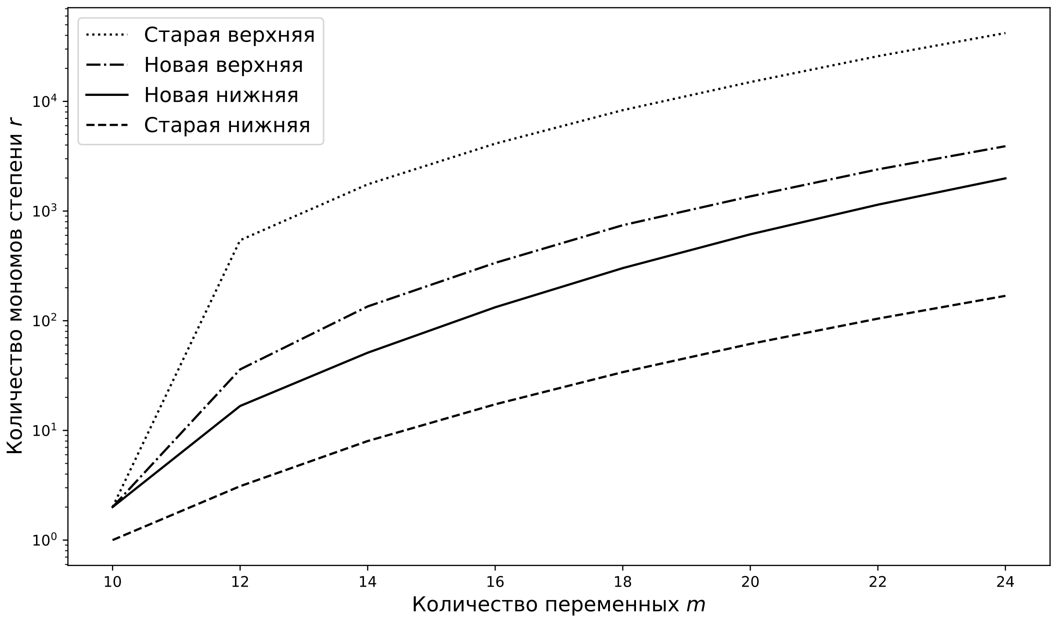

Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. `https://csrc.nist.gov/Projects/post-quantum-cryptography/Post-Quantum-Cryptography-Standardization/Call-for-Proposals`.
2. *Чижов И. В., Бородин М. А.* Классификация произведений Адамара подкодов коразмерности 1 кодов Рида — Маллера // Дискретная математика. 2020. № 32(1). С. 115–134.
3. *McEliece R. J.* A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory // DSN Progress Report. 1978. No. 4244. P. 114–116.
4. *Vysotskaya V. V.* Characteristics of Hadamard Square of Reed — Muller Subcodes of Special Type. `https://eprint.iacr.org/2020/507`.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/13/29

О КОЛИЧЕСТВЕ НЕДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОРИЕНТАЦИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

А. В. Жаркова

Рассматриваются конечные динамические системы ориентаций полных графов. Состояниями системы являются все возможные ориентации полного графа, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данного орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Приводятся формулы для подсчёта количества недостижимых и достижимых состояний в рассматриваемых системах, представлены соответствующие таблицы для полных графов с количеством вершин от двух до десяти.

Ключевые слова: *граф, достижимое состояние, источник, конечная динамическая система, недостижимое состояние, ориентация графа, полный граф, сток, турнир, эволюционная функция.*

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем [1–3]. В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. В настоящей работе полные графы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

Под *ориентированным графом* (*орграфом*) понимается пара $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, где V — конечное непустое множество вершин; $\beta \subseteq V \times V$ — отношение смежности на множестве V (пара $(u, v) \in \beta$ называется *дугой* орграфа). *Неориентированным графом* (или, для краткости, *графом*) называется пара $G = (V, \beta)$, где β — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Дуги неориентированного графа называют *рёбрами*. Орграф $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ называется *направленным графом* (или *диграфом*), если отношение β антисимметрично. Граф $G = (V, \beta)$ называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначим K_n. *Турниром* называется полный направленный граф. Говорят, что вершина v *достижима* из вершины u, если в орграфе существует путь из u в v. Вершина орграфа, не достижимая из других его вершин, называется *источником*, а вершина, из которой не достижима никакая другая вершина, — *стоком* [4].

Под *конечной динамической системой* понимается пара $(S,\ \delta)$, где S — конечное непустое множество *состояний системы*, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без проведения динамики. К их числу относятся *ветвление* (количество непосредственных предшественников данного состояния) и, в частности, свойство *недостижимости* состояния (то есть когда состояние имеет нулевое ветвление). Автором описаны недостижимые состояния конечных динамических систем всех возможных ориентаций графов [5], подсчитаны количества недостижимых состояний в системах, связанных с ориентациями цепей, циклов, пальм [6]. В данной работе предлагаются формулы для подсчёта количества недостижимых и количества достижимых состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов.

Пусть дан полный граф K_n, $n > 1$, $m = n(n-1)/2$ — число рёбер. Придадим его рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф (турнир) $\overrightarrow{G}$. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α, которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в стоки, а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получим орграф $\alpha(\overrightarrow{G})$, других отличий между $\overrightarrow{G}$ и $\alpha(\overrightarrow{G})$ нет. Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, где через Γ_{K_n} обозначим множество всех возможных ориентаций данного полного графа K_n, $|\Gamma_{K_n}| = 2^m$, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

На рис. 1 изображена карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α).

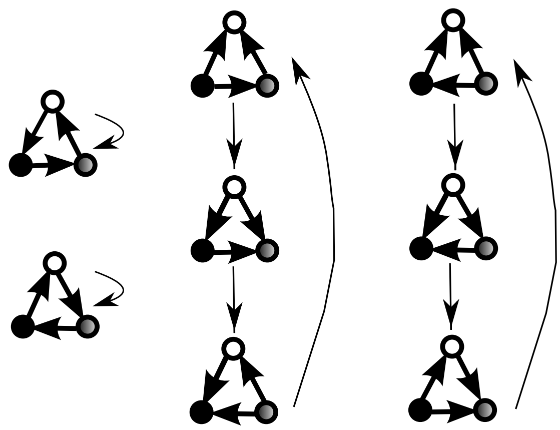

Рис. 1. Карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α)

Теорема 1. Состояние $\overrightarrow{G} \in \Gamma_{K_n}$ конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, недостижимо тогда и только тогда, когда в орграфе $\overrightarrow{G}$ нет источника и есть сток.

Теорема 2. Количество недостижимых состояний в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, равно

$$\text{КНС}_{(\Gamma_{K_n},\alpha)} = n\big(2^{(n-1)(n-2)/2} - (n-1)2^{(n-2)(n-3)/2}\big).$$

Следствие 1. Количество достижимых состояний в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, равно

$$\text{КДС}_{(\Gamma_{K_n},\alpha)} = 2^{n(n-1)/2} - n\big(2^{(n-1)(n-2)/2} - (n-1)2^{(n-2)(n-3)/2}\big).$$

В таблице приведены данные по количеству недостижимых и достижимых состояний в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $2 \leqslant n \leqslant 10$, полученные с помощью вычислительных экспериментов.

n	$\textbf{КНС}_{(\Gamma_{K_n},\alpha)}$	$\textbf{КДС}_{(\Gamma_{K_n},\alpha)}$
2	0	2
3	0	8
4	8	56
5	160	864
6	4224	28544
7	186368	1910784
8	14942208	253493248
9	2264924160	66454552576
10	663035576320	34521336512512

Можно заметить, что в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) большинство состояний являются достижимыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001.
2. *Khrennikov A. and Nilsson M.* On the number of cycles of p-adic dynamical systems // J. Number Theory. 2001. V. 90. P. 255–264.

3. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2005. №14. С. 23–26.
4. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
5. *Жаркова А. В.* О ветвлении и непосредственных предшественниках состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций графа // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. №6. С. 76–78.
6. *Жаркова А. В.* Недостижимые состояния в динамических системах, ассоциированных с цепями и циклами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 4. С. 116–123.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/13/30

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕАЛИЗАЦИЙ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ МЕРАМИ СВЯЗНОСТИ[1]

Б. А. Теребин, М. Б. Абросимов

Две основные меры связности графа — вершинная k и рёберная λ — связаны с минимальной степенью вершины δ графа известным соотношением Уитни: $k \leqslant \lambda \leqslant \delta$. Г. Чартрэнд и Ф. Харари доказали, что этот результат не улучшаем в том смысле, что для любых натуральных чисел a, b, c, таких, что $a \leqslant b \leqslant c$, можно построить граф, у которого $k = a$, $\lambda = b$, $\delta = c$. В доказательстве Чартрэнда и Харари предлагается граф с числом вершин $2(c+1)$ и числом рёбер $c(c+1)+b$. В данной работе рассматривается вопрос построения соответствующей реализации с наименьшим возможным числом вершин и рёбер.

Ключевые слова: *вершинная связность, рёберная связность, неравенство Уитни.*

1. Условие Уитни

Связные графы имеют важнейшее значение с точки зрения прикладной теории графов. Две основные меры связности графа — вершинная k и рёберная λ. *Вершинной связностью* k графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. *Рёберная связность* λ графа G определяется как наименьшее количество рёбер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Основные определения используются по работе [1].

Вершинная связность графа k, его рёберная связность λ и минимальная степень вершины δ связаны неравенством Уитни [2]:

Теорема 1 [2]. Для любого графа G справедливо неравенство $k \leqslant \lambda \leqslant \delta$.

Результат теоремы является неулучшаемым:

Теорема 2 (Чартрэнд, Харари [3]). Для любых натуральных чисел a, b, c, таких, что $a \leqslant b \leqslant c$, существует граф G, у которого $k = a$, $\lambda = b$, $c = \delta$.

Из доказательства теоремы 2 следует, что для любых a, b, c можно построить граф с числом вершин $2(c+1)$ и числом рёбер $c(c+1)+b$. Предлагается схема построения соответствующего графа: необходимо взять два полных графа K_{c+1}, в одном выбрать a вершин, в другом — b вершин и соединить выбранные вершины b рёбрами.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).