) \in C^1[0, 1/2] \cap C^2(0; 1/2)$, а также выполняется условие согласования в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$: $\varphi(l) = \psi(0) = 0$. Здесь и далее

$$A_s[u] = y^m \frac{dy}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{dx}{ds} = -\cos(n, y), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(n, x),$$

n – внешняя нормаль к кривой σ ; l – длина всей кривой σ ; s – длина дуги кривой σ , отсчитываемая от точки $B(1, 0)$.

Заметим, что в книге [21] подробно обсуждаются вопросы однозначной разрешимости некоторых частных случаев задачи Пуанкаре – Трикоми, т.е. задач Трикоми ($\delta(s) = 0$, $\rho(s) \neq 0$) и Неймана – Трикоми ($\delta(s) \neq 0$, $\rho(s) = 0$).

Будем предполагать, что кривая σ удовлетворяет следующим условиям:

1) функции $x(s)$ и $y(s)$, дающие параметрическое уравнение кривой σ , имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль, и имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гельдера порядка κ ($0 < \kappa < 1$) в промежутке $0 \leq s \leq l$;

2) в окрестностях конечных точек кривой σ выполняется неравенство

$$\left| \frac{dx}{ds} \right| \leq C y^{m+1}(s), \quad (17)$$

причем $x(l) = y(0) = 0$, $x(0) = 1$, $y(l) = 0$, где C – постоянная.

Имеет место

Теорема 1. Если выполняются условия

$$\delta(s)\rho(s) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l; \quad \lim_{y \rightarrow 0} (-y)^{\frac{m}{2}} u^2(1, y) = 0, \quad -1 < m < 0,$$

то решение задачи Пуанкаре – Трикоми в области D единственно.

Доказательство теоремы 1. Из формулы [18, 19]

$$\iint_{D_1} (y^m u_x^2 + u_y^2) dx dy + \int_0^1 u(x, +0) u_y(x, +0) dx + \int_{\sigma} \frac{\rho(s)}{\delta(s)} u^2 ds = 0,$$

где u – решение уравнения (5), легко следует единственность решения задачи Пуанкаре – Трикоми.

Существование решения задачи Пуанкаре – Трикоми при $\delta(s) \neq 0$

Функциональные соотношения, связанные с функциями $\tau(x)$, $v^-(x)$ и $T(x)$.

В полуплоскости $y < 0$ уравнение (5) принимает вид

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (18)$$

В характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}$$

уравнение (18) переходит в уравнение Эйлера – Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (19)$$

область D^- преобразуется в треугольник Δ , ограниченный прямыми $\xi = 0$, $\eta = 1$ и $\eta = \xi$, а условие (16) принимает вид

$$u|_{\xi=0} = \psi(\eta/2), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (20)$$

где $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$ и $-\frac{1}{2} < \beta < 0$ при $-1 < m < 0$.

Решение задачи Коши для уравнения (19), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad (21)$$

$$[2(1-2\beta)]^{-2\beta} \lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = v^-(\xi), \quad 0 < \xi < 1 \quad (22)$$

известно [21]:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = & \gamma_1 (\eta - \xi)^{-1-2\beta} \int_{\xi}^{\eta} \tau(t) (\eta - t)^{\beta} (t - \xi)^{\beta} dt + \\ & + \frac{\gamma_1}{2(1+2\beta)} (\eta - \xi)^{-1-2\beta} \int_{\xi}^{\eta} \tau'(t) [(\eta - t)^{1+\beta} (t - \xi)^{\beta} - (\eta - t)^{\beta} (t - \xi)^{1+\beta}] dt - \end{aligned}$$

$$-\gamma_2 \int_{\xi}^{\eta} v^{-}(t)(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta} dt, \quad (23)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}, \quad \gamma_2 = [2(1-2\beta)]^{-2\beta-1} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Если $\tau(x) \in C^3[0,1]$ и $v^{-}(x) \in C^2[0,1]$, то функция $u(\xi, \eta)$, определенная формулой (23), является классическим, дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (19) с начальными данными (21), (22) в области Δ .

Определение 1. Если функции $\tau'(x)$ и $v^{-}(x)$ непрерывны при $0 < x < 1$, то выражение вида (23) будем называть обобщенным решением уравнения (19) в области Δ .

Для того чтобы обобщенное решение обладало той или иной гладкостью, необходимо, чтобы функции $\tau(x)$ и $v^{-}(x)$ имели определенную гладкость.

Рассмотрим класс R_2 обобщенных решений уравнения (19).

Определение 2. Обобщенным решением класса R_2 уравнения (19) будем называть функцию $u(\xi, \eta)$ вида (23), где $\tau(x)$ представимо в виде

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)^{-2\beta} T(t) dt, \quad (24)$$

а $v^{-}(x)$ и $T(x)$ – непрерывные и интегрируемые в $(0,1)$ функции.

Из (24) нетрудно заключить, что $\tau(x) \in C[0,1]$ и существует $\tau'(x) \in C(0,1)$. Следовательно, обобщенное решение класса R_2 является обобщенным решением в смысле определения 1.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача Коши – Гурса. Найти обобщенное решение $u(\xi, \eta) \in R_2$ уравнения (19) в области Δ , удовлетворяющее условиям (20) и (22).

Подставив (24) в (23), после выполнения необходимых преобразований [21], получим

$$u(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} (\eta-\zeta)^{-\beta} (\xi-\zeta)^{-\beta} T(\zeta) d\zeta + \int_{\xi}^{\eta} (\eta-\zeta)^{-\beta} (\zeta-\xi)^{-\beta} N(\zeta) d\zeta, \quad (25)$$

где
$$N(\zeta) = \frac{1}{2 \cos \pi \beta} T(\zeta) - \gamma_2 v^{-}(\zeta). \quad (26)$$

Используя явное интегральное представление (25), найдем функциональное соотношение между $\tau(x)$, $v^{-}(x)$ и заданным значением $\psi(\eta)$ решения $u(\xi, \eta)$ на характеристике AC ($\xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1$). Пусть $u \in R_2$. При этом в силу его непрерывности в D^{-} должно быть $\psi(0) = 0$.

Положив $\xi = 0$ в выражении (25), получим

$$\psi(\eta) = \int_0^{\eta} N(\zeta) \xi^{-\beta} (\eta - \zeta)^{-\beta} d\zeta.$$

Разрешим его относительно $N(\zeta)$. Положим

$$\Phi(\zeta) = N(\zeta) \zeta^{-\beta}. \quad (27)$$

Тогда имеем

$$\int_0^{\eta} (\eta - \zeta)^{-\beta} \Phi(\zeta) d\zeta = \psi(\eta). \quad (28)$$

Воспользовавшись определением (6) оператора дробного порядка $D_{0x}^{\alpha} f(x)$, запишем уравнение (28) в виде

$$D_{0\eta}^{\beta-1} \Phi(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \psi(\eta). \quad (29)$$

Применим к обеим частям уравнения (29) оператор $D_{0\eta}^{1-\beta}$. Тогда в силу равенства (9) получим

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} D_{0\eta}^{1-\beta} \psi(\eta). \quad (30)$$

Таким образом, решение уравнения (28), если оно существует, выражается формулой (30). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция (30) на самом деле является решением уравнения (28).

Сопоставляя теперь (26), (27) и (30), получим функциональное соотношение между $T(x)$ и $v^-(x)$, принесенное из области D^- на J :

$$T(\zeta) = \gamma_3 v^-(\zeta) + \frac{2 \cos \pi \beta}{\Gamma(1-\beta)} \zeta^{\beta} D_{0\zeta}^{1-\beta} \psi(\zeta), \quad (31)$$

где

$$\gamma_3 = 2\gamma_2 \cos \pi \beta.$$

Подставляя (31) в (25), с учетом (26), получим обобщенное решение из класса $u \in R_2$ задачи Коши – Гурса для уравнения (19) с условиями (20) и (22) в явном виде

$$u(\xi, \eta) = \gamma_3 \int_0^{\xi} (\eta - \zeta)^{-\beta} (\xi - \zeta)^{-\beta} v^-(\zeta) d\zeta + \frac{2 \cos \pi \beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{\eta} (\eta - \zeta)^{-\beta} |\zeta - \xi|^{-\beta} \zeta^{\beta} D_{0\zeta}^{1-\beta} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда непосредственно следует функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v^-(x)$, принесенное из области D^- на J :

$$\tau(x) = \gamma_3 \int_0^x (x-t)^{-2\beta} v^-(t) dt + \Phi_1(x),$$

где

$$\Phi_1(x) = \frac{2\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)} D_{0x}^{2\beta-1} [x^{\beta} D_{0x}^{1-\beta} \psi(x)], \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Функциональные соотношения, связанные с функциями $\tau(x)$, $v^+(x)$ и $T(x)$.

В полуплоскости $y > 0$ уравнение (5) принимает вид

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0. \quad (32)$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача РТ⁺. Найти решение $u(x, y) \in C(\bar{D}^+) \cap C^1(D^+ \cup \sigma \cup J) \cap C^2(D^+)$ уравнения (32), удовлетворяющее краевым условиям (15) и

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (33)$$

где $\tau(x)$ – заданная непрерывная функция, причем $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\gamma_0 \geq 1 - 2\beta$ в интервале $(0, 1)$ и представима в виде

$$\tau(x) = \int_x^1 (t-x)^{-2\beta} T(t) dt, \quad (34)$$

где $T(x)$ – непрерывная и интегрируемая в $(0, 1)$ функция.

Для дальнейшего удобства обозначим через D_0 нормальную область, ограниченную отрезком $\overline{AB}$ и нормальной кривой $\sigma_0: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4}$.

Решение задачи РТ⁺ с условиями (15) и (33) для уравнения (32) в области D^+ существует, единственно и представимо в виде [19]

$$u(x, y) = \int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} G_2(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_0^l \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} G_2(\xi, \eta; x, y) ds, \quad (35)$$

где $G_2(\xi, \eta; x, y)$ – функция Грина задачи РТ⁺ для уравнения (32), и она имеет вид

$$G_2(\xi, \eta; x, y) = G_{02}(\xi, \eta; x, y) + H_2(\xi, \eta; x, y).$$

Здесь $G_{02}(\xi, \eta; x, y)$ – функция Грина задачи РТ⁺ для уравнения (32) в нормальной области D_0 ;

$$H_2(\xi, \eta; x, y) = G_2(\xi, \eta; x, y) - G_{02}(\xi, \eta; x, y) =$$

$$= \int_0^l \lambda_2(s; \xi, \eta) \left\{ A_s [G_{02}(\xi(s), \eta(s); x, y)] + \frac{\rho(s)}{\delta(s)} G_{02}(\xi(s), \eta(s); x, y) \right\} ds, \quad (36)$$

где $\lambda_2(s; \xi, \eta)$ – решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \lambda_2(s; \xi, \eta) + 2 \int_0^l \lambda_2(t; \xi, \eta) \{ A_s [q_2(\xi(t), \eta(t); x(s), y(s))] + \\ + \frac{\rho(s)}{\delta(s)} q_2(\xi(t), \eta(t); x(s), y(s)) \} dt = -2q_2(\xi(s), \eta(s); \xi, \eta), \end{aligned}$$

$q_2(x, y, x_0, y_0)$ – фундаментальное решение уравнения (32):

$$q_2(x, y, x_0, y_0) = k_2 \left(\frac{4}{m+2} \right)^{4\beta-2} r_1^{-2\beta} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right)^{1-2\beta} F \left(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; 1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right), \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 \\ r_1^2 \end{aligned} \right\} = (x-x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp y_0^{\frac{m+2}{2}} \right)^2, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)},$$

$F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, определенная формулой (10).

Дифференцируя по y уравнение (35), затем устремляя y к нулю с учётом (36) и (37), получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v^+(x)$, принесенное из области D^+ на интервал J в виде

$$\begin{aligned} v^+(x) = k_2 \int_0^1 |t-x|^{2\beta-2} \tau(t) dt - k_2 \int_0^1 \frac{\tau(t) dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}} + \\ + \int_0^1 \tau(t) \frac{\partial^2 H_2(t, 0; x, 0)}{\partial \eta \partial y} dt + \int_0^l \chi(s) \frac{\partial q_2(t, \eta; x, 0)}{\partial y} ds, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\chi(s)$ – есть решение интегрального уравнения

$$\chi(s) + 2 \int_0^l \chi(t) \left\{ A_s [q_2(\xi(t), \eta(t); x(s), y(s))] + \frac{\rho(s)}{\delta(s)} q_2(\xi(t), \eta(t); x(s), y(s)) \right\} dt = \frac{2\varphi(s)}{\delta(s)}.$$

После выполнения некоторых преобразований, с учетом (34), из (38) получим функциональное соотношение между $T(x)$ и $v^+(x)$, принесенное из области D^+ на интервал J :

$$\begin{aligned} v^+(x) = -\frac{k_2 \pi t g \beta \pi}{1-2\beta} T(x) + \frac{k_2}{1-2\beta} \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2\beta} T(t) \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t-2xt} \right] dt + \\ + \int_0^1 T(t) dt \int_0^t \frac{\partial^2 H_2(z, 0; x, 0)}{\partial \eta \partial y} (t-z)^{-2\beta} dz + \int_0^l \frac{\partial q_2(t, \eta; x, 0)}{\partial y} \chi(s) ds, \quad (x, 0) \in J. \end{aligned} \quad (39)$$

Сведение задачи Пуанкаре – Трикоми к сингулярному интегральному уравнению

Теорема 2. Если кривая σ удовлетворяет условию (17), то при $-1 < 2\beta < 0$ в области D решение задачи Пуанкаре – Трикоми существует.

Доказательство теоремы 2. Исключив $v(x)$ из соотношений (31), (39) и с учётом условия склеивания (14), имеем

$$\tilde{T}(x) - \gamma_4 \int_0^1 \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t-2xt} \right] \tilde{T}(t) dt - \int_0^1 K(x, t) \tilde{T}(t) dt = F(x), \quad (40)$$

где
$$\gamma_4 = \frac{\cos \beta \pi}{\pi(\sin \beta \pi - 1)}, \quad \tilde{T}(x) = x^{1-2\beta} T(x),$$

$$K(x, t) = \frac{\gamma_3}{\sin \beta \pi - 1} \left(\frac{x}{t} \right)^{1-2\beta} \int_0^t (t-z)^{-2\beta} \cdot \frac{\partial^2 H_2(z, 0; x, 0)}{\partial \eta \partial y} dz, \quad (41)$$

$$F(x) = \frac{2 \cos \beta \pi}{(\sin \beta \pi - 1) \cdot \Gamma(1-\beta)} x^{1-\beta} D_{0\eta}^{1-\beta} \Psi(\eta) + \frac{\gamma_3 x^{1-2\beta}}{(\sin \beta \pi - 1)} \int_0^l \frac{\partial q_2(t, \eta; x, 0)}{\partial y} \chi(s) ds. \quad (42)$$

Исследуем ядро и правую часть сингулярного интегрального уравнения (40).

Имеет место:

Лемма 1. Пусть $0 < x < 1$, $0 < z < 1$, тогда имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^2 H_2(z, 0; x, 0)}{\partial \eta \partial y} \right| < C_1 (x + z - 2xz)^{2\beta-1}. \quad (43)$$

где C_1 – постоянная, зависящая только от области D .

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 18.1 из книги [15].

В силу (43) из (41) имеем

$$|K(x, t)| \leq C_1 \frac{\gamma_3}{1 - \sin \beta \pi} \left(\frac{x}{t} \right)^{1-2\beta} \left| \int_0^t (t-z)^{-2\beta} (x+z-2xz)^{2\beta-1} dz \right|. \quad (44)$$

Неравенство (44) нетрудно привести к виду

$$|K(x, t)| \leq C_1 \frac{\gamma_3}{1 - \sin \beta \pi} \left(\frac{x}{x+t-2xt} \right)^{1-2\beta} \int_0^1 \sigma^{-2\beta} \left[1 - \frac{(1-2x)t}{x+t-2xt} \sigma \right]^{2\beta-1} d\sigma. \quad (45)$$

Производя замену переменных $z = t(1-\sigma)$ и воспользовавшись формулой Эйлера (11) для гипергеометрической функции Гаусса, из (45) получим

$$|K(x, t)| \leq C_1 \frac{\gamma_3}{1 - \sin \beta \pi} \left(\frac{x}{x+t-2xt} \right)^{1-2\beta} F\left(1-2\beta, 1-2\beta, 2-2\beta; \frac{t(1-2x)}{x+t-2xt}\right). \quad (46)$$

Последовательно применяя к гипергеометрической функции в (46) формулу автотрансформации (12) и оценки (13), получим оценку для ядра $K(x, t)$ в виде

$$|K(x, t)| \leq C_1 C_2 \frac{\gamma_3}{1 - \sin \beta \pi} \left(\frac{x}{x+t-2xt} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{x}{x+t-2xt} \right)^{2\beta} \leq \frac{C_3 x}{x+t-2xt}.$$

Теперь оценим правую часть уравнения (40). Дифференцируя фундаментальное решение (37) по y и переходя к пределу при $y \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial q_2(\xi, \eta; t, 0)}{\partial y} = k_2 \eta \left[(\xi - t)^2 + 4(m+2)^{-2} \eta^{m+2} \right]^{\beta-1}. \quad (47)$$

Подставляя (46) в (41), имеем

$$\begin{aligned} F(x) = & \frac{2 \cos \beta \pi}{(\sin \beta \pi - 1) \cdot \Gamma(1-\beta)} x^{1-\beta} D_{0x}^{1-\beta} \Psi(x) + \\ & + \frac{\gamma_3 x^{1-2\beta}}{(\sin \beta \pi - 1)} \int_0^l \frac{\eta(s) \chi(s)}{\left[(\xi(s) - t)^2 + 4(m+2)^{-2} \eta^{m+2}(s) \right]^{1-\beta}} ds. \end{aligned} \quad (48)$$

В силу условий, наложенных на данные $\psi(x)$ и $\phi(s)$, из (47) следует, что функция $F(x)$ в интервале $(0,1)$ имеет производные любого порядка. Выясним поведение функции $F(x)$ и её производной при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 1$.

Рассмотрим выражение

$$F_1(x) = \int_0^l \frac{\eta(s)\chi(s)}{\left[(\xi(s)-t)^2 + 4(m+2)^{-2} \eta^{m+2}(s) \right]^{1-\beta}} ds. \quad (49)$$

Оценим функцию $F_1(x)$ в (48). В силу $\delta(s), \rho(s), \phi(s) \in C[0, l]$, для достаточно малых $x > 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |F_1(x)| &\leq \int_{l-\varepsilon}^l |\chi(s)| \frac{\eta(s)}{\left[(\xi(s)-x)^2 + 4(m+2)^{-2} \eta^{m+2}(s) \right]^{1-\beta}} ds + O(1) < \\ &< C_4 \int_{l-\varepsilon}^l \frac{\eta(s)}{\left[(\xi(s)-x)^2 + 4(m+2)^{-2} \eta^{m+2}(s) \right]^{1-\beta}} ds + O(1). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (17) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем

$$|F_1(x)| < C_5 \int_{l-\varepsilon}^l \frac{\eta^{\frac{m}{2}}(s) \left| \frac{d\eta}{ds} \right|}{\left[x^2 + 4(m+2)^{-2} \eta^{m+2}(s) \right]^{\frac{1}{2}+\beta}} ds + O(1) < C_6 \int_0^{\delta} \frac{d\tilde{\eta}}{\left[x^2 + \tilde{\eta}^2 \right]^{\frac{1}{2}+\beta}} + O(1). \quad (50)$$

Выполнив замену $\mu^2 = \omega$ в (50) с учетом оценок (13) имеем

$$\begin{aligned} |F_1(x)| &< \frac{\delta^2}{x^{2\beta+1}} \left| \frac{\Gamma(1,5)\Gamma(\beta)}{\Gamma(0,5+\beta)} \right| \left(\frac{\delta^2}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\delta}{x^{2\beta+1}} \left| \frac{\Gamma(1,5)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(0,5)\Gamma(1-\beta)} \right| (x^2 + \delta^2)^{-\beta} \times \\ &\times x^{2\beta+1} F\left(\beta, \frac{1}{2}, 1+\beta; \frac{x^2}{x^2 + \delta^2} \right) < \frac{\delta}{x^{2\beta}} \left| \frac{\Gamma(1,5)\Gamma(\beta)}{\Gamma(0,5+\beta)} \right| + \left| \frac{\delta\Gamma(1,5)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(0,5)\Gamma(1-\beta)} \right| (x^2 + \delta^2)^{-\beta} < C_7 x^{-2\beta}, \end{aligned}$$

$$\text{или} \quad |F_1(x)| < C_7 x^{-2\beta}. \quad (51)$$

Если $1-x$ достаточно мало, то аналогично находим

$$|F_1(x)| < C_8 (1-x)^{-2\beta}. \quad (52)$$

Проводя те же самые рассуждения, получим

$$|F_1'(x)| < C_9 x^{-2\beta-1}, \quad |F_1'(x)| = C_{10} (1-x)^{-2\beta-1}. \quad (53)$$

В силу оценок (51) – (53) из (47) заключаем, что $F(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$ и производная $F'(x)$ обращается в бесконечность порядка меньше $2\beta+1$ при $x \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow 0$ ограничена.

Производя замену переменных

$$\zeta = \frac{t^2}{1-2t+2t^2}, \quad z = \frac{x^2}{1-2x+2x^2},$$

приведем уравнение (40) к виду

$$\omega(z) + \gamma_4 \int_0^1 \frac{\omega(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_0^1 \bar{K}(z, \zeta) \omega(\zeta) d\zeta = \tilde{F}(z), \quad (54)$$

где $\omega(z) = (1 - 2x + 2x^2) \tilde{T}(x)$, $\tilde{F}(z) = (1 - 2x + 2x^2) F(x)$,

$$\bar{K}(z, \zeta) = \frac{1 - 2t + 2t^2}{2t(1-t)(1-2x+2x^2)} K(x, t) + \gamma_4 \frac{(1-2x+2x^2)(1-2t+2t^2)}{(1-t)(t+x-2xt)},$$

$$x = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z} + \sqrt{1-z}}, \quad t = \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{1-\zeta}}.$$

Так как $1 + \gamma_3^2 \neq 0$, то уравнение (40) является уравнением нормального типа. Его индекс равен нулю в классе h_2 функций $\omega(z) \in H(0,1)$, ограниченных на отрезке $\bar{J}$ (см. [22]).

К уравнению (54) применим метод регуляризации Карлемана – Векуа [15] и получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи Пуанкаре – Трикоми. Следовательно, из равенств $\tilde{T}(x) = x^{1-2\beta} T(x)$ и $\omega(z) = (1 - 2x + 2x^2) \tilde{T}(x)$, находим функцию $T(x)$, где функция $T(x)$ непрерывна и интегрируема в $(0,1)$.

Подставляя решение $T(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (54) в (34), найдем $\tau(x)$. Далее, зная функцию $\tau(x)$, решение задачи Пуанкаре – Трикоми для уравнения (5) в области D^+ восстановим как решение задачи РТ⁺ для уравнения (32) с условиями (15) и (33), а в области D^- воспользуемся обобщенным решением задачи Коши для уравнения (18), т.е., непосредственно подставляя решение $T(x)$ в (25), восстановим решение задачи Пуанкаре – Трикоми для уравнения (5) области D^- .

Таким образом, существование решения задачи Пуанкаре – Трикоми для уравнения (5) при $\delta(s) \neq 0$ доказано. Теорема 2 доказана.

Все формулы и процесс доказательства в настоящей работе требуют, чтобы $\delta(s) \neq 0$. В связи с этим следует отметить, что в случае $\delta(s) = 0$ задача Пуанкаре – Трикоми для смешанного эллиптико-гиперболического типа второго рода становится видоизмененной задачей Трикоми для уравнения (5) и последняя изучена Ф.И. Франклем (см. например, в [21]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Капилевич М.Б. О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 9. С. 1239–1254.
2. Уринов А.К., Эргашев Т.Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/55/5.
3. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Soham J. Math. 2015. V. 2(1). P. 1–10. <http://dx.doi.org/10.12785/sjm/020201>.

4. Berdyshev A.S., Hasanov A., Ergashev T.G. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 65(2). P. 316–332. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219>.
5. Эргашев Т.Г. Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. Вып. 4. С. 111–122. DOI: 10.13108/2018-10-4-111.
6. Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/50/4.
7. Салахитдинов М.С., Эргашев Т.Г. Интегральное представление обобщенного решения задачи Коши в классе R_{2k}^{λ} для одного уравнения гиперболического типа второго рода // Узбекский математический журнал. 1995. № 1. С. 67–75.
8. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 2. С. 197–200.
9. Эргашев Т.Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. №46. С. 41–49. DOI: 10.17223/19988621/46/6.
10. Сабитов К.Б., Бибакова С.Л. Построение собственных функций задачи Трикоми – Неймана уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение // Математические заметки. 2003. Т. 74. № 1. С. 83–94. <https://doi.org/10.1023/A:1025019216707>.
11. Тожибоев И.Т. Краевые задачи в специальной области для уравнения смешанного типа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. С. 17–28. DOI: 10.17223/19988621/56/2.
12. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. Казань, 2015.
13. Мамадалиев Н.К. О представлении решения видоизменённой задачи Коши // Сибирский математический журнал. 2000. Т. 41. № 5. С. 1087–1097. <https://doi.org/10.1007/BF02674745>.
14. Долгополов В.М., Долгополов М.В., Родионова И.Н. Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа // Доклады АН. 2009. Т. 429. № 5. С. 583–589. <https://doi.org/10.1134/S1064562409060209>.
15. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.
16. Смирнов М.М. Смешанная краевая задача для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Сибирский математический журнал. 1963. Т. 4. № 5. С. 1150–1161.
17. Эргашев Т.Г., Сафарбаева Н.М. Задача Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 6. С. 55–67. DOI: 10.17223/19988621/62/5.
18. Салахитдинов М.С., Абдуллаев А.А. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа второго рода // Докл. АН Республики Узбекистан. 2013. № 1. С. 3–5.
19. Isломov B.I., Abdullayev A.A. On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition // Journal Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2018. V. 9(3). P. 307–318. DOI: 10.17586/22208054201893307318.
20. Салохитдинов М.С., Исломов Б. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Ташкент: Mumtoz soʻz, 2009.
21. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
22. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Abdullayev A.A., Ergashev T.G. (2020) POINCARÉ–TRICOMI PROBLEM FOR THE EQUATION OF A MIXED ELLIPTICO-HYPERBOLIC TYPE OF SECOND KIND. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 5–21

DOI 10.17223/19988621/65/1

Keywords: generalized solution, Poincaré–Tricomi problem, equation of the second kind, integral equation, energy integral method, Green's function.

It is known, that if the partial differential equation of the second order belongs to the elliptic type in one part of the domain and to the hyperbolic type in the other part, then such equation is called an equation of mixed type; both parts of the domain are separated by a transition line on which the equation either degenerates into parabolic or is not defined. Equations of mixed elliptic-hyperbolic type are divided into equations of the first and second kind. For equations of the first kind, the line of parabolic degeneracy is the return point of the family of characteristics of the corresponding hyperbolic equation. The equation whose degeneration line is simultaneously the envelope of a family of characteristics, i.e. is itself a characteristic, is an equation of the second kind. Therefore, equations of a mixed type of the second kind in all respects are relatively little studied. For example, the Poincaré–Tricomi problem and its various generalizations for equations of the first kind have long been studied. For equations of mixed type of the second kind, depending on the degree of degeneracy, the limiting values of the desired solution and its derivative on the line of change of the type of equation can have singularities. To ensure the necessary smoothness of the desired solution outside the line of characteristic degeneracy, one has to require increased smoothness of the given limit functions. In order to weaken this requirement, in the present paper we introduce a class of generalized solutions. In the hyperbolic part of the mixed domain, we seek a generalized solution; in the elliptic part, a regular solution. This paper is devoted to the study of the Poincaré–Tricomi problem for one equation of the mixed elliptic-hyperbolic type of the second kind. The conditions under which the problem has a unique solution are identified.

In the elliptic part of the mixed domain, a classical solution is sought and a similar second functional relationship brought from the ellipticity domain of the equation is derived. Then, after exclusion of one of the two unknown functions from these two functional relationships, the solution of the posed problem is reduced to solving a singular integral equation for the limit value of the sought function on the line separating the types of the equation. Under certain restrictions on the given functions and parameters of the Poincaré–Tricomi type problem, this singular integral equation can be reduced to a Fredholm integral equation of the second kind by the Carleman method. The unique solvability of this equation follows from the Fredholm alternative and uniqueness theorem for the posed problem.

AMS Mathematical Subject Classification: 35M10, 35M12

Akmaljon A. ABDULLAYEV (Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: akmal09.07.85@mail.ru

Tuhtasin G. ERGASHEV (V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: ertuhtasin@mail.ru

REFERENCES

1. Kapilevich M.B. (1966) O konflyuentnikh gipergeometricheskikh funktsiyakh Gorna [Confluent hypergeometric Horn functions]. *Differentsial'nye Uravneniya – Differential Equations*. 2(9). pp. 1239–1254.
2. Urinov A.K., Ergashev T.G. (2018) Konflyuentnye gipergeometricheskie funktsii mnogikh peremennykh i ikh primeneniye k nakhozhdeniyu fundamental'nykh resheniy obobshchennogo uravneniya Gel'mgoltsa s singulyarnymi koeffitsientami [Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to the finding of fundamental solutions of the generalized

- Helmholtz equation with singular coefficients]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/55/5.
3. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. (2015) Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Sohag J. Math.* 2(1). pp. 1–10. <http://dx.doi.org/10.12785/sjm/020201>.
 4. Berdyshev A.S., Hasanov A., Ergashev T.G. (2020) Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 65(2). pp. 316–332. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219>.
 5. Ergashev T.G. (2018) Third double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Ufa Mathematical Journal*. 10(4). pp. 111–121. DOI:10.13108/2018-10-4-111.
 6. Ergashev T.G. (2017) Chetvertyi potentsial dvoynogo sloya dlya obobshchennogo dvouesimmetricheskogo uravneniya Gel'mgoltsa [The fourth double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/50/4.
 7. Salakhitdinov M.S., Ergashev T.G. (1995) Integral'noe predstavlenie resheniya zadachi Koshi v klasse R_{2k}^λ dlya odnogo uravneniya giperbolicheskogo tipa vtorogo roda [Integral representation of a generalized solution of the Cauchy problem in the class R_{2k}^λ for a hyperbolic equation of the second kind]. *Uzbekskiy matematicheskii zhurnal – Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 67–75.
 8. Karol I.L. (1953) Ob odnoy kraevoy zadache dlya uravneniya smeshannogo elliptiko-giperbolicheskogo tipa [A boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type]. *Doklady AN SSSR – Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 88(2). pp. 197–200.
 9. Ergashev T.G. (2017) Obobshchennye resheniya odnogo vyrozhdaiushchegosya giperbolicheskogo uravneniya vtorogo roda so spektral'nim parametrom [Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 41–49. DOI: 10.17223/19988621/46/6.
 10. Sabitov K.B., Bibakova S.L. (2003) Construction of eigenfunctions of the Tricomi–Neumann problem for equations of mixed type with characteristic degeneration and their application. *Mathematical Notes*. 74(1). pp. 70–80. <https://doi.org/10.1023/A:1025019216707>.
 11. Tojiboev I.T. (2018) Kraevye zadachi v spetsial'noy oblasti dlya uravneniy smeshannogo tipa [Boundary problems in a special domain for an equation of mixed type]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 17–28. DOI: 10.17223/19988621/56/2.
 12. Khairullin R.S. (2015) *Zadacha Trikomii dlya uravneniya vtorogo roda s sil'nym vyrozhdeniem* [The Tricomi problem for an equation of the second kind with strong degeneracy]. Kazan. Kazan University.
 13. Mamadaliev N.K. (2000) On representation of a solution to a modified Cauchy problem. *Siberian Mathematical Journal*. 41(5). pp. 889–899. <https://doi.org/10.1007/BF02674745>.
 14. Dolgoplov V.M., Dolgoplov M.V., Rodionova I.N. (2009) Construction of a special class of solutions for some differential equations of hyperbolic type. *Doklady Mathematics*. 80. pp. 860–866. <https://doi.org/10.1134/S1064562409060209>.
 15. Smirnov M.M. (1985) *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of the mixed type]. Moscow: Vysshaya shkola.
 16. Smirnov M.M. (1963) Smeshannaya kraevaya zadacha dlya uravneniya $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ [Mixed problem for the equation $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$]. *Siberian Mathematical Journal*. 4(5). pp. 1150–1161.

17. Ergashev T.G., Safarbayeva N.M. (2019) Zadacha Dirikhle dlya mnogomernogo uravneniya Gel'mgoltsa s odnim singulyarnim koeffitsiyntom [Dirichlet problem for the multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 55–67. DOI: 10.17223/19988621/62/5.
18. Salakhitdinov M.S., Abdullayev A.A. (2013) Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa vtorogo roda [Nonlocal boundary value problem for a mixed type equation of the second kind]. *Doklady AN Respubliki Uzbekistan – Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*. 1. pp. 3–5.
19. Islomov B.I., Abdullayev A.A. (2018) On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition. *Journal Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 9(3). pp. 307–318. DOI: 10.17586/2220805420 1893307318.
20. Salokhitdinov M.S., Islomov B.I. (2009) *Uravneniya smeshannogo tipa s dvumya liniyami vyrozheniya* [The equations of the mixed type with two lines of degeneration]. Tashkent: Mumtoz so'z.
21. Smirnov M.M. (1970) *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of the mixed type]. Moscow: Nauka.
22. Muskhelishvili N.I. (1968) *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka.

Received: February 29, 2020

УДК 512.545
DOI 10.17223/19988621/65/2

MSC 06F15, 08B15

Н.В. Баянова, А.В. Зенков, Г.В. Прусакова

К ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ $\mathcal{O}$ -АППРОКСИМИРУЕМЫХ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

Изучаются свойства некоторых $\mathcal{O}$ -аппроксимируемых многообразий решеточно упорядоченных групп и уточняются ранее полученные результаты о строении решетки многообразий решеточно упорядоченных групп.

Ключевые слова: *решеточно упорядоченная группа, $\mathcal{O}$ -аппроксимируемое многообразие, накрытие.*

1. Введение

Напомним, что решеточно упорядоченная группа (ℓ -группа) – это алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$, совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Если всякие два элемента решеточно упорядоченной группы сравнимы, то группу называют линейно упорядоченной. Решеточно упорядоченные группы, их многообразия и связанные с этим вопросы представлений ℓ -групп порядковыми автоморфизмами подходящих линейно упорядоченных множеств интенсивно исследовались различными авторами. Результаты этих исследований отражены в монографической литературе (см., например, [1, 2]).

Одним из важных классов решеточно упорядоченных групп является многообразие R всех $\mathcal{O}$ -аппроксимируемых ℓ -групп, т.е. ℓ -групп, которые аппроксимируются линейно упорядоченными группами. Хорошо известно (см., например, [1]), что R определяется тождеством

$$(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e. \quad (1)$$

Любое многообразие ℓ -групп, содержащееся в R , называется $\mathcal{O}$ -аппроксимируемым многообразием ℓ -групп. Множество L_0 всех $\mathcal{O}$ -аппроксимируемых многообразий частично упорядочено относительно теоретико-множественного включения; более того, L_0 – решетка относительно стандартно определяемых операций пересечения и объединения многообразий. Отметим, что L_0 является полной подрешеткой решетки L многообразий всех ℓ -групп.

Целью работы является уточнение свойств $\mathcal{O}$ -аппроксимируемых многообразий, которые были введены и изучены в работах [3–5], и рассмотрение новых $\mathcal{O}$ -аппроксимируемых многообразий, которые представляются достаточно интересными.

Напомним некоторые стандартные обозначения и факты о решеточно упорядоченных и линейно упорядоченных группах, которые будут использоваться в дальнейшем. Пусть x – произвольный элемент ℓ -группы G . Тогда $|x| = x \vee x^{-1}$ – его модуль, $x^+ = x \vee e$ – положительная часть. Для положительных элементов

$x, y \in G$ запись $x \ll y$ означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $x^n < y$ (x много меньше y). Если существуют такие числа $m, n \in \mathbb{N}$, что $x^n \geq y$ и $y^m \geq x$, то элемент x архимедово эквивалентен элементу y , этот факт символически обозначается $x \sim y$. Всюду подгруппа H линейно упорядоченной группы G линейно упорядочена посредством индуцированного порядка, т.е. $x < y$ в H тогда и только тогда, когда $x < y$ в G .

Так как каждая ℓ -группа в R есть поддекартово произведение линейно упорядоченных групп, то любое $\mathcal{O}$ -аппроксимируемое многообразие X определяется линейно упорядоченными группами, содержащимися в нем. Чтобы проверить, будет ли любая ℓ -группа в X удовлетворять некоторому тождеству, достаточно показать, что линейно упорядоченные группы в X удовлетворяют ему.

Подгруппа H линейно упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для любых $h_1, h_2 \in H$, $g \in G$ неравенство $h_1 \leq g \leq h_2$ влечет $g \in H$. Система $L(G)$ всех выпуклых подгрупп линейно упорядоченной группы G линейно упорядочена относительно теоретико-множественного включения, является полной относительно объединений и пересечений и инвариантной, т.е. для любой $H \in L(G)$ подгруппа $g^{-1}Hg \in L(G)$ для любого $g \in G$. Скачком выпуклых подгрупп будем называть всякую пару $C, D \in L(G)$, что $C \subset D$ и между ними нет выпуклых подгрупп. Этот факт будем записывать в виде $C \prec D$. Так как между C и D нет выпуклых подгрупп, то $C \triangleleft D$ и фактор-группа D/C архимедова, что в силу теоремы Гельдера означает, что она изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbf{R}$ действительных чисел с естественным порядком. Отметим, что всякий неединичный элемент $g \in G$ определяет скачок $C \prec D$ выпуклых подгрупп, где C – наибольшая выпуклая подгруппа со свойством $g \notin C$, D – наименьшая выпуклая подгруппа со свойством $g \in D$. Для скачка $C \prec D$ и любого $x \in G$ пара подгрупп $C^x \subset D^x$ образует скачок, который называется *сопряженным* с исходным скачком. Если $D = D^x$, то будем говорить, что скачок $C \prec D$ *инвариантен* относительно сопряжения элементом x . Далее, будем считать, что элементы x, y группы G *лежат в одном скачке* (определяют один скачок), если найдется такой скачок $C \prec D$ выпуклых подгрупп, что $x, y \in D \setminus C$. Очевидно, что $x \sim y$ тогда и только тогда, когда эти элементы определяют один скачок выпуклых подгрупп, а $x \ll y$ тогда и только тогда, когда скачок выпуклых подгрупп, определяемый x , расположен в системе $L(G)$ ниже скачка, определяемого y . Поэтому в любой упорядоченной группе всегда выполнено $||[x, y]| \ll |x| \vee |y|$.

Пусть $V_1, V_2 \in L$, тогда V_1 накрывает V_2 , если $V_1 \supseteq V_2$, $V_1 \neq V_2$ и из $V_1 \supset U \supset V_2$ следует $V_1 = U$ или $V_2 = U$. Отметим, что решетка L всех многообразий решеточно упорядоченных групп обладает свойством накрытия [2].

Через $\text{var}_\ell(G)$ обозначаем многообразие ℓ -групп, порожденное ℓ -группой G .

2. Основной результат

В работе [6] Н.Я. Медведев построил первое $\mathcal{O}$ -аппроксимируемое многообразие V , которое не имеет накрытий в решетке L_0 и содержит все $\mathcal{O}$ -аппроксимируемые накрытия многообразия абелевых ℓ -групп A . Позднее в [5] были определены еще четыре $\mathcal{O}$ -аппроксимируемых многообразия с аналогичными свойствами. Покажем, что на самом деле этих многообразий в два раза меньше.

Далее, если не оговорено противное, рассматриваются только $\mathcal{O}$ -аппроксимируемые многообразия. Через H обозначим многообразие, задаваемое следующей

бесконечной системой тождеств:

$$\begin{aligned} & (|([x, y])^2 \vee (|x| \vee |y|) |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-1}) |([x, y])^{-2}| \wedge \\ & |([x, y])^m \wedge (|x| \vee |y|) |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-1}) |([x, y])^{-m}| = e, \end{aligned} \quad (2)$$

где $m \geq 3$ – натуральное число. Это многообразие было введено и изучалось в [5]. В частности, доказано, что H не имеет накрытий в решетке L_0 и строго содержит V (Теоремы 1, 3).

В работе [3] было введено многообразие C , определяемое при помощи следующей бесконечной системы тождественных неравенств: $([a, b] \vee e) \wedge a << a \vee b^{-1}ab$, где $e \leq a \leq b$. Очевидно, что указанную систему тождественных неравенств можно записать в виде

$$[a, b]^+ \wedge a << a[ab]^+. \quad (3)$$

Основным результатом работы [3] стало доказательство того, что многообразие C содержит все o -аппроксимируемые накрытия многообразия абелевых ℓ -групп A . В работе [4] было доказано, что V строго содержится в C . Наконец в [5] (Теорема 2) показано, что C не имеет накрытий в решетке L_0 .

В работе [7] М.Е. Huss и N.R. Reilly на решетке L всех многообразий ℓ -групп определили нетождественный автоморфизм 2-го порядка Θ следующим образом. Пусть $U = \{G_i \mid i \in I\}$ – некоторое многообразие ℓ -групп. Тогда $\Theta(U) = U^* = \{G_i^* \mid i \in I\}$, где ℓ -группа G_i^* получена из G_i обращением порядка, т.е. $x \leq y$ в группе G_i^* тогда и только тогда, когда $x \geq y$ в группе G_i .

В этой же работе был указан способ получения базиса тождеств U^* , если известен базис тождеств многообразия U . Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – набор переменных. Тогда всякое ℓ -групповое слово $w(\bar{x})$ от этих переменных представимо в виде $w(\bar{x}) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} w_{ij}(\bar{x})$, где I, J – конечные множества индексов, $w_{ij}(\bar{x})$ – групповое слово. Отметим, что такое представление не является единственным. Определим $w^R(\bar{x}) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} (w_{ij}(\bar{x})^{-1})$. Тогда $w(\bar{x}) = e$ – тождество U тогда и только тогда,

когда $w^R(\bar{x}) = e$ – тождество U^* . Несложно проверить следующие соотношения:

- 1) если $w = w_1 \cdot w_2$, то $w^R = w_2^R \cdot w_1^R$;
- 2) если $w = w_1 \vee w_2$, то $w^R = w_1^R \vee w_2^R$;
- 3) если $w = w_1 \wedge w_2$, то $w^R = w_1^R \wedge w_2^R$;
- 4) $(w^{-1})^R = (w^R)^{-1}$;
- 5) $|w|^R = |w^R|$.

Используя эти факты, можно показать, что многообразие R всех o -аппроксимируемых ℓ -групп реверсивно, т.е. $R = R^*$. В [5] (Предложение 2) показано, что $V = V^*$. Следовательно, многообразия H^* , C^* o -аппроксимируемы, строго содержат V , не имеют накрытий в решетке L_0 и определяются соответственно тождествами:

$$\begin{aligned} H^* : & (|([x, y])^2 \vee (|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|)) |([x, y])^{-2}| \wedge \\ & |([x, y])^m \wedge (|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|)) |([x, y])^{-m}| = e; \end{aligned} \quad (4)$$

$$C^* : [a, b]^+ \wedge a << [ab]^+ a. \quad (5)$$

Пусть B_β – бесконечная циклическая подгруппа мультипликативной группы положительных действительных чисел, порожденная числом $\beta \neq 1$, и A – такая

подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}$ действительных чисел с естественным порядком, что для любого $a \in A$ верно $\beta a, \beta^{-1}a \in A$. Полупрямое произведение A и B_β обозначим через $T_\beta = A \bar{\lambda} B_\beta$. Всякий элемент $g \in T_\beta$ единственным образом можно представить в виде $g = (\beta^k, a)$, где $a \in A, k \in \mathbf{Z}$. Операция умножения элементов определена по правилу

$$(\beta^k, a_1)(\beta^s, a_2) = (\beta^{k+s}, \beta^s a_1 + a_2).$$

Считаем, что $g = (\beta^k, a) \geq e$ тогда и только тогда, когда $k > 0$ или $k = 0$ и $a \geq 0$. Тогда T_β – линейно упорядоченная группа.

В работе [5] (Леммы 3 – 6) доказано, что многообразие H содержит T_β при $\beta > 1$ и не содержит T_β , если $\beta < 1$, а многообразие C не содержит T_β при $\beta > 1$ и содержит T_β при $\beta < 1$. Из сказанного выше, очевидно, следует, что $H \neq C$. Несложно показать, что $(T_\beta)^* \cong T_{\beta^{-1}}$. Следовательно, многообразие C^* содержит T_β

при $\beta > 1$ и не содержит T_β , если $\beta < 1$.

Как обычно, лексикографическое произведение линейно упорядоченных групп G и H обозначаем $G \bar{\times} H$. Ясно, что $G \bar{\times} H$ является линейно упорядоченной группой. Предложение 2 работы [4] утверждает, что многообразие C (а следовательно, и C^*) замкнуто относительно лексикографических произведений. Следующее утверждение показывает, что это не так.

Предложение 1. При любых $\beta, \alpha \neq 1$ линейно упорядоченная группа $T_\beta \bar{\times} T_\alpha$ не принадлежит многообразию C .

Доказательство. Возможны следующие случаи: 1) $\beta, \alpha < 1$, 2) $\beta > 1 > \alpha$, 3) $\beta, \alpha > 1$, 4) $\beta < 1 < \alpha$. Рассматривая первый случай, полагаем $a = ((1, r), (1, 0))$, где $r > 0$ и $b = ((\beta^{-2}, 0), (\alpha, 0))$. Из определения лексикографического порядка и порядка на группе T_β следует $e < a < b$. Непосредственные вычисления показывают, что $[a, b] = ((1, (\beta^{-2} - 1)r), (1, 0)) > e$. Следовательно, $a[a, b] = ((1, \beta^{-2}r), (1, 0)) > e$ и $a \wedge [a, b] = ((1, r_1), (1, 0))$, где $r_1 = \min(r, (\beta^{-2} - 1)r)$, что влечет $a \wedge [a, b] \sim a[a, b]$. Противоречие с системой неравенств (3); поэтому в рассматриваемом случае многообразие C не замкнуто относительно лексикографических произведений.

Во втором случае рассмотрим $a = ((1, r), (1, 0))$, $r > 0$ и $b = ((\beta^2, 0), (\alpha, 0))$. Очевидно, что $e < a < b$ и $[a, b] = ((1, (\beta^2 - 1)r), (1, 0)) > e$. Теперь, как и выше, получаем $a \wedge [a, b] = ((1, r_1), (1, 0))$, где $r_1 = \min(r, (\beta^2 - 1)r)$, $a[a, b] = ((1, \beta^2 r), (1, 0)) > e$, что противоречит системе неравенств (3).

В двух последних случаях берем $a = ((1, 0), (1, r))$, $r > 0$ и $b = ((1, 0), (\alpha, 0))$. Ясно, что $e < a < b$ и $[a, b] = ((1, 0), (1, (\alpha - 1)r)) > e$. Следовательно, $a \wedge [a, b] \sim a[a, b]$, что невозможно. #

В работе [5] было показано, что многообразие H не замкнуто относительно лексикографических произведений, что позволяло утверждать, с учетом Предложения 2 из работы [4], что $C \neq H^*$. На самом деле верно.

Предложение 2. Многообразие ℓ -групп C совпадает с многообразием ℓ -групп H^* .

Доказательство. Пусть $C \neq H^*$. Тогда найдется линейно упорядоченная группа, отличающая эти многообразия. Предположим сначала, что существует линейно упорядоченная группа $G \in H^* \setminus C$. Тогда в ней найдутся такие $b > a > e$, что для них не имеет места система неравенств (3).

Если $[a, b] \leq e$, то $[a, b]^+ \wedge a = e$ и $a[a, b]^+ = a$, следовательно, система неравенств (3) выполнена. Поэтому $[a, b] > e$, что влечет $a^b > a$. Если $a^b \gg a$, то $[a, b] \gg a$, и в этом случае, имеет место система неравенств (3). Следовательно, $a^b \sim a$. Предположим, что $b \sim a$. Тогда $[a, b] \ll a$, что означает выполнимость системы неравенств (3). Значит, $a^b \sim a \ll b$.

Рассмотрим скачок $C \prec D$ выпуклых подгрупп, определяемый элементом a . Из архимедовой эквивалентности элементов a и a^b следует, что они лежат в одном скачке. Поэтому указанный скачок инвариантен относительно сопряжения элементом b . Обозначим через F подгруппу группы G , порожденную элементом b и подгруппой D . Ясно, что $C \triangleleft F$. В силу условия $a^b \sim a \ll b$ получаем, что $b \gg d$, где $d \in D$ и поэтому индуцированный F порядок на фактор-группу F/C является лексикографическим. Используя теорему о гомоморфизмах, видим, что фактор-группа F/C порядково изоморфна полупрямому произведению $(D/C)\bar{\lambda}(\bar{b})$, где $\bar{b}$ – образ элемента b при естественном гомоморфизме группы F на F/C . Отождествив D/C с соответствующей подгруппой аддитивной группы $\mathbf{R}$ действительных чисел с естественным порядком, получаем, что автоморфизм сопряжения $\bar{b}$ элементов группы D/C есть умножение на некоторое положительное действительное число β . Если $\beta = 1$, то это влечет $[a, b] \in C$, что означает $[a, b] \ll a$, а это, как отмечено выше, влечет выполнимость системы неравенств (3). Поэтому, в силу условия $a^b > a$, получаем, что $\beta > 1$. Таким образом, H^* содержит группу T_β при $\beta > 1$, что невозможно.

Предположим теперь, что существует линейно упорядоченная группа $G \in C \setminus H^*$. Тогда в ней найдутся такие x, y и натуральное $m \geq 3$, что $\|x, y\|^2 < (\|x\| \vee \|y\|)^{-1} \|x, y\| (\|x\| \vee \|y\|) < \|x, y\|^m$. Последнее неравенство означает, что $\|x, y\| \sim \|x, y\|^{|\|x\| \vee \|y\||}$. Если, как и выше, рассмотреть скачок $C \prec D$ выпуклых подгрупп, определяемый элементом $\|x, y\|$, то он будет инвариантен относительно сопряжения элементом $\|x\| \vee \|y\|$. Теперь, повторяя рассуждения, приходим к выводу, что C содержит группу T_β при $\beta > 1$, что невозможно. #

Таким образом, Теорема 4 работы [5] может быть переформулирована следующим образом: «Многообразия ℓ - групп V, C, C^* различны».

Пусть $U_{\beta, \alpha} = \text{var}_\ell(T_\beta \times T_\alpha)$. Рассмотрим многообразие $X = C \vee C^*$. Хорошо известно (см., например, [6], Лемма 4), что всякая линейно упорядоченная группа из объединения двух многообразий принадлежит одному из них. Учитывая Предло-

жение 1, получаем, что линейно упорядоченная группа $T_\beta \bar{\times} T_\alpha$ не принадлежит многообразию X при любых $\beta, \alpha \neq 1$. Следовательно, многообразие $U_{\beta, \alpha}$ не содержится в X и поэтому $X \subset R$.

Для произвольного положительного числа $\beta \neq 1$ и натурального n через T_{β^n} обозначим подгруппу группы T_β элементов вида $g = (\beta^{nk}, a)$, где $a \in A, k \in \mathbb{Z}$. Теперь в группе $T_\beta \bar{\times} T_\alpha$ для натуральных n, m можно рассмотреть подгруппу $T_{\beta^n} \bar{\times} T_{\alpha^m}$. Далее, $U_{\beta^n, \alpha^m} = \text{var}_\ell(T_{\beta^n} \bar{\times} T_{\alpha^m})$.

Предложение 3. Для подходящих натуральных чисел n, m многообразие ℓ - групп U_{β^n, α^m} строго содержится в многообразии ℓ - групп $U_{\beta, \alpha}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\beta < 1 < \alpha$. Найдутся натуральные числа n, m, t, k , такие, что $\beta^{-1} < k < \beta^{-n}, \alpha < k, t < \alpha^m$.

Пусть $x, y \in T_{\beta^n} \bar{\times} T_{\alpha^m}$. Тогда $|x| \vee |y| = (g_1, g_2)$, где $g_1 = (\beta^{nk_1}, a_1)$, $g_2 = (\alpha^{mk_2}, a_2)$. Из определения лексикографического порядка на группе $T_{\beta^n} \bar{\times} T_{\alpha^m}$ следует, что $g_2 > e$ или $g_2 = e$ и $g_1 \geq e$. Модуль коммутатора $[x, y] = ((1, a_3), (1, a_4))$ и $a_4 > 0$ или $a_4 = 0$ и $a_3 \geq 0$.

Пусть $a_4 > 0$. Тогда $g_2 > e$ и, более того, $k_2 > 0$. Следовательно, $[x, y]^{|x| \vee |y|} = ((1, \beta^{nk_1} a_3), (1, \alpha^{mk_2} a_4))$. Так как $\alpha^{mk_2} \geq \alpha^m > t$, то $[x, y]^{|x| \vee |y|} > [x, y]^t$.

Далее, пусть $a_4 = 0$ и $a_3 > 0$. Тогда $k_1 \neq 0$. Если $k_1 < 0$, то $\beta^{nk_1} = \beta^{-n(-k_1)} > k$. Следовательно, $\beta^{nk_1} a_3 > ka_3$, что влечет $[x, y]^{|x| \vee |y|} > [x, y]^k$. Если $k_1 > 0$, то $\beta^{nk_1} \leq \beta^n < \frac{1}{k}$. Поэтому $\beta^{nk_1} ka_3 < a_3$, что означает

$$(|x| \vee |y|)^{-1} [x, y]^k (|x| \vee |y|) < [x, y].$$

Разобранные случаи позволяют утверждать, что тождество

$$\begin{aligned} & |([x, y]^t \wedge [x, y]^{|x| \vee |y|})| [x, y]^t \wedge \\ & \wedge |([x, y]^k \wedge [x, y]^{|x| \vee |y|})| [x, y]^k \wedge \\ & \wedge |([x, y] \vee (|x| \vee |y|)^{-1} [x, y]^k (|x| \vee |y|))| [x, y]^{-1} = e \end{aligned} \quad (6)$$

верно в группе $T_{\beta^n} \bar{\times} T_{\alpha^m}$, значит, и в любой группе из многообразия U_{β^n, α^m} .

Покажем, что (6) не выполнено в группе $T_\beta \bar{\times} T_\alpha$. Пусть $x = ((1, 0), (1, r))$, где $r > 0$ и $y = ((1, 0), (\alpha, 0))$. Ясно, что $y > x > e$. Поэтому $|x| \vee |y| = y$ и $[x, y] = ((1, 0), (1, r_1)) > e$, так как $r_1 = (\alpha - 1)r > 0$. Следовательно, выполнено $(|x| \vee |y|)^{-1} [x, y] (|x| \vee |y|) = ((1, 0), (1, \alpha r_1))$. Так как $\alpha < t$, то $\alpha r_1 < tr_1$. Значит, имеет место следующее неравенство: $(|x| \vee |y|)^{-1} [x, y] (|x| \vee |y|) < [x, y]^t$. Неравенство $(|x| \vee |y|)^{-1} [x, y] (|x| \vee |y|) < [x, y]^k$ вытекает из неравенства $\alpha < k$. Очевидно

но, что $\alpha k > 1$ и поэтому $(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]|^k (|x| \vee |y|) > |[x, y]|$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. #

Теперь можно показать, что многообразие R всех $\mathcal{o}$ -аппроксимируемых ℓ - групп не является покрытием X в решетке L_0 . Действительно, предположив противное, получим, что верно $R = X \vee U_{\beta, \alpha} = X \vee U_{\beta^n, \alpha^m}$ для подходящих натуральных чисел n и m . Отсюда вытекает $T_\beta \times T_\alpha \in X$ или $T_\beta \times T_\alpha \in U_{\beta^n, \alpha^m}$, что одинаково невозможно. Однако открытым остается вопрос о существовании накрытия X в решетке L_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Копытов В.М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984. 300 с.
2. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994. 374 p.
3. Andersen M., Darnel M., Feil T. A variety of lattice-ordered groups containing all representable covers of the abelian variety // Order. 1991. V. 7. P. 401–405. DOI: 10.1007/BF00383204.
4. Молочко С.В., Морозова С.В. К теории многообразий решеточно упорядоченных групп // Сибирский матем. журнал. 1997. Т. 38. № 1. С. 151–160.
5. Medvedev N.Ya., Morozova S.V. On covers in the lattice of representable ℓ - varieties // Czechoslovak Mathematical Journal. 1998. V. 48(123). P. 821–831.
6. Медведев Н.Я. О решетке $\mathcal{o}$ -аппроксимируемых ℓ - многообразий // Czechoslovak Mathematical Journal. 1984. V. 34(109). P. 6–17.
7. Huss M.E., Reilly N.R. On reversing the order of a lattice ordered group // J. Algebra. 1984. V. 91. P. 176–191. DOI: 10.1016/0021-8693(84)90133-9.

Статья поступила 12.11.2019 г.

Bayanova N.V., Zenkov A.V., Prusakova G.V. (2020) ON THE THEORY OF REPRESENTABLE VARIETIES OF LATTICE-ORDERED GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 22–29

DOI 10.17223/19988621/65/2

Keywords: lattice-ordered group, representable varieties, cover.

Recall that a lattice-ordered group (or ℓ -group, for short) is an algebraic system G of a signature $\ell = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$ combining the structure of a group and the structure of lattice that are naturally related via $x(u \vee v)y = xuy \vee xvy$, $x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy$. An ℓ -group G is totally ordered if every two elements of G are comparable.

The non-empty class M of ℓ -group is an ℓ -variety if and only if M is closed under the formation of ℓ -subgroup, the homomorphic images and the Cartesian products [1, 2]. The set L of all ℓ -varieties is a lattice under naturally defined operations of join and meet [1, 2]. Let U, V be ℓ -varieties and $U \subset V$. If there is no ℓ -variety S such that $U \subset S \subset V$, then V covers U in the lattice L . The ℓ -variety R defined by the identity $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ is called the ℓ -variety of representable ℓ -groups. Any ℓ -variety $V, V \subseteq R$ is called a representable ℓ -variety. Since each ℓ -group in R is a subdirect product of totally ordered groups, any representable ℓ -variety is uniquely determined by its totally ordered groups. The set L_0 of all representable ℓ -varieties is a complete lattice under naturally defined operations of join and meet [2].

Let B_β be an infinite cyclic subgroup of the multiplicative group of positive real numbers generated by the number $\beta \neq 1$ and A is a subgroup of the additive group of real numbers such $a \in A$ implies $\beta a, \beta^{-1}a \in A$. Let $T_\beta = \{(\beta^k, a) \mid a \in A, k \in \mathbb{Z}\}$ be a splitting extension of A by B_β . The group T_β is a totally ordered group by the lexicographic order, i.e. $g = (\beta^k, a) \geq e$ if and only if $k > 0$ or $k = 0$ and $a \geq 0$. The set $T_{\beta^n} = \{(\beta^{nk}, a)\}$ is a subgroup of the group T_β for any natural n . We denote by $T_\beta \times T_\alpha$ the lexicographic product of the totally ordered groups T_β and T_α . It is clear that $T_\beta \times T_\alpha$ is a totally ordered group. In the works [1–6] were introduced and studied the representable ℓ -varieties V, C, C^*, H, H^* . We prove

Proposition 1. The totally ordered group $T_\beta \times T_\alpha \notin C$ for any $\alpha, \beta \neq 1$.

Proposition 2. The ℓ -variety C is equal to the ℓ -variety H^* .

Hence, the set $\{V, C, C^*, H, H^*\}$ has three elements.

Denote by $U_{\beta, \alpha}$ and U_{β^n, α^m} varieties which are generated by the group $T_\beta \times T_\alpha$ and her subgroup $T_{\beta^n} \times T_{\alpha^m}$ respectively. There is the following

Proposition 3. For suitable natural numbers n, m a variety U_{β^n, α^m} is strictly contained in $U_{\beta, \alpha}$.

In the ending, using Proposition 3, it is proved that the ℓ -variety R is not a cover of an ℓ -variety $C \vee C^*$.

AMS Mathematical Subject Classification: 06F15, 08B15

Nadezhda V. BAYANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: bayanova@math.asu.ru

Alexey V. ZENKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Galina V. PRUSAKOVA (Senior Lecturer, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: prusakova_galina@mail.ru

REFERENCES

1. Kopytov V.M. (1984) *Reshotочно uporyadochennye gruppy* [Lattice-ordered groups] Moscow: Nauka.
2. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. (1994) *The Theory of Lattice-Ordered Groups*. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers.
3. Andersen M., Darnel M., Feil T. (1991) A variety of lattice-ordered groups containing all representable covers of the abelian variety. *Order*. 7. pp. 401–405. DOI: 10.1007/BF00383204.
4. Molochko S.V., Morozova S.V. (1997) On the theory of varieties of lattice-ordered groups. *Sib. Math. J.* V. 38(1). pp. 127–135.
5. Medvedev N.Ya., Morozova S.V. (1998) On covers in the lattice of representable ℓ -varieties. *Czech. Math. J.* V. 48(4). pp. 821–831.
6. Medvedev N.Ya. (1984) O reshetke o -аппроксимлируемых ℓ -многообразий [On the lattice of o -approximable ℓ -varieties] *Czech. Math. J.* V. 34(1). pp. 6–17.
7. Huss M.E., Reilly N.R. (1984) On reversing the order of a lattice ordered group. *J. Algebra*. V. 91 pp. 176–191. DOI: 10.1016/0021-8693(84)90133-9.

Received: November 12, 2019

УДК 519.642.4
DOI 10.17223/19988621/65/3

MSC 80M15, 65E05

Д.Ю. Иванов

УТОЧНЕНИЕ КОЛЛОКАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С ПОМОЩЬЮ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

Исследуется решение первой краевой задачи для двумерного однородного уравнения теплопроводности при нулевом начальном условии с помощью коллокационного метода граничных элементов. Предлагается полуаналитическая аппроксимация потенциала двойного слоя, обеспечивающая равномерную кубическую сходимость приближенного решения в области. При некоторых упрощениях доказано, что использование квадратурных формул для аппроксимации потенциала приводит к нарушению равномерной сходимости вблизи границы области. Теоретические выводы подтверждены результатами численного решения задачи в круговой области.

Ключевые слова: *нестационарная теплопроводность, задача Дирихле, граничные интегральные уравнения, потенциал двойного слоя, граничный элемент, коллокация, равномерная сходимость, устойчивость.*

В настоящей работе рассматриваются внутренние и внешние первые краевые задачи для уравнения теплопроводности (ПКЗУТ) $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ в открытой двумерной пространственной области Ω при нулевом начальном условии. Предлагается полностью обоснованный коллокационный метод граничных элементов (КМГЭ) [1, с. 21], позволяющий получить равномерно сходящиеся и равномерно устойчивые в пространственно-временной области $\Omega \times I_T$ ($I_T \equiv [0, T]$) приближенные решения двумерных ПКЗУТ. Решения ищутся в виде потенциала двойного слоя (ПДС) с неизвестной функцией плотности, определяемой из граничного интегрального уравнения (ГИУ) второго рода. Численные примеры решения двумерных ПКЗУТ с помощью КМГЭ на основе ГИУ второго рода рассматривались ранее в работах [2, с.269; 3; 4]. Доказательство равномерных сходимости и устойчивости такого решения в любой замкнутой области вида $\Omega' \times I_T$ ($\Omega' \subset \Omega$) приведено в работе автора [5]. Найти другие работы, посвященные теоретическому обоснованию решения ПКЗУТ с помощью КМГЭ на основе ГИУ второго рода, оказалось затруднительно. В то же время достаточно много работ, посвященных обоснованию решения аналогичных вторых краевых задач с помощью КМГЭ на основе ГИУ второго рода, а также обоснованию решения ПКЗУТ с помощью КМГЭ на основе ГИУ первого рода (см. работы [6–9] и [10–12] соответственно). Отметим, что в данном случае преимуществом использования ГИУ второго рода является устойчивая обратимость аппроксимаций оператора ГИУ (см. теорему 6 [5] или теорему 3 настоящей работы). Неустойчивая обратимость аппроксимаций оператора ГИУ первого рода, полученных на основе КМГЭ для ПКЗУТ, доказана в теореме 2 [13].

Как и в двух предыдущих работах [5, 14], в этой работе также существенная роль при обосновании метода отводится аппроксимации коэффициентов приближенного оператора. Такой оператор здесь получается из интегрального оператора ПДС в результате кусочно-квадратичной интерполяции (ККИ) временной C_0 -полугруппы $U(\tau)$, через которую выражается ядро интегрального оператора, с равным шагом h_τ , а также ККИ функции плотности, точки коллокации которой разбивают границу $\partial\Omega$ на равные по длине граничные элементы (ГЭ). Коэффициенты имеют вид двукратных интегралов по параметру полугруппы τ и длине дуги s , причем интегрирование по τ осуществляется аналитически после ККИ множителя $e^{-P\tau}$, также входящего в ядро интегрального оператора. На этапе решения ГИУ интегралы по s вычисляются как в работе [5]. А именно, для вычисления интегралов по s на сингулярном ГЭ, а также на околосингулярных ГЭ в некоторой фиксированной по длине дуги области, прилегающей к сингулярному ГЭ, используется точное интегрирование после перехода к новой переменной интегрирования $\tilde{r}$ – расстоянию от точки коллокации до текущей точки интегрирования $\mathbf{x}' \in \partial\Omega$ (сингулярным называется ГЭ, в котором достигается значение $\tilde{r} = 0$). При этом в качестве весовой функции берется функция переменной $\tilde{r}$, порожденная фундаментальным решением уравнения теплопроводности (ФРУТ), а остальная часть подынтегральной функции аппроксимируется с помощью квадратичной интерполяции по $\tilde{r}$, и тогда интегрирование по $\tilde{r}$ осуществляется точно для любой аналитически заданной границы $\partial\Omega$. На других ГЭ интегралы по s вычисляются с помощью простых квадратурных формул Гаусса (ПКФГ) [1, с. 79]. Такая аппроксимация позволяет в работе [5] доказать сходимость и устойчивость приближенных решений ГИУ.

Аналогично аппроксимируются интегралы по s при вычислении ПДС в точках $\mathbf{x} \in \Omega$. А именно, если расстояние от точки $\mathbf{x}$ до точек некоторого ГЭ не превышает примерно трети радиуса Ляпунова, то для аппроксимации интеграла по s на этом ГЭ используется точное интегрирование по переменной $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$ (r и d – расстояния от точки $\mathbf{x}$ до текущей точки интегрирования $\mathbf{x}' \in \partial\Omega$ и границы $\partial\Omega$ соответственно). На остальных ГЭ интегралы по s вычисляются с помощью ПКФГ. Точное интегрирование по ρ уже использовалось в работе [14] для аппроксимации потенциала простого слоя. Для того чтобы обеспечить равномерные в области $\Omega \times I_T$ сходимость и устойчивость аппроксимаций ПДС, интеграл по s здесь представляется в виде суммы двух интегралов по ρ , в каждом из которых берется своя весовая функция переменной ρ , порожденная ФРУТ. Оставшиеся части подынтегральных функций аппроксимируются с помощью квадратичной интерполяции по ρ , после чего интегрирование по ρ осуществляется точно для любой аналитически заданной границы $\partial\Omega$.

Дискретный оператор, разрешающий ПКЗУТ, вычисляется в алгебре полиномов, образованных степенями полугруппового оператора $U(h_\tau)$, с помощью приближенного оператора, разрешающего ГИУ, и приближенного оператора ПДС. С помощью дискретного оператора, разрешающего ПКЗУТ, и значений граничной функции, взятых в точках коллокации nh_τ C_0 -полугруппы $U(\tau)$, вычисляются решения ПКЗУТ в тех же точках nh_τ , что позволяет осуществить ККИ реше-

ния по времени. Доказано, что полученные таким образом приближенные решения ПКЗУТ сходятся к точным с кубической относительно шагов по времени и длине дуги скоростью равномерно в области $\Omega \times I_T$. Доказана равномерная в $\Omega \times I_T$ устойчивость приближенных решений ПКЗУТ к возмущениям граничной функции. Полученные результаты справедливы для границы $\partial\Omega$ с гладкостью C^5 .

Обычно интегралы по s при $x \in \Omega$ рекомендуется вычислять с помощью ПКФГ, так как подынтегральная функция при $x \in \Omega$, строго говоря, гладкая [1, с. 173]. В настоящей работе для более простого случая кусочно-постоянной интерполяции доказано, что использование для вычисления интеграла по s на ближайшем к точке $x \in \Omega$ ГЭ целого ряда квадратурных формул, включая ПКФГ и квадратурные формулы Ньютона – Котеса (КФНК), влечет нарушение равномерной по d сходимости аппроксимаций ПДС вблизи границы $\partial\Omega$. Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению ПКЗУТ в круговой пространственной области, которые подтверждают, что применение точного интегрирования по ρ обеспечивает равномерную в области $\Omega \times I_T$ сходимость, близкую к кубической, в то время как использование вместо этого квадратурных формул, ПКФГ или КФНК, приводит к серьезному нарушению точности вблизи границы $\partial\Omega$.

Отметим, что уточнение решений краевых задач, полученных в рамках КМГЭ для уравнений Лапласа и Гельмгольца вблизи границы области, рассматривается в работах [15, 16]. При этом уточнение основано на регуляризации решения с помощью сглаживания ядра интегрального оператора в области сингулярности.

Предварительные замечания

Пусть Ω^+ – двумерная открытая ограниченная односвязная область и $\Omega^- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \Omega^+$ ($\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$). Кроме того, пусть $\partial\Omega$, граница области Ω^+ , является кривой класса гладкости C^2 , если не оговорено особо. Рассмотрим внутренние и внешние задачи Дирихле:

$$a^2 \Delta_2 u_1^\pm - p u_1^\pm = B u_1^\pm \quad (x \equiv (x_1, x_2) \in \Omega^\pm), \quad u_1^\pm = w_1^\pm \quad (x \in \partial\Omega), \quad (1)$$

где $u_1^\pm(x)$ и $w_1^\pm(x)$ – векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве $L_2 \equiv L_2(I_T)$, заданные на множествах $\Omega^\pm$ и $\partial\Omega$ соответственно (все пространства функций здесь комплексные); $\Delta_2 \equiv \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений, в данном случае – L_2); $p > 0$, $a > 0$ (коэффициент температуропроводности) – постоянные; B – замкнутый оператор в L_2 : $(Bf)(t) = f'(t)$, заданный на множестве $D(B)$ классов функций $f \in L_2$, эквивалентных абсолютно непрерывным на промежутке I_T функциям $f(t)$, таким, что $f(0) = 0$.

Пусть $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ – пространства непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве $\Omega' \subset \mathbf{R}^2$ векторных функций со значениями в пространстве L_2 . В работах [17, 18] доказана однозначная разрешимость

задач (1) в классе $\overline{C(\Omega^\pm)} \cap C^2(\Omega^\pm)$ при любых $\mathbf{w}_1^\pm \in C(\partial\Omega)$. Решения имеют вид векторных потенциалов: $\mathbf{u}_1^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1^\pm$ ($\mathbf{x} \in \Omega^\pm$), где функции $\mathbf{v}_1^\pm \in C(\partial\Omega)$ находятся из соответствующих ГИУ:

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}^\pm \mathbf{v}_1^\pm)(\mathbf{x}) &\equiv \mathbf{w}_1^\pm(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \quad \mathbf{G}^\pm \equiv \pm 2^{-1} + \mathbf{G}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{f} &= (\mathbf{G}\mathbf{f})(\mathbf{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{f}(\mathbf{x}')ds' \quad (\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)); \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$) – ограниченные операторы в пространстве L_2 , определяемые равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{f} &\equiv \int_{I_T} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) e^{-P\tau} \mathbf{U}(\tau)\mathbf{f} d\tau \quad (\mathbf{f} \in L_2), \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) &\equiv a_1(r, \tau)b(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad b(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \partial_{n(\mathbf{x}')} \ln r^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь $a_1(r, \tau) \equiv -r \partial_r a_0(r, \tau)$, $a_0(r, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4a^2\tau)]$, $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$; дифференцирование $\partial_{n(\mathbf{x}')}$ осуществляется по переменной $\mathbf{x}'$ в направлении $\mathbf{n}(\mathbf{x}')$ – нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящей через точку $\mathbf{x}'$ и направленной внутрь области Ω^+ . Операторы $\mathbf{U}(\tau)$ образуют C_0 -полугруппу правых сдвигов, порождаемую оператором $\mathbf{B}$: $(\mathbf{U}(\tau)\mathbf{f})(t) = \mathbf{f}(t - \tau)$ при $\tau \leq t$, $(\mathbf{U}(\tau)\mathbf{f})(t) = 0$ при $\tau > t$, $\mathbf{B}\mathbf{f} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{U}(\tau)\mathbf{f})$ ($\mathbf{f} \in D(\mathbf{B})$). Заметим, что $\|\mathbf{U}(\tau)\| = 1$ при $\tau < T$; $\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geq T$ ($\mathbf{O}$ – нулевой оператор). Имеют место равенства:

$$\mathbf{B}^n \mathbf{U}(\tau)\mathbf{f} = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{B}^n \mathbf{f} \quad (\mathbf{f} \in D(\mathbf{B}^n)), \quad n \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}. \quad (3)$$

Зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{\mathbf{x}}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, причем $s > 0$, если дуга откладывается по часовой стрелке, и $s < 0$, если против. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I'_S \equiv [-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I'_S}$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($i = 1, 2$, $l = \overline{0, k}$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S + 0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S - 0)$.

Введем в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\partial\Omega)$ ($k \in \mathbb{Z}_+ \equiv \{0, 1, \dots\}$) функций $\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\partial\Omega$ производные $\mathbf{f}^{(l)}$: $\mathbf{f}^{(l)}(s) \equiv d^l \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(s))/ds^l$ ($s \in \overline{I'_S}$, $l = \overline{0, k}$), с нормами $\|\mathbf{f}\|_{C^k(\partial\Omega)} = \max_{l=\overline{0, k}} \sup_{s \in I'_S} \|\mathbf{f}^{(l)}(s)\|_{L_2}$ ($C^0(\partial\Omega) \equiv C(\partial\Omega)$). Обозначим через H^n ($n \in \mathbb{N}$) гильбертовы пространства функций $\mathbf{f} \in L_2$: $\mathbf{B}^m \mathbf{f} \in L_2$ ($m = \overline{1, n}$), с нормами

$$\|\mathbf{f}\|_{H^n} \equiv \left[\sum_{m=0}^n \|\mathbf{B}^m \mathbf{f}\|_{L_2}^2 \right]^{1/2} \quad (H^0 \equiv L_2). \text{ Определим банаховы пространства } C_n^k(\partial\Omega)$$

($k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{N}$) функций $f \in C^k(\partial\Omega)$: $f(x) \in H^n$ ($x \in \partial\Omega$) и $B^m f \in C^k(\partial\Omega)$ ($m = \overline{1, n}$), с нормами $\|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{l=0, k} \sup_{s \in \overline{I_S'}} \|f^{(l)}(s)\|_{H^n}$ ($C_0^k(\partial\Omega) \equiv C^k(\partial\Omega)$). Зададим банаховы пространства $C_{n,m}^k(\partial\Omega) \equiv C_n^k(\partial\Omega) \cap C_{n+m}(\partial\Omega)$ ($C_n(\partial\Omega) \equiv C_n^0(\partial\Omega)$) с нормами $\|f\|_{C_{n,m}^k(\partial\Omega)} \equiv \|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} + \|f\|_{C_{n+m}(\partial\Omega)}$ ($k, n, m \in \mathbf{Z}_+$).

Условимся оператор A , отображающий банахово пространство B в банахово пространство C , обозначать как $A[B \rightarrow C]$, а если $C = B$, то $A[B]$. В силу следствия 3 [19] имеет место утверждение:

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $G^\pm[C_{n,m}^k(\partial\Omega)]$ всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k, n, m \in \mathbf{Z}_+$).

Пусть $\sigma \equiv s' - s$, где s, s' – значения параметра, соответствующие точкам $x, x' \in \partial\Omega$, и $\tilde{r} \equiv |\tilde{x}(s') - \tilde{x}(s)|$. На множестве $\Theta \equiv \{(s, s') : \sigma \in \overline{I_S'}, s \in \overline{I_S'}\}$ зададим функции $\psi_i(s, s')$ ($i = \overline{0, 4}$): при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i / \sigma^2$ ($i = \overline{0, 2}$) и $\psi_i \equiv \varphi_i / \sigma$ ($i = 3, 4$), где

$$\varphi_0(s, s') \equiv \tilde{r}^2 = [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)]^2,$$

$$\varphi_1(s, s') \equiv 2^{-1} \partial_{n(x')} \varphi_0 = \tilde{x}_2'(s') [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] - \tilde{x}_1'(s') [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

$$\varphi_2(s, s') \equiv 2^{-1} \partial_{n(x)} \varphi_0 = -\tilde{x}_2'(s) [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}_1'(s) [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

$$\varphi_3(s, s') \equiv 2^{-1} \partial_{s'} \varphi_0 = \tilde{x}_1'(s') [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}_2'(s') [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

$$\varphi_4(s, s') \equiv \partial_{s'} \varphi_2 = -\tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1'(s') + \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2'(s'),$$

а при $s' = s$ равенствами

$$\psi_0(s, s) = \psi_3(s, s) \equiv 1, \quad \psi_1(s, s) = \psi_2(s, s) \equiv 2^{-1} [\tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2''(s) - \tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1''(s)],$$

$$\psi_4(s, s) \equiv -\tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1''(s) + \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2''(s).$$

В силу леммы [19] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_{s'}^j \psi_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, 4}$) (см. теорему 1 [19], теорему 2 [5], теорему 5 [14]).

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ и $\tilde{\Lambda}_m(z)$ ($z \in [a, b]$, $m = \overline{0, 2}$) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0 (j \neq m)}^2 \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv \bar{z} + q_j h_z \quad (j = \overline{0, 2});$$

$$\tilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0 (j \neq m)}^2 \frac{z - \tilde{z}_j}{\tilde{z}_m - \tilde{z}_j}, \quad \tilde{z}_j \equiv \bar{z} + \tilde{q}_j h_z \quad (j = \overline{0, 2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b-a)$, $\bar{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$; $\tilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}/2$, $\tilde{q}_1 \equiv 0$, $\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}/2$ [20, с. 92]. Пусть $f(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на

промежутке $[a, b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B . Тогда для функций $\tilde{f}_1(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(z_m) \Lambda_m(z)$, $\tilde{f}_2(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(\tilde{z}_m) \tilde{\Lambda}_m(z)$, а также первых и вторых производных функции $\tilde{f}_1(z)$ при $z \in [a, b]$ имеют место оценки:

$$\|\tilde{f}_1(z) - f(z)\|_B \leq c_\omega \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(3)}(z)\|_B h_z^3, \quad \|\tilde{f}_2 - f\|_B \leq \tilde{c}_\omega \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(3)}(z)\|_B h_z^3, \\ c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9, \quad \tilde{c}_\omega \equiv 4^{-1}; \quad (4)$$

$$\|\tilde{f}_1(z)\|_B \leq c_\Lambda \max_{m=0,2} \|f(z_m)\|_B, \quad \|\tilde{f}_2(z)\|_B \leq \tilde{c}_\Lambda \max_{m=0,2} \|f(\tilde{z}_m)\|_B, \quad c_\Lambda \equiv 3, \\ \tilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}(7 + 2\sqrt{3}); \quad (5)$$

$$\|\tilde{f}_1^{(1)}(z)\|_B \leq c'_\Lambda \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(1)}(z)\|_B, \quad \|\tilde{f}_1^{(2)}(z)\|_B \leq c''_\Lambda \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(2)}(z)\|_B, \\ c'_\Lambda \equiv 3, \quad c''_\Lambda \equiv 2^{-1}. \quad (6)$$

Приближенное решение граничного интегрального уравнения

В настоящем разделе кратко опишем результаты работы [5], касающиеся операторов, позволяющих получить приближенное решение ГИУ (2) на сетке границы $\partial\Omega$.

На множестве Θ зададим функцию $\rho(s, s')$: $\rho = \tilde{r}$, если $\sigma \geq 0$; $\rho = -\tilde{r}$, если $\sigma < 0$.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $\delta_0(s, s') \equiv (\partial_{s'} \rho)^{-1} = \sqrt{\Psi_0}/\Psi_3$, $\delta_1(s, s') \equiv b(\tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s')) = -\Psi_1/\Psi_0$. Тогда на множестве Θ существуют непрерывные производные $\partial_s^j \delta_1$ ($j = \overline{0, n}$). Кроме того, для любого $M > 1$ существует число Σ : $0 < \Sigma \leq S$, такое, что при $(s, \sigma) \in \overline{I'_S} \times I'_\Sigma$ ($I'_\Sigma \equiv [-\Sigma, \Sigma]$) функция δ_0 ограничена: $1 \leq \delta_0 \leq M$, и существуют непрерывные производные $\partial_s^j \delta_0$ ($j = \overline{0, n}$).

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда функция $\rho_s(\sigma) \equiv \rho(s, s + \sigma)$ при любых фиксированных $s \in I'_S$ и $M > 1$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображает множество I'_Σ на множество $\rho_s(I'_\Sigma) \equiv [\rho_s(-\Sigma), \rho_s(\Sigma)]$. Функции $\tilde{\delta}_0(s, \rho) \equiv \delta(s, s + \sigma_s(\rho))$, $\tilde{\delta}_1(s, \rho) \equiv \tilde{\delta}_0 \delta_1(s, s + \sigma_s(\rho))$ ($\sigma_s(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_s(\sigma)$) имеют непрерывные на множестве $\overline{I'_S} \times \rho_s(I'_\Sigma)$ производные $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, 1}$).

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$, $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N}$; $\tau_n \equiv n h_\tau$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $h_\tau \equiv T/N$; $\tilde{\tau}_n \equiv n \tilde{h}_\tau$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $\tilde{h}_\tau \equiv h_\tau/\tilde{N}$.

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение пространства H_L векторных сеточных функций $\mathbf{f}$ со значениями $\mathbf{f}_l \in L_2$, заданными в узлах $\mathbf{x}_l \equiv \tilde{\mathbf{x}}(s_l)$ ($s_l \equiv l h_s$,

$l = \overline{-L-1, L}$, $h_s \equiv S/(L+1)$, с нормой: $\|f\|_{H_L} = \max_{-L-1 \leq l \leq L} \|f_l\|_{L_2}$. Условимся считать, когда это будет необходимо, что $x_{l+2L+2} = x_l$. Зададим проекционные операторы $P_L [C(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$: $(P_L f)_l = f(x_l)$ ($\|P_L\| \leq 1$). Зададим ограниченные операторы $\hat{G} \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \hat{G}_n U(\tau_n) [H_L]$:

$$\hat{G}_0 \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \hat{A}(\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau, \quad \hat{G}_{2n+1} \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \hat{A}(\tau) e(\tau) \Lambda_1(\tau) d\tau \quad (n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$\hat{G}_{2n} \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \hat{A}(\tau) e(\tau) \Lambda_2(\tau) d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \hat{A}(\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau \quad (n = \overline{1, N/2-1});$$

$$e(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 \exp[-p(\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+1} + \tilde{q}_m \tilde{h}_\tau)] \tilde{\Lambda}_m(\tau) \quad (\tau \in [\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}}, \tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+2}]),$$

$$\tilde{n} = \overline{0, \tilde{N}/2-1}, \quad n = \overline{0, N-1}.$$

Операторы $\hat{A}(\tau) [H_L]$ ($\tau > 0$) подобно $\hat{G}_n$ имеют вид скалярных квадратных матриц порядка $2L+2$:

$$(\hat{A}(\tau) f)_k = \sum_{l=-L-1}^L \hat{g}_{k,l}(\tau) f_l \quad (k = \overline{-L-1, L}, \quad f \in H_L),$$

$$\hat{g}_{k,2l}(\tau) \equiv \tilde{J}_{1,k,2l-1}(\tau) + \tilde{J}_{1,k,2l}(\tau),$$

$$\hat{g}_{k,2l-1}(\tau) \equiv \tilde{J}_{2,k,2l-3}(\tau) + \tilde{J}_{2,k,2l-2}(\tau) + \tilde{J}_{0,k,2l-1}(\tau) + \tilde{J}_{0,k,2l}(\tau) \quad (l = \overline{-L/2, L/2}),$$

$$\tilde{J}_{m,k,l}(\tau) \equiv \tilde{J}'_{m,k,l}(\tau) + \tilde{J}''_{m,k,l}(\tau) \quad (l = \overline{-L-1, L}, \quad m = \overline{0, 2}).$$

В свою очередь, функции $\tilde{J}'_{m,k,l}(\tau)$ и $\tilde{J}''_{m,k,l}(\tau)$ ($\tau > 0$) определяются равенствами:

$$\tilde{J}'_{m,k,l}(\tau) \equiv \int_{\rho_k(s'_l)}^{\rho_k(s'_{l+1})} a_1(\rho, \tau) \hat{\delta}_{1,m,k}(\rho) d\rho \quad (m = \overline{0, 2}, \quad k, l = \overline{-L-1, L}),$$

$$\hat{\delta}_{1,m,k}(\rho) \equiv \sum_{m'=0}^2 \tilde{\delta}_{1,m,k}(\bar{\rho}_{k,l} + \tilde{q}_{m'} h'_{k,l}) \tilde{\Lambda}_{m'}(\rho) \quad (\rho \in [\rho_k(s'_l), \rho_k(s'_{l+1})]),$$

$$h'_{k,l} \equiv 2^{-1}[\rho_k(s'_{l+1}) - \rho_k(s'_l)], \quad \bar{\rho}_{k,l} \equiv 2^{-1}[\rho_k(s'_l) + \rho_k(s'_{l+1})],$$

$$\tilde{\delta}_{1,m,k}(\rho) \equiv \tilde{\delta}_1(s_k, \rho) \tilde{\Lambda}_m(s_k + \sigma_k(\rho));$$

$$\tilde{J}''_{m,k,l}(\tau) \equiv h_l'' \sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j \tilde{g}_{m,k}(\bar{s}_l + h_l'' z_j, \tau), \quad \bar{s}_l \equiv 2^{-1}(s_l'' + s_{l+1}''), \quad h_l'' \equiv 2^{-1}(s_{l+1}'' - s_l'')$$

$$(m = \overline{0, 2}, \quad k, l = \overline{-L-1, L}).$$

Здесь $\rho_k(\sigma) \equiv \rho(s_k, s_k + \sigma)$; $\sigma_k(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_k(\sigma)$; $\tilde{\Lambda}_m(s)$ – кусочно-квадратичная функция, определенная на множестве $\overline{I'_S}$:

$\bar{\Lambda}_m(s) = \Lambda_m(s) \quad (s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L/2, L/2}); \quad z_j - \text{корни многочлена}$
 $P_\gamma(z) \equiv [\gamma!/(2\gamma)!] \left(d^\gamma / dz^\gamma \right) (z^2 - 1)^\gamma$ на промежутке $[-1; 1]$, $\hat{w}_j$ – весовые коэффици-
 енты ПКФГ с γ узлами $(\sum_{j=1}^\gamma \hat{w}_j = 2, \quad \hat{w}_j > 0)$ [20, с. 255]; $\bar{g}_{m,k}(\sigma, \tau) \equiv$
 $\equiv \tilde{g}(s_k, s_k + \sigma, \tau) \bar{\Lambda}_m(s_k + \sigma), \quad \tilde{g}(s, s', \tau) \equiv g(\tilde{x}(s), \tilde{x}(s'), \tau)$. Кроме того, здесь
 $s'_l \equiv \min\{s_l, \Sigma\}, \quad s''_l \equiv \max\{s_l, \Sigma\}$, если $s_l \geq 0$, и $s'_l \equiv \max\{s_l, -\Sigma\}, \quad s''_l \equiv \min\{s_l, -\Sigma\}$,
 если $s_l < 0$, при этом число $\Sigma > 0$ выбрано в соответствии с теоремой 2.

В пространстве H_L зададим операторы $\hat{G}^\pm [H_L]: \hat{G}^\pm \equiv \pm 2^{-1} + \hat{G}$. Определено
 $N_{\min} \in \mathbf{N}$, такое, что при $N/2 \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min} + 1, \dots\}$ операторы $\hat{G}^\pm$ ограни-
 ченно обратимы в алгебре полиномов, образованных N степенями оператора
 $U(h_\tau)$ (см. формулу (15) [5]).

Определение. Будем говорить, что ограниченные операторы $A_n [C \rightarrow D]$
 $(n \in \mathbf{N})$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим ограни-
 ченным операторам $B_n [C \rightarrow D]$, если $\|A_n f - B_n f\|_D \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно
 на в шаре $\|f\|_C \leq 1$.

Доказаны следующие утверждения (см. теорему 6 и следствие 3 [5]):

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $(\hat{G}^\pm)^{-1} [H_L] \quad (L/2 \in \mathbf{N},$
 $N/2 \in \mathbf{N}_{\min})$ совокупно ограничены.

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $(\hat{G}^\pm)^{-1} P_L$
 $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L] \quad (L/2 \in \mathbf{N}, \quad N/2 \in \mathbf{N}_{\min})$ сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной
 норме к соответствующим операторам $P_L(\hat{G}^\pm)^{-1} [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ с порядком
 аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Сеточные аппроксимации решений краевых задач

Контур $\partial\Omega \in C^2$ не имеет точек самопересечения, поэтому существует посто-
 янная $c_r \equiv \inf_{(s,s') \in \Theta} \sqrt{\psi_0} > 0$. Справедлива оценка: $\vartheta \leq c_K |\sigma| \leq c'_K c_r^{-1} \tilde{r}$, где ϑ – ост-
 рый угол между нормальными, проходящими через точки $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}(s')$ ($s, s' \in I'_S$);
 $c'_K \equiv \sup_{(s,s') \in \Theta} K(s, s'), \quad K(s, s') \equiv |\partial_s^2 \varphi_2|$; $c_K \equiv \sup_{s \in I'_S} K(s, s), \quad K(s, s)$ – кривизна кривой в
 точке $\tilde{x}(s)$. Отложим на нормали к кривой $\partial\Omega$ в каждой точке $\tilde{x}(s)$ ($s \in I'_S$) от-
 резок одной и той же длины $d \in I_D \equiv (0, D]$ ($D \equiv c_r / (3c'_K)$) внутрь области $\Omega^\pm$.
 Величина $3D$ может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова, поэтому со-
 гласно [21, с. 313] концы таких отрезков $\tilde{x}_d^\pm(s) \in \Omega^\pm$ образуют замкнутую линию
 $\partial\Omega_d^\pm \in C^1$, параллельную кривой $\partial\Omega$, т.е. соответствие между точками $\tilde{x}_d^\pm(s)$ и
 $\tilde{x}(s)$ взаимно однозначное.

Введем в рассмотрение местную систему декартовых координат (ξ_s, η_s) с началом в точке $\tilde{x}(s)$ и осью ординат, направленной по нормали внутрь области Ω^- . Координаты (ξ_s, η_s) точек $\tilde{x}_d^\pm(s)$ и $\tilde{x}(s')$ равны соответственно $(0, \mp d)$ и $(-2^{-1}\partial_s\varphi_0, 2^{-1}\partial_{n(\tilde{x}(s))}\varphi_0)$, поэтому $r^2 = |\tilde{x}(s') - \tilde{x}_d^\pm(s)|^2 = \varphi_0^\pm + d^2$, где $\varphi_0^\pm \equiv \varphi_0 \pm 2d\varphi_2$. Зададим на множестве $Y \equiv I_D \times \Theta$ функцию $\rho^\pm(d, s, s')$: $\rho^\pm = \sqrt{\varphi_0^\pm}$, если $\sigma \geq 0$; $\rho^\pm = -\sqrt{\varphi_0^\pm}$, если $\sigma < 0$, а также функции $\psi_0^\pm(d, s, s') \equiv \psi_0 \pm 2d\psi_2$ ($\psi_0^\pm > 0$ на множестве Y [14]) и $\psi_3^\pm \equiv \psi_3 \pm d\psi_4$. Пусть E_s – связный участок кривой $\partial\Omega$ между двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d^\pm(s)$, причем $\tilde{x}(s) \in E_s$. Соответствующие значения σ обозначим через Ξ_s , левую и правую границу отрезка Ξ_s – через Σ'_s и Σ''_s соответственно. Введем в рассмотрение множество $Y' \equiv \{(d, s, s') : \sigma \in \Xi_s, s \in \overline{I'_s}, d \in \overline{I_D}\}$.

Теорема 5 [14]. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда на множестве Y' существует положительная, ограниченная сверху функция $\delta_0^\pm \equiv (\partial_s \rho^\pm)^{-1} = \sqrt{\psi_0^\pm} / \psi_3^\pm$ и непрерывные производные $\partial_{s'}^j \delta_0^\pm$ ($j = \overline{0, n}$).

Следствие 2 [14]. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда функция $\rho_{d,s}^\pm(\sigma) \equiv \rho^\pm(d, s, s + \sigma)$ при любых фиксированных $s \in I'_s$, $d \in \overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображает множество Ξ_s на множество $\rho_{d,s}^\pm(\Xi_s)$. Функция $\tilde{\delta}_0^\pm(d, s, \rho) \equiv \delta_0^\pm(d, s, s + \sigma_{d,s}^\pm(\rho))$ ($\sigma_{d,s}^\pm(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_{d,s}^\pm(\sigma)$) имеет непрерывные на множестве $\tilde{Y}' \equiv \{(d, s, \rho) : \rho \in \rho_{d,s}^\pm(\Xi_s), s \in \overline{I'_s}, d \in \overline{I_D}\}$ производные $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_0^\pm$ ($j = \overline{0, n}$).

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда функции $\tilde{\delta}_1^\pm(d, s, \rho) \equiv \tilde{\delta}_0^\pm \delta_1^\pm(d, s, s + \sigma_{d,s}^\pm(\rho))$ и $\tilde{\delta}_2^\pm(d, s, \rho) \equiv \pm d \tilde{\delta}_0^\pm \varphi_5(s, s + \sigma_{d,s}^\pm(\rho))$, где $\delta_1^\pm(d, s, s') \equiv -\psi_1 / \psi_0^\pm$ и $\varphi_5(s, s') \equiv -\partial_{n(\tilde{x}(s'))}\varphi_2 = \tilde{x}'_1(s)\tilde{x}'_1(s') + \tilde{x}'_2(s)\tilde{x}'_2(s')$, имеют непрерывные на множестве $\tilde{Y}'$ производные $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i^\pm$ ($j = \overline{0, n}$, $i = 1, 2$).

Операторы $G(x)$ [$C(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($x \in \Omega^\pm$) представим в следующем виде: $G(x)f = \int_{I_\tau} A(x, \tau) e^{-p\tau} U(\tau) f d\tau$ ($f \in C(\partial\Omega)$). Здесь $A(x, \tau)$ [$C(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($\tau > 0$) – ограниченные операторы: $A(x, \tau)f \equiv \int_{\partial\Omega} g(x, x', \tau) f(x') ds'$. Замкнутую область, ограниченную кривыми $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_D^\pm$, обозначим через $\Omega_D^\pm$. На основании следствия 2 и равенств $r^2 b(\tilde{x}_d^\pm(s), \tilde{x}(s')) = -\varphi_1 \pm d\varphi_5$, вытекающих из равенств $r^2 = |\tilde{x}(s') - \tilde{x}_d^\pm(s)|^2 = \varphi_0 \pm 2d\varphi_2 + d^2$ ($d \in \overline{I_D}$, $s, s' \in I'_s$), представим операторы

$A(\mathbf{x}, \tau)$ ($\tau > 0$) в виде суммы:

$$A(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{i=1}^3 A_i(\mathbf{x}, \tau),$$

где

$$A_i(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} \equiv \int_{\rho_{d,s}^{\pm}(\Sigma_s')} a_i(d, \rho, \tau) \tilde{\delta}_i^{\pm}(d, s, \rho) \mathbf{f} \left(\tilde{\mathbf{x}} \left(s + \sigma_{d,s}^{\pm}(\rho) \right) \right) d\rho \quad (\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^{\pm}(s) \in \Omega_D^{\pm}),$$

$$A_i(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} \equiv 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega^{\pm} \setminus \Omega_D^{\pm}) \quad (i=1, 2);$$

$$A_3(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} \equiv \int_{\partial\Omega \setminus E_s} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) \mathbf{f}(\mathbf{x}') ds'$$

$$(\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^{\pm}(s) \in \Omega_D^{\pm}), A_3(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} \equiv \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) \mathbf{f}(\mathbf{x}') ds' \quad (\mathbf{x} \in \Omega^{\pm} \setminus \Omega_D^{\pm}),$$

$$a_1(d, \rho, \tau) \equiv -\rho \partial_{\rho} a_0(\sqrt{\rho^2 + d^2}, \tau), \quad a_2(d, \rho, \tau) \equiv \rho^{-2} a_1(d, \rho, \tau).$$

Заметим, что если $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega^{\pm} \setminus \Omega_D^{\pm} \times \partial\Omega$ или $\mathbf{x} \in \Omega_D^{\pm}$, $\mathbf{x}' \in \partial\Omega \setminus E_s$, то $r \geq D$ (см. доказательство формулы (9) [14]). Учитывая также следствие 3, получаем оценки:

$$\|A_i(\mathbf{x}, \tau)\| \leq \tilde{c}_{i,0} \tilde{c}_i y_i(d, \tau) \quad (i=1, 2), \quad \|A_3(\mathbf{x}, \tau)\| \leq 2S \tilde{c}_{3,0} \quad (\mathbf{x} \in \Omega^{\pm}, \tau > 0);$$

$$y_1 \equiv \tau^{-1/2}, \quad y_2 \equiv d \tau^{-3/2} \exp\left[-d^2 / (4a^2 \tau)\right], \quad (7)$$

$$\tilde{c}_{i,0} \equiv \max_{(d,s,\rho) \in \tilde{\gamma}} |\tilde{\delta}_i^{\pm}| \quad (i=1, 2); \quad \tilde{c}_1 \equiv a(2\sqrt{\pi})^{-1},$$

$$\tilde{c}_2 \equiv (4a\sqrt{\pi})^{-1}; \quad \tilde{c}_{3,0} \equiv \sup_{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(s')| \geq D, \tau > 0} |g(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}(s'), \tau)|.$$

В силу оценок (7) имеем равномерную на множестве $\Omega^{\pm}$ ограниченность операторов $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ [$C(\partial\Omega) \rightarrow L_2$]:

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{x})\| \leq c_G \equiv 2\sqrt{T} \tilde{c}_{1,0} \tilde{c}_1 + 2a\sqrt{\pi} \tilde{c}_{2,0} \tilde{c}_2 + 2ST \tilde{c}_{3,0} \quad (\mathbf{x} \in \Omega^{\pm}). \quad (8)$$

Пусть $N/2 \in \mathbb{N}$, $\tilde{N}/2 \in \mathbb{N}$. Зададим ограниченные операторы $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ [$C(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($\mathbf{x} \in \Omega^{\pm}$):

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \mathbf{f} \equiv \int_{I_T} A(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \tilde{\mathbf{U}}(\tau) \mathbf{f} d\tau \quad (\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)),$$

$$\tilde{\mathbf{U}}(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 \mathbf{U}(\tau_{2n+1} + q_m h_{\tau}) \Lambda_m(\tau) \quad (\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], \quad n = \overline{0, N/2-1}).$$

Так как $\|\mathbf{U}(\tau)\| \leq 1$, $|e^{-p\tau}| \leq 1$ ($\tau \geq 0$), то $\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\| \leq c_{\Lambda}$, $|e(\tau)| \leq \tilde{c}_{\Lambda}$ (см. оценки (5)).

В силу оценок (4) имеем оценки

$$\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau) \mathbf{f} - \mathbf{U}(\tau) \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_{\omega} \|\mathbf{B}^3 \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} h_{\tau}^3 \quad (\mathbf{f} \in C_3(\partial\Omega)),$$

$$|e(\tau) - e^{-p\tau}| \leq (p^3 / \tilde{N}^3) \tilde{c}_{\omega} h_{\tau}^3 \quad (t \in I_T). \quad (9)$$

На основании оценок (7) и (9) при любых $\mathbf{f} \in C_3(\partial\Omega)$, $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ получаем оценки

$$\|\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{f} - \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{f}\|_{L_2} \leq c_G \left[c_\omega \|\mathbf{B}^3 \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} + c_\Lambda \tilde{c}_\omega (p^3 / \tilde{N}^3) \|\mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} \right] h_\tau^3,$$

из которых вытекает следующее утверждение:

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ [$C_3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ [$C_3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3)$.

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение операторы $\tilde{\mathbf{P}}_L$ [$H_L \rightarrow C(\partial\Omega)$]:

$$(\tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{f})(s) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2l-1+m} \Lambda_m(s) \quad (\mathbf{f} \in H_L, s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], l = \overline{N/2, L/2}).$$

В силу оценки (5) операторы $\tilde{\mathbf{P}}_L$ ограничены в совокупности: $\|\tilde{\mathbf{P}}_L\| \leq c_\Lambda$. На основании оценки (4) имеем оценки

$$\|\tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L \mathbf{f} - \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_\omega \|\mathbf{f}^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (\mathbf{f} \in C^3(\partial\Omega)). \quad (10)$$

С помощью равенств $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{f} \equiv \int_{I_\tau} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \tilde{\mathbf{U}}(\tau) \tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{f} d\tau$ ($\mathbf{f} \in H_L$, $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$) зададим ограниченные операторы $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ [$H_L \rightarrow L_2$]. Используя оценки (7), (10), $\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\| \leq c_\Lambda$ и $|e(\tau)| \leq \tilde{c}_\Lambda$, получаем неравенства

$$\|\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{P}_L \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{f}\|_{L_2} \leq c_G c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda c_\omega \|\mathbf{f}^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (\mathbf{f} \in C^3(\partial\Omega), \mathbf{x} \in \Omega^\pm),$$

позволяющие сделать следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{P}_L$ [$C^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ [$C^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] равномерно по N и $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O(h_s^3)$.

Операторы $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{G}}_n(\mathbf{x}) U(\tau_n), \text{ где}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x}) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau, \quad \tilde{\mathbf{G}}_{2n+1}(\mathbf{x}) \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \Lambda_1(\tau) d\tau \quad (n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{2n}(\mathbf{x}) \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \Lambda_2(\tau) d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau \quad (n = \overline{1, N/2-1}).$$

Операторы $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L$ [$H_L \rightarrow L_2$] подобно $\tilde{\mathbf{G}}_n(\mathbf{x})$ имеют вид скалярных матриц-строк длиной $2L+2$:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} &= \sum_{l=-L-1}^L \hat{g}_l(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f}_l \quad (\mathbf{f} \in H_L, \tau > 0); \quad \hat{g}_{2l}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \tilde{g}_1(\mathbf{x}, s', \tau) ds', \\ \hat{g}_{2l-1}(\mathbf{x}, \tau) &\equiv \int_{s_{2l-3}}^{s_{2l-1}} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, s', \tau) ds' + \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \tilde{g}_0(\mathbf{x}, s', \tau) ds' \quad (l = \overline{-L/2, L/2}), \\ \tilde{g}_m(\mathbf{x}, s', \tau) &\equiv g(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}(s'), \tau) \tilde{\Lambda}_m(s') \quad (m = \overline{0, 2}).\end{aligned}$$

По аналогии с представлением $A(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{i=1}^3 A_i(\mathbf{x}, \tau)$ представим интегралы $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} \tilde{g}_m(\mathbf{x}, s', \tau) ds' \quad (l = \overline{-L-1, L}, \quad m = \overline{0, 2}, \quad \tau > 0)$ в виде сумм: $J_{m,l} = \sum_{i=1}^3 J_{i,m,l}$. Здесь, в случае $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^+(s) \in \Omega_D^\pm \quad (s \in \overline{I_S})$

$$\begin{aligned}J_{i,m,l}(d, s, \tau) &= \int_{\rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l+1})} a_i(d, \rho, \tau) \tilde{\delta}_{i,m}^\pm(d, s, \rho) d\rho \quad (i = 1, 2), \\ J_{3,m,l}(\mathbf{x}, \tau) &\equiv \int_{\beta_{s,l}}^{\beta_{s,l+1}} \tilde{g}_m(\mathbf{x}, s', \tau) ds'.\end{aligned}$$

При этом $\tilde{\delta}_{i,m}^\pm \equiv \tilde{\delta}_{i,m}^\pm(d, s, \rho) \tilde{\Lambda}_m(s + \sigma_{d,s}^\pm(\rho)); \quad \alpha_{s,l} \equiv \min\{s_l - s, \Sigma_s''\},$
 $\beta_{s,l} \equiv \max\{s_l, s + \Sigma_s'\},$ если $s_l \geq s$; $\alpha_{s,l} \equiv \max\{s_l - s, \Sigma_s'\}, \quad \beta_{s,l} \equiv \min\{s_l, s + \Sigma_s'\},$ если $s_l < s$. В случае $\mathbf{x} \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm \quad J_{1,m,l} = J_{2,m,l} \equiv 0, \quad J_{3,m,l} \equiv J_{m,l} \quad (\beta_{s,l} = s_l).$

Введем в рассмотрение интегралы $\tilde{J}_{i,m,l}$, аппроксимирующие интегралы $J_{i,m,l}$:

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{i,m,l}(d, s, \tau) &\equiv \int_{\rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l+1})} a_i(d, \rho, \tau) \hat{\delta}_{i,m}^\pm(d, s, \rho) d\rho \quad (i = 1, 2), \\ \hat{\delta}_{i,m}^\pm &\equiv \sum_{m'=0}^2 \tilde{\delta}_{i,m}^\pm(d, s, \bar{\rho}_{d,s,l}^\pm + \tilde{q}_m h'_{d,s,l}) \tilde{\Lambda}_{m'}(\rho) \quad (\rho \in [\rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l}), \rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l+1})]), \\ h'_{d,s,l} &\equiv 2^{-1} [\rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l+1}) - \rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l})], \quad \bar{\rho}_{d,s,l}^\pm \equiv 2^{-1} [\rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l}) + \rho_{d,s}^+(\alpha_{s,l+1})]; \\ \tilde{J}_{3,m,l}(\mathbf{x}, \tau) &\equiv h_{s,l}'' \sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j \tilde{g}_m(\mathbf{x}, \bar{\beta}_{s,l} + h_{s,l}'' z_j, \tau), \quad \bar{\beta}_{s,l} \equiv 2^{-1} (\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}), \\ h_{s,l}'' &\equiv 2^{-1} (\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}).\end{aligned}$$

Операторы $\tilde{A}(\mathbf{x}, \tau)$, в которых интегралы $J_{m,l}$ заменены выражениями $J_{i,m,l}$ и $\tilde{J}_{i,m,l}$, обозначим через $\tilde{A}_i(\mathbf{x}, \tau)$ и $\hat{A}_i(\mathbf{x}, \tau)$ соответственно, а операторы $\tilde{G}(\mathbf{x})$, в которых интегралы $J_{m,l}$ заменены выражениями $\tilde{J}_{i,m,l}$, обозначим через $\hat{G}_i(\mathbf{x}) \quad (i = \overline{1, 3})$. Пусть $\hat{G}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^3 \hat{G}_i(\mathbf{x})$. В силу оценок (5) справедливы соотношения

$$\|\hat{A}_i(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{f}\|_{L_2} = \left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^2 \sum_{l'=-1}^0 \tilde{J}_{i,m,2l+l'} \mathbf{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \leq \tilde{c}_\Lambda c_\Lambda \tilde{c}_{i,0} \tilde{c}_i y_i(d, \tau) \|\mathbf{f}\|_{H_L}$$

$$(\mathbf{f} \in H_L, d \in I_D, s \in \overline{I'_S}, \tau > 0, i = 1, 2);$$

$$\|\hat{A}_3(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{f}\|_{L_2} = \left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^2 \sum_{l'=-1}^0 \tilde{J}_{3,m,2l+l'}(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \leq 2S c_\Lambda \tilde{c}_{3,0} \|\mathbf{f}\|_{H_L}$$

$$(\mathbf{f} \in H_L, \mathbf{x} \in \Omega^\pm, \tau > 0).$$

Следствием этих соотношений являются неравенства

$$\|\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{f}\|_{L_2} \leq 2c_\Lambda^2 \tilde{c}_\Lambda (\sqrt{T} \tilde{c}_\Lambda \tilde{c}_{1,0} \tilde{c}_1 + a\sqrt{\pi} \tilde{c}_\Lambda \tilde{c}_{2,0} \tilde{c}_2 + TS \tilde{c}_{3,0}) \|\mathbf{f}\|_{H_L} \quad (\mathbf{f} \in H_L),$$

на основании которых получаем утверждение:

Теорема 8. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) [H_L \rightarrow L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) ограничены в совокупности на множестве $\Omega^\pm$.

В силу следствия 3 и неравенства $r \geq D$, имеющего место, если $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm \times \partial\Omega$ или $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s) \in \Omega_D^\pm$, $\mathbf{x}' \in \partial\Omega \setminus E(s)$, при указанной гладкости кривой $\partial\Omega$ могут быть определены константы:

$$\tilde{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Gamma}'} |\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i^\pm| \quad (i = \overline{0,2}, \partial\Omega \in C^{n+2}),$$

$$\tilde{c}_{3,j} \equiv \sup_{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(s')| \geq D, \tau > 0} |\partial_{s'}^j g(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}(s'), \tau)| \quad (\partial\Omega \in C^{n+1}) \quad (j = \overline{0,n}, n \in \mathbf{Z}_+).$$

Используя неравенства (4)–(6) и $h'_{d,s,l} \leq 2^{-1} c_h h_s$ ($c_h \equiv \sup_{(d,s,s') \in \tilde{\Gamma}'} |\partial_{s'} \rho^\pm|$), при условиях

$\partial\Omega \in C^5$, $\mathbf{f} \in C^2(\partial\Omega)$ для любых $d \in I_D$, $s \in \overline{I'_S}$, $\tau > 0$ получаем оценки:

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_i(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{A}_i(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{f}}\|_{L_2} \leq \\ & \leq 8^{-1} h_s^3 c_h^3 \tilde{c}_\omega \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Gamma}'} \left\| \partial_\rho^3 \left[\tilde{\delta}_i^\pm \tilde{\mathbf{f}}(s + \sigma_{d,s}^\pm(\rho)) \right] \right\|_{L_2} \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \int_{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,2l-1})}^{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,2l+1})} a_i(d, \rho, \tau) d\rho \leq \\ & \leq \hat{c}_i h_s^3 y_i(d, \tau) \|\mathbf{f}\|_{C^2(\partial\Omega)}, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_i & \equiv 8^{-1} \tilde{c}_i c_h^3 \tilde{c}_\omega \left[\tilde{c}_{i,3} c_\Lambda + (3\tilde{c}_{i,2} \tilde{c}_{0,0} + 3\tilde{c}_{i,1} \tilde{c}_{0,1} + \tilde{c}_{i,0} \tilde{c}_{0,2}) c'_\Lambda + 3(\tilde{c}_{i,1} \tilde{c}_{0,0}^2 + \tilde{c}_{i,0} \tilde{c}_{0,1} \tilde{c}_{0,0}) c''_\Lambda \right] \\ & \quad (i = 1, 2, \tilde{\mathbf{f}} \equiv \mathbf{P}_L \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}} \equiv \tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L \mathbf{f}). \end{aligned}$$

Если $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\mathbf{f} \in C^2(\partial\Omega)$, то для любых $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$, $\tau > 0$ имеем оценку:

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_3(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{A}_3(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{f}}\|_{L_2} \leq 2S \hat{c}_3 h_s^{2\gamma+1} \|\mathbf{f}\|_{C^2(\partial\Omega)}, \\ & \hat{c}_3 \equiv \frac{(\gamma!)^4 [\tilde{c}_{3,2\gamma} c_\Lambda + 2\gamma \tilde{c}_{3,2\gamma-1} c'_\Lambda + \gamma(2\gamma-1) \tilde{c}_{3,2\gamma-2} c''_\Lambda]}{[(2\gamma)!]^3 (2\gamma+1)} \end{aligned} \quad (11b)$$

[20, с. 259]. На основании оценок (5), (11) получаем при условиях $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$ неравенства

$$\begin{aligned} \|\hat{G}(x)P_L f - \check{G}(x)P_L f\|_{L_2} &\leq 2c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left[(\hat{c}_1 \sqrt{T} + \hat{c}_2 a \sqrt{\pi}) h_s^3 + \hat{c}_3 ST h_s^{2\gamma+1} \right] \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} \\ (x \in \Omega^\pm, f \in C^2(\partial\Omega)), \end{aligned}$$

из которых вытекает утверждение:

Теорема 9. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}(x)P_L$ $[C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\check{G}(x)P_L$ $[C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по N и $x \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O(h_s^3)$.

При вычислении операторов $\hat{G}_i(x)$ ($i = \overline{1,2}$) интегрирование по τ осуществляется точно и интегралы выражаются через показательные функции $\exp(-z_n)$ и интегральные показательные функции $\text{Ei}(-z_n)$ ($z_n \equiv (\rho^2 + d^2)/(4a^2 \tilde{\tau}_n)$, $n = \overline{1, N\tilde{N}}$). Затем вычисляются интегралы по ρ , но не все они вычисляются аналитически. В таких случаях для точного интегрирования функции $\exp(-z_n)$ и $\text{Ei}(-z_n)$ заменяются многочленами, образованными первыми членами разложения этих функций в ряды Тейлора, а именно: $K+1$ членом со степенями $(z_n)^k$ ($k = \overline{0, K}$), а также логарифмическим членом $\ln(z_n)$ в случае $\text{Ei}(-z_n)$.

На основании теорем 6, 7, 9 делаем следующий вывод:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}(x)P_L$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $G(x)$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по $x \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Зададим операторы $\hat{R}^\pm(x) \equiv \hat{G}(x)(\hat{G}^\pm)^{-1}$, вычисляемые в алгебре полиномов, образованных N степенями оператора $U(h_\tau)$. С учетом теорем 1, 4, 8 и следствия 4 получаем следующее утверждение:

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{R}^\pm(x)P_L$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $R^\pm(x) \equiv G(x)(G^\pm)^{-1}$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по $x \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение банахово пространство $C(I_T)$ классов функций $f \in L_2$, эквивалентных непрерывным на отрезке I_T функциям $f(t)$, с нормой $\|f\|_{C_T} \equiv \sup_{t \in I_T} |f(t)|$. Имеет место вложение $H^1 \subset C(I_T)$.

Пусть $N/2 \in \mathbb{N}$. Зададим операторы $\hat{P}_N [H^1 \rightarrow C(I_T)]$:

$$(\hat{P}_N f)(t) \equiv \sum_{m=0}^2 f(\tau_{2n+m}) \Lambda_m(t) \quad (f \in H^1, t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], n = \overline{0, N/2-1}).$$

В работе [14] доказаны оценки:

$$\|\hat{P}_N\| \leq c_\Lambda \sqrt{T}, \quad \|\hat{P}_N f - f\|_{C(I_T)} \leq c_\omega \sqrt{T} \|f\|_{H^4} h_\tau^3 \quad (f \in H^4). \quad (12)$$

На основании теорем 1, 3, 8, следствия 5, оценок (8), (12), $\|P_L\| \leq 1$ и равенств (3) с учетом замкнутости оператора B приходим к окончательным утверждениям:

Следствие 6. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{P}_N \hat{R}^\pm(x) P_L [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ ($L/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $R^\pm(x) [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ равномерно по $x \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Следствие 7. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда, если $w_1^\pm \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, то функции $\tilde{u}_1^\pm(x, t) : \tilde{u}_1^\pm(x) \equiv \hat{P}_N \hat{R}^\pm(x) P_L w_1^\pm$ ($L/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ к соответствующим решениям краевых задач (1) $u_1^\pm(x, t)$ равномерно по $(x, t) \in \Omega^\pm \times I_T$ (при почти всех t) с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$. Кроме того, $|\tilde{u}_1^{\pm[\delta]}(x, t) - u_1^\pm(x, t)| \rightarrow 0$ равномерно по $(x, t) \in \Omega^\pm \times I_T$ (при почти всех t) при $L, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ ($\tilde{u}_1^{\pm[\delta]}(x) \equiv \hat{P}_N \hat{R}^\pm(x) P_L w_1^{\pm[\delta]}$, $w_1^{\pm[\delta]} \in C_1(\partial\Omega)$: $\|w_1^{\pm[\delta]} - w_1^\pm\|_{C_1(\partial\Omega)} \leq \delta$).

Приближенные решения $\tilde{u}_1^\pm(x, t)$ вычисляются в произвольной точке $(x, t) \in \Omega^\pm \times I_T$ с помощью значений $\tilde{w}_1^\pm(\tilde{x}(s_l), \tau_n)$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $n = \overline{0, N-1}$) по аналогии с решениями $\tilde{u}_2^\pm(x, t)$ [14].

Квадратурные аппроксимации как причина отсутствия равномерной сходимости в области

Вычислительные эксперименты показали, что скорость сходимости приближенных решений существенно снижается вблизи границы $\partial\Omega$, если для аппроксимации всех интегралов $J_{m,l}(x, \tau)$ использовать ПКФГ или КФНК. Покажем отсутствие равномерной по $d \in I_D$ сходимости аппроксимаций ПДС в случае, когда аппроксимируется (с помощью квадратурной формулы) только интеграл на ближайшем к точке x ГЭ при $\tau = 0$, а интегралы на остальных ГЭ вычисляются точно. Также с целью упрощения будем полагать $p = 0$ и вместо кусочно-квадратичной рассматривать кусочно-постоянную интерполяцию:

$$\ddot{G}(x) f \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=-L-1}^L z_{n,l}(x) U(\tau_n) f(s_l) \quad (f \in C(\partial\Omega), L, N \in \mathbb{N}),$$

$$z_{n,l}(\mathbf{x}) \equiv \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} q_n(\mathbf{x}, s') ds', \quad q_n(\mathbf{x}, s') \equiv \int_{\tau_{n-1/2}}^{\tau_{n+1/2}} g(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}(s'), \tau) d\tau,$$

$$\tau_{n\pm 1/2} \equiv (n \pm 2^{-1})h_\tau \quad (g \equiv 0 \text{ при } \tau \leq 0), \quad s_{l\pm 1/2} \equiv (l \pm 2^{-1})h_s.$$

Обозначим через $\widehat{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ операторы $\ddot{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ ($s \in I'_S$, $d \in I_D$), в которых интеграл $z_{0,l'}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ ($s \in (s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}]$) заменен квадратурной аппроксимацией $\widehat{z}_{0,l'}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ достаточно высокого порядка. Можно убедиться, что для любого $d_0 \in I_D$ операторы $\widehat{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ [$C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ [$C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] с порядком аппроксимации $O(h_\tau^2 + h_s^2)$ равномерно по $(d, s) \in [d_0, D] \times I'_S$ (см. теоремы 6, 7 [22]).

Лемма. Пусть остаточный член квадратурной формулы, используемой для аппроксимации интегралов $z_{0,l'}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ ($s \in (s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}]$, $d \in I_D$), имеет вид $R_m[f] = c_m(b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)$ ($\xi \in [a, b]$), где c_m зависит только от $m \in \mathbf{Z}_+$. Пусть $\partial\Omega \in C^{2m+2}$. Тогда существуют постоянные $K_m^\pm \in \mathbf{N}$, $d_m^\pm \in I_D$ и $c_m^\pm > 0$, такие, что для любого фиксированного $s \in I'_S$ последовательность чисел $R_{m,M}^\pm[q_0] \equiv z_{0,l'}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s)) - \widehat{z}_{0,l'}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ ($M = M', M' + 1, \dots$), где $N = (M + 1)^2$, $L + 1 = K_m^\pm(M + 1)$, $d = S/(M + 1) \leq d_m^\pm$ при $M \geq M'$, ограничена по модулю снизу числом $c_m^\pm$.

Доказательство. Пусть $\sigma_{-1/2} \equiv s_{l'-1/2} - s$, $\sigma_{1/2} \equiv s_{l'+1/2} - s$. Интеграл $z_{0,l'}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s))$ и подынтегральная функция $q_0(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s), s')$ ($d \in I_D$, $s, s' \in (s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}]$) могут быть записаны в виде

$$z_{0,l'}(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s)) = \int_{\sigma_{-1/2}}^{\sigma_{1/2}} q_0(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s), s + \sigma) d\sigma,$$

$$q_0(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s), s') = (2\pi)^{-1} \exp\left[-(\sigma^2 \psi_0^\pm + d^2)/(2a^2 h_\tau)\right] \left(-\sigma^2 \psi_1 \pm d \varphi_5\right) / (\sigma^2 \psi_0^\pm + d^2).$$

Пусть $\alpha \equiv \sigma/h_s$, $N = (M + 1)^2$, $L + 1 = (M + 1)K$, $d = S/(M + 1)$ ($K, M \in \mathbf{N}$). Будем рассматривать остаточные члены $R_{m,M}^\pm[q_0]$ ($M = 1, 2, \dots$) как значения некоторой функции $r_m^\pm(K, d, \alpha, s)$, определенной при $K \in \mathbf{N}$, $d \in I_D$, $\alpha \in I_\alpha$, $s \in I'_S$ ($I_\alpha \equiv (\alpha_{-1/2}, \alpha_{1/2}]$, $\alpha_{-1/2} \equiv h_s^{-1} \sigma_{-1/2}$, $\alpha_{1/2} \equiv h_s^{-1} \sigma_{1/2}$). Так как $\psi_0^\pm > 0$ на множестве Υ , $|\alpha_{\pm 1/2}| \leq 1$ и существуют непрерывные производные $\partial_s^j \psi_0^\pm$ и $\partial_s^j \psi_1$, $\partial_s^j \varphi_5$ ($j = 0, 2m$) на множествах Υ и Θ соответственно, то допустимо представление: $r_m^\pm = f_m^\pm + o_m^\pm$, где функция $f_m^\pm(K, d, \alpha, s)$ имеет вид

$$f_m^\pm \equiv \widehat{\varphi}_5 \exp \left[-c_\tau^{-1} \left(\alpha^2 K^{-2} \widehat{\psi}_0^\pm + 1 \right) \right] K^{-2m-1} \times \\ \times \sum_{k=0}^m (\alpha/K)^{2m-2k} (-2\widehat{\psi}_0^\pm)^{2m-k} \sum_{n=0}^{2m-k} c_{m,k,n} / \left(\alpha^2 K^{-2} \widehat{\psi}_0^\pm + 1 \right)^{2m-k-n+1}. \quad (13)$$

Здесь $c_{m,k,n}^\pm \equiv \pm (2\pi)^{-1} c_m c_\tau^{-n} C_{2m}^k C_{2m-k}^n (2m-k-n)!$, $C_m^n = m! / ((m-n)!n!)$, $c_\tau \equiv 2Ta^2/S^2$, $\widehat{\psi}_0^\pm(K, d, \alpha, s) \equiv \psi_0^\pm(d, s, s + \alpha d/K)$, $\widehat{\varphi}_5(K, d, \alpha, s) \equiv \varphi_5(s, s + \alpha d/K)$. Функция $o_m^\pm(K, d, \alpha, s) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow +0$ и фиксированном $K \in \mathbb{N}$ равномерно по $\alpha \in I_\alpha$, $s \in \overline{I'_S}$. Слагаемые при $k < m$ во внешней сумме выражения (13) стремятся к нулю при $K \rightarrow \infty$ равномерно по $d \in I_D$, $\alpha \in I_\alpha$, $s \in I'_S$, а слагаемое при $k = m$ ограничено по модулю снизу положительной константой. Поэтому существуют постоянные $K_m^\pm \in \mathbb{N}$ и $d_m^\pm \in I_D$, такие, что при $K = K_m^\pm$ и $d \in (0, d_m^\pm]$, $\alpha \in I_\alpha$, $s \in \overline{I'_S}$ функция $|r_m^\pm|$ ограничена снизу некоторой константой $c_m^\pm > 0$. Лемма доказана.

Следствие 8. Пусть $R_m(f) = c_m(b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)$ ($\xi \in [a, b]$) и $\partial\Omega \in C^{2m+2}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). Тогда при $L, N \rightarrow \infty$ отсутствует равномерная по $d \in (0, d_0]$ сходимость в сильной операторной топологии операторов $\widehat{G}(\tilde{x}_d(s))$ [$C_{0,J}^I(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] к соответствующим операторам $G(\tilde{x}_d(s))$ [$C_{0,J}^I(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] для любых $I, J \in \mathbb{N}$, $s \in I'_S$, $d_0 \in I_D$.

Доказательство. Согласно лемме, существуют постоянные $K_m^\pm \in \mathbb{N}$, $d_m^\pm \in I_D$, $c_m^\pm > 0$, такие, что при $s \in (s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}]$, $N = (M+1)^2$, $L+1 = K_m^\pm(M+1)$, $d = S/(M+1) \leq d_m^\pm$ имеют место оценки $|R_{m,M}^\pm[q_0]| \geq c_m^\pm$ ($M = M', M'+1, \dots$; $S/(M'+1) \leq d_m^\pm$). Обозначим через $\ddot{G}_L(x)$, $\widehat{G}_L(x)$ ($M = M', M'+1, \dots$) соответствующие последовательности операторов $\ddot{G}(x)$, $\widehat{G}(x)$ [$C_{0,J}^I(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($I, J \in \mathbb{N}$). Для функции $\tilde{f} \in C_{0,J}^I(\partial\Omega)$: $\tilde{f}(\tilde{x}(s), t) \equiv \tilde{f}_1(s)\tilde{f}_2(t)$, где $\tilde{f}_1(s) \equiv 1$, $\tilde{f}_2 \in H^J$ и $\|\tilde{f}_2\|_{L_2} = 1$, имеем оценки: $\|\widehat{G}_L(x)\tilde{f} - \ddot{G}_L(x)\tilde{f}\|_{L_2} = |R_{m,M}^\pm[q_0]| \geq c_m^\pm$. В силу (7), $\|U(\tau)\| \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\ddot{G}_L(x)\tilde{f} - G(x)\tilde{f}\|_{L_2} \leq c_G \left(\|B\tilde{f}\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau + \|\tilde{f}^{(1)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s \right) \leq c_G \|\tilde{f}_2\|_{H^1} T \left(K_m^\pm/S \right)^2 h_s^2.$$

При достаточно большом натуральном $M'' \geq M'$ получаем неравенство

$$c_G \|\tilde{f}_2\|_{H^1} T \left(K_m^\pm/S \right)^2 h_s^2 \leq 2^{-1} c_m^\pm.$$

В результате имеем оценки:

$$\|\widehat{G}_L(x)\tilde{f} - G(x)\tilde{f}\|_{L_2} \geq 2^{-1} c_m^\pm \quad (M = M'', M''+1, \dots).$$

Утверждение доказано.

Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение внутренней задачи Дирихле (1) в случае, когда граница $\partial\Omega$ представляет собой окружность радиуса $R=1$, граничная функция $w_1^+(R'=1, \varphi, t) = t^2(1-t)^2 \cos \varphi$ (φ , R' – полярные угол и радиус), коэффициент температуропроводности $a=1$. Точное решение $\bar{u}_1^+$ в этом случае имеет вид

$$\bar{u}_1^+(R', \varphi, t) = 2 \cos \varphi \left\{ 2^{-1} R' f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k R')}{J_2(\mu_k)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{p f(t)}{\mu_k (\mu_k^2 + p)} + \mu_k \sum_{l=1}^4 \frac{(-1)^{l+1} \{ f^{(l)}(t) - f^{(l)}(0) \exp[-(\mu_k^2 + p)t] \}}{(\mu_k^2 + p)^{l+1}} \right] \right\},$$

где $f(t) \equiv t^2(1-t)^2$, $J_1(z)$ и $J_2(z)$ – функции Бесселя, μ_k – положительные корни уравнения $J_1(z) = 0$.

Для данной геометрии имеем следующие значения: $D = 2/(3\pi)$, $\Sigma_s'' = -\Sigma_s' = \arcsin(2/(3\pi))$ ($s \in I_s'$). Приближенные решения $\tilde{u}_1^+$ вычисляем согласно следствию 7, используя ПКФГ с $\gamma = 12$ узлами. Кроме того, находим приближенные решения $\check{u}_1^+$ и $\hat{u}_1^+$, отличающиеся от решений $\tilde{u}_1^+$ только тем, что все интегралы $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau)$ ($m = \overline{0, 2}$, $l = \overline{-L-1, L}$, $\tau > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega^+$) вычисляются с помощью квадратурных формул: для $\check{u}_1^+$ с помощью ПКФГ с $\gamma = 12$ узлами, для $\hat{u}_1^+$ с помощью КФНК открытого типа с $\gamma = 9$ узлами. Решения получаем на окружностях $\partial\Omega'$ с радиусами $R' < 1$, концентрических с окружностью $\partial\Omega$, в точках $(\mathbf{x}'_l, \tau_{n+1/2})$, $(\mathbf{x}'_l, \tau_{n+1/2})$ и $(\mathbf{x}'_{l+1/2}, \tau_{n+1})$ ($l = \overline{-L-1, L}$, $\tau_n \equiv nh_\tau$, $n = \overline{0, N-1}$), где $\mathbf{x}'_l$ и $\mathbf{x}'_{l+1/2}$ – точки, получающиеся из граничных точек $\tilde{\mathbf{x}}(s_l)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(s_{l+1/2})$ соответственно в результате сжимающего отображения окружности $\partial\Omega$ на окружность $\partial\Omega'$.

Пусть $T=1$, $p=0$, $\tilde{N}=1$, $\Sigma = \arcsin(2/(3\pi))$ ($M = \tilde{c}_{0,0}$), $K=10$. Вычислим δu – относительные среднеквадратичные отклонения приближенного решения от точного: $\delta \tilde{u} \equiv \|\tilde{u}_1^+ - \bar{u}_1^+\| / \|\bar{u}_1^+\|$, $\delta \check{u} \equiv \|\check{u}_1^+ - \bar{u}_1^+\| / \|\bar{u}_1^+\|$, $\delta \hat{u} \equiv \|\hat{u}_1^+ - \bar{u}_1^+\| / \|\bar{u}_1^+\|$ ($\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма). В следующей таблице в каждой основной ячейке представлены пять значений δu : $\delta \tilde{u}$ в точках $(\mathbf{x}'_l, \tau_{n+1})$, $\delta \check{u}$ в точках $(\mathbf{x}'_l, \tau_{n+1/2})$, $\delta \tilde{u}$ в точках $(\mathbf{x}'_{l+1/2}, \tau_{n+1})$, $\delta \check{u}$ в точках $(\mathbf{x}'_l, \tau_{n+1})$ и $\delta \hat{u}$ в точках $(\mathbf{x}'_l, \tau_{n+1})$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Практически та же точность приближенных решений наблюдается при $p = \pi^2$, $\tilde{N}=1$ и $p = 4\pi^2$, $\tilde{N}=4$. Эксперименты показали, что применение исключительно квадратурных формул для вычисления интегралов $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau)$ влечет значительное уменьшение скорости сходимости численных решений при приближении точки $\mathbf{x}$ к границе $\partial\Omega$. При приближении точки $\mathbf{x}$ к узлам квадратурных аппроксимаций интегралов $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau)$, например точки $\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s_{l+1/2})$ к точке $\tilde{\mathbf{x}}(s_{l+1/2})$ в случае использования ПКФГ или КФНК с нечетным числом узлов, или точки $\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s_l)$ к

Относительные среднеквадратичные отклонения δu

R'	$1 - 2/(3\pi)$	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$h_\tau = 1/8$ $h_s = \pi/3$	$2.09 \cdot 10^{-2}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$5.29 \cdot 10^{-4}$	$6.00 \cdot 10^{-5}$	$9.96 \cdot 10^{-6}$	$1.70 \cdot 10^{-5}$
	$2.72 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$2.11 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$
	$4.16 \cdot 10^{-2}$	$4.96 \cdot 10^{-2}$	$5.67 \cdot 10^{-2}$	$5.75 \cdot 10^{-2}$	$5.75 \cdot 10^{-2}$	$5.75 \cdot 10^{-2}$	$5.75 \cdot 10^{-2}$
	$2.09 \cdot 10^{-2}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$1.86 \cdot 10^{-2}$	$6.78 \cdot 10^{-1}$	$8.18 \cdot 10^{-1}$	$8.32 \cdot 10^{-1}$	$8.36 \cdot 10^{-1}$
	$2.23 \cdot 10^{-2}$	$5.66 \cdot 10^{-2}$	$6.65 \cdot 10^{-1}$	$8.17 \cdot 10^{-1}$	$8.32 \cdot 10^{-1}$	$8.34 \cdot 10^{-1}$	$8.34 \cdot 10^{-1}$
$h_\tau = 1/16$ $h_s = \pi/7$	$1.42 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-3}$	$2.88 \cdot 10^{-4}$	$4.17 \cdot 10^{-5}$	$8.02 \cdot 10^{-6}$	$9.27 \cdot 10^{-6}$	$9.84 \cdot 10^{-6}$
	$2.40 \cdot 10^{-3}$	$2.56 \cdot 10^{-3}$	$2.62 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$
	$1.83 \cdot 10^{-3}$	$2.85 \cdot 10^{-3}$	$4.41 \cdot 10^{-3}$	$4.62 \cdot 10^{-3}$	$4.65 \cdot 10^{-3}$	$4.65 \cdot 10^{-3}$	$4.65 \cdot 10^{-3}$
	$1.42 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.37 \cdot 10^{-2}$	$4.81 \cdot 10^{-1}$	$7.94 \cdot 10^{-1}$	$8.27 \cdot 10^{-1}$	$8.31 \cdot 10^{-1}$
	$1.39 \cdot 10^{-3}$	$3.62 \cdot 10^{-3}$	$4.40 \cdot 10^{-1}$	$7.90 \cdot 10^{-1}$	$8.30 \cdot 10^{-1}$	$8.31 \cdot 10^{-1}$	$8.31 \cdot 10^{-1}$
$h_\tau = 1/32$ $h_s = \pi/15$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-4}$	$4.22 \cdot 10^{-5}$	$7.55 \cdot 10^{-6}$	$1.03 \cdot 10^{-5}$	$1.10 \cdot 10^{-5}$	$1.10 \cdot 10^{-5}$
	$3.50 \cdot 10^{-4}$	$3.35 \cdot 10^{-4}$	$3.25 \cdot 10^{-4}$	$3.30 \cdot 10^{-4}$	$3.31 \cdot 10^{-4}$	$3.31 \cdot 10^{-4}$	$3.31 \cdot 10^{-4}$
	$1.47 \cdot 10^{-4}$	$2.34 \cdot 10^{-4}$	$4.19 \cdot 10^{-4}$	$4.69 \cdot 10^{-4}$	$4.74 \cdot 10^{-4}$	$4.75 \cdot 10^{-4}$	$4.75 \cdot 10^{-4}$
	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-3}$	$1.89 \cdot 10^{-1}$	$7.52 \cdot 10^{-1}$	$8.23 \cdot 10^{-1}$	$8.30 \cdot 10^{-1}$
	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$2.04 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-1}$	$7.43 \cdot 10^{-1}$	$8.22 \cdot 10^{-1}$	$8.30 \cdot 10^{-1}$	$8.31 \cdot 10^{-1}$
$h_\tau = 1/64$ $h_s = \pi/31$	$8.80 \cdot 10^{-6}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$	$9.96 \cdot 10^{-6}$	$3.92 \cdot 10^{-6}$	$4.15 \cdot 10^{-6}$	$4.21 \cdot 10^{-6}$	$4.29 \cdot 10^{-6}$
	$5.31 \cdot 10^{-5}$	$5.32 \cdot 10^{-5}$	$4.10 \cdot 10^{-5}$	$4.15 \cdot 10^{-5}$	$4.16 \cdot 10^{-5}$	$4.16 \cdot 10^{-5}$	$4.17 \cdot 10^{-5}$
	$8.80 \cdot 10^{-6}$	$3.32 \cdot 10^{-5}$	$4.16 \cdot 10^{-5}$	$5.24 \cdot 10^{-5}$	$5.37 \cdot 10^{-5}$	$5.39 \cdot 10^{-5}$	$5.39 \cdot 10^{-5}$
	$8.78 \cdot 10^{-6}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$	$3.88 \cdot 10^{-5}$	$2.44 \cdot 10^{-2}$	$6.69 \cdot 10^{-1}$	$8.15 \cdot 10^{-1}$	$8.29 \cdot 10^{-1}$
	$9.39 \cdot 10^{-6}$	$3.32 \cdot 10^{-5}$	$5.94 \cdot 10^{-2}$	$6.49 \cdot 10^{-1}$	$8.13 \cdot 10^{-1}$	$8.29 \cdot 10^{-1}$	$8.31 \cdot 10^{-1}$

точке $\tilde{x}(s_l)$ в случае использования КФНК замкнутого типа, возникают проблемы вычислительного характера: $b(\tilde{x}_d^\pm(s), \tilde{x}(s)) \sim d^{-1}$ при $d \rightarrow 0$, и ошибки приобретают катастрофический характер. В то же время применение точного интегрирования по компоненте ρ^+ межточечного расстояния r для вычисления интегралов $J_{i,m,l}(d, s, \tau)$ ($i=1, 2$, $d \in I_D$) позволяет получить вблизи границы $\partial\Omega$ скорость сходимости не меньше, чем вдали от $\partial\Omega$, почти равномерную по φ , t и близкую к кубической (данные о точности метода для этой же задачи Дирихле при $R' = 0.5$ и $R' = 0.1$ приведены в работе [5]).

Аналогичные результаты, демонстрирующие преимущество использования точного интегрирования по ρ^+ вблизи $\partial\Omega$, были получены при нахождении решения рассмотренной здесь задачи Дирихле в виде разности потенциалов простого и двойного слоев с помощью ГИУ первого рода (см. уравнения (1.7), (1.8) [11]), при этом вычисление потенциала простого слоя с помощью точного интегрирования по ρ^+ осуществлялось как в работе [14]. В заключение отметим, что точное интегрирование по $\rho^\pm$ может быть сходным образом использовано для аппроксимации потенциалов двойного слоя двумерных стационарных уравнений $\Delta_2 u - pu = 0$ ($p \geq 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
3. Tomlin G.R. Numerical analysis of continuum problems in zoned anisotropic media. Ph. D. Thesis. Southampton University, 1972.
4. Curran D.A.S., Lewis B.A. A boundary element method for the solution of the transient diffusion equation in two dimensions // Appl. Math. Modelling. 1986. V. 10. April. P. 107–113.
5. Иванов Д.Ю. О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29.
6. Onishi K. Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
7. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation // Inverse and Ill-Posed Problems / H.W. Engl and C.W. Groetsch, eds. Boston: Academic Press, 1987. P. 369–384.
8. Iso Y., Takahashi S., Onishi K. Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems // Topics in Boundary Element Research / C.A. Brebbia, ed. V. 3. Berlin: Springer, 1987. P. 1–24.
9. Hongtao Y. On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of Computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.
10. Hamina M., Saranen J. On the collocation approximation for the single layer heat operator equation // Z. Angew. Math. Mech. (Journal of applied mathematics and mechanics). 1991. V. 71. P. 629–631.
11. Hamina M., Saranen J. On the spline collocation method for the single layer heat operator equation // Mathematics of Computation. 1994. V. 62. No. 25. P. 41–64.
12. Hämäläinen J., Saranen J. A collocation method for the single layer heat equation of the first kind // Integral Methods in Science and Engineering / Constanda C., Saranen J., Seikkala S., eds. V. 2. Addison Wesley Longman, 1997. P. 93–98.
13. Iso Y., Onishi K. On the stability of the boundary element collocation method applied to the linear heat equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1991. V. 38. P. 201–209.
14. Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25.
15. Gu Y., Chen W., Zhang J. Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. V. 36. No. 8. P. 1173–1182.
16. Fu Z.J., Chen W., Qu W. Numerical investigation on three treatments for eliminating the singularities of acoustic fundamental solutions in the singular boundary method // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014. V. 56. P. 15–26.
17. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
18. Иванов Д.Ю., Держинский Р.И. Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
19. Иванов Д.Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 33–45.
20. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
21. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 551 с.

22. Иванов Д.Ю. Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цилиндрах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2014. № 9. С. 16–32.

Статья поступила 02.09.2019 г.

Ivanov D.Y. (2020) A REFINEMENT OF THE BOUNDARY ELEMENT COLLOCATION METHOD NEAR THE BOUNDARY OF A TWO-DIMENSIONAL DOMAIN USING SEMIANALYTIC APPROXIMATION OF THE DOUBLE LAYER HEAT POTENTIAL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 30–52

DOI 10.17223/19988621/65/3

Keywords: non-stationary heat conduction, Dirichlet problem, boundary integral equation, double-layer potential, boundary element, collocation, uniform convergence, stability.

In this paper, we consider internal and external initial Dirichlet problems for the heat equation (IDPHEs) $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - p u$ ($\Delta_2 \equiv \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$; $a, p > 0$ are constant) in an open two-dimensional spatial domain Ω at a zero initial condition. A fully justified collocation boundary element method is proposed, which makes it possible to obtain uniformly convergent in the space-time domain $\Omega \times I_T$ approximate solutions of these IDPHEs. The solutions are found in the form of the double-layer potential (DLP) with an unknown density function determined from boundary integral equation of the second kind.

To ensure the uniform convergence of the approximation of the DLP operator, an integration on arc-length s is carried out in two ways. If the distance r from the point $x \in \Omega$ at which the DLP is calculated to the integration point $x' \in \partial\Omega$ does not exceed approximately one third of the radius of the Lyapunov circle R_L , then we use exact integration with respect to a certain component ρ of the distance r : $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$ (d is the distance from the point $x \in \Omega$ to the boundary $\partial\Omega$ of the domain Ω). Namely, the integral over s is represented here as a sum of two integrals with respect to ρ in each of which we take its own weight function of the variable ρ generated by the fundamental solution of the heat equation. The rest parts of the integrands are approximated using quadratic interpolation with respect to ρ , and thereafter integration with respect to ρ is performed exactly for any analytically defined boundary $\partial\Omega$. The integrals with respect to s for $r > R_L/3$ are calculated using Gaussian quadratures with γ points.

To approximate the density function and the time C_0 -semigroup, we here use piecewise quadratic interpolation. Under the conditions $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ and $\gamma \geq 2$, it is proved that the approximate solutions converge to an exact one with a cubic velocity uniformly in the domain $\Omega \times I_T$. It is also proved that the approximate solutions are stable to perturbations of the boundary function uniformly in the domain $\Omega \times I_T$. For the simpler case of piecewise constant interpolation, it is proved that using a series of quadrature formulas for calculating the integral of s on the boundary element nearest to the point $x \in \Omega$ leads to a violation of convergence uniform over d near the boundary $\partial\Omega$. The results of computational experiments on the solution of the IDPHEs in a circular spatial domain are presented. These results show that the use of exact integration over ρ ensures uniform convergence, which is close to cubic, whereas the use of Gauss quadrature formulas or Newton–Cotes formulas instead of it results in a significant reduction in the convergence rate near the boundary $\partial\Omega$.

AMS Mathematical Subject Classification: 80M15, 65E05

Dmitry Y. IVANOV (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation . E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques*. New York: Springer-Verlag.
2. Banerjee P.K., Butterfield R. (1981) *Boundary element methods in engineering science*. London: McGraw-Hill.
3. Tomlin G.R. (1972) *Numerical analysis of continuum problems in zoned anisotropic media*. Ph. D. Thesis. Southampton University.
4. Curran D.A.S., Lewis B.A. (1986) A boundary element method for the solution of the transient diffusion equation in two dimensions. *Applied Mathematical Modelling*. 10 (April). pp. 107–113.
5. Ivanov D.Yu. (2017) O reshenii ploskikh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti kollokatsionnym metodom granichnykh elementov [On the solution of plane problems of non-stationary heat conduction by the boundary element collocation method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
6. Onishi K. (1981) Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*. 17. pp. 213–225.
7. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. (1987) A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. *Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W. Groetsch, eds.)*. Boston: Academic Press. pp. 369–384.
8. Iso Y., Takahashi S., Onishi K. (1987) Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems. *Topics in Boundary Element Research (C.A. Brebbia, ed.)*, Vol. 3. Berlin: Springer. pp. 1–24.
9. Hongtao Y. (1999) On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of Computation*. 68 (226). pp. 547–557.
10. Hamina M., Saranen J. (1991) On the collocation approximation for the single layer heat operator equation. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (Journal of applied mathematics and mechanics)*. 71. pp. 629–631.
11. Hamina M., Saranen J. (1994) On the spline collocation method for the single layer heat operator equation. *Mathematics of Computation*. 62 (25). pp. 41–64. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1994-1208222-2>.
12. Hämäläinen J., Saranen J. (1997) A collocation method for the single layer heat equation of the first kind. *Integral Methods in Science and Engineering (Constanda C., Saranen J., Seikkala S., eds.)*, Vol. 2. Addison Wesley Longman. pp. 93–98.
13. Iso Y., Onishi K. (1991) On the stability of the boundary element collocation method applied to the linear heat equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 38. pp. 201–209.
14. Ivanov D.Yu. (2019) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy oblasti v sluchae dvumernykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti s granichnymi usloviyami vtorogo i tret'yego roda [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of the domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 5–25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
15. Gu Y., Chen W., Zhang J. (2012) Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 36(8). pp. 1173–1182. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.01.006>.
16. Fu Z.J., Chen W., Qu W. (2014) Numerical investigation on three treatments for eliminating the singularities of acoustic fundamental solutions in the singular boundary method. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 56. pp. 15–26. DOI: 10.2495/BEM360021.
17. Ivanov D.Y. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266110080045>.

18. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Resheniye zadach Robena dlya dvumernykh differentsial'no-operatornykh uravneniy, opisyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tehnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region*. 1. pp. 15–17.
19. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
20. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1962) *Metody vychisleniy* [Methods of computations]. Vol. 1. Moscow: GIFML.
21. Smirnov V.I. (1964) *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part II. Moscow: Nauka.
22. Ivanov D.Yu. (2014) Ekonomichnyy metod vychisleniya operatorov, razreshayushchikh nekotorye zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh [An economical method for calculating operators that solve some heat conduction problems in direct cylinders]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*. 9. pp. 16–32.

Received: September 2, 2019

УДК 519.6:532.516
DOI 10.17223/19988621/65/4

MSC 93A30

Б.О. Цыденов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ БИОГЕОХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРЕСНОВОДНОМ ОЗЕРЕ¹

Предложена математическая модель для исследования экологического состояния пресноводного озера, которая включает в себя 10 прогностических переменных: нитрат, фосфат, аммоний, хлорофилл *a*, фитопланктон, зоопланктон, а также нитратный и фосфатный детрит мелких и крупных размеров. Численно воспроизведены биогеохимические процессы в Баргузинском заливе оз. Байкал в летний период. Проведено сопоставление полученных результатов с данными натурных измерений.

Ключевые слова: *математическая модель, экосистема пресноводного озера, численный эксперимент, озеро Байкал.*

В последние десятилетия под влиянием деятельности человека происходит заметное ухудшение экологического состояния крупных пресноводных озер планеты. Большой вклад в загрязнение и эвтрофирование водоемов вносят промышленные центры, сосредоточенные на их побережье и/или территории водосборного бассейна. В частности, в литоральной зоне озера Байкал в последние годы наблюдается активный рост водорослей рода спирогира, который связан с городскими бытовыми и промышленными стоками с высоким содержанием азота и фосфора.

Важнейшими химическими элементами в озерной экосистеме выступают фосфор и азот, поскольку один из них является лимитирующим фактором развития биомассы водоема. Уровень концентрации фосфора в пресном озере имеет критически важное значение в предсказании вспышки цветения фитопланктона. В связи с этим проблема создания интегративных моделей, направленных на численное воспроизведение биохимических процессов фосфорного и азотного лимитирования, является актуальной для современного этапа развития математических методов в задачах лимнологии.

Несмотря на длительную историю изучения первичной продукции в озере Байкал, вопрос о лимитирующих факторах развития его биомассы остается открытым. К примеру, ряд ученых [1, 2] считает, что развитие фитопланктона в Байкале лимитируется азотом. Но в то же время Голдман и др. [3] отмечают, что в летние периоды более отчетливым становится значение как фосфорного, так и азотного лимитирования. Экспериментальные исследования в Баргузинском заливе в конце августа 2002 г. [4] указывают на роль фосфора как первостепенного лимитирующего биогенного элемента, однако при поступлении фосфора в поверхностные воды лимитирующим становится азот.

Очевидно, что при моделировании биохимических процессов в пресноводных экосистемах важно рассматривать не только наличие азота в воде, но и учитывать содержание фосфора, поскольку фосфатные группы являются основными струк-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60003.

турными элементами нуклеиновых кислот в растительных клетках и участвуют в энергетическом обмене [5]. Целью данной работы является разработка и описание математической модели экосистемы пресноводного озера с учетом фосфорного и азотного лимитирования для воспроизведения в нем физико-биологических процессов, а также анализ и обсуждение результатов расчетов, проведенных для условий озера Байкал в летний период.

Математическая модель

Математическая модель для воспроизведения физико-биологических процессов в пресноводном озере состоит из термогидродинамического [6, 7] и экосистемного блоков. Экосистемный блок основан на моделях Фашама и др. [8], Феннеля и др. [9], Хофмана и др. [10] и включает в себя 7 прогностических переменных: нитрат (1), аммоний (2), хлорофилл *a* (4), фитопланктон (5), зоопланктон (6), мелкий (7) и крупный (8) нитратный детрит. Для описания фосфорного лимитирования в пресноводной среде дополнительно введены в модель 3 переменные согласно постановке Гана и др. [11]: фосфат (3), мелкий (9) и крупный (10) фосфатный детрит. Схематическая диаграмма, демонстрирующая связь между компонентами экосистемы, представлена на рис. 1. Интенсивность роста фитопланктона в модели определяется через модули расчета фосфорной и азотной составляющих согласно их роли в лимитировании биомассы водоема [4]. В качестве индикатора лимитирования часто используют молярное отношение содержания минерального азота (N) к содержанию минерального фосфора (P). Согласно Редфилду [12], при соотношении $N:P < 16$ первичная продукция фитопланктона лимитируется азотом, а при $N:P > 16$ – фосфором.

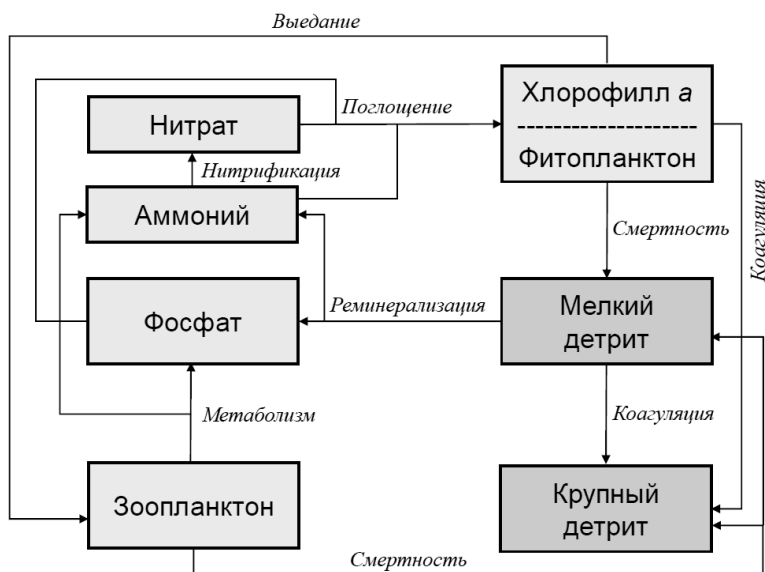


Рис. 1. Концептуальное представление экосистемного блока математической модели.

Стрелками показаны биологические процессы между компонентами модели [11]

Fig. 1. Conceptual representation of the ecosystem module of the mathematical model.

Arrows indicate the biological processes between components of the model [11]

Биохимические процессы в пресноводном озере описываются с помощью реакционно-конвективно-диффузионных уравнений

$$\frac{\partial [N]}{\partial t} + \frac{\partial u[N]}{\partial x} + \frac{\partial w[N]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [N]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) - \mu_{\max} f(I)[Phyto] \left(\sigma_N \frac{[N]}{k_N + [N]} \cdot \frac{1}{1 + [A]/k_A} + \sigma_P \frac{[N]}{[N] + [A]} \cdot \frac{[P]}{k_P + [P]} \right) + n[A]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial [A]}{\partial t} + \frac{\partial u[A]}{\partial x} + \frac{\partial w[A]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [A]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [A]}{\partial z} \right) - \mu_{\max} f(I)[Phyto] \left(\sigma_N \frac{[A]}{k_A + [A]} + \sigma_P \frac{[A]}{[N] + [A]} \cdot \frac{[P]}{k_P + [P]} \right) - n[A] + l_{BM}[Zoo] + l_E \frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto} + [Phyto]^2} \beta [Zoo] + r_{SDN}[SDN] + r_{LDN}[LDN]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial [P]}{\partial t} + \frac{\partial u[P]}{\partial x} + \frac{\partial w[P]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [P]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [P]}{\partial z} \right) - \mu_{\max} f(I)[Phyto] \left(\sigma_N \left\{ \frac{[N]}{k_N + [N]} \cdot \frac{1}{1 + [A]/k_A} + \frac{[A]}{k_N + [A]} \right\} r_{PN} + \sigma_P \frac{[P]}{k_P + [P]} r_{PN} \right) + l_{BM} r_{PN}[Zoo] + l_E r_{PN} \frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto} + [Phyto]^2} \beta [Zoo] + r_{SDP}[SDP] + r_{LDP}[LDP]; \quad (3)$$

$$\frac{\partial [Chl]}{\partial t} + \frac{\partial u[Chl]}{\partial x} + \frac{\partial w[Chl]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [Chl]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [Chl]}{\partial z} \right) + \rho_{Chl} \mu [Chl] - m_{Phyto}[Chl] - \tau([SDN] + [Phyto])[Chl] - g_{\max} \frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto} + [Phyto]^2} [Zoo] \frac{[Chl]}{[Phyto]}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial [Phyto]}{\partial t} + \frac{\partial u[Phyto]}{\partial x} + \frac{\partial w[Phyto]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [Phyto]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [Phyto]}{\partial z} \right) + \mu [Phyto] - m_{Phyto}[Phyto] - \tau([SDN] + [Phyto])[Phyto] - g_{\max} \frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto} + [Phyto]^2} [Zoo]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial [Zoo]}{\partial t} + \frac{\partial u[Zoo]}{\partial x} + \frac{\partial w[Zoo]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [Zoo]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [Zoo]}{\partial z} \right) + g_{\max} \frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto} + [Phyto]^2} \beta [Zoo] - l_{BM}[Zoo] - l_E \frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto} + [Phyto]^2} \beta [Zoo] - m_{Zoo}[Zoo]^2; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial [SDN]}{\partial t} + \frac{\partial u[SDN]}{\partial x} + \frac{\partial w[SDN]}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [SDN]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [SDN]}{\partial z} \right) + g_{\max} \frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto} + [Phyto]^2} (1 - \beta) [Zoo] + \\ & + m_{Zoo}[Zoo]^2 + m_{Phyto}[Phyto] - \tau([SDN] + [Phyto])[SDN] - r_{SDN}[SDN]; \quad (7) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial[LDN]}{\partial t} + \frac{\partial u[LDN]}{\partial x} + \frac{\partial w[LDN]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial[LDN]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial[LDN]}{\partial z} \right) + \tau([SDN] + [Phyto])^2 - r_{LDN}[LDN]; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial[SDP]}{\partial t} + \frac{\partial u[SDP]}{\partial x} + \frac{\partial w[SDP]}{\partial z} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial[SDP]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial[SDP]}{\partial z} \right) + g_{\max} \frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto} + [Phyto]^2} r_{PN} (1 - \beta)[Zoo] + \\ & + m_{Zoo} r_{PN} [Zoo]^2 + m_{Phyto} r_{PN} [Phyto] - \tau([SDN] + [Phyto])[SDP] - r_{SDP}[SDP]; \quad (9) \\ \frac{\partial[LDP]}{\partial t} + \frac{\partial u[LDP]}{\partial x} + \frac{\partial w[LDP]}{\partial z} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial[LDP]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial[LDP]}{\partial z} \right) + \\ & + \tau([SDN] + [Phyto])([SDP] + r_{PN}[Phyto]) - r_{LDP}[LDP], \quad (10) \end{aligned}$$

где $[N]$, $[A]$, $[P]$, $[Chl]$, $[Phyto]$, $[Zoo]$ – концентрация нитратов (NO_3), аммония (NH_4), фосфатов (PO_4), хлорофилла a , фитопланктона, зоопланктона соответственно; $[SDN]$ и $[SDP]$ – концентрация мелкого детрита для NO_3 и PO_4 соответственно; $[LDN]$ и $[LDP]$ – концентрация крупного детрита для NO_3 и PO_4 соответственно; u и w – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости соответственно; D_x и D_z – коэффициенты турбулентной диффузии в соответствующих направлениях.

Интенсивность роста фитопланктона определяется как

$$\mu = \mu_{\max} f(I) \left(\sigma_N \left(\frac{[N]}{k_N + [N]} \cdot \frac{1}{1 + [A]/k_A} + \frac{[A]}{k_A + [A]} \right) + \sigma_P \frac{[P]}{k_P + [P]} \right), \quad (11)$$

где $\mu_{\max}$ – максимальная скорость роста фитопланктона [13]:

$$\mu_{\max}(T) = \mu_0 \cdot 1.066^T. \quad (12)$$

Коэффициенты σ_N и σ_P отвечают за лимитирование продуктивности водоема по основным биогенным элементам:

$$\text{если } \frac{[N]}{k_N + [N]} \cdot \frac{1}{1 + [A]/k_A} + \frac{[A]}{k_A + [A]} > \frac{[P]}{k_P + [P]}, \text{ то } \sigma_N = 0 \text{ и } \sigma_P = 1 \text{ (фосфорное}$$

лимитирование),

в противном случае – $\sigma_N = 1$ и $\sigma_P = 0$ (азотное лимитирование).

Функция $f(I)$ представляет связь фотосинтеза и света:

$$f(I) = \frac{\alpha I}{\sqrt{\mu_{\max}^2 + \alpha^2 I^2}}; \quad (13)$$

$$I = I_s \cdot PAR \cdot \exp \left\{ -d \left(k_{water} + k_{chl} \int_d^{L_z} Chl(z) dz \right) \right\}, \quad (14)$$

где I_s – приходящий на поверхность воды свет; PAR – доля света для фотосинтеза = 0.43 [9]. Параметру I_s в модели соответствует коротковолновая радиация [9], которая вычисляется по формуле (8) из [14].

Участвующая в синтезе хлорофилла доля роста фитопланктона определяется как

$$\rho_{Chl} = \frac{\theta_{\max} \mu[Phyto]}{\alpha I[Chl]}. \quad (15)$$

Скорость нитрификации вычисляется [15]:

$$n = n_{\max} \left(1 - \max \left[0, \frac{I - I_0}{k_I + I - I_0} \right] \right), \quad (16)$$

где $n_{\max}$ – максимальная скорость нитрификации. Параметры, входящие в расчетные формулы экосистемного блока модели, приведены в таблице.

Значения биогеохимических параметров модели

Обозначение	Наименование	Значение
μ_0	Скорость роста фитопланктона при 0 °C	0.59 сут ⁻¹
k_{water}	Коэффициент ослабления света для воды	0.04 м ⁻¹
k_{Chl}	Коэффициент ослабления света для хлорофилла	0.025 (мг Chl) ⁻¹ · м ⁻²
α	Начальная крутизна кривой $P-I$	0.025 мг C (мг Chl × Вт·м ⁻² ·сут) ⁻¹
$\theta_{\max}$	Максимальное соотношение хлорофилла к биомассе планктона	0.054 мг Chl (мг C) ⁻¹
r_{PN}	Клеточное соотношение P:N	0.0625
k_N	Константа полунасыщения фитопланктона по NO ₃	0.8 ммоль · м ⁻³
k_A	Константа полунасыщения фитопланктона по NH ₄	0.8 ммоль · м ⁻³
k_P	Константа полунасыщения фитопланктона по PO ₄	0.05 ммоль · м ⁻³
m_{Phyto}	Смертность фитопланктона	0.15 сут ⁻¹
$g_{\max}$	Максимальная скорость питания зоопланктона	0.6 сут ⁻¹
β	Эффективность усвоения зоопланктона по азоту	0.75
k_{Phyto}	Константа полунасыщения питания фитопланктона	1 ммоль N · м ⁻³
l_{BM}	Скорость экскреции зоопланктона за счет основного обмена	0.1 сут ⁻¹
l_E	Скорость экскреции зоопланктона за счет видовой особенности	0.1 сут ⁻¹
m_{Zoo}	Смертность зоопланктона	0.025 сут ⁻¹ × (ммоль N · м ⁻³) ⁻¹
r_{SDN}	Скорость реминерализации мелкого детрита для азота	0.03 сут ⁻¹
r_{LDN}	Скорость реминерализации крупного детрита для азота	0.01 сут ⁻¹
r_{SDP}	Скорость реминерализации мелкого детрита для фосфора	0.075 сут ⁻¹
r_{LDP}	Скорость реминерализации крупного детрита для фосфора	0.025 сут ⁻¹
τ	Скорость коагуляции	0.05 сут ⁻¹
$n_{\max}$	Максимальная скорость нитрификации	0.05 сут ⁻¹
I_0	Порог ФАР для ингибирования процесса нитрификации	0.0095 Вт · м ⁻²
k_I	Полунасыщение ФАР для ингибирования процесса нитрификации	0.1 Вт · м ⁻²

Для биологических переменных модели заданы следующие начальные условия:

- значения концентрации нитратов, аммония, фосфатов, зоопланктона и хлорофилла a приняты равными 5.0, 4.0, 0.4, 0.3 и 0.3 ммоль N м⁻³ соответственно;

- концентрация для всех детритных компонентов в начальный момент времени составляет $0.1 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$;

- значение биомассы фитопланктона задано исходя из соотношения 1.59 для $[Chl]/[Phyto]$.

Граничные условия для уравнений модели имеют вид:

а) на поверхности водоема

$$\begin{aligned} \frac{\partial[N]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[A]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[P]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[Chl]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[Phyto]}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial[Zoo]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[SDN]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[LDN]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[SDP]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[LDP]}{\partial z} = 0; \end{aligned}$$

б) на твёрдых границах

$$\begin{aligned} \frac{\partial[N]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[A]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[P]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[Chl]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[Phyto]}{\partial n} = 0; \\ \frac{\partial[Zoo]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[SDN]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[LDN]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[SDP]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[LDP]}{\partial n} = 0, \end{aligned}$$

где n – направление внешней нормали к области;

в) на границе впадения реки в озеро

$[N] = 5.0 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$; $[A] = 4.0 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$; $[P] = 0.4 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$; $[Zoo] = 0.3 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$;

$[Chl] = 0.3 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$; $[SDN] = 0.1 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$; $[LDN] = 0.1 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$; $[SDP] = 0.1 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$;

$[LDP] = 0.1 \text{ ммоль } N \cdot \text{м}^{-3}$;

г) на открытой (правой) границе задаются условия радиационного типа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$(\Phi = [N], [A], [P], [Chl], [Phyto], [Zoo], [SDN], [LDN], [SDP], [LDP]),$$

фазовая скорость c_Φ рассчитывается из пространственных и временных тенденций внутри области [16].

Условную запись разностной схемы для конечного объёма P для уравнений (1) – (10) можно представить в обобщенном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_P - \Phi_P^0}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[- (C_x^*)_P - (C_z^*)_P + (D_x^*)_P + (D_z^*)_P + (S_\Phi)_P \right]^0 + \\ + \frac{1}{2} \left[- (C_x^*)_P - (C_z^*)_P + (D_x^*)_P + (D_z^*)_P + (S_\Phi)_P \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Phi = [N], [A], [P], [Chl], [Phyto], [Zoo], [SDN], [LDN], [SDP], [LDP]$; $(C_x^*)_P$, $(C_z^*)_P$ и $(D_x^*)_P, (D_z^*)_P$ – аппроксимация конвективных и диффузионных членов соответственно; $(S_\Phi)_P$ – источниковый член; Φ_P^0 соответствует значению Φ в центре конечного объёма на временном слое t , а Φ_P – на слое $t + \Delta t$. Видно, что нестационарный член в (17) аппроксимируется схемой Кранка – Николсон. Для аппроксимации диффузионных членов используется центрально-разностная схема, а конвективных членов – противопотоковая схема QUICK второго порядка точности [17].

Конечная система алгебраических уравнений, соответствующая дифференциальной задаче имеет вид

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b, \quad (18)$$

где индекс P обозначает центр текущего конечного объёма (i, j) , а индексы E, W, N и S (согласно «географической» системе обозначений) – центры соседних объёмов $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$ и $(i, j-1)$ соответственно; $a_E \geq 0$, $a_W \geq 0$, $a_N \geq 0$, $a_S \geq 0$

и $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 > 0$ $\left(a_P^0 \equiv \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} \right)$. Решение системы (18) осуществ-

ляется методом неполной факторизации, устойчивость которого обеспечивается диагональным преобладанием [18].

Важно заметить, что линеаризация источникового члена $(S_\Phi)_P$ осуществляется следующим образом [19]:

$$(S_\Phi)_P \approx S_C + S_P \Phi_P,$$

где S_C – постоянная составляющая $(S_\Phi)_P$, а S_P – коэффициент (S_P не есть значение $(S_\Phi)_P$ в точке P). Если коэффициент S_P всегда отрицателен или меняет знак, то для усиления диагонального преобладания матрицы коэффициентов системы (18) переносится в левую часть уравнения (18). Детальное описание численного метода решения уравнений вида (18) приведено в работах [6, 20].

Коэффициенты вертикальной диффузии определяются как

$$D_z = \frac{\nu_T}{Pr_T} + \frac{\nu}{Pr},$$

где ν_T – турбулентная кинематическая вязкость (рассчитывается по k - ω -модели Уилкокса [22]); ν – молекулярная кинематическая вязкость воды; Pr и Pr_T – молекулярное и турбулентное числа Прандтля.

Коэффициенты горизонтальной диффузии задаются постоянными [22]:

$$D_x = 2.5 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Расчеты проводились на серверной платформе Supermicro с графическим ускорителем Tesla C2050.

Область исследования

Областью исследования является вертикальное сечение Баргузинского залива озера Байкал, начало системы координат совпадает с устьем р. Баргузин $53^\circ 25' 30''$ с.ш., $108^\circ 59' 50''$ в. д. [23] (рис. 2, а). Данные по рельефу дна взяты из работы [24] (рис. 2, б).

Вычислительная область имеет протяженность 20 км и глубину 100 м (рис. 2, б). Глубина открытого участка речного стока (на левой границе) составляет 7.5 м. Расчётная область покрыта равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25$ м и $h_z = 2.5$ м. Шаг по времени – 30 с. Исследование сходимости численного решения уравнений вида (18) по шагам сетки и времени проводилось в работах [20, 25, 26]. В качестве критерия сходимости итерационного процесса использовалось условие малости невязки ($< \varepsilon = 10^{-10}$). Вычисления проводились для одного варианта расчетной сетки.

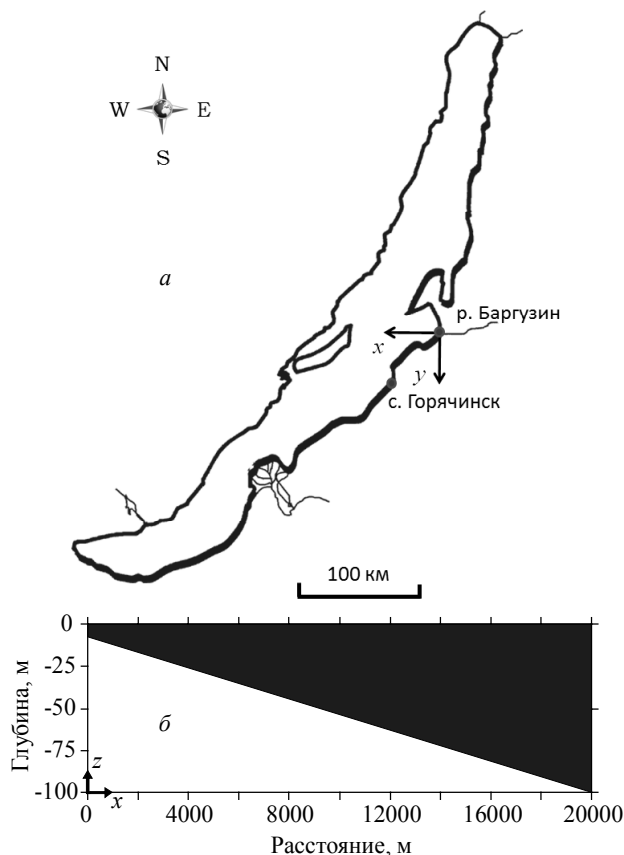


Рис. 2. Озеро Байкал: *a* – схема разреза, *b* – геометрия расчетной области
Fig. 2. Lake Baikal: *a* – cross-section scheme, *b* – calculation domain

Начальное значение температуры воды в озере задано равным 4.5°C . Температура воды в устье р. Баргузин монотонно растет с 12 до 15°C . Минерализация воды в озере составляет 96 мг/кг [27], в реке – 128.2 мг/л (соответствует среднему значению по всем притокам озера Байкал [28]). Скорость течения р. Баргузин при впадении в озеро – 0.5 см/с . Компоненты тепловых потоков, поступающих на водное зеркало, вычислены по расчетным формулам, приведенным в работе [29], на основе данных о температуре воздуха, относительной влажности, атмосферному давлению и облачности из архива погодных условий метеостанции с. Горячинск в период с 1 по 31 августа 2018 г.

Результаты моделирования и их обсуждение

Распределение хлорофилла *a* (основного пигмента, жизненно необходимого для фотосинтеза в растительных клетках), полученное в результате численного моделирования (рис. 3, *a*) на рассматриваемом разрезе оз. Байкал, имеет сложную структуру. В приустьевой области водоема наблюдается высокая концентрация хлорофилла (изолинии вертикально-наклонные), максимальное значение приходится на границе раздела река – озеро. Данные полевых измерений [4, 30] также

указывают на повышенное содержание первичной продукции в районе впадения р. Баргузин в летний период. В открытой части водоема концентрация хлорофилла имеет горизонтально однородное распределение с локальным максимумом ($>0.06 \text{ ммоль м}^{-3}$) на глубине 10–30 м, причем с увеличением времени моделирования её изменение в вертикальном направлении усиливается (рис. 3, *a2*). Эти результаты качественно согласуются с распределением хлорофилла *a*, полученным методом спектрофотометрии в центральной части Баргузинского залива 24–31 августа 2002 г.: пиковое значение хлорофилла детектировано на глубине 10 м [4].

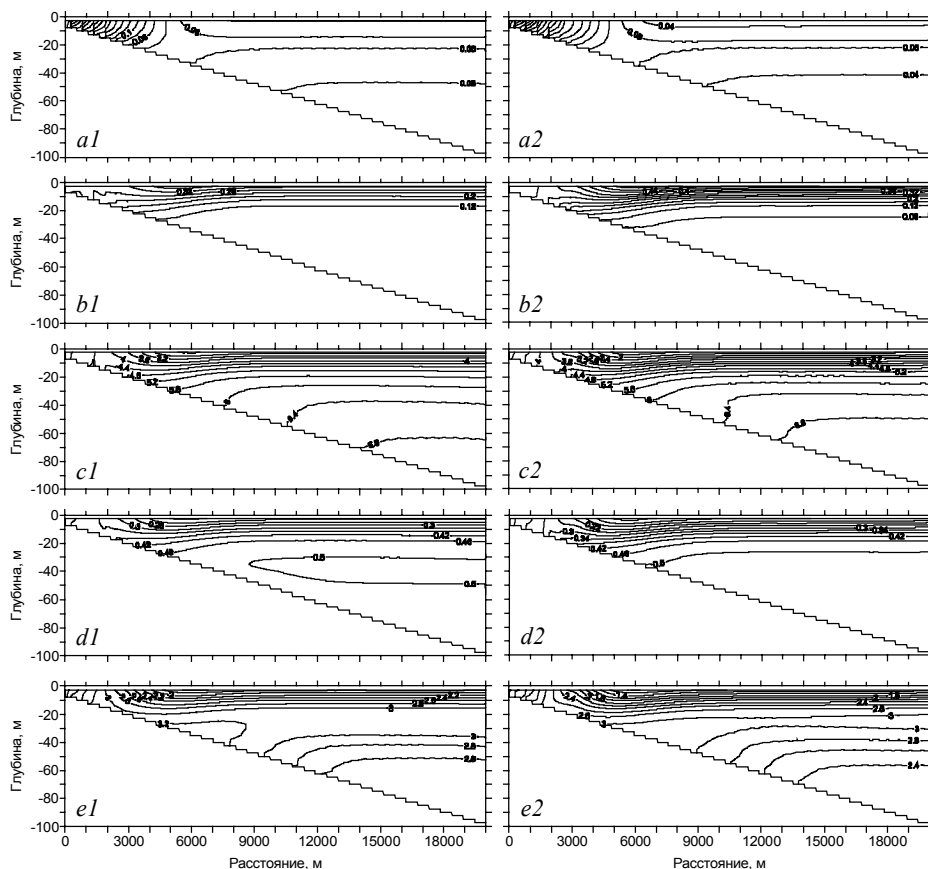


Рис. 3. Распределение хлорофилла *a* [$\text{мг} \cdot \text{м}^{-3}$] (*a*), зоопланктона [$\text{ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$] (*b*), нитрата [$\text{ммоль} \cdot \text{м}^{-3}$] (*c*), фосфата [$\text{ммоль} \cdot \text{м}^{-3}$] (*d*) и аммония [$\text{ммоль} \cdot \text{м}^{-3}$] (*e*) на 24-е (*1*) и 28-е (*2*) сутки моделирования

Fig. 3. Distribution of chlorophyll *a* [$\text{mg} \cdot \text{m}^{-3}$] (*a*), zooplankton [$\text{mmol N} \cdot \text{m}^{-3}$] (*b*), nitrate [$\text{mmol} \cdot \text{m}^{-3}$] (*c*), phosphate [$\text{mmol} \cdot \text{m}^{-3}$] (*d*), ammonium [$\text{mmol} \cdot \text{m}^{-3}$] (*e*) on the 24 (*1*) and 28 (*2*) days

Зоопланктон сосредоточен в верхней 25-метровой толще водоема (рис. 3, *b*), его наибольшая концентрация отмечается в приповерхностном слое. В открытой части водоема (по сравнению с приустьевым пространством) рост биомассы зоопланктона происходит интенсивнее (рис. 3, *b*). Такая картина развития зоопланктонных популяций в конце лета имеет качественное и количественное различие от

весенней динамики, связанной с существованием термобара [31, 32]. На 28-й день концентрация зоопланктона возрастает до $0.52 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$ (рис. 3, *b2*).

Содержание биогенных элементов в воде имеет обратную корреляцию с распределением биомассы планктона: на участках водоема с высокой концентрацией фито- и зоопланктона наблюдается снижение NO_3 , PO_4 и NH_4 (рис. 3, *c*, *d*, *e*). Результаты моделирования показывают, что уменьшение количества NO_3 в присклоновой области водоема происходит быстрее, чем в пелагической зоне (рис. 3, *c*), при этом развитие гидробиологических процессов ведет к усилению данной тенденции (рис. 3, *c2*). Повышенное содержание PO_4 ($>0.5 \text{ ммоль} \cdot \text{м}^{-3}$) на 24-й день заметно в 30–50-метровом слое (рис. 3, *d1*). На 28 день PO_4 (рис. 3, *d2*) в водах открытого озера принимает горизонтально однородное распределение, количество PO_4 возрастает с глубиной. Наибольшая концентрация NH_4 отмечается в 20–30-метровой толще (рис. 3, *e*), выше и ниже указанного слоя происходит уменьшение количества NH_4 . На 24-й день наблюдается образование «языка» с высоким содержанием NH_4 у нижней границы рассматриваемой области на расстоянии 4.5–8.5 км от устья речного притока (рис. 3, *e1*). Мониторинговые исследования химического состава воды в оз. Байкал в летний период также фиксируют:

1) различие в содержании биогенных элементов в мелководных и пелагических участках озера (2002–2007 гг.) [33];

2) увеличение концентрации нитратов и фосфатов с ростом глубины в пелагиали (1993–2011 гг.) [34].

Заключение

Построенная математическая модель позволяет воспроизводить биогеохимические процессы в пресноводном озере. Проведенные на примере Баргузинского залива оз. Байкал расчеты показали, что в последней декаде августа

1) повышенное содержание хлорофилла *a* в пелагиали водоема локализовано на глубине 10–30 м;

2) зоопланктон сосредоточен в верхнем 25-метровом слое, причем в открытой части озера увеличение его биомассы происходит быстрее;

3) на участках водоема с высокой концентрацией фито- и зоопланктона наблюдается снижение количества биогенных элементов.

Полученные результаты качественно согласуются с данными мониторинговых исследований химического состава воды в озере Байкал в летний период.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weiss R.F., Carmack E.C., Koropalov V.M. Deep-water renewal and biological production in Lake Baikal // *Nature*. 1991. V. 349. P. 665–669. DOI: 10.1038/349665a0.
2. Watanabe Y., Drucker V.V. Phytoplankton blooms in Lake Baikal, with reference to the lake's present state of eutrophication // *Ancient lakes: their cultural and biological diversity* / Kawanabe H., Goldman G.W., Roosevelt A.C. (eds). Kenobi Productions, Belgium. 1999. P. 217–225.
3. Goldman C.R., Elser J.J., Richards R.C., Reuter J.E., Priscu J.C., Levin A.L. Thermal stratification, nutrient dynamics, and phytoplankton productivity during the onset of spring phytoplankton growth in Lake Baikal, Russia // *Hydrobiologia*. 1996. V. 331. No. 1–3. P. 9–24. DOI: 10.1007/BF00025403.
4. Satoh Y., Katano T., Satoh T., Mitamura O., Anbutsu K., Nakano S.-I., Ueno H., Kihira M., Drucker V., Tanaka Y., Mimura T., Watanabe Y., Sugiyama M. Nutrient limitation of the primary production of phytoplankton in Lake Baikal // *Limnology*. 2006. V. 7. No. 3. P. 225–229. DOI: 10.1007/s10201-006-0187-8.

5. *Henderson-Sellers B.* Engineering Limnology. London: Pitman, 1984. 356 p.
6. *Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V.* Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake // *Ocean Modelling*. 2016. V. 104. P. 73–83. DOI: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009.
7. *Tsydenov B.O.* A numerical study of the thermal bar in shallow water during the autumn cooling // *J. Great Lakes Res.* 2019. V. 45. No. 3. P. 715–725. DOI: 10.1016/j.jglr.2019.05.012.
8. *Fasham M.J.R., Ducklow H.W., McKelvie S.M.* A nitrogen-based model of plankton dynamics in the oceanic mixed layer // *J. Mar. Res.* 1990. V. 48. No. 3. P. 591–639. DOI: 10.1357/002224090784984678.
9. *Fennel K., Wilkin J., Levin J., Moisan J., O'Reilly J., Haidvogel D.* Nitrogen cycling in the Middle Atlantic Bight: Results from a three-dimensional model and implications for the North Atlantic nitrogen budget // *Global Biogeochemical Cycles*. 2006. V. 20. No. 3. GB3007. DOI: 10.1029/2005GB002456.
10. *Hofmann E., Druon J.-N., Fennel K., Friedrichs M., Haidvogel D., Lee C., Mannino A., McClain C., Najjar R., O'Reilly J., Pollard D., Previdi M., Seitzinger S., Siewert J., Signorini S., Wilkin J.* Eastern US continental shelf carbon budget: Integrating models, data assimilation, and analysis // *Oceanography*. 2008. V. 21. No. 1. P. 86–104. DOI: 10.5670/oceanog.2008.70.
11. *Gan J., Lu Z., Cheung A., Dai M., Liang L., Harrison P.J., Zhao X.* Assessing ecosystem response to phosphorus and nitrogen limitation in the Pearl River plume using the Regional Ocean Modeling System (ROMS) // *J. Geophys. Res. C: Oceans*. 2014. V. 119. No. 12. P. 8858–8877. DOI: 10.1002/2014JC009951.
12. *Redfield A.C.* The biological control of chemical factors in the environment // *Am. Sci.* 1958. No. 46. P. 205–211.
13. *Eppey R.W.* Temperature and phytoplankton growth in the sea // *Fish. Bull.* 1972. V. 70. No. 4. P. 1063–1085.
14. *Tsydenov B.O., Starchenko A.V.* To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake // *Proc. SPIE* 9680, 96800H. 2015. P. 1–8. DOI: 10.1117/12.2205687.
15. *Olson R. J.* Differential photoinhibition of marine nitrifying bacteria: A possible mechanism for the formation of the primary nitrite maximum // *J. Mar. Res.* 1981. V. 39. No. 2. P. 227–238.
16. *Orlanski I.* A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.* 1976. V. 21. No. 3. P. 251–269. DOI: 10.1016/0021-9991(76)90023-1.
17. *Leonard B.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979. V. 19. No. 1. P. 59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
18. *Ильин В.П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995. 288 с.
19. *Patankar S.* Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press, 1980. 214 p.
20. *Цыденов Б.О.* Численное моделирование эффекта весеннего термобара в глубоком озере: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2013. 145 с.
21. *Wilcox D.C.* Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA J.* 1988. V. 26. No. 11. P. 1299–1310. DOI: 10.2514/3.10041.
22. *Holland P.R., Kay A., Botte V.* Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. V. 43. No. 1–2. P. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
23. *Баргузин (пека).* URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D1%80%D0%B3%D1%83%D0%B7%D0%B8%D0%BD_\(%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%B0\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D1%80%D0%B3%D1%83%D0%B7%D0%B8%D0%BD_(%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%B0)) (дата обращения: 19.01.2020).
24. *Ueno H., Katano T., Nakano S.-I., Mitamura O., Anbutsu K., Satoh Y., Drucker V., Sugiyama M.* Abundance and community structure of picoplankton and protists in the microbial food web of Barguzin Bay, Lake Baikal. *Aquatic Ecology*. 2005. V. 39. No. 3. P. 263–270. DOI: 10.1007/s10452-005-6057-3.

25. Цыденов Б.О. Численное исследование распространения примеси в пресном озере на основе распределения мутности воды // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22. № 1. С. 113–124.
26. Tsydenov B.O. Simulating phytoplankton growth during the spring thermal bar in a deep lake // J. Mar. Syst. 2019. V. 195. P. 38–49. DOI: 10.1016/j.jmarsys.2019.03.009.
27. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. Physical Limnology of Lake Baikal: A Review. Irkutsk–Okayama, 1994. 81 p.
28. Вотинцев К.К. Гидрохимия // Проблемы Байкала / отв. ред. Г.И. Галазий, К.К. Вотинцев. Новосибирск, 1978. Т. 16(36). С. 124–146.
29. Tsydenov B.O. Numerical modeling of the effect of inflow water mineralization in the dynamics of the autumnal thermal bar in Kamloops Lake // Moscow Univ. Phys. Bull. V. 73. No. 4. P. 435–440. DOI: 10.3103/S0027134918040148.
30. Katano T., Nakano S.-I., Ueno H., Mitamura O., Anbutsu K., Kihira M., Satoh Y., Satoh T., Drucker V.V., Tanaka Y., Akagashi Y., Sugiyama M. Abundance and composition of the summer phytoplankton community along a transect from the Barguzin River to the central basin of Lake Baikal // Limnology. 2008. V. 9. No. 3. P. 243–250. DOI: 10.1007/s10201-008-0252-6.
31. Tsydenov B.O. Numerical modeling of the autumnal thermal bar // J. Mar. Syst. 2018. V. 179. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.jmarsys.2017.11.004.
32. Цыденов Б.О. Численное моделирование весенней динамики планктона на примере Селенгинского мелководья оз. Байкал // Труды КарНЦ РАН. 2019. № 3. С. 114–123. DOI: 10.17076/lim948.
33. Tomberg I.V., Sorokovikova L.M., Popovskaya G.I., Bashenkhaeva N.V., Sinyukovich V.N., Ivanov V.G. Concentration dynamics of biogenic elements and phytoplankton at Selenga R. Mouth and in Selenga shallows (Lake Baikal) // Water Resources. 2014. V. 41. No. 6. P. 687–695. DOI: 10.1134/S0097807814050157.
34. Домышева В.М., Шмараев М.Н., Сакирко М.В., Онищук Н.А. Динамика концентрации биогенных элементов и растворенных газов в воде озера Байкал в современный период // Органическое вещество и биогенные элементы во внутренних водоемах и морских водах: Материалы V Всерос. симп. с междунар. участием (Петрозаводск, 10–14 сент. 2012 г.). Петрозаводск, 2012. С. 23–26.

Статья поступила 21.01.2020 г.

Tsydenov B.O. (2020) A MATHEMATICAL MODEL FOR SIMULATING THE BIOGEOCHEMICAL PROCESSES IN A FRESHWATER LAKE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 53–67

DOI 10.17223/19988621/65/4

Keywords: mathematical model, freshwater lake ecosystem, numerical experiment, Lake Baikal.

The most significant chemical elements in a lake ecosystem are phosphorus and nitrogen because one of them is the limiting factor of primary production rate. The phosphorus content level in a freshwater lake is of substantive importance in prediction of phytoplankton blooms. In that regard, the problem of the development of integrative models aimed at numerical simulation of the biochemical processes of phosphorus and nitrogen limitation in an aquatic ecosystem is topical for the contemporary stage of the development of mathematical methods in problems of limnology.

In this paper, a mathematical model for studying the environmental status of a freshwater lake is proposed. The model includes ten prognostic variables: nitrate, phosphate, ammonium, chlorophyll *a*, phytoplankton, zooplankton, small nitrate detritus, large nitrate detritus, small phosphate detritus, and large phosphate detritus. Calculations performed based on the model developed for Barguzin Bay of Lake Baikal showed that during last ten days of August:

- increased chlorophyll *a* content in the pelagic zone of the lake is localized at depths of 10–30 m;
- zooplankton is concentrated in the upper 25 m layer, and its biomass grows faster in the open water area;
- the decrease in nutrients is registered in the zones with high phyto- and zooplankton populations.

The results obtained are in qualitative agreement with data from monitoring studies of the chemical composition of water in Lake Baikal in summer.

Financial support. The reported study was funded by RFBR, project number 19-31-60003.

AMS Mathematical Subject Classification: 93A30

Bair O. TSYDENOV (Candidate of Physics and Mathematics, V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics of Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Tomsk, Russia; Tomsk State University, Tomsk, Russia). E-mail: btsydenov@gmail.com

REFERENCES

1. Weiss R.F., Carmack E.C., Koropalov V.M. (1991) Deep-water renewal and biological production in Lake Baikal. *Nature*. 349. pp. 665–669. DOI: 10.1038/349665a0.
2. Watanabe Y., Drucker V.V. (1999) Phytoplankton blooms in Lake Baikal, with reference to the lake's present state of eutrophication. *Ancient lakes: their cultural and biological diversity* (Kawanabe H., Goldman G.W., Roosevelt A.C., eds.). Kenobi Productions, Belgium. pp. 217–225.
3. Goldman C.R., Elser J.J., Richards R.C., Reuter J.E., Priscu J.C., Levin A.L. (1996) Thermal stratification, nutrient dynamics, and phytoplankton productivity during the onset of spring phytoplankton growth in Lake Baikal, Russia. *Hydrobiologia*. 331 (1–3). pp. 9–24. DOI: 10.1007/BF00025403.
4. Satoh Y., Katano T., Satoh T., Mitamura O., Anbutsu K., Nakano S.-I., Ueno H., Kihira M., Drucker V., Tanaka Y., Mimura, T. Watanabe Y., Sugiyama M. (2006) Nutrient limitation of the primary production of phytoplankton in Lake Baikal. *Limnology* 7(3). pp. 225–229. DOI: 10.1007/s10201-006-0187-8.
5. Henderson-Sellers B. (1984) *Engineering Limnology*. London: Pitman.
6. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. (2016) Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake. *Ocean Modelling*. 104. pp. 73–83. DOI: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009.
7. Tsydenov B.O. (2019) A numerical study of the thermal bar in shallow water during the autumn cooling. *J. Great Lakes Res.* 45(4). pp. 715–725. DOI: 10.1016/j.jglr.2019.05.012.
8. Fasham M.J.R., Ducklow H.W., McKelvie S.M. (1990) A nitrogen-based model of plankton dynamics in the oceanic mixed layer. *J. Mar. Res.* 48(3). pp. 591–639. DOI: 10.1357/002224090784984678.
9. Fennel K., Wilkin J., Levin J., Moisan J., O'Reilly J., Haidvogel D. (2006) Nitrogen cycling in the Middle Atlantic Bight: Results from a three-dimensional model and implications for the North Atlantic nitrogen budget. *Global Biogeochemical Cycles*. 20(3). GB3007. DOI: 10.1029/2005GB002456.
10. Hofmann E., Druon J.-N., Fennel K., Friedrichs M., Haidvogel D., Lee C., Mannino A., McClain C., Najjar R., O'Reilly J., Pollard D., Previdi M., Seitzinger S., Siewert J., Signorini S., Wilkin J. (2008) Eastern US continental shelf carbon budget: Integrating models, data assimilation, and analysis. *Oceanography* 1. pp. 86–104. DOI: 10.5670/oceanog.2008.70.
11. Gan J., Lu Z., Cheung A., Dai M., Liang L., Harrison P.J., Zhao X. (2014) Assessing ecosystem response to phosphorus and nitrogen limitation in the Pearl River plume using the Regional Ocean Modeling System (ROMS) // *J. Geophys. Res. C: Oceans* 119(12). pp. 8858–8877. DOI: 10.1002/2014JC009951.
12. Redfield A.C. (1958) The biological control of chemical factors in the environment. *Am. Sci.* 46. pp. 205–211.

13. Eppley R.W. (1972) Temperature and phytoplankton growth in the sea. *Fish. Bull.* 70(4). pp. 1063–1085.
14. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2015) To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake. *Proc. SPIE* 9680, 96800H. pp. 1–8. DOI: 10.1117/12.2205687.
15. Olson R.J. (1981) Differential photoinhibition of marine nitrifying bacteria: A possible mechanism for the formation of the primary nitrite maximum. *J. Mar. Res.* 39(2). pp. 227–238.
16. Orlanski I. (1976) A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comput. Phys.* 21(3). pp. 251–269. DOI: 10.1016/0021-9991(76)90023-1.
17. Leonard B. (1979) A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 19(1). pp. 59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
18. Ил'ин В.П. (1995) *Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем* [Incomplete factorization methods for solving algebraic systems]. Moscow: Fizmatlit.
19. Patankar S. (1980) Numerical heat transfer and fluid flow. Boca Raton: CRC Press.
20. Tsydenov B.O. (2013) *Численное моделирование эффекта весеннего термобара в глубоком озере* [Numerical modeling of the effect of the spring thermal bar in a deep lake]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
21. Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIJA J.* 26(11). pp. 1299–1310. DOI: 10.2514/3.10041.
22. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *J. Mar. Syst.* 43(1–2). pp. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
23. *The Barguzin (river)*. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D1%80%D0%B3%D1%83%D0%B7%D0%B8%D0%BD_\(%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%B0\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D1%80%D0%B3%D1%83%D0%B7%D0%B8%D0%BD_(%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%B0)).
24. Ueno H., Katano T., Nakano S.-I., Mitamura O., Anbutsu K., Satoh Y., Drucker V., Sugiyama M. (2005) Abundance and community structure of picoplankton and protists in the microbial food web of Barguzin Bay, Lake Baikal. *Aquatic Ecology* 39(3). pp. 263–270. DOI: 10.1007/s10452-005-6057-3.
25. Tsydenov B.O. (2017) Численное исследование распространения примеси в пресном озере на основе распределения мутности воды [A numerical study of impurity propagation in a fresh-water lake on the basis of water turbidity distribution]. *Computational Technologies.* 22(1). pp. 113–124.
26. Tsydenov B.O. (2019) Simulating phytoplankton growth during the spring thermal bar in a deep lake. *J. Mar. Syst.* 195. P. 38–49. DOI: 10.1016/j.jmarsys.2019.03.009.
27. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. (1994) *Physical Limnology of Lake Baikal: A Review*. Irkutsk; Okayama.
28. Votintsev K.K. (1978) Гидрохимия [Hydrochemistry]. *Проблемы Байкала* [The problems of Lake Baikal] (Galazii, G.I., Votintsev, K.K., Eds.). Novosibirsk. pp. 124–146.
29. Tsydenov B.O. (2018) Numerical modeling of the effect of inflow water mineralization in the dynamics of the autumnal thermal bar in Kamloops Lake. *Moscow Univ. Phys. Bull.* 73(4). pp. 435–440. DOI: 10.3103/S0027134918040148.
30. Katano T., Nakano S.-I., Ueno H., Mitamura O., Anbutsu K., Kihira M., Satoh Y., Satoh T., Drucker V.V., Tanaka Y., Akagashi Y., Sugiyama M. (2008) Abundance and composition of the summer phytoplankton community along a transect from the Barguzin River to the central basin of Lake Baikal. *Limnology* 9(3). pp. 243–250. DOI: 10.1007/s10201-008-0252-6.
31. Tsydenov B.O. (2018) Numerical modeling of the autumnal thermal bar. *J. Mar. Syst.* 179. pp. 1–9. DOI: 10.1016/j.jmarsys.2017.11.004.
32. Tsydenov B.O. (2019) Численное моделирование весенней динамики планктона на примере Селенгинского мелководья оз. Байкал [Numerical modeling of spring plankton dynamics in the Selenga shallow waters of Lake Baikal] *Труды КарНТс РАН* [Trans. KarRC RAS] 3. pp. 114–123. DOI: 10.17076/lim948.

33. Tomberg I.V., Sorokovikova L.M., Popovskaya G.I., Bashenkhaeva N.V., Sinyukovich V.N., Ivanov V.G. (2014) Concentration dynamics of biogenic elements and phytoplankton at Selenga R. Mouth and in Selenga shallows (Lake Baikal). *Water Resources* 41(6). pp. 687–695. DOI: 10.1134/S0097807814050157.
34. Domyшева V.M., Shimaraev M.N., Sakirko M.V., Onishhuk N.A. (2012) Dinamika koncentratsii biogennykh elementov i rastvorenykh gazov v vode ozera Baykal in our times [The dynamics of the concentration of nutrients and dissolved gases in water of Lake Baikal in the modern period] // *Organicheskoe veshchestvo i biogennye elementy vo vnutrennikh vodoe-makh i morskikh vodakh: Materialy V Vseross. simp. s mezhdunar. uchastiem (Petrozavodsk, 10–14 sent. 2012 g.)* [Organic matter and biogenic elements in inland and marine waters: Proc. of the 5th all-Russian. Symp. with internat. participation]. Petrozavodsk. pp. 23–26.

Received: January 21, 2020

МЕХАНИКА

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/65/5

А.А. Валнев, А.Т. Ахметов, А.А. Рахимов

НЕУСТОЙЧИВОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ
В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ МИКРОКАНАЛЕ

Изучено неустойчивое несмешивающееся вытеснение нефти водой при постоянном перепаде давления и при постоянном расходе в ячейке Хеле-Шоу. Установлена степенная зависимость фрактальной размерности от закачиваемого объема вытесняющей жидкости при постоянном перепаде давления, не изменяющаяся при его увеличении в 2.5 раза. Показано, что можно выделить 4 этапа вытеснения нефти. На начальном этапе эффективнее вытеснение при постоянном расходе, а для больших объемов – при постоянном перепаде давления.

Ключевые слова: ячейка Хеле-Шоу, вытеснение, перепад давления, объёмный расход, «вязкие пальцы», фрактальная размерность, капиллярные силы, вязкостная неустойчивость.

Исследование неустойчивого вытеснения несмешивающихся жидкостей в ячейке Хеле-Шоу представляет большой интерес как для развития фрактальной геометрии, гидродинамики, так и практических приложений в промышленности в области нефтедобычи. Неустойчивому вытеснению в ячейке Хеле-Шоу посвящено большое количество работ. Как правило, неустойчивость Саффмана – Тейлора изучается в ячейках Хеле-Шоу с зазорами несколько миллиметров [1, 2]. Капиллярное давление на границе раздела жидкостей определяется в соответствии с формулой Лапласа [3] двумя главными кривизнами поверхности раздела, одна соответствует изгибающейся цилиндрической поверхности, с радиусом, равным половине зазора ячейки Хеле-Шоу (при полном смачивании), другая – с радиусами, соответствующими кривизнам изгибающейся линии фронта (контур границы раздела между двумя средами). Уменьшение зазора до 20 мкм увеличивает капиллярное давление на 2 порядка за счет уменьшения радиуса кривизны до 10 мкм. Значение радиусов кривизны, соответствующие точкам изгибающейся линии фронта «вязких пальцев» на несколько порядков выше. Рост основного «пальца» («языка») преобладает в направлении наибольшего градиента давления. Капиллярные силы выпуклой части фронта оказывают тормозящее действие, вогнутой – ускоряющее, но их стабилизирующее действие намного меньше гидродинамических сил, приводящих к развитию «пальцев», в то время как капиллярные силы, обусловленные взаимодействием с поверхностью с огромной кривизной, весьма значительны. Они играют основную роль в образовании остаточных целиков вытесняемой жидкости [4, 5].

Прозрачный плоский канал позволяет наблюдать эволюцию структуры «вязких пальцев» с изменением условий подачи вытесняющей жидкости. Ветвление

«вязких пальцев» обусловлено вязкостной неустойчивостью, форма «вязких пальцев» зависит от соотношения вязкостей жидкостей, капиллярных сил, условий смачивания поверхностей и гидродинамических условий. Соответственно развитие «вязких пальцев» будет определять интенсивность вытеснения. В обзоре G.M. Nomsy [6] исследуется неустойчивое вытеснение до прорыва, отмечена роль сил поверхностного натяжения в механизме образования «вязких пальцев». Когда их роль становится слабой, часть неподвижного фронта подвержена образованию «пальцев» из-за вязкостной неустойчивости, при вытеснении более вязкой жидкости менее вязкой. После расщепления «пальца» каждая из его новых долей является стабильной в результате того, что они тоньше, чем «палец», от которого они расщепляются. В результате одна из этих долей, в конечном итоге, перерастет другую, а из-за поверхностного натяжения распространится и займет соответствующую ширину. В процессе вытеснения «палец» достигает ширины, которая снова становится нестабильной для расщепления и этап повторяется. Таким образом, поверхностное натяжение играет двойную роль; оно должно быть достаточно слабым, чтобы передняя часть «пальца» была неустойчивой, но это также и физическая сила, вызывающая распространение и последующее повторное ветвление.

В процессе неустойчивого вытеснения нефти водой важно выделить 2 этапа: 1 – течение до прорыва (когда «язык» доходит до выходного отверстия) и 2 – после прорыва. Образующиеся структуры «вязких пальцев» до прорыва обладают фрактальной размерностью. Сформировавшаяся структура перед прорывом является начальным условием для структур, образующихся в процессе довытеснения после прорыва. Большое количество работ [7, 8] посвящено изучению и моделированию развития «вязких пальцев» до прорыва, однако изменение структуры вытесняющих «пальцев» развивается очень динамично после прорыва. Наиболее ярко это проявляется при вытеснении нефти газом [9] и поддается качественной интерпретации. Теоретическая работа [10] показывает, что изменение геометрии ячейки Хеле-Шоу существенно влияет на линейную устойчивость и нелинейную динамику формирования структур в неплоских, ограниченных потоках жидкости. Не менее живописна структура течения неньютоновской жидкости с анизотропными элементами в ячейке Хеле-Шоу со стенозом [11]. Для практического использования, в частности оценки эффективности вытеснения, оказываются важными процессы, влияющие на расширение зоны вытеснения, которые происходят после прорыва.

В работе приведены результаты при двух режимах подачи воды: с постоянным перепадом давления ΔP и постоянным задаваемым объемным расходом Q . Процесс вытеснения при постоянном перепаде давления отличается от постоянного расхода тем, что наличие постоянного перепада давления обладает запасом энергии, который приводит к ускорению течения после прорыва маловязкой жидкости. При постоянном расходе перепад давления постепенно падает по мере замены в процессе вытеснения высоковязкой нефти маловязкой водой, в то время как подача с постоянным перепадом давления приводит к постепенному увеличению скорости течения по мере замещения нефти водой и, как представляется, более активному вытеснению. Выявление эффективных гидродинамических условий, определяющих довытеснение, является основной задачей нашего эксперимента.

Экспериментальная установка и методика измерений

Ячейка Хеле-Шоу [9] образована двумя оптическими стеклянными пластинами, между которыми зажимается круг из фольги толщиной 20 мкм с вырезанным окном 3.5×2 см, расчётный объем ячейки V_0 (поровый объем) составляет 14 мм^3 (14 мкл). Качество оптических стекол (ПИ-60) толщиной 2 см и однородность фольги обеспечивают герметичность ограничивающего ячейку Хеле-Шоу контура. Входные и выходные отверстия высверлены в верхнем стекле, к ним подведены трубки. Измерительная система (рис. 1) состояла из прецизионных весов (A&D GH-252) (8) для измерения расхода весовым методом по массе вытесняемой дистиллированной воды, компрессора с ресивером (1) с манометром (2), датчика давления (MPX 5100) (5), шприцевого насоса (3), видеокамеры (6) и персонального компьютера (ПК) (9). Переключение на режим постоянного перепада давления или постоянного расхода осуществляется краном (4).

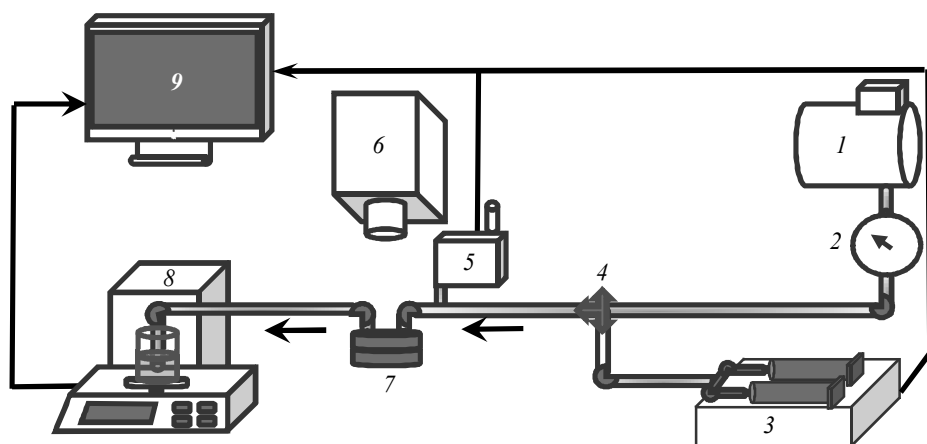


Рис. 1. Схема установки для проведения микрогидродинамических исследований и визуализации структуры течения

Fig. 1. Schematic diagram of an experimental setup for microhydrodynamic studies and flow structure visualization

Предварительно поверхности оптических пластин промывались последовательно бензином марки «Калоша» и этиловым спиртом. Пластины и окно, из «фольги» между ними, помещались в обойму и зажимались винтами. Получившаяся ячейка Хеле-Шоу заполнялась через отверстие в верхнем окне нефтью (устойчивое вытеснение) и выдерживалась в нефти не менее часа. В экспериментах использовалась дистиллированная вода и природная нефть. Динамическая вязкость используемой нефти 17.4 мПа·с. Поверхностное натяжение на границе вода – нефть равна 32 мН/м. Погрешности измеряемого объема определялись по массе дистиллированной воды, поступавшей на весы, которая считывалась 1 раз в секунду и составляли 5 % до прорыва, 1 % до протекания 1 объема ячейки и 0.1 % при больших объемах; перепад давления контролировался датчиком давления с погрешностью в 1 %. Отклонение данных по обработке изображений в бинарный вид составляет 0.3 %. Отклонение расходных характеристик после разборки и сборки ячейки – не более 10 % при малых расходах.

Подача воды проводилась в двух режимах: при постоянном перепаде давления и постоянном расходе. Постоянный перепад давления обеспечивался давлением газа от компрессора и контролировался образцовым манометром, постоянный расход – шприцевым насосом. В обоих случаях давление на входе ячейки Хеле-Шоу измерялось тензометрическим датчиком и фиксировалось с помощью программы RS-Weight на ПК. Объём жидкости, выходящей из ячейки, вытеснял дистиллированную воду из выходной трубки, которая поступала в мерный стакан, находящийся на электронных весах. На верхнюю поверхность воды в стакане налито машинное масло, слой масляной пленки предотвращает интенсивное испарение воды. Видеосъемка проводилась камерой Sony DCR-TRV530E с частотой 25 кадров в секунду и минимальной выдержкой, видеозахват с камеры обеспечивался программой VirtualDub. Показания датчика давления, весов и видеоизображение синхронизировались по времени и поступали на ПК.

Обработка изображений и фрактальная размерность

По видеокдрам, полученным при неустойчивом вытеснении изображений, проводился анализ фрактальных размерностей, образующихся «вязких пальцев» и степени вытеснения нефти при различных режимах нагнетания. Оцифрованные кадры видеоизображений обрабатывались в программе ImageJ (программа в открытом доступе) для перевода в бинарный (черно-белый) вид. Далее рассчитывались фрактальная размерность и остаточная нефтенасыщенность. Поскольку «вязкие пальцы» обладают самоподобием, был проведен фрактальный анализ. Обработка фрактальной размерности структуры вытеснения проводилась в программе HarFa 5.5L light version (программа в открытом доступе), использующая метод «box-counting» [12]. В методе box-counting определялась размерность самих «вязких пальцев» и граница раздела вытесняющей жидкости с вытесняемой. Для получения изображения в бинарном виде, программа накладывает на нее равномерную сетку с шагом ε и считает количество N_i ячеек, содержащих цвета: черный, белый, черный с белым. С каждой новой итерацией шаг сетки уменьшается, соответственно количество N ячеек растет. Фрактальная размерность D вычисляется в соответствии с пределом отношения логарифмов

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}, \quad (1)$$

где наименьшее значение размера ячейки сетки ε равно 1 пикселю.

Таким образом получается сетка с уменьшающимися с каждой итерацией размерами ячеек, содержащих только черный B(Black), только белый W(White) цвета, а также области (граница) с присутствием черного и белого цветов – BW. Измерения для BW заканчиваются на 2 пикселях, так как в одном пикселе бинарного изображения не может содержаться два цвета. Вся фрактальная часть – это области B+BW (только черные и черно-белые), область W+BW (белые и черно-белые области) – остаточная область, занимаемая нефтью.

В случае устойчивого вытеснения с прямой границей раздела между жидкостями для вытесняемой и вытесняющей жидкостей вычисляемая размерность равна 2, для границы раздела – 1.

«Вязкие пальцы» по мере развития формируют ветвистую структуру, направленную в сторону выходной зоны. Усложняется и сама граница раздела, часть це-

ликов нефти остаются внутри фракталоподобной структуры. На рис. 2 приведено фотоизображение и её бинарный вариант вытеснения нефти водой при 20 кПа в момент времени перед началом прорыва маловязкой жидкости в выходное отверстие.

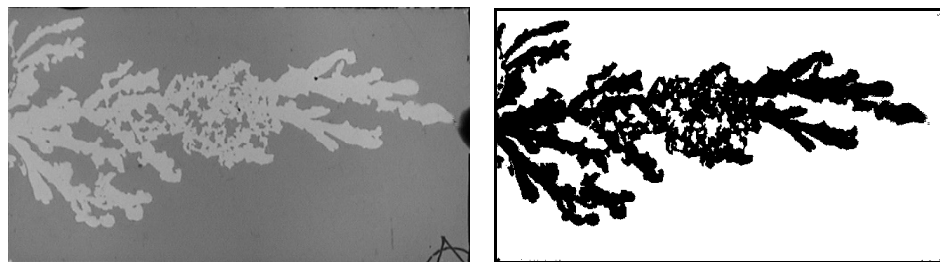


Рис. 2. Фотоснимок неустойчивого фронта вытеснения и его бинарный вид (черное соответствует воде, белое – нефти)

Fig. 2. A photo of an unstable displacement front and its binary image (black color indicates water; white color, oil)

Вычисленная в программе HarFa фрактальная размерность образовавшихся «вязких пальцев» при данном неустойчивом вытеснении (рис. 2) равна 1.75 (B+BW), у границы раздела – 1.45 (BW), область, занятая нефтью – 1.95 (W+BW). В дальнейшем используется размерность $D = 1.75$, поскольку это область фрактала вязких пальцев.

Гидравлическая система в эксперименте состоит из прямоугольной ячейки Хеле-Шоу и подводящих цилиндрических трубок (на вход и выход), с одним и тем же объемным расходом Q в сечениях. Падение давления при течении через ячейку Хеле-Шоу описывается известной формулой [13]:

$$\Delta P_1 = \frac{3\mu l_1}{2bh^3} Q, \quad (2)$$

где μ – вязкость; l_1 – длина ячейки; b – ширина ячейки; h – половина зазора (глубины).

Перепад давления на каждой трубке по формуле Пуазейля

$$\Delta P_i = \frac{8\mu l_i}{\pi R_i^4} Q, \quad (3)$$

где l_i – длина трубки, R_i – радиус трубки, $i = 2, 3, 4$.

Используя формулы (2) и (3), получаем отношение перепадов давления в трубке и в ячейке:

$$\frac{\Delta P_i}{\Delta P_1} = \frac{16}{3\pi} \frac{bh^3 l_i}{R_i^4 l_1} \approx 1.7 \frac{bh^3 l_i}{R_i^4 l_1}. \quad (4)$$

Размеры нашего прямоугольного канала в ячейке Хеле-Шоу: ширина $b = 2$ см; зазор $2h = 20$ мкм; длина $l_1 = 3.5$ см. В нашей системе на входе (от датчика давления, манометра, до входного отверстия) вставлена короткая трубка (10 см) диаметром 1 мм (по формуле (4) $\Delta P_2/\Delta P_1 \approx 0.00155$, что соответствует 0.155 %) и подводящая трубка (20 см) диаметром 2 мм ($\Delta P_3/\Delta P_1 \approx 1.9 \cdot 10^{-4}$, что соответствует

0.019 %), а на выходе длинная (1 м) толстая трубка диаметром 3 мм, подходящая к стакану с водой на весах ($\Delta P_4/\Delta P_1 \approx 1.9 \cdot 10^{-4}$, что соответствует 0.019 %). Суммарная потеря перепада давления на всех трубках, по сравнению с перепадом давления в ячейке, около 0.2 %, и ей пренебрегается в данном эксперименте.

Плоская модель позволяет видеть структуры, образующиеся во время вытеснения. Постоянный расход соответствует работе насоса, однако в малых элементах нефтяного пласта реализуется постоянный перепад давления.

Картина вытеснения до прорыва и её фрактальный анализ

Изображения вытесняющей и вытесняемой жидкости (вода – нефть) различаются по прозрачности и дают достаточно контрастную картину. В процессе вытеснения регистрируются кадры видеоизображения в цифровом виде, показания весов, соответствующие объёму нагнетаемой жидкости, и перепад давления. Эти три группы данных синхронизировано записываются на ПК. Изучение неустойчивого вытеснения проводилось в двух режимах, при постоянном перепаде давления и постоянном расходе. Процесс вытеснения по его развитию следует разделить на 2 этапа: первичное вытеснение до прорыва и «доотмыв» после прорыва. Неустойчивое вытеснение под действием постоянного перепада давления и при постоянном расходе приводит к образованию ветвящихся структур («пальцев»).

По структурам, образовавшимся за время прохождения до середины модели и к моменту прорыва (рис. 3), можно судить о заметном различии между кластерами, образовавшимися при нагнетании воды под действием постоянного перепада давления и при постоянном расходе. Более рыхлая структура кластеров, образование целиков остаточной нефти, увеличение скорости и отрыв «пальцев» ближе к выходной зоне обусловлены запасом энергии, имеющимся при постоянном перепаде давления. Увеличение интенсивности нагнетания, как за счёт давления, так и расхода, приводит к большему ветвлению кластера. Увеличение ΔP приводит к разрывам пальцев, к более рыхлой структуре. «Вязкие пальцы» обладают самоподобием и фрактальной размерностью.

Нагнетание с заданным расходом 10 мкл/мин приводит к прорыву после закачки $0.27V_0$, а при 50 мкл/мин – $0.33V_0$ и показывает самое эффективное вытеснение из всех режимов до прорыва. Разительно отличается и структура «вязких пальцев»: 10 мкл/мин – «пальцы» широкие, гладкие и относительно мало дробятся, 50 мкл/мин – «пальцы» средние по толщине и дробятся с широким охватом. Отличие структур «вязких пальцев» при постоянных расходах сказывается и в различии их фрактальных размерностей (рис. 4). Фрактальная размерность в зависимости от нагнетаемого объёма во всех приведенных случаях обнаруживает рост, с увеличением размеров кластеров увеличение их фрактальной размерности замедляется.

В случае постоянного перепада давления, зависимости $D(V/V_0)$ хорошо аппроксимируются степенной функцией и для обоих перепадов давления 20 и 50 кПа практически совпадают. Общая аппроксимация для всех точек вычисленных фрактальных размерностей при вытеснении с перепадами давлений 20 и 50 кПа дает $D = 2.03(V/V_0)^{0.11}$, при $R^2 = 0.998$. При перепаде давления 50 кПа, фрактальная размерность перед прорывом имеет чуть большее значение и большую степень вытеснения, чем в случае 20 кПа.

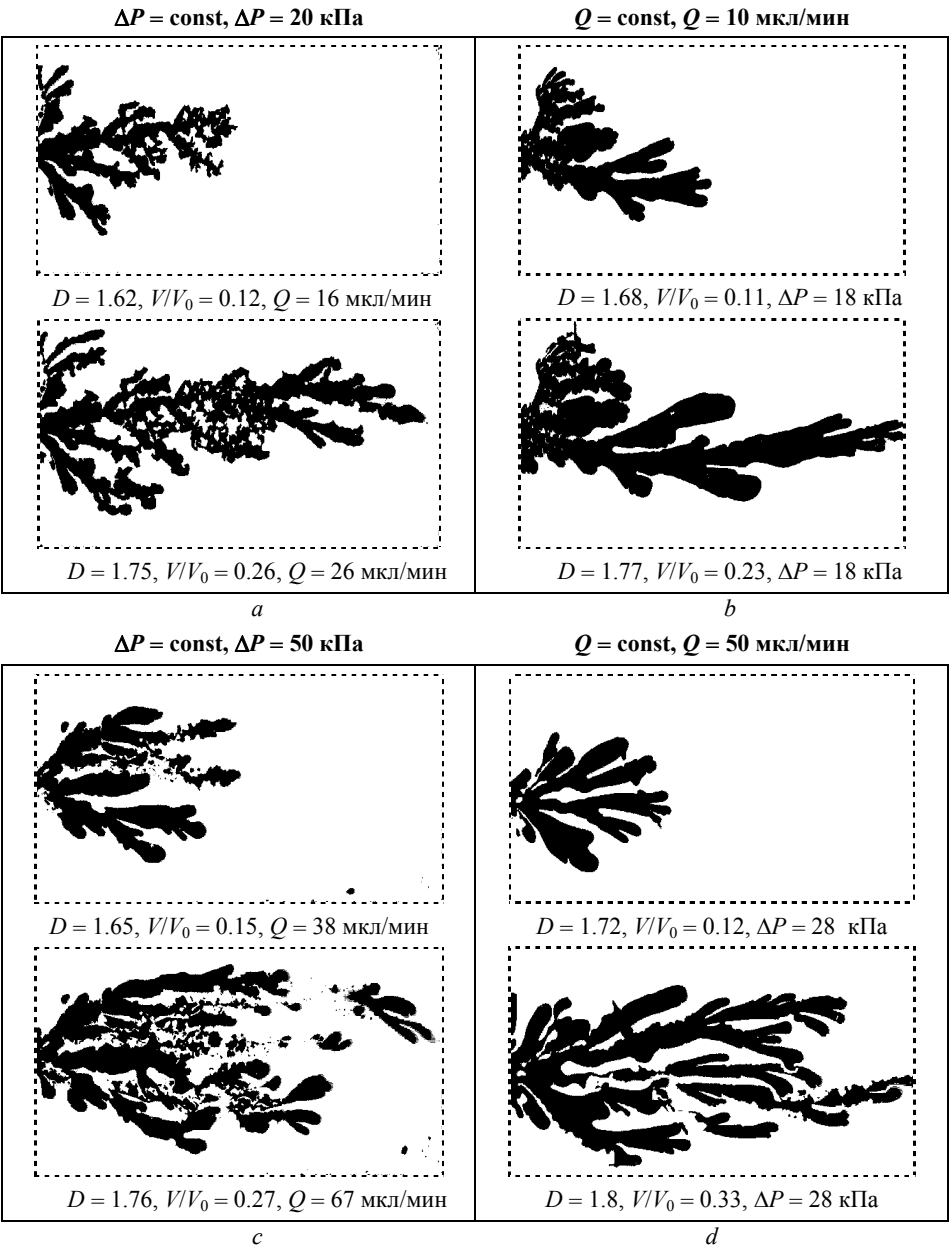


Рис. 3. Кадры видеозаписи неустойчивого вытеснения нефти водой в бинарном виде, при двух режимах нагнетания: 1) постоянный перепад давления 20кПа (a) и 50 кПа (c) и 2) постоянный расход 10 мкл/мин (b) и 50мкл/мин (d) (Штриховые линии соответствуют контуру ячейки; видеокadres демонстрируют структуру развития «вязких пальцев» и их состояние перед прорывом)

Fig. 3. Binary images of video recording frames for unstable water-oil displacement in two injection modes: 1) at a constant pressure drop of (a) 20 and (c) 50 kPa; 2) at a constant flow rate of (b) 10 and (d) 50 μl / min (the dashed lines indicate cell edges; video frames show the growth of “viscous fingers” and their state before the outburst)

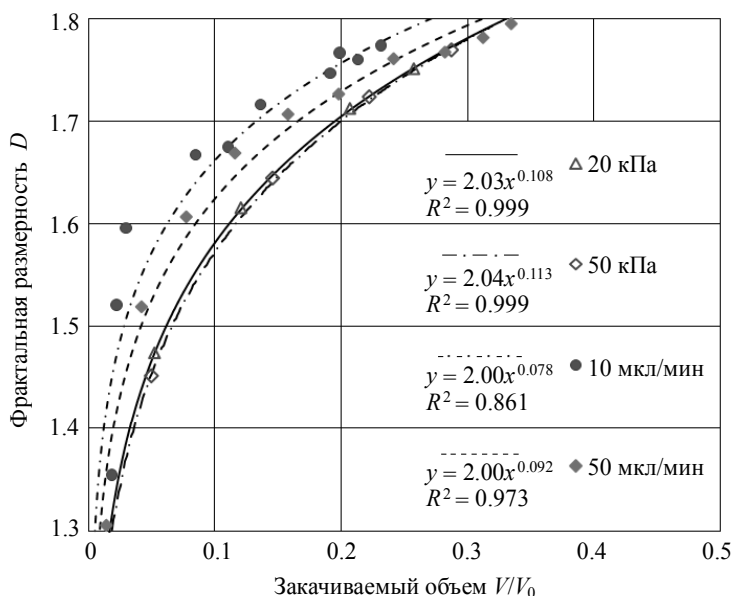


Рис. 4. Зависимость фрактальной размерности D от закачанного объема воды в ячейку Хеле-Шоу. Размерность приведена для «вязких пальцев» с учетом границы раздела вода – нефть

Fig. 4. Fractal dimension D as a function of the volume of the water injected into a Hele-Shaw cell. The dimension is presented for “viscous fingers” with account for a water – oil interface

При постоянном расходе картина несколько иная (рис. 3), зависимости фрактальных размерностей растут быстрее, чем при $\Delta P = \text{const}$ (рис. 4), причём при малом расходе в 10 мкл/мин скорость роста выше, чем при 50 мкл/мин, аппроксимации степенными функциями имеют плохую корреляцию и значительно отличаются друг от друга.

Изменение нефтенасыщенности после прорыва воды

После прорыва количественный анализ нефтенасыщенности проводился на основе обработки бинарных изображений объема прошедшей воды на основе весовых данных и перепада давления на основе показания датчика давлений и манометра (рис. 1). Коэффициент остаточной нефтенасыщенности K_n равен отношению объема остаточной нефти V_n к объему ячейки Хеле-Шоу: $K_n = V_n/V_0$. На рис. 3 приведены изображения водяных кластеров, дошедших до выходного отверстия. По приведенным на рисунках соотношениям V/V_0 , показывающим долю объема ячейки, занятой водой, вытесненный из модели объем нефти соответствует той же доле, соответственно коэффициент нефтенасыщенности в этом случае: $K_n = 1 - V/V_0$, вся вода ушла на добычу такого же объема нефти. Казалось бы, что по достижению «вязкими пальцами» выходного канала течение будет продолжаться по тем руслам, которые вода образовала в вязкой нефти (рис. 3). В реальности, сразу после прорыва происходит резкое падение давления в «пальцах» у выходного отверстия. В «пальцах», прошедших в прорыв, происходит активное перераспределения локальных давлений по всей структуре (рис. 5, а, с), при пере-

паде 50 кПа активность значительно выше по сравнению с меньшим перепадом, картина вытеснения существенно изменяется, расширяется охват вытесняющей жидкостью (рис. 5, б, з).

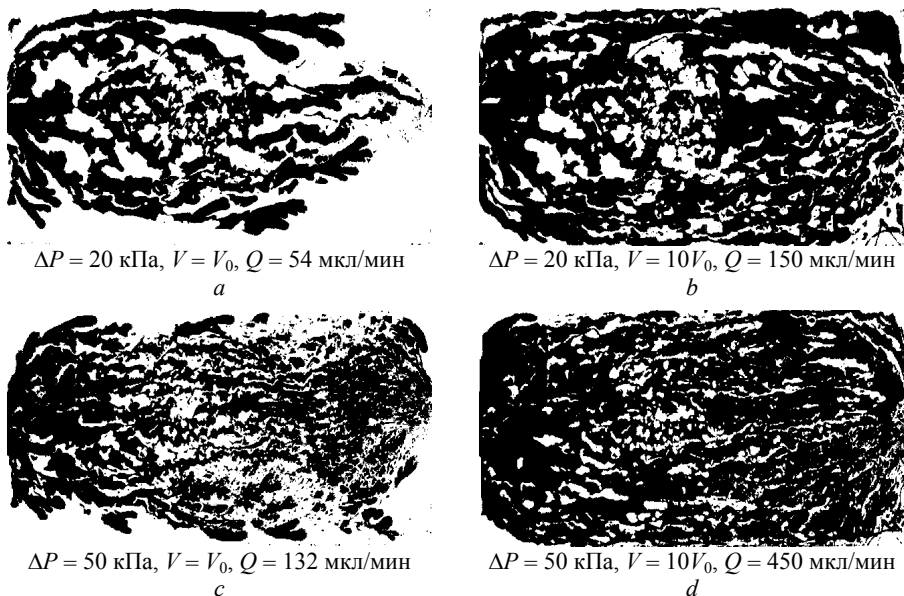


Рис. 5. Кадры видеозаписи неустойчивого вытеснения нефти водой в бинарном виде при заданном постоянном перепаде давления 20 кПа (а, б) и 50 кПа (с, д) после прокачки одного объема ячейки (V_0) и $10V_0$. Под изображениями приведены заданный перепад давления, прошедший объем и соответствующий расход

Fig. 5. Binary images of video recording frames for unstable water-oil displacement at a given constant pressure drop of (a, b) 20 and (c, d) 50 kPa after pumping of one cell volume (V_0) and $10V_0$. The pressure drop, the pumped volume of water, and the corresponding flow rate are given below the figures

Наиболее ярко перераспределение давления, приводящее к перераспределению микропотоков во всех направлениях, проявляется при вытеснении газом [9]. При большем перепаде давления и больших расходах образуется более разветвленная структура, она занимает большую площадь, приводит к большему охвату и более мелкой, разветвленной структуре. Вытеснение с постоянным перепадом давления приводит к увеличению расхода после прорыва, увеличивается фазовая проницаемость.

Вытеснение с двумя значениями постоянного расхода (рис. 3, б, д) показывает значительное различие по объему вытесненной нефти до прорыва, после прорыва картина представлена на рис. 6. Картина вытеснения при 20 кПа после прошедших 10 поровых объемов по структуре близка к расходу в 50 мкл/мин (рис. 5, б, рис. 6, с). В случае вытеснения с задаваемым расходом в 10 мкл/мин, «вязкие пальцы» намного шире и представляют собой цельную структуру. Вытеснение с постоянным расходом 50 мкл/мин приводит к сильному диспергированию у выходной зоне после прохождения 1 объема пор воды (рис. 6, с). В случае с постоянным перепадом давления в 20 кПа, мы наблюдаем отрыв капель по мере ускорения движения ближе к выходной зоне.

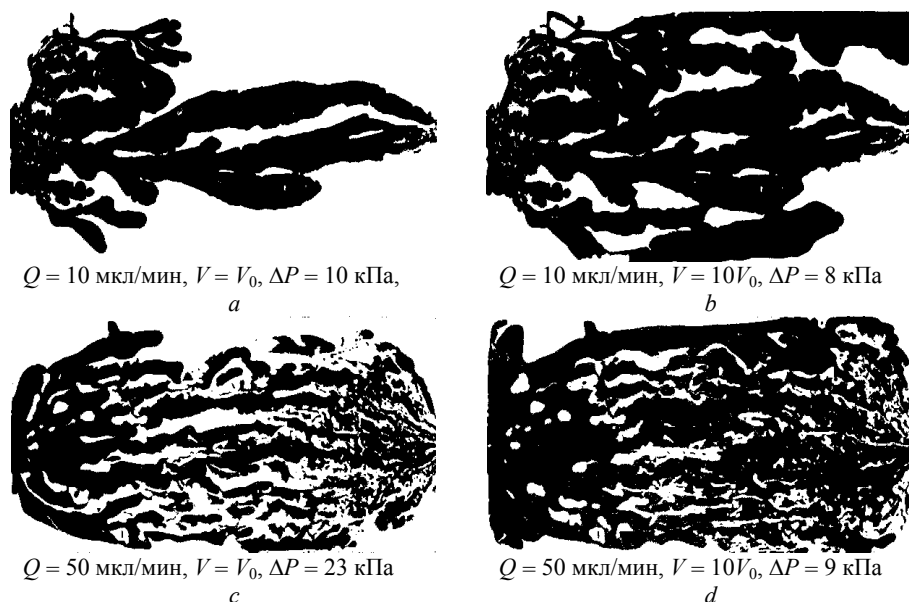


Рис. 6. Кадры видеозаписи неустойчивого вытеснения нефти водой в бинарном виде при заданном постоянном расходе 10 мкл/с (*a, b*) и 50 мкл/с (*c, d*) после закачки V_0 и $10V_0$. Под изображением приведены заданный расход, прошедший объем воды и соответствующий перепад давления

Fig. 6. Binary images of video recording frames for unstable water-oil displacement at a given constant flow rate of (*a, b*) 10 and (*c, d*) 50 $\mu\text{l/s}$ after injecting V_0 and $10V_0$. The flow rate, the pumped volume of water, and the corresponding pressure drop are given below the figures

При постоянном перепаде давления зависимость объема V прошедшей воды от времени хорошо аппроксимируются степенной функцией (рис. 7) на участке, соответствующем протеканию $20V_0$. Эти зависимости удобны для нахождения объемного расхода в различные моменты времени. Каждая точка на графике соответствует весовому значению, которая снимается автоматически, записывается и пересчитывается на компьютере. Погрешность измерений не превышает размеров маркеров на графике, обусловлена в основном погрешностью измерения давления тензиометрическим датчиком и не превышает 1 %.

Из приведенных зависимостей можно найти соотношения для расхода воды вытесняющей нефть из ячейки Хеле-Шоу при постоянном перепаде давления от относительного объема:

$$Q_{50} = 143(V/V_0)^{0.51}, Q_{20} = 60(V/V_0)^{0.40}.$$

Полученные зависимости K_n от объема прошедшей воды изменили наши представления об этапах вытеснения нефти (рис. 8). Все точки на графике распределяются в «коридоре» между аппроксимирующими ломаными линиями, соответствующими данным, полученным при нагнетании с заданными: расходом 10 мкл/мин (верхняя ломаная линия) и перепадом давления 50 кПа (нижняя ломаная линия). Отношение $\Delta K_n / \Delta(V/V_0)$ определяет количество вытесняемой нефти к относительному объему проходящей воды.

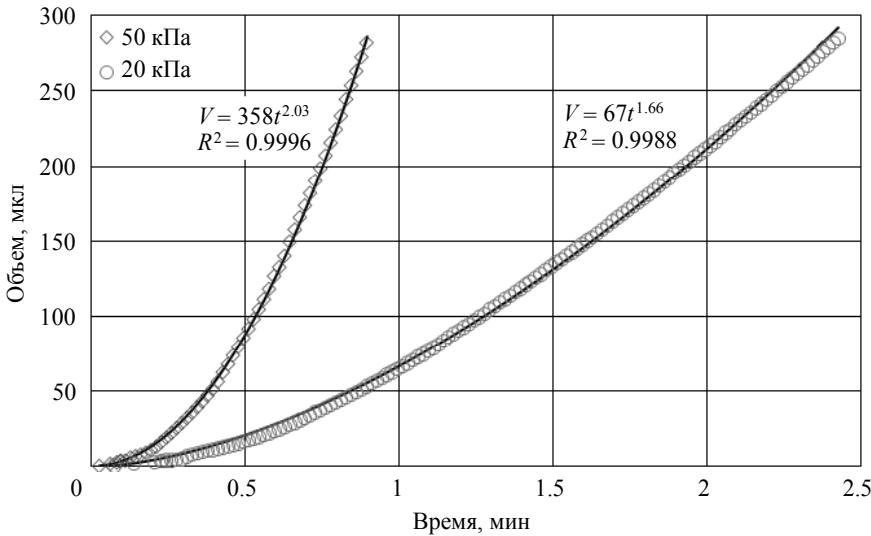


Рис. 7. Зависимость объема прошедшей воды от времени при перепадах давления 50 и 20 кПа и аппроксимирующие функции
Fig. 7. The pumped water volume versus time at pressure drops of 50 and 20 kPa and the approximating functions

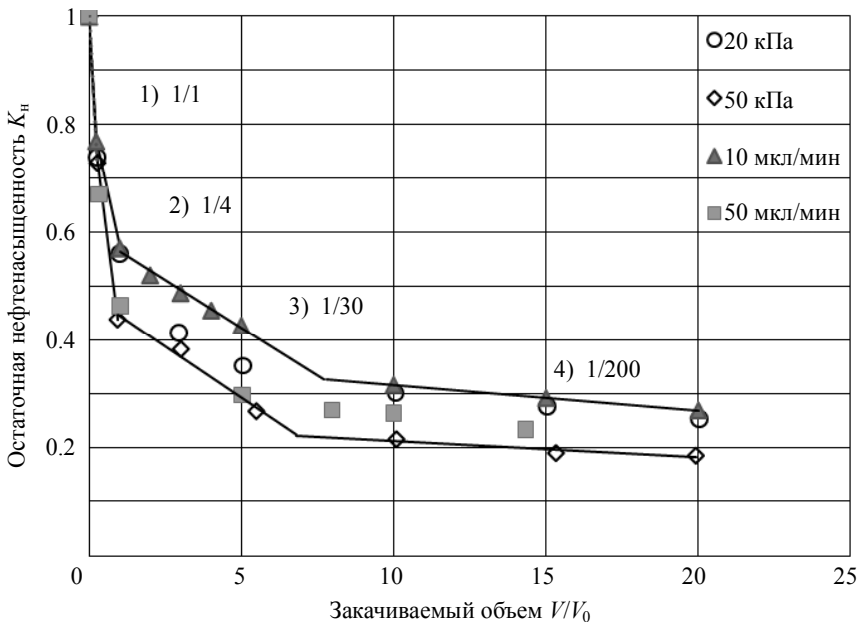


Рис. 8. Зависимость коэффициента остаточной нефтенасыщенности K_n от количества закачиваемого относительного объема (V/V_0) воды.
Отношение вытесняемой нефти к объему проходящей воды: 1), 2), 3), 4)
Fig. 8. Residual oil saturation factor K_n as a function of the injected relative volume (V/V_0).
A ratio of the displaced oil volume to the injected water volume: 1), 2), 3), and 4)

В соответствии с полученными зависимостями при неустойчивом вытеснении нефти для остаточной нефтенасыщенности вырисовываются 4 этапа по эффективности вытеснения:

1 этап – до «прорыва», извлекается 23–33 % нефти, $\Delta K_n = 0.67–0.77$ в зависимости от режима нагнетания. Наиболее эффективное извлечение на первом этапе до прорыва происходит при постоянном расходе 50 мкл/мин – 33 %;

2 этап – довытеснение, при объеме закачки воды до V_0 извлекается еще 20–30 % нефти, $\Delta K_n = 0.43–0.57$ в зависимости от режима нагнетания. Наиболее эффективное извлечение на 2 этапе при постоянном перепаде давления 50 кПа – 33 %;

3 этап – доотмыв, при объеме закачки воды до $7V_0$ примерно одинаковый, 20–24 %, но для малого перепада давления и расхода немного выше, что обусловлено наличием большей остаточной нефти после первых двух этапов. В целом, при больших перепаде давления и расходе извлечено больше, $\Delta K_n = 0.23–0.33$;

4 этап – доотмыв, при объеме закачки воды до $20V_0$ примерно одинаковый, 5–7 %. В целом, при больших перепаде давления и расходе извлечено больше, $\Delta K_n = 0.18–0.25$. Наиболее эффективным по общему объему остаточной нефти является режим вытеснения при постоянном перепаде давления 50 кПа, $\Delta K_n = 0.18$, соответственно извлечение нефти – 82 %.

По темпам извлечения количество вытесненной нефти по отношению к прокачанной воде (определяется тангенсом угла наклона аппроксимирующих линий на рис. 8): 1 этап – 100 %, 2 этап – 25 %, 3 этап – 3.5 % и 4 этап – 0.5 %.

Приведем оценку размеров капель, удерживаемых капиллярными силами при создавшемся градиенте давления в модели. Капиллярное давление на цилиндрической поверхности будет равно $P_k = \sigma/h$, где σ – поверхностное натяжение. Перепад давления на капле можно оценить из градиента давления в ячейке: $\nabla P = \Delta P/l_1$. Длину капли обозначим l_k , на ней будет перепад давления: $l_k \cdot \nabla P$. Таким образом, размер капли при заданном градиенте давления будет определяться отношением: $l_k = P_k/|\nabla P| = \sigma l_1/(h|\Delta P|)$. При перепаде давления $\Delta P = 20$ кПа, $h = 10$ мкм, $\sigma = 32$ мН/м, $l_1 = 3.5$ см размер защемленной капли будет $l_k = 5.6$ мм. При перепаде давления 50 кПа, длина защемленных капель будет порядка 2 мм, что качественно согласуется с изображениями на рис. 5, *b, d*. При постоянном расходе, после замещения нефти водой перепад давления снижается от 18 кПа до 8 кПа при 10 мкл/мин, а при 50 мкл/мин снижается от 28 кПа до 9 кПа (рис. 3, *b, d* и 5, *b, d*). Соответственно длина капель нефти порядка 13 мм. На рисунке длина капель немного больше, за счет дополнительного сдерживания капель миниском фронтальной части капли.

Выводы

1. Разработана установка с использованием методов визуализации для микрогидродинамических исследований, в том числе процессов вытеснения. Все элементы установки управляются с компьютера и в синхронизованном виде сохраняются в нем (видеоизображения, показания датчика давления, весов и заданного расхода).

2. Фрактальный анализ эволюции «вязких пальцев» при двух режимах вытеснения при постоянном перепаде давления и постоянном расходе позволил установить: 1) по мере внедрения пальцев, размеры растущих кластеров увеличиваются и их фрактальная размерность тоже возрастает; 2) в режиме постоянного перепада давления зависимости $D(V/V_0)$ хорошо аппроксимируются степенными функция-

ми, которые при кратном увеличении (в 2.5 раза) перепада давления практически совпадают, в то время как экспериментальные зависимости в режиме постоянного расхода не поддаются такой аппроксимации и существенно отличаются как друг от друга, так и от режима постоянного давления.

3. В режиме постоянного расхода более быстрый рост фрактальной размерности на начальном этапе нагнетания в сравнении с постоянным перепадом обусловлен более быстрым нарастанием кластеров из-за больших соответствующих расходу перепадов.

4. Качественный анализ картины вытеснения до прорыва показывает большую сплошность вытесняющей воды при постоянном расходе и более эффективное вытеснение при расходе 50 мкл/мин. В процессе вытеснения большее диспергирование вытесняемой фазы (нефти) происходит при постоянном перепаде давления, более эффективное вытеснение при прохождении большего объема воды – 10 объемов ячейки (рис. 5, *b*, 6, *b*, и рис. 5, *d*, 6, *d*).

5. Выявлено 4 этапа вытеснения нефти водой при постоянном перепаде давления и заданном расходе: 1) до прорыва воды; 2) при закачке воды до 1 объема ячейки; 3) при закачке воды от 1 до 7 объемов ячейки и 4) дальнейшая закачка от 7 до 20 объемов ячейки. По темпам извлечения количество извлеченной нефти по отношению к прокачанной воде: 1 этап – 1/1; 2 этап – 1/4; 3 этап – 1/30 и 4 этап – 1/200.

6. Количественное сравнение эффективности вытеснения показывает, что до прорыва наиболее эффективно вытеснение при постоянном расходе (50 мкл/мин), а при больших объемах прокачки (более 10 объемов ячейки) эффективнее вытеснение при постоянном перепаде давления (50 кПа).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 1958. V. 245. No. 1242. P. 312–329. <https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0085>.
2. McLean J.W., Saffman P.G. The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele Shaw cell // Journal of Fluid Mechanics. 1981. V. 102. P. 455–469. <https://doi.org/10.1017/S0022112081002735>.
3. Телеснин Р.В. Молекулярная физика: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1965. 298 с.
4. Ахметов А.Т., Саметов С.П., Власов С.А., Каган Я.М., Краснопецева Н.В. О возможном механизме снижения остаточной нефтенасыщенности // Тезисы докладов II Всероссийской научно-практической конференции «Практические аспекты нефтепромышленной химии» в рамках международного форума «Большая химия» и XX международной специализированной выставки ГАЗ. НЕФТЬ. ТЕХНОЛОГИИ – 2012. 22–25 мая 2012 г., г. Уфа. С. 10–12.
5. Ахметов А.Т., Власов С.А., Каган Я.М., Краснопецева Н.В. Снижение остаточной нефтенасыщенности биополимерным раствором // Oil&Gas Journal Russia. Спецвыпуск: Трудно-извлекаемые, нетрадиционные запасы нефти и газа. 2012. №7 [62]. С. 71–78.
6. Homay G.M. Viscous fingering in porous media // Annual review of fluid mechanics. 1987. V. 19. No. 1. P. 271–311. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.19.010187.001415>.
7. Jackson S.J., Power H., Giddings D., Stevens D. The stability of immiscible viscous fingering in Hele-Shaw cells with spatially varying permeability // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017. V. 320. P. 606–632. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.03.030>.
8. Chesnokov A., Liapidevskii V. Viscosity-stratified flow in a Hele-Shaw cell // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. V. 89. P. 168–176. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.016>.

9. Мавлетов М.В., Валиев А.А. Эффективность неустойчивого вытеснения нефти из ячейки Хеле-Шоу // Нефтепромысловое дело. 2018. № 8. С. 42–45. <https://doi.org/10.30713/0207-2351-2018-8-42-45>.
10. Brandao R., Miranda J.A. Capillary and geometrically driven fingering instability in nonflat Hele-Shaw cells // Physical Review E. 2017. V. 95. No. 3. P. 033104. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.033104>.
11. Akhmetov A.T., Valiev A.A., Rakhimov A.A., Sametov S.P. Anisotropic Properties of Blood in a Vessel with Stenosis // Doklady Physics. Pleiades Publishing, 2018. V. 63. No. 11. P. 476–480. <https://doi.org/10.1134/S1028335818110058>.
12. Li J., Du Q., Sun C. An improved box-counting method for image fractal dimension estimation // Pattern Recognition. 2009. V. 42. No. 11. P. 2460–2469. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2009.03.001>.
13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Физматгиз, 1959.

Статья поступила 12.12.2019 г.

Valiev A.A., Akhmetov A.T., Rakhimov A.A. (2020) UNSTABLE DISPLACEMENT IN A PLANE-PARALLEL MICROCHANNEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 68–82

DOI 10.17223/19988621/65/5

Keywords: Hele-Shaw cell, displacement, pressure drop, volume flow rate, “viscous fingers”, fractal dimension, capillary forces, viscous instability.

Unstable immiscible water-oil displacement is considered in a Hele-Shaw cell at a constant pressure drop or at a constant flow rate. Unstable displacement in a Hele-Shaw cell with small gaps is characterized by valuable capillary forces, which lead to the displaced phase pinching. The capillary boundary between water and oil represents a curved cylindrical surface with two radii: a radius of 10 μm and a radius that is several orders of magnitude higher and corresponds to a varying shape of the unstable displacement boundary. The power dependence of the fractal dimension on the injected volume of the displacing fluid at a constant pressure drop is revealed, which does not change with the pressure drop increased by 2.5 times. An outburst of the displacing fluid at a constant pressure drop leads to a redistribution of local pressures, a change in structure, and a gradual increase in the velocity of “viscous fingers”. It is shown that the displacement process is characterized by four stages, which alternate almost stepwise in terms of the content of the displaced oil taken relative to the volume of injected water: 100 %, 25 %, 3.5 %, and 0.5 %. At the initial stage, displacement at a constant flow rate is more efficient, while for large volumes, it is more efficient at a constant pressure drop.

Azat A. VALIEV (Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russian Federation). E-mail: azatphysic@mail.ru

Alfir T. AKHMETOV (Candidate of Physics and Mathematics, Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russian Federation). E-mail: alfir@anrb.ru

Artur A. RAKHIMOV (Candidate of Physics and Mathematics, Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russian Federation). E-mail: ragar83@mail.ru

REFERENCES

1. Saffman P.G., Taylor G. (1958) The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 245(1242). pp. 312–329. DOI: 10.1098/rspa.1958.0085.
2. McLean J.W., Saffman P.G. (1981) The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*. 102. pp. 455–469. DOI: 10.1017/S0022112081002735.

3. Telesnin R.V. (1965) *Molekulyarnaya fizika: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Molecular physics: a textbook for universities]. Moscow: Vysshaya shkola.
4. Akhmetov A.T., Sametov S.P., Vlasov S.A., Kagan Ya.M., Krasnopevtseva N.V. (2012) O vozmozhnom mekhanizme snizheniya ostatnochnoy neftenasyshchennosti [On the possible mechanism for residual oil saturation reduction]. *Theses of reports on the II All-Russian Scientific and Practical Conference "Practical Aspects of Oilfield Chemistry" at the international forum "Big Chemistry" and the XX international specialized exhibition GAZ. OIL. TECHNOLOGIES – 2012, Ufa*. pp. 10–12.
5. Akhmetov A.T., Vlasov S.A., Kagan Y.M., Krasnopevtseva N.V. (2012) Decrease in residual oil saturation by biopolymer solution. *Oil & Gas Journal Russia*. 7(62). pp. 71–78.
6. Homsy G.M. (1987) Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 19(1). pp. 271–311. DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.001415.
7. Jackson S.J., Power H., Giddings D., Stevens D. (2017) The stability of immiscible viscous fingering in Hele-Shaw cells with spatially varying permeability. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 320. pp. 606–632. DOI: 10.1016/j.cma.2017.03.030.
8. Chesnokov A., Liapidevskii V. (2017) Viscosity-stratified flow in a Hele-Shaw cell. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 89. pp. 168–176. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.016.
9. Mavletov M.V., Valiev A.A. (2018) Effektivnost' neustoychivogo vytesneniya nefiti iz yacheyki Hele-Shou [Efficiency of unstable oil displacement from a Hele-Shaw cell]. *Neftepromyslovoye delo – Oilfield Engineering*. 8. pp. 42–45. DOI: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45.
10. Brandao R., Miranda J.A. (2017) Capillary and geometrically driven fingering instability in non-flat Hele-Shaw cells. *Physical Review E*. 95(3). pp. 033104. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.033104.
11. Akhmetov A.T., Valiev A.A., Rakhimov A.A., Sametov S.P. (2018) Anisotropic properties of blood in a vessel with stenosis. *Doklady Physics*. 63(11). pp. 476–480. DOI: 10.1134/S1028335818110058.
12. Li J., Du Q., Sun C. (2009) An improved box-counting method for image fractal dimension estimation. *Pattern Recognition*. 42(11). pp. 2460–2469. DOI: 10.1016/j.patcog.2009.03.001.
13. Loytsyanskiy L.G. (1959) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Fizmatgiz.

Received: December 12, 2019

УДК 531.332.1

DOI 10.17223/19988621/65/6

С.О. Гладков, С.Б. Богданова

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Проведено аналитическое и численное решение задачи о движении тел с переменной массой $m(t)$ по брахистохроне. Задача решается в подвижном ортогональном единичном базисе $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$, выбранному в произвольной точке траектории и являющемуся наиболее рациональным в плане удобства вычислений. Благодаря предложенному ранее методу получена полная замкнутая система уравнений, описывающая нелинейную динамику движения тела с учетом сил как сухого, так и вязкого трения. С помощью численных методов построены различные виды траекторий в зависимости от входящих в задачу параметров.

Ключевые слова: брахистохрона, переменная масса, реакция желоба, нелинейные уравнения, мгновенный базис.

В этой работе, так же, как и в предыдущих работах [1–5], благодаря предложенному в них методу, будут получены уравнения движения тел с переменной массой по брахистохроне.

Как было строго доказано, при выполнении равенства $\frac{v^2}{R} = g \cos \alpha$, где v – скорость тела; R – радиус кривизны траектории (желоба) в данной точке; g – ускорение силы тяжести, а α – острый угол между касательной, проведенной в той же точке траектории и осью x , получается уравнение брахистохроны. При этом сила реакции, в общем случае определяемая как $N = m \left(\frac{v^2}{R} + g \cos \alpha \right)$, будет равна просто $2mg \cos \alpha$. В том случае, если выполняется противоположное условие, а именно, $\frac{v^2}{R} = -g \cos \alpha$, сила реакции N будет равна нулю. В результате получается, как и должно быть, траектория в виде обычной параболы, характерной для свободного движения тела в отсутствие сопротивления со стороны внешней среды.

Подобное гипотетическое предположение было главной идеей упомянутых чуть выше работ, которое позволило нам чисто аналитически описывать любое динамическое движение тел, перемещающихся по произвольной в общем случае форме желоба, обойдясь при этом без так называемого управляющего параметра, который применялся и применяется до сих пор во множестве работ других авторов.

Следует отметить, что предложенный нами подход при решении определенного класса задач из области теоретической механики, относится к описанию динамики криволинейного движения и базируется на составлении соответствующих уравнений в единичном ортогональном подвижном базисе $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$, где $\mathbf{n}$ – единич-

ный вектор нормали, проведенный в данной точке траектории, а τ – единичный вектор касательной, выбранный в направлении движения тела.

Уравнение брахистохроны для тела переменной массы

Задача, о которой пойдет сейчас речь, несмотря на ее, казалось бы, довольно абстрактное значение, тем не менее является важным примером из намеченного класса проблем, большим плюсом которого, на наш взгляд, является возможность ее точного чисто аналитического решения.

Как это следует из названия статьи, речь пойдет о решении задачи, связанной с описанием динамики движения тел переменной массы с заданным законом изменения $m(t)$.

Заметим, что задачи подобного типа не новы, и в качестве примера можно привести, например, работы [6–8], в которых приводится решение задачи при движении тел переменной массы, а соответствующее решение в них ищется благодаря методу управляющего параметра, впервые предложенного Понтрягиным и подробно описанного им в монографии [9].

Наше существенное отличие от всех предыдущих работ различных авторов заключается в том, что при решении этой задачи мы не будем использовать метод управляющего параметра, а воспользуемся вполне апробированным подходом, который уже был намечен нами в работах [1–5]. Геометрию задачи иллюстрирует рис. 1.

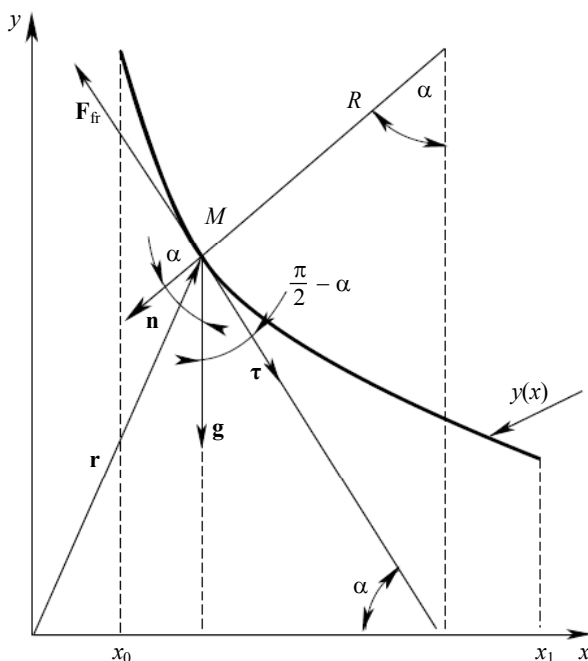


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи.

Комментарии в тексте

Fig. 1. Schematic representation of the problem geometry.

The comments are in the paper

В процессе решения мы будем использовать мгновенный базис $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$, в котором запишем систему интересующих нас динамических уравнений, и чтобы их получить, воспользуемся уравнениями Гамильтона [10]. Имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla H, \quad (1)$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс тела; $H = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r})$ – гамильтониан, $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия.

Из уравнения (1) следует, что

$$\dot{m} \mathbf{v} \boldsymbol{\tau} + m \left(\dot{\mathbf{v}} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} \right) = \mathbf{F}. \quad (2)$$

Проекция уравнения (2) на ось $\mathbf{n}$ приведет в результате к первому соотношению

$$N = m \left(\frac{v^2}{R} + g \cos \alpha \right). \quad (3)$$

А проекция на ось $\boldsymbol{\tau}$ с учетом сил трения дает

$$m \dot{\mathbf{v}} + \dot{m} \mathbf{v} = mg \sin \alpha - \mu N - k \mathbf{v}, \quad (4)$$

где μ – коэффициент сухого трения, а k – коэффициент вязкого трения, пропорциональный динамической вязкости среды η .

Условием того, что движение происходит по брахистохроне (см. пояснения, приведенные чуть выше, а также работы [1, 2]), служит равенство

$$\frac{v^2}{R} = g \cos \alpha. \quad (5)$$

Поскольку же, в свою очередь, должно выполняться соотношение

$$v = -R\dot{\alpha}, \quad (6)$$

уравнение (5) можно переписать в совсем простом виде как

$$v \dot{\alpha} = -g \cos \alpha. \quad (7)$$

Следовательно, полная система уравнений согласно (4) и (7) будет такой:

$$\begin{cases} m \dot{\mathbf{v}} + \dot{m} \mathbf{v} = mg \sin \alpha - \mu N - k \mathbf{v}, \\ v \dot{\alpha} = -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (8)$$

Для начала проанализируем эту систему уравнений при условии отсутствия диссипации энергии как со стороны среды, так и со стороны желоба. Полагая с этой целью, что $\mu = k = 0$, найдем из (8)

$$\begin{cases} m \dot{\mathbf{v}} + \dot{m} \mathbf{v} = mg \sin \alpha, \\ v \dot{\alpha} = -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (9)$$

Поделив верхнее уравнение на нижнее, будем иметь

$$\frac{1}{v} \frac{d \mathbf{v}}{d \alpha} + \frac{d}{d \alpha} \ln m = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$v = \frac{v_0 m_0}{m} \cos \alpha, \quad (10)$$

где постоянную интегрирования мы выбрали в факторизованном виде как произведение $v_0 m_0$, в котором $m_0 = m(0)$, $v_0 = v(0)$.

Далее, поскольку $\dot{x} = v \cos \alpha$, $\dot{y} = v \sin \alpha$, с учетом решения (10), находим

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 m_0 \int_0^t \frac{\cos^2 \alpha}{m(t)} dt, \\ y = y_0 + v_0 m_0 \int_0^t \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{m(t)} dt. \end{cases} \quad (11)$$

Чтобы система уравнений (11) была замкнутой, необходимо определить теперь зависимость $\alpha(t)$. С этой целью следует вернуться к уравнениям (9) и избавиться в них от переменной v . Эту простую операцию легко проделать, выразив скорость из нижнего уравнения и подставив ее в верхнее. В результате простых преобразований приходим к уравнению

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}} = \frac{\dot{m}}{m},$$

откуда сразу же следует искомое соотношение

$$\alpha(t) = \frac{C}{m_0} \int_0^t m(t) dt, \quad (12)$$

где константу интегрирования следует выбрать в виде

$$C = \frac{g}{v_0}.$$

Таким образом, зависимость угла наклона касательной от времени будет следующей

$$\alpha(t) = \frac{g}{m_0 v_0} \int_0^t m(t) dt. \quad (13)$$

Как видим, полученные решения (11) и (13) составляют полную замкнутую систему искомых соотношений, описывающих движение тел переменной массы по брахистохроне.

Полагая константы интегрирования x_0 и y_0 , фигурирующие в (11), равными нулю, приходим к окончательному неявному решению задачи

$$\begin{cases} x = v_0 m_0 \int_0^t \frac{\cos^2 \alpha}{m(t)} dt, \\ y = v_0 m_0 \int_0^t \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{m(t)} dt, \\ \alpha(t) = \frac{g}{m_0 v_0} \int_0^t m(t) dt. \end{cases} \quad (14)$$

Уравнение брахистохроны для тела с заданным законом изменения массы

Проанализировать общее решение (14) можно численно, если задать конкретные зависимости $m(t)$. Действительно, если положить, например, что

$$m(t) = m_0 e^{-\gamma t}, \quad (15)$$

где γ – некоторый коэффициент убывания массы, численное интегрирование системы уравнений (14) позволяет получить параметрические зависимости координат от времени, приводящие к неявной зависимости $y(x)$, показанной на рис. 2 для случая $\gamma = 0.2$ и $m_0 = 1$.

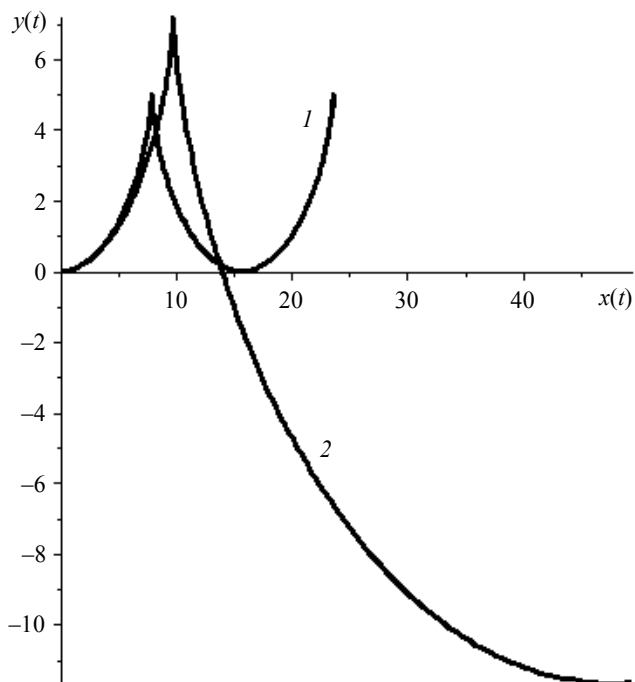


Рис. 2. Зависимость траектории движения от массы тела: кривая 1 – масса постоянная, кривая 2 построена для зависимости, меняющейся по закону (15)

Fig. 2. Dependency of a moving particle trajectory on the body mass: curve 1 corresponds to the constant mass; curve 2 corresponds to the mass varying in accordance with law (15)

В том случае, если зависимость массы от времени задана в виде растущей функции

$$m(t) = m_0 e^{\gamma t}, \quad (16)$$

результат численного решения уравнений (14) приводит к траектории $y(x)$, показанной на рис. 3 для случая $\gamma = 1$ и $m_0 = 1$.

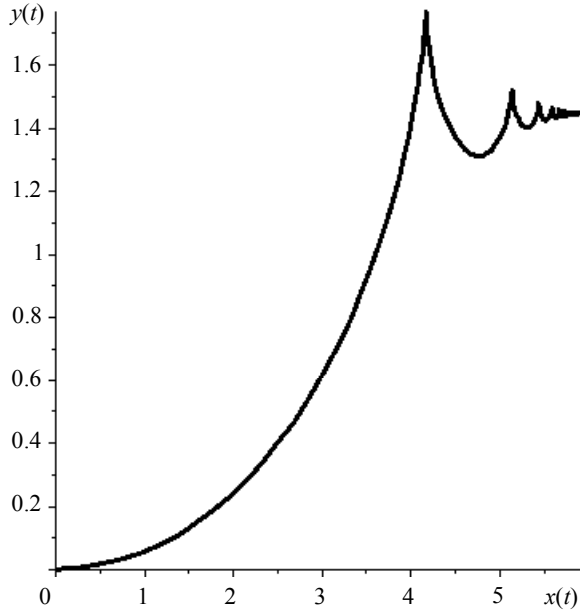


Рис. 3. Траектория движения частицы с массой, меняющейся по закону (16)

Fig. 3. Trajectory of the moving particle with the mass changing in accordance with law (16)

Наконец, если мы зададим изменение массы в виде

$$m(t) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{gt}{v_0}\right)^2}}, \quad (17)$$

решения уравнений (14) легко находятся аналитически. В самом деле, в результате простого интегрирования получаем, что

$$\begin{cases} x = \frac{v_0^2}{g} \left(\arcsin\left(\frac{gt}{v_0}\right) + 2\pi n + \frac{gt}{v_0} \sqrt{1 - \left(\frac{gt}{v_0}\right)^2} \right), \\ y = \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (18)$$

Выражая отсюда x через y , приходим, следовательно, к искомой траектории, показанной на рис. 4:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2gy}}{v_0}\right) + 2\pi n + \frac{\sqrt{2gy}}{v_0} \sqrt{1 - \frac{2gy}{v_0^2}} \right), \quad (19)$$

где $0 \leq y \leq \frac{v_0^2}{2g}$.

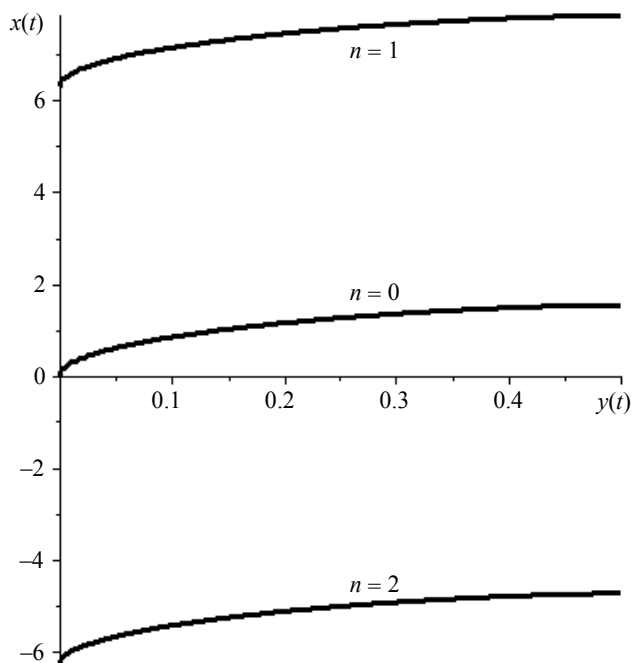


Рис. 4. Зависимость (19) при различных значениях n
Fig. 4. Functional dependence (19) at various values of n

Решение задачи при учете сил сопротивления также довольно просто находится, но при этом следует решать систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{v} + \frac{\dot{m}}{m} v = g (\sin \alpha - 2\mu \cos \alpha) - \frac{v}{\tau}, \\ v \dot{\alpha} = -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (20)$$

где учтено, что $N = 2mg \cos \alpha$, а введенное время $\tau = \frac{m}{k}$ соответствует времени остановки тела в результате действия диссипативных сил со стороны континуума. В этом случае задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$v = \frac{v_0 m_0}{m} \exp \left(2\mu \alpha + \frac{1}{g\tau} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{v}{\cos \alpha} d\alpha \right) \cos \alpha. \quad (21)$$

Заключение

Таким образом:

1. Дано описание движения тел переменной массы по брахистохроне.
2. Проведен анализ полученных уравнений, как при учете сил сопротивления, так и в пренебрежении ими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101-1-5.
2. Гладков С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. С. 164002-1-5.
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. С. 171101-1-5.
4. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. С. 172101-1-6.
5. Гладков С.О., Богданова С.Б. О классе двумерных геодезических кривых в поле силы тяжести // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. №5 8. С. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/58/1.
6. Иванов А.И. О брахистохроне частицы переменной массы с постоянным отношением количества присоединяемых и отделяемых частиц // Доклады АН УССР. Серия А. 1968. С. 683–686.
7. Руссаловская А.В., Иванов Г.И., Иванов А.И. О брахистохроне точки переменной массы с трением и экспоненциальным законом истечения массы // Доклады АН УССР. Серия А. 1973. С. 683–686.
8. Jeremić O. et al. On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields // Math. And Computer Modelling. 2011. V. 54. P. 2900–2912.
9. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Физматлит, 2004. 224 с.

Статья поступила 20.05.2019 г.

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) TO THE THEORY OF MOTION OF BODIES WITH VARIABLE MASS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 83–91

DOI 10.17223/19988621/65/6

Keywords: brachistochrone, variable mass, trench response, nonlinear equations, instant basis.

In previous papers, a new approach has been proposed for describing the dynamics of nonlinear motion of material bodies with account for dry and viscous friction, which is based on the following steps: formulation of the corresponding dynamic equations in the single orthogonal moving basis formed by unit normal vectors and a tangent, which are drawn at a given trajectory point with the tangent vector directed along the body; and an assumption that in the framework of nonlinear motion along a brachistochrone, the reaction force can be specified analytically only.

Having applied this approach, the problem on the description of the dynamics of motion of variable-mass bodies at a given mass variation law is solved in this paper. A set of simultaneous dynamic equations is obtained to parametrically describe the point particle motion. Based on the numerical solution of these equations, three types of brachistochrone are plotted for desired mass variation laws, and their significant difference from the constant-mass case is shown.

Sergey O. GLADKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Sofiya B. BOGDANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

REFERENCES

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskii fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometrical phase transition in the problem on brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. pp. 161101-1-5.
2. Gladkov S.O. (2016) O traektorii dvizheniya tela, vkhodyashchego v zhidkost' pod proizvol'nym uglom [On the trajectory of the body immersing in a fluid at an arbitrary angle]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 4. pp. 164002-1-5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) Obobshchennye dinamicheskie uravneniya ploskogo krivolineynogo dvizheniya material'nogo tela po zhelobu s uchetoм sil treniya (ikh chislennyy analiz v nekotorykh chastnykh sluchayakh) [Generalized dynamic equations for a plane curvilinear motion of a material body in a trench with account for friction forces (their numerical analysis in some particular cases)]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. pp. 171101-1-5.
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheyся brakhistokhrone s uchetoм sil treniya [On the theory of ball motion along a rotating brachistochrone with account for friction forces]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 2. pp. 172101-1-6.
5. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2019) O klasse dvukhmernykh geodezicheskikh krivyykh v pole sily tyazhesti [On the class of two-dimensional geodesic curves in the field of the gravity force]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/58/1.
6. Ivanov A.I. (1968) O brakhistokhrone chastitsy peremennoy massy s postoyannym otnosheniem kolichestva prisoedinyaemykh i otdelyaemykh chastits [On the brachistochron of a variable-mass particle with a constant ratio of the number of attached and separated particles]. *Doklady AN USSR. Seriya A*. pp. 683–686.
7. Rusalovskaya A.V., Ivanov G.I., Ivanov A.I. (1973) O brakhistokhrone tochki peremennoy massy s treniem i eksponentsial'nym zakonom istecheniya massy [On the brachistochron of a variable-mass point with account for friction and exponential law of mass outflow]. *Doklady AN USSR. Seriya A*. pp. 1024–1026.
8. Jeremic O., Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z. (2011) On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields. *Mathematical and Computer Modelling*. 54(11-12). pp. 2900–2912. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.07.011.
9. Boltyanskiy V.G. (1969) *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* [Mathematical methods of optimal control]. Moscow: Nauka.
10. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Received: May 20, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/65/7

М.А. Кальмова, О.В. Ратманова

АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С БАЛКОЙ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА

Рассматривается задача о влиянии движущегося диска на продольные колебания балки, соответствующей модели Кельвина. Построено интегродифференциальное уравнение движения диска, в котором активная движущая сила и импульсы являются силовыми факторами. Применяя метод разделения переменных и рассматривая материальные параметры балки, решения образованной системы интегродифференциальных уравнений были найдены при помощи интегрального преобразования Лапласа. На основании численного моделирования установлено, что имеет место автоколебательный режим движения балки.

Ключевые слова: модель Кельвина, продольные колебания, интегральное преобразование Лапласа, интегродифференциальные уравнения

Современная техника и технология предъявляют высокие требования к реологической модели твёрдого тела. Необходимо, чтобы модель реально отражала поведение тела при статическом и динамическом нагружениях. В связи с этим в практику расчёта конструкций и технологических процессов всё чаще внедряются математические модели, такие, как модель Максвелла, физическая модель вязкопластичного тела, модель Фойгта, Бернулли, которые учитывают свойства конструкционных материалов. Во многом этому способствует бурное развитие вычислительной техники и вычислительной математики, которые позволяют доводить решение сложных нелинейных динамических задач до конечного численного результата [1–8].

Постановка задачи

Проведем анализ влияния силового взаимодействия движущегося однородного диска по балке, наделенной реологическими свойствами в соответствие с моделью Кельвина [9–13].

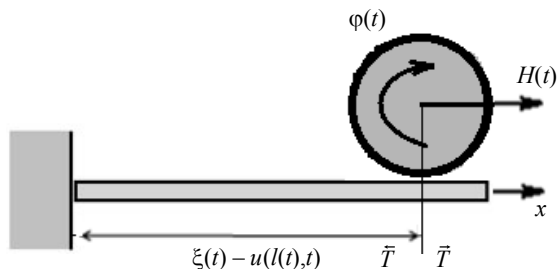


Рис. 1. Система однородного диска и балки
Fig. 1. Uniform disk and beam system

Напряженно-деформируемое состояние балки в интегральном релаксационном виде выражается равенством

$$\sigma(x, t) = E_1 \left[\varepsilon(x, t) - \int_0^t \mathfrak{R}(t - \tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau \right], \quad (1)$$

где $\mathfrak{R}(t - \tau)$ – ядро релаксации силы; E_1 – длительный модуль упругости на растяжение; $\varepsilon(x, t)$ – относительное удлинение; $H(t)$ – активная сила.

Интегродифференциальное уравнение запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \mathfrak{R}(t - \tau) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau \right] + \frac{H}{F} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kr). \quad (2)$$

Здесь δ – функция Дирака, а также зададимся начальными и граничными условиями, описывающими продольные колебания консольной балки в случае жесткого закрепления левого конца балки:

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_2(x). \quad (4)$$

Решение интегродифференциального уравнения (2) с начальными и граничными условиями найдем в виде суммы двух функций $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$.

Функция $v(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему уравнению (2) и заданным граничным и начальным условиям, а функция $w(x, t)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению (2).

Найдем решение однородного уравнения.

Применяя метод Фурье к соответствующему уравнению (2) приходим к следующим выражениям:

$$X'' + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0; \quad (5)$$

$$\ddot{T} + \omega^2 \left(T - \int_0^t \mathfrak{R}(t - \tau) T(\tau) d\tau \right) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) имеет решение

$$X = C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x.$$

Учитывая специфику закрепления концов балки, находим

$$D = 0, \quad C \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0.$$

Частотное уравнение принимает вид

$$\cos \frac{\omega l}{c} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\frac{\omega l}{c} = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Для решения интегродифференциального уравнения (6) применим интегральное преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} T(s) \div T(t), L\{T(t)\} = T(s), L\{\dot{T}(t)\} = s^2 T(s) - [sT(0) + \dot{T}(0)], \\ L\left\{\left(\int_0^t \Re(t-\tau)T(\tau)d\tau\right)\right\} = T(s)\bar{T}(s). \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что

$$\bar{T}(s) = \frac{E_1 - E_2}{nE_1} \frac{1}{\frac{1}{n} + s},$$

найдем изображающую функцию

$$T(s) = \frac{[sT(0) + \dot{T}(0)] \left(\frac{1}{n} + s\right)}{s^3 + \frac{1}{n}s^2 + \omega^2 s + \frac{E_2}{E_1} \frac{\omega^2}{n}}. \quad (9)$$

Здесь $T(0)$ – начальная координата, $\dot{T}(0)$ – начальная скорость. Для численного анализа принято $\dot{T}(0) = 3s, T(0) = 0$. Для нахождения оригинала используем вторую теорему разложения, предварительно, определив корни знаменателя p_1, p_2, p_3 выражения:

$$p_1 = -0,015, \quad p_2 = -0,00249 - 9,9i, \quad p_3 = -0,00249 + 9,9i.$$

$$\begin{aligned} e^{p_2 t} &= e^{-0,00249t} (\cos 9,99t - i \sin 9,99t), \\ e^{p_3 t} &= e^{-0,00249t} (\cos 9,99t + i \sin 9,99t). \end{aligned} \quad (10)$$

Общим решением однородного уравнения (6) будет функция

$$T(t) = \frac{u_1}{\dot{v}_1} e^{p_1 t} + \frac{u_2}{\dot{v}_2} e^{p_2 t} + \frac{u_3}{\dot{v}_3} e^{p_3 t}. \quad (11)$$

Окончательное решение однородного уравнения, соответствующее уравнению, определяющему свободные колебания балки (2), представим в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \quad (12)$$

Найдем решение функции $w(x, t)$.

Функцию будем разыскивать в виде ряда по собственным функциям $\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ однородной задачи

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \quad (13)$$

Заменяя функцию $w(x, t)$ рядом (13), запишем уравнение (2) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\gamma}_k(t) + \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{2l^2} \left[\gamma_k(t) - \int_0^t \Re(t-\tau) \gamma_k(\tau) d\tau \right] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = G(x, t), \quad (14)$$

где
$$G(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}; \quad (15)$$

$$q_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx. \quad (16)$$

Приравнявая в разложениях (15) и (16) коэффициенты при собственных функциях, получим уравнение для функции $\gamma_k(t)$ с нулевыми начальными условиями $\gamma_k(0) = 0, \dot{\gamma}_k(0) = 0$:

$$\ddot{\gamma}_k(t) + \Omega^2 \left[\gamma_k(t) - \int_0^t \Re(t-\tau) \gamma_k(\tau) d\tau \right] = q_k(t). \quad (17)$$

Решение интегродифференциального уравнения (16) будем находить с применением преобразования Лапласа. Составим изображающее уравнение:

$$s^2 \gamma(s) + \Omega^2 \gamma(s) [1 - \bar{\Re}(s)] = (1 - e^{-s\tau})^{-1}, \quad (18)$$

где
$$\bar{\Re}(s) = \frac{E_1 - E_2}{nE_1} \frac{1}{\frac{1}{n} + s}.$$

Лапласова трансформанта уравнения (18) принимает вид

$$\gamma(s) = \frac{E_1 H \left(\frac{1}{n} + s \right)}{(s^3 + \frac{1}{n} s^2 + \Omega^2 s + \frac{E_2}{E_1} \frac{\Omega^2}{n}) (1 - e^{-s\tau})} \quad (19)$$

Начальную функцию найдем, применяя вторую теорему разложения:

$$\gamma_k(t) = \frac{H \sin(t, \Omega)}{\Omega} (E_1 - E_2) \Omega^2 \left(\frac{e^{-\frac{t}{n}}}{E_1 (1 + n^2 \Omega^2)} + \frac{-n \Omega \cos(t, \Omega) + \sin(t, \Omega)}{E_1 (1 + n^2 \Omega^2)} \right) - \sum_{k=1}^{10} \frac{2\tau}{\tau^2 - k^2 \tau_1^2} \cos \left(k \frac{\tau_1}{\tau} \Omega t \right). \quad (20)$$

Заключение

Проведя численный анализ, можно считать, что имеет место автоколебательный режим движения балки, источником которого являются периодические импульсы, порождаемые дельта-функцией и воспринимаемые вязкоупругим материалом балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 18–21.
2. Бадалов Ф.Б. Динамические гасители колебаний наследственно-деформируемых систем. Ташкент: ТашГАИ, 2003. 81 с.
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М., 1967. 483 с.
4. Вильке В.Г. Теория качения твердого колеса по деформируемому рельсу // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1997. № 1. С. 48–55.
5. Chirkunov Yu. A. Nonlinear longitudinal vibrations of a viscoelastic rod in the kelvin model. Novosibirsk: Publishing House of NSTU, 2015. V. 79. No. 5.
6. Miftakhova A.R. Contact Problems for Rolling with Slip for Viscoelastic Solids // Journal of Friction and Wear. 2018. V. 39. No. 1. P. 55–61.
7. Bogomolov V., Raznitsyn I. On equivalence of kelvin and maxwell multielement models // Avtomobil'nyy transport (Kharkov). 2015. V. 37. С. 175–181.
8. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
9. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972. 327 с.
10. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 276 с.
11. Ишлинский А.Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 3. С. 24–35.
12. Kalmova M., Pavlov G. Analyzing the influence of the disk motion on longitudinal oscillations of a beam with rheological properties. XXVII R-S-P Seminar 2018, Theoretical Foundation of Civil Engineering. MATEC Web of Conferences 196, 01004 (2018).
13. Ржаницын А.П. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: Гостехиздат, 1949. 248 с.

Статья поступила 30.04.2019 г.

Kalmova M.A., Ratmanova O.V. (2020) ANALYSIS OF INTERACTION BETWEEN SOLIDS OF REVOLUTION AND A BEAM CORRESPONDING TO THE KELVIN MODEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 92–97

DOI 10.17223/19988621/65/7

Keywords: Kelvin model, longitudinal oscillations, Laplace integral transform, integro-differential equations.

Various formulations of the problem of a disk rolling on a plane have been studied by different researchers. In this paper, the effect of longitudinal oscillations of a beam, caused by the circular motion of a solid disk along the beam, on the mode of the disk motion is analyzed. Two versions of properties of a beam material are considered: an elastic beam and a viscoelastic beam corresponding to the Kelvin rheological model with relaxation and creep properties. The Fourier method is used as a method of separation of variables in the problem solving. When testing the beam and assuming its hereditary deformation, the rheological response force is introduced, which depends on longitudinal strains and their rate. The obtained result is presented as functions of time, which are adaptable for numerical integration. It is shown that beam oscillations arise from the disk motion and can be considered as self-oscillations.

Mariya A. KALMOVA (Samara State Technical University, Samara, Russian Federation). E-mail: kalmova@inbox.ru

Olesya V. RATMANOVA (Samara State Technical University, Samara, Russian Federation). E-mail: olesya654@yandex.ru

REFERENCES

1. Ishlinskiy A.Yu. (1940) Prodl'nye kolebaniya sterzhnya pri nalichii lineynogo zakona posledstviya i relaksatsii [Longitudinal vibrations of a rod in the presence of the linear law of consequences and relaxation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 4(1). pp. 18–21.
2. Badalov F.B. (2003) *Dinamicheskie gasiteli kolebaniy nasledstvenno-deformiruemyykh sistem* [Dynamic dampers of vibrations of hereditary-deformable systems]. Tashkent: TashGAI.
3. Neymark Yu.I., Fufaev N.A. (1967) *Dinamika negolonomnykh sistem* [Dynamics of non-holonomic systems]. Moscow: Nauka.
4. Wilke V.G. (1997) Teoriya kacheniya tverdogo kolesa po deformiruemomu rel'su [Theory of rigid wheel rolling along a deformable rail]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 1. p. 48–55.
5. Chirkunov Yu.A. (2015) Non-linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rod in Kelvin's model. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 79(5). pp. 506–513. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2016.03.012.
6. Miftakhova A.R. (2018) Contact problems for rolling with slip for viscoelastic solids. *Journal of Friction and Wear*. 39(1). pp. 55–61. DOI: 10.3103/S1068366618010105.
7. Bogomolov V., Raznitsyn I. (2015) On equivalence of Kelvin and Maxwell multielement models. *Avtomobil'nyy transport (Kharkov)*. 37. pp. 175–181.
8. Rabotnov Yu.N. (1977) *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka.
9. Moskvitin V.V. (1972) *Soprotivlenie vyazkouprugikh materialov* [Resistance of viscoelastic materials]. Moscow: Nauka.
10. Koltunov M.A. (1976) *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola.
11. Ishlinsky A.Yu. (1945) Ob uravneniyakh prostranstvennogo deformirovaniya ne vpolne uprugikh i vyazkoplasticheskikh tel [On equations of spatial deforming of not quite elastic and viscoplastic bodies]. *Izvestiya AN SSR*. 3. pp. 24–35.
12. Kalmova M., Pavlov G. (2018) Analyzing the influence of the disk motion on longitudinal oscillations of a beam with rheological properties. *MATEC Web of Conferences*. 196(4). 01004. DOI: 10.1051/mateconf/201819601004.
13. Rzhantsyn A.R. (1949) *Nekotorye voprosy mekhaniki sistem, deformiruyushchikhsya vo vremeni* [Some issues of mechanics of the systems deforming with time]. Moscow: Gostekhizdat.

Received: April 30, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/65/8

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик**ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ И НАГРУЗКИ
В ВЕРШИНЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ
С РОМБИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ**

Для изучения параметров состояния в вершине четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием используется неклассический подход. Рассматриваются нагружение пирамиды вблизи вершины поверхностными усилиями и включение пирамиды в упругую среду. Устанавливаются ограничения, для которых возможна корректная постановка задачи механики, выявляются сочетания геометрических и материальных параметров, обуславливающих неограниченный рост напряжений. Частные решения согласуются с известными аналитическими результатами.

Ключевые слова: пирамида с ромбическим основанием, особые точки, сингулярность, элементарный объем, неклассические задачи.

Особые точки деформируемых тел (вершины клиньев, конусов, многогранников, точки края поверхностей соединения элементов и т.п.) интересуют исследователей, так как вблизи таких точек реализуется концентрация напряжений, зарождается разрушение. Изучение параметров состояния в окрестности особых точек в настоящее время развивается по двум направлениям. Первое направление классическое (или асимптотическое). Классический подход предложен в работе [1] и затем развивался исследователями в публикациях [2–14 и др.]. Характерной особенностью классического подхода является исключение особой точки из области поиска решения. Как правило, в особую точку авторы классического подхода помещают полюс криволинейной системы координат (полярной, цилиндрической, сферической и т.п.). В полюсе нет однозначного соответствия между криволинейными координатами и точкой тела. Поэтому здесь не определены тензорные характеристики состояния (напряжения, деформации). Они не могут быть заданы в виде граничных условий и не могут быть найдены в виде решения. По этой причине классический подход рассматривает параметры состояния в особой точке в асимптотическом смысле. При этом подходе нельзя указать элементарный объем, в котором реализуется асимптотическое решение, а именно элементарный объем является носителем напряженно деформированного состояния в точке. Обычно авторы, использующие классический подход, ограничиваются изучением собственных значений характеристических уравнений соответствующих однородных задач. На основании анализа собственных значений формулируется критерий, при выполнении которого асимптотическое решение с приближением к особой точке неограниченно возрастает. Формулируемый критерий не исследуется авторами на условие достаточности. Но имеются примеры, когда критерий выполняется, а неограниченного роста асимптотического решения не происходит.

Второе направление изучения параметров состояния в особой точке назовем неклассическим [15–20]. При этом подходе особая точка, как и любая другая точка деформируемого тела, рассматривается в виде точки континуума и связанного

с ней элементарного объема. Точка континуума указывает местоположение особой точки, а элементарный объем является носителем материальных характеристик и параметров напряженно деформированного состояния (НДС). Представление об элементарном объеме, связанном с особой точкой, позволяет сформулировать в ней задаваемые ограничения на напряжения, деформации и корректно поставить задачу механики деформируемого твердого тела (МДТТ) [15]. Как правило, количество задаваемых ограничений на параметры состояния в особой точке превышает количество ограничений, задаваемых в обычных (не особых) граничных точках деформируемого тела. По этой причине задача механики для тела, содержащего особую точку, оказывается неклассической. Для линейно упругого тела неклассическая задача имеет единственное решение (при условии его существования). Такое решение может быть построено, например, численно-аналитическим итерационным методом [15].

В настоящей статье неклассический подход используется для изучения напряженного состояния в вершине четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием. Рассматривается случай поверхностной нагрузки вблизи вершины и случай включения такой пирамиды в упругую среду. Приведенные в работе аналитические решения для параметров состояния в вершине пирамиды согласуются с решениями, получаемыми общепринятыми методами теории упругости. Результаты исследований могут использоваться, в частности, при анализе НДС в окрестности вершин инденторов Кнуппа.

1. Четырехугольная пирамида с ромбическим основанием, нагруженная поверхностными силами вблизи вершины

1.1. Постановка задачи

Рассматривается элемент конструкции, содержащий особенность в виде вершины четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием (рис. 1). Пирамида определяется двумя независимыми параметрами – углом 2α при вершине ромба и углом ψ между высотой пирамиды и высотой треугольника, являющегося ее боковой гранью.

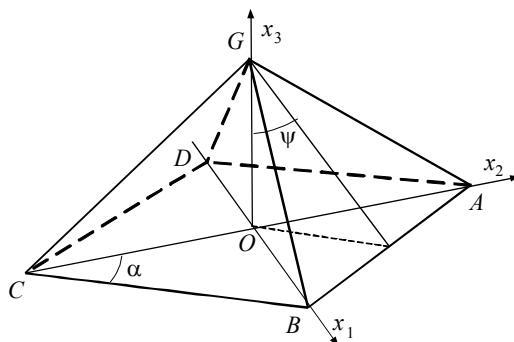


Рис. 1. Пирамида с ромбическим основанием
Fig. 1. Rhombic pyramid

С пирамидой связывается ортонормированная декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Оси x_1, x_2 направлены по диагоналям ромба, ось x_3 – по высоте пирамиды.

На боковых гранях пирамиды строятся тройки ортонормированных векторов.

На грани GAB :

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_n &= \bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_n &= \bar{e}_1 \sin \alpha - \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (1)$$

На грани GBC :

$$\begin{aligned}\bar{m} &= \bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_m &= \bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_m &= -\bar{e}_1 \sin \alpha - \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (2)$$

На грани GCD :

$$\begin{aligned}\bar{l} &= -\bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_l &= -\bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_l &= -\bar{e}_1 \sin \alpha + \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (3)$$

На грани GDA :

$$\begin{aligned}\bar{k} &= -\bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_k &= -\bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_k &= \bar{e}_1 \sin \alpha + \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (4)$$

Первые векторы в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, два других принадлежат им. Векторы нагрузки вблизи вершины G на боковых гранях пирамиды, ориентированных ортами $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}, \bar{k}$ представляются разложениями по базисам (1) – (4):

$$\begin{aligned}\bar{p}_n &= p_n \bar{n} + \tau_n \bar{\xi}_n + \vartheta_n \bar{\zeta}_n, \quad \bar{p}_m = p_m \bar{m} + \tau_m \bar{\xi}_m + \vartheta_m \bar{\zeta}_m, \\ \bar{p}_l &= p_l \bar{l} + \tau_l \bar{\xi}_l + \vartheta_l \bar{\zeta}_l, \quad \bar{p}_k = p_k \bar{k} + \tau_k \bar{\xi}_k + \vartheta_k \bar{\zeta}_k.\end{aligned}\quad (5)$$

В соответствии с принятой концепцией параметрами состояния в вершине пирамиды (в особой точке) являются параметры состояния, содержащего эту точку элементарного объема. Этот элементарный объем состоит из множества точек континуума, образующих окрестность вершины G . Линейный масштаб такой окрестности имеет порядок линейного масштаба представительного объема тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями к указанному объему. Поэтому в особой точке оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p_n, \quad \tau_{\xi_n} = \tau_n, \quad \tau_{\zeta_n} = \vartheta_n, \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_{\xi_m} = \tau_m, \quad \tau_{\zeta_m} = \vartheta_m, \\ \sigma_l &= p_l, \quad \tau_{\xi_l} = \tau_l, \quad \tau_{\zeta_l} = \vartheta_l, \quad \sigma_k = p_k, \quad \tau_{\xi_k} = \tau_k, \quad \tau_{\zeta_k} = \vartheta_k.\end{aligned}\quad (6)$$

В этих равенствах $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \sigma_k$ – нормальные напряжения на гранях пирамиды, ориентированных соответственно ортами $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}, \bar{k}$; $\tau_{\xi_n}, \tau_{\xi_m}, \tau_{\xi_l}, \tau_{\xi_k}$; $\tau_{\zeta_n}, \tau_{\zeta_m}, \tau_{\zeta_l}, \tau_{\zeta_k}$ – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (1) – (4). Компоненты тензора напряжений в элементарном объеме, примыкающем к вершине пирамиды (в особой точке) в коор-

динатах $x_1 x_2 x_3$ обозначаются через σ_{ij} . С использованием формулы Коши для вычисления векторов напряжений на поверхности тела условия (6) представляются системой двенадцати линейных неоднородных уравнений относительно шести компонент напряжений:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_n, \\
 & \sigma_{11} \cos \psi \sin \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos \psi \sin \psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_n, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_n, \\
 & \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_m, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_m, \\
 & -\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_m, \\
 & \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_l, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_l, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha + \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_l, \\
 & \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\
 & \quad - \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_k, \\
 & \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_k, \\
 & -\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \\
 & \quad + \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha + \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_k.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Задача заключается в исследовании (в зависимости от геометрических параметров ψ, α и параметров нагрузки) условий существования решений системы уравнений (7) и их нахождения. Условия существования решений уравнений (7) обеспечивают корректность постановки задачи механики для рассматриваемого деформируемого твердого тела. Решение этих уравнений формирует задаваемые условия в вершине пирамиды. Если количество таких условий оказывается большим трех (большим количества условий, задаваемых в обычной (не особой) точке поверхности тела), задача механики для рассматриваемого тела становится неклассической.

1.2. Исследование системы уравнений (7)

С использованием эквивалентных преобразований уравнения (7) преобразуются к двум автономным системам. Первая из них содержит шесть уравнений относительно четырех компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi + 2\sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha &= p_n + p_l, \\ \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin 2\psi + \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha &= \tau_n + \tau_l, \\ \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - 2\sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha &= \vartheta_n + \vartheta_l, \\ 2\sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi - 2\sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha &= p_m + p_k, \\ \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin 2\psi - \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha &= \tau_m + \tau_k, \\ -\sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - 2\sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha &= \vartheta_m + \vartheta_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Вторая система включает шесть уравнений относительно двух компонент напряжений σ_{13}, σ_{23} :

$$\begin{aligned} 2\sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + 2\sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha &= p_n - p_l, \\ -2\sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - 2\sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha &= \tau_n - \tau_l, \\ 2\sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - 2\sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha &= \vartheta_n - \vartheta_l, \\ 2\sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - 2\sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha &= p_m - p_k, \\ -2\sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + 2\sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha &= \tau_m - \tau_k, \\ -2\sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - 2\sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha &= \vartheta_m - \vartheta_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Определитель матрицы системы уравнений (8), соответствующий ее первым четырем строкам, записывается равенством

$$\Delta = 16 \cos^4 \psi \sin \psi \sin^2 2\alpha. \quad (10)$$

В пределах изменения параметров ψ, α

$$0 < \psi < \pi/2, \quad 0 < \alpha < \pi/2 \quad (11)$$

определитель (10) не обращается в нуль. Следовательно, ранг системы уравнений (8) равен четырем. Система уравнений (8) имеет единственное решение при условии, что ранг ее расширенной матрицы также равен четырем. Это требование

приводит к двум ограничениям на параметры ψ, α пирамиды и компоненты векторов нагрузки в ее вершине:

$$(p_m + p_k - p_n - p_l) \sin \psi + (\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k) \cos \psi = 0, \quad (12)$$

$$(p_n + p_l - p_k - p_m) \cos 2\alpha + (\vartheta_n + \vartheta_l - \vartheta_m - \vartheta_k) \sin 2\alpha \cos \psi = 0.$$

Если условия (12) выполняются, уравнения (8) имеют решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{8 \cos^2 \psi \cos^2 \alpha} [p_m + p_k + (p_n + p_l)(\cos 2\alpha + \cos 2\psi + \cos 2\alpha \cos 2\psi) + \\ &\quad + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi (1 + \cos 2\alpha) + 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi \sin 2\alpha], \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{8 \cos^2 \psi \cos^2 \alpha} [-(p_m + p_k) + (p_n + p_l)(\cos 2\alpha - \cos 2\psi + \cos 2\alpha \cos 2\psi) + \\ &\quad + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi (\cos 2\alpha - 1) + 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi \sin 2\alpha], \\ \sigma_{33} &= -\frac{1}{2 \sin \psi} [(\tau_n + \tau_l) \cos \psi - (p_n + p_l) \sin \psi], \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{4 \cos^2 \psi \sin 2\alpha} (p_n + p_l - p_m - p_k). \end{aligned} \quad (13)$$

Определитель, соответствующий первой и четвертой строкам матрицы системы уравнений (9)

$$\Delta = -4 \sin 2\alpha \sin^2 2\psi,$$

не обращается в нуль при изменении параметров в области допустимых значений (11). Следовательно, ранг матрицы системы уравнений (9) равен двум. Решение этих уравнений будет существовать, если ранг расширенной матрицы также будет равен двум. Это требование приводит к четырем независимым условиям, накладываемым на параметры ψ, α и компоненты векторов нагрузки в особой точке:

$$\begin{aligned} (p_n - p_l) \cos 2\psi + (\tau_n - \tau_l) \sin 2\psi &= 0, \\ (p_m - p_k) \cos 2\psi + (\tau_m - \tau_k) \sin 2\psi &= 0, \\ (p_n - p_l) \cos 2\alpha + 2(\vartheta_n - \vartheta_l) \sin 2\alpha \cos \psi - (p_m - p_k) &= 0, \\ (p_m - p_k) \cos 2\alpha + 2(\vartheta_m - \vartheta_k) \sin 2\alpha \cos \psi + (p_n - p_l) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае, когда условия (14) выполняются, уравнения (9) имеют решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{1}{4 \cos \alpha \sin \psi} (p_n - p_l + p_m - p_k), \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{4 \cos \alpha \sin \psi} (p_n - p_l - p_m + p_k). \end{aligned} \quad (15)$$

Итак, при выполнении ограничений (12), (14) на геометрические параметры и компоненты нагрузки напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известно значение всех шести напряжений. Они являются заданными параметрами в особой точке.

Если хотя бы одно из условий (12), (14) не выполняется, система уравнений (7) становится несовместной. В этом случае корректная постановка задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) невозможна.

1.3. Частные случаи

Случай нормальной поверхностной нагрузки

Пусть на гранях пирамиды вблизи ее вершины прикладывается нагрузка

$$\bar{p}_n = p_n \bar{n}, \quad \bar{p}_m = p_m \bar{m}, \quad \bar{p}_l = p_l \bar{l}, \quad \bar{p}_k = p_k \bar{k}.$$

Условия (12), (14) принимают вид

$$-p_n - p_l + p_m + p_k = 0, \quad p_n + p_l - p_m - p_k = 0,$$

$$(p_n - p_l) \cos 2\psi = 0, \quad (p_m - p_k) \cos 2\psi = 0,$$

$$(p_n - p_l) \cos 2\alpha - (p_m - p_k) = 0, \quad (p_n - p_l) - (p_m - p_k) \cos 2\alpha = 0.$$

Эти равенства совместны лишь в случае, когда

$$p_n = p_l = p_m = p_k = p. \quad (16)$$

Если условие (16) выполняется, напряжения в вершине пирамиды принимают значения

$$\sigma_{11} = p, \quad \sigma_{22} = p, \quad \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0.$$

Такое решение согласуется с известным аналитическим решением задачи о напряженном состоянии упругого тела, нагруженного по всей поверхности однородными нормальными распределенными усилиями.

Случай касательной поверхностной нагрузки

1) Примем, что поверхностная нагрузка вблизи вершины имеет вид

$$\bar{p}_n = \tau_n \bar{\xi}_n, \quad \bar{p}_m = \tau_m \bar{\xi}_m, \quad \bar{p}_l = \tau_l \bar{\xi}_l, \quad \bar{p}_k = \tau_k \bar{\xi}_k.$$

Условия (12), (14) образуют систему равенств:

$$\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k = 0, \quad \tau_n - \tau_l = 0, \quad \tau_n - \tau_m = 0.$$

Из этих равенств следует, что корректная постановка задачи МДТТ возможна, когда выполняются соотношения

$$\tau_n = \tau_l = \tau_m = \tau_k = \tau. \quad (17)$$

Если равенства (17) выполняются, напряжения в вершине пирамиды вычисляются по формулам

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{22} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

2) Пусть вблизи вершины на гранях пирамиды прикладывается нагрузка

$$\bar{p}_n = \vartheta_n \bar{\xi}_n, \quad \bar{p}_m = \vartheta_m \bar{\xi}_m, \quad \bar{p}_l = \vartheta_l \bar{\xi}_l, \quad \bar{p}_k = \vartheta_k \bar{\xi}_k.$$

Условия (12), (14) запишутся равенствами

$$\vartheta_n + \vartheta_l + \vartheta_m + \vartheta_k = 0, \quad \vartheta_n - \vartheta_l = 0, \quad \vartheta_m - \vartheta_k = 0.$$

Из этих равенств следует зависимость

$$\vartheta_n = \vartheta_l = \vartheta_m = \vartheta_k = \vartheta. \quad (18)$$

Если равенства (18) выполняются, напряжения в вершине пирамиды вычисляются по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{9 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \psi}, \quad \sigma_{22} = -\frac{9 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \psi}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Построенные в этом пункте решения о напряженном состоянии в вершине пирамиды согласуются с решением, получаемым методом сечений.

2. Четырехугольная пирамида с ромбическим основанием, погруженная в упругое тело

Особые точки в виде вершин многогранников внутри деформируемых тел возникают при их армировании кристаллическими частицами, короткими волокнами а также в случае исследования образцов посредством внедрения в них инденторов или кристаллических игл кантилеверов.

2.1. Постановка задачи

Рассматриваются непрерывным образом скрепленные изотропные упругие тела 1, 2 (рис. 2), одно из которых (тело 1) имеет особенность в виде вершины четырех угольной пирамиды с ромбическим основанием. Сохраняются принятые в п.1 обозначения, связанные с пирамидой. Материальные параметры и параметры состояния, относящиеся к телам 1, 2, снабжаются соответствующими верхними индексами в скобках. Для элементарных объемов тел 1, 2 в точках поверхностей соприкосновения выполняются:

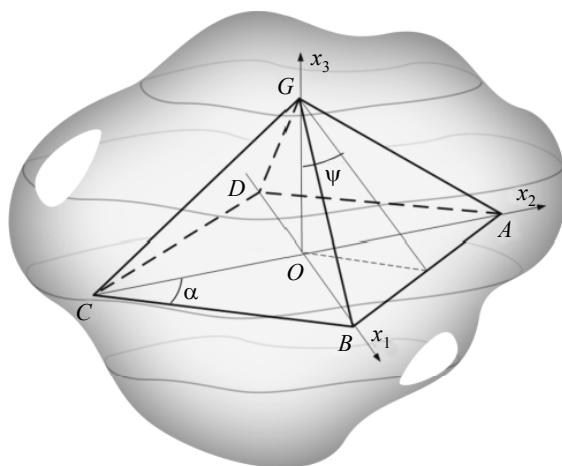


Рис. 2. Пирамида с ромбическим основанием, погруженная в упругое тело

Fig. 2. Rhombic pyramid immersed in an elastic body

1) Условия равенства нормальных и касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} &= \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \\ \sigma_l^{(1)} &= \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \sigma_k^{(1)} = \sigma_k^{(2)}, \quad \tau_{\xi_k}^{(1)} = \tau_{\xi_k}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_k}^{(1)} = \tau_{\zeta_k}^{(2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

2) Условия равенства относительных удлинений в направлении введенных на этих поверхностях направлений $(\xi_n, \zeta_n, \dots, \xi_k, \zeta_k)$ и равенства сдвигов между такими направлениями.

$$\begin{aligned} \eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(2)}, \\ \eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_k}^{(1)} = \eta_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k \zeta_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k \zeta_k}^{(2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

В равенствах (19), (29) приняты обозначения: σ – нормальное напряжение; τ – касательное напряжение; η (с одним индексом) – относительное удлинение; η (с двумя индексами) – сдвиг. Нижние индексы указывают направление действия напряжений, направления относительных удлинений, изменение угла между направлениями. Для разностей компонент напряжений и деформаций в элементарных объемах тел 1, 2 при вершине пирамиды вводятся обозначения

$$\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = \zeta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} = \xi_{ij}. \quad (21)$$

С использованием обозначений (21) условия (19), (20) запишутся двумя линейными однородными системами уравнений. Первая из них содержит двенадцать уравнений относительно параметров ζ_{ij} :

$$\begin{aligned} & \zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi + \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\ & + \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha - \\ & - \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \\ & \zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi - \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\ & + \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & -\frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha - \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \\ & \zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi + \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\ & - \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ & \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\ & + \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\
& - \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha + \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \\
& \zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi - \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\
& - \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\
& \frac{1}{2}\zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}\zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\zeta_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2}\zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\
& + \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\
& -\frac{1}{2}\zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \\
& + \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha + \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Вторая система содержит двенадцать уравнений относительно параметров ξ_{ij} :

$$\begin{aligned}
& \xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi + \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha - \\
& - \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\
& \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\
& \xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha - \\
& - 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha + 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \\
& \xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi - \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha - \\
& - \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\
& \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\
& -\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha + \\
& + 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha + 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \tag{23} \\
& \xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi + \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha + \\
& + \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\
& \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\
& \xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha + \\
& + 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha - 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \\
& \xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi - \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha + \\
& + \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\
& \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\
& -\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha - \\
& - 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha - 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0,
\end{aligned}$$

Задача состоит в исследовании условий существования решений систем уравнений (22), (23) и их нахождения. Такие решения являются ограничениями на параметры состояния в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды.

2.2. Исследование систем уравнений (22), (23)

Матрица системы уравнений (22) совпадает с матрицей системы уравнений (7). В п.1.2 выяснено, что эта матрица имеет шесть независимых строк, т.е. ее ранг равен шести. Вследствие однородности системы уравнений (22) она имеет лишь нулевое решение

$$\zeta_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = 0, \text{ т.е. } \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}. \quad (24)$$

Уравнения (23) элементарными преобразованиями приводятся к двум автономным системам. Первая из них состоит из шести уравнений относительно четырех параметров $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{12}$:

$$\begin{aligned} 2\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\xi_{33} \cos^2 \psi + 2\xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha &= 0, \\ \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ 2\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 4\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha &= 0, \\ 2\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\xi_{33} \cos^2 \psi - 2\xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha &= 0, \\ \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ -2\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + 2\xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 4\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Вторая система состоит из четырех независимых уравнений относительно двух параметров ξ_{13}, ξ_{23} :

$$\begin{aligned} \xi_{13} \cos \alpha + \xi_{23} \sin \alpha &= 0, \quad \xi_{13} \cos \alpha - \xi_{23} \sin \alpha = 0, \\ \xi_{13} \sin \alpha + \xi_{23} \cos \alpha &= 0, \quad \xi_{13} \sin \alpha - \xi_{23} \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Определитель, отвечающий первым четырем строкам системы уравнений (25)

$$\Delta = 3 \cos^2 \psi \sin^2 2\alpha \sin^2 \psi$$

не обращается в нуль в области допустимых значений параметров α, ψ . Следовательно, ранг матрицы системы уравнений (25) равен четырем, а ее решение имеет вид

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = \xi_{12} = 0, \text{ то есть } \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)}, \varepsilon_{33}^{(1)} = \varepsilon_{33}^{(2)}, \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{12}^{(2)}. \quad (27)$$

Ранг матрицы системы уравнений (26) равен двум, ее решение нулевое

$$\xi_{13} = \xi_{23} = 0, \text{ то есть } \varepsilon_{13}^{(1)} = \varepsilon_{13}^{(2)}, \varepsilon_{23}^{(1)} = \varepsilon_{23}^{(2)}. \quad (28)$$

2.3. Компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды

С использованием физических уравнений термоупругости равенства (27), (28) запишем через напряжения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} &= Q, \\ - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} &= Q, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{33} = Q, \\
& \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{12} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{13} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{23} = 0.
\end{aligned} \quad (30)$$

В этих равенствах $E_k, G_k, \nu_k, \omega_k$ – соответственно модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона, коэффициенты температурной деформации скрепляемых тел; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$ (так как $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$); $Q = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$, ΔT – однородное приращение температуры.

Изучим решения систем уравнений (29), (30). Определитель матрицы системы уравнений (29) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{E_1 E_2}\right)^3 [E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2)]^2 [E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)]. \quad (31)$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

1. $\Delta \neq 0$. Из этого условия следует, что $G_1 \neq G_2$, поэтому уравнения (29), (30) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{Q E_1 E_2}{E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (32)$$

Напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Оказываются известными все двенадцать компонент тензоров напряжений. Из решения (32) видно, что сочетание параметров, удовлетворяющее равенству

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0 \quad (33)$$

является критическим, так как при стремлении сочетания параметров к выполнению равенства (33) напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ в элементарных объемах, содержащих вершину G , стремятся к бесконечности.

2. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) \neq 0. \quad (34)$$

Ранг системы уравнений (29) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если $Q = 0$, и трем, если $Q \neq 0$, поэтому реализуются варианты:

а) $Q = 0$. Напряжения σ_{ij} ($i = 1, 2, 3$) подчинены ограничениям (так как в данном случае $G_1 \neq G_2$)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (35)$$

Общее количество ограничений на компоненты тензоров напряжений тел 1, 2 в вершине пирамиды равно одиннадцати.

б) $Q \neq 0$. Уравнения (29) несовместны. Задача МДТТ не может быть поставлена корректно.

3. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) \neq 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \quad (36)$$

Ранг матрицы системы уравнений (29) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива

зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2v_1 - E_1v_2}.$$

В данном случае $G_1 = G_2$, поэтому каких либо дополнительных ограничений на компоненты σ_{ij} ($i \neq j$) не накладывается. Общее количество ограничений на компоненты напряжений элементарных объемов тел 1, 2, примыкающих к вершине пирамиды, равно семи.

4. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1 - 2v_1) - E_1(1 - 2v_2) = 0, \quad E_2(1 + v_1) - E_1(1 + v_2) = 0. \quad (37)$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона тел 1, 2 совпадают. Ранг системы уравнений (29) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если эти коэффициенты совпадают, скрепляемые материалы идентичны, особая точка отсутствует. Когда ранг расширенной матрицы равен единице ($Q \neq 0$), уравнения (29) несовместны. Корректная постановка задачи МДТТ становится невозможной.

Заключение

Представление о точке сплошной среды (включая и особую точку) в виде точки континуума и связанного с ней элементарного объема не оспаривается исследователями. В элементарном объеме, отвечающем особой точке, нарушаются условия непрерывности (наличие пересечений образующих поверхностей, разрывов параметров нагрузки и т.п.). В статье показано, что количество ограничений на параметры состояния такого элементарного объема оказывается избыточным. Это обстоятельство приводит к условиям на геометрические параметры и нагрузку, обеспечивающим корректность постановки задач МДТТ для элементов конструкций с особыми точками. Такие условия изучены в вершине четырехгранной пирамиды с ромбическим основанием при ее поверхностном нагружении и в случае погружения в упругое тело.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // J. App. Mech. 1952. No. 19. P. 526–528.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
3. Bogy D.B. Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // Trans. ASME. Ser. E. 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3408786>.
4. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
5. Sinclear G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
6. Sinclear G.B. Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
7. Barut A., Guven I., Madenci E. Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Int. J. of Solid and Structures. 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
8. Шемякин Е.И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // Докл. АН. 1996. Т. 347. № 3. С. 342–345.

9. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Mech. Rev.* 2008. V. 61. P. 020801. DOI: 10.1115/1.2885134.
10. Luangarpa C., Koguchi H. Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral // *Europ. J. of Mechanics – A/Solids*. 2016. V. 60. P. 208–216. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.08.002.
11. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Тр. Моск. матем. об-ва*. 1967. Т. 16. С. 209–292.
12. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // *ДАН СССР*. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
13. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
14. Kozlov V.A., Mazya V.G., Schwab C. On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1992. No. 119. P. 197–227.
15. Pestrenin V.M., Pestrenina I. V., Landik L.V. Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
16. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504.
17. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI: 10.1007/s11029-017-9644-1.
18. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Эйсмонт Е.Р. Напряженное состояние вблизи линии особых точек на свободной от нагрузки торцевой поверхности слоистого цилиндра // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 57. С. 84–98. DOI 10.17223/19988621/57/7.
19. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 56. С. 102–119.
20. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 52. С. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/56/9

Статья поступила 03.04.2019 г.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2020) RESTRICTIONS ON STRESS COMPONENTS AND LOADS AT THE TOP OF A FOUR-CORNER PYRAMID WITH A RHOMBIC BASE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. 98–113

DOI 10.17223/19988621/65/8

Keywords: rhombic pyramid, singular points, singularity, elementary volume, non-classical problems.

Differences between two existing approaches in the study of state parameters (stresses, strains) near singular points are discussed. In the classical (asymptotic) approach, the singular point is excluded from the solution region. Boundary conditions are not specified at this point, and, thus, the state parameters have only asymptotic values. The second, non-classical approach, considers the singular point as a point of the continuum and the elementary volume associated with this point.

The continuum point indicates a singular point location, and the elementary volume defines material characteristics and parameters of the stress-strain state. The number of specified

conditions at such a point is greater than that specified at a regular (non-singular) boundary point of a body. Therefore, the problem of solid mechanics with a singular point is non-classical.

In this paper, a non-classical approach is used to study state parameters at the vertex of a quadrangular pyramid with a rhombic base. The case of loading the pyramid near the top by surface forces and the case of the pyramid immersed in an elastic medium are considered. It is shown that the correct formulation of the mechanics problem for such cases is possible only with the implementation of the restrictions established in the work. Particular solutions are presented that are consistent with known analytical results.

For the case of the inclusion of a pyramid in an elastic body, combinations of geometrical and material parameters resulting in an unlimited increase in stresses within elementary volumes containing the top of the pyramid are revealed. The research results will be used in solid mechanics problems in the formulation of specified conditions at the vertices of polyhedra. In particular, they may be applied when analyzing the stress state near the vertices of Knoop indenters used for studying samples, as well as near crystalline inclusions in the mechanics of composites.

Valeriy M. PESTRENIN (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

Irena V. PESTRENINA (Candidate of Technical Sciences, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

Lidiya V. LANDIK (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

REFERENCES

1. Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. *Journal of Applied Mechanics*. 19(4). pp. 526–528.
2. Uflyand Ya.S. (1967) *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of the theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: Izdatel'stvo AN SSSR.
3. Bogy D.B. (1971) Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Journal of Applied Mechanics*. 38(2). pp. 87–96. DOI: 10.1115/1.3408786.
4. Chobanyan K.S. (1987) *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stresses in compound elastic bodies]. Yerevan: Izdatel'stvo AN ArmSSR.
5. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis. *Applied Mechanics Reviews*. 57(4). pp. 251–297. DOI: 10.1115/1.1762503.
6. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification. *Applied Mechanics Reviews*. 57(5). pp. 385–439. DOI: 10.1115/1.1767846.
7. Barut A., Guven I., Madenci E. (2001) Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *International Journal of Solid and Structures*. 38(50-51). pp. 9077–9109. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00206-2.
8. Shemyakin E.I. (1966) O kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya oblastey s uglovymi tochkami (ploskaya deformatsiya) [On boundary value problems of the theory of elasticity for regions with corner points (plane strain)]. *Doklady Akademii nauk*. 347(3). pp. 342–345.
9. Paggi M., Carpintery A. (2008) On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Mechanics Reviews*. 61. pp. 020801. DOI: 10.1115/1.2885134.
10. Luangarpa C., Koguchi H. (2016) Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 60. pp. 208–216. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.08.002.
11. Kondrat'ev V.A. (1967) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in do-

- mains with conical or corner points]. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*. 16. pp. 209–292.
12. Maz'ya V.G., Plamenevskiy B.A. (1976) O koeffitsientakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach vblizi rebra [On coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems near an edge]. *Doklady Akademii Nauk SSR*. 229(1). pp. 33–36.
 13. Parton V.Z., Perlin P.I. (1981) *Metody matematicheskoy teorii uprugosti* [Methods in the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
 14. Kozlov V.A., Maza V.G., Schwab C. (1992) On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 119. pp. 197–227. DOI: 10.1007/BF00381670.
 15. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
 16. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
 17. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007/s11029-017-9644-1.
 18. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Eismont E.R. (2019) Napryazhennoe sostoyanie vblizi linii osobykh toчек na svobodnoy ot nagruzki tortsevoy poverkhnosti sloistogo tsilindra [Stress components near the singular points at a load-free end section of a layered cylinder]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 85–99. DOI: 10.17223/19988621/57/719.
 19. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Komponenty napryazheniy i ogranicheniya na nagruzku v vershinakh pravil'nykh treugol'noy i chetyrekhugol'noy piramid [Stress components and loading restrictions at the vertices of regular triangular and quadrangular pyramids]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 102–119. DOI: 10.17223/19988621/56/9.
 20. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Ogranicheniya na parametry napryazhennogo sostoyaniya v vershine krugovogo konusa [Restrictions on stress components in the top of round cone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/56/9.

Received: April 3, 2019

УДК 531.351

DOI 10.17223/19988621/65/9

В.А. Потеряева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕЛЕКТИВНОЙ НАНОПОРЫ¹

Изучаются селективные свойства углеродной нанопоры по отношению к сепарации метан-гелиевых смесей. После построения модели нанопоры, выбирается энергия взаимодействия наночастицы структуры с движущейся молекулой. Проницаемость полученного фильтрующего элемента определяется методом молекулярной баллистики. Математическое моделирование описанной задачи демонстрирует хорошие селективные свойства углеродной нанопоры в отношении разделения метан-гелиевой смеси. По результатам расчетов выбраны оптимальные характеристики нанопоры, обеспечивающие наивысшую степень разделения рассматриваемых газов.

Ключевые слова: *нанопора, мембрана, разделение газов, сепарация газов, фильтрация, наночастицы, движение молекул, поле потенциальных сил, численные методы.*

Нанопористые материалы и нанотрубки сейчас представляют большой интерес, когда речь заходит о работе с газами и жидкостями. Созданные на их основе мембраны широко используются в разделении, адсорбции и каталитических процессах с участием смесей. Одним из важнейших факторов эффективности прохождения этих процессов является оптимальное конструирование таких материалов.

На характеристики мембраны, а также на результат моделирования задачи оказывает влияние множество факторов [1]:

- составляющие мембрану атомы;
- компоненты газовой (или жидкой) смеси;
- выбор или построение потенциала взаимодействия свободных молекул и наночастиц материала;
- размер, характер и расположение пор;
- температура;
- давление.

Пористые мембраны – наиболее простой и удобный способ разделения газов. Так, микропористый графен способен успешно разделять смеси CH_4/N_2 [2], CH_4/H_2 [3, 4], CO_2/N_2 [5, 6], H_2/N_2 [7], He/CH_4 [8–10]. Мезопористые углеродные материалы также способны успешно разделять вышеназванные смеси [11–15]. В силу более крупных по сравнению с графеном пор, поток газа через такие мембраны выше, следовательно, больше подходит для промышленного применения.

Темой исследований является разделение газовых смесей (преимущественно отделение гелия от метана) с помощью углеродных мембран. Рассматриваются мембраны из различных материалов, что позволяет регулировать параметры потенциальной энергии, а также мембраны различной структуры при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении.

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10049).

В поисках оптимальной структуры были проанализированы материалы, составленные монодисперсными [16–18], полидисперсными [19] углеродными наночастицами, полыми капсулами, случайным образом заполняющими объем, рыхлый равномерный полиэтиленовый слой [20] и составленный скрученными полиэтиленовыми нитями.

В настоящей работе рассматривается модель углеродной нанопоры. Плотные мембраны плохо пропускают газы, поэтому при производстве таких материалов пытаются синтезировать поры различными способами. Знание о том, какими эти поры должны быть, приблизит нас к построению идеального фильтрующего материала.

Математическая модель

Основные уравнения для перемещающихся молекул запишем в стандартной форме в виде второго закона Ньютона:

$$M \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \bar{F}_i, i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где $\bar{v}_i$ – вектор скорости i -й молекулы; M – масса летящей молекулы; $\bar{F}_i$ – главный вектор внешних по отношению к рассматриваемой молекуле воздействий; N – количество частиц в пучке молекул или в окружающей массе газа.

В проекциях на оси координат вместо (1) получим три скалярных уравнения:

$$M \frac{dU_i}{dt} = X'_i, \quad M \frac{dV_i}{dt} = Y'_i, \quad M \frac{dW_i}{dt} = Z'_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Здесь X'_i, Y'_i, Z'_i – проекции сил от элементов углеродной структуры, действующих на i -ю молекулу, которые определяются как простые суммы силовых вкладов от отдельных частиц структуры:

$$X'_i = \sum_{j=1}^{N_p} X_{ij}', \quad Y'_i = \sum_{j=1}^{N_p} Y_{ij}', \quad Z'_i = \sum_{j=1}^{N_p} Z_{ij}' \quad (3)$$

где $X'_{ij}, Y'_{ij}, Z'_{ij}$ – проекции на оси декартовых координат сил, действующих на i -ю молекулу от j -й частицы системы; N_p – количество частиц в структуре.

Далее введем в рассмотрение величины X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} :

$$X_{ij}' = MX_{ij}, \quad Y_{ij}' = MY_{ij}, \quad Z_{ij}' = MZ_{ij}.$$

Тогда в новых переменных уравнения (2) можно переписать в виде

$$\frac{dU_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} X_{ij}, \quad \frac{dV_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Y_{ij}, \quad \frac{dW_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Z_{ij}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

При этом

$$X_{ij} = a_{ij} \frac{x_i - x_j^0}{\rho_{ij}}, \quad Y_{ij} = a_{ij} \frac{y_i - y_j^0}{\rho_{ij}}, \quad Z_{ij} = a_{ij} \frac{z_i - z_j^0}{\rho_{ij}}, \quad (5)$$

где a_{ij} – величина ускорения, которое приобретает i -я молекула под действием j -й частицы системы; ρ_{ij} – расстояние от j -й частицы пористой структуры до i -й молекулы.

Нанопора представляется совокупностью сферических наночастиц, для которых в общем виде потенциал взаимодействия наночастица – молекула может быть представлен в виде двойного интеграла [21]:

$$U(\rho_{ij}) = 2\pi q \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r' P_1(\sqrt{r'^2 + \rho_{ij}^2 - 2r'\rho_{ij} \cos \theta}) dr'. \quad (6)$$

Здесь R – радиус наночастицы; q – плотность распределения молекул в единице объема вещества. В частности, потенциал частицы мы можем строить на базе

$$P_1(\rho) = 4\epsilon \frac{\sigma}{\rho} \operatorname{th} \left[\left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{11} - \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^5 \right] - \text{модифицированного потенциала Леннарда –}$$

Джонса. Величина ускорения a_{ij} , входящая в правые части соотношений (5), будет являться производной от (6) по ρ_{ij} :

$$a_{ij} = \frac{dU(\rho_{ij})}{d\rho_{ij}}. \quad (7)$$

Значения констант взаимодействия ϵ и σ , входящих в потенциал Леннарда – Джонса, для некоторых пар веществ приведены в следующей таблице.

Значения констант взаимодействия ϵ и σ

Взаимодействующие молекулы	Относительная глубина потенциальной ямы (ϵ/k), К	Радиус влияния потенциала взаимодействия (σ), нм
C – C	51.2	0.335
He – He	10.2	0.228
CH ₄ – CH ₄	146.7	0.386

В таблице k – постоянная Больцмана.

Если исследуемая система состоит из разнородных молекул (атомов), то для параметров ϵ и σ справедливы следующие правила усреднения Лорентца – Бертло (Lorentz–Berthelot mixing rule):

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \epsilon_{12} = \sqrt{\epsilon_{11} \cdot \epsilon_{22}}. \quad (8)$$

Уравнения (4) интегрируются численно с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности [22] с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_i|_{t=0} &= x_0, y_i|_{t=0} = y_0, z_i|_{t=0} = z_0, \\ v_i|_{t=0} &= v_0, u_i|_{t=0} = u_0, w_i|_{t=0} = w_0. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом на каждом шаге по времени ($\Delta t = 10^{-5}$ нс) и даже в каждой точке пересчета внутри этого шага требуется знать расстояние от центра пробной молекулы до центра отдельной наночастицы, которое определяется с использованием обычной метрики:

$$\rho_{ij} = \sqrt{(x_i - x_i^0)^2 + (y_i - y_i^0)^2 + (z_i - z_i^0)^2}, \quad (10)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты перемещающейся молекулы; x_i^0, y_i^0, z_i^0 – координаты центра j -й сферической частицы, составляющей пору. Положения центров частиц считаем в дальнейшем неизменными.

Результаты вычислений

Потенциал взаимодействия наночастиц микротуннеля и летящих молекул, взятый в виде (6), в случае взаимодействия атома гелия с углеродной наночастицей плотности $q = 80 \text{ нм}^{-3}$ имеет следующий вид рис. 1.

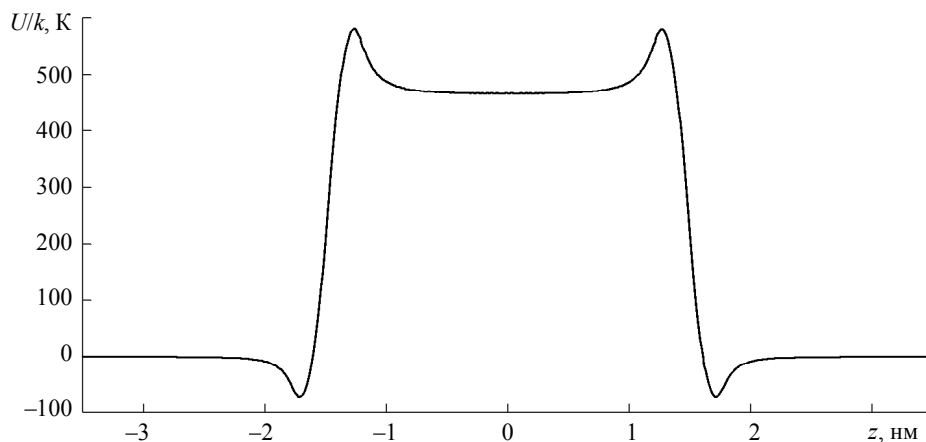


Рис. 1. Потенциал взаимодействия наночастицы микротуннеля с $q = 80 \text{ нм}^{-3}$ и летящего атома гелия $U(\rho)$

Fig. 1. Potential energy of the interaction between a microtunnel nanoparticle of $q = 80 \text{ нм}^{-3}$ and a helium atom passing through a nanopore $U(\rho)$

Рассматриваемая нанопора представляет собой микротуннель, составленный сферическими углеродными частицами радиуса 1.5 нм – рис. 2. Сферы размещены таким образом, чтобы площадь области их пересечения была равна площади пространства, дополняющего пору до сплошного туннеля. Таким образом, энергетический барьер полученной модели будет совпадать с энергетическим барьером сплошного туннеля.

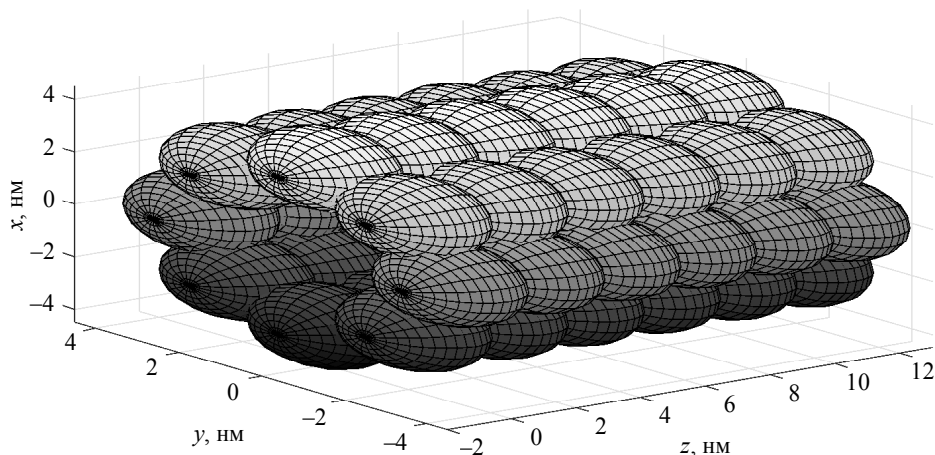


Рис. 2. Модель нанопоры

Fig. 2. A nanopore model

После построения математической модели нанопоры определены, а следовательно, известны $x_i^0, y_i^0, z_i^0, j = \overline{1, N_p}$, – координаты центров наночастиц, входящие в правые части скалярных уравнений (4).

Начало координат помещаем в центре микротуннеля на расстоянии радиуса наночастицы R от начала нанопоры на её оси. Молекулы газа начинают движение вдоль её оси (в положительном направлении оси Oz). Начальные условия принимают вид

$$\begin{aligned} x_i|_{t=0} &= x_0, \quad y_i|_{t=0} = y_0, \quad z_i|_{t=0} = -5, \\ v_i|_{t=0} &= 0, \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad w_i|_{t=0} = v_T. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь x_0 и y_0 задаются таким образом, чтобы их координаты равномерно покрывали всю область поры, v_T – средняя тепловая скорость движения молекул (атомов). Проницаемость нанопоры D определяется как отношение числа прошедших сквозь неё молекул C_{passed} к числу молекул, запущенных в её направлении $C_{launched}$. Кроме того, была определена степень разделения χ метано-гелиевой смеси как отношение числа прошедших сквозь структуру поры атомов гелия C_{passed}^{He} к числу прошедших молекул метана C_{passed}^{Me} .

$$D = \frac{C_{passed}}{C_{launched}}, \quad \chi = \frac{C_{passed}^{He}}{C_{passed}^{Me}}. \quad (12)$$

В целях определения оптимальной конструкции нанопоры были проведены расчёты проницаемости туннеля различного диаметра и различной плотности. Зависимость проницаемости нанопоры от её радиуса R_p представлена на рис. 3.

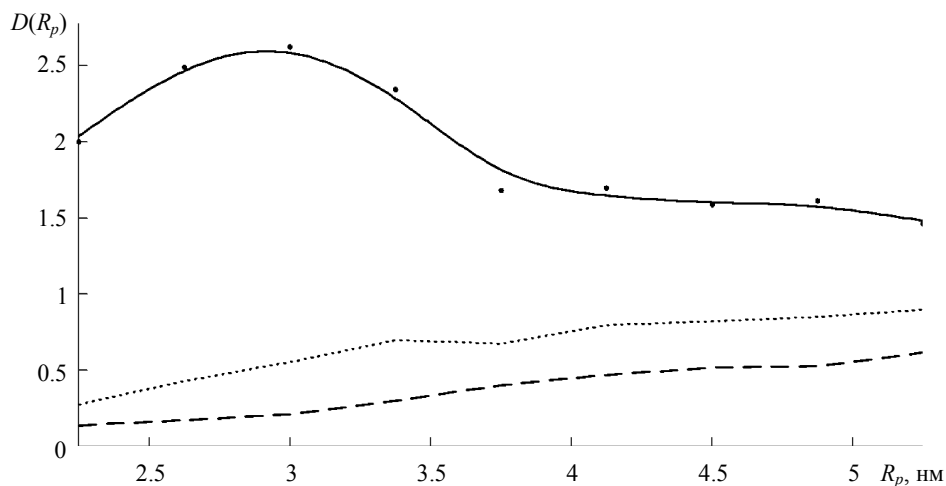


Рис. 3. Зависимость проницаемости нанопоры D от её радиуса R_p . Пунктирной линией обозначена зависимость проницаемости нанопоры для метана, точечной линией – для гелия. В верхней части графика отображена степень разделения χ

Fig. 3. Nanopore permeability D as a function of its radius R_p . The dashed line indicates dependency diagram for methane molecules; the dotted line, for helium atoms. A separation ratio χ is shown at the top of the plot

На рис. 3 пунктиром показана проницаемость нанопоры по отношению к молекулам метана, точечная линия соответствует проницаемости поры по отношению к атомам гелия. В верхней части рисунка представлена степень разделения гелия и метана χ .

Результаты показывают, что наибольшей степени разделения гелия и метана удовлетворяет диаметр туннеля равный 6 нм. Данный размер поры позволяет на выходе получать в 2.5 раза больше гелия, чем метана. Слишком узкая пора плохо пропускает даже гелий, с другой стороны, с увеличением ее диаметра падает селективность поры по отношению к различным газам.

Зависимость проницаемости нанопористой структуры от плотности вещества q представлена на рис. 4. Здесь пунктиром показана проницаемость нанопоры по отношению к молекулам метана, точечная линия соответствует проницаемости поры по отношению к атомам гелия. В верхней части рисунка представлена степень разделения гелия и метана χ .

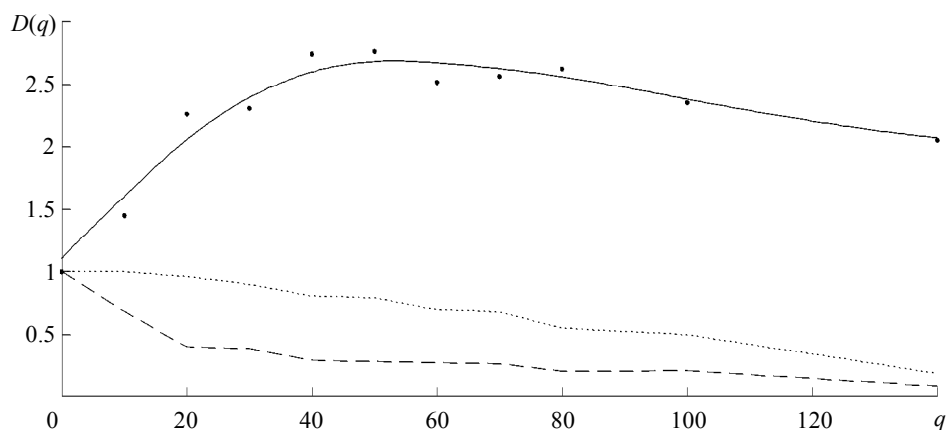


Рис. 4. Зависимость проницаемости нанопоры от её плотности q . Пунктирной линией обозначена зависимость проницаемости нанопоры для метана, точечной линией – для гелия. В верхней части графика отображена степень разделения χ

Fig. 4. Nanopore permeability as a function of its density q . The dashed line indicates dependency diagram for methane molecules; the dotted line, for helium atoms. A separation ratio χ is shown at the top of the plot

Результаты вычислений показывают, что наибольшей степени разделения смеси гелия и метана удовлетворяет плотность составляющего материал микротуннеля вещества $q = 40\text{--}80 \text{ нм}^{-3}$, что обеспечивает степень разделения метано-гелиевой смеси около 2.5 единиц. Другими словами, гелий через такую пору проходит в 2.5 раза лучше метана – рис. 4. Полученный результат близок к значению, показанному в работе [16].

На рис. 5 представлены результаты расчетов молекулярной баллистики для атома гелия, взаимодействующего с наночастицами поры.

Левая часть графика на рис. 5 демонстрирует траекторию движения атома гелия. Правый график представляет абсолютное значение скорости v , которую приобретает молекула при столкновениях с наночастицами. На удалённых расстояниях от системы наночастиц или в зонах высокой локальной пористости скорость молекул становится равной исходной среднеквадратичной величине теплового

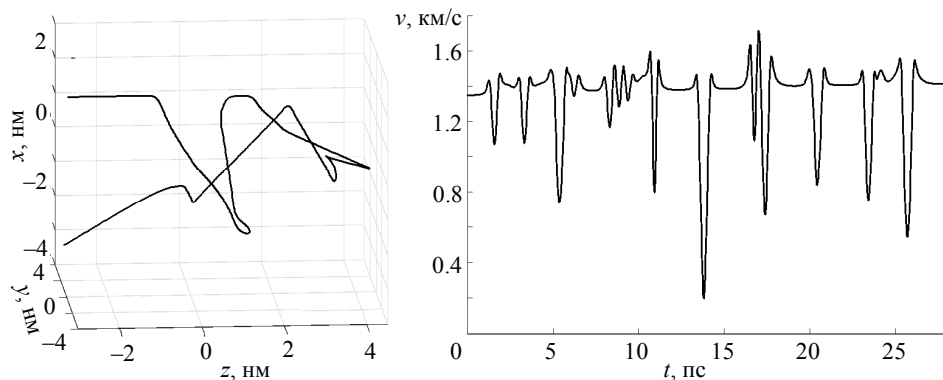


Рис. 5. Траектория и скорость атома гелия, взаимодействующего с наночастицами поры
Fig. 5. Trajectory and velocity of the helium atom passing through a nanopore

движения v_T . В этих же зонах силовое воздействие от системы наночастиц становится незначительным. Поскольку движение молекул осуществляется в потенциальном поле сил, то выполняется закон сохранения энергии в следующей форме:

$$\frac{mv_i^2}{2} = \sum_{j=1}^n U(\rho_{ij}) + \frac{mv_T^2}{2}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Соотношения (13) являются первым интегралом уравнений движения (4) и могут использоваться для контроля точности проводимых вычислений.

Заключение

Выполнено математическое моделирование движения гелия и метана через углеродную нанопору. Методом классической молекулярной динамики изучена проницаемость построенной структуры.

По результатам приведенных вычислений можно сделать вывод о том, что регулировкой размера пор и плотности вещества можно добиться существенной разницы в движении атомов гелия и молекул метана. При диаметре нанопоры в 6 нм и плотности вещества q от 40 до 80 атомов на один кубический нанометр гелий проходит через пору 2.5 раза лучше метана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xu L., Tsotsis T.T., Sahimi M. Nonequilibrium molecular dynamics simulation of transport and separation of gases in carbon nanopores. I. Basic results // The Journal of Chemical Physics. 1999. V. 111(7). P. 3252–3264. DOI: 10.1063/1.479663.
2. Chen G., An Y., Shen Y., Wang Y., Tang Z., Lu B., Zhang D. Effect of Pore Size on CH₄/N₂ Separation using Activated Carbon // Chinese Journal of Chemical Engineering. 2020. DOI: 10.1016/j.cjche.2019.12.018.
3. Raghavan B., Gupta T. H₂/CH₄ gas separation using graphene drilled with elliptical pores // Materials Today: Proceedings. 2018. V. 5(10). P. 20972–20976. DOI: 10.1016/j.matpr.2018.06.487.
4. Liu H., Dai S., Jiang D. Permeance of H₂ through porous graphene from molecular dynamics // Solid State Communications. 2013. V. 175–176. P. 101–105. DOI: 10.1016/j.ssc.2013.07.004.
5. Wu T., Xue Q., Ling C., Shan M., Liu Z., Tao Y., Li X. Fluorine-modified porous graphene as membrane for CO₂/N₂ separation: Molecular dynamic and first-principles simulations // The Journal of Physical Chemistry C. 2014. V. 118(14). P. 7369–7376. DOI:10.1021/jp4096776.

6. Liu H., Dai S., Jiang D. Insights into CO₂/N₂ separation through nanoporous graphene from molecular dynamics // *Nanoscale*. 2013. V. 5(20). P. 9984. DOI: 10.1039/c3nr02852f.
7. Du H., Li J., Zhang J., Su G., Li X., Zhao Y. Separation of hydrogen and nitrogen gases with porous graphene membrane // *The Journal of Physical Chemistry C*. 2011. V. 115(47). P. 23261–23266. DOI: 10.1021/jp206258u.
8. Mohammad S., Gharibzadeh R., Karimi-Sabet J. Gas separation in nanoporous graphene from molecular dynamics simulation // *Chemical Product and Process Modeling*. 2016. V. 11(1). DOI: 10.1515/cppm-2015-0059.
9. Bartolomei M., Carmona-Novillo E., Hernández M.I., Campos-Martínez J., Pirani F., Giorgi G. Graphdiyne pores: “Ad Hoc” openings for helium separation applications // *The Journal of Physical Chemistry C*. 2014. V. 118(51). P. 29966–29972. DOI: 10.1021/jp510124e.
10. Nikkho S., Mirzaei M., Sabet J.K., Moosavian M.A., Hedayat S.M. Enhanced quality of transfer-free graphene membrane for He/CH₄ separation // *Separation and Purification Technology*. 2019. P. 115972. DOI: 10.1016/j.seppur.2019.115972.
11. Chang R.W., Lin C.J., Liou S.Y.H., Bañares M.A., Guerrero-Pérez M.O., Martín Aranda R.M. Enhanced cyclic CO₂/N₂ separation performance stability on chemically modified N-doped ordered mesoporous carbon // *Catalysis Today*. 2019. DOI: 10.1016/j.cattod.2019.08.004.
12. Li L., Song C., Jiang H., Qiu J., Wang T. Preparation and gas separation performance of supported carbon membranes with ordered mesoporous carbon interlayer // *Journal of Membrane Science*. 2014. V. 450. P. 469–477. DOI: 10.1016/j.memsci.2013.09.032.
13. Mahurin S.M., Lee J.S., Wang X., Dai S. Ammonia-activated mesoporous carbon membranes for gas separations // *Journal of Membrane Science*. 2011. V. 368(1-2). P. 41–47. DOI: 10.1016/j.memsci.2010.11.007.
14. Choi S.-H., Qahtani M.S., Qasem E.A. Multilayer thin-film composite membranes for helium enrichment // *Journal of Membrane Science*. 2018. V. 553. P. 180–188. DOI: 10.1016/j.memsci.2018.02.057.
15. Choi S.-H., Sultan M.M.B., Alsawailem A.A., Zuabi S.M. Preparation and characterization of multilayer thin-film composite hollow fiber membranes for helium extraction from its mixtures // *Separation and Purification Technology*. 2019. V. 222. P. 152–161. DOI: 10.1016/j.seppur.2019.04.036.
16. Потеряева В.А., Усенко О.В., Шерстобитов А.А. Дифференциальная проницаемость ультратонкого пористого слоя монодисперсных наночастиц // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2015. № 2(34). С. 96–102. DOI: 10.17223/19988621/34/9.
17. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Poteryaeva V.A., Zhambaa Soninbaatar. Separation of gases using ultra-thin porous layers of monodisperse nanoparticles // *EPJ Web of Conferences*. 2016. V. 110. P. 01014-1–01014-6. DOI: 10.1051/epjconf/201611001014.
18. Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потеряева В.А., Либин Э.Е. Волновая проницаемость слоя компактированных наночастиц // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016. № 3(41). С. 51–57. DOI: 10.17223/19988621/41/5.
19. Потеряева В.А., Усенко О.В., Шерстобитов А.А. Дифференциальная проницаемость слоя полидисперсных наночастиц // *Электротехника. Электротехнология. Энергетика: в 3 ч.: сборник научных трудов VII Международной научной конференции молодых ученых*. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. Ч. 2. Секция «Электротехнология». С. 101–104.
20. Bubenchikov M.A., Poteryaeva V.A., Ukolov A.V. Helium passage through homogeneous ultrafine hydrocarbon layers // *EPJ Web of Conferences*. 2017. V. 110. P. 301085. DOI: 10.1051/mateconf/201711001085.
21. Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потекаев А.И., Либин Э.Е., Худобина Ю.П. Потенциальное поле углеродных тел как основа сорбционных свойств барьерных газовых систем // *Изв. вузов. Физика*. 2015. Т. 58. № 7. С. 10–15.
22. Ortega J. *Scientific computing and computer science*. N.Y.: Academic Press, 1976. 340 с.

Poteryaeva V.A. (2020) A MATHEMATICAL MODEL OF A SELECTIVE NANOPORE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 114–123

DOI 10.17223/19988621/65/9

Keywords: nanopore, membrane, gas separation, permeability, filtration, nanoparticles, molecular motion, field of potential forces, numerical methods.

Membrane separation of mixtures is widely used in chemical, fuel and energy, pharmaceutical, food, and other industries. In particular, mixed gases are separated by porous carbon membranes of various designs. This work deals with a study of selective properties of a carbon nanopore in terms of its ability to separate helium-methane mixtures. Gaining knowledge of nanopore characteristics allows us to design nanoporous membranes that are optimal for our purposes.

The membrane composed of carbon nanoparticles has a potential energy barrier representing the summed energy of the interaction between the molecule passing through a membrane and each nanoparticle of the structure. The trajectory and velocity of the molecule are obtained when solving a system of differential equations using the Runge-Kutta fourth-order method. Permeability of the resulting filter element is determined by the molecular dynamics method as a ratio of the molecules passed through the membrane to the total number of launched ones.

Mathematical modeling of the described problem shows good selective properties of the carbon nanopore in terms of separation of a helium-methane mixture. Based on the calculated results, the most efficient pore diameter has been revealed, as well as the optimal density of the material providing the highest separation ratio for the mixtures under consideration.

Financial support. The research is implemented at the expanses of the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10049).

Valentina A. POTERYAEVA (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: valentina.poteryaeva@gmail.com

REFERENCES

1. Xu L., Tsotsis T.T., Sahimi M. (1999) Nonequilibrium molecular dynamics simulation of transport and separation of gases in carbon nanopores. I. Basic results. *The Journal of Chemical Physics*. 111(7). pp. 3252–3264. DOI: 10.1063/1.479663.
2. Chen G., An Y., Shen Y., Wang Y., Tang Z., Lu B., Zhang D. (2020) Effect of pore size on CH₄/N₂ separation using activated carbon. *Chinese Journal of Chemical Engineering*. DOI: 10.1016/j.cjche.2019.12.018.
3. Raghavan B., Gupta T. (2018) H₂/CH₄ gas separation using graphene drilled with elliptical pores. *Materials Today: Proceedings*. 5(10). pp. 20972–20976. DOI: 10.1016/j.matpr.2018.06.487.
4. Liu H., Dai S., Jiang D. (2013) Permeance of H₂ through porous graphene from molecular dynamics. *Solid State Communications*. 175-176. pp. 101–105. DOI: 10.1016/j.ssc.2013.07.004.
5. Wu T., Xue Q., Ling C., Shan M., Liu Z., Tao Y., Li X. (2014) Fluorine-modified porous graphene as membrane for CO₂/N₂ separation: molecular dynamic and first-principles simulations. *The Journal of Physical Chemistry C*. 118(14). pp. 7369–7376. DOI: 10.1021/jp4096776.
6. Liu H., Dai S., Jiang D. (2013) Insights into CO₂/N₂ separation through nanoporous graphene from molecular dynamics. *Nanoscale*. 5(20). 9984. DOI: 10.1039/c3nr02852f.
7. Du H., Li J., Zhang J., Su G., Li X., Zhao Y. (2011) Separation of hydrogen and nitrogen gases with porous graphene membrane. *The Journal of Physical Chemistry C*. 115(47). pp. 23261–23266. DOI: 10.1021/jp206258u.

8. Mohammad S., Gharibzadeh R., Karimi-Sabet J. (2016) Gas separation in nanoporous graphene from molecular dynamics simulation. *Chemical Product and Process Modeling*. 11(1). DOI: 10.1515/cppm-2015-0059.
9. Bartolomei M., Carmona-Novillo E., Hernández M.I., Campos-Martínez J., Pirani F., Giorgi G. (2014) Graphdiyne pores: “ad hoc” openings for helium separation applications. *The Journal of Physical Chemistry C*. 118(51). pp. 29966–29972. DOI: 10.1021/jp510124e.
10. Nikkho S., Mirzaei M., Sabet J.K., Moosavian M.A., Hedayat S.M. (2019) Enhanced quality of transfer-free graphene membrane for He/CH₄ separation. *Separation and Purification Technology*. pp. 115972. DOI: 10.1016/j.seppur.2019.115972.
11. Chang R.W., Lin C.J., Liou S.Y.H., Bañares M.A., Guerrero-Pérez M.O., Martín Aranda R.M. (2019) Enhanced cyclic CO₂/N₂ separation performance stability on chemically modified N-doped ordered mesoporous carbon. *Catalysis Today*. DOI: 10.1016/j.cattod.2019.08.004.
12. Li L., Song C., Jiang H., Qiu J., Wang T. (2014) Preparation and gas separation performance of supported carbon membranes with ordered mesoporous carbon interlayer. *Journal of Membrane Science*. 450. pp. 469–477. DOI: 10.1016/j.memsci.2013.09.032.
13. Mahurin S.M., Lee J.S., Wang X., Dai S. (2011) Ammonia-activated mesoporous carbon membranes for gas separations. *Journal of Membrane Science*. 368(1-2). pp. 41–47. DOI: 10.1016/j.memsci.2010.11.007.
14. Choi S.-H., Qahtani M.S., Qasem E.A. (2018) Multilayer thin-film composite membranes for helium enrichment. *Journal of Membrane Science*. 553. 180–188. DOI: 10.1016/j.memsci.2018.02.057.
15. Choi S.-H., Sultan M.M.B., Alsuwailam A.A., Zuabi S.M. (2019) Preparation and characterization of multilayer thin-film composite hollow fiber membranes for helium extraction from its mixtures. *Separation and Purification Technology*. 222. pp. 152–161. DOI: 10.1016/j.seppur.2019.04.036.
16. Poteryaeva V.A., Usenko O.V., Sherstobitov A.A. (2015) Differentsial'naya pronitsaemost' ul'tratonkogo poristogo sloya monodispersnykh nanochastits [Differential permeability of an ultrathin porous layer of monodisperse nanoparticles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 96–102. DOI: 10.17223/19988621/34/9.
17. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Poteryaeva V.A., Zhambaa Soninbaier (2016) Separation of gases using ultra-thin porous layers of monodisperse nanoparticles. *EPJ Web of Conferences*. 110. pp. 01014-1–01014-6. DOI: 10.1051/epjconf/201611001014.
18. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Poteryaeva V.A., Libin E.E. (2016) Volnovaya pronitsaemost' sloya kompaktirovannykh nanochastits [The wave permeability of a compacted nanoparticle layer]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 51–57. DOI: 10.17223/19988621/41/5.
19. Poteryaeva V.A., Usenko O.V., Sherstobitov A.A. (2015) Differentsial'naya pronitsaemost' sloya polidispersnykh nanochastits [Differential permeability of a layer of polydisperse nanoparticles]. *The collected papers of the VII International Scientific Conference of Young Scientists. Section 2: Electrotechnology*. pp. 101–104.
20. Bubenchikov M.A., Poteryaeva V.A., Ukolov A.V. (2017) Helium passage through homogeneous ultrafine hydrocarbon layers. *EPJ Web of Conferences*. 110. pp. 01085. DOI: 10.1051/mateconf/201711001085.
21. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Libin E.E., Hudobina Yu.P. (2015) The potential field of carbon bodies as a basis for sorption properties of barrier gas systems. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 882–888. DOI: 10.1007/sl 1182-015-0586-6.
22. Ortega J. (1976) *Scientific Computing and Computer Science*. New York: Academic Press.

Received: August 10, 2019

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/65/10

Н.В. Скрипняк, К.В. Иохим

ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗЕРЕН ПО РАЗМЕРАМ НА ПРОЧНОСТНЫЕ И ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ Zr–Nb ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ РАСТЯЖЕНИИ¹

Методом многоуровневого компьютерного моделирования исследовано влияние распределения зерен по размерам на механическое поведение сплавов Zr–Nb при высокоскоростном растяжении. Исследовано влияние объемной концентрации крупных зерен на зарождение и рост повреждений. Показано, что сплавы Zr–Nb с зерненными структурами, характеризующимися бимодальным распределением размеров, обладают повышенными прочностными и деформационными характеристиками.

Ключевые слова: эволюция повреждений; распределение зерен по размерам; цирконий-ниобиевые сплавы; высокоскоростная деформации

Сплавы Zr–Nb представляют интерес для инженерного и медицинского применения благодаря уникальному сочетанию низкой магнитной восприимчивости, хорошей биосовместимости, высокой пластичности, коррозионной и радиационной стойкости [1, 2]. Сплавы Zr–1 %Nb и Zr–2.5 %Nb применяются в качестве конструкционных материалов для оболочек современных тепловыделяющих элементов ядерных реакторов, напорных труб и другого оборудования [3]. В процессе эксплуатации конструкций в ядерных реакторах происходит поглощение водорода и дейтерия сплавами Zr–Nb, что приводит к образованию дисперсных частиц фаз гидридов циркония (Zr_2H), (ZrH), ($ZrH_{1.5+x}$) и (ZrH_2). Образование гидридов приводит к охрупчиванию сплавов, замедленному гидридному растрескиванию, что является одним из основных факторов, сокращающих срок службы напорных труб в реакторах [2]. Для повышения прочностных характеристик сплавов Zr–Nb, их коррозионной стойкости и сопротивления водородному охрупчиванию было предложено использовать сплавы с ультрамелкозернистой структурой [4–6]. Было показано, что ультрамелкозернистые циркониевые сплавы с концентрацией Nb ниже 2.5 мас.% обладают существенно меньшими деформациями до разрушения по сравнению с крупнозернистыми аналогами [7]. При получении сплавов с ультрамелкозернистой структурой методами интенсивной пластической деформации могут формироваться структуры с бимодальным распределением зерен по размерам. Сплавы с подобной зеренной структурой обладают сочетанием повышенных прочностных характеристик и достаточно высокой пластичностью в квазистатических условиях [7–10]. Механическое поведение сплавов Zr–Nb с бимодальными зерненными структурами при деформации с высокими скоростями деформации исследовано слабо.

В данной работе для исследования свойств сплавов Zr–Nb с ультрамелкозернистыми и бимодальными зерненными структурами в условиях высокоскоростного

¹ Работа поддержана Российским научным фондом (РНФ), грант № 18-71-00117. Авторы благодарят Фонд за поддержку этой работы.

растяжения использован подход многоуровневого компьютерного моделирования.

Цель работы состояла в исследовании влияния параметров зеренной структуры на зарождение и развитие повреждений в сплавах Zr–Nb при высоких скоростях деформации. Методом компьютерного моделирования определены предельные деформации до макроскопического разрушения и макроскопические прочностные характеристики (пределы текучести и прочности) при скоростях деформации от 100 и 1000 с⁻¹ при изменении объемной концентрации крупных зерен от 0 до 100 %. Исследовано влияние дисперсных частиц гидридов циркония на развитие разрушения в сплавах с бимодальными зеренными структурами.

1. Постановка задачи

Двухуровневая модель механического отклика структурированной среды с бимодальным распределением размеров зерен была использована для исследования механического поведения сплава Zr–1 %Nb. В нормальных условиях сплав состоит из зерен альфа-фазы Zr с ~0.5 % Nb, имеющей гексагональную плотноупакованную (ГПУ) решетку, и дисперсных частиц Nb с объемно центрированной кубической решеткой [3–5, 7, 9–12]. При поглощении сплавом водорода могут образовываться наночастицы гидридов циркония, преимущественно в границах зерен или близи них [2, 13]. Поэтому модельные 3D-объемы сплава были представлены зернами альфа-фазы циркония, размеры которых имеют распределение, а также объемами агломератов субмикронных зерен и слоями интерфейсных и зеренных границ. Поскольку дисперсные частицы Nb и частицы гидридов имеют размеры от 20 до 40 нм, их содержание в сплаве было предложено учитывать неявно, с помощью модификации определяющих уравнений, разработанных в рамках микродинамического подхода и с учетом термически активированных дислокационных механизмов [14]. Объемы материала, соответствующие агломератам ультрамелких или наноразмерных зерен, объемам зернограницных областей, в модели характеризуются соответствующими эффективными физико-механическими характеристиками. Размеры зерен и фазовая структура на границе зерен влияют на скольжение дислокаций и образование дислокационных субструктур во время пластического течения [14]. Механический отклик поликристаллических сплавов может быть описан параметрами усреднения состояний по типичному элементу представительного объема. Распределения зерен по размерам в сплавах Zr–1 %Nb (Э110) были заданы в соответствии с экспериментальными данными, полученными методом дифракции вторичных отраженных электронов (EBSD) на приставке электронного сканирующего микроскопа [8].

При генерации модельных объемов учитывалось вероятное бимодальное или одномодальное распределение зерен по размерам. В случае бимодального распределения рассматривались субмикронные зерна, образующие ультрамелкозернистые объемы материала, а также крупные зерна, размеры которых могут варьироваться в диапазоне от 1 до 100 мкм. Распределение зерен по размерам описывалось функциями плотности вероятности $g_k(d_g)$ [7, 15]:

$$g(d_g) = \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k(d_g); \quad (1)$$

$$g_k(d_g) = (1/\sqrt{2\pi} \sigma_{dk}) \exp [-(\ln d_g - \bar{d}_{gk})^2 / 2\sigma_{dk}^2], \quad (2)$$

где d_g – размер зерна, λ_k – весовые коэффициенты, $\lambda_k > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, σ_{dk} , $\bar{d}_{gk}$ – среднеквадратичное отклонение $\ln(d_g)$, среднее значение $\ln(d_g)$, соответственно.

В этой статье рассмотрено влияние одномодального и бимодального распределений размеров зерен на пластическое течение и разрушение сплавов Zr–Nb при скоростях деформации от 100 до 1000 с⁻¹. Для калибровки вычислительной модели были использованы экспериментальные данные [4].

Удельный объем ультрадисперсных зерен (с размером зерен 100 нм < d_g < 1 мкм) и крупных зерен (1 мкм < d_g < $d_{g \max}$) оценивали с использованием функции плотности вероятности $g_k(d_g)$:

$$C_{UFG} = \int_{d_g^{\min}}^{1\mu\text{m}} g_1(x) dx, \quad C_{CG} = \int_{10\mu\text{m}}^{d_g^{\max}} g_2(x) dx, \quad (3)$$

где C_{UFG} , C_{CG} – удельные объемы ультрамелких зерен (C_{UFG}) и крупных зерен (C_{CG}); g_1 , g_2 – функции плотности вероятности логнормального распределения размеров субмикронных и крупных зерен соответственно.

На рис. 1 показан пример 3D-модельного объема сплава Zr–1 %Nb с бимодальным распределением зерен по размерам (85 % объемной концентрацией субмикронных зерен). Размеры модельного объема – 14×8×1 мкм.

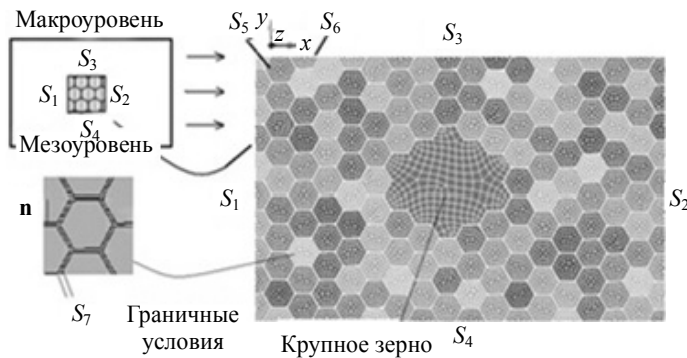


Рис. 1. Схема граничных условий
Fig. 1. Scheme of boundary conditions

Начальные условия соответствуют свободному напряженному состоянию материала в однородном температурном поле. Граничные условия (4) соответствуют растяжению вдоль оси OX с постоянной скоростью V_x :

$$\begin{aligned} u_x(x_k, t) &= 0, \quad x_k \in S_1, \\ u_x(x_k, t) &= v_x, \quad x_k \in S_2, \\ \sigma_{22} &= 0, \quad x_k \in S_3, x_k \in S_4, \\ u_z &= 0, \quad x_k \in S_5, x_k \in S_6, \\ u_k^A - u_k^B &= 0, \sigma_n^A = -\sigma_n^B, \quad k = 1, 2, 3, x_k \in S_7. \end{aligned} \quad (4)$$

Механический отклик зерен и зернограницной фазы описывался в рамках механики повреждаемых сред:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{du_i}{dt}, \quad \rho \frac{dE}{dt} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}; \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (1/2)[\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i], \quad \dot{\omega}_{ij} = (1/2)[\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i]; \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(m)} \varphi(f), \quad \sigma_{ij}^{(m)} = -p^{(m)} \delta_{ij} + S_{ij}^{(m)}; \quad (7)$$

$$p^{(m)} = p_x^{(m)}(\rho) + \Gamma(\rho) \rho E_T, \quad E_T = C_p T, \quad (8)$$

$$p_x^{(m)} = \frac{3}{2} B_0 \cdot ((\rho_0 / \rho)^{-7/3} - (\rho_0 / \rho)^{-5/3}) [1 - \frac{3}{4} (4 - B_1) \cdot ((\rho_0 / \rho)^{-2/3} - 1)];$$

$$DS_{ij}^{(m)} / Dt = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk}^e / 3),$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk}^p / 3, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \partial \Phi / \partial \sigma_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = \dot{f}_{growth} / (1 - f), \quad (9)$$

где ρ – массовая плотность; u_i – компоненты вектора скорости частицы; x_i – декартовы координаты, $i = 1, 2, 3$; E – удельная внутренняя энергия; $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\omega}_{ij}$ – компоненты тензора скорости деформации и тензора изгибания-кручения; функция $\varphi(f)$ устанавливает связь между эффективными напряжениями поврежденной среды и напряжениями в конденсированной фазе; Γ – коэффициент Грюнайзена; ρ_0 – начальная массовая плотность конденсированной фазы сплава; B_0, B_1 – постоянные материала; C_p – удельная теплоемкость; D/Dt – производная Яуманна; μ – модуль сдвига; $\dot{f}_{growth}$ – скорость роста пустот; f – объемная доля пустот в поврежденной среде; $\dot{\lambda}$ – параметр, полученный из условия пластического течения $\dot{\Phi} = 0$, а Φ – пластический потенциал, определяемый уравнением (10).

В расчетах были использованы значения $\rho_0 = 6505$ кг/м³, $B_0 = 89$ ГПа, $B_1 = 3.8$, $\Gamma = 1.09$.

Функция $\varphi(f)$ в уравнении (7) принимает вид $\varphi(f) = (1 - f)$ для давления и неявно определяется для тензора девиаторных напряжений.

Система уравнений включает в себя: уравнения сохранения (5), кинематические отношения (6), определяющее уравнение (7), уравнение состояния (8), уравнение релаксации для девиатора тензора напряжений (9).

Влияние повреждения на напряжение течения определялось потенциалом [16, 17]:

$$(\sigma_{eq}^2 / \sigma_s^2) + 2q_1 f^* \cosh(-q_2 p / 2\sigma_s) - 1 - q_3 (f^*)^2 = 0, \quad (10)$$

где σ_s – предел текучести, а q_1, q_2 и q_3 – параметры модели, p – давление, f^* – параметр поврежденности.

Скорость роста повреждений связана с выполнением уравнения сохранения массы и зависит от изменения объемной пластической деформации. Предполагается, что при сдвиговой пластической деформации роста повреждений не происходит. Зарождение пустот зависит от эквивалентной пластической деформации ε_{eq}^p [16, 17].

$$\dot{f} = \dot{f}_{nuc} + \dot{f}_{growth},$$

$$\dot{f}_{nuc} = \varepsilon_{eq}^p (f_N / s_N) \exp \{-0.5[(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_N) / s_N]^2\}, \quad (11)$$

$$\dot{f}_{growth} = (1 - f) \dot{\varepsilon}_{kk}^p,$$

где ε_N и s_N – средняя деформация зародышеобразования и стандартное отклонение соответственно. Количество зародышей пустот контролируется параметром f_N .

$$\begin{aligned} f^* &= f \text{ if } f \leq f_c; \\ f^* &= f_c + (\bar{f}_F - f_c)/(f_F - f_c) \text{ if } f > f_c, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\bar{f}_F = (q_1 + \sqrt{q_1^2 - q_3})/q_3$.

На стадии формирования трещины происходит слияние зародившихся пустот. Это вызывает размягчение материала и увеличение скорости роста относительного объема повреждений f^* .

Параметры модели для сплава Zr–1 % Nb были определены для согласования результатов моделирования с экспериментальными диаграммами деформирования. Для описания эволюции повреждений сплавов Zr–Nb использованы значения параметров: $q_1 = 1.3$, $q_2 = 1$, $q_3 = 1.69$, $f_0 = 0$, $f_N = 0.2$, $f_c = 0.035$, $f_F = 0.4$, $\varepsilon_N = 0.28$, $s_N = 0.1$.

Повышение температуры, связанное с диссипацией энергии при пластическом течении, рассчитывалось с помощью соотношения

$$T = T_0 + \int_0^{\varepsilon_{eq}^p} (\beta / \rho C_p) \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p, \quad (13)$$

где T_0 – начальная температура, а $\beta \sim 0.9$ – параметр, представляющий долю пластической работы, преобразованной в тепло.

Удельная теплоемкость для Zr–1 %Nb рассчитывалась по феноменологическим соотношениям в интервале температур от 293 до 1155 К [18].

$$C_p = 251.382 + 0.10487T + 0.0000159T^2 \text{ [Дж/кг} \cdot \text{К]} \text{ at } 0 < T < T_{\alpha\beta} = 1155 \text{ К.} \quad (14)$$

Напряжение пластического течения альфа-фазы циркония, имеющей гексагональную плотноупакованную кристаллическую решетку, было описано уравнением [14]

$$\begin{aligned} \sigma_s &= (\sigma_{s0} + k_{hp} d_g^{-1/2}) \times \\ &\times \exp\{C_1 \sqrt{(1 - T/T_m)}\} + C_2 \sqrt{1 - \exp\{-k_0 \varepsilon_{eq}^p\}} \exp\{-C_3 T\} \exp\{C_4 T \ln(\dot{\varepsilon}_{eq} / \dot{\varepsilon}_{eq0})\}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sigma_{s0} = \sigma_0 + \frac{\mu b}{2\pi\sqrt{1-\nu}} \frac{1}{L_{inc}} \lg\left(\frac{d_{inc}}{b}\right), \quad (16)$$

где σ_s – напряжение течения; σ_{s0} , k_{hp} , k_0 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 – параметры материала; d_g – средний размер зерна; $\dot{\varepsilon}_{eq} = [(2/3)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}]^{1/2}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скорости деформации; $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – компоненты тензора скорости пластической деформации;

$\varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt$ – интенсивность пластической деформации; $\dot{\varepsilon}_{eq0} = \gamma_1 \exp\{-T/\gamma_2\} + \gamma_3$;

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – постоянные материала; ν – коэффициент Пуассона; σ_0 – параметр, зависящий от предыстории воздействий на материал; b – модуль вектора Бюргерса; d_{inc} – средний размер дисперсных частиц Nb; L_{inc} – среднее расстояние между дисперсными частицами; T – температура в К; T_m – температура плавления; $\mu(T)$ – модуль сдвига.

Модуль сдвига сплава Zr–1 %Nb в зависимости от температуры рассчитывался с помощью феноменологического соотношения:

$$\mu(T) = \mu_0(1 - k_\mu T) \quad , (273 K < T < T_{\alpha\beta}) \quad , \quad (17)$$

где μ_0 , k_μ – постоянные материала, $T_{\alpha\beta}$ – температура фазового перехода $\alpha \rightarrow \beta$ для сплава.

Величина σ_{s0} для зернограницной фазы альфа циркония с выделениями наночастиц стабильных гидридов $\delta(\text{ZrH}_{1.5+x})$ и $\epsilon(\text{ZrH}_2)$ рассчитывалась по формуле (16) с использованием экспериментальных значений $d_{\text{inc}} = 36$ нм, $L_{\text{inc}} = 250$ нм, $d_{\text{inc}} = 25$ нм, $L_{\text{inc}} = 200$ нм, соответственно [19].

При моделировании деформации образцов сплава Zr–1 %Nb были использованы параметры материала: $\sigma_{s0} = 0.02$ ГПа, $\gamma_1 = 2115$ с^{–1}, $\gamma_2 = 38.2$ К, $\gamma_3 = 9.8 \cdot 10^{-5}$ с^{–1}, $\nu = 0.33$, $\mu_0 = 38.7$ ГПа, $k_\mu = 5.45 \cdot 10^{-4}$ К^{–1}, $T_{\alpha\beta} = 1155$ К, $d_g = 40$ мкм, $b = 0.323$ нм. Параметры материала, входящие в определяющее уравнение (15), для сплава Zr–1 %Nb, приведены в таблице.

Параметры сплава Zr–1 %Nb

Материал	σ_0 , ГПа	C_1	C_2 , ГПа	C_3 , К ^{–1}	C_4 , К ^{–1}	k_0	T_m , К
Zr–1 %Nb	0.02	3.85	0.56	0.0016	0.00009	8.5	1875

Компьютерное моделирование проводилось с использованием LS DYNA (ANSYS WB 15.2, ANSYS, Inc., Canonsburg, PA, USA).

Расчеты проводились с использованием конечно-разностной схемы второго порядка точности. Поскольку плотность сетки может влиять на процесс повреждения, в объемах зернограницной фазы применена мелкая сетка, а в объеме зерен более крупная. Размер шага сетки был подобран, чтобы обеспечить сходимость полученных численных результатов. Шаг по времени определяли для каждой ячейки с использованием условия Куранта – Фридрихса – Леви. Фрагментация образцов моделировалась методом эрозии при достижении параметром повреждения порогового значения. Во всех выполненных вариантах численного моделирования внутренняя энергия разрушенных сеточных элементов не превышала 5 % внутренней энергии расчетной области.

2. Результаты численного моделирования и их обсуждение

На рис. 2 показаны расчетные поля эквивалентных пластических деформаций на последовательных стадиях зарождения повреждений и их роста при растяжении модельного объема Zr–1 %Nb со скоростью деформации 100 с^{–1}. Уравнение (15) описывает деформационное упрочнение, чувствительность к скорости деформации и температурную чувствительность зерен сплава. Пространственное расположение зоны зарождения и роста повреждений (рис. 2) указывает сильную корреляцию между образованием полос локализованной пластической деформации и последующим формированием макротрещины. Полученные результаты также согласуются с данными [20], которые указывают на определяющую роль явления локализации деформации в процессе разрушения титановых сплавов, относящихся к одной изомеханической группе с цирконий-ниобиевыми сплавами [21]. На рис. 2, а показано, что зарождение повреждений происходит в зоне пересечения полос локализации пластической деформации с границами крупных зерен. На рис. 2, б и с показано, что с ростом деформации формируются стационарные полосы локализованного сдвига, вдоль которых происходит рост мезоскопических трещин.

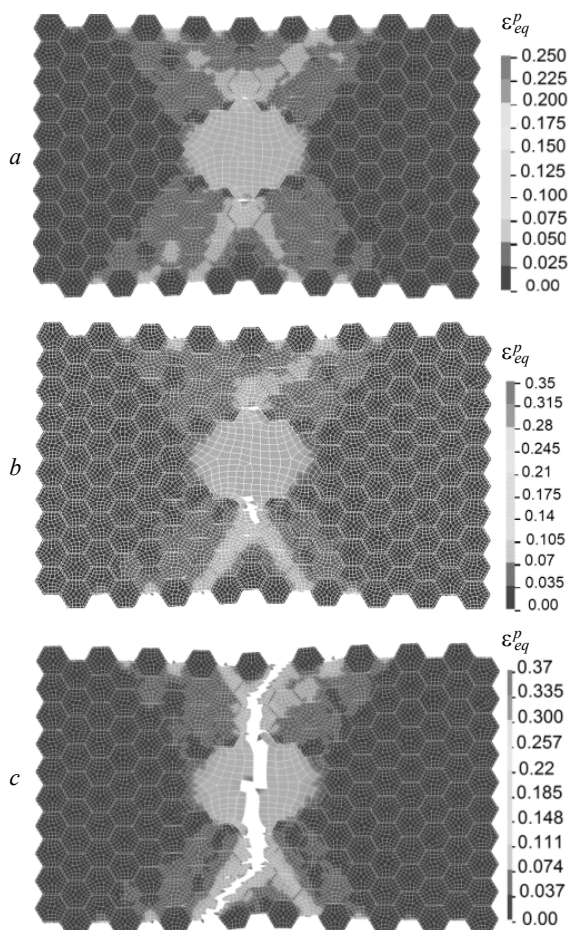


Рис. 2. Расчетная эквивалентная пластическая деформация на стадиях зарождения повреждений (а), их роста (b) и коалесценции (с) при растяжении представительного объема $\text{Zr} - 1\% \text{Nb}$ при скорости деформации 100 c^{-1}

Fig. 2. Calculated equivalent plastic strain at the stages of (a) nucleation, (b) growth, and (c) coalescence of damages under tension of $\text{Zr} - 1\% \text{Nb}$ representative volume element at a strain rate of 100 s^{-1}

В случае бимодальной зеренной структуры у материала полосы локализованного сдвига и трещины развиваются как в объеме субмикронных зерен, так и в крупных зернах. Учет изменения прочностных и деформационных свойств в объеме зернограницной фазы, обусловленного сегрегацией дисперсных частиц гидридов $\text{ZrH}_{1.5}$, не оказал значимого влияния на закономерности развития макроскопических трещин. Вместе с тем, снижение пороговой деформации зарождения повреждений в зернограницной фазе оказывает влияние на траекторию роста трещин в объеме мелкозернистого материала, как видно из рис. 2, b. Полученные результаты объясняют факт снижения параметра трещиностойкости K_{IC} при слабом

изменении эффективных значений предела текучести и предела прочности сплава Zr–1 %Nb с ростом концентрации дисперсных частиц гидридов. Объемная концентрация субмикронных зерен существенно влияет на прочностные свойства сплава Zr–1 %Nb при высоких скоростях деформации. На рис. 3, *a* показано, что с уменьшением концентрации субмикронных зерен и ростом крупных зерен в модельном объеме Zr–1 %Nb возрастает эффективная макроскопическая деформация до разрушения при скоростях деформации 100 и 1000 с⁻¹. Результаты, показанные на рис. 3, *b*, свидетельствуют о снижении эффективных значений предела текучести и максимального растягивающего напряжения (предела прочности) с ростом относительного объема крупных зерен в модельном объеме материала.

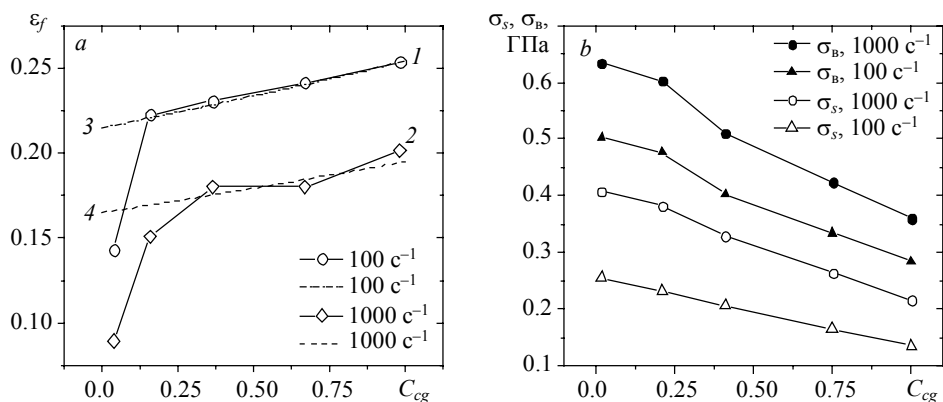


Рис. 3. Расчетная деформация до разрушения в зависимости от объемного содержания крупных зерен в объеме сплава Zr–1 %Nb с бимодальным распределением зерен по размерам (кр. 1 – скорость деформации 100 с⁻¹, кр. 2 – 1000 с⁻¹, кр. 3 – аналитическая зависимость (19)) (*a*); расчетные значения предела текучести и предела прочности при скорости деформации 100 с⁻¹ и 1000 с⁻¹ от объемного содержания крупных зерен (*b*)

Fig. 3. (a) Calculated strain to fracture versus the specific volume of large grains in the volume of the Zr–1Nb alloy with a bimodal grain size distribution (curve 1, the strain rate is equal to 100 s⁻¹; curve 2, the strain rate is equal to 1000 s⁻¹; and curve 3, an analytical prediction according to (19)); (b) calculated yield strength and ultimate tensile strength at a strain rate of 100 s⁻¹ and 1000 s⁻¹ versus the volume concentration of coarse grains

Влияние дисперсных частиц гидридов, сегрегированных в зернограницной фазе, на пластичность исследуемого сплава, оказалось незначительным. Это объясняется не только малым относительным объемом зернограницной фазы, но и несущественной ролью зернограницного проскальзывания в исследуемом диапазоне скоростей деформации при температуре, близкой к комнатной, в Zr–1 %Nb сплавах с бимодальной зеренной структурой.

Предельные деформации до разрушения возрастают нелинейно с ростом относительного объема крупных зерен и уменьшаются с ростом скорости деформации в диапазоне от 100 до 1000 с⁻¹, как показано на рис. 3, *a* (кривые 1 и 2). С ростом концентрации крупных зерен от 0 до 30 % объема сплава наблюдается резкий рост величины деформации до разрушения, что обусловлено уменьшением относительной длины полос локализованного сдвига в объеме ультрамелкозернистого материала. Полученные результаты для высоких скоростей деформации качественно подобны зависимостям прочностных характеристик от концентрации крупных зерен в условиях квазистатического нагружения [22]. Рациональное сочета-

ние повышенных прочностных характеристик с пластичностью при растяжении со скоростями деформации до 1000 с^{-1} может быть достигнуто в сплаве Zr–1 %Nb при отношении суммарных объемов субмикронных и купных зерен в пропорции $\sim 3:7$. При достижении порогового значения формируется пространственная каркасно-подобная структура, элементами которой выступают объемы с субмикронными зернами.

Пластичность ГПУ-сплавов с бимодальным распределением зерен в зависимости от удельного объема крупных зерен может быть описана соотношением [15]

$$\varepsilon_{fst} = C_{stf} \exp(C_{cg} / C_{cgn}) / (1 - \frac{T - T_r}{T_{\alpha\beta} - T_r}), \quad (18)$$

где ε_{fst} – деформация разрушения при квазистатическом растяжении; C_{cg} – удельный объем крупных зерен; C_{stf} , C_{cgn} – безразмерные постоянные материала; T – температура; T_r – комнатная температура; $T_{\alpha\beta}$ – температура фазового перехода $\alpha \rightarrow \beta$ в Zr–Nb-сплаве с определенной концентрацией Nb.

Применение указанного соотношения позволило обобщить полученные результаты компьютерного моделирования растяжения образцов сплава Zr–1 %Nb при температуре 295 К со скоростью деформации 100 с^{-1} при $C_{stf} = 0.215$, $C_{cgn} = 6$, а кривая 4 при $C_{stf} = 0.165$, $C_{cgn} = 6$ (кривая 3 на рис. 3, а).

$$\varepsilon_{fst} / \varepsilon_{fdyn} = [1 + C_{ef} \lg(\dot{\varepsilon}_{eq} / \dot{\varepsilon}_{eq0}) H(\dot{\varepsilon}_{eq} / \dot{\varepsilon}_{eq0} - 1)], \quad (19)$$

где C_{ef} – параметр материала; ε_{fdyn} – деформация разрушения при растяжении со скоростью деформации; $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Соотношение (19) применимо для описания пластичности ГПУ-сплавов Zr–1 %Nb с бимодальными зеренными структурами только при концентрации крупных зерен, превышающих $\sim 30 \%$ в диапазоне скоростей деформации до 1000 с^{-1} и диапазоне температур $T \leq T_{\alpha\beta}$ существования альфа-фазы Zr.

Выводы

Методом двухуровневого компьютерного моделирования исследовано влияние бимодального распределения зерен по размерам на развитие пластической деформации и разрушение сплава Zr–1 %Nb при растяжении со скоростями деформации 100 и 1000 с^{-1} .

Показано, что разработанная вычислительная модель позволяет описывать процессы деформации и разрушения сплава Zr–1 %Nb с бимодальными зеренными структурами при растяжении с макроскопическими скоростями деформации до 1000 с^{-1} .

Полученные результаты свидетельствуют о том, что повреждения, приводящие к разрушению сплава Zr–1 %Nb с бимодальными зеренными структурами при высоких скоростях растяжения, зарождаются на границе между крупными зернами и объемами с ультрамелкозернистой структурой.

Показано, что предельные деформации до разрушения возрастают нелинейно с ростом относительного объема крупных зерен и уменьшаются с ростом скорости деформации. С ростом концентрации крупных зерен от 0 до 30 % объема сплава наблюдается резкий рост величины деформации до разрушения.

Рациональное сочетание повышенных прочностных характеристик с пластичностью при растяжении со скоростями деформации до 1000 с^{-1} может быть дос-

тигнуто в сплаве Zr–1 %Nb при отношении суммарных объемов субмикронных и купных зерен в пропорции $\sim 3:7$.

Обнаружено, что влияние на пластичность сплава Zr–1 %Nb частиц гидридов с размерами 25–40 нм, сегрегированных в зернограницной фазе, оказалась незначительным.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке ответственных конструкций ядерного энергетического оборудования из сплавов Zr–1 %Nb, модифицированных методами интенсивной пластической деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guo D., Zhang Z., Zhang G., Li M., Shi Y., Ma T., Zhang X. An extraordinary enhancement of strain hardening in fine-grained zirconium // *Materials Science and Engineering: A*. 2014. V. 591. P. 167–172. DOI: 10.1016/j.msea.2013.10.086.
2. Vazquez C.A., Fortis A.M. Mechanical Tests and Microstructural Characterization of Hydrided Zr-1 wt% Nb // *Procedia Materials Science*. 2012. V. 1. P. 520–527. DOI: 10.1016/j.mspro.2012.06.070.
3. Kim H.G., Park S.Y., Lee M.H., Jeong Y.H., Kim S.D. Corrosion and microstructural characteristics of Zr–Nb alloys with different Nb contents // *Journal of Nuclear Materials*. 2008. V. 373(1-3). P. 429–432. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2007.05.035.
4. Sharkeev Y.P., Vavilov V.P., Skripnyak V.A., Legostaeva E.V., Eroshenko A.Y., Belyavskaya O.A., Ustinov A.M., Klopotov A.A., Chulkov A.O., Kozulin A.A., Skrypnyak V.V., Zhilyakov A. Yu., Kouznetsov V.P., Kuimova M.V. Research on the processes of deformation and failure in coarse- and ultrafine-grain states of Zr–1Nb alloys by digital image correlation and infrared thermography // *Materials Science and Engineering: A*. 2020. V. 784. Art. 139203. DOI: 10.1016/j.msea.2020.139203.
5. Chen Y., Hjelen J., Roven H.J. Application of EBSD technique to ultrafine grained and nanostructured materials processed by severe plastic deformation: Sample preparation, parameters optimization and analysis // *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*. 2012. V. 22(8). P. 1801–1809. DOI: 10.1016/s1003-6326(11)61390-3.
6. Behera A.N., Chaudhuri A., Kapoor R., Chakravarty J.K., Suwas S. High temperature deformation behavior of Nb–1 wt. % Zr alloy // *Materials and Design*. 2016. V. 92. P. 750–759. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.12.077.
7. Raesinia B., Sinclair C.W., Poole W.J., and Tome C.N. On the impact of grain size distribution on the plastic behaviour of polycrystalline metals // *Materials Science and Engineering: A*. 2008. V. 16. 025001. DOI: 10.1088/0965-0393/16/2/025001.
8. Kumar K., Szpunar J.A. EBSD studies on microstructure and crystallographic orientation of δ -hydrides in Zircaloy-4, Zr–1% Nb and Zr–2.5% Nb // *Materials Science and Engineering: A*. 2011. V. 528(21). P. 6366–6374. DOI: 10.1016/j.msea.2011.05.022.
9. Yang H., Kano S., Shen J., McGrady J., Zhao Z., Duan Z., Abe H. On the strength-hardness relationships in a Zr–Nb alloy plate with bimodal basal texture microstructure // *Materials Science and Engineering: A*. 2018. V. 732. P. 333–340. DOI: 10.1016/j.msea.2018.07.028.
10. Wang Y.M., Chen M.W., Zhou F.H., Ma E. High tensile ductility in a nanostructured metal // *Nature*. 2002. V. 419. P. 912–5. DOI: 10.1038/nature01133.
11. Yang H.L., Matsukawa Y., Kano S., Duan Z.G., Murakami K., Abe H. Investigation on microstructural evolution and hardening mechanism in dilute Zr–Nb binary alloys // *Journal of Nuclear Materials*. 2016. V. 481. P. 117–124. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2016.09.016.
12. Kapoor R., Sarkar A., Singh J., Samajdar I., Raabe D. Effect of strain rate on twinning in a Zr alloy // *Scripta Materialia*. 2014. V. 74. P. 72–75. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2013.10.025.
13. Puls M.P. Properties of Bulk Zirconium Hydrides // *Engineering Materials*. 2012. P. 7–52. DOI: 10.1007/978-1-4471-4195-2_2.
14. Skripnyak V.A., Skripnyak V.V., Skripnyak E.G., Skripnyak N.V. Modelling of the mechanical response of Zr–Nb and Ti–Nb alloys in a wide temperature range // *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2019. DOI: 10.1007/s10999-019-09447-z.

15. Skripnyak V.A., Skripnyak N.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.V. (2017). Influence of grain size distribution on the mechanical behavior of light alloys in wide range of strain rates // Proceedings of the 7th International Conference on Mechanics and Materials in Design, Albufeira/Portugal 11–15 June 2017. DOI: 10.1063/1.4971664.
16. Neilsen K.L., Tvergaard V. Ductile shear failure or plug failure of spot welds modelled by modified Gurson model // Eng. Fract. Mech. 2010. V. 77. P. 1031–1047. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.02.031.
17. Tvergaard V. Study of localization in a void-sheet under stress states near pure shear // Int. J. Solids Struct. 2015. V. 75–76. P. 134–142. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.08.008.
18. Souza A.C., Rossi J.L., Tsakirooulos P., Martinez L.G., Grandini C.R., Ceoni F.C., Mucsi C.S., Correa H.P.S. Preparation and Melting of Zr-1.0Nb Alloy // Materials Science Forum. 2016. V. 869. P. 578–584. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.869.578.
19. Harte A., Griffiths M., Preuss M. The characterisation of second phases in the Zr–Nb and Zr–Nb–Sn–Fe alloys: A critical review. *Journal of Nuclear Materials*. 2018. V. 505. P. 227–239. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2018.03.030.
20. Verleysen P., Peirs J. Quasi-static and high strain rate fracture behaviour of Ti6Al4V // Int. J. Impact Eng. 2017. V. 108. P. 370–388. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.03.001.
21. Frost H.J., Ashby M.F. Deformation-Mechanism Maps. Oxford, UK: Pergamon Press, 1982.
22. Shi Y., Li M., Guo D., Ma T., Zhang Z., Zhang G., Zhang X. Tailoring grain size distribution for optimizing strength and ductility of multi-modal Zr // Materials Letters. 2013. V. 108. P. 228–230. DOI: 10.1016/j.matlet.2013.07.001.

Статья поступила 02.05.2020 г.

Skripnyak N.V., Iokhim K.V. (2020) EFFECT OF GRAIN SIZE DISTRIBUTION ON THE STRENGTH AND STRAIN PROPERTIES OF Zr–Nb ALLOYS UNDER TENSION AT HIGH STRAIN RATES *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 124–136

DOI 10.17223/19988621/65/10

Keywords: evolution of damages, grain size distribution, zirconium-niobium alloys, high strain rate.

Two-level computer simulation is used to study the effect of bimodal grain size distribution on the plastic flow, damage evolution, and fracture of Zr–Nb alloys with a hexagonal close-packed crystal lattice under tension at strain rates of 100 and 1000 s^{−1}. The developed computational model allows one to describe the strain and fracture of the Zr-1 % Nb alloy with unimodal and bimodal grain structures under tension at high macroscopic strain rates. It is shown that the damages that cause the fracture of the Zr-1 % Nb alloy arise at the boundaries between coarse grains and volumes with an ultrafine-grained structure at high tensile strain rates.

A sharp increase in the strain to fracture and a smooth decrease of the yield strength and tensile strength of the Zr-1 % Nb alloy are observed at increasing volume concentration of large grains from 0 to 30 %. A rational combination of the increased yield strength and tensile strength with satisfactory ductility for strain rates ranging from 100 to 1000 s^{−1} can be achieved in the Zr-1 % Nb alloy when the ratio of the volume of submicron grains to the volume of coarse grains is about 3:7. Numerical simulation results show an insignificant impact of the concentration of dispersed particles of zirconium hydrides with sizes varying from 25 to 40 nm segregated in a grain boundary phase on the tensile strength of the Zr-1 % Nb alloys and on the strain to failure in the studied range of strain rates and temperature.

Financial support. This work was supported by the Russian Science Foundation (RSF) (project No. 18-71-00117). The authors are grateful for the support of this research.

Nataliya V. SKRIPNYAK (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: natali.skrp@mail.ru

Kristina V. IOKHIM (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iokhim.k@mail.ru

REFERENCE

1. Guo D., Zhang Z., Zhang G., Li M., Shi Y., Ma T., Zhang X. (2014) An extraordinary enhancement of strain hardening in fine-grained zirconium. *Materials Science and Engineering: A*. 591. pp. 167–172. DOI: 10.1016/j.msea.2013.10.086.
2. Vazquez C.A., Fortis A.M. (2012) Mechanical tests and microstructural characterization of hydrided Zr-1 wt% Nb. *Procedia Materials Science*. 1. pp. 520–527. DOI: 10.1016/j.mspro.2012.06.070.
3. Kim H.G., Park S.Y., Lee M.H., Jeong Y.H., Kim S.D. (2008) Corrosion and microstructural characteristics of Zr–Nb alloys with different Nb contents. *Journal of Nuclear Materials*. 373(1-3). pp. 429–432. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2007.05.035.
4. Sharkeev Y.P., Vavilov V.P., Skripnyak V.A., Legostaeva E.V., Eroshenko A.Y., Belyavskaya O.A., Ustinov A.M., Klopotov A.A., Chulkov A.O., Kozulin A.A., Skripnyak V.V., Zhilyakov A.Yu., Kouznetsov V.P., Kuimova M.V. (2020) Research on the processes of deformation and failure in coarse- and ultrafine-grain states of Zr–Nb alloys by digital image correlation and infrared thermography. *Materials Science and Engineering: A*. 139203. DOI: 10.1016/j.msea.2020.139203.
5. Chen Y., Hjelen J., Roven H.J. (2012) Application of EBSD technique to ultrafine grained and nanostructured materials processed by severe plastic deformation: Sample preparation, parameters optimization and analysis. *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*. 22(8). pp. 1801–1809. DOI: 10.1016/S1003-6326(11)61390-3.
6. Behera A.N., Chaudhuri A., Kapoor R., Chakravarty J.K., Suwas S. (2016) High temperature deformation behavior of Nb–1 wt. % Zr alloy. *Materials and Design*. 92. pp. 750–759. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.12.077.
7. Raesinia B., Sinclair C.W., Poole W.J., Tome C.N. (2008) On the impact of grain size distribution on the plastic behaviour of polycrystalline metals. *Materials Science and Engineering: A*. 16. 025001. DOI: 10.1088/0965-0393/16/2/025001.
8. Kumar K., Szpunar J.A. (2011) EBSD studies on microstructure and crystallographic orientation of δ -hydrides in Zircaloy-4, Zr–1% Nb and Zr–2.5% Nb. *Materials Science and Engineering: A*. 528(21). pp. 6366–6374. DOI: 10.1016/j.msea.2011.05.022.
9. Yang H., Kano S., Shen J., McGrady J., Zhao Z., Duan Z., Abe H. (2018) On the strength-hardness relationships in a Zr–Nb alloy plate with bimodal basal texture microstructure. *Materials Science and Engineering: A*. 732. pp. 333–340. DOI: 10.1016/j.msea.2018.07.028.
10. Wang Y.M., Chen M.W., Zhou F.H., Ma E. (2002) High tensile ductility in a nanostructured metal. *Nature*. 419. pp. 912–915. DOI: 10.1038/nature01133.
11. Yang H.L., Matsukawa Y., Kano S., Duan Z.G., Murakami K., Abe H. (2016) Investigation on microstructural evolution and hardening mechanism in dilute Zr–Nb binary alloys. *Journal of Nuclear Materials*. 481. pp. 117–124. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2016.09.016.
12. Kapoor R., Sarkar A., Singh J., Samajdar I., Raabe D. (2014) Effect of strain rate on twinning in a Zr alloy. *Scripta Materialia*. 74. pp. 72–75. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2013.10.025.
13. Puls M.P. (2012) Properties of bulk zirconium hydrides. *Engineering Materials*. pp. 7–52. DOI: 10.1007/978-1-4471-4195-2_2.
14. Skripnyak V.A., Skripnyak V.V., Skripnyak E.G., Skripnyak N.V. (2019) Modelling of the mechanical response of Zr–Nb and Ti–Nb alloys in a wide temperature range. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 16. pp. 215–224. DOI: 10.1007/s10999-019-09447-z.
15. Skripnyak V.A., Skripnyak N.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.V. (2017) Influence of grain size distribution on the mechanical behavior of light alloys in wide range of strain rates. *Proceedings of the 7th International Conference on Mechanics and Materials in Design*. DOI: 10.1063/1.4971664.
16. Neilsen K.L., Tvergaard V. (2010) Ductile shear failure or plug failure of spot welds modelled by modified Gurson model. *Engineering Fracture Mechanics*. 77. pp. 1031–1047. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.02.031.
17. Tvergaard V. (2015) Study of localization in a void-sheet under stress states near pure shear. *International Journal of Solids and Structures*. 75-76. pp. 134–142. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.08.008.

18. Souza A.C., Rossi J.L., Tsakiropoulos P., Martinez L.G., Grandini C.R., Ceoni F.C., Mucsi C.S., Correa H.P.S. (2016) Preparation and melting of Zr-1.0Nb alloy. *Materials Science Forum*. 869. pp. 578–584. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.869.578.
19. Harte A., Griffiths M., Preuss M. (2018) The characterisation of second phases in the Zr-Nb and Zr-Nb-Sn-Fe alloys: A critical review. *Journal of Nuclear Materials*. 505. pp. 227–239. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2018.03.030.
20. Verleysen P., Peirs J. (2017) Quasi-static and high strain rate fracture behaviour of Ti6Al4V. *International Journal of Impact Engineering*. 108. pp. 370–388. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.03.001.
21. Frost H.J., Ashby M.F. (1982) *Deformation-Mechanism Maps*. Oxford, UK: Pergamon Press.
22. Shi Y., Li M., Guo D., Ma T., Zhang Z., Zhang G., Zhang, X. (2013) Tailoring grain size distribution for optimizing strength and ductility of multi-modal Zr. *Materials Letters*. 108. pp. 228–230. DOI: 10.1016/j.matlet.2013.07.001.

Received: May 2, 2020

УДК 532.517.4

DOI 10.17223/19988621/65/11

Р.Р. Турубаетв, А.В. Шваб

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ ЗАКРУЧЕННОГО
ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ И ПРОЦЕССА КЛАССИФИКАЦИИ
ЧАСТИЦ В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ ЦЕНТРОБЕЖНОГО АППАРАТА**

Представлено численное исследование аэродинамики закрученного турбулентного течения и процесса классификации частиц в вихревой камере. Численные результаты показали возможность изменением формы лопаток ротора добиваться равномерного по высоте распределения радиальной составляющей вектора скорости в зоне сепарации, что является необходимым условием для эффективной работы сепаратора. На основе полученных результатов, были определены распределения траекторий движения одиночных частиц. Достоверность результатов исследования подтверждается тестовыми исследованиями и сравнением с экспериментом.

Ключевые слова: численное моделирование, турбулентность, давление, аэродинамика, вихрь, закрученное течение, функция тока, частицы, модель $k-\omega$ Уилкокса.

На сегодняшний день, аэро- и гидродинамика закрученных турбулентных потоков считается одним из самых перспективных и быстро развивающихся направлений в науке, это связано с высокой потребностью в получении мелкодисперсных порошков заданного гранулометрического состава. Данные порошки наиболее востребованы в авиации, энергетике и энергомашиностроении, химической технологии, атомной промышленности и во многих других отраслях промышленного сектора. В основе каждой из перечисленных отраслей лежат основные закономерности закрученных турбулентных потоков. Однако существующее математическое моделирование рассматриваемых процессов в центробежных аппаратах порошковых технологий как правило основано на полуэмпирических моделях и экспериментальных исследованиях. Поэтому фундаментальные исследования в области турбулентных закрученных потоков является необходимым для совершенствования существующих установок и проектирования принципиально новых устройств. Порошковые материалы нашли широкое применение в порошковой металлургии, аддитивной технологии, химической, атомной и других отраслях промышленности. В связи с этим, возникла потребность в получении тонкодисперсного порошка с заданным гранулометрическим составом. Существует много различных способов получения таких порошков, однако, одними из наиболее эффективных и безопасных, с точки зрения экологии, являются пневматические методы [1]. Одним из примеров аппарата, основанного на этой методологии, является комбинированный пневматический аппарат, разработанный в Национальном исследовательском Томском государственном университете. Одной из особенностей вихревой камеры данного аппарата является ротор, расположенный в верхней части вихревой камеры. Однако при прямоугольной форме лопаток ротора, профиль радиальной составляющей вектора скорости в области ротора имеет неравномерное распределение по высоте [2]. Данная работа посвящена решению этой проблемы.

Физико-математическая постановка задачи

Вихревая камера комбинированного пневматического аппарата (рис. 1) представляет собой цилиндрическую область, в верхней части которой находится ротор, который состоит из большого количества лопаток, вращающихся с постоянной угловой скоростью [3]. В центральной части камеры располагается диск, вращающийся с угловой скоростью ω_1 и предназначенный для отсеивания очень крупных частиц, поступающих через сечение А–А' в расчетную область вместе с несущей средой через патрубок, подведенный к нижней части камеры. Мелкая фракция вместе с несущей средой огибает центральный дисковый элемент за счет перепада давления и поступает в сепарационную зону камеры, расположенную в верхней части, где вращается вместе с лопатками ротора с угловой скоростью ω_2 . На этом этапе отсеивание частиц происходит за счет большой разницы между центробежной силой и силой аэродинамического сопротивления частиц. Отсеянные на одном из этапов частицы падают вниз для повторного измельчения.

Наличие большого количества вращающихся лопаток в роторе позволяет использовать допущение, согласно которому окружная составляющая вектора скорости в сепарационной зоне камеры имеет распределение по закону вращения твердого тела.

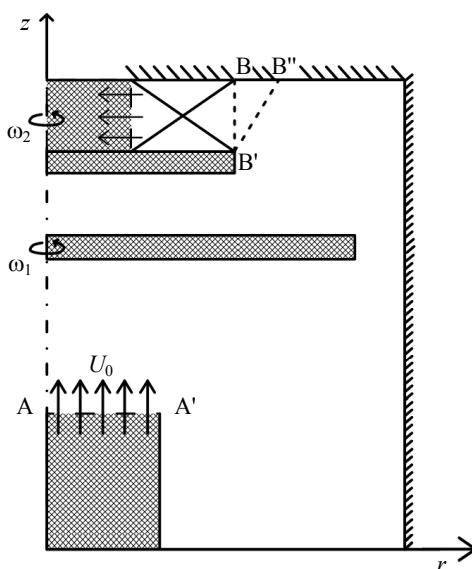


Рис. 1. Схема расчетной области
Fig. 1. Scheme of a computational domain

Численное моделирование аэродинамики в рассматриваемой вихревой камере проводится на основе уравнений Рейнольдса в цилиндрической системе координат, в силу особенностей геометрических составляющих камеры. Замыкается данная система при использовании обобщенной гипотезы Буссинеска [4], из которой следует, что Рейнольдсовы напряжения пропорциональны скорости деформации осредненного течения с точностью до скалярной функции, называемой коэффициентом турбулентной вязкости. В результате вышеизложенного, уравнения пе-

переноса импульса и неразрывности в безразмерной форме, и с учетом осесимметричности задачи можно привести к следующему виду [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_r u_z)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 + v_t) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + v_t) \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] \right\} + \frac{u_r^2}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} = \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t) \frac{\partial u_r}{\partial r} - (1 + v_t) \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_z)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 + v_t) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + v_t) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \right\} + \frac{u_r u_z}{r} = \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t) \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r u_\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_\phi)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 + v_t) \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + v_t) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right] \right\} + \frac{2u_r u_\phi}{r} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t) \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - (1 + v_t) \frac{u_\phi}{r^2} + \frac{\partial v_t}{\partial r} u_\phi \right]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0. \quad (4)$$

Безразмерная форма уравнений (1) – (4) получена с использованием следующих масштабов: входная скорость U_0 в качестве масштаба скорости, радиус входного сечения R_0 в качестве масштаба длины. Плотность газа в рассматриваемой задаче считалась постоянной, в силу небольших скоростей. В результате обезразмеривания образуется критерий Рейнольдса (Re).

Для моделирования турбулентной вязкости существует множество различных методов. В данной работе была использована распространенная модель турбулентности Уилкокса, согласно которой записываются два дополнительных уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности и удельной скорости диссипации турбулентной энергии. В безразмерной форме, в цилиндрической системе координат и с учетом осевой симметрии эти уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r k)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z k)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 + v_t \sigma^*) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + v_t \sigma^*) \frac{\partial k}{\partial z} \right] \right\} + \frac{u_r k}{r} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t \sigma^*) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + G - r \beta^* k \omega; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r \omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \omega)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 + v_t \sigma) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + v_t \sigma) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \right\} + \frac{u_r \omega}{r} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t \sigma) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} G - r \beta \omega^2 - \beta r \omega |\Omega|; \end{aligned} \quad (6)$$

$$v_t = \text{Re} \frac{k}{\omega}, \quad (7)$$

где $|\Omega|$ – модуль вектора завихренности; $\alpha, \beta, \sigma, \beta^*, \sigma^*$ – константы двухпараметрической дифференциальной модели турбулентности Уилкокса.

Для того чтобы получить единственное решение, используются следующие граничные условия. На входе в расчетную область безразмерная осевая компонента скорости задается равной $u_z = 1$. На твердой поверхности, для тангенциальных составляющих вектора скорости ставится условие частичного скольжения, где коэффициент скольжения определяется из известного закона стенки для турбулентного течения вблизи твердой поверхности. Это позволяет избежать измельчения шага разностной сетки вблизи твердой стенки. Более детальное описание реализации этих условий представлено в работе [6]. Поэтому скорость на стенке может быть выражена в следующей форме:

$$u_w = \gamma u_{w+1}; \quad \gamma = 1 - \frac{v_t}{u_{w+1}\chi^2},$$

Удельная скорость диссипации рассчитывалась по следующим формулам [7]:

$$\omega|_{r \rightarrow r_w} = \frac{4}{\text{Re}\beta(r-r_w)^2}; \quad \omega|_{z \rightarrow z_w} = \frac{6}{\text{Re}\beta(z-z_w)^2}.$$

Граничные условия на входе в исследуемую область для кинетической энергии турбулентности и удельной скорости диссипации турбулентной энергии были определены из экспериментальных данных. В выходном сечении рассматриваемой области ставится условие Неймана [8] для всех искомых переменных. В результате обезразмеривания граничных условий для окружной компоненты скорости, образуются два дополнительных критерия, которые фактически являются обратными числами Россби:

$$(u_\varphi)_1 = \left(\frac{U_\varphi}{U_0} \right)_1 = \frac{w_1 R_0}{U_0} \frac{R}{R_0} = Rg_1 r; \quad (u_\varphi)_2 = \left(\frac{U_\varphi}{U_0} \right)_2 = \frac{w_2 R_0}{U_0} \frac{R}{R_0} = Rg_2 r.$$

Здесь w_1, w_2 – угловые скорости диска и ротора соответственно.

Таким образом, полученная система (5) – (7) замкнута и описывает аэродинамику закрученного турбулентного течения в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата. В силу особенностей закрученного турбулентного течения двухфазной среды континуальный подход не может быть использован, так как он подразумевает что траектории движения частиц не будут пересекаться между собой. Соответственно расчеты проводились на основе дискретно-траекторного подхода [9].

Допускается, что на твердую сферическую частицу действуют только центробежная, инерционная, гравитационная и аэродинамическая силы. Для достижения высокой эффективности процесса сепарации частиц по заданному размеру необходима малая концентрация частиц, следовательно, обратным воздействием частиц на поток можно пренебречь. В этом случае, в рамках дискретно-траекторного подхода, уравнения для описания траекторий движения частиц выглядят следующим образом:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{W}, \quad (8.1)$$

$$m \frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{F}. \quad (8.2)$$

В результате перечисленных допущений уравнение (8.2) в цилиндрической системе координат с учетом перечисленных сил переписывается в виде [10]

$$\frac{dw_r}{d\tau} = \frac{(w_\varphi)^2}{r} + \frac{u_r - w_r}{Stk} \xi; \quad (9)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{u_z - w_z}{Stk} \xi - \frac{1}{Fr}; \quad (10)$$

$$\frac{dw_\varphi}{d\tau} = -\frac{w_r w_\varphi}{r} + \frac{u_\varphi - w_\varphi}{Stk} \xi. \quad (11)$$

Здесь левая часть представляет инерционные силы. Выражение (9) представляет центробежную и аэродинамическую силу, в котором $\xi = 1 + 1/6 \cdot Re_p^{23}$ – коэффициент отклонения аэродинамического сопротивления трения частицы от закона Стокса; Stk , Fr , Re_p – безразмерные числа Стокса, Фруда и Рейнольдса частицы соответственно:

$$Fr = \frac{U_0^2}{g \cdot H}, \quad Stk = \frac{\rho_p \delta^2 U_0}{18 \rho \nu H}, \quad Re_p = \frac{|\bar{U} - \bar{W}| \delta}{\nu}.$$

В формуле в (10) последнее слагаемое отражает гравитационную силу.

Метод численного решения

Численно, задача решалась с использованием известного метода расщепления полей скорости и давления, который подробно изложен в работе [11]. В результате получаем систему нестационарных уравнений переноса. Решение каждого уравнения проводится эволюционным методом до установления по времени, в комбинации с обобщенным неявным методом переменных направлений в дельта-форме [12]. Решение указанным методом проводится следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \Lambda_x \theta + \Lambda_y \theta + F, \\ \frac{\Delta \theta^*}{\Delta \tau} - \frac{1}{2} \Lambda_x \Delta \theta^* &= \Lambda_x \theta^n + \Lambda_y \theta^n + F; \\ \frac{\Delta \theta^{**}}{\Delta \tau} - \frac{1}{2} \Lambda_y \Delta \theta^{**} &= \frac{\Delta \theta^*}{\Delta \tau}; \\ \theta^{n+1} &= \theta^n + \Delta \theta^{**}. \end{aligned}$$

Здесь операторы Λ представляют собой конвективные и диффузионные слагаемые.

Разностные аналоги конвективно-диффузионных слагаемых расписывались на разнесенной разностной сетке с использованием экспоненциальной схемы [13]. Особенностью экспоненциальной схемы является то, что она снимает ограничение на сеточное число Рейнольдса.

Численное решение уравнения движения частицы основывается на неявном методе Эйлера.

Анализ численных результатов

Как видно из рис. 2, при прямоугольной форме ротора, в выходной области камеры сечение газа сужается, что неблагоприятно сказывается на процессе сепарации и классификации частиц. Посредством изменения формы лопаток ротора удалось создать дополнительный перепад давления, что позволило увеличить сечение газа и тем самым получить более равномерное по высоте распределение линий тока на входе в ротор.

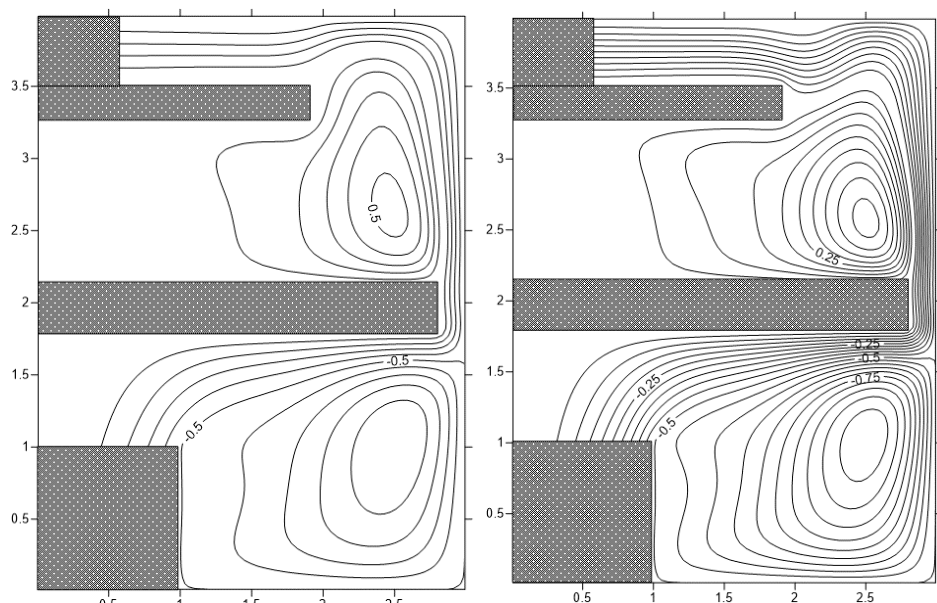


Рис. 2. Распределение изолиний функции тока для прямоугольной (слева) и трапециевидальной (справа) формы ротора; $Re = 3000$, $Rg_1 = 3$, $Rg_2 = 3$

Fig. 2. Streamline distribution for rectangular (on the left) and trapezoidal (on the right) rotor shapes; $Re = 3000$, $Rg_1 = 3$, $Rg_2 = 3$

Посредством изменения формы лопаток ротора можно влиять на распределение радиальной составляющей вектора скорости в вертикальном сечении ротора, что демонстрирует рис. 3. Таким образом, можно добиться более равномерного распределения радиальной составляющей вектора скорости по высоте на входе в ротор, что является очень важным критерием для эффективной работы вихревой камеры центробежного аппарата.

На рис. 4 представлено распределение изолиний кинетической энергии турбулентности и окружной составляющей вектора скорости для трапециевидальной формы ротора. Здесь можно отметить большую интенсивность кинетической энергии турбулентности на участке с измененной формой лопаток ротора.

Рис. 5 демонстрирует частный случай закрученного турбулентного течения двухфазной среды, из которого следует, что крупная фракция частиц попадает на периферию и падает для повторного измельчения. Однако мелкая фракция частиц беспрепятственно попадает в ротор, расположенный в верхней части вихревой камеры. В данном примере рассматривалась геометрия без центрального дискового элемента.

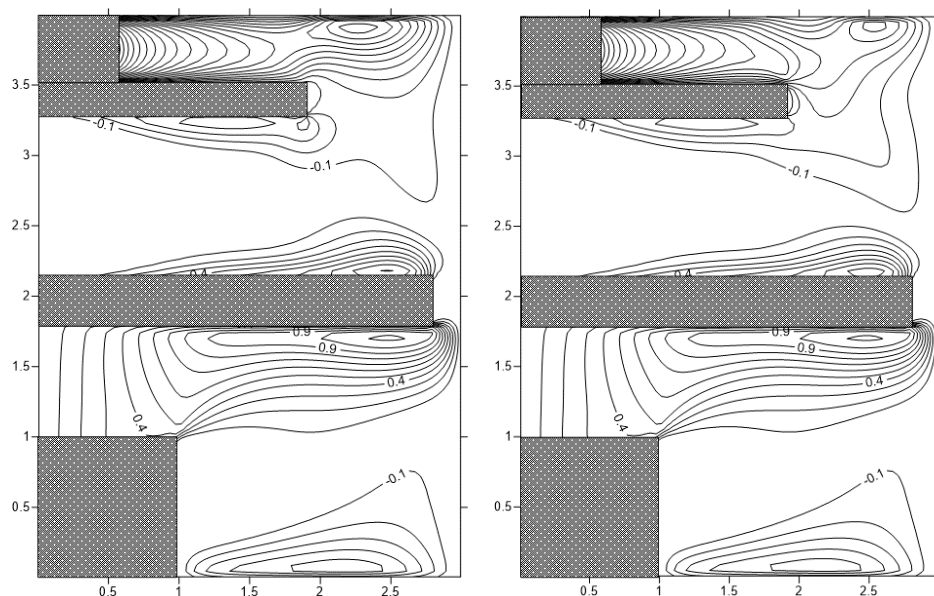


Рис. 3. Распределение изолиний радиальной составляющей вектора скорости для прямоугольной (слева) и трапециевидальной (справа) формы ротора; $Re = 3000$, $Rg_1 = 3$, $Rg_2 = 3$
Fig. 3. Isolines of the radial velocity component for rectangular (on the left) and trapezoidal (on the right) rotor shapes; $Re = 3000$, $Rg_1 = 3$, $Rg_2 = 3$

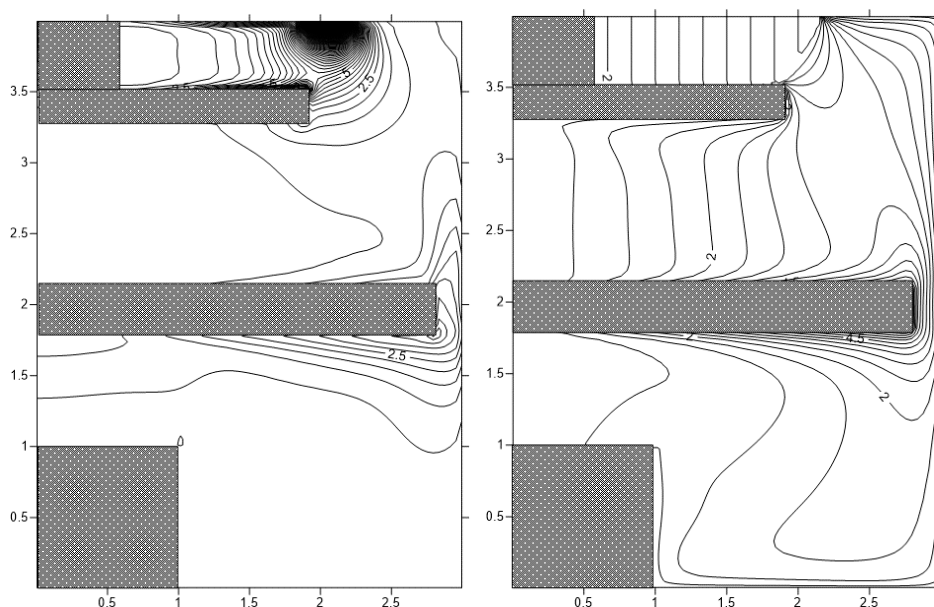


Рис. 4. Распределение изолиний кинетической энергии турбулентности (слева) и окружной составляющей вектора скорости (справа) для трапециевидальной формы ротора; $Re = 3000$, $Rg_1 = 3$, $Rg_2 = 3$
Fig. 4. Isolines of the turbulent kinetic energy (on the left) and circumferential velocity component (on the right) for a trapezoidal rotor shape; $Re = 3000$, $Rg_1 = 3$, $Rg_2 = 3$

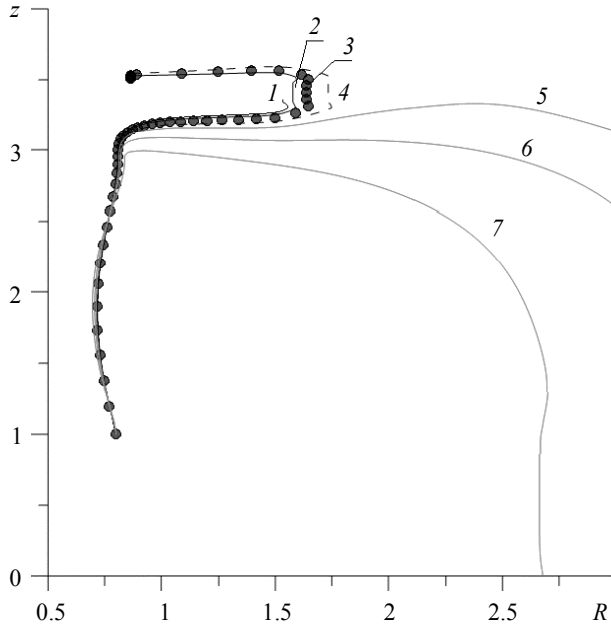


Рис. 5. Распределение траекторий движения частиц различного размера:
 1 – 10, 2 – 15, 3 – 20, 4 – 25, 5 – 30, 6 – 40 и 7 – 50 мкм
Fig. 5. Motion trajectories for particles of various sizes:
 (1) 10, (2) 15, (3) 20, (4) 25, (5) 30, (6) 40, and (7) 50 μm

Достоверность изложенного исследования подтверждается сравнением решения ламинарной задачи в переменных вихрь – функция тока и скорость – давление [11]. Также, было проведено сравнение полученных численных результатов с экспериментальными данными и получено согласование для закрученного турбулентного течения в междисковом пространстве при направлении течения от периферии к оси симметрии (рис. 6) [14].

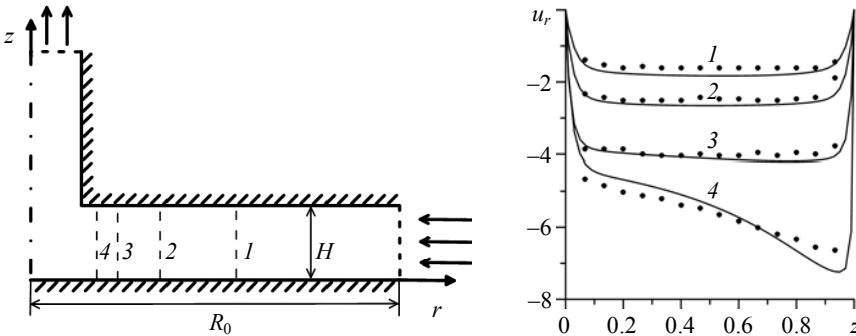


Рис. 6. Сравнение численных расчетов с экспериментальными данными при следующих параметрах течения: $\text{Re} = 2204$, $R_0/H = 10$, $1 - R/R_0 = 0.6$; 2 – $R/R_0 = 0.4$; 3 – $R/R_0 = 0.275$; 4 – $R/R_0 = 0.185$. Точками отображены экспериментальные данные [15]
Fig. 6. Comparison of numerical results with experimental data for the following flow parameters: $\text{Re} = 2204$, $R_0/H = 10$, $R/R_0 = (1) 0.6$, (2) 0.4, (3) 0.275, and (4) 0.185. The dotted line indicates experimental data [15]

Заключение

В данной работе представлены результаты численного исследования аэродинамики закрученного турбулентного течения и процесса сепарации частиц в вихревой камере пневматического аппарата. Выявлены характерные особенности в распределении полей скорости, турбулентной вязкости и кинетической энергии турбулентности. Показана возможность управлять балансом аэродинамических и центробежных сил в области ротора за счет изменения формы лопаток, что способствует повышению эффективности процесса сепарации порошков по заданному гранулометрическому составу. В результате математического моделирования динамики движения одиночной тяжелой частицы в закрученном турбулентном течении было выяснено влияние геометрических и режимных параметров на фракционное разделение частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шваб А.В., Евсеев Н.С. Исследование процесса сепарации частиц в турбулентном закрученном потоке // Теорет. осн. хим. техн. 2015. Т. 49. № 2. С. 197–205. DOI: 10.7868/S0040357115020128.
2. Шваб А.В., Турубаев Р.Р. Моделирование аэродинамики закрученного турбулентного течения в центробежном аппарате // Теорет. осн. хим. техн. 2019. Т. 53 № 2. С. 196–204. DOI: 10.1134/S0040357119010135.
3. Зятиков П.Н., Росляк А.Т., Шваб А.В., Демиденко А.А., Романдин В.И., Брендаков В.Н. Способ газовой центробежной классификации и измельчения порошков // Патент РФ № 2522674 от 20.07.2014.
4. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М.: Мир, 1977. 618 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
6. Кузьминов А.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости на основе двухслойной (κ - ϵ)-модели // Выч. техн. 2001. Т. 6. № 5. С. 73–86.
7. Шваб А.В., Садретдинов Ш.Р., Брендаков В.Н. Исследование влияния потока газа и турбулентной диффузии на процесс центробежной классификации тонкодисперсных частиц // Прикл. мех. и техн. физика. 2012. Т. 53. № 2. С. 33–42.
8. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 2. 726 с.
9. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 600 с.
10. Шваб А.В., Марценко М.С. Исследование движения плотного слоя гранулированной среды и процесса смешения в сужающемся канале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4 (12). С. 123–130.
11. Турубаев Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 87–98. DOI: 10.17223/19988621/47/9.
12. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
13. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.
14. Singh A, Vyas B.D., Powle U.S. Investigations on inward flow between two stationary parallel disks // Int. J. Heat and Fluid Flow. 1999. V. 20. No. 4. P. 395–401. DOI: 10.1016/S0142-727X(98)10058-9.
15. Wilcox D.C. Reassessment of the scale – determining equation for advanced turbulence models // Amer. Inst. of Aeron. And Astron. 1988. V. 26. No. 11. P. 1299–1310. DOI: 10.2514/3.10041.

Статья поступила 08.10.2019 г.

Turubaev R.R., Shvab A.V. (2020) NUMERICAL STUDY OF SWIRLING TURBULENT FLOW AERODYNAMICS AND CLASSIFICATION OF PARTICLES IN A VORTEX CHAMBER OF A CENTRIFUGAL MACHINE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 137–147

DOI 10.17223/19988621/65/11

Keywords: numerical simulation, turbulence, pressure, aerodynamics, vortex, swirling flow, stream function, particles, Wilcox $k-\omega$ model.

This paper presents a numerical study of swirling turbulent flow aerodynamics, as well as a process of classifying of particles in a vortex chamber of a centrifugal machine. The considered vortex chamber involves the following particular features: a rotor located in the upper part of the chamber, which represents a system of rotating blades, and a central disk element, whose center coincides with a symmetry axis, and which serves to increase a circumferential velocity of the carrier medium. The numerical method that is used to describe the swirling turbulent flow aerodynamics is based on the physical splitting of velocity and pressure fields. Numerical results showed that it is possible to change the shape of the rotor blades, and thus to significantly affect the radial velocity component distribution in a separation zone. As a result, this distribution becomes uniform in height at the rotor inlet, which is a necessary condition for efficient operation of the separator. Based on the computed aerodynamics in the considered region, the motion trajectories for single particles have been obtained, as well as their dependence on the central disk position. Reliability of the numerical results is confirmed by test studies and by a comparison with experimental data.

Roman R. TURUBAEV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: roma.turubaev@gmail.com

Aleksandr V. SHVAB (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: avshvab@inbox.ru

REFERENCES

1. Shvab A.V., Evseev N.S. (2015) Studying the separation of particles in a turbulent vortex flow. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 49(2). pp. 191–199. DOI: 10.1134/S0040579515020128.
2. Shvab A.V., Turubaev R.R. (2019) Simulation of swirling turbulent flow aerodynamics in a centrifugal machine. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 53(2). pp. 242–250. DOI: 10.1134/S0040579519010135.
3. Zyatikov P.N., Roslyak A.T., Shvab A.V., Demidenko A.A., Romandin V.I., Brendakov V.N. (2014) *Sposob gazovoy tsentrobeznoy klassifikatsii i izmel'cheniya poroshkov* [Gas centrifugal classification and grinding of powders]. RF Patent 2522674.
4. Roache P.J. (1982) *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque: Hermosa Publishers.
5. Loytsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
6. Kuz'minov A.V., Lapin V.N., Chernyy S.G. (2001) Metod rascheta turbulentnykh techeniy neszhimaemoy zhidkosti na osnove dvukhsloynoy ($k-\varepsilon$) modeli [A computational method for turbulent incompressible fluid flows based on the two-layer $k-\varepsilon$ model]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 6(5). pp. 73–86.
7. Shvab A.V., Sadretdinov Sh.R., Brendakov V.N. (2012) Effects of gas flow and turbulent diffusion on the centrifugal classification of fine particles. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 53(2). pp. 173–181. DOI: 10.1134/S0021894412020046.
8. Anderson D., Tannehill Dzh., Pletcher R. (1997) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Part 2*. London: Taylor & Francis.
9. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techenie gaza s chastitsami* [Gas flow with particles] Moscow: FIZMATLIT.

10. Shvab A.V., Martsenko M.S. (2010) Issledovanie dvizheniya plotnogo sloya granulirovannoy sredy i protsessa smesheniya v suzhayushchemsya kanale [Research of motion of a dense bed of a granular medium and mixing process in a tapered channel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(12). pp. 123–130.
11. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhreвой kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. DOI: 10.17223/19988621/47/9.
12. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
13. Anderson D., Tannehill Dzh., Pletcher R. (1997) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Part I*. London: Taylor & Francis.
14. Singh A., Vyas B.D., Powle U.S. (1999) Investigations on inward flow between two stationary parallel disks. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 20(4). pp. 395–401. DOI: 10.1016/S0142-727X(98)10058-9.
15. Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the scale- determining equation for advanced turbulence models. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 26(11). pp. 1299–1310. DOI: 10.2514/3.10041.

Received: October 8, 2019

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

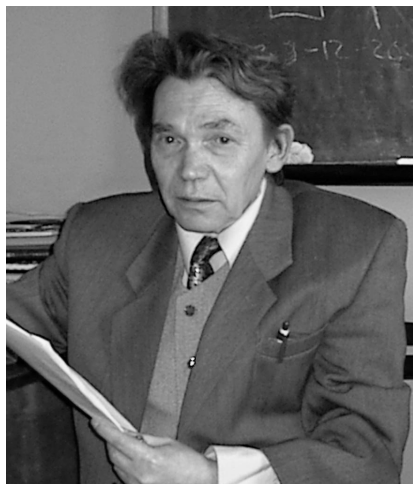
УДК 517.518.26
DOI 10.17223/19988621/65/12

MSC 01A70

А.Н. Малютина, М.Д. Михайлов

РЫЦАРЬ НАУКИ
ВИКТОР АНДРЕЕВИЧ ТОПОНОГОВ

Ключевые слова: В.А. Топоногов, биография, риманова геометрия, малые треугольники, геометрическая теория функций.



В.А. ТОПОНОГОВ
(06.03.1930 – 21.11.2004)

Виктор Андреевич Топоногов – учёный с мировым именем. Работы в одном из важнейших разделов современной римановой геометрии поставили его имя в один ряд с именами Э. Картана, М. Мориса, Г. Пауха и В. Клингенберга.

Именно в этой области он получил результаты (список работ – см. [1]), ставшие классическими и составившими фундамент современной геометрии. Прежде всего, это знаменитая теорема Топоногова о сравнении углов треугольников, которая утверждает, что углы любого треугольника из кратчайших в полном римановом многообразии кривизны не меньше k не меньше углов треугольника со сторонами той же длины на односвязной поверхности постоянной кривизны k . Этот же результат лег в основу последующих многочисленных исследований

связей между кривизной и топологическим строением римановых многообразий, а также поведением геодезических.

Следующий фундаментальный результат В.А. Топоногова – теорема о расщеплении, утверждающая, что риманово многообразие неотрицательной кривизны, содержащее прямую – полную геодезическую, любой участок которой является кратчайшей, разлагается в прямое метрическое произведение. Теорема о расщеплении и другие результаты включены в современные учебники по римановой геометрии и в монографии различных авторов. Методы, разработанные Виктором Андреевичем, оказали существенное влияние на развитие современной римановой геометрии.

Безусловно весом вклад ученого в подготовку научных кадров. Более 40 лет В.А. Топоногов вёл активную педагогическую деятельность в Новосибирском государственном и педагогическом университетах.

В публикациях о профессоре В.А. Топоногове авторы в основном отражают его зрелый период жизни, проходивший в Новосибирском Академгородке. А то, что было до этого периода, укладывалось, буквально, в несколько строк. Но, как известно, характер человека, знания, интересы формируются в юные годы. Тем более, что у Виктора Андреевича они пришлись на суровые тридцатые годы XX века.

Юность

Виктор Андреевич Топоногов родился 6 марта 1930 года в городе Томске в семье техников землеустройства. Оба родителя: отец Андрей Иванович Топоногов и мать Милица Петровна, уроженцы университетского города, работали в этой должности. Семья, по городским меркам, была большая – 10 детей: семь братьев, три сестры и еще двое родителей. Ютились в одной небольшой комнате, купленной в переулке Глухо-заборный на деньги, вырученные от продажи пианино. Спали на полу.

В феврале 1937 года органами НКВД был арестован отец и с этого времени о нём не было никаких известий. Вся тяжесть по содержанию и воспитанию детей легла на плечи матери, Милицы Петровны. В своём листке по учёту кадров Топоногов пишет: «В 1938 году мать поступила работать в Томское отделение Запсибпроекта, позже переименованное в Томскую контору «Обл-проект», где она работает и сейчас (24.VI-1953 г.) в должности техника-счётчика. За период своей работы мать награждена медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.» и в 1950 году – значком «Отличник социалистического соревнования»...».



Виктор Топоногов в юности

Учёба в школе Виктору давалась легко: у него были отличные оценки и по точным и по гуманитарным предметам. Среднюю школу он окончил в 1948 году с золотой медалью. И поскольку любил математику, то проблем с выбором куда поступать не было: ТГУ, механико-математический факультет.

Студенческие годы

В.А. Топоногову повезло. Он поступил на факультет, который появился в ТГУ в 1948 году в результате деления физико-математического факультета на физический и механико-математический. На ММФ того периода работали блестящие учёные и педагоги, имена которых и поныне чтут не только на факультете, но и далеко за его пределами: профессора Куфарев П.П., Клементьев З.И., Суворов Г.Д. (ставший членом-корреспондентом АН УССР), одна из первых выпускниц ТГУ, доцент Аравийская Е.Н.

На фотографиях студенческой поры Виктор Топоногов выделялся из общей массы сокурсников босыми ногами и фуфайкой. Вопреки простецкому внешнему виду учился Виктор отлично, любил исследовательскую работу. За активное уча-

стие в научных студенческих конференциях он в 1952 году был награждён грамотой Томского горисполкома и дважды – университетской премией.



Виктор (справа) с другом Ильей в студенческие годы

Государственные экзамены:

- | | |
|-------------------------------|----------|
| 1. Военная подготовка | отлично. |
| 2. Математика | отлично. |
| 3. Основы Марксизма-Ленинизма | отлично. |

м/п Ректор Томского Государственного
Университета профессор-доктор Подпись /В.Т.Макаров/

Декан механико-математического
факультета профессор-доктор Подпись /П.П.Куфарев/

Секретарь факультета Подпись /Вечерская М.И./

М.П. г.Томск 1 июля 1953 г.

Регистрационный № 2



Итоги государственных экзаменов В.А. Топоногова

Июнь, июль 1953 года. Жаркая пора – государственные экзамены, защита дипломной работы на тему: «О вероятности захвата в задаче трёх тел с положительной постоянной энергией». Этот этап успешно преодолен. Виктор Топоногов получил диплом с отличием.

Д И П Л О М

С ОТЛИЧИЕМ

Ж № 503599

Настоящий диплом выдан ТОПОНОВУ ВИКТОРУ АНДРЕЕВИЧУ в том, что он в 1948 году поступил в Томский Государственный Университет имени В.В. Куйбышева и в 1953 году окончил полный курс названного университета по специальности математика.

Решением Государственной экзаменационной комиссии от 25 июня 1953 г. ТОПОНОВУ В.А. присвоена квалификация математика.

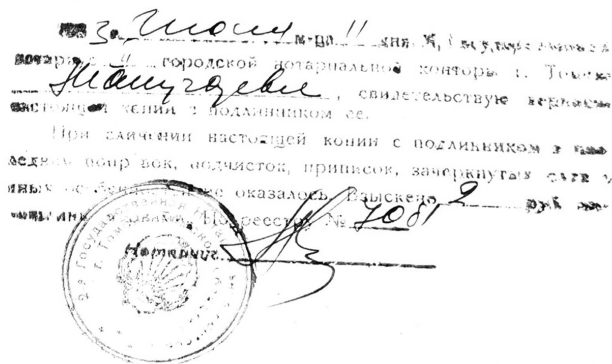
Председатель Государственной
экзаменационной комиссии Е.Аравийская

Ректор/директор/ проф. В.Макаров

Секретарь Д.Иванова

М.П. город Томск 1/II-1953 г.

Регистрационный № 2.



Диплом с отличием В.А. Топоногова

Казалось бы, дальнейший путь предопределён: научная работа, аспирантура. Но время внесло свои коррективы. Для сына «врага народа» дорога в аспирантуру была закрыта. Надо отдать должное выдающемуся учёному, профессору Павлу Парфеньевичу Куфареву. Будучи деканом ММФ, он дал характеристику Топоногову В.А. для поступления в аспирантуру. В ней, в частности, сказано:

«...Топоногов В.А. является одним из наиболее способных студентов факультета. Во время обучения в университете активно участвовал в работе научных студенческих кружков. Выступал с докладами на VII и VIII научной студенческой конференции ТГУ. За доклады был награждён грамотами обкома ВЛКСМ и горисполкома, а последний доклад был отмечен премией ТГУ. Учится только на отлично.

За активное участие в студенческих научных конференциях в 1952 был награжден грамотой Томского государственного и французского университетов.

Мой брат, мой полюб Боря Андреевич, год рождения 1933, учился в Томском сельскохозяйственном институте.

24/11-53г

Александр В.

Выдержка из автобиографии В.А. Топоногова

Был два года по поручению городского комитета ВЛКСМ в Доме пионеров руководителем шахматного кружка. В 1950–1951 году работал членом бюро ВЛКСМ, принимал активное участие в проведении Всесибирской математической олимпиады. Отец В.А. Топоногова арестован в 1937 году органами НКВД. Мать работает техником-счётчиком в конторе Облпроекта г. Томска.

Подпись: декан механико-математического факультета
профессор-доктор

/П.П. Куфарев/

ВЫПИСКА ИЗ ПРОТОКОЛА № 5/224

Заседания Ученого Совета Томского государственного
университета имени В.В. Куйбышева от 13 мая 1953
года.

С л у ш а л и : рекомендация в аспирантуру
окончивших Томский университет в 1952/53 уч. году.

П о с т а н о в и л и : рекомендовать ТОПОНОГОВА
Виктора Андреевича, окончившего в 1952-53 году механико-
математический факультет по специальности "Математический
анализ".

п.п. Председатель Совета
и.о. Ректора Томского университета
профессор-доктор – В.Цегель

Ученый Секретарь
университета – А. Ананьев

Выписка верна:
инспектор по аспирантуре П. Князев /П. Князев/



Рекомендация в аспирантуру ММФ Учёного Совета ТГУ

Благодаря настойчивости и защите профессора Куфарева, В.А. Топоногов был зачислен в аспирантуру ММФ ТГУ на первый курс. Руководителем стал заведующий кафедрой математического анализа П. П. Куфарев.

Аспирантура

Вступительные экзамены по математическому анализу, по основам марксизма-ленинизма и по английскому языку сданы на отлично. Виктор Топоногов – аспирант ММФ.

Под руководством П.П. Куфарева он работал немногим более года. За это время были успешно сданы кандидатские экзамены и аспирант был переведён на второй год обучения, но 29 декабря 1954г выходит приказ № 200 по ТГУ следующего содержания: «Утвердить следующих научных руководителей аспирантов: Топоногову В.А. (математический анализ) – кандидата физико-математических наук доцента Фет А.И., освободить от этой обязанности профессора Куфарева П.П.

Основание: отношение Главного управления университетов, экономических и юридических Вузов от 3.XII.54 г. У12-34/7057, представление проректора по научной работе профессора-доктора Пегеля В.А.».

29 сентября 1955 года выходит приказ № 144 по ТГУ, согласно которому «Аспиранта второго года подготовки по специальности «математический анализ» Топоногова В.А. отчислить из аспирантуры в связи с отсутствием научного руководителя. Основание: приказ МВО СССР № 909 от 10/IX-1955г.

С 25 сентября 1955 года зачислить Топоногова В.А. на должность ассистента кафедры математического анализа с окладом 1050 рублей в месяц».



В.А. Топоногов – аспирант ТГУ

Становление

В 1956 году Виктор Андреевич переехал в Новосибирск. В апреле 1957 года он стал научным сотрудником Новосибирского Института радиофизики и электроники, возглавляемого Юрием Борисовичем Румером.

В декабре 1958 года В.А. Топоногов защитил в МГУ кандидатскую диссертацию, в которой теорему А.Д. Александрова о сравнении углов перенёс на многомерные римановы многообразия. В апреле 1961 года Виктор Андреевич стал работать в созданном в тот период времени Институте математики СО АН СССР. В 1969 году он защитил докторскую диссертацию «Экстремальные теоремы для римановых пространств кривизны, ограниченной сверху». В начале 1980-х годов В.А. Топоногов два года работал заместителем директора Института математики Соболева Сергея Львовича. По признанию близко знавших его людей он хотел, чтобы «всем всегда было хорошо». И хотя это не всегда получалось, Виктор Андреевич стремился делать добро.

Ему было свойственно бескорыстное отношение к науке, он умел глубоко понимать исследуемую проблему, находить оптимальные пути её решения. Такому подходу его научили профессор Клементьев З.И., умевший на своих блестящих

Главным итогом научной деятельности профессора В.А. Топоногова явились следующие результаты:

1. Теорема о сравнении углов треугольника, которая утверждает, что углы любого треугольника из кратчайших в полном римановом многообразии кривизны не меньше k не меньше углов треугольника со стороной той же длины на односвязной поверхности постоянной кривизны k .

2. Теорема о расщеплении, утверждающая, что риманово многообразие неотрицательной кривизны, содержащее прямую-полную геодезическую, любой участок которой является кратчайшей, разлагается в прямое метрическое произведение. Г.Я. Перельман использовал эту теорему в своём доказательстве гипотезы Пуанкаре [2].

3. Экстремальные теоремы, характеризующие римановы многообразия, имеющие максимально возможные при данной грани кривизны диаметр или замкнутую геодезическую.

В 1980 – 1990-е годы Виктор Андреевич выполнил несколько работ по математическим методам в химии.

В 2006 году на английском языке вышел университетский учебник профессора Топоногова по дифференциальной геометрии [3]. В 2012 году была издана русскоязычная версия книги [4]. Многие годы Виктор Андреевич посвятил педагогической работе: он читал лекции по дифференциальной и римановой геометрии и математическому анализу на механико-математическом и физическом факультетах НГУ. Более 15 учеников профессора защитили кандидатские диссертации, семеро из них в дальнейшем стали докторами наук.

В.А. Топоногов был разносторонним человеком: прекрасным шахматистом, гостеприимным хлебосольным хозяином. В его доме собирались друзья, которые не забудут его заразительный жизнерадостный смех, научные разговоры и рассказы о походах по Сибири. Виктор Андреевич много ходил по сибирской тайге, сплавлялся по сибирским рекам, был заядлым лодочником. В нём гармонично сочетались учёный и открытый душевный человек. Память о нём останется в его учениках, в его научных работах, в добрых делах.

Томский государственный университет выступает одним из организаторов конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения Виктора Андреевича Топоногова, которая будет проходить 14–19 сентября 2020 г. в Международном математическом институте им. Леонарда Эйлера в г. Санкт-Петербурге [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.А., Борисенко А.Ф. и др. Виктор Андреевич Топоногов (некролог) // УМН. 2006. Т. 61. № 2(368). С. 153–156.
2. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds // arXiv:math.DG/0303109 (March 10, 2003).
3. Toponogov V.A. Differential geometry of curves and surfaces. A concise guide. Boston, MA: Birkhauser, 2006. 206 p.
4. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. М.: Физматкнига, 2012. 224 с.
5. International conference on Geometry in the Large. URL: <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2020/GL/index.html>

Статья поступила 12.03.2020 г.

Malyutina A.N., Mikhaylov M.D. (2020) THE KNIGHT OF SCIENCE VIKTOR ANDREEVICH TOPONOGOV. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 148–156

DOI 10.17223/19988621/65/12

Keywords: V.A. Toponogov, biography, Riemannian geometry, small triangles, geometric theory of functions.

AMS Mathematical Subject Classification: 01A70

REFERENCES

1. Aleksandrov V.A., Borisenko A.A. et al. (2006) Viktor Andreevich Toponogov (obituary). *Russian Math. Surveys*. 61(2). pp. 341–345.
2. Perelman G. (2003) Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv:math.DG/0303109*.
3. Toponogov V.A. (2006) *Differential geometry of curves and surfaces. A concise guide*. Boston, MA: Backhaus.
4. Toponogov V.A. (2012) *Differentsial'naya geometriya krivyykh i poverkhnostey* [Differential geometry of curves and surfaces]. Moscow: Fizmatkniga.
5. *International Conference on Geometry in the Large*. URL: <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2020/GL/index.html>.

Received: March 12, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АБДУЛЛАЕВ Акмалжон Абдужалилович – преподаватель кафедры высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: akmal09.07.85@mail.ru

АХМЕТОВ Альфир Тимирзянович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией экспериментальной гидродинамики Института механики им. Р.Р. Мавлютова, г. Уфа, Россия. E-mail: alfir@anrb.ru

БАЯНОВА Надежда Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и математической логики Алтайского государственного университета, г. Барнаул, Россия. E-mail: bayanova@math.asu.ru

БОГДАНОВА Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, г. Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

ВАЛИЕВ Азат Ахматович – младший научный сотрудник лаборатории экспериментальной гидродинамики Института механики им. Р.Р. Мавлютова, г. Уфа, Россия. E-mail: azatphysic@mail.ru

ГЛАДКОВ Сергей Октябрьнович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, г. Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru

ЗЕНКОВ Алексей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики, механики и инженерной графики Алтайского государственного аграрного университета, г. Барнаул, Россия. E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

ИВАНОВ Дмитрий Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Института пути, строительства и сооружений Российского университета транспорта, г. Москва, Россия. E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

ИОХИМ Кристина Владимировна – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: iokhim.k@mail.ru

КАЛЬМОВА Мария Александровна – старший преподаватель кафедры строительной механики и сопротивление материалов Самарского государственного технического университета, г. Самара, Россия. E-mail: kalmova@inbox.ru

ЛАНДИК Лидия Владимировна – инженер кафедры вычислительной и экспериментальной механики, Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: LidiaLandik@gmail.com

МАЛЮТИНА Александра Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и лаборатории математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: nmd@math.tsu.ru

МИХАЙЛОВ Михаил Дмитриевич – старший преподаватель кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: michel@math.tsu.ru

ПЕСТРЕНИН Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики механико-математического факультета Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: PestreninVM@mail.ru

ПЕСТРЕНИНА Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики механико-математического факультета Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: IPestrenina@gmail.com

ПОТЕРЯЕВА Валентина Александровна – ассистент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: poteryashkaa@gmail.com

ПРУСАКОВА Галина Владимировна – старший преподаватель кафедры математики, механики и инженерной графики Алтайского государственного аграрного университета, г. Барнаул, Россия. E-mail: prusakova_galina@mail.ru

РАТМАНОВА Олеся Викторовна – ассистент кафедры строительной механики и сопротивление материалов Самарского государственного технического университета, г. Самара, Россия. E-mail: olesya654@yandex.ru

РАХИМОВ Артур Ашотович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» института механики им. Р.Р. Мавлютова, г. Уфа, Россия. E-mail: ragar83@mail.ru

СКРИПНЯК Наталья Владимировна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории свойств веществ в экстремальных состояниях Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: natali.skrp@mail.ru

ТУРУБАЕВ Роман Ринатович – аспирант кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: roma.turubaev@gmail.com

ЦЫДЕНОВ Баир Олегович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории прогнозирования состояния атмосферы Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: btsydenov@gmail.com, tsydenov@math.tsu.ru

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: avshvab@inbox.ru

ЭРГАШЕВ Тухтасин Гуламжанович – кандидат физико-математических наук, докторант Института математики Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.

Подписано к печати 15.06.2020. Выпуск в свет 19.06.2020.

Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».

Усл. п. л. 12.74. Уч.-изд. л. 14.27. Тираж 250 экз. Заказ № 11. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4332.

<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru