

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2020

№ 67

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, В.В. Конев, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenschikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., С. Жамбаа, Лун-Фу А.В., Челнокова А.С.	
Аналитическое решение интегрального уравнения Шредингера.....	5
Бухтяк М.С. Псевдоминимальность и линейчатые поверхности.....	18
Задорожная О.В., Кочетков В.К. Интегральное представление решений одного обыкновенного дифференциального уравнения и уравнения Левнера – Куфарева.....	28
Зарифзода С.К., Одинаев Р.Н. Исследование некоторых классов интегро- дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка со сте- пенно-логарифмической особенностью в ядре	40
Норбосамбуев Ц.Д., Тимошенко Е.А. Об одном классе 3-хороших колец формаль- ных матриц	55
Чехлов А.Р., Иванец О.В. О проективно инертных подгруппах вполне разложимых групп конечного ранга	63

МЕХАНИКА

Белов Н.Н., Югов Н.Т., Саммель А.Ю., Степанов Е.Ю. Исследование прочности прозрачной брони на высокоскоростной удар цилиндрическим ударником мето- дом компьютерного моделирования.....	69
Борзенко Е.И., Гарбузов Д.Н. Исследование участка гидродинамической стабили- зации степенной жидкости в круглой трубе.....	78
Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Рогаев К.С., Саморокова Н.М. Исследование горения пастообразного топлива при различ- ных схемах заряжания.....	89
Ворожцов А.Б., Платов В.В., Козулин А.А., Хрусталеv А.П., Мишин И.П., Жуков И.А. Исследование влияния частиц TiB_2 на структуру, деформационное поведение и свойства алюминиевого сплава 1550.....	102
Зимиha В.А. Экспериментальное исследование структуры, упругих и прочностных характеристик пористой корундовой керамики	117
Костюшин К.В. Численное исследование нестационарных газодинамических про- цессов при старте твердотопливных ракет	127
Чиглинцева А.С., Насыров А.А., Чиглинцев И.А., Лепихин С.А., Коледин В.В. Исследование процесса гидратообразования в откачивающем трубопроводе с теплоизоляционным покрытием при отборе газа из «купола-сепаратора».....	144
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	159

CONTENTS

MECHANICS

Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Jambaa S., Lun-Fu A.V., Chelnokova A.S.	
Analytical solution of the Schrödinger integral equation.....	5
Bukhtyak M.S. Pseudo-minimality and ruled surfaces.....	18
Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. Integral representation of solutions of an ordinary differential equation and the Loewner–Kufarev equation.....	28
Zarifzoda S.K., Odinaev R.N. Investigation of some classes of second order partial integro-differential equations with a power-logarithmic singularity in the kernel.....	40
Norbosambuev T.D. Timoshenko E.A. On a class of 3-good formal matrix rings.....	55
Chekhlov A.R., Ivanets O.V. On projectively inert subgroups of completely decomposable finite rank groups.....	63

MATHEMATICS

Belov N.N., Yugov N.T., Sammel A.Yu., Stepanov E.Yu. Study of the transparent armor strength under a high-speed impact of a cylindrical impactor by computer modeling method.....	69
Borzenko E.I., Garbuzov D.N. Investigation of a hydrodynamic entrance region for a power-law fluid flow in a round pipe.....	78
Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S., Samorokova N.M. Study of the paste-like propellant combustion at various loading schemes.....	89
Vorozhtsov A.B., Platov V.V., Kozulin A.A., Khrustalev A.P., Mishin I.P., Zhukov I.A. Study of the effect of TiB ₂ particles on the structure, deformation behavior, and properties of the aluminum alloy 1550.....	102
Zimina V.A. Experimental investigation of the structure, elastic, and strength characteristics of porous corundum ceramics.....	117
Kostyushin K.V. Numerical investigation of unsteady gasdynamic processes at the launch of solid-propellant rockets.....	127
Chiglintseva A.S., Nasyrov A.A., Chiglintsev I.A., Lepikhin S.A., Koledin V.V. Study of the hydrate formation in a pipeline with insulation coating during gas transfer from the “dome-separator”.....	144
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	159

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

DOI 10.17223/19988621/67/1

MSC 45H05

М.А. Бубенчиков, А.М. Бубенчиков, С. Жамбаа, А.В. Лун-Фу, А.С. Челнокова

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА¹

Построено аналитическое решение задачи о волновом транспорте вещества через составные сверхтонкие барьеры. Показано, что для составной мембраны, состоящей из двух одинаковых сверхтонких слоев, всегда существуют расстояния между слоями, при которых реализуется резонансное прохождение одной из компонент. Резонанс позволяет разделять дебройлевские волны частиц, одинаковых по свойствам и различающихся лишь массами. При температуре 25 К найдена широкая полоса гиперселективного разделения гелион-гелиевой смеси.

Ключевые слова: интегральное уравнение, вырожденное ядро, оператор сдвига, экспоненциальные функции, тождество Фурье.

В качестве элементов составной мембраны наилучшим образом подходит пористый графен или пористый нитрид бора. Такие материалы могут быть получены методом эпитаксии [1, 2] или способом осаждения из паровой фазы на подложку, содержащую бездефектный графен или пористый нитрид бора [3, 4]. Однако существует еще целая группа стабильных листов толщиной в один атом, которые на этапе синтеза или после механического отслоения могут быть превращены в пористый 2D-материал. Так, в работе [5] сообщается о листах GeH, которые являются термически стабильными до 75 °С. Известен также силицен – графеновый эквивалент кремния [6], имеющий большие перспективы для новых применений. В работе [7] авторы указывают на черный фосфор как на слоистый материал из которого может быть получен фосфорен – одноатомный слой, физические свойства которого значительно отличаются от его объемного аналога. В работе [8] сообщается об успешном изготовлении двумерного станена на основе Sc методом молекулярно-лучевой эпитаксии. В [9] отмечается, что функционализация гексагонального нитрида бора молекулами амина вызвала расслоение слоистой структуры, что привело к образованию листов нитрида бора. В работе [10] говорится, что «разработка новых слоистых материалов претерпела эволюцию от графена к металлическим оксидам и металлическим халькогенидным наноллистам». В [11] также упоминаются металлдихалькогениды как новейшие 2D-материалы и приводится пример материала, созданного на основе MoS₂. В [12] изучаются электронные свойства следующих металлдихалькогенидов, имеющих двумерную структуру: MoS₂, WS₂, WTe₂, TiSe₂, NbS₂, VSe₂, NbSe₂, TaS₂. Все ма-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Министерством культуры, образования, науки и спорта Монголии в рамках научного проекта № 19-51-44002.

териалы при соответствующем способе их синтеза или последующей обработке, приводящей к образованию пор, могут быть приспособлены для разделения газов. В [13] сообщается о слоистой двумерной сетчатой структуре, которая содержит равномерно распределенные дырки и имеет в своей основе стехиометрию C_2N .

Таким образом, уже синтезировано достаточно много двумерных материалов, которые могут быть применены в работах по квантовому просеиванию изотопов.

Цель настоящей работы состоит в нахождении условий, обеспечивающих резонансное прохождение компонент газовой смеси через составные барьеры.

Дифференциальное уравнение Шредингера

Дифференциальное уравнение волновой динамики имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi + \frac{\hbar^2}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Здесь Ψ – волновая функция, $\hbar$ – постоянная Планка, U – энергия взаимодействия частицы с окружением, m – масса частицы, Δ – оператор Лапласа, i – мнимая единица.

В частном случае, когда потенциальная энергия U явно не зависит от времени, решение уравнения (1) ищется в виде

$$\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar}. \quad (2)$$

где E – энергия частицы.

Тогда для нахождения амплитуды волны Ψ будем иметь стационарное уравнение Шредингера:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (3)$$

В задачах низкотемпературного мембранного разделения газовых смесей определяющее значение имеет направление переноса, перпендикулярное поверхности мембраны. Ввиду малых размеров нанопор любой макроскопический фрагмент мембраны можно считать бесконечно протяженным в направлениях, параллельных мембране. Определяя по некоторому представительному фрагменту поверхности мембраны среднее значение энергии взаимодействия и используя одномерное волновое уравнение переноса вещества, мы можем говорить о барьерной теории проницаемости мембраны.

Таким образом, при получении результата по проницаемости отдельных компонент смеси или по селективности ее разделения можно исходить из уравнения (3).

Ниже будут представлены некоторые аналитические построения, которые оказались весьма эффективными при анализе задач прохождения изотопов через составные мембраны. В связи с этим удобнее будет иметь безразмерную форму уравнения переноса вещества.

Если массу частицы отнести к m_0 – массе атома водорода, за масштаб энергии взять U_0 – глубину потенциальной ямы в распределении энергии парных взаимодействий вещества мембраны и подвижных частиц, а в качестве масштаба длины принять величину

$$L = \hbar/\sqrt{m_0 U_0}, \quad (4)$$

то безразмерное уравнение волновой динамики не будет содержать постоянной Планка $\hbar$:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2m(E - U(x))\psi = 0. \quad (5)$$

В записи (5) все величины безразмерные, включая координату x .

Таким образом, мы уменьшили количество констант задачи на единицу. Это является существенным при проведении дальнейших аналитических выкладок.

Интегральное уравнение Шредингера и его преобразования

Реализация численных методов решения дифференциального уравнения Шредингера ориентирована на конечную область изменения независимой переменной, а также на применение «сшивки» полученных численных данных с асимптотическими распределениями вычисляемой величины. Обычно под условиями «сшивки» понимаются равенства самой волновой функции и ее производной. Однако отсутствуют какие-либо обоснования в отношении использования этой формы условий. Также требует обоснования и сам размер конечной области интегрирования. В связи с этим важными являются попытки проведения интегрирования по всей действительной оси. По-видимому, это возможно сделать аналитическим методами. Вполне подходящим для этого является интегральное уравнение Шредингера:

$$\psi(x) - \frac{2m}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-\zeta|} U(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta = e^{ikx}. \quad (6)$$

Здесь m – безразмерная масса частицы, $k = \sqrt{2mE}$ – параметр волны, E – безразмерная энергия частицы.

В книге Ф.М. Морса и Г. Фешбаха [14] доказывается эквивалентность дифференциального и интегрального подходов в описании процессов распространения волн материи.

Уравнение (6) есть интегральное уравнение с вырожденным ядром. Для проведения дальнейших его преобразований воспользуемся дифференциальным оператором сдвига:

$$e^{-h \frac{d}{dx}} f(x) = f(x - h). \quad (7)$$

Доказательство последнего равенства можно провести с помощью разложения экспоненты в ряд Тейлора, а также посредством применения уже линейных операторов к функции $f(x)$ и нахождения новой суммы ряда. Применяя равенство (7) к $e^{ik|x-\zeta|}$, исходное уравнение можем переписать в виде

$$\psi(x) - \lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta \frac{d}{dx}} d\zeta \right) \cdot e^{ik|x|} = e^{ikx}, \quad \lambda = \frac{m}{ik} = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2m}{E}}. \quad (8)$$

Обратим внимание на выражение в скобках. Это выражение можно рассматривать как дифференциальный оператор или аналитическую функцию параметра $p = d/dx$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta \frac{d}{dx}} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta p} d\zeta = L(p), \quad p = \frac{d}{dx}. \quad (9)$$

С учетом введенного обозначения уравнение (9) можно переписать в следующем виде:

$$\psi(x) - \lambda \cdot L(p) \cdot e^{-ik|x|} = e^{ikx}. \quad (10)$$

Вид дифференциального оператора, действующего на стоящую от него справа экспоненциальную функцию, пока что нам неизвестен. Однако его можно найти. Умножая (10) на $U(x)\exp(-xp)$ и интегрируя в бесконечных пределах найдем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(x) \psi(x) e^{-xp} dx \right) - \lambda L(p) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x|} U(x) e^{-xp} dx \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) e^{-xp} dx \right). \quad (11)$$

Здесь появляются еще два дифференциальных оператора, для которых введем следующие обозначения:

$$B(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) e^{-xp} dx, \quad Q(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x|} U(x) e^{-xp} dx. \quad (12)$$

С учетом этих обозначений операторное равенство (11) примет вид:

$$L(p) \cdot [1 - \lambda Q(p)] = B(p). \quad (13)$$

Отсюда получаем

$$L(p) = \frac{B(p)}{1 - \lambda Q(p)}. \quad (14)$$

Иногда интегралы (12) могут быть вычислены аналитическим способом. В общем случае нужно проводить численное интегрирование. В любом случае эти интегралы зависят только от формы потенциального барьера. Подставляя (14) в выражение (10), получаем решение интегрального уравнения в виде

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{\lambda B(p)}{1 - \lambda Q(p)} \cdot e^{ik|x|}, \quad p = \frac{d}{dx}, \quad k = \sqrt{2mE}, \quad \lambda = \frac{m}{ik}. \quad (15)$$

Если бы дифференциальный оператор $L(p)$ действовал на показательную функцию обычного вида, то результат был бы следующим:

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot e^{\mu x} = L(\mu) \cdot e^{\mu x}. \quad (16)$$

Однако в формуле (10) этот оператор действует на экспоненту от модуля аргумента. Поэтому непосредственное применение (16) невозможно. Но экспоненту от модуля аргумента можно привести к обычной экспоненте, если воспользоваться тождеством Фурье:

$$e^{ik|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{i\omega \alpha} e^{ik|\alpha|} d\alpha d\omega. \quad (17)$$

Применяя правила (16) и (17) к формуле (15), получим

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(-i\omega) e^{-i\omega x} e^{ik|\alpha|} e^{i\omega \alpha} d\alpha d\omega. \quad (18)$$

Выражение (18) и представляет собой решение интегрального уравнения Шредингера, записанное в виде двойного интеграла по спектральной оси. Как видим, в отличие от (6), в его правой части находятся все известные величины, поскольку

функции $B(\omega)$ и $Q(\omega)$, называемые спектрами барьера, определяются лишь его формой, т.е. являются известными функциями постановки задачи. Кроме формы барьера, до получения решения нам известен характер асимптотического поведения решения по оси физической переменной x .

На этом этапе интегрирования мы уже освободились от дифференциального оператора $L(p)$, заменив его с использованием правила (16) функцией $L(\omega)$. Функцию $L(-i\omega)$ обозначим через $G(\omega)$. Тогда с учетом (14) получим

$$G(\omega) = \frac{\lambda B(-i\omega)}{1 - \lambda Q(-i\omega)} = \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega+k)} dx}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ik|x|} e^{i\omega x} dx}. \quad (19)$$

В результате будем иметь

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} G(\omega) e^{ik|\alpha|} e^{i\omega \alpha} d\alpha d\omega. \quad (20)$$

Если функция $G(\omega)$ является спектром некоторой функции $K(x)$, то

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \cdot e^{i\omega x} dx, \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (21)$$

Тогда решение (20) запишется в виде последовательности трех интегралов:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{ikx} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta) e^{i\omega \beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\alpha|} e^{i\omega \alpha} d\alpha d\beta d\omega = \\ &= e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\alpha|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-x+\beta+\alpha)} d\omega \right) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (22)$$

Интеграл, стоящий в скобках последнего выражения, представляет собой дельта-функцию Дирака. Поэтому далее можем записать:

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\alpha|} \delta(\alpha - (x - \beta)) d\alpha = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta) \cdot e^{ik|x-\beta|} d\beta. \quad (23)$$

Таким образом, наиболее компактная запись решения, в котором интеграл берется по направлению изменения физической переменной, выглядит следующим образом:

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) \cdot e^{ik|x-\zeta|} d\zeta. \quad (24)$$

При решении уравнения Шредингера методом интегрального уравнения не предусмотрено выполнение условий «сшивки». Поэтому необходимо проверить выполнение условий при $x = \pm\infty$. Для этого перепишем решение (24) в следующем виде:

$$\psi(x) = e^{ikx} \left[1 + \int_{-\infty}^x K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \right] + e^{-ikx} \left[\int_x^{\infty} K(\zeta) e^{ik\zeta} d\zeta \right]. \quad (25)$$

Опираясь на последнюю форму решения, можно сделать заключение об асимптотическом поведении волновой функции следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\approx e^{i k x} \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-i k \zeta} d\zeta \right], & x \rightarrow \infty; \\ \psi(x) &\approx e^{i k x} + e^{-i k x} \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{i k \zeta} d\zeta, & x \rightarrow -\infty.\end{aligned}\quad (26)$$

Как видим из этих соотношений, после барьера мы имеем проходящую волну, а до барьера имеются и падающая, и отраженная волны. Таким образом, решение (24) верно отражает асимптотическое поведение искомой функции.

Одиночный барьер в виде импульса Гаусса

Пусть барьер определяется простейшей формулой:

$$U(x) = e^{-x^2}. \quad (27)$$

Вычислим графики спектральных функций:

$$\begin{aligned}B_1(\omega + k) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega + k)} dx, \\ B_2(\omega - k) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega - k)} dx, \\ Q(\omega) = B_3(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ik|x|} e^{i\omega x} dx.\end{aligned}\quad (28)$$

Графики этих трех функций, рассчитанные численным методом, показаны на рис. 1.

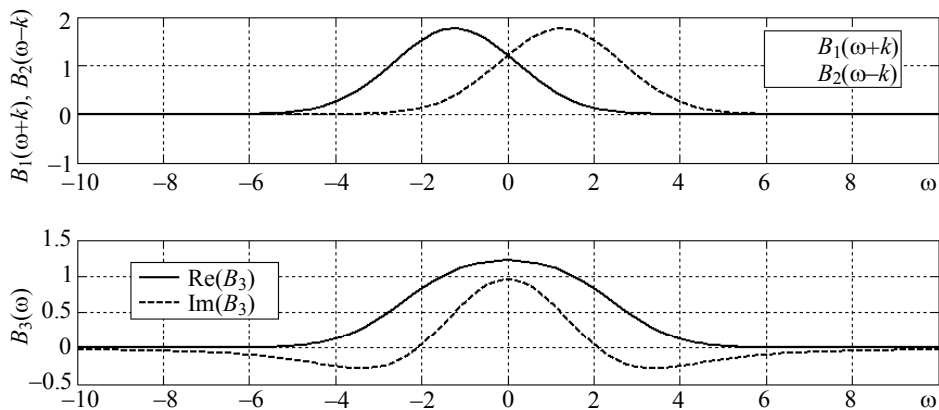


Рис. 1. Графики $B_1(\omega+k)$, $B_2(\omega-k)$ и $B_3(\omega)$
Fig. 1. Graphs $B_1(\omega+k)$, $B_2(\omega-k)$ and $B_3(\omega)$

Функций $B_1(\omega+k)$ и $B_2(\omega-k)$ являются вещественными функциями частоты ω и соответствуют сдвигу спектра барьера на величину $\pm k$. Что касается функции

$B_3(\omega)$, то она является комплексной. Легко заметить, что вещественная часть функции $B_3(\omega)$ равна полусумме величин B_1 и B_2 . При этом вся комплексная функция $B_3(\omega)$ является четной функцией относительно частоты ω . Кроме того, видно, что все три функции достаточно быстро убывают с увеличением модуля ω . Последнее обстоятельство позволяет после вычисления спектра $G(\omega)$ легко восстановить и функцию $K(x)$ по формуле (21). Графики функций $G(\omega)$ и $K(x)$ приведены на рис. 2.

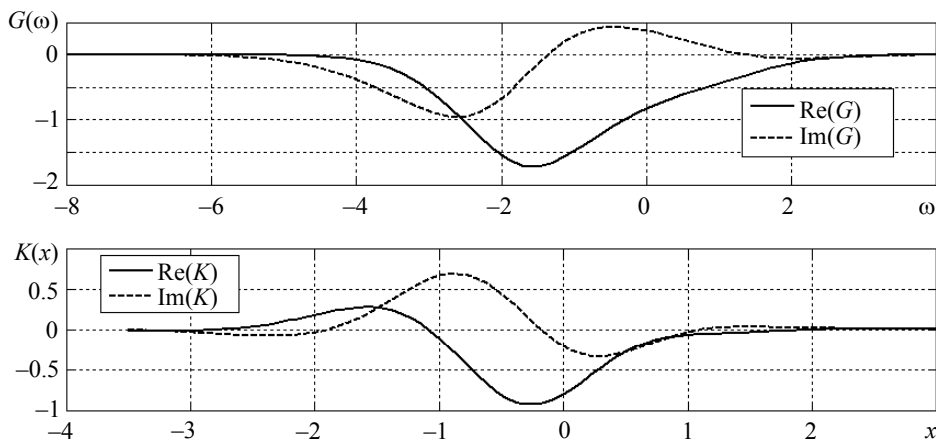


Рис. 2. Графики вещественных и мнимых частей функций $G(\omega)$ и $K(x)$, вычисленные для значений: $m = 3$ и $E = 0.5$

Fig. 2. Graphs of the real and imaginary parts of the functions $G(\omega)$ and $K(x)$, calculated for the values: $m = 3$ and $E = 0.5$

Видно, что обе функции $G(\omega)$ и $K(x)$ отличны от нуля только на ограниченных участках, как по переменной ω , так и по расстоянию x .

Коэффициент отражения

Очень важным преимуществом точного решения, по сравнению с решениями, получаемыми с помощью численных методов «сшивки», является то, что точное решение позволяет вычислять полный коэффициент прохождения S или отражения R для потенциального барьера $U(x)$ заданной формы. Из распределения (25) сразу же находим коэффициент отражения:

$$R = \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{i k \zeta} d\zeta \right|^2. \quad (29)$$

Коэффициент прохождения будет равен

$$S = \left| 1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-i k \zeta} d\zeta \right|^2. \quad (30)$$

Эти интегралы записаны с бесконечными пределами и, по крайней мере, один из них можно выразить через спектральную функцию $G(\omega)$. Действительно, формулы (21) и (19) дают

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{ikx} dx = G(k) = \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{2ikx} dx}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ik|x|} e^{ikx} dx}. \quad (31)$$

Интеграл, входящий в формулу (30), не выражается подобным же простым образом через спектр $G(\omega)$, однако в книге Ф.М. Морса и Г. Фешбаха [14] доказываются, что между коэффициентами S и R выполняется равенство

$$S + R = 1. \quad (32)$$

Поскольку справедливо соотношение (29), то имеем следующие формулы для коэффициентов прохождения и отражения, выраженные в явном виде через интегралы от потенциального барьера:

$$R = |G(k)|^2 = \frac{\left| \lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{2ikx} dx \right|^2}{\left| 1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ik|x|} e^{ikx} dx \right|^2}. \quad (33)$$

Формулы (33) удобны для случаев, когда спектральная функция потенциального барьера находится аналитическим путем.

Нахождение нулевой спектральной функции

Для барьера в виде импульса Гаусса нулевая спектральная функция имеет вид

$$U_0(x) = e^{-\beta x^2}, \quad B_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{i\omega x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}. \quad (34)$$

Для прямоугольного импульса с шириной h , основной спектр определяется следующим образом:

$$U_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{h}{2} \\ 1, & -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \\ 0, & x > \frac{h}{2} \end{cases}, \quad B_0(\omega) = \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\omega x} dx = h \cdot \left(\frac{\sin \frac{\omega h}{2}}{\frac{\omega h}{2}} \right). \quad (35)$$

Для барьера, обратного квадрату гиперболического косинуса, имеем

$$U_0(x) = \frac{1}{ch^2(\sigma x)}, \quad B_0(\omega) = \frac{2}{\sigma} \left(\frac{\frac{\omega \pi}{\sigma}}{sh \frac{\omega \pi}{\sigma}} \right). \quad (36)$$

Можно найти и другие примеры спектра $B_0(\omega)$ в справочнике Градштейна и Рыжика [15]. Все они являются четными вещественными функциями ω и быстро убывают, когда ω стремится к бесконечности.

Свойства составных потенциальных барьеров

В известных литературных источниках никогда не заострялось внимание на особом поведении составных потенциальных барьеров, т.е. таких, когда два или несколько барьеров находятся на некотором расстоянии друг от друга и между ними образуется потенциальная яма. Между тем, при численных решениях, использующих метод «сшивки», для составных барьеров часто наблюдались значительные колебания коэффициента отражения R и коэффициента прохождения S с изменением энергии частицы E . Метод «сшивки» носит сугубо численный характер и при его применении трудно понять причину того, почему частица легче проходит через двойной барьер, чем через барьер одиночный, поэтому чаще всего относили такой эффект к ошибкам счета.

Сначала заметим, что если одиночный барьер сдвинуть на расстояние d от начала координат, то получим, что его спектр нужно просто умножить на множитель $e^{i\omega d}$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x-d) e^{i\omega x} dx = e^{i\omega d} \cdot B_0(\omega). \quad (37)$$

Спектр двойного барьера тогда будет равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} [U(x) + U(x-d)] e^{i\omega x} dx = (1 + e^{i\omega d}) \cdot B_0(\omega). \quad (38)$$

Функция $G(\omega)$, определяемая формулой (21), изменится при этом следующим образом:

$$G(\omega) = \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega+k)} dx \cdot (1 + e^{i(\omega+k)d})}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [U(x) + U(x-d)] e^{ik|x|} e^{i\omega x} dx}. \quad (39)$$

Естественно, что и функция $K(x)$, входящая в решение (24), также поменяется с изменением функции $G(\omega)$.

Подставляя в (39) $\omega = k$, получаем следующее выражение для коэффициента отражения:

$$R = |G(k)|^2 = \left| \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{2ikx} dx \cdot (1 + e^{2ikd})}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [U(x) + U(x-d)] e^{ik|x|} e^{ikx} dx} \right|^2, \quad S = 1 - R. \quad (40)$$

Формула (40), представляющая коэффициент отражения составной мембраны, определяет основной математический результат работы, поскольку позволяет выявить резонансные режимы прохождения компонентов газовой смеси. Наличие множителя $(1 + e^{2ikd})$ существенно усложняет спектр двойного барьера по сравнению со спектром одиночного барьера, и этим объясняется чувствительность коэффициента отражения к параметрам формы потенциального барьера.

Присутствие множителя $(1 + e^{2ikd})$ в числителе формулы (40) означает, что коэффициент отражения R должен обращаться в ноль при определенных значениях

расстояния d между барьерами. Приравнивая этот множитель нулю, находим

$$e^{2i k d} = -1 = e^{i \pi (2n+1)}, \quad d = \frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}{k} = \frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{2mE}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Отсюда видно, что коэффициент отражения обращается в ноль не при одном, а при многих значениях расстояния d между одиночными барьерами.

Выбирая таким способом расстояние d в формуле (40), мы достигаем эффекта избирательности, т.е. того, что частица с массой m и с энергией E будет свободно проходить, без всякого отражения, через потенциальный барьер, состоящий из двух одинаковых частей.

Если имеется возможность изменять расстояние d между двумя потенциальными барьерами, то представляет интерес проследить зависимость коэффициента прохождения $S(d)$, вычисленного с использованием формулы (40), при частных значениях массы и энергии. На рис. 3 показан результат такого расчета, выполненного для случая, когда: $E = 0.5$ и $m_1 = 3$, $m_2 = 4$.

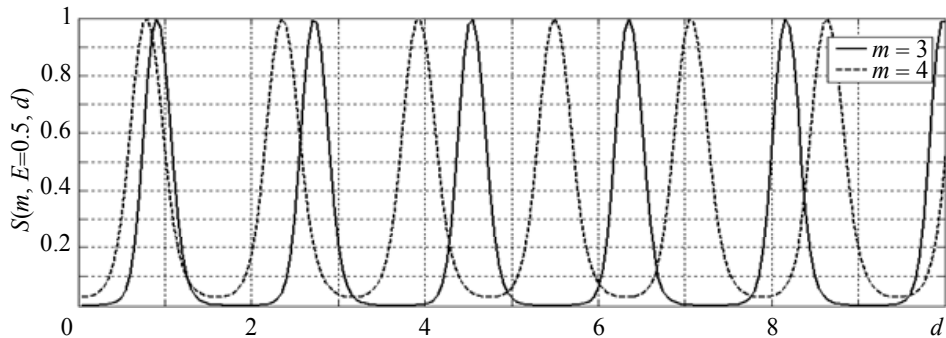


Рис. 3. Графики коэффициента прохождения $S(m, E, d)$, при значении энергии $E = 0.5$ для двух значений масс: $m = 3$ и $m = 4$

Fig. 3. Graphs of the transmission coefficient $S(m, E, d)$, at an energy value of $E = 0.5$ for two mass values: $m = 3$ and $m = 4$

Из этого расчета видно, что существует эффект сепарации частиц, различающихся по массе. Регулируя расстояние d между барьерами, можно добиться прохождения одной из частиц и при этом прохождение другой будет полностью блокировано.

Блокирование гелиона определяется участками сплошной кривой, лежащими на горизонтальной оси. При этом если $d \in [5, 6]$, то волны коэффициента прохождения идут в противофазе. Это означает, что на большей части отмеченного интервала мы имеем сверхвысокие значения коэффициента разделения гелий-гелионовой смеси. В том, что изотоп ^4He проходит через составные барьеры лучше, чем ^3He , нет ничего удивительного. Поскольку даже по меркам классической механики частица, имеющая тот же эффективный размер, но большую массу, должна проходить лучше.

Заключение

Получено аналитическое решение интегрального уравнения Шредингера, из которого сразу следуют выражения для коэффициентов отражения и прохождения. Благодаря наличию второго барьера, коэффициент отражения обращается в ноль в последовательности значений по расстояниям между моноатомными слоями мембраны. Это означает, что на этих дистанциях коэффициент прохождения гелия будет равен единице. В то же время гелион, имеющий другую массу, не будет иметь резонансного прохождения на указанных дистанциях между слоями мембраны.

Таким образом, одна из компонент будет проходить через систему барьеров, другая же не будет проходить вовсе. В результате мы получаем эффективную систему для просеивания изотопов. Эту систему можно настраивать на разделение газов, меняя расстояние между барьерами. При этом выводы оказываются справедливыми для сверхтонких одинаковых барьеров различной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berger C., Song Z., Li X., Wu X., Brown N., Naud C., Mayou D., Li T., Hass J., Marchenkov A.N. Electronic confinement and coherence in patterned epitaxial graphene // *Science*. 2006. No. 5777. P. 1191–1196.
2. Sutter P.W., Flege J.-I., Sutter E.A. Epitaxial graphene on ruthenium // *Nature Materials*. 2008. V. 5. No. 7. P. 406–411. DOI: 10.1038/nmat2166.
3. Zhang Y., Gomez L., Ishikawa F.N., Madaria A., Ryu K., Wang C., Badmaev A., Zhou C. Comparison of graphene growth on single-crystalline and polycrystalline Ni by chemical vapour deposition // *Journal of Physical Chemistry Letters*. 2010. V. 1. No. 20. P. 3101–3107. DOI: 10.1021/jz1011466.
4. Yu J., Qin L., Hao Y., Kuang S., Bai X., Chong Y.-M., Zhang W., Wang E. Vertically aligned boron nitride nanosheets: Chemical vapor synthesis, ultraviolet light emission, and superhydrophobicity // *ACS Nano*. 2010. V. 4. No. 1. P. 414–422. DOI: 10.1021/nn901204c.
5. Bianco E., Butler S., Jiang S., Restrepo O.D., Windl W., Goldberger J.E. Stability and exfoliation of germanane: A germanium graphane analogue // *ACS Nano*. 2013. V. 7. No. 5. P. 4414–4421. DOI: 10.1021/nn4009406.
6. Vogt P., De Padova P., Quaresima C., Avila J., Frantzeskakis E., Asensio M.C., Resta A., Ealet B., Le Lay G. Silicene: Compelling experimental evidence for graphenelike two-dimensional silicon // *Physical Review Letters*. 2012. V. 108. No. 15. Article number 155501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.155501.
7. Liu H., Du Y., Deng Y., Ye P.D. Semiconducting black phosphorus: synthesis, transport properties and electronic applications // *Chemical Society Reviews*. 2015. V. 44. No. 9. P. 2732–2743. DOI: 10.1039/c4cs00257a.
8. Zhu F., Chen W., Xu Y., Gao C., Guan D., Liu C., Qian D., Zhang S.-C., Jia J. Epitaxial growth of two-dimensional stanene // *Nature Materials*. 2015. V. 14. No. 10. P. 1020–1025. DOI: 10.1038/nmat4384.
9. Lin Y., Williams T.V., Connell J.W. Soluble, exfoliated hexagonal boron nitride nanosheets // *Journal of Physical Chemistry Letters*. 2009. V. 1. No. 1. P. 277–283. DOI: 10.1021/jz9002108.
10. Zhang J., Chen Y., Wang X. Two-dimensional covalent carbon nitride nanosheets: Synthesis, functionalization, and applications // *Energy and Environmental Science*. 2015. V. 8. No. 11. P. 3092–3108. DOI: 10.1039/c5ee01895a.
11. Huang X., Zeng Z., Zhang H. Metal dichalcogenide nanosheets: preparation, properties and applications // *Chemical Society Reviews*. 2013. V. 42. No. 5. P. 1934–1946. DOI: 10.1039/c2cs35387c.
12. Lv R., Robinson J.A., Schaak R.E., Sun D., Sun Y., Mallouk T.E., Terrones M. Transition metal dichalcogenides and beyond: synthesis, properties, and applications of single- and few-

- layer nanosheets // *Accounts of Chemical Research*. 2015. V. 48. No. 1. P. 56–64. DOI: 10.1021/ar5002846.
13. Mahmood J., Lee E.K., Jung M., Shin D., Jeon I.-Y., Jung S.-M., Choi H.-J., Seo J.-M., Bae S.-Y., Sohn S.-D., Park N., Oh J.H., Shin H.-J., Baek J.-B. Nitrogenated holey two-dimensional structures // *Nature Communications*. 2015. V. 6. No. 1. Article number 6486. DOI: 10.1038/ncomms7486.
 14. Морс Ф.М., Феибах Г. Методы теоретической физики: в 2 т. Т. 1. М.: Книга по Требованию, 2012. 894 с.
 15. Градштейн И.С., Рыжик Н.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.

Статья поступила 21.02.2020 г.

Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Jambaa S., Lun-Fu A.V., Chelnokova A.S. (2020) ANALYTICAL SOLUTION OF THE SCHRÖDINGER INTEGRAL EQUATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 5–17

DOI 10.17223/19988621/67/1

Keywords: integral equation, degenerate kernel, shift operator, exponential functions, Fourier identity.

In this paper, the question about the use of wave dynamics for solving problems of membrane separation of helium isotopes in the gas state at cryogenic temperatures is considered. The dimensionless form of the stationary Schrödinger differential equation is obtained. Following that, the integral representation form of the wave function is written. This form, which is equivalent to the classical equation, is similar to the integral equation with a degenerate core; however, it contains a modulus of the argument with a shift along the real axis. Using the shift operator, the existing exponential function in the Schrödinger integral equation can be split into a differential operator and an exponential function of the argument module which does not contain a shift. The Fourier identity allows reducing the exponent of the modulus of the argument to a regular exponent. Next, based on the general property of a differential operator acting on an exponent, it is possible to calculate the spectral functions of the problem and write down the distribution for the wave function. This distribution is ultimately expressed through the spectra of the potential barrier. Thereafter, the structure and the spectrum of the composite barrier are considered. With the expression determining the reflection coefficient, it is found that the double-barrier system can have a resonant passage of one of the components in the sequence of distances between the layers of the membrane.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 45H05

Financial support. The reported study was funded by RFBR and MCESSM according to the research project no. 19-51-44002.

Mikhail A. BUBENCHIKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

Aleksey M. BUBENCHIKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Soninbayar JAMBAA (Candidate of Physics and Mathematics, Director Centre for Fundamental Research of Mongolian University of Science and Technology, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia). E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

Alexander V. LUN-FU (Chief Engineer, Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.lunfu@gtt.gazprom.ru

Anna S. CHELNOKOVA (Assistant, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

REFERENCES

1. Berger C., Song Z., Li X., Wu X., Brown N., Naud C., Mayou D., Li T., Hass J., Marchenkov A.N. (2006) Electronic confinement and coherence in patterned epitaxial graphene. *Science*. 5777. pp. 1191–1196.
2. Sutter P.W., Flege J.-I., Sutter E.A. (2008) Epitaxial graphene on ruthenium. *Nature Materials*. 5(7). pp. 406–411. DOI: 10.1038/nmat2166.
3. Zhang Y., Gomez L., Ishikawa F.N., Madaria A., Ryu K., Wang C., Badmaev A., Zhou C. (2010) Comparison of graphene growth on single-crystalline and polycrystalline Ni by chemical vapour deposition. *Journal of Physical Chemistry Letters*. 1(20). pp. 3101–3107. DOI: 10.1021/jz1011466.
4. Yu J., Qin L., Hao Y., Kuang S., Bai X., Chong Y.-M., Zhang W., Wang E. (2010) Vertically aligned boron nitride nanosheets: Chemical vapor synthesis, ultraviolet light emission, and superhydrophobicity. *ACS Nano*. 4(1). pp. 414–422. DOI: 10.1021/nn901204c.
5. Bianco E., Butler S., Jiang S., Restrepo O.D., Windl W., Goldberger J.E. (2013) Stability and exfoliation of germanane: A germanium graphane analogue. *ACS Nano*. 7(5). pp. 4414–4421. DOI: 10.1021/nn4009406.
6. Vogt P., De Padova P., Quaresima C., Avila J., Frantzeskakis E., Asensio M.C., Resta A., Ealet B., Le Lay G. (2012) Silicene: Compelling experimental evidence for graphenelike two-dimensional silicon. *Physical Review Letters*. 108(15). 155501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.155501.
7. Liu H., Du Y., Deng Y., Ye P.D. (2015) Semiconducting black phosphorus: synthesis, transport properties and electronic applications. *Chemical Society Reviews*. 44(9). pp. 2732–2743. DOI: 10.1039/c4cs00257a.
8. Zhu F., Chen W., Xu Y., Gao C., Guan D., Liu C., Qian D., Zhang S.-C., Jia J. (2015) Epitaxial growth of two-dimensional stanene. *Nature Materials*. 14(10). P. 1020–1025. DOI: 10.1038/nmat4384.
9. Lin Y., Williams T.V. (2009) Connell J.W. Soluble, exfoliated hexagonal boron nitride nanosheets. *Journal of Physical Chemistry Letters*. 1(1). pp. 277–283. DOI: 10.1021/jz9002108.
10. Zhang J., Chen Y., Wang X. (2015) Two-dimensional covalent carbon nitride nanosheets: Synthesis, functionalization, and applications. *Energy and Environmental Science*. 8(11). pp. 3092–3108. DOI: 10.1039/c5ee01895a.
11. Huang X., Zeng Z., Zhang H. (2013) Metal dichalcogenide nanosheets: preparation, properties and applications. *Chemical Society Reviews*. 42(5). pp. 1934–1946. DOI: 10.1039/c2cs35387c.
12. Lv R., Robinson J.A., Schaak R.E., Sun D., Sun Y., Mallouk T.E., Terrones M. (2015) Transition metal dichalcogenides and beyond: synthesis, properties, and applications of single- and few-layer nanosheets. *Accounts of Chemical Research*. 48(1). pp. 56–64. DOI: 10.1021/ar5002846.
13. Mahmood J., Lee E.K., Jung M., Shin D., Jeon I.-Y., Jung S.-M., Choi H.-J., Seo J.-M., Bae S.-Y., Sohn S.-D., Park N., Oh J.H., Shin H.-J., Baek J.-B. (2015) Nitrogenated holey two-dimensional structures. *Nature Communications*. 6(1). 6486. DOI: 10.1038/ncomms7486.
14. Morse P.M., Feshbach H. (1953) *Methods of Theoretical Physics. Vol. I*. New York: McGraw-Hill.
15. Gradshteyn I.S., Ryzhik N.M. (2007) *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier.

Received: February 21, 2020

М.С. Бухтяк

ПСЕВДОМИНИМАЛЬНОСТЬ И ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Данная публикация продолжает серию работ автора о моделировании формы ортотропного упругого материала, принимающего равновесную форму внутри области, граница которой указана. Около 30 лет тому назад В.М. Гряник и В.И. Ломан, основываясь на уравнениях равновесия тонкой оболочки, решили аналогичную задачу для изотропного сетеполотна, прикреплённого к жёстким параболическим рёбрам. Желая распространить моделирование на ортотропные материалы (и иные ограничивающие контуры), автор в ряде публикаций 2016–2017 годов предложил подход к решению задачи, основанный на использовании поверхностей с постоянным отношением главных кривизн. Эти поверхности названы псевдоминимальными поверхностями. Дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП), задающее (в локальном смысле) класс псевдоминимальных поверхностей, весьма сложно для анализа. Однако для некоторых классов поверхностей анализ существенно упрощается, причем анализ удастся провести без обращения к этому неудобному ДУЧП, а применив метод подвижного репера. Речь идёт о классе линейчатых поверхностей. Этот класс интересен не только в силу указанного обстоятельства, но и вследствие весьма заметного интереса к нему со стороны архитекторов и строителей. Однако речь должна идти не о псевдоминимальных линейчатых поверхностях (они существуют, но являются в очевидном смысле тривиальными), а об инварианте (отношение главных кривизн), который не является тождественной константой на данной поверхности, но его линии уровня совпадают с линиями некоторого инвариантного семейства. Допуская вольность речи, можно сказать, что имеются поверхности, для которых условие псевдоминимальности выполнено тождественно, и поверхности, псевдоминимальные «в ограниченном смысле» – вдоль линий некоторого семейства, внутренним образом связанным с поверхностью. Автором показано, что роль такого семейства могут играть линии, «эквилибральные» в очевидном смысле для горловой линии косой линейчатой поверхности, а лучи – носители такой линейчатой поверхности – образуют регулюс с постоянными евклидовыми инвариантами.

Ключевые слова: *линейчатая поверхность, регулюс, инварианты, горловая линия, коэффициент псевдоминимальности, семейство линий на поверхности.*

Постановка задачи

С конструированием, изготовлением и эксплуатацией параболических рефлекторов связаны (кроме прочего) следующие задачи.

1. Выкраивание сетеполотна (имеется в виду не только вырезание плоских листов сетеполотна и соединение их между собой, но и схема прикрепления сетеполотна к несущим конструкциям). Оптимизация выкраивания понимается как минимизация (интегральная) отклонения отношения метрических форм поверхностей, точечное соответствие которых и есть модель прикрепления сетеполотна к тыльной и фронтальной сетям. Эта конструкция последовательно строилась автором (совместно с А.В. Соломиной) в работах [1–3].

2. Моделирование формы сетеполотна, подверженного так называемому «матрасному эффекту», который сопровождается раскрытие зонтика: прогиб ткани внутрь купола. Решение этой задачи для изотропного сетеполотна, прикрепленного к соседним ребрам осесимметричного рефлектора, предложено в [6]. В основу положены уравнения равновесия тонкой упругой оболочки. Работы автора 2016–2017 годов призваны распространить моделирование на ортотропные материалы, а также на области, границы которых могут быть заранее не указаны. Это привело к понятию «псевдоминимальной поверхности» – попросту поверхности с постоянным отношением главных кривизн. Это отношение выражается через экстремальные значения коэффициентов растяжения упругого материала в двух ортогональных направлениях (для ортотропного материала).

Первое применение указанной конструкции (в ограниченном смысле) приведено в работе [5], где, по примеру [6], давалась оценка формы сетеполотна лепестка осесимметричного рефлектора, но для ортотропного материала, и путем построения поверхности, для которой условие псевдоминимальности выполнено вдоль линии симметрии (осевой линии) точно, а на лепестке в целом приближенно.

Отметим, что алгоритм конечно-элементного моделирования псевдоминимальной поверхности разработан в [7].

Пусть сетеполотно ортотропно и коэффициент его растяжения в радиальном направлении равен $\text{коэфф}_{\text{рад}}$, а вдоль окружностей, ортогональным радиусам – $\text{коэфф}_{\text{окр}}$. В статье [8] введен коэффициент ортотропности сетеполотна

$$L = \left(\frac{\text{коэфф}_{\text{рад}}}{\text{коэфф}_{\text{окр}}} \right)^2.$$

В работе [9] определена псевдоминимальная поверхность веса L как гладкая поверхность, главные кривизны которой k_1 и k_2 связаны (в случае упорядоченности) соотношением

$$k_1 + Lk_2 = 0 \text{ при } L = \text{const}.$$

Если же нет оснований для упорядочения, то говорим об ослабленном условии псевдоминимальности в виде

$$(k_1 + Lk_2)(Lk_1 + k_2) = 0. \quad (1)$$

Пусть g_{11}, g_{12}, g_{22} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Σ , а b_{11}, b_{12}, b_{22} – коэффициенты второй квадратичной формы. Тогда ослабленное условие псевдоминимальности веса a запишется в виде [9]

$$L(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2 + (1-L)^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = 0.$$

Введем в рассмотрение безразмерный показатель псевдоминимальности с весом L , а именно

$$\delta(u, v) = \frac{(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2}{(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} - \frac{(1-L)^2}{L}.$$

Существенную роль будет играть выражение

$$f(u, v) = \frac{(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2}{(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}. \quad (2)$$

Ясно, что поверхность псевдоминимальна (с указанным весом), если

$$\delta(u, v) \equiv 0. \quad (3)$$

В предлагаемой работе решаются два вопроса. Первый: для каких линейчатых поверхностей выполнено условие (3). Второй: для каких линейчатых поверхностей линии уровня функции (2) внутренним образом связаны с данной поверхностью. Этот вопрос подлежит уточнению, что и будет сделано.

Интерес к линейчатым поверхностям обусловлен (кроме прочего) тем вниманием, которое уделяется им в строительстве и архитектуре. Вполне адекватное суждение по этому вопросу можно получить благодаря капитальной монографии трёх авторитетных специалистов [10]. Стоит отметить, что детальное описание частных классов поверхностей сопровождается основательными ссылками на источники сведений о применениях в строительстве и механике. В диссертации З.В. Беляевой [11] детально прослеживаются особенности применения линейчатых поверхностей различных классов (торсы, цилиндриды, коноиды и т. д.). О глубине проникновения линейчатой геометрии в архитектуру (хотя и косвенным образом) свидетельствует [12]: основания классификации линейчатых поверхностей, проведенной в этой статье, не слишком отвечают теоретической геометрии, но, очевидно, отлично служат тем, кто проектирует и конструирует. Свойства линейчатых поверхностей, делающие эти поверхности привлекательными для строителя, обоснованы, например, в статье [13].

Автор полагает, что характеристика ортотропных свойств упругого материала может иметь значение для конструкций, использующих линейчатые поверхности. В частности, можно поставить вопрос о реализации (в той или иной мере) свойства поверхности, сводимое к отношению главных кривизн, то есть свойство, опирающееся на поведение левой части уравнения (1). Вполне очевидно, что развёртываемая поверхность псевдоминимальна в тривиальном смысле с весом 0. Не вполне очевидно, но выяснится, что других псевдоминимальных поверхностей (если не считать прямой геликоид) среди линейчатых нет. Однако можно поставить другой вопрос: существуют ли линейчатые поверхности, для которых уравнение (1) выполнено вдоль линий некоторого семейства, естественным образом связанного с поверхностью, а если да, то каковы эти поверхности.

Канонический репер регулюса

Одномерный объект линейчатой геометрии трёхмерного пространства – регулюс – есть однопараметрическое семейство прямых. В локальной дифференциальной геометрии его изучают (как правило) методом подвижного репера, помещая вершину репера на прямую и направляя вектор репера параллельно прямой. При этом прямая приобретает направление этого вектора. В итоге оказывается, что регулюс – однопараметрическое семейство лучей. Двумерное многообразие точек, расположенных на лучах регулюса есть линейчатая поверхность. Регулюс называется носителем этой линейчатой поверхности.

Мы будем использовать методы локальной дифференциальной геометрии. Соответственно слово «прямая» может означать как прямую, так и некоторый отрезок прямой; аналогично, «параболоид» может обозначать произвольный (двумерный) кусок параболоида, и т. п. Все функции предполагаются принадлежащими тому классу гладкости, который достаточен для корректности суждений об уравнениях, связывающих эти функции. Далее, равенство $F = 0$ для функции F означает, что F принимает значение 0 для всех допустимых значений своих аргу-

ментов. Отметим, что цилиндры для нашего анализа не представляют интереса по очевидной причине, отмеченной выше.

Для нецилиндрического регулюса в трехмерном евклидовом пространстве ещё в 1894 году построен канонический репер, описание которого приведем по [14]. Текущий луч регулюса снабжен параллельным ему единичным вектором $\mathbf{e}_3$. Элементы репера – функции параметра s (длина дуги сферической индикатрисы вектора $\mathbf{e}_3$). Вершина репера помещена в горловую точку луча. Вектор $\mathbf{e}_1$ параллелен касательной к упомянутой сферической индикатрисе и ортогонален касательной плоскости в горловой точке (в общем случае). Вектор $\mathbf{e}_2$ ортогонален асимптотической плоскости луча. Девивационные формулы репера имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{ds} &= -p(s)\mathbf{e}_2 - a(s)\mathbf{e}_3, \\ \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} &= -b(s)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} &= b(s)\mathbf{e}_1, \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\mathbf{e}_1.\end{aligned}$$

Геометрическая характеристика инвариантов приведена в [14]. Имея в виду линейчатую поверхность, носителем которой является наш регулюс, запишем радиус-вектор текущей точки

$$\mathbf{R}(s, v) = \mathbf{r}(s) + v\mathbf{e}_3(s).$$

Метрический тензор

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} v^2 + p^2 + a^2 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица второй квадратичной формы

$$(h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{v^2 + p^2}} \begin{pmatrix} bp^2 - ap - v\frac{dp}{ds} + bv^2 & p \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем (2) в виде

$$f(s, v) = \frac{m(s, v)^2}{p^2(v^2 + p^2)}, \quad (4)$$

где
$$m(s, v) = pa + p^2b + bv^2 - v\frac{dp}{ds}. \quad (5)$$

Ради удобства функцию $f(s, v)$ будем называть *основной функцией*.

Случай независимости основной функции от s

Геометрический смысл параметра v вполне очевиден – расстояние, отмеренное на луче в направлении вектора $\mathbf{e}_3$ (координата текущей точки луча в подвижном репере). Линия $v = \text{const}$ состоит из точек, равноудаленных (в указанном смысле) от горловой линии. Потребуем, чтобы $f(s, v)$ была постоянной вдоль линии $v = \text{const}$, то есть зависела от координаты v точки на луче и не зависела от

выбора луча. Это приводит к уравнению

$$-2m \left(-p^3 \frac{dm}{ds} - pv^2 \frac{dm}{ds} + 2mp^2 \frac{dp}{ds} + mv^2 \frac{dp}{ds} \right) = 0. \quad (6)$$

Если $m = 0$, то равенство

$$p(s)a(s) + p(s)^2 b(s) + b(s)v^2 - v \frac{dp(s)}{ds} = 0$$

должно выполняться тождественно относительно v . Тогда либо

$$p(s) = \text{const} \neq 0, \quad a(s) = 0, \quad b(s) = 0, \quad (7)$$

либо

$$p(s) = 0, \quad b(s) = 0. \quad (8)$$

Согласно [14], в первом случае линейчатая поверхность – прямой геликоид (в локальном смысле), а во втором – плоскость (и тоже в локальном смысле).

Внеся (5) в (6) и обращая в нуль второй множитель, получаем уравнение

$$K_0 + K_1 v + K_2 v^2 + K_3 v^3 + K_4 v^4 = 0,$$

где

$$K_0 = -(p(s))^3 \left(\left(\frac{d}{ds} a(s) \right) p(s) - a(s) \frac{d}{ds} p(s) + \left(\frac{d}{ds} b(s) \right) (p(s))^2 \right),$$

$$K_1 = (p(s))^2 \left(\left(\frac{d^2}{ds^2} p(s) \right) p(s) - 2 \left(\frac{d}{ds} p(s) \right)^2 \right),$$

$$K_2 = -(p(s))^2 \left(-b(s) \frac{d}{ds} p(s) + 2 \left(\frac{d}{ds} b(s) \right) p(s) + \frac{d}{ds} a(s) \right),$$

$$K_3 = \left(\frac{d^2}{ds^2} p(s) \right) p(s) - \left(\frac{d}{ds} p(s) \right)^2,$$

$$K_4 = - \left(\frac{d}{ds} b(s) \right) p(s) + b(s) \frac{d}{ds} p(s).$$

Обращая в нуль коэффициент K_3 , находим, что

$$p(s) = c_2 \exp(c_1 s), \quad c_1, c_2 = \text{const}. \quad (9)$$

Если $c_2 = 0$, то и все K_i становятся нулями. Регулюс в этом случае – торс [14]. Среди главных кривизн хотя бы одна равна нулю, и условие псевдоминимальности выполнено тривиальным образом. Исключаем этот случай из рассмотрения, полагая

$$c_2 \neq 0. \quad (10)$$

Заметим, что вследствие (9) имеем

$$K_1 = c_1^2 c_2^4 \exp(c_1 s)^4.$$

Обращение K_1 в нуль с учетом (10) приводит к тому, что

$$p(s) = \text{const} \neq 0,$$

и обращение в нуль прочих величин K_i приведёт к тому, что

$$a(s) = \text{const. } b(s) = \text{const.}$$

Итак, если основная функция косо́го регулю́са не зависит от s , то это – регулю́с с постоянными метрическими инвариантами. Данный класс регулюсов исчерпывающим образом исследован в [14]. Там же приведены вектор-функции, задающие указанные регулюсы. Именно, радиус-вектор горловой линии имеет вид

$$\mathbf{r} = \left\{ \frac{(bp - a) \cos(Bs)}{B^2}, \frac{(bp - a) \sin(Bs)}{B^2}, \frac{(p + ab)s}{B} \right\},$$

где $B = \sqrt{1 + b^2},$

а направляющий вектор луча

$$\mathbf{e} = \left\{ -\frac{\sin(Bs)}{B}, \frac{\cos(Bs)}{B}, -\frac{b}{B} \right\}.$$

Для такого регулюса вместо основной функции (4) следует говорить о функции

$$\varphi(v) = \frac{(ap + bp^2 + bv^2)^2}{p^2(p^2 + v^2)}.$$

В случае псевдоминимальной поверхности равенство (3) выполнено при подходящей константе L . В нашем же случае аналогичное равенство обеспечивается заданием $L(v)$, удовлетворяющей равенству

$$\frac{(L(v) - 1)^2}{L(v)} = \frac{(ap + bp^2 + bv^2)^2}{p^2(p^2 + v^2)} \equiv \varphi(v).$$

Отметим, что линейчатые поверхности, носители которых – регулюсы с постоянными инвариантами, представлены в [10], где на с. 75 приведен косо́й геликоид

$$\mathbf{R}(r, v) = \{r \cos v, r \sin v, cv + kr\}.$$

Укажем для этого регулюса метрические инварианты

$$a = -ck, b = -\frac{k}{1 + k^2}, p = \frac{c}{1 + k^2}.$$

На рис. 1 – косо́й геликоид при $c = 1, k = 1$.

Далее, на стр. 78 дано описание псевдо-развертывающегося геликоида

$$\mathbf{R}(u, v) = \{c \cos v - u \sin v, c \sin v + u \cos v, kv\}.$$

Он изображен на рис. 2, а его метрические инварианты таковы:

$$a = -c, b = 0, p = k.$$

В классе регулюсов с постоянными метрическими инвариантами содержатся, в частности, прямые геликоиды (при $bp - a = 0, p + ab \neq 0$) и однополостные гиперболоиды (при $bp - a \neq 0, p + ab = 0$) [14].

Отметим, что торсы, которые здесь исключены из анализа по указанной причине, определенно важны для задач строительства, о чем можно судить по работам [15, 16, 10].

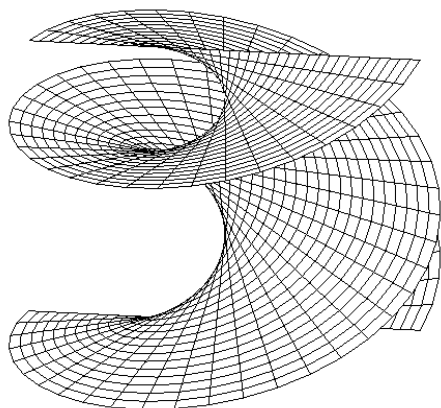


Рис. 1. Косой геликоид
Fig. 1. Skew helicoid

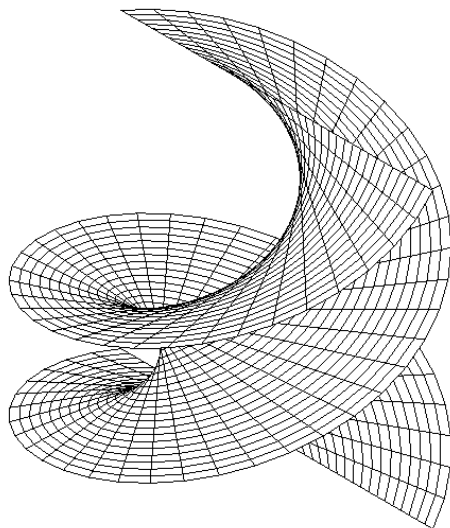


Рис. 2. Псевдо-развертывающийся геликоид.
Fig. 2. Pseudo-developable helicoid

Случай постоянства основной функции вдоль луча

Потребуем, чтобы $f(s, v)$ была постоянной вдоль луча регулюса. Тогда, как видно из (4) и (5), либо

$$m(s, v) = 0,$$

либо

$$bv^3 + (bp^2 - ap)v - \frac{dp}{ds}p^2 = 0.$$

И в том, и в другом случае должно выполняться одно из условий

$$\{b = 0, p = 0\}, \{p = \text{const}, p \neq 0, a = b = 0\},$$

и мы находимся в той же ситуации, что и для (7), (8). Именно, согласно [14], в первом случае линейчатая поверхность – плоскость (в локальном смысле), а во втором – прямой геликоид (и тоже в локальном смысле).

Заключение

Автор полагает, что предложенная работа (наряду с предшествующими) служит прояснению понятия псевдоминимальности применительно к линейчатым поверхностям, и надеется на внимание к этому вопросу со стороны заинтересованных лиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
2. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(29). С. 5–14.

3. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте пары поверхностей применительно к раскрою сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 13–24.
4. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 5–17.
5. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39. № 1. С. 97–106.
6. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.
7. Бухтяк М.С. Конечно-элементная модель псевдоминимальной поверхности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 48. С. 5–16.
8. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 45. С. 5–24.
9. Бухтяк М.С. Составная поверхность, близкая к псевдоминимальной // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 5–24.
10. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. М.: Наука, 2006. 544 с.
11. Беляева З.В. Геометрическое моделирование пространственных конструкций: дис. ... к.т.н. Екатеринбург, 2015. 175 с.
12. Кривошапко С.Н. Аналитические линейчатые поверхности и их полная классификация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. № 16(2). С. 131–138 с.
13. Иванов В.Н. Линейчатые поверхности на заданных опорных кривых // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 9–17.
14. Щербаков Р.Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 236 с.
15. Митюшов Е.А., Рощева Т.А. Кинематический алгоритм развёртывания линейчатых поверхностей // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010. С. 112–116.
16. Кривошапко С.Н. Перспективы и преимущества торсовых поверхностей // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 1(72). С. 20–30.

Статья поступила 22.06.2020 г.

Bukhtyak M.S. (2020) PSEUDO-MINIMALITY AND RULED SURFACES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 18–27

DOI 10.17223/19988621/67/2

Keywords: ruled surface, regulus, invariants, striction line, pseudo-minimality ratio, family of lines on a surface.

This paper is a follow-up to the author's series of works about shape modeling for an orthotropic elastic material that takes an equilibrium form inside the area with the specified boundaries. V.M. Gryanik and V.I. Loman, based on thin shell equilibrium equations, solved about 30 years ago a similar problem for an isotropic mesh attached to rigid parabolic edges. With a view to extend modeling to orthotropic materials (and other boundary contours), the author in his publications of 2016–2017 proposed an approach to the problem based on the application of surfaces with a constant ratio of principal curvatures. These surfaces are called pseudo-minimal surfaces. A partial differential equation that defines (in the local sense) a class of pseudo-minimal surfaces is very complex for analysis. However, for some classes of surfaces, the analysis is greatly simplified, notably, the analysis can be performed without this inconvenient PDE, but

with the method of moving frames. The author is referring to a class of ruled surfaces. This class is interesting not only due to the aforesaid but also due to an evident interest manifested by architects and builders. However, one should discuss not the pseudo-minimal ruled surfaces (they exist but are obviously trivial) but an invariant (principal curvatures ratio), which is not an identical constant on a given surface but its contour lines coincide with the lines of some invariant family. Roughly speaking, there are surfaces whose pseudo-minimal condition is satisfied identically, and surfaces that are pseudo-minimal "in a limited sense"—lengthways the lines of a certain family, internally connected with the surface. The article finds that the role of such a family can be obviously played by "equidistant" lines for the striction line of a skew ruled surface, and rays are the carriers of such a ruled surface, they form a regulus with constant Euclidean invariants.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 2020: 53Z30

Mikhail S. BUKHTYAK (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: bukhtyakm@mail.ru

REFERENCES

1. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoye modelirovaniye raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axissymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 34(2). pp. 5–17.
2. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoye modelirovaniye raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axissymmetric reflector. Part 2]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 36(4). pp. 5–14.
3. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2016) Ob odnom invariante otobrazheniya poverkhnostey primenitel'no k raskroyu setepolotna [On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 39(1). pp. 13–24.
4. Bukhtyak M.S. Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepestka setepolotna [Defect of mapping for deformed segment of metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 40(2) pp. 5–18.
5. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical Modeling of a Metallic Mesh Deformation of the Parabolic Reflector. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461. DOI: 10.1134/S2070048216040050.
6. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertyvayemyye zerkal'nyye anteny zontichnogo tipa* [Umbrella type deployable reflector antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.
7. Bukhtyak M.S. (2017) Konechno-elementnaya model' psevdominimal'noy poverkhnosti [Finite element model of a pseudominimal surface]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 5–16.
8. Bukhtyak M.S. (2017) Obobshcheniye minimal'nykh poverkhnostey i modelirovaniye formy konstruktssii iz ortotropnogo materiala [Generalization of minimal surfaces and simulation of the shape of an orthotropic material construction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 5–24.
9. Bukhtyak M.S. (2017) Sostavnaya poverkhnost', blizkaya k psevdominimal'noy [A composite surface close to pseudo-minimal]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 5–13.

10. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. (2006) *Analiticheskiye poverkhnosti: materialy po geometrii 500 poverkhnostey i informatsiya k raschetu na prochnost' tonkikh obolochek* [Analytical surfaces: materials on geometry of 500 surfaces and information for strength calculation of thin shells]. Moscow: Nauka.
11. Belyayeva Z.V. (2015) *Geometricheskoye modelirovaniye prostranstvennykh konstruksiy* [Geometric modelling of spatial constructions]. Dissertation. Ural Federal University.
12. Krivoshapko S.N. (2020) Analiticheskiye lineychatyye poverkhnosti i ikh polnaya klassifikatsiya [Analytical ruled surfaces] *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 16(2). pp. 131–138.
13. Ivanov V.N. (2015) Lineychatyye poverkhnosti na zadannykh opornykh krivyykh [Ruled surfaces on given supporting curves]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 3. pp. 9–17.
14. Shcherbakov R.N. (1973) *Osnovy metoda vneshnikh form i lineychatoy differentsial'noy geometrii* [Foundations of the exterior form method and ruled differential geometry]. Tomsk: Tomsk State University.
15. Mityushov E.A., Roshcheva T.A. (2010) Kinematicheskiy algoritm razviortyvaniya lineychatyykh poverkhnostey [Kinematic algorithm of ruled surface development]. *Mekhanika. Nauchnyye issledovaniya i uchebno-metodicheskiye razrabotki*. 4. pp. 112–116.
16. Krivoshapko S.N. (2019) Perspektivy i preimushchestva torsovykh poverkhnostey. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 72(1). pp. 20–30.

Received: June 22, 2020

УДК: 517.54
DOI 10.17223/19988621/67/3

MSC 35C15

О.В. Задорожная, В.К. Кочетков

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА

Рассматривается вопрос о построении интегрального представления решений обыкновенного специального дифференциального уравнения и дифференциального уравнения в частных производных, являющегося вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева в частном случае. Вводится новый метод исследования, в основе которого – установление уравнения связи между составляющими компонентами дифференциальных уравнений и введенными аналитическими функциями. Дается интегральное представление решений рассматриваемых дифференциальных уравнений, являющееся альтернативой построения решений в виде различных рядов.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, интегральные представления решений, однолистные функции, конформные отображения.*

Рассмотрен метод интегрального представления решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, в котором правая часть является многочленом специального вида, и решений дифференциальных уравнений в частных производных, в которых правая часть является многочленом второго порядка.

Статья состоит из двух разделов. В первом излагается суть метода исследования, основанного на введении произвольных аналитических функций и указании связи между введенными функциями и составляющими компонентами (коэффициентами) дифференциального уравнения. Реализация уравнения связи состоит в указании выражения введенных функций в терминах коэффициентов исходного дифференциального уравнения. Приводятся разные варианты реализации уравнения связи, которые могут быть использованы в различных приложениях.

Полученные результаты используются во втором разделе, посвященном рассмотрению дифференциального уравнения Левнера – Куфарева с квадратичной правой частью, в настоящее время мало исследованного [1–8]. Заметим, что класс функций Базилевича и различные его модификации могут быть получены из второго уравнения Левнера – Куфарева с линейной правой частью, в то время, как в данной статье рассматривается уравнение с квадратичной частью, что является существенным обобщением. Метод интегрального представления решений дифференциальных уравнений, изложенный в статье, является альтернативой построения решений в виде различных рядов.

1. Исследование обыкновенного дифференциального уравнения

вида $w' + a_0 w^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$

1.1. Общее уравнение связи. Общая теорема

Пусть $a_0 = a_0(z)$, $a_1 = a_1(z)$ – аналитические в области $D \subset \mathbb{C}$ функции. Запишем дифференциальное уравнение

$$w' + a_0 + a_1 w^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

в виде

$$kw' + a_0 - \theta + (1-k)w' + a_1 w^n + \theta = 0, \quad (1.2)$$

где $k = k(z)$, $\theta = \theta(z)$ – некоторые аналитические в области $D \subset \mathbb{C}$ функции. Для простоты изложения в дальнейшем будем опускать аргумент z .

Заметим, что в результате приведения подобных слагаемых в уравнении (1.2) получим выражение (1.1).

Введем обозначения

$$b_1 = \int \frac{\theta}{k} dz, \quad b_2 = \int \frac{a_0}{k} dz. \quad (1.3)$$

Приравняем нулю первые три слагаемых в (1.2):

$$kw' + a_0 - \theta = 0, \quad (1.4)$$

а также последние три:

$$(1-k)w' + a_1 w^n + \theta = 0. \quad (1.5)$$

Из (1.4) следует

$$w'_1 = w' = \frac{\theta}{k} - \frac{a_0}{k}, \quad (1.6)$$

а также, с учетом (1.3),

$$w = w_1 = b_1 - b_2 + c_1, \quad c_1 = \text{const}. \quad (1.7)$$

Из (1.5) получаем

$$w' = w'_2 = -\frac{\theta + a_1 w_2^n}{1-k}. \quad (1.8)$$

Считая, что $w'_1 = w'_2$, приравняем правые части в (1.6) и в (1.8):

$$\frac{\theta}{k} - \frac{a_0}{k} = -\frac{\theta + a_1 w_2^n}{1-k}.$$

Преобразуем последнее выражение

$$(\theta - a_0)(1-k) = -k\theta - ka_1 w_2^n.$$

Откуда следует

$$\theta - a_0 + a_0 k = -ka_1 w_2^n$$

или

$$w_2^n = \frac{a_0(1-k) - \theta}{ka_1} = \frac{1}{a_1} \left(-\frac{\theta}{k} + \frac{a_0}{k} - a_0 \right),$$

а также, с учетом (1.3),

$$w_2^n = \frac{1}{a_1}(-b_1' + b_2' - a_0)$$

$$w_2 = \left(\frac{1}{a_1}(-b_1' + b_2' - a_0) \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.9)$$

Считая, что w_1 в (1.7) равно w_2 в (1.9), имеем

$$b_1 - b_2 + c_1 = \left(\frac{1}{a_1}(-b_1' + b_2' - a_0) \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{или} \quad -b_1' + b_2' - a_0 = a_1 (b_1 - b_2 + c_1)^n. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) назовем уравнением связи между коэффициентами a_0, a_1 дифференциального уравнения (1.1) и введенными функциями θ и k .

Объединяя вышеизложенное, сформируем утверждение.

Утверждение 1 (общее).

Пусть функции $a_0(z), a_1(z), \theta(z), k(z)$:

- 1) являются аналитическими в области $D \subset \mathbb{C}$ функциями;
- 2) удовлетворяют уравнению связи (1.10) в $D \subset \mathbb{C}$

$$-b_1' + b_2' - a_0 = a_1 (b_1 - b_2 + c_1)^n.$$

Тогда функция $w(z)$ в (1.7)

$$w(z) = \int \frac{\theta}{k} dz - \int \frac{a_0}{k} dz + c_1, \quad c_1 = \text{const},$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1):

$$w' + a_0 + a_1 w^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2. Реализация уравнения связи (1.10) при $n=2, c_1=0$ путем ввода выражения $a_0 - a_0$

Уравнение связи (1.10) при $n=2, c_1=0$ перепишем в виде

$$-b_1' + b_2' - a_0 = a_1 (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2^2) + a_0 - a_0. \quad (1.11)$$

Применительно к уравнению (1.11) введем систему соотношений

$$a_0 = 2a_1 \cdot b_1 \cdot b_2; \quad (1.12)$$

$$-b_1' = a_0 + a_1 b_1^2; \quad (1.13)$$

$$b_2' = -a_0 + a_1 b_2^2. \quad (1.14)$$

Из (1.12) следует

$$b_2 = \frac{a_0}{2a_1 b_1}. \quad (1.15)$$

Подставим (1.15) в (1.14):

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)' \frac{1}{2b_1} - \frac{a_0}{2a_1} \cdot \frac{b_1'}{b_1^2} = -a_0 + a_1 \left(\frac{a_0}{2a_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{b_1^2}. \quad (1.16)$$

Заменяя в (1.16) выражение $-b_1'$ выражением в правой части (1.13), перепишем выражение в (1.16) в виде

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)' \cdot \frac{1}{2b_1} + \frac{a_0(a_0 + a_1 b_1^2)}{2a_1 b_1^2} = -a_0 + a_1 \left(\frac{a_0}{2a_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{b_1^2}.$$

Приведем подобные и умножим на $2b_1^2$ обе части последнего выражения:

$$3a_0 b_1^2 + \left(\frac{a_0}{a_1}\right)' b_1 + \frac{a_0^2}{2a_1} = 0.$$

Обозначив

$$A = \left(\frac{a_0}{a_1}\right)'^2 - \frac{6a_0^3}{a_1}, \quad (1.17)$$

укажем корни последнего квадратного уравнения

$$b_1^+ = \frac{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)' + \sqrt{A}}{6a_0}; \quad (1.18)$$

$$b_1^- = \frac{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)' - \sqrt{A}}{6a_0}. \quad (1.19)$$

Из (1.18), (1.19) и (1.15) имеем

$$b_2^+ = \frac{a_0}{2a_1 b_1^+}; \quad (1.20)$$

$$b_2^- = \frac{a_0}{2a_1 b_1^-}. \quad (1.21)$$

Утверждение 2. Пусть функции b_1^+ , b_2^+ определяются по формулам (1.18), (1.20), а функции b_1^- , b_2^- – по формулам (1.19), (1.21) при условии (1.16), (1.11).

Тогда функции

$$w^+ = b_1^+ - b_2^+$$

и

$$w^- = b_1^- - b_2^-$$

удовлетворяют уравнению (1.1).

1.3. Реализация уравнения связи (1.10)
при $n=2$, $c_1=0$ путем ввода выражения $g(z)-g(z)$

Введением выражения $g(z)-g(z)$ уравнение связи (1.10) переписывается в виде

$$-b_1' + b_2' - a_0 = a_1(b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2) + g(z) - g(z) = 0. \quad (1.22)$$

Применительно к уравнению (1.22) введём систему соотношений

$$a_0 = 2a_1b_1b_2; \quad (1.23)$$

$$-b_1' = g + a_1b_1^2; \quad (1.24)$$

$$b_2' = -g + a_1b_2^2. \quad (1.25)$$

Из (1.23) следует

$$b_2 = \frac{a_0}{2a_1b_1}. \quad (1.26)$$

Подставим (1.26) в (1.25):

$$\left(\frac{a_0}{2a_1}\right)' \frac{1}{b_1} - \frac{a_0}{2a_1} \frac{b_1'}{b_1^2} = -g + a_1 \left(\frac{a_0}{2a_1}\right)^2 \frac{1}{b_1^2}. \quad (1.27)$$

Заменяя в (1.27) выражение $-b_1'$ выражением в правой части (1.24), перепишем выражение в (1.27) в виде

$$\left(\frac{a_0}{2a_1}\right)' \frac{1}{b_1} + \frac{a_0(g + a_1b_1^2)}{2a_1b_1^2} = -g + \frac{a_0^2}{4a_1} \frac{1}{b_1^2} = 0.$$

Умножим обе части последнего выражения на $2b_1^2$ и приведем подобные:

$$(a_0 + 2g)b_1^2 + \left(\frac{a_0}{a_1}\right)' b_1 - \frac{a_0}{2a_1}(a_0 - 2g) = 0.$$

Обозначив

$$\frac{a_0}{a_1} = p(z), \quad B = p'^2 + 2p(a_0^2 - 4g^2), \quad (1.28)$$

укажем корни последнего квадратного уравнения

$$b_1^+ = \frac{-p' + \sqrt{B}}{2(a_0 + 2g)}; \quad (1.29)$$

$$b_1^- = \frac{-p' - \sqrt{B}}{2(a_0 + 2g)}. \quad (1.30)$$

Из (1.29), (1.30) и (1.26) имеем

$$b_2^+ = \frac{p}{2b_1^+}; \quad (1.31)$$

$$b_2^- = \frac{p}{2b_1^+}. \quad (1.32)$$

Утверждение 3 (основное). Пусть $g(z)$ – произвольная аналитическая в $D \subset \mathbb{C}$ функция. Тогда при обозначениях (1.28 – 1.32) функции

$$w^+ = b_1^+ - b_2^+ \quad (1.33)$$

$$\text{и} \quad w^- = b_1^- - b_2^- \quad (1.34)$$

удовлетворяют уравнению (1.1) при $n = 2$, $c_1 = 0$.

1.4. Реализация условий связи (уравнения связи) при $n = 2$, $c_1 \neq 0$

Напомним, что реализация уравнения связи состоит в выражении дополнительных функций θ , k через коэффициенты a_0 , a_1 или в указании связи (зависимости) коэффициентов a_0 , a_1 между собой.

При $n = 2$, $c_1 \neq 0$ выражение в (1.10) переписывается в виде (с добавлением выражения $a_0 - a_0$)

$$-b_1' + b_2' - a_0 = a_1(b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 - 2b_1 \cdot b_2 + 2b_1 \cdot c_1 - 2b_2 c_1) + a_0 - a_0 = 0. \quad (1.35)$$

В случае (1.35) положим

$$-a_0 - c_1^2 a_1 = -a_1 \cdot 2b_1 \cdot b_2; \quad (1.36)$$

$$-b_1' = a_1 b_1^2 + 2a_1 b_1 c_1 + a_0; \quad (1.37)$$

$$b_2' = a_1 b_2^2 - 2a_1 b_2 c_1 - a_0. \quad (1.38)$$

Из (1.36) следует

$$b_2 = \frac{a_0 + c_1^2 a_1}{2a_1 b_1} = \frac{\alpha}{b_1}, \text{ где } \alpha = \frac{a_0 + c_1^2 a_1}{2a_1}. \quad (1.39)$$

Пусть функции b_1 , b_2 в (1.3) удовлетворяют уравнениям (1.37) и (1.38) соответственно.

Подставим (1.39) в (1.38)

$$\frac{\alpha'}{b_1} - \alpha \frac{b_1'}{b_1^2} = a_1 \frac{\alpha^2}{b_1^2} - 2a_1 \frac{\alpha}{b_1} \cdot c_1 - a_0.$$

В последнем уравнении производную $-b_1'$ заменим выражением в правой части (1.37):

$$\frac{\alpha'}{b_1} + \frac{\alpha}{b_1^2} (a_1 \cdot b_1^2 + 2a_1 b_1 c_1 + a_0) = a_1 \frac{\alpha^2}{b_1^2} - 2a_1 \frac{\alpha}{b_1} \cdot c_1 - a_0.$$

Обе части последнего выражения умножим на b_1^2 и приведем подобные

$$b_1^2 (a_1 \alpha + a_0) + b_1 (\alpha' + 4a_1 \alpha c_1) - a_1 \alpha^2 + \alpha a_0 = 0. \quad (1.40)$$

Коэффициент при b_1^2 обозначим через $\frac{\beta_2}{2}$ и преобразуем его:

$$\frac{\beta_2}{2} = \frac{3a_0 + a_1 c_1^2}{2}, \beta_2 = 3a_0 + a_1 c_1^2. \quad (1.41)$$

Коэффициент при b_1 обозначим через $\frac{\beta_1}{2}$ и преобразуем его:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{2} = \alpha' + 4a_1 \alpha c_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_0 + a_1 c_1^2}{a_1} \right)' + \frac{4c_1(a_0 + a_1 c_1^2)}{2}, \\ \beta_1 &= \left(\frac{a_0 + a_1 c_1^2}{a_1} \right)' + 4c_1(a_0 + a_1 c_1^2). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Коэффициент при b_1^0 обозначим через $\frac{\beta_0}{2}$ и преобразуем его:

$$\frac{\beta_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{(a_0 + a_1 c_1^2)(a_0 - a_1 c_1^2)}{2a_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0^2 - a_1^2 c_1^4}{2a_1}.$$

Откуда имеем

$$\beta_0 = \frac{a_0^2 - a_1^2 c_1^4}{2a_1}. \quad (1.43)$$

Умножая на 2 обе части выражения в (1.40), с учетом (1.41), (1.42) и (1.43), перепишем выражение в (1.40) в виде

$$\beta_2 \cdot b_1^2 + \beta_1 b_1 + \beta_0 = 0.$$

Обозначив

$$B = \beta_1^2 - 4\beta_2 \cdot \beta_0, \quad (1.44)$$

укажем корни последнего квадратного уравнения

$$b_1^+ = \frac{-\beta_1 + \sqrt{B}}{2\beta_2}, \quad b_1^- = \frac{-\beta_1 - \sqrt{B}}{2\beta_2}. \quad (1.45)$$

С учетом (1.35) и (1.45) укажем b_2^+ и b_2^- :

$$b_2^+ = \frac{\alpha}{b_1^+}, \quad b_2^- = \frac{\alpha}{b_1^-}.$$

Утверждение 4. При обозначениях (1.35) – (1.46), функции

$$w^+ = b_1^+ - b_2^+$$

и

$$w^- = b_1^- - b_2^-$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.1) при $n = 2$, $c_1 \neq 0$.

2. Второе дифференциальное уравнение в частных производных Левнера – Куфарева с квадратичной правой частью

Обозначим:

C – класс регулярных и однолистных в $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $p(z)$, отображающих E на область, расположенную в правой полуплоскости;

$C(T)$ – множество функций $p(z, t)$, принадлежащих классу C при каждом фиксированном $t \in T = [0; +\infty) = \{t : t \geq 0\}$.

В геометрической теории функций комплексного переменного хорошо известны первое и второе дифференциальные уравнения Левнера – Куфарева, последнее из которых имеет вид

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = p(z, t), \quad p(z, t) \in C(T).$$

В данном параграфе рассматривается второе дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева в случае

$$p(z, t) = p_2(z)t^2 + p_1(z)t + p_0(z),$$

где $p_i(z) \in C, i = \overline{0, 2}, t \geq 0$.

Решение $F(z, t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = p_2(z)t^2 + p_1(z)t + p_0(z) \quad (2.1)$$

будем искать в виде

$$F(z, t) = \frac{a(z)t + b(z)}{c(z)t + 1}. \quad (2.2)$$

Дифференцируя функцию $F(z, t)$ в (2.2) по z , получим

$$F'_z = \frac{b_2(z)t^2 + b_1(z)t + b_0}{(ct + 1)^2},$$

где

$$b_2 = a'c - ac'; \quad (2.3)$$

$$b_1 = a' + b'c - bc'; \quad (2.4)$$

$$b_0 = b'. \quad (2.5)$$

Частная производная F'_t , с учетом (2.2), равна

$$F'_t = \frac{a - bc}{(ct + 1)^2}.$$

Рассмотрим отношение вышеизложенных частных производных:

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = \frac{zb_2}{m}t^2 + \frac{zb_1}{m}t + \frac{zb_0}{m}, \quad (2.6)$$

где

$$m = a - bc. \quad (2.7)$$

Обозначив через $p_2(z), p_1(z), p_0(z)$ коэффициенты при t^2, t^1, t^0 в (2.6), с последующим преобразованием, получим систему уравнений

$$z(a'c - ac') = p_2m; \quad (2.8)$$

$$z(a' + b'c - bc') = p_1m; \quad (2.9)$$

$$zb' = p_0m. \quad (2.10)$$

С помощью операции интегрирования разрешим уравнение (2.8) относительно a :

$$a = cu_2, \quad (2.11)$$

где
$$u_2 = \int \frac{p_2m}{zc^2} dz + c_2, \quad c_2 = \text{const}, \quad (2.12)$$

а уравнение (2.10) разрешим относительно b :

$$b = u_0, \quad (2.13)$$

где
$$u_0 = \int \frac{p_0m}{z} dz + c_0, \quad c_0 = \text{const}. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.11) – (2.14) в (2.9), перепишем его в виде

$$z \left(c'(u_2 - u_0) + c \left(\frac{p_2m}{zc^2} + \frac{p_0m}{z} \right) \right) = p_1m. \quad (2.15)$$

С учетом (2.11) – (2.14) выражение (2.7) перепишется в виде

$$m = c(u_2 - u_0).$$

Откуда следует

$$u_2 - u_0 = \frac{m}{c}. \quad (2.16)$$

Используя (2.11) – (2.14), продифференцируем обе части в (2.16)

$$\left(\frac{m}{c} \right)' = \frac{m}{c} \gamma,$$

где
$$\gamma = \frac{p_2}{zc} - \frac{cp_0}{z}.$$

Интегрируем последнее дифференциальное уравнение

$$m = c_3 \cdot c \cdot e^{\int \gamma(z) dz}, \quad c_3 = \text{const}. \quad (2.17)$$

Подставив (2.16) в (2.15), преобразуем его в виде уравнения Риккати

$$c' + \frac{p_2}{z} - \frac{p_1}{z}c + \frac{p_0}{z}c^2 = 0. \quad (2.18)$$

Полагая

$$c = e(z)w, \quad (2.19)$$

найдем
$$c' = e'(z)w + e(z)w'.$$

С учетом (2.19) имеем

$$e'(z)w + e(z)w' + \frac{p_2}{z} - \frac{p_1}{z}e(z)w + \frac{p_0}{z}e^2(z)w^2 = 0$$

и

$$w' + \frac{p_2}{ze(z)} + w\left(\frac{e'(z)}{e(z)} - \frac{p_1}{z}\right) + \frac{p_0}{z}e(z)w^2 = 0. \quad (2.20)$$

С целью простоты исследования и приведения дифференциального уравнения (2.20) к виду дифференциального уравнения, рассмотренного в пункте 1.3 первого раздела, приравняем к нулю выражение при w

$$\frac{e'(z)}{e(z)} - \frac{p_1}{z} = 0.$$

Последующим его интегрированием, получим

$$e(z) = c_4 \exp\left[\int \frac{p_1}{z} dz\right], \quad c_4 = \text{const}. \quad (2.21)$$

С учетом (2.21), выражение в (2.20) перепишется в виде дифференциального уравнения

$$w' + a_0 + a_1 w^2 = 0,$$

где

$$a_0 = \frac{p_2}{ze(z)}, \quad a_1 = \frac{p_0}{z}e(z),$$

интегрирование которого рассмотрено в первом разделе в пункте 1.3.

Определив w^+ , w^- , используя (2.21), по формуле (2.19) определим c^+ , c^- , затем m^+ , m^- находим по формуле (2.17).

Последовательно определяем остальные составляющие a^+ , a^- , b^+ , b^- , F^+ , F^- . Развернутую запись вышеуказанных составляющих в статье не приводим в силу их громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та., 2001. 220 с.
2. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009. 672 с.
3. Базилевич И.Е. Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера – Куфарева // Матем. сб. 1995. Т. 37. № 3. С. 471–476.
4. Деревенский В.П. Полиномиальные дифференциальные уравнения первого порядка над матричными косыми рядами // Изв. вузов. Математика. 2014. № 9. С. 3–16.
5. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Структура интегралов второго дифференциального уравнения Левнера – Куфарева в частном случае // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 12–21. DOI: 10.17223/19988621/55/2.
6. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Некоторые методы исследования интегрируемости обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка специального вида // Математика и математическое моделирование. 2019. № 2. С. 48–62. <https://doi.org/10.24108/mathm.0219.0000177>

7. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Альтернативные методы интегрируемости обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с полиномиальной частью // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. Т. 16. № 2. С. 6–14. <https://doi.org/10.31429/vestnik-16-2-6-14>
8. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Практический метод интегрального представления решений однородного дифференциального уравнения второго порядка // Инновационные исследования как локомотив развития современной науки: от теоретических парадигм к практике: электронный сборник научных статей по материалам XIX Международной научно-практической конференции. М.: НИЦ МИСИ, 2019. С. 23–28. URL: <http://conference-nicmisi.ru/innovatsionnye-issledovaniya-kak-lokomotiv-razvitiya-sovremennoj-nauki-ot-teoreticheskikh-paradigm-k-praktike.html>
9. Ильашенко Ю.С., Яковенко С.Ю. Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Т. 1. М.: МЦНМО, 2013. 428 с.
10. Матвеев П.Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений: учебное пособие. СПб.: М.: Краснодар: Лань, 2008. 330 с.

Статья поступила 20.11.2019 г.

Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2020) INTEGRAL REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION AND THE LOEWNER–KUFAREV EQUATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 28–39

Keywords: differential equations, integral representations of solutions, univalent functions, conformal mappings.

DOI 10.17223/19988621/67/3

The article presents a method of integral representation of solutions of ordinary differential equations and partial differential equations with a polynomial right-hand side part, which is an alternative to the construction of solutions of differential equations in the form of different series.

The method is based on the introduction of additional analytical functions establishing the equation of connection between the introduced functions and the constituent components of the original differential equation. The implementation of the coupling equations contributes to the representation of solutions of the differential equation in the integral form, which allows solving some problems of mathematics and mathematical physics.

The first part of the article describes the coupling equation for an ordinary differential equation of the first order with a special polynomial part of a higher order. Here, the integral representation of the solution of a differential equation with a second-order polynomial part is indicated in detail.

In the second part of the paper, we consider the integral representation of the solution of a partial differential equation with the polynomial second-order part of the Loewner–Kufarev equation, which is an equation for univalent functions.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 35C15

Olga V. ZADOROZHNYA (Candidate of Pedagogics, Associate Professor of the Department of Algebra and Analysis, Kalmyk State University, Elista, Russian Federation). E-mail: ovz_70@mail.ru

Vladimir K. KOCHETKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Algebra and Analysis, Kalmyk State University, Elista, Russian Federation). E-mail: kvk1106@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of geometrical theory of analytical functions]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Arnold V.I., Varchenko A.N., Gusein-Zade S.M. (2012) *Singularities of Differentiable Maps*. Basel: Birkhäuser.
3. Bazilevich I.E. (1995) Ob odnom sluchaye integriruyemosti v kvadraturakh uravneniya Levnera – Kufareva [On a case of integrability in quadratures of the Loewner–Kufarev equation]. *Mathematicheskij sbornik*. E 37(3). pp. 471–476.
4. Derevenskii V.P. (2014) First-order polynomial differential equations over matrix skew series. *Russian Mathematics*. 58(9). pp. 1–12.
5. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2018) The structure of integrals of the second Loewner–Kufarev differential equation in a particular case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 12–21. DOI: 10.17223/19988621/55/2.
6. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Nekotoryye metody issledovaniya integriruyemosti obyknovennogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka spetsial'nogo vida [Some study methods for ordinary differential equation integrability of the second order of a certain type]. *Matematika i matematicheskoye modelirovaniye*. (2). pp. 48–62. doi.org/10.24108/mathm.0219.0000177
7. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Al'ternativnyye metody integriruyemosti obyknovennogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka s polinomial'noy chast'yu [Alternative methods of integrability of an ordinary nonlinear differential equation of the first order with a polynomial part]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*. 16(2). pp. 6–14. doi.org/10.31429/vestnik-16-2-6-14
8. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Prakticheskij metod integral'nogo predstavleniya resheniy odnorodnogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [A practical method for integral representation of solutions to a homogeneous second-order differential equation]. *Innovatsionnyye issledovaniya kak lokomotiv razvitiya sovremennoy nauki: ot teoreticheskikh paradig k praktike – Innovative investigations as a locomotive of the development of present-day science*. pp. 23–28. Access mode: <http://conference-nicmisi.ru/innovatsionnye-issledovaniya-kak-lokomotiv-razvitiya-sovremennoj-nauki-ot-teoreticheskikh-paradigm-k-praktike.html>
9. Il'yashenko Yu.S., Yakovenko S.Yu. (2013) *Analiticheskaya teoriya differentsial'nykh uravneniy* [Analytical theory of differential equations]. Moscow: MCCME.
10. Matveev P.N. (2009) *Leksii po analiticheskoy teorii differentsial'nykh uravneniy* [Lectures on analytical theory of differential equations]. St. Petersburg: LAN.

Received: November 20, 2019

УДК 517.968.73
DOI 10.17223/19988621/67/4

MSC 45E99, 45K99, 45D99

С.К. Зарифзода, Р.Н. Одинаев

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

Для одного класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка со степенной и логарифмической сингулярностью в ядре, в классе функций, обращающихся в нуль с определённой асимптотикой, найдены интегральные представления многообразия решений через произвольные постоянные. Использован метод представления интегро-дифференциального уравнения второго порядка в виде произведения двух интегро-дифференциальных операторов первого порядка. Для этих одномерных интегро-дифференциальных операторов в случаях, когда корни характеристических уравнений являются вещественно разными, вещественно равными и комплексно-сопряженными, найдены обратные операторы. Выяснено, что присутствие степенно-логарифмической особенности в ядре действует на число произвольных констант в общем решении. Это число, в зависимости от корней соответствующих характеристических уравнений, может достигать девяти. Найдены случаи, когда данное интегро-дифференциальное уравнение имеет единственное решение. Использованный метод можно применять для изучения модельных и немодельных интегро-дифференциальных уравнений со степенно-логарифмической особенностью более высоких порядков.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, степенные особенности, логарифмические особенности, интегральные представления, характеристическое уравнение.*

К рассмотрению интегро-дифференциальных уравнений приводят многие задачи прикладного характера из области математической биологии, теоретической экологии [1], финансовой математики, эконометрики [2] и других разделов современной науки. Например, задача моделирования рассеивания и роста популяции, задача Вольтерра о крутильных колебаниях [1], задача Прандтля о расчёте крыла самолёта [3, 4], задача об изучении кинетического уравнения Больцмана [5], задача разрешимости интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике [6] и т.д., приводят к изучению интегро-дифференциальных уравнений. В современности многие стохастические процессы с вероятностными скачками, например стохастические процессы Леви описываются интегро-дифференциальными уравнениями [7]. Помимо важнейшей прикладной стороны вопроса, не меньший интерес представляет математическое построение основ составляющей проблематики.

Особое внимание следует уделить исследованию различных случаев вырождения, например вырождения коэффициента при старших производных, сингулярности и сверхсингулярности ядра изучаемого уравнения и т.д. Изучению подоб-

ных объектов в регулярном случае посвящена обширная библиография [8 – 18]. Однако исследованию особых или сингулярных случаев в мировой литературе уделено мало внимания, поэтому список соответствующей литературы в этом направлении достаточно беден.

В данной работе излагается исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Вольтерра со степенной и логарифмической сингулярностью в ядре. Подобные уравнения, но только в одномерном случае, были исследованы в работах [19–22]. Хочется продолжить этот цикл работ и построить фундаментальные теории для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь привлекается аппарат представления общего интегро-дифференциального уравнения в виде произведения двух интегро-дифференциальных операторов первого порядка, один из которых содержит только степенную сингулярность, а другой – только логарифмическую. Однако важно заметить, что понятие сингулярности со стороны отдельных авторов понимается по-разному. Например, можно понимать это в смысле главного значения по Коши. Здесь для исследования привлекается аппарат теории аналитических функций [23]. Также можно понимать сингулярность в смысле обращения в нуль определителя матрицы главного оператора в уравнении. Для исследования таких уравнений привлекается аппарат распределения Соболева – Шварца, центральное место в которых занимает конструкция фундаментальной оператор-функции – аналога фундаментального решения [24, 25].

В наших исследованиях понятие сингулярности понимается в смысле сингулярности интеграла по Лебегу или сингулярности интеграла в обычном смысле Римана [21, 22].

Постановка задач и их решение

Через R обозначим область $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{(x, y) : a < x < b, y = c\}$ и $\Gamma_2 = \{(x, y) : x = a, c < y < d\}$. В области R рассмотрим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка вида

$$U''_{xy}(x, y) + \int_a^x \frac{K_1(x, t)}{(t-a)^2} U'_y(t, y) dt + \int_c^y \frac{K_2(y, s)}{(s-c)^2} U'_x(x, s) ds + \\ + \int_a^x \frac{dt}{(t-a)^2} \int_c^y \frac{K_3(x, t, y, s)}{(s-c)^2} U(t, s) ds = f(x, y), \quad (1)$$

где $K_1(x, t) = p_1 + p_2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)$ – ядро, имеющее степенную особенность;

$K_2(y, s) = q_1 + q_2 \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right)$ – ядро, имеющее логарифмическую особенность;

$K_3(x, t, y, s) = K_1(x, t)K_2(y, s)$ – ядро, имеющее степенно-логарифмическую особенность; $f(x, y)$ – заданная функция в области R , $U(x, y)$ – искомая функция.

Через $C_{xy}^{\delta_1 \delta_2} [a, b; c, d]$, или просто $C_{xy}^{\delta_1 \delta_2}$, обозначим класс таких функций $U(x, y)$, которые имеют производные первого порядка по обоим переменным и

смешанную производную второго порядка и в точке (a, c) обращаются в нуль с асимптотическим поведением

$$U(x, y) = o\left[(x-a)^{\gamma_1} (y-c)^{\gamma_2}\right], \quad \gamma_1 > \delta_1, \quad \gamma_2 > \delta_2,$$

и решение уравнения (1) будем искать в этом классе.

Для решения однородного уравнения (1) прежде всего представим его в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U'_y(x, y) + \int_c^y \frac{K_2(y, s)}{(s-c)^2} U(x, s) ds \right) + \int_a^x \frac{K_1(x, t)}{(t-a)^2} \left(U'_y(t, y) + \int_c^y \frac{K_2(y, s)}{(s-c)^2} U(t, s) ds \right) dt = 0$$

или в виде произведения двух линейных интегро-дифференциальных операторов первого порядка вида

$$\Pi_a^x \Lambda_c^y U(x, y) = 0, \quad (2)$$

$$\text{где } \Pi_a^x(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x} + \int_a^x \frac{K_1(x, t)}{(t-a)^2}(\cdot) dt \text{ и } \Lambda_c^y(\cdot) = \frac{\partial}{\partial y} + \int_c^y \frac{K_2(y, s)}{(s-c)^2}(\cdot) ds.$$

Теперь, частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$U(x, y) = (x-a)^\lambda (y-c)^\mu,$$

где λ и μ – постоянные числа. Подставляя эту функцию в левую часть уравнения (2) для определения λ и μ , получим следующее характеристическое уравнение:

$$\left(\lambda + \frac{p_1}{\lambda-1} + \frac{p_2}{\lambda-2} \right) \left(\mu + \frac{q_1}{\mu-1} + \frac{q_2}{(\mu-1)^2} \right) = 0, \quad (3)$$

только с тем ограничением, что λ и μ строго должны удовлетворять условиям $\lambda > 2$, $\mu > 1$. Эти условия определяют класс функций C_{xy}^{21} , в которых нужно искать решение уравнения (1).

Видно, что характеристическое уравнение (3) распадается на два алгебраических уравнения третьего порядка вида

$$\lambda + \frac{p_1}{\lambda-1} + \frac{p_2}{\lambda-2} = 0 \quad (4)$$

и

$$\mu + \frac{q_1}{\mu-1} + \frac{q_2}{(\mu-1)^2} = 0 \quad (5)$$

и поэтому в зависимости от корней этих алгебраических уравнений решение уравнения (2) получим в следующем виде:

I. Пусть корни характеристических уравнений (3) и (4) являются вещественными и разными. Тогда формально общее решение однородного уравнения (2) имеет вид

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (x-a)^{\lambda_i} (y-c)^{\mu_j} c_i \tilde{c}_j,$$

где $c_i, \tilde{c}_j$ ($i, j = \overline{1, 3}$) – произвольные постоянные числа.

Далее, используя метод вариации произвольных постоянных решение неоднородного уравнения (1) легко находим в таком виде:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (x-a)^{\lambda_i} (y-c)^{\mu_j} c_i \tilde{c}_j + \left(\Pi_a^x \right)_I^{-1} \left(\Lambda_c^y \right)_I^{-1} f(x, y) \equiv \\ \equiv E_1^+ [c_1, c_2, c_3, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, f(x, y)], \quad (6)$$

где обратные операторы $\left(\Pi_a^x \right)_I^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y \right)_I^{-1}$ соответственно определяются из следующих равенств:

$$\left(\Pi_a^x \right)_I^{-1} (\cdot) = -\frac{1}{p_2 \Delta_0} \int_a^x \left[\Delta_1 (\lambda_1 - 2)(\lambda_1 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_1} + \Delta_2 (\lambda_2 - 2)(\lambda_2 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_2} + \right. \\ \left. + \Delta_3 (\lambda_3 - 2)(\lambda_3 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_3} \right] (\cdot) dt, \\ \left(\Lambda_c^y \right)_I^{-1} (\cdot) = -\frac{1}{q_2 \tilde{\Delta}_0} \int_c^y \left[\tilde{\Delta}_1 (\mu_1 - 1)^2 \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^{\mu_1} + \tilde{\Delta}_2 (\mu_2 - 1)^2 \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^{\mu_2} + \right. \\ \left. + \tilde{\Delta}_3 (\mu_3 - 1)^2 \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^{\mu_3} \right] (\cdot) ds,$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -\lambda_1 - 2 & -\lambda_2 - 2 & -\lambda_3 - 2 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\Delta}_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 - 1 & \lambda_2 - 1 & \lambda_3 - 1 \end{vmatrix},$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3$ – соответственно алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Δ_0 и $\tilde{\Delta}_0$.

Заметим, что необходимым условием для того, чтобы однородное уравнение (2) имело нетривиальное решение, являются условия $\lambda > 2, \mu > 1$. Поэтому если, например, выполняются условия

$$\lambda_1 < 2 < \lambda_2 < \lambda_3 \text{ и } \mu_1 < 1 < \mu_2 < \mu_3, \quad (7)$$

то в общее решение (6) из всевозможных значений произвольных констант $c_1, \tilde{c}_1$ нужно выбирать только их нулевые значения.

Далее, для сходимости интегралов в обратные операторы $\left(\Pi_a^x \right)_I^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y \right)_I^{-1}$, требуем, чтобы функция $f(x, y)$ в точке (a, c) обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o \left[(x-a)^{\gamma_3} (y-c)^{\gamma_4} \right], \quad \gamma_3 > \lambda_3 - 1, \quad \gamma_4 > \mu_3 - 1. \quad (8)$$

Подставляя найденное решение (6) в уравнение (1) легко определим, что в случае $c_1 = 0, \tilde{c}_1 = 0$ оно в действительности удовлетворяет этому уравнению.

Таким образом, доказано:

Теорема 1. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) ядра K_1 , K_2 и K_3 такие, что корни характеристических уравнений (4) и (5) являются вещественными и разными и они удовлетворяют условиям (7). Кроме того, пусть функция $f(x, y) \in C(R)$ и в точке (a, c) , $f(a, c) = 0$ с асимптотическим поведением (8).

Тогда неоднородное уравнение (1) в классе функций $U(x, y) \in C_{xy}^{21}$, обращающихся в нуль в точке (a, c) , всегда разрешимо и его общее решение даётся при помощи формулы (6) при $c_1 = 0$, $\tilde{c}_1 = 0$.

Теперь, пусть вместо условия (7) выполняется один из следующих всевозможных случаев:

- 1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$ и $\mu_1 < 1 < \mu_2 < \mu_3$;
- 2) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 2$ и $\mu_1 < 1 < \mu_2 < \mu_3$;
- 3) $\lambda_1 < 2 < \lambda_2 < \lambda_3$ и $\mu_1 < \mu_2 < 1 < \mu_3$;
- 4) $\lambda_1 < 2 < \lambda_2 < \lambda_3$ и $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < 1$;
- 5) $\lambda_1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$, $\mu_1 < \mu_2 < 1 < \mu_3$;
- 6) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 2$ и $\mu_1 < \mu_2 < 1 < \mu_3$;
- 7) $\lambda_1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$ и $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < 1$,

тогда в каждом из этих случаев обратные операторы $(\Pi_a^x)^{-1}$ и $(\Lambda_c^y)^{-1}$ не меняются, а только меняется число линейно независимых решений однородного уравнения (1) или число нулей оператора $\Pi_a^x \Lambda_c^y (\cdot)$. То есть, при выполнении каждого из этих случаев в общее решение однородного уравнения (1) нужно взять только нулевые значения у тех произвольных констант $c_i, \tilde{c}_j$ ($i, j = \overline{1, 3}$), индексы которых совпадают с индексами $\lambda_i < 2, \mu_j < 1$ ($i, j = \overline{1, 3}$). Отсюда, в каждом из перечисленных случаев, легко можно определить размерность пространства $\text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y)$ или число нулей оператора $\Pi_a^x \Lambda_c^y$:

- 1) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 2$;
- 2) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0$;
- 3) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 2$;
- 4) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0$;
- 5) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 1$;
- 6) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0$;
- 7) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0$.

II. Пусть корни характеристических уравнений (3) и (4) являются вещественными и равными, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Тогда формально общее решение однородного уравнения (2) имеет вид

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (x-a)^\lambda \ln^{i-1}(x-a) (y-c)^\mu \ln^{j-1}(y-c) c_{i+3} \tilde{c}_{j+3},$$

где $c_{i+3}, \tilde{c}_{j+3} (i, j = \overline{1, 3})$ – произвольные постоянные числа.

В этом случае также используя метод вариации произвольных постоянных, общее решение неоднородного уравнения (1) находим в таком виде:

$$U(x, y) = \left(\Pi_a^x \right)_H^{-1} \left(\Lambda_c^y \right)_H^{-1} f(x, y), \quad (9)$$

где обратные операторы $\left(\Pi_a^x \right)_H^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y \right)_H^{-1}$ соответственно определяются из следующих равенств

$$\begin{aligned} \left(\Pi_a^x \right)_H^{-1} (\cdot) &= -\frac{(\lambda-2)^3}{2P_2} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\lambda \times \\ &\times \left[(\lambda-2)(\lambda-1) \ln^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right) + 2(\lambda-2+\lambda-1) \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) + 2 \right] (\cdot) dt, \\ \left(\Lambda_c^y \right)_H^{-1} (\cdot) &= -\frac{(\mu-1)^3}{2q_2} \int_c^y \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^\mu \left[(\lambda-1)^2 \ln^2 \left(\frac{y-c}{s-c} \right) + 4(\lambda-1) \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) + 2 \right] (\cdot) ds. \end{aligned}$$

Заметим, что необходимым условием для того, чтобы однородное уравнение (2) имело нетривиальное решение, являются условия

$$\lambda > 2 \text{ и } \mu > 1. \quad (10)$$

С другой стороны, из характеристических уравнений (4) и (5) видно, что в случае вещественно-равных корней должны выполняться условия

$$3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ и } 3\mu = 2 \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}.$$

Отсюда, так как условия (10) не выполняются, то однородное уравнение (2) в этом случае имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (2) имеет единственное решение (9).

В этом случае для сходимости интегралов в обратные операторы $\left(\Pi_a^x \right)_H^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y \right)_H^{-1}$ требуем, чтобы функция $f(x, y)$ в точке (a, c) обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o \left[(x-a)^{\gamma_5} (y-c)^{\gamma_6} \right], \quad \gamma_5 > \lambda-1, \quad \gamma_6 > \mu-1. \quad (11)$$

Можно проверить, что при выполнении условия (11), полученное решение (9) в действительности принадлежит классу C_{xy}^{21} и оно удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, доказано:

Теорема 2. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) ядра K_1, K_2 и K_3 такие, что корни характеристических уравнений (4) и (5) являются вещественными и равными. Кроме того, пусть функция $f(x, y) \in C(R)$ и в точке (a, c) , $f(a, c) = 0$ с асимптотическим поведением (11).

Тогда неоднородное уравнение (1) в классе функций $U(x, y) \in C_{xy}^{21}$, обращающихся в нуль в точке (a, c) , всегда разрешимо и его единственное решение даётся при помощи формулы (9).

Заметим, что в случае вещественно-равных корней характеристических уравнений (4) и (5) оператор $\Pi_a^x \Lambda_c^y(\cdot)$ не имеет нулей т.е. $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0$.

III. Пусть среди корней характеристических уравнений (3) и (4) имеются комплексно-сопряженные корни, которые обозначим так: $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_{2,3} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ и $\mu_1 = \mu$, $\mu_{2,3} = \alpha_2 \pm i\beta_2$, тогда формально общее решение однородного уравнения (1) имеет вид

$$U(x, y) = \left((x-a)^\lambda c_7 + (x-a)^{\alpha_1} [\cos[\beta_1 \ln(x-a)] c_8 + \sin[\beta_1 \ln(x-a)] c_9] \right) \times \\ \times \left((y-c)^\mu \tilde{c}_7 + (y-c)^{\alpha_2} [\cos[\beta_2 \ln(y-c)] \tilde{c}_8 + \sin[\beta_2 \ln(y-c)] \tilde{c}_9] \right),$$

где $c_7, c_8, c_9, \tilde{c}_7, \tilde{c}_8, \tilde{c}_9$ – произвольные постоянные числа.

В этом случае решение неоднородного уравнения (1) находится в таком виде:

$$U(x, y) = \left(\Pi_a^x \right)_{III}^{-1} \left(\Lambda_c^y \right)_{III}^{-1} f(x, y), \quad (12)$$

где обратные операторы $\left(\Pi_a^x \right)_{III}^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y \right)_{III}^{-1}$ определяются так:

$$\left(\Pi_a^x \right)_{III}^{-1}(\cdot) = \frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{D_1 p_2} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\lambda (\cdot) dt - \\ - \frac{1}{D_1 p_2} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\alpha_1} \left[\alpha_3 \cos \left[\beta_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] + \beta_3 \sin \left[\beta_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right] (\cdot) dt, \\ \left(\Lambda_c^y \right)_{III}^{-1}(\cdot) = \frac{(\mu-1)^2}{D_2 q_2} \int_c^y \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^\mu (\cdot) ds - \\ - \frac{1}{D_2 q_2} \int_c^y \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^{\alpha_2} \left[\alpha_4 \cos \left[\beta_2 \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) \right] + \beta_4 \sin \left[\beta_2 \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) \right] \right] (\cdot) ds,$$

здесь

$$D_1 = \frac{2\alpha_1 - \lambda - 2}{(\alpha_1 - 2)^2 + \beta_1^2} - \frac{1}{\lambda - 2},$$

$$\alpha_3 = -(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2) + (\alpha_1 - 1)(\lambda - \alpha_1) + (\alpha_1 - 2)(\lambda - \alpha_1) + \beta_1^2,$$

$$\beta_3 = \frac{(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2)(\lambda - \alpha_1)\alpha_1}{\beta_1} + (\alpha_1 - 1)\beta_1 + (\alpha_1 - 2)\beta_1 - (\lambda - \alpha_1)\beta_1,$$

$$\beta_4 = -\frac{(\alpha_2 - 1)^2(\mu - \alpha_2)}{\beta_2} + (\alpha_2 - 1)\beta_2 + (\alpha_2 - 1)\beta_2 + (\mu - \alpha_2)\beta_2.$$

Здесь тоже необходимым условием для того, чтобы однородное уравнение (2) имело нетривиальное решение, являются условия

$$\lambda > 2, \alpha_1 > 2 \text{ и } \mu > 1, \alpha_2 > 1. \quad (13)$$

С другой стороны, из характеристического уравнения (4) и (5) видно, что в случае комплексно-сопряженных корней должны выполняться условия

$$\lambda + 2\alpha_1 = 3 \text{ и } \mu + 2\alpha_2 = 2. \quad (14)$$

Отсюда, так как условия (13) и (14) несовместимы, следует, что однородное уравнение (2) в этом случае тоже имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (2) имеет единственное решение вида (12).

Для сходимости интегралов в обратные операторы $(\Pi_a^x)_{III}^{-1}$ и $(\Lambda_c^y)_{III}^{-1}$ от функции $f(x, y)$ в точке (a, c) потребуем следующую асимптотику:

$$f(x, y) = o\left[(x-a)^{\gamma_7} (y-c)^{\gamma_8}\right], \quad \gamma_7 > \max\{\lambda, \alpha_1\} - 1, \quad \gamma_8 > \max\{\mu, \alpha_2\} - 1. \quad (15)$$

В этом случае тоже при выполнении условие (15) полученное решение (12) принадлежит классу C_{xy}^{21} и оно удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) ядра K_1 , K_2 и K_3 такие, что корни характеристических уравнений (4) и (5) являются комплексно-сопряженными. Кроме того, пусть функция $f(x, y) \in C(R)$ и в точке (a, c) , $f(a, c) = 0$ с асимптотическим поведением (15).

Тогда неоднородное уравнение (1) в классе функций $U(x, y) \in C_{xy}^{21}$, обращающихся в нуль в точке (a, c) , всегда разрешимо и его единственное решение дается при помощи формулы (13).

Пусть вместо условия (13) выполняется одно из условий:

- 1) $\lambda < 2, \alpha_1 > 2$ и $\mu < 1, \alpha_2 > 1$;
- 2) $\lambda < 2, \alpha_1 > 2$ и $\mu > 1, \alpha_2 < 1$;
- 3) $\lambda > 2, \alpha_1 < 2$ и $\mu < 1, \alpha_2 > 1$;
- 4) $\lambda > 2, \alpha_1 < 2$ и $\mu > 1, \alpha_2 < 1$;
- 5) $\lambda < 2, \alpha_1 < 2$ и $\mu < 1, \alpha_2 > 1$;
- 6) $\lambda < 2, \alpha_1 < 2$ и $\mu > 1, \alpha_2 < 1$;
- 7) $\lambda > 2, \alpha_1 < 2$ и $\mu < 1, \alpha_2 < 1$;
- 8) $\lambda < 2, \alpha_1 > 2$ и $\mu < 1, \alpha_2 < 1$;
- 9) $\lambda < 2, \alpha_1 < 2$ и $\mu < 1, \alpha_2 < 1$.

В этих случаях также легко определим дефектные числа оператора $\Pi_a^x \Lambda_c^y$:

- 1) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 4$;
- 2) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 2$;
- 3) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 2$;
- 4) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 1$;
- 5) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0$;
- 6) $\dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0$;

$$7) \dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0;$$

$$8) \dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0;$$

$$9) \dim \text{Ker}(\Pi_a^x \Lambda_c^y) = 0.$$

Отсюда видно, что в пяти случаях однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение. В остальных случаях однородное уравнение (1) имеет нетривиальные решения, и поэтому общее решение неоднородного уравнения (1) содержит произвольные константы.

Замечание 1. Соответствующие теоремы легко можно получить в других возможных случаях корней характеристических уравнений (4) и (5), т.е., например: 1) корни уравнения (4) являются вещественно разными, а корни уравнения (5) являются вещественно равными; 2) корни уравнения (4) являются вещественно разными, а корни уравнения (5) являются комплексно-сопряженными; 3) корни уравнения (4) являются вещественно равными, а корни уравнения (5) являются вещественно разными и т. д.

Примеры

Приведём примеры:

Пример 1. Рассмотрим следующий пример:

$$U_{xy}''(x, y) + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \frac{U_y'(t, y)}{(t-a)^2} dt + \int_c^y \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{27} \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) \right] \frac{U_x'(x, s)}{(s-c)^2} ds + \\ + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \frac{dt}{(t-a)^2} \int_c^y \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{27} \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) \right] \frac{U(t, s)}{(s-c)^2} ds = (x-a)^2 (y-c). \quad (16)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\left(\lambda + \frac{0}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-2} \right) \left(\mu + \frac{\frac{1}{3}}{\mu-1} + \frac{\frac{1}{27}}{(\mu-1)^2} \right) = 0.$$

Отсюда $(\lambda-1)^3 \left(\mu - \frac{2}{3} \right)^3 = 0$. То есть характеристическое уравнение имеет два

трёхкратных корня $\lambda = 1, \mu = \frac{2}{3}$. Таким образом, так как условия $\lambda > 2, \mu > 1$ не выполняются, то согласно пункту II, однородное уравнение (16) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение имеет единственное решение, которое даётся по формуле

$$U(x, y) = - \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \left[\ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) - 1 \right] \times \\ \times \int_c^y \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{18} \ln^2 \left(\frac{y-c}{s-c} \right) - \frac{2}{3} \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) + 1 \right] (t-a)^2 (s-c) ds.$$

Легко можно проверить, что найденное решение удовлетворяет уравнению (16).

Пример 2. Рассмотрим другой пример:

$$U''_{xy}(x, y) + \int_a^x \left[-30 + 12 \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{U'_y(t, y)}{(t-a)^2} dt + \int_c^y \left[-4 + 6 \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) \right] \frac{U'_x(x, s)}{(s-c)^2} ds + \\ + \int_a^x \left[-30 + 12 \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{dt}{(t-a)^2} \int_c^y \left[-4 + 6 \ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) \right] \frac{U(t, s)}{(s-c)^2} ds = (x-a)^6 (y-c)^3. \quad (17)$$

Решение. Характеристическое уравнение в этом случае примет такой вид:

$$\left(\lambda - \frac{30}{\lambda-1} + \frac{12}{\lambda-2} \right) \left(\mu - \frac{4}{\mu-1} + \frac{6}{(\mu-1)^2} \right) = 0,$$

$$\text{или} \quad (\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+4)(\mu+2)(\mu^2-4\mu+5) = 0.$$

Отсюда имеем такие корни: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$, $\mu_1 = -2$, $\mu_{2,3} = 2 \pm i$. Видно, что для этих корней выполняются условия $\lambda_1 < 2 < \lambda_2 < \lambda_3$, $\mu_1 < 1 < \operatorname{Re}\{\mu_2, \mu_3\}$. Таким образом, согласно пунктам I и III, общее решение однородного уравнения (17) имеет вид

$$U_{oo}(x, y) = \left((x-a)^3 c_2 + (x-a)^4 c_3 \right) \left((y-c)^2 \cos[\ln(y-c)] \tilde{c}_2 + (y-c)^2 \sin[\ln(y-c)] \tilde{c}_3 \right),$$

где $c_2, c_3, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ – произвольные постоянные числа. Видно, что правая часть уравнения (17) по переменной x удовлетворяет условию (8), а по переменной y – условию (15) и поэтому частное решение неоднородного уравнения (17) даётся по формуле

$$U_{\text{чн}}(x, y) = \left(\Pi_a^x \right)_I^{-1} \left(\Lambda_c^y \right)_{\text{III}}^{-1} (x-a)^6 (y-c)^3,$$

где обратные операторы $\left(\Pi_a^x \right)_I^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y \right)_{\text{III}}^{-1}$ соответственно определяются из следующих равенств

$$\left(\Pi_a^x \right)_I^{-1} (\cdot) = -\frac{1}{12\Delta_0} \int_a^x \left[2\Delta_1 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^4 + 6\Delta_2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^3 + 12\Delta_3 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^4 \right] (\cdot) dt, \\ \left(\Lambda_c^y \right)_{\text{III}}^{-1} (\cdot) = \frac{3}{2D_2} \int_c^y \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^{-2} (\cdot) ds - \\ - \frac{1}{6D_2} \int_c^y \left(\frac{y-c}{s-c} \right)^2 \left[\alpha_4 \cos \left[\ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) \right] + \beta_4 \sin \left[\ln \left(\frac{y-c}{s-c} \right) \right] \right] (\cdot) ds.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (17) определяется по формуле

$$U(x, y) = \left((x-a)^3 c_2 + (x-a)^4 c_3 \right) \times \\ \times \left((y-c)^2 \cos[\ln(y-c)] \tilde{c}_2 + (y-c)^2 \sin[\ln(y-c)] \tilde{c}_3 \right) + \\ + \left(\Pi_a^x \right)_I^{-1} \left(\Lambda_c^y \right)_{\text{III}}^{-1} (x-a)^6 (y-c)^3 \equiv E_{1,3}^+ \left[c_1, c_2, c_3, 0, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, (x-a)^6 (y-c)^3 \right].$$

В этом случае тоже легко проверяется, что найденное решение удовлетворяет уравнению (17).

Заключение

В заключение приведём некоторые отличительные свойства уравнения (1) от раньше рассмотренных уравнений типа Вольтерра:

1. Независимо от нефредгольмовости ядра уравнения (1) найдено решение этого уравнения в классе функций, обращающихся в нуль в точке (a, c) , в явном виде.

2. Выяснено, что решение уравнения (1) в общем случае содержит четыре произвольных постоянных. Решение этого уравнения в других случаях может содержать либо 1, либо 2 произвольных констант.

3. Выделяется случай, когда уравнение (1) имеет единственное решение. Этот случай совпадает с теорией интегро-дифференциальных уравнений с регулярными ядрами.

4. Согласно общей теории, общее решение регулярных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка может содержать не более двух произвольных функций или констант. Отсюда выходит, что эффект степенной и логарифмической сингулярности ядра уравнения (1) действует на число произвольных констант в общем решении и это число для уравнения (1) достигает четырёх.

5. Выяснено, что степенная особенность ядра более сильная, чем логарифмическая. Эти особенности действуют на классах функций, обращающихся в нуль в точке (a, c) с определённой асимптотикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. Какхция В.М., Хачатрян А.Х. Об аналитическо-численном решении одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в эконометрике // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 7. С. 1108–1112. <https://doi.org/10.7868/S0044466913070144>.
3. Векуа И.Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // Прикл. матем. и мех. 1945. Т. 9. № 2. С. 143–150.
4. Магнарадзе Л.Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолёта // Сообщ. АН Груз. ССР. 1942. Т. 3. № 6. С. 503–508.
5. Годунов С.К., Султангазин У.М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Усп. мат. наук. 1971. Т. 26. № 3(159). С. 3–51.
6. Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С. Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 39. С. 36–65.
7. Oton X.R. *Integro-Differential Equations: Regularity Theory and Pohozaev Identities*. Barcelona. 2014. 301 p.
8. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Задача с обратным временем для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения с диагональным вырождением ядра высокого порядка // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2016. Т. 80, №2. С. 3–15. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8335>.
9. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. №1(39). С. 42–52. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/39/5>.
10. Турсунов Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют полюсы // Вестник Томского

- государственного университета. Математика и механика. 2019. № 59. С. 16–28. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/59/3>.
11. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Начально-краевая задача для нелокального сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 6. С. 1042–1047.
 12. Качалов В.И. О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 4. С. 64–71. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466917040056>.
 13. Бесова М.И. Об одном методе решения сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. № 2. С. 45–55.
 14. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. №1. С. 58–66.
 15. Бьянка К., Феррара М., Guerrini L. Асимптотический предел интегро-дифференциального уравнения, моделирующего сложные системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2014. Т. 78, №6. С. 49–64. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8066>.
 16. Бураго П.Н., Эгамов А.И. О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // Журнал СВМО. 2019. Т. 21, № 4. С. 413–429. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904>.
 17. Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Курочкин С.В. Сингулярная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 10. С. 1812–1846.
 18. Асхабов С.Н. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гилберта и монотонной нелинейностью // Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19. № 3. С. 11–20.
 19. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе: Деваштич. 2007. 221 с.
 20. Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Ретин О.А. Об одном классе двумерных сопряженных интегральных уравнений вольтерровского типа // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 1–10.
 21. Зарипов С.К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегродифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 24–35. DOI: <http://dx.doi.org/10.17223/19988621/46/4>.
 22. Зарипов С.К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 2. С. 236–248. DOI: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1515>.
 23. Hatmoud A.A., Ghadle K.P. The approximate solutions of fractional Volterra–Fredholm integro-differential equations by using analytical techniques // Probl. Anal. Issues Anal. 2018. V. 7(25). No. 1. P. 41–58. DOI: <https://doi.org/10.15393/j3.art.2018.4350>.
 24. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 17. С. 77–85.
 25. Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н. О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами // Математические заметки. 2014. Т. 96. № 5. С. 773–789. DOI: <http://dx.doi.org/10.4213/mzml10220>.

Zarifzoda S.K., Odinaev R.N.(2020) INVESTIGATION OF SOME CLASSES OF SECOND ORDER PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A POWER-LOGARITHMIC SINGULARITY IN THE KERNEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 40–54

DOI 10.17223/19988621/67/4

Keywords: integro-differential equation, power singularity, logarithmic singularity, integral representations, characteristic equation.

For a class of second-order partial integro-differential equations with a power singularity and logarithmic singularity in the kernel, integral representations of the solution manifold in terms of arbitrary constants are obtained in the class of functions vanishing with a certain asymptotic behavior. Although the kernel of the given equation is not a Fredholm type kernel, the solution of the studied equation in a class of vanishing functions is found in an explicit form. We represent a second-order integro-differential equation as a product of two first-order integro-differential operators. For these one-dimensional integro-differential operators, in the cases when the roots of the corresponding characteristic equations are real and different, real and equal and complex and conjugate, the inverse operators are found. It is found that the presence of power singularity and logarithmic singularity in the kernel affects the number of arbitrary constants in the general solution. This number, depending on the roots of the corresponding characteristic equations, can reach nine. Also, the cases when the given integro-differential equation has a unique solution are found. The correctness of the obtained results with the help of the detailed solutions of concrete examples are shown. The method of solving the given problem can be used for solving model and nonmodel integro-differential equations with a higher order power singularity and logarithmic singularity in the kernel.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 45E99, 45K99, 45D99

Sarvar K. ZARIFZODA (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mechanics, Tajik National University, Dushanbe, Republic of Tajikistan). E-mail: sarvar8383@list.ru

Raim N. ODINAEV (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Tajik National University, Tajik National University, Dushanbe, Republic of Tajikistan). E-mail: raim_odinaev@mail.ru

REFERENCES

1. Volterra V. (2005) *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. Dover.
2. Kakhktsyan V.M., Khachatryan A.Kh. (2013) Analytical–numerical solution of a nonlinear integrodifferential equation in econometrics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 53(7). pp. 933–936. DOI: 10.1134/S0965542513070130.
3. Vekua I.N. (1945) Ob integro-differentsial'nom uravnenii Prandtl'ya [On the Prandtl integro-differential equation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 9(2). pp. 143–150.
4. Magnaradze L.G. (1942) Ob odnom novom integral'nom uravnenii teorii kryla samoljota [On a new integral equation of the aircraft wing theory]. *Soobshcheniya Akademii nauk Gruzinskoy SSR*. 3(6). pp. 503–508.
5. Godunov S.K., Sultangazin U.M. (1971) O diskretnykh modelyakh kineticheskogo uravneniya Bol'tsmana [On discrete models of the Boltzmann kinetic equation]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 26:3(159). pp. 3–51.
6. Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A.S. (2011) Spektral'nyy analiz i korrektnaya razreshimost' abstraktnykh integro-differentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike [Spectral analysis and correct solvability of abstract integro-differential

- equations arising in thermophysics and acoustics]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nyye napravleniya*. 39. pp. 36–65.
7. Oton X.R. (2014) Integro-differential equations: Regularity theory and Pohozaev identities. Dissertation. Universitat Politècnica de Catalunya.
 8. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. (2016) A problem with inverse time for a singularly perturbed integro-differential equation with diagonal degeneration of the kernel of high order. *Izvestiya: Mathematics*. 80(2). p. 285.
 9. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. (2016) Asimptoticheskoye razlozheniye resheniya zadachi Dirikhle dlya kol'tsa s osobennost'yu na granitse [Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity at the boundary]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 42–52. DOI: 10.17223/19988621/39/5.
 10. Tursunov D.A. (2019) Asimptotika resheniya singulyarno vozmushchennoy zadachi Koshi v sluchaye smeny ustoychivosti, kogda sobstvennyye znacheniya imeyut polyusy [Asymptotics of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem in the case of a change in the stability, when the eigenvalues have poles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 59. pp. 16–28. DOI: 10.17223/19988621/59/3.
 11. Nefedov N.N., Nikitin A.G. (2012) The initial boundary value problem for a nonlocal singularly perturbed reaction–diffusion equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 52(6). pp. 926–931.
 12. Kachalov V.I. (2017) On the holomorphic regularization of singularly perturbed systems of differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 57(4). pp. 653–660. DOI: 10.1134/S0965542517040054.
 13. Besova M.I. (2019) Ob odnom metode resheniya singulyarno vozmushchennykh krayevykh zadach [On a method of solving singularly perturbed boundary value problems]. *Differentsial'nyye uravneniya i protsessy upravleniya*. 2. pp. 45–55.
 14. Yuldashev T.K. (2013) Obratnaya zadacha dlya odnogo nelineynogo integro-differentsial'nogo uravneniya tret'yego poryadka. [Inverse problem for a nonlinear integro-differential equation of the third order]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*. 1. pp. 58–66.
 15. Bianca C., Ferrara M., Guerrini L. (2014) The asymptotic limit of an integro-differential equation modelling complex systems. *Izvestiya: Mathematics*. 78(6). pp. 1105–1119.
 16. Burago P.N., Egamov A.I. (2019) O svyazi resheniy nachal'no-krayevykh zadach dlya nekotorykh klassa integro-differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi i lineynogo giperbolicheskogo uravneniya [On the connection between solutions of initial boundary-value problems for a class of integro-differential partial differential equations and a linear hyperbolic equation]. *Zhurnal SVMO*. 21(4). pp. 413–429. DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.
 17. Belkina T.A., Konyukhova N.B., Kurochkin S.V. (2012) Singular boundary value problem for the integrodifferential equation in an insurance model with stochastic premiums: Analysis and numerical solution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 52(10). pp. 1384–1416.
 18. Askhabov S.N. (2017) Singulyarnyye integro-differentsial'nyye uravneniya s yadrom Gilberta i monotonnoy nelineynost'yu [Singular integro-differential equations with a Hilbert kernel and monotonic nonlinearity]. *Vladikavkazskiy matematicheskii zhurnal*. 19(3). pp. 11–20.
 19. Radzhabov N. (2007) *Integral'nyye uravneniya tipov Vol'terra s fiksirovannymi granichnymi i vnutrennimi singulyarnymi i sverkh-singulyarnymi yadrami i ikh prilozheniya*. [Volterra type integral equations with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their applications]. Dushanbe: Devashtich.
 20. Radzhabova L.N., Radzhabov N., Repin O.A. (2011) On a class of two-dimensional adjoint integral equations of Volterra type. *Differential Equations*. 47(3). pp. 1333–1343.
 21. Zaripov S.K. (2017) Postroyeniye analoga teoremy Fredgol'ma dlya odnogo klassa model'nykh integrodifferentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka s singulyarnoy tochkoy v yadre [Construction of an analog of the Fredholm theorem for a class of model first order in-

- tegro-differential equations with a singular point in the kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 24–35. DOI: 10.17223/19988621/46/4.
22. Zaripov S.K. (2017) Postroyeniye analoga teoremy Fredgol'ma dlya odnogo klassa model'nykh integro-differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka s logarifmicheskoy osobennost'yu v yadre [Construction of analog of a Fredholm theorem for a class of first order model integro-differential equation with a logarithmic singularity in the kernel]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki*. 21(2). pp. 236–248. DOI: 10.14498/vsgtu1515.
23. Hamoud A.A., Ghadle K.P. (2018) The approximate solutions of fractional Volterra–Fredholm integro-differential equations by using analytical techniques. *Issues of Analysis*. 7(1). pp. 41–58. DOI: 10.15393/j3.art.2018.4350.
24. Falaleev M.V. (2016) Vyrozhdannyye integro-differentsial'nyye uravneniya tipa svertki v banakhovykh prostranstvakh [Degenerate integro-differential convolution type equations in Banach spaces]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika*. 17. pp. 77–85.
25. Sidorov N.A., Sidorov D.N. (2014) On the solvability of a class of Volterra operator equations of the first kind with piecewise continuous kernels. *Mathematical Notes*. 96(5). pp. 811–826. DOI: 10.4213/mzm10220.

Received: January 24, 2020

Ц.Д. Норбосамбуев, Е.А. Тимошенко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ 3-ХОРОШИХ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ¹

Исследуются кольца формальных матриц со значениями в данном кольце и с матрицей множителей, состоящей из 0 и 1. При указанных ограничениях кольцо формальных матриц может быть представлено как расщепляющееся расширение одного своего нильпотентного идеала с помощью произведения обычных колец матриц, а вопрос об обратимости формальной матрицы сводится к вопросу об обратимости обычных матриц над кольцом. При некоторых дополнительных условиях, наложенных на матрицу множителей, удается воспользоваться известной теоремой Хенриксена и доказать, что всякий элемент кольца формальных матриц представляет собой сумму трех обратимых элементов этого кольца. В конце мы приводим примеры таких колец формальных матриц порядка 4 и 5.

Ключевые слова: *кольцо, хорошее кольцо, кольцо формальных матриц.*

В [1] и [2] рассматривался класс колец формальных матриц, для которых было описано строение их групп автоморфизмов. В данной статье показано, что кольца формальных матриц этого (и даже в некотором смысле более широкого) класса будут 3-хорошими.

Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$. Напомним [3], что элемент кольца называется k -хорошим, если он представим в виде суммы k обратимых элементов этого кольца; кольцо называют k -хорошим, если все его элементы k -хорошие. Изучению колец, которые аддитивно порождаются своими обратимыми элементами, посвящено большое количество работ. Хороший обзор исследований по этой теме дан в статье [4].

Далее R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей, $M(n, R)$ – кольцо всех $(n \times n)$ -матриц над R .

1. Кольца формальных матриц

Изучению произвольных колец формальных матриц также посвящено множество работ (см., например, [1, 2, 5–12]).

Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц берут свое начало в работах японского математика К. Мориты. В 1958 году в статье [8] он ввел объект, который позже был назван *контекстом Мориты*.

Контекст Мориты – это набор $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$, состоящий из произвольных колец R и S , бимодулей ${}_R M_S$ и ${}_S N_R$ и определенным образом связанных между собой бимодульных гомоморфизмов φ и ψ . Морита пришел к нему при изучении контравариантных функторов D_1 и D_2 между категориями модулей $\text{Mod-}R$ и $\text{Mod-}S$, таких, что выполняются условия $D_1 D_2 \approx \text{Id}_{\text{Mod-}R}$ и $D_2 D_1 \approx \text{Id}_{\text{Mod-}S}$ (позже им было

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых – докторов наук МД-108.2020.1.

доказано, что на самом деле это функторы Hom). Контексты Мориты интересны и сами по себе, и как очень полезный инструмент обобщения в теории колец. Эта тема заслуженно привлекает внимание алгебраистов уже более полувека. Подробнее с историей развития данного направления исследований можно познакомиться в обзорной статье [9]; в ней же можно найти ссылки на наиболее важные работы по теме.

По данному контексту Мориты всегда можно построить кольцо матриц вида

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \middle| r \in R, m \in M, n \in N, s \in S \right\},$$

называемое *кольцом контекста Мориты* или *кольцом формальных матриц*. Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц естественным образом можно расширить на случай произвольного порядка ≥ 2 .

Нас интересует лишь один частный случай – кольца формальных матриц со значениями в данном кольце R . Впервые такие кольца появились в работе П.А. Крылова [7]. Они устроены следующим образом.

Пусть K – кольцо формальных матриц порядка $n \geq 2$ (см. [5, 6]), в котором все стоящие на главной диагонали кольца $R_1, R_2, \dots, R_n$ совпадают с некоторым кольцом R , а в качестве R_i - R_j -бимодулей M_{ij} берется R - R -бимодуль ${}_R R_R$. Далее, пусть $\varphi_{ijk} : R \otimes_R R \rightarrow R$, где $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, – бимодульные гомоморфизмы, определяющие K (в произвольных кольцах формальных матриц отображение φ_{ijk} представляет собой гомоморфизм $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}$). Обозначим $s_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$ для любых $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда $x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = x \varphi_{ijk}(1 \otimes 1) y = x s_{ijk} y$ (здесь мы считаем, что элементы x и y стоят в своих матрицах в позициях (i, j) и (j, k) соответственно). Справедливы также равенства $x s_{ijk} = \varphi_{ijk}(x \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes x) = s_{ijk} x$, т.е. s_{ijk} – центральный элемент кольца R . В итоге мы получаем, что $x \circ y = s_{ijk} x y$. Далее, несложно убедиться в том, что $s_{ijj} = 1 = s_{ijj}$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Полагая $x = y = z = 1$ в соотношении ассоциативности $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, получаем, что $s_{ijl} \cdot s_{jkl} = s_{ijk} \cdot s_{ikl}$ для всех $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Полученные равенства

$$s_{ijj} = 1 = s_{ijj} \text{ и } s_{ijl} \cdot s_{jkl} = s_{ijk} \cdot s_{ikl} \quad (1)$$

будем называть *основными тождествами*.

Пусть теперь $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, 2, \dots, n\}$ – некоторое множество центральных элементов кольца R , удовлетворяющих равенствам (1). Для произвольных индексов $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ можно задать бимодульный гомоморфизм $\varphi_{ijk} : R \otimes_R R \rightarrow R$, полагая $x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = s_{ijk} x y$. Указанные гомоморфизмы определяют кольцо формальных матриц порядка n . Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между кольцами рассматриваемого вида и множествами центральных элементов, удовлетворяющих основным тождествам (1). Подобные кольца формальных матриц называем *кольцами формальных матриц со значениями в данном кольце R* . Будем обозначать их через $M(n, R, \Sigma)$; множество Σ будем называть *системой множителей кольца $M(n, R, \Sigma)$* , а сами элементы s_{ijk} – *множителями кольца $M(n, R, \Sigma)$* . Легко убедиться, что если кольцо R коммутативно, то $M(n, R, \Sigma)$ представляет собой R -алгебру.

Для произвольных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ из $M(n, R, \Sigma)$ имеем

$$AB = C = (c_{ij}), \text{ где } c_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ikj} a_{ik} b_{kj}.$$

Если все множители s_{ijk} равны 1, то, как несложно видеть, получается кольцо обычных матриц $M(n, R)$.

Полагая $k = i$ в основных тождествах (1), мы получаем равенство $s_{iji} = s_{ijl} \cdot s_{jil}$. Значит, $s_{jij} = s_{jil} \cdot s_{ijl}$ и поэтому $s_{iji} = s_{jij}$. Теперь, взяв $l = j$ в тождествах (1), получаем $s_{jki} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}$. Следовательно, $s_{iji} = s_{ijl} \cdot s_{lji}$. Таким образом, справедливы соотношения $s_{iji} = s_{jij} = s_{ijl} \cdot s_{jil} = s_{lij} \cdot s_{lji}$. Из них можно при помощи перестановки индексов получить следующие тождества:

$$\begin{aligned} s_{iji} &= s_{jij} = s_{ijk} \cdot s_{jik} = s_{kij} \cdot s_{kji}, \\ s_{jki} &= s_{kjk} = s_{jki} \cdot s_{kji} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}, \\ s_{kik} &= s_{iki} = s_{kij} \cdot s_{ikj} = s_{jki} \cdot s_{jik}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если s_{iji} и s_{jki} – делители нуля, то, исходя из (2), элементы s_{jik} и s_{jki} тоже будут делителями нуля, а значит, s_{kik} – делитель нуля. Таким образом, справедлив следующий факт:

Лемма 1. Для множителей s_{iji} , s_{jki} и s_{kik} (где $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$) из системы Σ имеет место ровно одна из следующих возможностей:

- 1) все три элемента – делители нуля;
- 2) какие-то два из трех элементов – делители нуля, а третий – делитель нуля;
- 3) все три элемента – делители нуля. ■

С данным кольцом формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$ мы можем связать матрицу множителей $S = (s_{iji})$. Из (2) следует, что матрица S является симметрической.

2. Один класс 3-хороших колец формальных матриц над данным кольцом

В работах [1] и [2] был выделен один класс алгебр формальных матриц, у которых оказалось возможным дать описание их групп автоморфизмов. Это достигалось за счет того, что алгебра формальных матриц представлялась как расщепляющееся расширение нильпотентного идеала I с помощью прямой суммы обычных колец матриц. Ниже мы рассмотрим близкий класс колец формальных матриц, отказавшись от требования коммутативности R и ограничения $I \cdot I = 0$.

Существует несколько способов получения систем множителей из уже имеющихся для колец формальных матриц со значениями в данном кольце. Приведем один такой способ. Пусть $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, 2, \dots, n\}$ – система множителей кольца формальных матриц $K = M(n, R, \Sigma)$, а τ – произвольная подстановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Как определить действие подстановки τ на системе множителей Σ так, чтобы получившееся множество оказалось системой множителей для некоторого кольца K' ?

Для матрицы $A = (a_{ij})$ из кольца $K = M(n, R, \Sigma)$ положим $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$; таким образом, мы считаем, что в матрице τA в позиции (i, j) стоит элемент $a_{\tau(i)\tau(j)}$. Далее рассмотрим множество $\{s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)} \mid i, j, k = 1, 2, \dots, n\}$. Можно заметить, что данное множество тоже будет системой множителей, поскольку оно удовлетворяет тождествам (1). Обозначим получившуюся новую систему множителей через $\tau\Sigma$. Для этой системы можно построить новое кольцо формальных матриц $\tau K = M(n, R, \tau\Sigma)$. Нетрудно видеть, что сопоставление $A \rightarrow \tau A$, где $A = (a_{ij})$ и $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$, осуществляет изоморфизм между кольцами K и τK .

Далее будем рассматривать более узкий класс колец формальных матриц: нас интересуют только такие кольца $K = M(n, R, \Sigma)$, у которых система множителей Σ может содержать лишь 1 и 0.

Введем на множестве чисел $\{1, 2, \dots, n\}$ бинарное отношение « $\sim$ », полагая $i \sim j$ тогда и только тогда, когда множитель s_{ji} равен единице. Из леммы 1 следует, что ситуация $s_{ji} = s_{kj} = 1$, $s_{ki} = 0$ невозможна, а значит, это бинарное отношение является отношением эквивалентности.

Построим подстановку τ следующим образом: в верхней строке расположим числа $1, 2, \dots, n$ в порядке возрастания, а нижнюю строку составим из классов эквивалентности отношения « $\sim$ », записанных в произвольном порядке (внутри классов входящие в них индексы располагаем также в произвольном порядке). Тогда в матрице $\tau S = (s_{\tau(i)\tau(j)})$ на главной диагонали стоят квадратные блоки, состоящие только из единиц; эти блоки находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности относительно « $\sim$ » (порядок такого блока равен числу элементов в соответствующем классе эквивалентности). Все позиции в матрице τS вне рассматриваемых блоков заняты нулями.

Сопоставление $A \rightarrow \tau A$, где $A \in K$, задает изоморфизм между кольцами K и τK . Таким образом, мы можем с самого начала считать, что матрица множителей S кольца K имеет указанный выше блочный вид. Пусть количество блоков на главной диагонали матрицы S равно m и эти блоки имеют порядки $n_1, n_2, \dots, n_m$. Ясно, что $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

Нам понадобится следующий простой факт:

Лемма 2. а) Если индексы $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ таковы, что $i \sim j$, то $s_{ijk} = 1 = s_{kij}$ для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

б) Если индексы $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ таковы, что $i \sim j$ и k не эквивалентно i и j , то справедливо равенство $s_{ikj} = 0$.

Доказательство. Воспользуемся тождествами (2).

а) Поскольку $s_{ji} = 1$, то с учетом первого из тождеств мы имеем $s_{ijk} \neq 0$ и $s_{kij} \neq 0$, отсюда $s_{ijk} = 1 = s_{kij}$.

б) Так как $1 = s_{ji} = s_{kij} \cdot s_{kji}$, то $s_{kij} \neq 0$, т.е. $s_{kij} = 1$. Тогда $0 = s_{kik} = s_{kij} \cdot s_{ikj} = s_{ikj}$. ■

На главной диагонали каждой матрицы $A \in K$ мы выделим блоки $A_1, A_2, \dots, A_m$ того же порядка, что и блоки на главной диагонали матрицы S (и в той же последовательности). Тогда, как видно из пункта а) леммы 2, для всякого фиксированного v блоки A_v всех матриц из K образуют кольцо обычных матриц $K_v = M(n_v, R)$.

Через I обозначим множество всех матриц $A \in K$, у которых описанные выше блоки $A_1, A_2, \dots, A_m$ целиком состоят из нулей; через L – множество всех матриц $A \in K$, у которых все элементы, находящиеся за пределами блоков $A_1, A_2, \dots, A_m$, равны 0. Легко видеть, что L – подкольцо кольца K , изоморфное прямой сумме $K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m$ (далее будем отождествлять L с этой прямой суммой). Заметим также, что $K = L \oplus I$, т.е. всякая матрица $A \in K$ единственным образом представляема в виде суммы $A = C + D$, где $C \in L$ и $D \in I$.

Предложение 3. Множество I является идеалом кольца K .

Доказательство. Ясно, что $(I, +)$ является подгруппой в $(K, +)$. Зафиксируем произвольные матрицы $A = (a_{ij}) \in I$ и $X = (x_{ij}) \in K$.

Допустим, что $XA \notin I$. Тогда существуют индексы $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, такие, что позиция (i, j) находится в одном из блоков $A_1, A_2, \dots, A_m$ и элемент матрицы XA , стоящий в позиции (i, j) , отличен от 0. В свою очередь, это означает, что для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено $s_{ikj} x_{ik} a_{kj} \neq 0$. Из неравенства $a_{kj} \neq 0$ следует, что индексы j и k не эквивалентны. Так как $i \sim j$, то ввиду пункта б) леммы 2 получаем $s_{ikj} = 0$, что невозможно. Итак, I – левый идеал в K .

Если $AX \notin I$, то аналогичным образом показывается, что существуют индексы $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, такие, что $i \sim j$ и $s_{ikj} a_{ik} x_{kj} \neq 0$. Из $a_{ik} \neq 0$ вытекает, что индексы i

и k не эквивалентны. Поэтому в силу леммы 2 вновь имеем $s_{ikj} = 0$, что приводит к противоречию. Следовательно, I – правый идеал в K . ■

Предложение 4. Справедливо равенство $I^m = 0$.

Доказательство. Допустим, что выполняется $B_1, B_2, \dots, B_m \in I$ и $B_1 B_2 \dots B_m \neq 0$. В силу дистрибутивности операции умножения относительно сложения найдутся индексы $i_0, i_1, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, такие, что для элементов $b_1, b_2, \dots, b_m \in R$, стоящих в матрицах $B_1, B_2, \dots, B_m$ в позициях $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{m-1}, i_m)$ соответственно, выполнено $b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m \neq 0$ (тогда, в частности, при всех $q \in \{1, 2, \dots, m\}$ имеем $b_q \neq 0$). Поскольку количество классов эквивалентности в $\{1, 2, \dots, n\}$ равно m , то найдутся числа u и v , для которых $0 \leq u < v \leq m$ и $i_u \sim i_v$. Из $b_v \neq 0$ следует, что i_{v-1} не эквивалентно i_v и $u < v - 1$.

Применяя пункт б) леммы 2 к $i = i_u, j = i_v, k = i_{v-1}$, мы получаем, что множитель $w = s_{i_u i_{v-1} i_v}$ равен 0. Тогда $b_{u+1} \circ \dots \circ b_{v-1} \circ b_v = w(b_{u+1} \circ \dots \circ b_{v-1})b_v = 0$, что противоречит условию $b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m \neq 0$. Таким образом, $I^m = 0$. ■

Мы получили, что кольцо K представляет собой расщепляющееся расширение нильпотентного идеала I с помощью кольца L .

Теорема 5. Пусть $A \in K$ и $A = C + D$, где $C \in L$ и $D \in I$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) Матрица A обратима в кольце K .
- 2) Матрица C обратима в кольце L .

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Запишем $A^{-1} = C' + D'$, где $C' \in L$ и $D' \in I$. Заметим, что $CC' + (CD' + DC' + DD') = AA^{-1} = E \in L$ (здесь E – единичная матрица). Так как L и I являются соответственно подкольцом и идеалом в K , то $CD' + DC' + DD' \in I$ и $CC' \in L$, а значит, $CC' = E$. Аналогично доказывается, что $C'C = E$. Следовательно, C – обратимая в L матрица.

2) $\Rightarrow$ 1). Положим $B = C^{-1} - C^{-1}(DC^{-1}) + C^{-1}(DC^{-1})^2 - \dots + (-1)^{m-1}C^{-1}(DC^{-1})^{m-1}$. Поскольку матрицы DC^{-1} и $C^{-1}D$ лежат в I , то $(DC^{-1})^m = 0 = (C^{-1}D)^m$ и, значит,

$$AB = AC^{-1}(E - DC^{-1} + (DC^{-1})^2 - \dots + (-1)^{m-1}(DC^{-1})^{m-1}) = \\ = (E + DC^{-1})(E - DC^{-1} + (DC^{-1})^2 - \dots + (-1)^{m-1}(DC^{-1})^{m-1}) = E,$$

$$BA = (E - C^{-1}D + (C^{-1}D)^2 - \dots + (-1)^{m-1}(C^{-1}D)^{m-1})C^{-1}A = \\ = (E - C^{-1}D + (C^{-1}D)^2 - \dots + (-1)^{m-1}(C^{-1}D)^{m-1})(E + C^{-1}D) = E.$$

Следовательно, матрица A обратима в K . ■

В прямой сумме $L = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m$ каждое K_v – это обычное кольцо матриц, $K_v = M(n_v, R)$. С учетом результатов М. Хенриксена [13] мы получаем следующее утверждение:

Теорема 6. Пусть у всех колец-блоков K_v из разложения $L = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m$ порядки n_v строго больше единицы. Тогда K – 3-хорошее кольцо.

Доказательство. Пусть $A \in K$ и $A = C + D$, где $C \in L$ и $D \in I$. Поскольку все K_v являются 3-хорошими кольцами [13, теорема 3], то $C = C_1 + C_2 + C_3$, где C_1, C_2, C_3 – обратимые в L матрицы. Тогда матрицу A можно представить в виде суммы трех матриц C_1, C_2 и $C_3 + D$, каждая из которых обратима в K ввиду теоремы 5. ■

Но если порядок хотя бы одного из слагаемых K_v равен 1 (т.е. когда мы имеем само кольцо R в качестве одного из блоков), то все будет зависеть от «хорошести» кольца R . Например, как показано в [10, теорема 1], если R – k -хорошее кольцо, то и кольцо K будет таковым.

В завершение мы рассмотрим некоторые частные случаи (по-прежнему считая, что система множителей Σ содержит только 1 и 0).

Если $K = M(n, R, \Sigma)$ и множество $\{1, 2, \dots, n\}$ представляет собой единственный класс эквивалентности, то K совпадает с обычным матричным кольцом $M(n, R)$ и ввиду теоремы Хенриксена является 3-хорошим для каждого $n \geq 2$. Наименьшее n , для которого возможно нетривиальное разбиение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на классы эквивалентности, каждый из которых содержит хотя бы два индекса, очевидно, равно 4. Если $K = M(4, R, \Sigma)$ или $K = M(5, R, \Sigma)$, а матрица множителей S кольца K может быть представлена в виде

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то по теореме 6 кольцо K является 3-хорошим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 5. С. 1116–1127. DOI: 10.17377/smzh.2018.59.512.
2. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53. С. 16–21. DOI: 10.17223/19988621/53/2.
3. Vámos P. 2-good rings // Quart. J. Math. 2005. V. 56. P. 417–430. DOI: 10.1093/qmath/hah046.
4. Srivastava A.K. A survey of rings generated by units // Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. 2010. V. 19. P. 203–213. DOI: 10.5802/afst.1281.
5. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундам. и прикл. математика. 2014. Т. 19. № 1. С. 65–119.
6. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.
7. Крылов П.А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 4. С. 456–463.
8. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
9. Lousstanaui P., Shapiro J. Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory (Lecture Notes in Mathematics, V. 1448). Springer, 1990. P. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
10. Норбосамбуев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 34–40. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
11. Норбосамбуев Ц.Д. 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики». Сборник статей. Томск: Изд. дом ТГУ, 2016. С. 6–12.
12. Норбосамбуев Ц.Д. Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/52/1.
13. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31. No. 1. P. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.

Статья поступила 08.04.2020 г.

Norbosambuev T.D., Timoshenko E.A. (2020) ON A CLASS OF 3-GOOD FORMAL MATRIX RINGS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 55–62

DOI 10.17223/19988621/67/5

Keywords: ring, good ring, formal matrix ring

Let R be an associative ring with unity. An element $b \in R$ is said to be k -good if it can be represented as a sum of k invertible elements of R ; if all elements of R are k -good, we say that R is a k -good ring. We show that, under certain conditions, formal matrix rings over a given ring are 3-good.

Let $n \geq 2$. Suppose that $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, 2, \dots, n\}$ is a set of central elements of R such that $s_{ijj} = 1 = s_{iji}$ and $s_{ijl} \cdot s_{jkl} = s_{ijk} \cdot s_{ikl}$ for all $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. If $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ are two matrices of order n over R , we define

$$AB = C = (c_{ij}), \text{ where } c_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ikj} a_{ik} b_{kj}.$$

All matrices of order n over R form an associative ring with unity under the usual addition and the multiplication defined above; this ring is denoted by K . We say that K is a *formal matrix ring of order n over R* (such rings were first introduced by P.A. Krylov).

We restrict ourselves to the case when $s_{ijk} \in \{0, 1\}$ for every $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ and let $i \sim j$ if and only if we have $s_{jji} = 1$. It can be shown that “ $\sim$ ” is an equivalence relation on $\{1, 2, \dots, n\}$. Without loss of generality we may assume that if $i \sim j$ and $i < k < j$, then $i \sim k$. Let I be the set of all matrices $A = (a_{ij}) \in K$ such that $a_{ij} = 0$ when $i \sim j$ and L be the set of all matrices $A \in K$ such that $a_{ij} = 0$ when i and j are not equivalent. It is easy to see that $K = L \oplus I$.

Proposition 3. I is an ideal of the ring K .

Proposition 4. $I^m = 0$.

Theorem 5. Suppose that $A \in K$ and $A = C + D$ with $C \in L$, $D \in I$. Then the following are equivalent:

- 1) A is invertible in the ring K .
- 2) C is invertible in the ring L .

Theorem 6. If all equivalence classes of “ $\sim$ ” have cardinalities ≥ 2 , then K is a 3-good ring.

AMS Mathematical Subject Classification: 15B99, 16S50

Financial support. The research was supported by the President of the Russian Federation Grant for young Russian scientists MD-108.2020.1.

Tsyrendorzhi D. NORBOSAMBUEV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ntsddts@yandex.ru

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Automorphisms of formal matrix algebras. *Siberian Mathematical Journal*. 59(5). pp. 885–893. DOI: 10.1134/S0037446618050129.
2. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Gruppy avtomorfizmov odnogo klassa algebr formal'nykh matrits [Group of automorphisms of one class of formal matrix algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 16–21. DOI: 10.17223/19988621/53/2.
3. Vámos P. (2005) 2-good rings. *Quarterly Journal of Mathematics*. 56(3). pp. 417–430. DOI: 10.1093/qmath/hah046.

4. Srivastava A.K. (2010) A survey of rings generated by units. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse. Mathematiques*. 19. pp. 203–213. DOI: 10.5802/afst.1281.
5. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
6. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices* (Algebra and Applications, V. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
7. Krylov P.A. (2008) Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra and Logic*. 47(4). pp. 258–262. DOI: 10.1007/s10469-008-9016-y.
8. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. 6. pp. 83–142.
9. Loustaunau P., Shapiro J. (1990) Morita contexts. *Non-Commutative Ring Theory (Lecture Notes in Mathematics, V. 1448)*. Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
10. Norbosambuev T.D. (2015) O summakh diagonal'nykh i obratimyykh obobshchennykh matrity [On sums of diagonal and invertible formal matrices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 34–40. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
11. Norbosambuev T.D. (2016) 2-khoroshie diagonal'nye formal'nye matrity nad kol'tsom tselykh chisel [2-good diagonal formal matrices over the ring of integers]. *All-Russia Youth Scientific Conference "Vse grani matematiki i mekhaniki" (sbornik statey)*. Tomsk: Izd. dom TGU. pp. 6–12.
12. Norbosambuev T.D. (2018) Rang formal'noy matrity. Sistema formal'nykh lineynykh uravneniy. Deliteli nulya [Rank of a formal matrix. System of formal linear equations. Zero divisors]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/52/1.
13. Henriksen M. (1974) Two classes of rings generated by their units. *Journal of Algebra*. 31(1). pp. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.

Received: April 8, 2020

А.Р. Чехлов, О.В. Иванец

О ПРОЕКТИВНО ИНЕРТНЫХ ПОДГРУППАХ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

Пусть группа G есть конечная прямая сумма групп без кручения G_i ранга 1. Доказано, что каждая проективно инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда все G_i не делятся ни на одно простое число p , причем у различных подгрупп G_i и G_j их типы равны либо несравнимы.

Ключевые слова: проективно инертная подгруппа, вполне инвариантная подгруппа, соизмеримые подгруппы, индекс подгруппы, вполне разложимая группа.

Все группы, если специально не оговорено, предполагаются абелевыми. Через $E(G)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы G . Подгруппы H, K группы G называются *соизмеримыми* (обозначение $H \sim K$), если обе факторгруппы $(K + H)/H$ и $(K + H)/K$ конечны. Соизмеримость является отношением эквивалентности. Если $\varphi \in E(G)$, то подгруппа $H \leq G$ называется φ -инертной, если H соизмерима с $H + \varphi H$. Если H φ -инертна для всякого $\varphi \in E(G)$, то H называется *вполне инертной*. Подгруппу $H \leq G$, π -инертную для всякой проекции π группы G , назовем *проективно инертной*. Проективно инертные подгруппы образуют более широкий класс групп, чем вполне инертные подгруппы. Так, в неразложимой группе всякая ее подгруппа проективно инвариантна.

Вполне инертные подгруппы абелевых групп изучались в [1–5]. Подгруппа, соизмеримая с некоторой вполне инертной подгруппой (в частности, с вполне инвариантной подгруппой), сама является вполне инертной [1, следствие 2.10]. В [2], соответственно и в [3], показано, что всякая вполне инертная подгруппа свободной группы и p -группы, разложимой в прямую сумму циклических групп, соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой; делимые группы таким свойством в общем случае не обладают [1]. Различным вопросам инертности в теории групп посвящена статья [6].

Лемма 1. Для подгруппы H группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) H проективно инертна;
- 2) $H \sim \pi H + (1 - \pi)H$ для всякой проекции π группы G ;
- 3) $H \sim (A \cap H) \oplus (B \cap H)$ для всякого прямого разложения $G = A \oplus B$ группы G .

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) справедлива ввиду равенства $\pi H + (1 - \pi)H = H + \pi H$.

1) $\Rightarrow$ 3) Поскольку $(\pi H + H)/H \cong \pi H/(\pi H \cap H)$, то $\pi H \cap H \sim \pi H$, аналогично $(1 - \pi)H \cap H \sim (1 - \pi)H$. Поэтому $(\pi H \cap H) + ((1 - \pi)H \cap H) \sim \pi H + (1 - \pi)H = H + \pi H \sim H$. Теперь следует учесть, что $\pi H \cap H \subseteq A \cap H$ и $(1 - \pi)H \cap H \subseteq B \cap H$.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть π – проекция и $\pi(G) = A$, $(1 - \pi)G = B$. По условию $H \sim (A \cap H) \oplus (B \cap H)$. Поскольку $B \cap H \subseteq H$, то $H \sim (A \cap H) + H$. Осталось заметить, что $A \cap H$ имеет конечный индекс в πH . Действительно, условие

$H \sim (A \cap H) \oplus (B \cap H)$ означает, что почти все элементы подгруппы H содержатся в $(A \cap H) \oplus (B \cap H)$, но тогда почти все элементы πH содержатся в $A \cap H$.

Из доказательства импликации $3) \Rightarrow 1)$ леммы 1 следует, что справедливо

Замечание. Если H – проективно инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, то $A \cap H \sim \pi H$, где π – проекция группы G на A .

Отметим следующие простые свойства.

1. Подгруппа, соизмеримая с некоторой проективно инертной подгруппой (в частности, с проективно инвариантной подгруппой), сама является проективно инертной.

В связи с этим свойством представляет интерес вопрос изучения классов групп, в которых все проективно инертные подгруппы соизмеримы с проективно инвариантными подгруппами.

2. Если H – проективно инертная подгруппа группы G , то для любых проекций $\pi_1, \dots, \pi_n$ группы G подгруппа $H + \pi_1(H) + \dots + \pi_n(H)$ соизмерима с H .

3. Если H – проективно инертная подгруппа группы без кручения G , то $\pi(H) \subseteq H_*$ для всякой проекции π группы G , где H_* – чистая оболочка подгруппы H в G . В частности, подгруппа H_* является проективно инвариантной в G .

Это свойство вытекает из того, что подгруппа H_*/H факторгруппы G/H совпадает с ее периодической частью.

4. Если H – проективно инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, то подгруппа $A \cap H$ проективно инертна в A . Причем если $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$, а α – проекция группы G , то подгруппа $(A \cap H) + \varphi(B \cap H) + \pi\alpha(A \cap H)$ соизмерима с $A \cap H$, где π – проекция группы G на прямое слагаемое A .

Первое утверждение этого свойства следует из того, что если $A = U \oplus V$, то $H \sim (U \cap H) \oplus (V \cap H) \oplus (B \cap H)$, где $A \cap H \sim (U \cap H) \oplus (V \cap H)$ и $U \cap H = U \cap (A \cap H)$, $V \cap H = V \cap (A \cap H)$. Далее, пусть $\pi: G \rightarrow A$ и $\theta: G \rightarrow B$ – проекции. Тогда $\pi + \pi\theta$ также является проекцией группы G и $(\pi + \pi\theta)((A \cap H) \oplus (B \cap H)) = (A \cap H) + \varphi(B \cap H)$. Подгруппа $(A \cap H) \oplus (B \cap H)$ ввиду проективной инертности соизмерима с $(A \cap H) \oplus (B \cap H) + (\pi + \pi\theta)((A \cap H) \oplus (B \cap H))$, поэтому подгруппа $A \cap H = \pi((A \cap H) \oplus (B \cap H))$ соизмерима с подгруппой $A \cap H + \varphi(B \cap H) = \pi((A \cap H + \varphi(B \cap H)) \oplus (B \cap H))$. Покажем теперь, что $A \cap H \sim A \cap H + \pi\alpha(A \cap H)$. Действительно, это следует из соотношений $A \cap H \sim \pi(H) \supseteq \pi\alpha(A \cap H)$. Итак, $A \cap H \sim A \cap H + \varphi(B \cap H)$ и $A \cap H \sim A \cap H + \pi\alpha(A \cap H)$, поэтому $A \cap H \sim A \cap H + \varphi(B \cap H) + \pi\alpha(A \cap H)$.

5. Если проективно инертная подгруппа H группы G содержит ненулевую делимую подгруппу без кручения, то H содержит делимую часть $D = D(G)$ группы G ; а если H содержит подгруппу, изоморфную квазициклической p -группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$, то H содержит p -компоненту группы D .

Делимая часть $D(H)$ группы H выделяется прямым слагаемым в G , $G = D(H) \oplus K$. Имеем $D = D(H) \oplus (D \cap K)$. Поэтому если $D(H)$ группа непериодическая, то она содержит прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Q}$. Всякая делимая группа ранга 1 является гомоморфным образом группы $\mathbb{Q}$. Получаем, что для каждой делимой подгруппы D' ранга 1 группы $D \cap K$ существует такой гомоморфизм $\varphi \in \text{Hom}(D(H), D')$, что $H \cap \varphi H$ является подгруппой конечного индекса в D' . Делимые группы не имеют собственных подгрупп конечного индекса, поэтому $D \subseteq H$. В случае подгруппы $\mathbb{Z}(p^\infty)$ рассуждения аналогичны.

6. Если делимая часть без кручения F группы G имеет бесконечный ранг и проективно инертная подгруппа H группы G является непериодической, то H содержит делимую часть D группы G .

Имеем $G = F \oplus K$ и $H \sim (F \cap H) \oplus (K \cap H)$. Поскольку всякая группа без кручения бесконечна, то из свойства 4 следует, что $F \cap H \neq 0$ и является существенной подгруппой в F . Ввиду бесконечности ранга группа $F \cap H$ имеет в качестве гомоморфного образа группу $\mathbb{Q}$. Поэтому, как в свойстве 5, получаем, что $D \leq H$.

Через G_p обозначим p -компоненту группы G .

7. Если $G = D \oplus R$, где $D = F \oplus (\oplus_p D_p)$ – делимая часть группы G , F – делимая часть без кручения, $\oplus_p D_p$ – периодическая часть группы D и H – такая проективно инертная подгруппа группы G , что подгруппа $H \cap R$ не является периодической, то подгруппа $H \cap F$ существенна в F , причем $D \leq H$, если ранг без кручения подгруппы $H \cap R$ бесконечен. Если же подгруппа $H \cap R_p$ не является ограниченной, то $D_p \leq H$.

Если подгруппа $H \cap R$ не является периодической, то она содержит бесконечную циклическую подгруппу. Поскольку делимые группы инъективны, то отсюда следует, что $H \cap D' \neq 0$ для всякой делимой подгруппы без кручения D' ранга 1, в частности $H \cap F$ существенна в F . Если же ранг без кручения подгруппы $H \cap R$ бесконечен, то она содержит свободную группу K бесконечного ранга, всякая счетная группа является гомоморфным образом группы K ; откуда следует, что H содержит каждую подгруппу ранга 1 группы D , значит, $D \leq H$. Если группа $H \cap R_p$ неограниченная, то существует эпиморфизм $H \cap R_p \rightarrow \mathbb{Z}(p^\infty)$, откуда следует, что $D_p \leq H$.

Очевидно, что если A – вполне инвариантное прямое слагаемое группы G , то всякая проективно инертная подгруппа группы A будет проективно инертной подгруппой группы G . Справедливость следующего свойства также очевидна.

8. 1) Пусть $G = A \oplus B$. проективно инертная подгруппа H группы A является проективно инертной подгруппой группы G тогда и только тогда, когда fH – конечная группа для каждого $f \in \text{Hom}(A, B)$. В частности, если A – проективно инертное прямое слагаемое в G , то $\text{Hom}(A, B)A$ – периодическая подгруппа в B .

2) Если B – группа без кручения, а H – существенная проективно инертная подгруппа группы A , то H будет проективно инертной подгруппой группы $G = A \oplus B$ тогда и только тогда, когда A – вполне инвариантное прямое слагаемое в G .

Из примера 4.7 статьи [1] следует справедливость следующего интересного факта.

Пример 1. Если G – группа без кручения, конечного ранга n и $H \leq G$ – ее вполне разложимая однородная подгруппа ранга n , то H является вполне инертной в G .

Пример 2. Если G – группа без кручения, ранг аддитивной группы кольца $E(G) > 1$ и все ненулевые эндоморфизмы группы G суть мономорфизмы, то всякая циклическая подгруппа X группы G (будучи проективно инвариантной) не является вполне инертной.

Действительно, в этом случае найдется $f \in E(G)$, такой, что $nf \neq m \cdot 1_G$, где 1_G – тождественный эндоморфизм группы G . Поскольку все ненулевые эндоморфизмы группы G есть мономорфизмы, то отсюда следует, что фактор-группа $(X + f(X)) / X$ будет бесконечной.

Пример 3. Если A – неразложимая группа и $X \leq A$, то для всякой группы B со свойством $\text{Hom}(B, A) = 0$ подгруппа $H = X \oplus B$ является проективно инвариантной в $G = A \oplus B$.

Действительно, если $G = U \oplus V$, то $B = (U \cap B) \oplus (V \cap B)$ ввиду вполне инвариантности подгруппы B , где $U \cap B = U$ или $V \cap B = V$ в силу неразложимости группы A . Поэтому, если, к примеру, $U \cap B = U$, то $H = U \oplus (V \cap H)$.

Лемма 3. Пусть $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, $\pi_i: G \rightarrow G_i$ – соответствующие проекции и H_i – проективно инертные подгруппы групп G_i $i = 1, \dots, n$. Подгруппа $H = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$ является проективно инертной тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, \dots, n$ подгруппа H_i соизмерима с $H_i + \pi_i \theta(H_i) + \phi(\oplus_{j \neq i} H_j)$ при каждой проекции θ группы G и каждом $\phi \in \text{Hom}(\oplus_{j \neq i} G_j, G_i)$.

Доказательство. Необходимость. Следует из свойства 4.

Достаточность. Пусть θ – проекция группы G . Имеем $\theta = \pi_1 \theta + \dots + \pi_n \theta$. Достаточно показать, что $H \sim H + \pi_i \theta(H)$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Данная соизмеримость является следствием соизмеримости H_i с $H_i + \pi_i \theta(H)$. Поскольку $\pi_i \theta(H) = \pi_i \theta(H_i) + \pi_i \theta(\oplus_{j \neq i} H_j)$, где $\pi_i \theta$ действует на $\oplus_{j \neq i} H_j$ как гомоморфизм из $\text{Hom}(\oplus_{j \neq i} G_j, G_i)$, то соизмеримость H_i с $H_i + \pi_i \theta(H)$ выполняется по условию.

Следствие 4. Пусть $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, а H – такая проективно инертная подгруппа группы G , что все подгруппы $H \cap G_i$ являются вполне инертными в G_i . Тогда подгруппа H является вполне инертной в G .

Пример 4. Пусть X – свободная группа конечного ранга, Y – периодическая группа. Тогда X является вполне инертной, не проективно инвариантной подгруппой в группе $X \oplus Y$.

Поскольку $\text{Hom}(X, Y) \neq 0$, то подгруппа X не проективно инвариантна в $X \oplus Y$, а поскольку образ $f(X)$ конечен для всякого $f \in \text{Hom}(X, Y)$, то X является вполне инертной подгруппой.

Пример 5. Пусть A – неразложимая редуцированная группа без кручения и X – ее свободная подгруппа конечного ранга. Тогда если B – делимая группа без кручения конечного ранга, а Y – ее существенная свободная подгруппа, то $X \oplus Y$ является проективно инертной, но не проективно инвариантной подгруппой группы $G = A \oplus B$.

Доказательство. Подгруппа X является проективно инвариантной в A , а Y вполне инертной в B . Для всякого $\phi \in \text{Hom}(A, B)$ фактор-группа $(X + \phi(Y)) / X$ конечна как конечно порожденная периодическая группа. Поэтому по свойству 4 подгруппа $X \oplus Y$ является проективно инертной в G . Пусть $f: A \rightarrow B$ – такой гомоморфизм, что $f(x) \notin Y$ для некоторого $x \in X$; поскольку B – делимая группа, то такие гомоморфизмы существуют. Если теперь $\pi: G \rightarrow A$ и $\theta: G \rightarrow B$ – проекции, то $\theta + \theta \pi$ также является проекцией, для которой $(\theta + \theta \pi)(x) \notin Y$. Значит, подгруппа $X \oplus Y$ не является проективно инвариантной. Если подгруппу X выбрать не вполне инертной в A , то и подгруппа $X \oplus Y$ не будет вполне инертной в G .

Теорема 5. Пусть $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, где $r(G_i) = 1$, – вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Каждая проективно инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG_i \neq G_i$ для всякого $i = 1, \dots, n$ и для всякого простого числа p , причем при всех $i, j = 1, \dots, n$ типы $t(G_i)$, $t(G_j)$ либо равны, либо несравнимы.

Доказательство. Необходимость. Поскольку вполне инертные подгруппы являются проективно инертными, то необходимость утверждения следует из [5, теорема 2].

Достаточность. Пусть H – проективно инертная подгруппа группы G . Согласно лемме 1 достаточно показать, что подгруппа $(H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n)$ соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой. Поскольку $pG_i \neq G_i$ для всякого простого числа p и для всех $i = 1, \dots, n$, то группа $\text{Hom}(G_i, G_j)$ либо изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$ (если тип группы G_i равен типу группы G_j), либо $\text{Hom}(G_i, G_j) = 0$ (если тип группы G_i не сравним с типом группы G_j), поэтому для всякой подгруппы $X \subseteq G_i$ имеет место равенство $\text{Hom}(G_i, G_j)X = fX$, где f – гомоморфизм, порождающий $\text{Hom}(G_i, G_j)$. В частности, всякая подгруппа группы G_i является вполне инвариантной в G_i . Поскольку $\text{Hom}(G, G_i) \cong \text{Hom}(G_1, G_i) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(G_n, G_i)$, то отсюда следует, что если $\underline{H} = \text{Hom}(G, G_i)((H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n))$, то $H \cap G_i \subseteq \underline{H}$ и из свойства 4 следует, что подгруппа $H \cap G_i$ соизмерима с $\underline{H}$. Значит, $\underline{H} = \underline{H}_1 \oplus \dots \oplus \underline{H}_n$ соизмерима с $(H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n)$. Подгруппы $\underline{H}_i$ вполне инвариантны в G_i и поскольку $\text{Hom}(G_i, G_j)\underline{H}_i \subseteq \underline{H}_j$, то подгруппа $\underline{H}$ вполне инвариантна в G .

Следствие 6. 1) Если G – однородная вполне разложимая группа конечного ранга, то всякая ее проективно инертная подгруппа соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG \neq G$ для всякого простого числа p .

2) В однородной вполне разложимой группе G конечного ранга проективно инертная подгруппа H соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pH = H$ для всякого простого числа p со свойством $pG = G$.

3) Если в делимой группе без кручения G проективно инертная подгруппа H соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой, то $H = G$.

Доказательство. 1) и 2) Вытекают из теоремы 5. 3) Следует из 2) и из того, что в такой группе G вполне инертная подгруппа должна быть существенной в G .

Предложение 7. Если $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$ – группа без кручения, где $n \geq 2$, $G_i \cong G_j$ при $i, j = 1, \dots, n$, то всякая проективно инертная подгруппа H группы G является вполне инертной.

Доказательство. Пусть $f \in E(G)$, $\pi_i: G \rightarrow G_i$ – проекции. Тогда $f = \pi_1 f + \dots + \pi_n f$. Далее, если $H_i = H \cap G_i$, то достаточно показать соизмеримость H_i с $H_i + \pi_i f(H_i) + \pi_i f(\bigoplus_{j \neq i} H_j)$. Соизмеримость H_i с $H_i + \pi_i f(\bigoplus_{j \neq i} H_j)$ есть следствие леммы 3, а соизмеримость H_i с $H_i + \pi_i f(H_i)$ следует из изоморфизма прямых слагаемых G_i . Образ $\pi_i f(H_i)$ соизмерим с образом подгруппы H_j ($j \neq i$) при некотором гомоморфизме $G_j \rightarrow G_j$.

Отметим, что в [5] изучались вполне инертные подгруппы вполне разложимых групп бесконечного ранга; в частности, там получен следующий результат.

Пример 6. Пусть A – однородная вполне разложимая группа без кручения конечного ранга и $pA \neq A$ для всякого простого числа p , B – однородная вполне разложимая идемпотентного типа группа без кручения бесконечного ранга и $t(B) > t(A)$. Тогда в $G = A \oplus B$ всякая вполне инертная подгруппа $H \neq 0$ соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. Fully inert subgroups of divisible Abelian groups // J. Group Theory. 2013. V. 16. No 6. P. 915–939.
2. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of free Abelian groups // Period. Math. Hungar. 2014. V. 69. No 1. P. 69–78.

3. Goldsmith B., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of Abelian p -groups // J. of Algebra. 2014. V. 419. P. 332–349.
4. Чехлов А.Р. Вполне инертные подгруппы вполне разложимых групп конечного ранга и их соизмеримость // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 3(41). С. 42–50. doi.org/10.17223/19988621/41/4.
5. Чехлов А.Р. О вполне инертных подгруппах вполне разложимых групп // Матем. заметки. 2017. Т. 101. № 2. С. 302–312. doi.org/10.4213/mzm11171.
6. Dardano U., Dikranjan D., Rinauro S. Inertial properties in groups. // Int. J. Group Theory. 2018. V. 7. No 3. P. 17–62. doi.org/10.22108/ijgt.2017.21611.

Статья поступила 15.04.2020 г.

Chekhlov A.R., Ivanets O.V. (2020) ON PROJECTIVELY INERT SUBGROUPS OF COMPLETELY DECOMPOSABLE FINITE RANK GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 63–68

DOI 10.17223/19988621/67/6

Let a group G be a finite direct sum of torsion-free rank 1 groups G_i . It is proved that every projectively inert subgroup of G is commensurate with a fully invariant subgroup if and only if all G_i are not divisible by any prime number p , and for different subgroups G_i and G_j their types are either equal or incomparable.

Keywords: projectively inert subgroup, fully invariant subgroup, commensurable subgroups, index of the subgroup, completely decomposable group.

AMS Mathematical Subject Classification: 20K15, 20K27, 20K30.

Andrey R. CHEKHLOV (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

Olesya V. IVANETS (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivanetssolessya@gmail.com

REFERENCES

1. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. (2013) Fully inert subgroups of divisible Abelian groups. *Journal of Group Theory*. 16(6). pp. 915–939. DOI: 10.1515 / jgt-2013-0014.
2. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. (2014) Fully inert subgroups of free Abelian groups. *Periodica Mathematica Hungarica*. 69(1). pp. 69–78. doi.org/10.1007/s10998-014-0041-4.
3. Goldsmith B., Salce L., Zanardo P. (2014) Fully inert subgroups of Abelian p -groups. *Journal of Algebra*. 419. pp. 332–349. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.07.021.
4. Chekhlov A.R. (2016) Fully inert subgroups of completely decomposable finite rank groups and their commensurability. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 41(3). pp. 42–50. doi.org/10.17223/19988621/41/4.
5. Chekhlov A.R. (2017) On fully inert subgroups of completely decomposable groups. *Mathematical Notes*. 101. pp. 365–373. doi.org/10.1134/S0001434617010394.
6. Dardano U., Dikranjan D., Rinauro S. (2018) Inertial properties in groups. *International Journal of Group Theory*. 7(3), pp. 17–62. doi.org/10.22108/ijgt.2017.21611.

Received: April 15, 2020

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/67/7

Н.Н. Белов, Н.Т. Югов, А.Ю. Саммель, Е.Ю. Степанов**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ПРОЗРАЧНОЙ БРОНИ
НА ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ УДАР ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ УДАРНИКОМ
МЕТОДОМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ¹**

Предложена математическая модель поведения прозрачной брони в условиях высокоскоростного удара. В рамках данной модели проведен расчет ударного взаимодействия цилиндрического стального ударника с тремя типами мишеней из прозрачной брони одинаковой толщины. Первая двухслойная мишень выполнена из закаленного стекла и подложки из поликарбоната. Вторая и третья мишени трехслойные. Во второй мишени лицевой слой выполнен из ALONa, средний из закаленного стекла, нижний – из поликарбоната. В третьей мишени слой из ALONa заменен на слой из шпинели. Скорость удара 850 м/с.

Ключевые слова: прозрачная броня, высокоскоростное взаимодействие, математическое моделирование.

Прозрачная броня для военной и гражданской техники широко используется как в России, так и за рубежом. Кроме противопульной и противоосколочной стойкости броня должна обладать необходимым условием прозрачности и при этом быть как можно легче.

В настоящее время прозрачные защитные преграды, используемые для защиты от высокоскоростных осколков и пуль, это многослойная конструкция. Первый слой должен быть тверже ударника для разрушения его на начальном взаимодействии с преградой. Гюгониевский предел упругости должен превосходить возникающие на начальной стадии ударно-волновые явления в преграде. Силикатные стекла в такой конструкции находятся посередине, так как являются упруго-хрупкими. Последний слой должен сдерживать осколки, и сочетать в себе высокую прочность и жесткость с высокой стойкостью к ударным взаимодействиям. Такими качествами обладают поликарбонаты или оргстекла (ПММА).

Пластины монокристалла лейкосапфира толщиной 4–8 мм в качестве лицевого слоя – это один из перспективных вариантов. При создании прозрачной брони использование лейкосапфира приводит к снижению массы такой конструкции. Есть два минуса использования пластин монокристалла лейкосапфира – это его стоимость, значительно превышающая стоимость других материалов и невозможность создания преград больших размеров. Разработка новых материалов, способных заменить лейкосапфир – одна из ведущих задач на данный момент.

¹ В настоящей работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта НУ 8.2.09.2018 Л Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета.

Одним из таких материалов является ALON (оксид алюминия), запатентованный армией США [1].

В [2] представлены экспериментальные и теоретические результаты в области прочностных, кинетических и упруго-пластических свойств материалов разных классов при ударно-волновом нагружении. Проведен анализ расчетных моделей и экспериментальных результатов вязко-упруго-пластической деформации и разрушения материалов различных классов. Также в [2] представлены особенности силикатного стекла при ударно-волновом деформировании. Стекла и другие высокооднородные хрупкие материалы обладают специфической особенностью поведения, когда в них образуются волны разрушения при сжатии в области упругого деформирования.

Стекло дробится на мелкие блоки при напряжениях вблизи предела упругости. При дальнейшем деформировании они смещаются относительно друг друга. В результате этого изначально плоские поверхности стеклянных пластин становятся шероховатыми. На поверхности преграды имеются микротрещины, способные образовывать области разрушения, за счет которых и происходит дробление стекла.

Под действием девиаторных напряжений сетка трещин распространяется в глубь образца. Таким образом волна разрушения распространяется путем непрерывного роста зоны дробления в напряженном материале. Эксперименты с волнами сжатия различной интенсивности указывают также на возможность существования некоторого порогового напряжения для зарождения волны разрушения и зависимость её от скорости нагружения.

Процессы, происходящие в волне разрушения, в данный момент пока не имеют точного описания. Так как она является дозвуковой, то по мере распространения скорость волны убывает. Под действием напряжений сжатия на поверхности зарождаются волны разрушения, представляющие из себя сетку пересекающихся трещин.

Сопротивление растяжению и сдвигу уменьшается резко при дроблении материала в волне разрушения. Инициирование роста трещин происходит на части поверхностных дефектов, доля которых определяется скоростью приложенной нагрузки и её конечной величиной.

При пересечении двух трещин происходит остановка одной из них, поэтому по мере распространения волны разрушения между трещинами может возрасти их среднее расстояние. Это, вероятно, и объясняет уменьшение с пройденным расстоянием скорости волны разрушения.

Волны разрушения, которые образуются в стекле, также есть и в хрупких материалах. Разрушения начинается с верхнего слоя преграды, во всех последующих слоях в это момент времени нет еще возмущений.

В расчетах процессов высокоскоростного удара, взрыва и других интенсивных импульсных воздействий в каждой точке среды реакция материала описывается локальными определяющими соотношениями. Полный набор параметров состояния среды в данной частице определяется таким описанием и не зависит от соседних частиц.

В [3] представлены экспериментальные ударные адиабаты различных материалов, таких, как рубин, оргстекло, стекло и корунд. Ударная адиабата нитрида алюминия приведена в [4], а в [5] – ударная адиабата упругого сжатия сапфира. Исследование прочности сапфира при откольном разрушении проведено в [6].

Цель данной работы – разработка математической модели, позволяющей в рамках механики сплошной среды рассчитывать ударное взаимодействие осколочных элементов и пуль с прозрачной броней.

Математическое моделирование поведения материалов ударника и прозрачной брони в условиях высокоскоростного удара проведено в рамках модели пористой упруго-пластической среды с учетом различных механизмов разрушения [7–11]. Пакет вычислительных программ для реализации модели представлен в [12] и предназначен для решения задач удара и взрыва в полной трехмерной постановке модифицированным на решение динамических задач методом конечных элементов [10].

Результаты расчета

Проведена серия расчетов, с использованием математической модели, изложенной в [7], способной описывать высокоскоростное взаимодействие ударника диаметром 9 и высотой 27 мм с многослойной прозрачной преградой при скорости 850 м/с. Были проведены расчеты с тремя видами прозрачных преград толщиной 24 мм.

Первый вариант преграды двухслойный. Лицевой слой из закаленного стекла толщиной 20 мм, а тыльный слой из поликарбоната толщиной 4 мм. Вторая и третья преграды – это добавление в качестве лицевого слоя к первому варианту преграды сначала ALONa 6 мм, а потом используется слой из шпинели такой же толщины. В трехслойных преградах слой стекла был взят толщиной 14 мм.

В литературе отсутствуют экспериментальные данные по ударным адиабатам Гюгонио для ALONa и шпинели, на основании которых определяются коэффициенты c_{m0} и S_{m0} в уравнении состояния. В [14] приведена эмпирическая формула оксинитрид алюминия $(AlN)_x \cdot (Al_2O_3)_{1-x}$ в молекулярном соотношении $0.30 \leq x \leq 0.37$ и химическая формула NOAL. В работе указаны его плотность $\rho_{m0} = 3.688$ г/см³ и молекулярная масса 56.9877 г/моль. Способы синтеза порошков алюмомагниевого шпинели ($MgAl_2O_4$) для получения оптически прозрачной керамики приведены в [15]. Физические свойства и физико-химические константы шпинели – в [16]. Величины плотности шпинели $\rho_{m0} = 3.57\text{--}3.72$ г/см³, молекулярная масса 142.27 г/моль. По химическому составу шпинель состоит из 28.34 % MgO и 71.66 % Al_2O_3 .

Используя приведённые данные, ударные адибаты ALONa и шпинели можно определить двумя способами. Данные материалы можно рассматривать как двухкомпонентные среды с начальной плотностью $\rho_{m0} = v_1\rho_{01} + v_2\rho_{02}$, где v_i и ρ_{0i} ($i = 1, 2$) соответственно начальные объемные концентрации и плотности компонентов смеси ($v_1 + v_2 = 1$).

Коэффициенты линейной зависимости c_{m0} и S_{m0} определялись через ударные адибаты компонентов смеси $D_i = c_{0i} + S_{0i}u$ ($i = 1, 2$).

Ударная адибата смеси в переменных, где удельный объем v_m , давление p_m (индекс m относится к матричному материалу), имеет вид

$$v_m(p_m) = \sum_{i=1}^n m_i \left\{ v_{0i} - \frac{1}{p_m} \left[\frac{c_{0i}}{S_{0i}} \sqrt{\frac{p_m S_{0i}}{\rho_{0i} c_{0i}^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \right]^2 \right\},$$

где $m_i = v_i \frac{\rho_{0i}}{\rho_{m0}}$ – массовая концентрация i -компоненты ($m_1 + m_2 = 1$), $v_{0i} = \frac{1}{\rho_{0i}}$.

Используя для смеси соотношение на ударной волне

$$D = v_{m0} \sqrt{\frac{p_m}{v_{m0} - v_m(p_m)}}, \quad u = \sqrt{p_m(v_{m0} - v_m(p_m))},$$

где $v_{m0} = \frac{1}{\rho_{m0}}$, можно построить зависимость скорости ударной волны от массовой скорости и определить коэффициенты c_{m0} и S_{m0} .

Когда нет экспериментальных данных, ударные адиабаты химических соединений можно определить по известной начальной плотности и химической формуле [17]

$$D = u + 3.4 \left(\frac{\rho_{m0}}{M_{эфф}} \right)^{\frac{1}{3}} u^{\frac{1}{2}} + B \left(\frac{\rho_{m0}}{M_{эфф}} \right)^{\frac{2}{3}},$$

где u , D – массовая скорость и скорость ударной волны, км/с; ρ_{m0} – начальная плотность химических соединений, г/см³; $M_{эфф} = M_B/n$ – эффективная молекулярная масса, г; M_B – молекулярная масса; n – число атомов в соединении; B – константа, величина которой зависит от группы химических соединений.

Коэффициент Грюнайзена γ_{m0} определяется по формуле $\gamma_{m0} = \frac{3(1-\nu)}{2(2-3\nu)}$,

где ν – коэффициент Пуассона.

Для материалов, представленных выше, используются параметры модели для расчетов, приведенные в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Параметры модели

Материал	ρ_{m0} , г/см ³	c_{m0} , г/см ³	S_{m0}	γ_{m0}	μ_{m0} , ГПа	σ_s , ГПа	α_s , ГПа	α_{00}	ξ^*	e_u^*
Сталь	7.85	0.457	1.50	2.26	82.0	1.0	0.17	1.0006	0.3	1.00
Поликарбонат	1.20	0.174	1.72	2.13	1.0	0.026	0.0173	1.00001	0.09	0.50
ALON	3.71	0.74	1.157	1.4648	139	12.64	0.7323	1.00001	0.0104	0.15
Стекло	2.48	0.31	1.40	1.29–1.77	33.3	7.09	0.3648	1.00001	0.0104	0.15
Секло фрагментированное	2.48	0.16	1.93	1.29	33.3	–	–	–	–	–
Шпинель	3.58	0.73	1.65	1.549	116.2	9.54	0.5038	1.00001	0.0104	0.14

Таблица 2

Параметры модели разрушения

Материал	R_c , ГПа	R_p , ГПа	T_c , ГПа	k	σ_{max}	σ_{min}
ALON	14.15	8.5	6.32	0.75	12.64	0.75
Стекло	9.0	4.2	3.547	0.75	7.09	0.75
Шпинель	11.8	5.8	4.77	0.75	9.54	0.75

Результаты математического моделирования представлены на рис. 1 и 2.

На рис. 1 – картины проникания ударника в прозрачную броню в моменты времени 2 мкс, 20 мкс, 40 мкс и 64 мкс. Чёрным цветом в мишени помечены области разрушенного материала. Образующаяся в момент взаимодействия ударника с мишенью ударная волна приводит к разрушению под ним материала. В последующие моменты времени ударник взаимодействует с разрушенным материалом. В момент времени 64 мкс происходит его остановка. Глубина кратера в слое стекла 14.04 мм. В начальный момент времени ударник имел длину 27 мм, а его масса составляла 13.4 г. В момент остановки его длина составляла 10.89 мм, а масса 6.2 г.

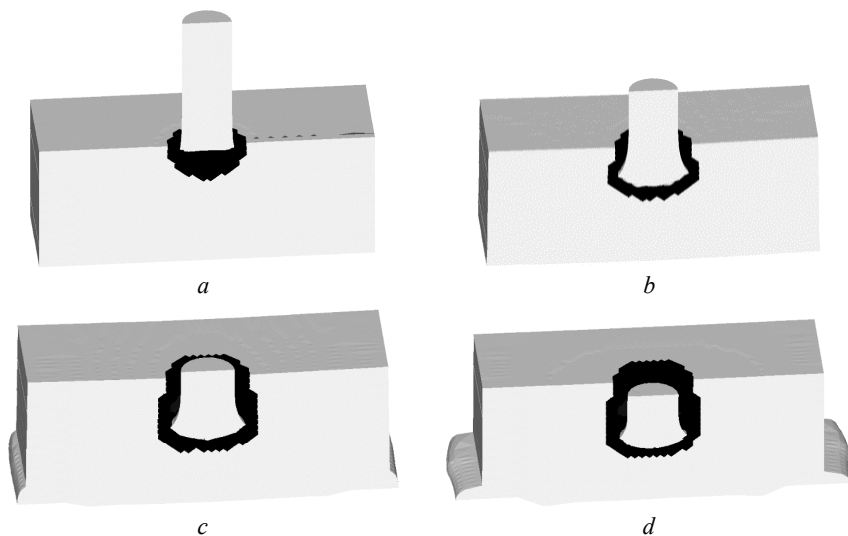


Рис. 1. Хронограмма проникания ударника в мишень первого типа:
 $a - t = 2$ мкс; $b - t = 20$ мкс; $c - t = 40$ мкс; $d - t = 64$ мкс

Fig. 1. Chronogram of the impactor penetration into a first-type target:
 $t = (a) 2, (b) 20, (c) 40, \text{ and } (d) 64 \mu\text{s}$

Как уже указывалось выше, физико-математическая модель не позволяет рассчитывать волны разрушения в стекле. От поверхности кратера в прозрачной броне в ударносжатый материал могут распространяться трещины, приводящие к дополнительному разрушению в материале, поэтому материал прозрачной брони может быть разрушен гораздо сильнее. Трещины под ударником могут достичь лицевой поверхности слоя поликарбоната, образуя фрагменты разрушенного стекла. Однако в целом при данной скорости удара мишень из прозрачной брони не пробита.

На рис. 2 представлены картины проникания ударников в рассмотренные выше мишени из прозрачной брони трех типов на момент их остановки.

При взаимодействии с мишенью второго типа (b) ударник пробил слой ALONa и остановился в стеклянном слое. Глубина его проникания в мишень составила 12.51 мм. В процессе проникания в мишень длина ударника уменьшилась до величины 10.98 мм, а остаточная масса до 6.0 г.

При замене слоя из ALONa на слой из шпинели (c) глубина кратера составила 12.78 мм. Масса остатка ударника 6.0 г, а его длина 10.89 мм.

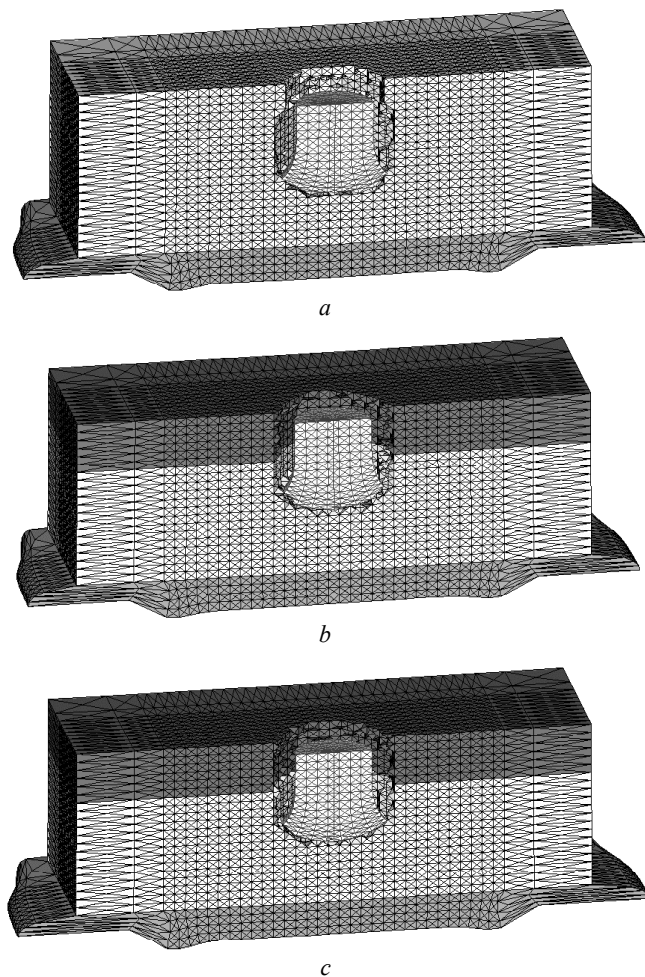


Рис. 2. Хронограмма проникания ударников в мишени трех типов:
a – мишень первого типа; *b* – мишень второго типа; *c* – мишень третьего типа
Fig. 2. Chronogram of the impactor penetration into three types of targets:
the (a) first, (b) second, and (c) third type of targets

Выводы

Из расчетов следует, что при замене шестимиллиметрового слоя стекла на слой из ALONa глубина кратера уменьшилась на 11 %, а при замене на слой из шпинели глубина кратера уменьшилась до 9 %. Таким образом из расчетов следует, что самый стойкий к удару материал ALON, совсем немного уступает ему шпинель.

Цель данной работы – показать возможность предоставленной модели поведения конструкционных материалов в условиях высокоскоростного удара. Совместное проведение лабораторного эксперимента и математического моделирования с одной стороны позволило глубже понять протекающие процессы в прозрачной броне, с другой – уточнить параметры модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент США № 4520116.
2. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М: Янус-К, 1996. 408 с.
3. Жерноклетов М.В., Зубарев В.Н., Трунин Р.Ф., Фортвов В.Е. Экспериментальные данные по ударной сжимаемости и адиабатическому расширению конденсированных веществ при высоких плотностях энергии. Черноголовка, 1996. 385 с.
4. Трунин Р.Ф. Исследование экстремальных состояний конденсированных веществ методом ударных волн. Уравнения Гюгонно. Саров: РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2006. 286 с.
5. Barker L.M., Hollenbach R.E. Shock-wave studies of PMMA, fused silica, and sapphire // J. Appl. Phys. 1970. V. 41. P. 4208–4226.
6. Савиных А.С., Канель Г.И., Разоренов С.В. Прочность сапфира при откольном разрушении // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 7. С. 8–15.
7. Белов Н.Н., Демидов В.Н., Ефремов Л.В. и др. Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений // Изв. вузов. Физика. 1992. Т. 35. № 8. С. 5–49.
8. Афанасьева С.А., Белов Н.Н., Толкачев В.Ф., Хабибуллин М.В., Югов Н.Т. Особенности ударно-волнового деформирования пористой керамики Al₂O₃ // ДАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 474–481.
9. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Табаченко А.Н. и др. Математическое моделирование процессов деформирования и разрушения металлокерамики в условиях динамического нагружения // Изв. вузов. Физика. 2002. № 8. С. 54–59.
10. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г., Югов А.А. Динамика высокоскоростного удара и сопутствующие физические явления. Northampton; Томск: STT, 2005. 356 с.
11. Белов Н.Н., Кабанцев О.В., Копаница Д.Г., Югов Н.Т. Расчетно-экспериментальный метод анализа динамической прочности элементов железобетонных конструкций. Томск: STT, 2008. 292 с.
12. Югов Н.Т., Белов Н.Н., Югов А.А. Расчет адиабатических нестационарных течений в трехмерной постановке (РАНЕТ-3) / Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2010611042. М., 2010.
13. Гениев Г.А., Киссюк В.Н. К вопросу обобщения теории прочности бетона // Бетон и железобетон. 1965. № 2. С. 16–29.
14. https://ru.wikipedia.org/wiki/Оксинитрид_алюминия
15. Сенина М.О., Лемешев Д.О. Способы синтеза порошков алюмомагнетитовой шпинели для получения оптически прозрачной керамики (обзор) // Успехи в химии и химической технологии. 2016. Т. 30. № 7. С. 101–103.
16. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Шпинель>
17. Анисичкин В.Ф. К расчету ударных адиабат химических соединений // ФГВ. 1980. № 5. С. 151–153.

Статья поступила 24.05.2020 г.

Belov N.N., Yugov N.T., Sammel A.Yu., Stepanov E.Yu. (2020) STUDY OF THE TRANSPARENT ARMOR STRENGTH UNDER A HIGH-SPEED IMPACT OF A CYLINDRICAL IMPACTOR BY COMPUTER MODELING METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 69–77

DOI 10.17223/19988621/67/7

Keywords: transparent armor, high-speed interaction, mathematical modeling.

When manufacturing transparent multilayer armor of high threat level, the reinforced silicate glass and transparent ceramics with protecting back films are usually used. The hardness of the front layer of the shield should be much higher than that of the impactor. A promising option is

the use of a single leucosapphire crystal. However, due to its high cost and the impossibility of providing large-sized samples, the transparent polycrystalline materials are developed. One of the most advanced materials is ALON, which is close to leucosapphire in strength characteristics.

The aim of this work is to develop a mathematical model to calculate the impact interaction of fragmentation elements with transparent armor. The numerical study is carried out using proprietary software systems.

Calculations of the high-speed impact of the steel cylindrical impactor are implemented for three types of shields made of transparent armor. The first two-layer target is made of 20 mm thick tempered glass and a 4 mm thick polycarbonate layer. The second and third targets are three-layered. The front layer of the second target is made of ALON, and the spinel is used for the third one. The second and third layers in these targets are made of tempered glass and polycarbonate, respectively. The calculated results show that ALON is the most impact-resistant material, while spinel is a little less resistant.

Financial support. This study was supported by the Tomsk State University Competitiveness Improvement Program (No. 8.2.09.2018 L).

Nikolay N. BELOV (Doctor of Physics and Mathematics, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: n.n.belov@mail.ru

Nikolay T. YUGOV (Doctor of Physics and Mathematics, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: n.t.yugov@mail.ru

Anton Yu. SAMMEL (Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Evgeniy Yu. STEPANOV (Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanov_eu@mail.ru

REFERENCES

1. Gentilman R.L., Maguire E.A., Dolhert L.E. *Transparent Aluminum Oxynitride and Method of Manufacture*. US Patent 4520116.
2. Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. (1996) *Udarno-volnovye yavleniya v kondensirovannykh sredakh* [Shock-wave phenomena in condensed media]. Moscow: Janus-K.
3. Zhernokletov M.V., Zubarev V.N., Trunin R.F., Fortov V.E. (1996) *Ekspperimentalnye dannye po udarnoy szhimaemosti i adiabaticheskomu rasshireniyu kondensirovannykh veshchestv pri vysokikh plotnostyakh energii* [Experimental data on shock compressibility and adiabatic expansion of condensed media at high energy densities]. Chernogolovka.
4. Trunin R.F. (2006) *Issledovanie ekstremalnykh sostoyaniy kondensirovannykh veshchestv metodom udarnykh voln. Uravneniya Gyugonio* [Study of extreme conditions of condensed media by the shock wave method. The Hugoniot equations]. Sarov: Russian Federal Nuclear Centre – All-Soviet Union Research Institute of Experimental Physics.
5. Barker L.M., Hollenbach R.E. (1970) Shock-wave studies of PMMA, fused silica, and sapphire. *Journal of Applied Physics*. 41. pp 4208–4226. DOI: 10.1063/1.1658439.
6. Savinykh A.S., Kanel G.I., Razorenov S.V. (2011) Prochnost' sapfira pri otkol'nom razrushenii [Strength of sapphire at spall fracture]. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics Letters*. 37(7). pp. 8–15.
7. Belov N.N., Demidov V.N., Efremov L.V. et al. (1992) Komp'yuternoe modelirovanie dinamiki vysokoskorostnogo udara i soputstvuyushchikh fizicheskikh yavleniy [Computer simulation of the high-speed impact dynamics and related physical phenomena]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 35(8). pp 5–49.

8. Afanas'eva S.A., Belov N.N., Tolkachev V.F., Khabibulin M.V., Yugov N.T. (1999) Oso-
bennosti udarno-volnovogo deformirovaniya poristoy keramiki Al_2O_3 [Features of shock-
wave deformation of porous Al_2O_3 ceramics]. *Doklady Akademii Nauk*. 368(4). pp 474–481.
9. Belov N.N., Yugov N.T., Tabachenko A.N. et al. (2002) Matematicheskoe modelirovanie
protseessov deformirovaniya i razrusheniya metallokeramiki v usloviyakh dinamicheskogo
nagruzheniya [Mathematical modeling of deformation and fracture of the cermet in terms of
dynamic loading]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*.
8. pp. 54–59.
10. Belov N.N., Yugov N.T., Kopanitsa D.G., Yugov A.A. (2005) Dinamika vysokoskorostnogo
udara i sopushtvuyushchie fizicheskie yavleniya [Dynamics of high-speed impact and related
physical phenomena]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo uni-
versiteta – Journal of Construction and Architecture*. pp. 356.
11. Belov N.N., Kabantsev O.V., Kopanitsa D.G., Yugov N.T. (2008) *Raschetno-
eksperimental'nyy metod analiza dinamicheskoy prochnosti elementov zhelezobetonnykh kon-
struktsiy* [Calculation and experimental method for the analysis of the dynamic strength of
elements of reinforced concrete structures]. Tomsk: STT.
12. Yugov N.T., Belov N.N., Yugov A.A. (2010) *Raschet adiabaticheskikh nestatsionarnykh
techeniy v trekhmernoy postanovke (RANET-3)* [Calculation of adiabatic unsteady flows in a
three-dimensional formulation (RANET-3)]. RF Patent 2010611042.
13. Geniev G.A., Kissyuk V.N. (1965) K voprosu obobshcheniya teorii prochnosti betona [On
the generalization of the theory of concrete strength]. *Beton i zhelezobeton*. 2. pp. 16–29.
14. Access mode: https://en.wikipedia.org/wiki/Aluminium_oxynitride.
15. Senina M.O., Lemeshev D.O. (2016) Sposoby sinteza poroshkov alyumomagnievoy shpineli
dlya polucheniya opticheski prozrachnoy keramiki (obzor) [Methods of synthesizing of mag-
nesium-aluminum spinel powders to produce optically transparent ceramics (review)]. *Us-
pekhi v khimii i khimicheskoy tekhnologii*. 30(7). pp. 101–103.
16. Access mode: <https://en.wikipedia.org/wiki/Spinel>.
17. Anisichkin V.F. (1980) K raschetu udarnykh adiabat khimicheskikh soedineniy [To the cal-
culation of shock adiabats of chemical compounds]. *Fizika goreniya i vzryva – Combustion,
Explosion and Shock Waves*. 5. pp. 151–153.

Received: May 24, 2020

УДК 532.542, 532.135

DOI 10.17223/19988621/67/8

Е.И. Борзенко, Д.Н. Гарбузов

ИССЛЕДОВАНИЕ УЧАСТКА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ¹

Рассматривается течение степенной жидкости в круглой трубе, на входе которой задан однородный профиль скорости. Сформулирована математическая постановка и разработан численный алгоритм решения, основанный на методе контрольного объема и корректирующей процедуре SIMPLE. Проведены параметрические исследования задачи в диапазоне изменения числа Рейнольдса Re от 0.1 до 80 и степени нелинейности n от 0.2 до 1.5. Проиллюстрировано разделение области течения на зону гидродинамической стабилизации потока в окрестности входной границы и зону одномерного течения. Построены зависимости размеров зоны стабилизации в зависимости от Re и n . Продемонстрировано согласование численных результатов с данными других исследований.

Ключевые слова: *степенная жидкость, труба, участок гидродинамической стабилизации, метод контрольного объема, параметрические исследования.*

Участок гидродинамической стабилизации ламинарного потока вязкой жидкости в плоском канале или круглой трубе, на котором происходит полное развитие профиля скорости от однородного до установившегося, исследуется достаточно давно. Так, в 1922 году в [1] была впервые проанализирована зона установления потока ньютоновской жидкости в круглой трубе. В настоящее время данные о длине зоны стабилизации представляют интерес для конструкторов и инженеров, разрабатывающих технологическое оборудования для переработки жидких материалов, в особенности проявляющих неньютоновские свойства. Сложность экспериментального измерения длины делает численное моделирование надежной альтернативой. Обзор экспериментальных и численных исследований для случая ньютоновской и псевдопластичных сред представлен в [2, 3]. Однако несмотря на обширность исследований данного течения существуют противоречия в данных по значениям длины участка стабилизации [3].

Зона установления течения степенной жидкости в плоских каналах подробно исследована в работе [4]. Представлена аппроксимация длины участка установления L_0 в зависимости от значений числа Рейнольдса Re и степени нелинейности n , учитывающая немонотонность ее поведения в области малых значений n и конечное значение длины для ползущего течения. В работах [2, 5, 6] были приведены результаты исследования развития потока псевдопластичной жидкости. Продемонстрировано, что при умеренных значениях числа Рейнольдса длина зоны гидродинамической стабилизации является функцией степени нелинейности, в то время как при больших значениях Re рассматриваемая зависимость некорректна. Кроме того, получена зависимость длины зоны установления течения неньюто-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00412).

новской жидкости в трубе от степени нелинейности. В работах [7, 8] исследуются течения бингамовского пластика.

В настоящей работе проведено математическое моделирование ламинарного течения несжимаемой степенной жидкости в осесимметричной трубе в интервале изменения степени нелинейности, захватывающем и псевдопластичный и дилатантный диапазоны, с целью определения длины зоны гидродинамической стабилизации потока. При этом использованы различные методики определения длины зоны и проведен их сравнительный анализ.

Постановка задачи

Рассматривается ламинарное установившееся течение степенной несжимаемой жидкости в круглой осесимметричной трубе радиусом R . Используется цилиндрическая система координат. Область течения ограничена твердыми стенками (Γ_2), входным (Γ_3) и выходным (Γ_4) сечениями (рис. 1). Во входном сечении (Γ_3) задается однородный профиль скорости. В сечении Γ_4 задается нулевая радиальная компонента скорости и выполняется мягкое граничное условие, которое предполагает нулевую производную аксиальной скорости по z . В силу симметрии потока относительно оси трубы искомые функции не будут зависеть от угловой координаты. На границе Γ_1 выполняется условие симметрии потока, на Γ_2 – условие прилипания. Продольный размер трубы выбирается достаточным, чтобы исключить влияние входной границы на характер течения в выходном сечении.

Математическая постановка включает уравнения движения и неразрывности, которые в безразмерных переменных в векторном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \text{Re}(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\eta \mathbf{E}), \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Реологическое поведение среды описывается законом Оствальда – де Вааля, в соответствии с которым эффективная вязкость определяется формулой

$$\eta = A n^{-1}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{U}$ – вектор скорости с проекциями (U, V) на оси цилиндрической системы координат (r, z) , p – давление, $A = \sqrt{2e_{ij}e_{ji}}$ – интенсивность тензора скоростей

деформаций E , где $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right)$, $\text{Re} = \frac{\rho U_0^{2-n} R^n}{k}$ – число Рейнольдса, ρ –

плотность жидкости, k – консистенция среды, n – коэффициент нелинейности. В качестве безразмерных масштабов длины, скорости и давления используются

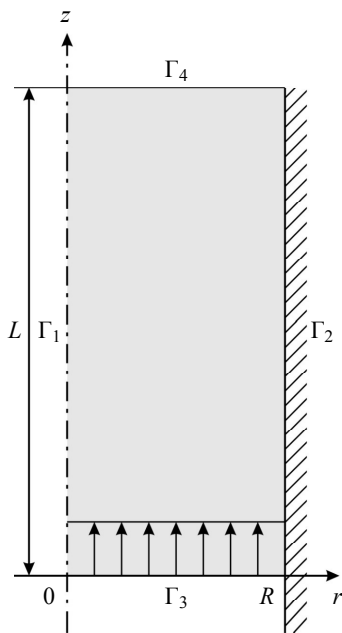


Рис. 1. Область течения и система координат
Fig. 1. Flow region and a system of axes

величины: R , U_0 – значение скорости во входном сечении и комплекс $k \left(\frac{U_0}{R} \right)^n$.

Перечисленные граничные условия, дополняющие систему уравнений (1), (2), запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \frac{\partial V}{\partial r} &= 0, \quad U = 0; \\ \Gamma_2 : V &= 0, \quad U = 0; \\ \Gamma_3 : V &= 1, \quad U = 0; \\ \Gamma_4 : \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \quad U = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию полей скорости и давления, удовлетворяющих системе уравнений (1), (2) с граничными условиями (3). Зона, в которой происходит перестроение течения, называется зоной гидродинамической стабилизации потока, размеры которой определяются параметрами задачи и видом граничных условий. При этом в выходном сечении реализуется течение, описываемое в рамках одномерной задачи об установившемся движении степенной жидкости в трубе под действием перепада давления, обеспечивающим единичный расход [9].

Метод решения

Сформулированная задача решается численно с помощью метода контрольных объемов и корректирующей процедуры SIMPLE [10], при этом дискретизация уравнения движения проводится с использованием противопоточной схемы. Для нахождения стационарных полей скорости и давления применяется метод установления [11], который предполагает добавление в уравнения движения производной скорости по времени, при этом расчеты ведутся до установления стационарного режима. Данная методика успешно применялась для решения задачи о напорном течении жидкости в канале сложной конфигурации [12].

В табл. 1 приведены значения аксиальной скорости на оси V_1 в выходном сечении и относительной погрешности $\varepsilon = \frac{V_{\text{теор}} - V_1}{V_{\text{теор}}} \cdot 100\%$, где $V_{\text{теор}} = \frac{3n+1}{n+1}$, вы-

численные на последовательности сеток. Представленные результаты демонстрируют аппроксимационную сходимость численной методики.

Т а б л и ц а 1

Аппроксимационная сходимость при $Re = 20$; $n = 0.75$

Шаг сетки	V_1	ε , %
1/10	1.836971	1.086185
1/20	1.849712	0.400185
1/40	1.852771	0.235415
1/80	1.852774	0.235415

В табл. 2 представлены значения длины участка гидродинамической стабилизации L_0 на последовательности сеток, вычисленные в соответствии с методиками различных авторов. Величина длины L_{01} определяется как расстояние от входа в трубу до сечения, в котором значение касательного напряжения на стенке отличается от напряжения стабилизированного течения не более чем на 1% [13]. Выражение для стабилизированного касательного напряжения на стенке определяется формулой

$$\tau_{\text{ст}} = \left(\frac{dV}{dr} \Big|_{\text{ст}} \right)^n = \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n$$

и следует из аналитического решения задачи об установившемся течении степенной жидкости в круглой трубе. Длина участка установления L_{02} определяется как расстояние от входного сечения до сечения, в котором аксиальная скорость при $r = 0$ будет составлять 0.99 от $V_{\text{теор}}$ [2]. Величина L_{03} определяется исходя из того, что в стабилизированном потоке жидкости радиальная составляющая скорости близка к нулю и не превосходит значение 0.01.

Таблица 2

Аппроксимационная сходимость L_0 при $Re = 10$; $n = 0.75$

Шаг сетки	L_{01}	L_{02}	L_{03}
1/10	2.5479	6.6063	2.2825
1/20	2.8152	3.6912	2.2879
1/40	2.9710	3.4873	2.2859
1/80	3.0167	3.4819	2.2839

Аппроксимационная сходимость расчета длины зоны наблюдается для любого способа расчета, однако вычисленные значения отличаются друг от друга, что может являться причиной различий при сравнении результатов различных авторов, отмеченные в работе [3]. Все дальнейшие расчеты выполнены на сетке с шагом 1/40 с использованием второй методики определения длины участка гидродинамической стабилизации потока.

Результаты расчетов

В результате численного эксперимента показано, что в области течения можно выделить два характерных участка: участок двумерного распределения кинематических характеристик в окрестности входа и участок одномерного распределения в остальной части области течения (рис. 2). В зоне одномерного распределения характеристики потока соответствуют полностью развитому течению в трубе с единичным расходом. В зоне двумерного распределения происходит перестроение однородного профиля в полностью развитый. В литературе ее называют зоной гидродинамической стабилизации потока. Размеры последней определяются параметрами жидкости и потока. При проведении параметрических расчетов величина длины канала выбиралась достаточной для того, чтобы в выходном сечении поток соответствовал одномерному установившемуся течению рассматриваемой жидкости с единичным расходом. Видно, что на входе в окрестности стенки образуется пик давления.

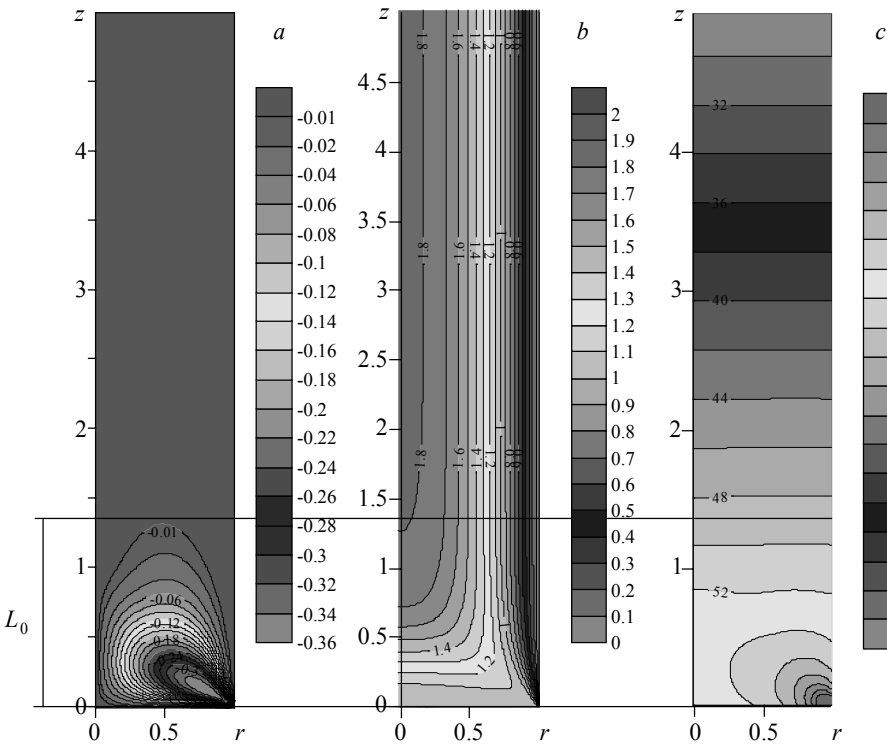


Рис. 2. Поля распределения U (a), V (b) и P (c) при $Re = 0.1$, $n = 0.7$
Fig. 2. Distributions of (a) U , (b) V , and (c) P at $Re = 0.1$, $n = 0.7$

На рис. 3 продемонстрированы распределения компоненты скорости V в поперечных сечениях с ростом аксиальной координаты для значений $n = 0.2$ и 1.5 . Видно, что изначально однородный профиль скорости постепенно перестраивается. Наряду с торможением потока на стенке, где реализуется условие прилипания, вблизи оси симметрии трубы скорость увеличивается. В конечном итоге профиль скорости соответствует полностью развитому, определяемому по следующей формуле [9]:

$$V = \frac{3n+1}{n+1} \left(1 - r^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Скорость V , соответствующая развитому профилю, обозначена на рис. 3 точками. Отметим, что с уменьшением степени нелинейности профиль скорости в зоне одномерного течения больше соответствует изначально однородному, заданному во входном сечении, профилю.

Сравнение распределений скорости V вдоль оси трубы и в выходном сечении с результатами [14] при разных значениях коэффициента нелинейности представлено на рис. 4. Сплошная линия – результаты настоящей работы, пунктирная – результаты [14]. Наблюдается хорошее качественное и количественное совпадение результатов для всех значений n . Видно, что с уменьшением значения n происходит уменьшение максимальной скорости на выходе.

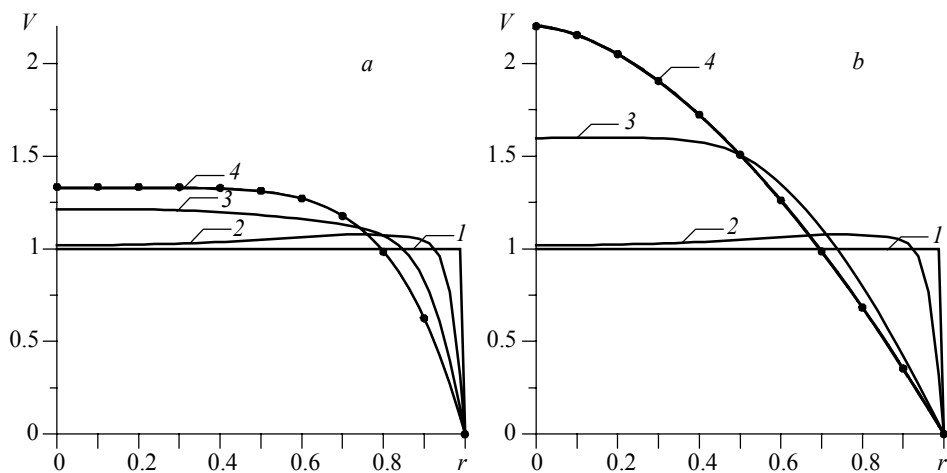


Рис. 3. Развитие профиля аксиальной скорости при $Re = 10$:

$a - n = 0.2, z = 0$ (1), 0.25 (2), 0.875 (3), 15 (4); $(b) n = 1.5; z = 0$ (1), 0.25 (2), 0.625 (3), 10 (4)

Fig. 3. Development of the axial velocity profile at $Re = 10$:

(a) $n = 0.2, z = (1) 0, (2) 0.25, (3) 0.875, \text{ and } (4) 15$; (b) $n = 1.5; z = (1) 0, (2) 0.25, (3) 0.625, \text{ and } (4) 10$

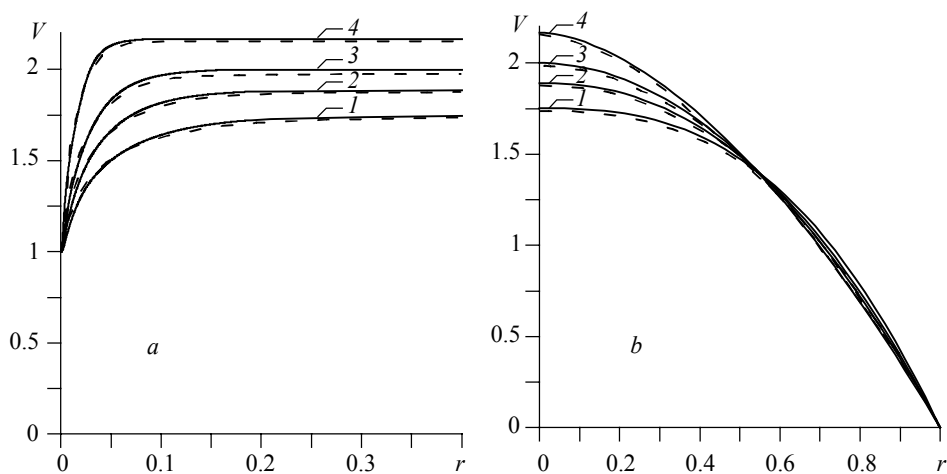


Рис. 4. Распределение аксиальной скорости на границе Γ_1 (a) и Γ_2 (b):

$Re = 100/2^n, n = 0.6$ (1), 0.8 (2), 1 (3), 1.4 (4)

Fig. 4. Axial velocity distribution at the boundary (a) Γ_1 and (b) Γ_2 :

$Re = 100/2^n, n = (1) 0.6, (2) 0.8, (3) 1, (4) 1.4$

На рис. 5 показаны результаты параметрических расчетов зависимости длины зоны гидродинамической стабилизации L_0 от степени нелинейности n при разных значениях числа Re . Как видно из графика, длина участка стабилизации растет при уменьшении n до некоторого значения, после чего начинает уменьшаться с дальнейшим уменьшением n . Такое поведение можно объяснить следующим. С одной стороны, уменьшение степени нелинейности приводит к уменьшению эффективной вязкости в окрестности стенки и, как следствие, большей длине зоны

гидродинамической стабилизации. С другой стороны, с уменьшением n полностью развитый профиль больше соответствует однородному, который задан во входном сечении, что должно приводить к меньшим размерам зоны стабилизации. По-видимому, при $n > 0.3$ доминирует первый эффект, а при $n < 0.3$ – второй.

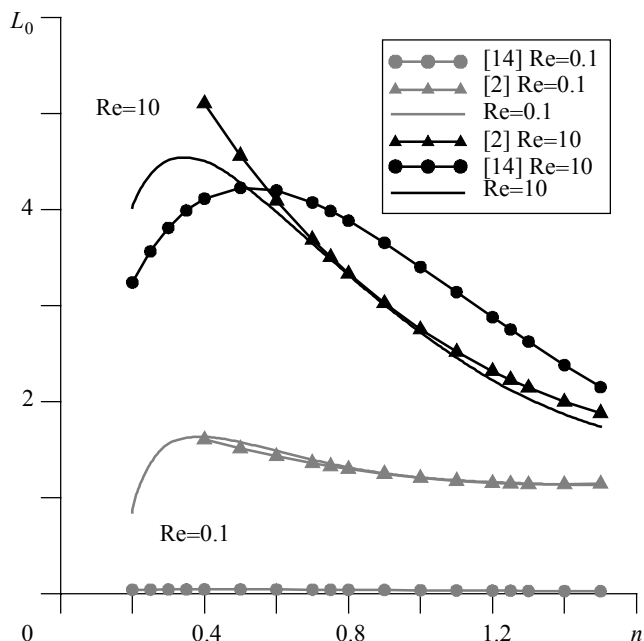


Рис. 5. Зависимости длины участка гидродинамической стабилизации L_0 от коэффициента нелинейности n при $Re = 0.01$ и 10

Fig. 5. Development length L_0 as a function of the power-law index n at $Re = 0.01$ and 10

Из рис. 5 видно, что длина участка гидродинамической стабилизации при увеличении значения числа Рейнольдса увеличивается. Представлено сравнение полученной зависимости длины участка гидродинамической стабилизации от n с работой [2]:

$$L_{02} = 2 \left[\left(0.246n^2 - 0.675n + 1.03 \right)^{1.6} + \left(0.4536 \left(\frac{2n}{6n+2} \right)^n Re \right)^{1.6} \right]^{1/1.6}.$$

Наблюдается качественное совпадение. Стоит отметить, что зависимость, описываемая формулой из работы [2], является корректной в области $0.4 < n < 1.5$, что хорошо видно из рис. 5, и не описывает немонотонность кривой. Зависимость для безразмерной длины участка установления в [15], описывается аппроксимационной формулой

$$L_{02} = 0.346 \left[\frac{3n+1}{n+1} \right]^2 \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n Re.$$

Последняя хорошо работает в области $Re > 10$ и является некорректной при малых значениях Re , не описывая конечную длину в области ползущего течения.

Рис. 6, *b* демонстрирует зависимость участка гидродинамической стабилизации от значения числа Рейнольдса в области малых Re ($0 < Re < 1$). Видно, что в области ползущего течения наблюдается слабая зависимость L_0 от Re . Из рис. 6, *a* видно, что общая картина зависимости длины зоны установления от значения числа Рейнольдса отличается от таковой для малых значений Re . Исходя из результатов, полученных при $1 < Re < 80$, можно сделать вывод, что L_0 линейно зависит от Re . Наблюдается качественное и количественное соответствие с результатами, представленными в работах [2]. Стоит отметить, что количественное совпадение с [15] имеется только в области линейной зависимости L_0 от Re .

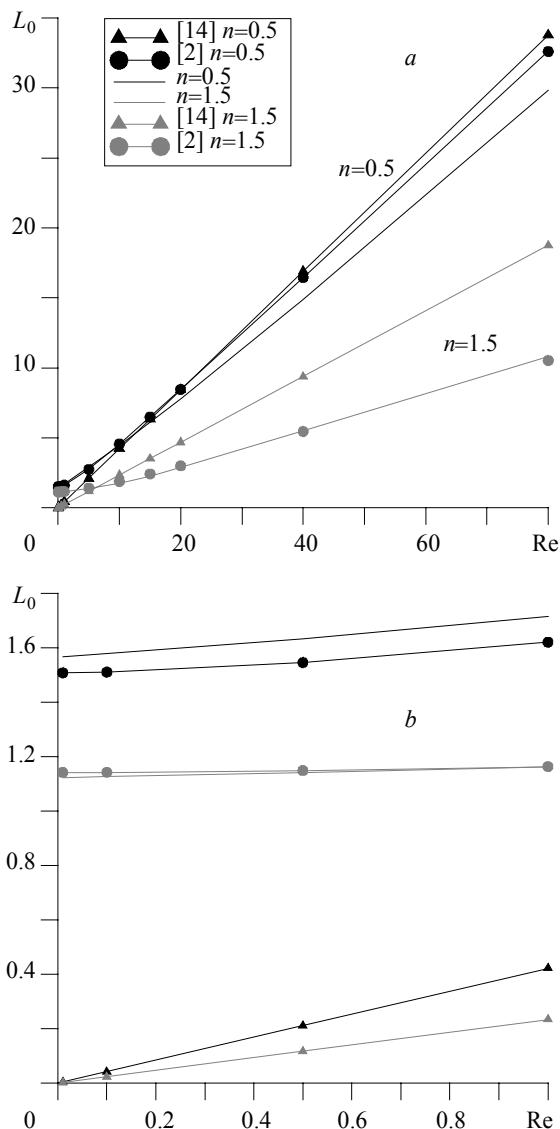


Рис. 6. Изменение L_{02} с увеличением Re
Fig. 6. Variation of L_{02} with increasing Re

Заключение

В результате проведенных исследований установлена немонотонная зависимость длины зоны гидродинамической стабилизации потока от степени нелинейности. Показано, что результаты расчетов длины зоны гидродинамической стабилизации могут значительно отличаться друг от друга в зависимости от выбранной методики её определения. С уменьшением n до некоторого значения размеры зоны увеличиваются, а после начинают уменьшаться. Показано, что зависимость L_0 от числа Рейнольдса Re в диапазоне от 1 до 80 достаточно хорошо аппроксимируется линейной зависимостью. В области малых Re размеры зоны практически не изменяются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schiller L. Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung // ZAMM – Zeitschrift für Angew. Math. und Mech. 1922. V. 2 Iss. 6. P. 478–478. DOI: 10.1002/zamm.19220020615.
2. Poole R.J., Ridley B.S. Development-length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids // J. Fluids Eng. Trans. ASME. 2007. V. 129 Iss. 10. P. 1281–1287. DOI: 10.1115/1.2776969.
3. Durst F. et al. The development lengths of laminar pipe and channel flows // J. Fluids Eng. Trans. ASME. 2005. V. 127 Iss. 6. P. 1154–1160. DOI: 10.1115/1.2063088.
4. Fernandes C. et al. Development length in planar channel flows of inelastic non-Newtonian fluids // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2018. V. 255. P. 13–18. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2018.02.011.
5. Chebbi R. Laminar flow of power-law fluids in the entrance region of a pipe // Chem. Eng. Sci. 2002. V. 57. Iss. 21. P. 4435–4443. DOI: 10.1016/S0009-2509(02)00422-0.
6. Capobianchi M., McGah P. Developing Region Solution for High Reynolds Number Laminar Flows of Pseudoplastic and Dilatant Fluids in Circular Ducts // J. Fluids Eng. 2017. V. 139 Iss. 4. DOI: 10.1115/1.4035242.
7. Ookawara S. et al. Unified Entry Length Correlation for Newtonian, Power Law and Bingham Fluids in Laminar Pipe Flow at Low Reynolds Number // J. Chem. Eng. JAPAN. 2000. V. 33 Iss. 4. P. 675–678. DOI: 10.1252/jcej.33.675.
8. Poole R.J., Chhabra R.P. Development Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Yield Stress Fluids // J. Fluids Eng. 2010. V. 132 Iss. 3. DOI: 10.1115/1.4001079.
9. Bird R.B., Dai G.C., Yarusso B.J. The Rheology and Flow of Viscoplastic Materials // Rev. Chem. Eng. 1983. V. 1. Iss. 1. P. 1–70. DOI: 10.1515/revce-1983-0102.
10. Патнкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и механики жидкости. М.: Энергоиздат, 1988. 526 с.
11. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы: введение в теорию. М.: Наука, 1973. 400 с.
12. Борзенко Е.И., Дьякова О.А. Исследование течения вязкой жидкости в Т-образном канале с условиями прилипания – скольжение на твердой стенке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 42(4). С. 58–69. DOI: 10.17223/19988621/42/6.
13. Янков В.И. и др. Переработка волокнообразующих полимеров. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 264 с.
14. Chen-I Hung, Yeong-Yan Perng. Flow of non-Newtonian fluid in the entrance region of a tube with porous walls // Int. J. Heat Fluid Flow. 1991. V. 12 Iss. 3. P. 263–268. DOI: 10.1016/0142-727X(91)90061-Y.
15. Matras Z., Nowak Z. Laminar entry length problem for power law fluids // Acta Mech. 1983. V. 48 Iss. 1–2. P. 81–90. DOI: 10.1007/BF01178498.

Статья поступила 27.05.2020 г.

Borzenko E.I., Garbuzov D.N. (2020) INVESTIGATION OF A HYDRODYNAMIC ENTRANCE REGION FOR A POWER-LAW FLUID FLOW IN A ROUND PIPE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 67. pp. 78–88

DOI 10.17223/19988621/67/8

Keywords: power-law fluid, pipe, hydrodynamic entrance region, finite volume method, parametric studies.

The paper presents a study of the Ostwald – de Waele fluid flow in a round pipe with a uniform velocity profile specified at the inlet section. Mathematical formulation of the problem is presented using dimensionless variables. A numerical algorithm is developed on the basis of the finite volume method and SIMPLE procedure. Parametric studies of the flow are carried out for the Reynolds number varying from 0.1 to 80 and the power-law index varying from 0.2 to 1.5. It is shown that the flow can be distinguished into a developing flow zone in the inlet boundary vicinity and a fully developed flow zone in the rest part of the flow region. Dependency diagrams are plotted for the development length depending on the power-law index and Reynolds number. The first diagram is found to be non-monotonic. The development length is shown to be almost linearly dependent on the Reynolds number in the range from 1 to 80. In the region of low Reynolds numbers, the length remains almost uniform. The agreement of the obtained numerical results with data from other studies is shown.

Financial support. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-08-00412).

Evgeniy I. BORZENKO (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Dmitriy N. GARBUZOV (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitrij.garbuzov.98@mail.ru

REFERENCES

1. Schiller L. (1922) Untersuchungen über laminare und turbulente strömung. *ZAMM Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2(6). pp. 478–478. DOI: 10.1002/zamm.19220020615.
2. Poole R.J., Ridley B.S. (2007) Development-length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids. *Journal of Fluids Engineering*. 129(10). pp. 1281–1287. DOI: 10.1115/1.2776969.
3. Durst F., Ray S., Ünsal B., Bayoumi O.A. (2005) The development lengths of laminar pipe and channel flows. *Journal of Fluids Engineering*. 127(6). pp. 1154–1160. DOI: 10.1115/1.2063088.
4. Fernandes C., Araujo M.S., Nobrega J.M., Ferras L.L. (2018) Development length in planar channel flows of inelastic non-Newtonian fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 255. pp. 13–18. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2018.02.011.
5. Chebbi R. (2002) Laminar flow of power-law fluids in the entrance region of a pipe. *Chemical Engineering Science*. 57(21). pp. 4435–4443. DOI: 10.1016/S0009-2509(02)00422-0.
6. Capobianchi M., McGah P. (2017) Developing region solution for high Reynolds number laminar flows of pseudoplastic and dilatant fluids in circular ducts. *Journal of Fluids Engineering*. 139(4). DOI: 10.1115/1.4035242.
7. Ookawara S., Ogawa K., Dombrowski N., Amooie-Foumeny E., Riza A. (2000) Unified entry length correlation for Newtonian, power law and Bingham fluids in laminar pipe flow at low Reynolds number. *Journal of Chemical Engineering of Japan*. 33(4). pp. 675–678. DOI: 10.1252/jcej.33.675.
8. Poole R.J., Chhabra R.P. (2010) Development length requirements for fully developed laminar pipe flow of yield stress fluids. *Journal of Fluids Engineering*. 132(3). DOI: 10.1115/1.4001079.

9. Bird R.B., Dai G.C., Yarusso B.J. (1983) The rheology and flow of viscoplastic materials. *Reviews in Chemical Engineering*. 1(1). pp. 1–70. DOI: 10.1515/revce-1983-0102.
10. Patankar S.V. (1988) *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i mekhaniki zhidkosti* [Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energoatomizdat.
11. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.
12. Borzenko E.I., Diakova O.A. (2016) Issledovanie techeniya vyazkoy zhidkosti v T-obraznom kanale s usloviyami prilipaniya – skol'zheniya na tverдой stenke [Investigation of viscous fluid flow in T-shaped channel with no slip/slip boundary conditions on the solid wall. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 58–69. DOI: 10.17223/19988621/42/6.13.
13. Yankov V.I., Boyarchenko V.I., Pervadchyuk V.P., Glot I.O., Shakirov N.V. (2008) *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techenie polimerov v kanalakakh* [Processing of fiber-forming polymers. Fundamentals of the rheology of polymers and the flow of polymers in channels]. Moscow, Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.
14. Chen-I Hung, Yeong-Yan Perng (1991) Flow of non-Newtonian fluid in the entrance region of a tube with porous walls. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 12(3). pp. 263–268. DOI: 10.1016/0142-727X(91)90061-Y.
15. Matras Z., Nowak Z. (1983) Laminar entry length problem for power law fluids. *Acta Mechanica*. 48(1–2). pp. 81–90. DOI: 10.1007/BF01178498.

Received: May 27, 2020

УДК 531.57

DOI 10.17223/19988621/67/9

**В.В. Буркин, А.С. Дьячковский, А.Н. Ищенко, В.З. Касимов,
К.С. Рогаев, Н.М. Саморокова**

ИССЛЕДОВАНИЕ ГОРЕНИЯ ПАСТООБРАЗНОГО ТОПЛИВА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМАХ ЗАРЯЖАНИЯ¹

Работа посвящена исследованию горения и диспергирования модельного пастообразного топлива в условиях модельной баллистической установки при использовании различных компоновок выстрела. Рассмотрено два варианта закона диспергирования с учетом давления на фронте горения топлива и с учетом ускорения метаемой сборки в стволе. Рассмотрена газодинамическая картина выстрела с использованием пастообразного топлива в качестве присоединенного заряда. Проведенное комплексное экспериментально-теоретическое исследование позволило получить универсальный закон диспергирования для модельного пастообразного топлива в условиях модельной баллистической установки.

Ключевые слова: *внутренняя баллистика, ствольные системы, газодинамика, присоединенный заряд, горение, диспергирование пастообразных топлив.*

Применение новых топлив в качестве присоединенного заряда (ПЗ), является одним из способов повышения дульной скорости метаемой сборки (МС). Использование ПЗ позволяет повысить скорость снаряда на дульном срезе без повышения максимального давления на дно канала ствола. Повышение дульной скорости при использовании перспективных топлив в режиме ПЗ возможно за счет следующих факторов: повышения средней плотности заряжания; перераспределения энергии продуктов горения в заснарядном пространстве в процессе выстрела; использования реактивного подгона снаряда в стволе. Более подробно данные преимущества представлены в работах авторов [1–5]. Для повышения скорости метания наряду с пастообразными топливами в качестве ПЗ могут выступать и высокоплотные заряды конвективного горения [6–8], а также другие нетрадиционные схемы выстрела [9–15].

Для безопасного применения топлив в перспективных и имеющихся ствольных артиллерийских системах необходимо знать законы диспергирования и горения данных топлив, позволяющие с хорошей точностью описывать процесс выстрела. Принято считать, что диспергирование ПЗ в основном зависит от давления на фронте горения, поэтому для скорости диспергирования обычно используется степенной закон. Данный закон позволяет с высокой точностью прогнозировать работу рассматриваемых топлив в режиме ПЗ при использовании порохового заряда, располагаемого в камере заряжания. Исследование диспергирования и горения топлив в режиме ПЗ проводилось при использовании метаемой сборки фиксированной массы в условиях модельной баллистической установки.

¹ В настоящей работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 8.2.09.2018 Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета.

В [16] показана возможность использования в качестве слагаемого в законе диспергирования зависимости от ускорения связки МС+ПЗ. Данное допущение позволяет прогнозировать поведение пастообразного топлива не только при использовании различных масс метаемых сборок, но и при использовании различных типов зеренных порохов.

В данной работе проведено экспериментально-теоретическое исследование горения ПЗ из модельного пастообразного топлива, направленное на получение закона его диспергирования с учетом ускорения метаемой сборки при использовании различных компоновок выстрела.

Экспериментальные исследования

Экспериментальные исследования проводились на баллистической установке калибром 30 мм. Данная баллистическая установка входит в состав баллистического стенда [17], позволяющего регистрировать основные баллистические характеристики (зависимость давления в камере заряжания от времени, скорость метаемой сборки в стволе и дульную скорость метаемой сборки). Внешний вид установки представлен на рис. 1.



Рис. 1. Внешний вид модельной баллистической установки

Fig. 1. Design of a model ballistic installation

При проведении экспериментов на измерительно-регистрирующем комплексе [18] записываются следующие параметры: 1) давление в камере заряжания $P_{\text{кн}}(t)$ с использованием пьезокварцевых датчиков 2Т6000 и комплекта аппаратуры «Нейва-10000» со специальным программным обеспечением для измерения давления в баллистических установках в диапазоне от 0 до 600 МПа; 2) скорость МС $V_{\text{сн}}(t)$ – измерителем скорости снаряда «ДДС-6000» на основе СВЧ-радара [19]; 3) скорость МС на дульном срезе V – индукционным датчиком дульной скорости метаемых тел в диапазоне от 100 м/с до 3000 м/с [20].

В качестве метаемой сборки в экспериментах использовался снаряд-поршень массой $q = 100, 200$ и 400 г (рис. 2, *a–c*). Метаемая сборка состоит из пластиковой оболочки, изготовленной методом послойного наплавления SBS-пластика, стального сердечника, запрессованного в оболочку и толкающего текстолитового поддона (рис. 2, *d*).

В качестве основного зерненого порохового заряда использовались два вида одноканального с разной толщиной горящего свода (Ирбис Охота 35 и Сунар 30-06) и один вид семиканального пороха (6/7). В качестве ПЗ использовалось модельное

пастообразное топливо, располагаемое в пластиковом контейнере, изготовленном посредством наплавления SBS-пластика. Данный контейнер необходим для предотвращения горения ПЗ по боковой поверхности. Присоединенный заряд располагался в стволе непосредственно за МС.

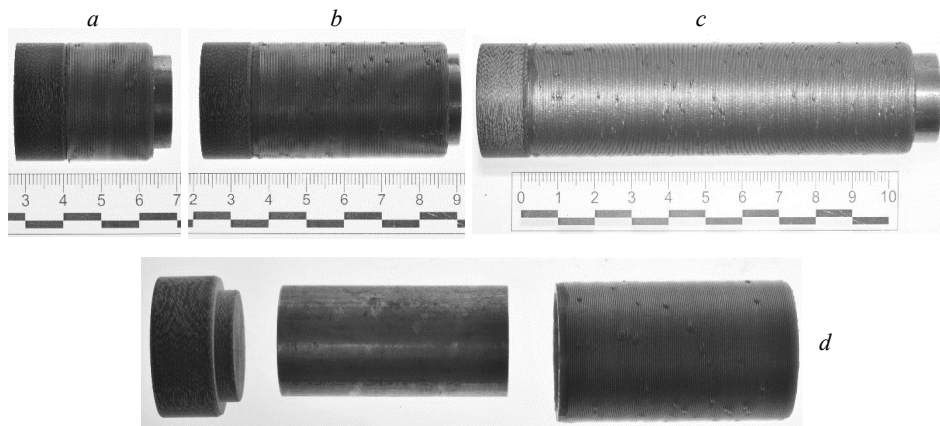


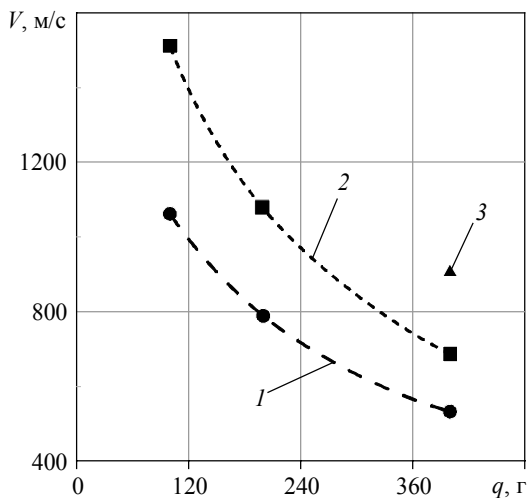
Рис. 2. Внешний вид метаемых сборок массой q , г:
 a – 100, b – 200, c – 400; d – основные компоненты метаемой сборки

Fig. 2. Configuration of projectile assemblies with mass q :
 (a) 100, (b) 200, and (c) 400 g; (d) main components of a projectile assembly

В серии экспериментов определялись основные баллистические характеристики выстрелов из модельной баллистической установки с использованием трех видов зерновых порохов и трех масс метаемых сборок. Результаты проведенной серии экспериментов представлены на рис. 3. Масса основного порохового заряда подбиралась таким образом, чтобы в камере заряжания реализовывалось максимальное давление 230–250 МПа. Видно, что при ограничении максимального давления и массе снаряда 400 г высшую скорость показывает семиканальный пороховой заряд с наибольшей толщиной горящего свода.

Рис. 3. Зависимость дульной скорости от массы метаемой сборки: 1 – выстрелы с использованием пороха марки Ирбис Охота 35; 2 – выстрелы с использованием пороха марки Сунар 30-06; 3 – выстрел с использованием пороха типа 6/7

Fig. 3. Muzzle velocity as a function of the projectile assembly mass: 1 – shots with the use of the Irbis Okhota 35 gunpowder; 2 – shots with the use of the Sunar 30-06 gunpowder; and 3 – a shot with the use of the 6/7-type gunpowder



Модель диспергирования и горения топлива

Для исследования газодинамической картины течения продуктов сгорания в заснарядном пространстве использовался программный комплекс, разработанный сотрудниками НИИ ПММ ТГУ, позволяющий проводить теоретические расчеты выстрелов с использованием классической схемы заряжания и схемы заряжания с ПЗ [21]. Программный комплекс реализован на базе математической модели, основанной на общепринятых допущениях механики многофазных сред. В математической модели принято допущение, что фронт диспергирования ПЗ считается поверхностью сильного разрыва. Соответствующими условиями динамической совместности связаны параметры справа и слева от фронта. Топливо на фронте диспергирования частично превращается в газ, а частично распадается на совокупность частиц, вбрасываемых через фронт в заснарядное пространство. Данные частицы горят в заснарядном пространстве в послонном режиме. Степень выгорания топлива во фронте диспергирования характеризовалась параметром $\psi_0 = \psi / \psi_n$ [21], который при проведении расчетов принимался равным $\psi_0 = 0.1$.

Рассмотрено два закона диспергирования ПЗ. В математической модели считалось, что ПЗ начинает гореть позже порохового заряда. В качестве характеристики начала диспергирования ПЗ используется импульс давления на фронте горения $I = \int P dt$ (импульс начала горения присоединенного заряда). В первом случае закон диспергирования присоединенного заряда представляет собой степенную зависимость от давления:

$$\begin{aligned} U_s &= 0, \text{ при } I < I_1, \\ U_s &= B_s \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^v, \text{ при } I \geq I_1. \end{aligned} \quad (1)$$

где I_1 – импульс начала диспергирования ПЗ; B_s – коэффициент в законе скорости диспергирования; P – давление в газе на фронте диспергирования; $P_{\text{атм}}$ – атмосферное давление, v – показатель степени, для исследуемого топлива данный параметр принимался равным 0.8.

Послойное горение диспергированных частиц топлива в математической модели также определялось общепринятой зависимостью от давления [21, 22]:

$$U_c = U_1 \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^v, \quad (2)$$

где U_1 – коэффициент, зависящий от химической природы топлива; v – показатель степени для исследуемого топлива.

Во втором случае рассматривался вариант, при котором скорость диспергирования в большей степени зависит от ускорения dV_{CH}/dt (или от градиента давления в ПЗ dP_s/dl):

$$\frac{dV_{\text{CH}}}{dt} = \frac{(P_{s1} - P_{s2})S}{m} = \frac{P_{s1} - P_{s2}}{l_{\text{ПЗ}}} \frac{1}{\rho} = \frac{dP_s}{dl} \frac{1}{\rho},$$

где V_{CH} – скорость метаемой сборки (скорость ПЗ); P_{s1} , P_{s2} – давления на левой и правой границе ПЗ; $l_{\text{ПЗ}}$ – длина ПЗ; S – площадь поперечного сечения ПЗ; m – масса ПЗ; ρ – плотность ПЗ.

Закон диспергирования с учетом ускорения связки МС+ПЗ записывался в виде

$$U_s = 0, \text{ при } I < I_1, \\ U_s = A_s \left(\frac{\left(\frac{dV_{\text{CH}}}{dt} \right)}{g} \right)^\mu, \text{ при } I \geq I_1. \quad (3)$$

где μ – показатель степени, для исследуемого топлива данный параметр принимался равным 1; A_s – коэффициент в законе скорости диспергирования.

Закон послойного горения диспергированных частиц топлива определялся также по формуле (2).

Результаты экспериментально-теоретического анализа

Проведя газодинамический анализ расчетно-экспериментальных данных с использованием двух законов диспергирования, получены их параметры для модельного пастообразного топлива, применяемого в режиме ПЗ. Для проведенной серии экспериментов основные коэффициенты для закона диспергирования (1), полученные как параметры согласования расчетных и опытных данных при решении прямой задачи, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры законов диспергирования и послойного горения
модельного пастообразного топлива

№	P_{max} , МПа	V , м/с	I , МПа·с	B_s , м/с	$x_{\text{кд}}$, см	U_1 , мм/с	$m_{\text{оч}}$, г
Ирбис Охота 35							
1	226	1062	110	0.022	193	0.065	24
2	224	789	110	0.022	86	0.028	30
3	227	533	170	0.022	77	0.026	39
Сунар 30-06							
4	260	1511	110	0.022	80	0.055	10
5	232	1079	160	0.022	79	0.050	7
6	224	687	220	0.022	72	0.020	21
6/7							
7	242	911	330	0.022	90	0.010	24

На рис. 4 представлено сравнение расчетных и полученных в эксперименте временных зависимостей давления в камере заряжания и скорости метаемой сборки массой 400 г при использовании закона диспергирования (1). Рассогласование расчетных и экспериментальных данных по основным баллистическим характеристикам: максимальному давлению на дно канала ствола и дульной скорости снаряда не превышает 3 и 1 % соответственно. Представленные результаты свидетельствуют о получении правдоподобной картины распределения газодинамических параметров в выстреле с использованием в качестве ПЗ модельного пастообразного топлива.

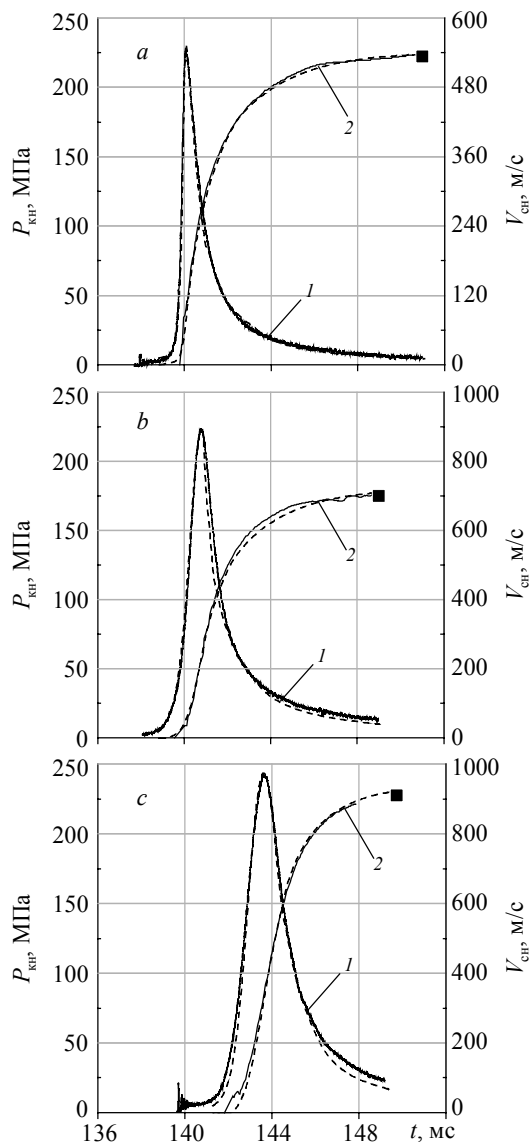


Рис. 4. Временные зависимости давления в камере заряжания и скорости метаемой сборки массой 400 г при использовании закона диспергирования (1): *a* – порох марки Ирбис Охота 35; *b* – порох марки Сунар 30-06; *c* – порох типа 6/7; 1 – давление в камере заряжания; 2 – скорость метаемой сборки в стволе; ■ – дульная скорость МС; — эксперимент; --- расчет

Fig. 4. Time dependences of the pressure in the loading chamber and the speed of the projectile assembly with the mass of 400 g when using the law of dispersion (1): (a) the Irbis Okhota 35 gunpowder, (b) the Sunar 30-06 gunpowder, and (c) the 6/7-type gunpowder; 1, pressure in the loading chamber; 2, speed of the projectile assembly in the barrel; ■ – muzzle velocity of MS; — experiment; --- calculation

Как видно из табл. 1 увеличение массы снаряда ведет к увеличению импульса задержки, так как коэффициент B_s в законе диспергирования сохранялся неизменным, в качестве основного параметра согласования использовалась послойная скорость горения частиц. Понижение скорости послойного горения частиц и увеличение импульса зажигания связано с тем, что ПЗ возможно имеет большую зависимость от давления при увеличении массы метаемой сборки.

Наименьшая масса несгоревших частиц получена при использовании метаемой сборки массой 100 г совместно с пороховым зарядом марки Сунар 30-06. Стоит отметить, что при использовании семиканального порохового заряда наблюдается увеличение ширины кривой давления, однако, несмотря на это в расчетах получено увеличение недогоревшей части ПЗ. Большая величина импульса задержки I говорит о том, что ПЗ начинал диспергировать позже и практически половина его, в виде недогоревших частиц, была выброшена вслед за снарядом из ствола.

В случае использования в расчете закона диспергирования (3) также получено хорошее совпадение по основным баллистическим характеристикам. Результат сравнения расчетно-экспериментальных данных при использовании закона диспергирования с учетом ускорения представлена на рис. 5. Рассогласование теоретических результатов с результатами, полученными в ходе экспериментальной серии, составляет не более 2 % по давлению и не более 1 % по дульной скорости. Параметры закона диспергирования и закона послойного горения частиц представлены в табл. 2. При использовании закона диспергирования (3), коэффициенты скорости диспергирования ПЗ и послойного горения частиц остаются неизменными, что уменьшает количество изменяемых параметров согласования. Это позволяет сделать вывод об возможности применения данного закона горения для случаев изменения массы метаемой сборки и типа основного зернового порохового заряда в условиях модельной баллистической установки.

Таблица 2

Параметры законов горения модельного пастообразного топлива

№	$P_{\max}$, МПа	V , м/с	I , МПа·с	A_s , см/с	$x_{\text{зд}}$, см	U_1 , мм/с	$m_{\text{оч}}/m_{\text{ом}}$, г
Ирбис Охота 35							
1	226	1062	93	0.001	116	0.050	24/0
2	224	789	100	0.001	343	0.050	19/0
3	227	533	130	0.001	—	0.050	10/17
Сунар 30-06							
4	260	1511	120	0.001	66	0.050	13/0
5	232	1079	135	0.001	118	0.050	9/0
6	224	687	180	0.001	—	0.050	11/8
6/7							
7	242	911	300	0.001	—	0.050	13/2

В результате получено, что для всей серии опытов при коэффициенте скорости диспергирования ПЗ $A_s = 0.001$ м/с и послойного горения частиц $u_c = 0.05$ мм/с закон диспергирования имеет универсальный характер и может быть использован для дальнейших расчетов в условиях модельной баллистической установки.

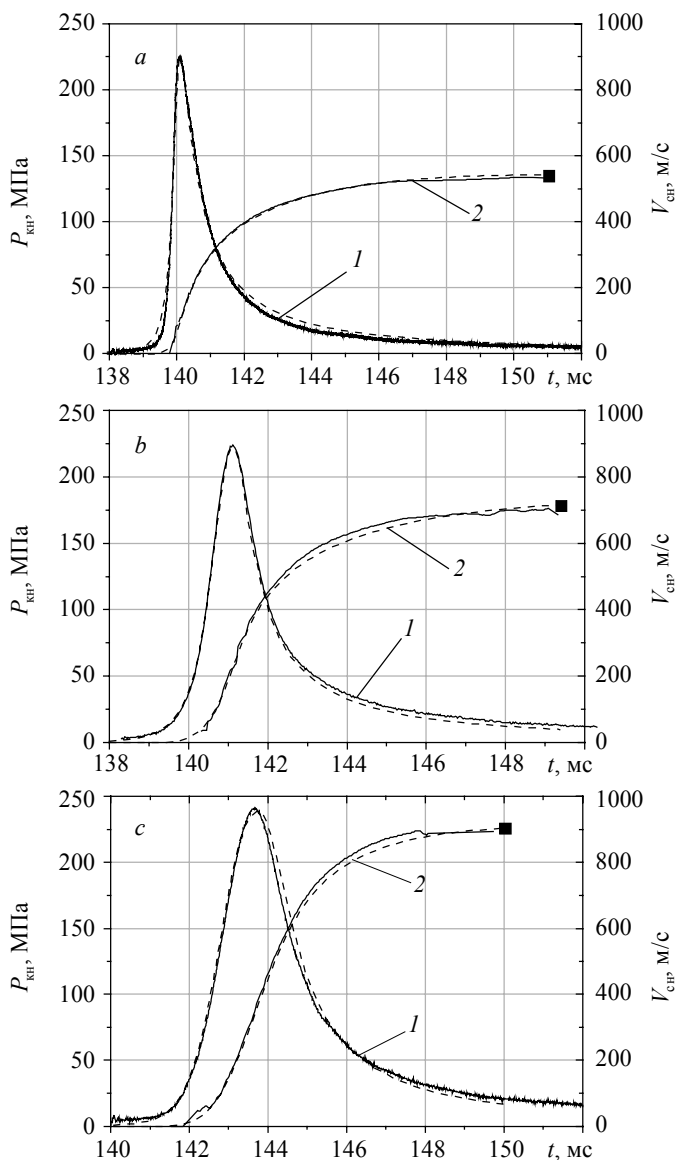


Рис. 5. Временные зависимости давления в камере заряжания и скорости метаемой сборки массой 400 г при использовании закона диспергирования (3): *a* – порох марки Ирбис Охота 35; *б* – порох марки Сунар 30-06; *в* – порох типа 6/7; 1 – давление в камере заряжания; 2 – скорость метаемой сборки в стволе; ■ – дульная скорость МС; — эксперимент; --- расчет

Fig. 5. Time dependences of the pressure in the loading chamber and the speed of the projectile assembly with the mass of 400 g when using the law of dispersion (3): (*a*) the Irbis Okhota 35 gunpowder, (*b*) the Sunar 30-06 gunpowder, and (*c*) the 6/7-type gunpowder; 1, pressure in the loading chamber; 2, speed of the projectile assembly in the barrel; ■ – muzzle velocity of MS; — experiment; --- calculation

Из сравнения теоретических результатов с применением законов диспергирования (1) и (3) следует, что они дают близкие результаты по количеству несгоревшей части ПЗ и основным баллистическим характеристикам (временным зависимостям давления в камере заряжания, скорости метаемой сборки в стволе и дульной скорости), но более универсальным является закон диспергирования с учетом ускорения связки ПЗ + МС.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о пригодности использования закона диспергирования (1) при неизменной массе снаряда и типа порохового заряда. Использование закона диспергирования (3) возможно использовать при переходе к другой массе метомой сборки или при смене типа пороха в рассматриваемом диапазоне давлений. Такой закон горения модельного топлива в качестве ПЗ может быть использован для дальнейшего прогнозных расчетов и параметрических исследований в условиях модельной баллистической установки.

Заключение

Проведенные комплексные расчетно-экспериментальные исследования, направленные на получение законов диспергирования, позволили детально изучить процессы происходящие с ПЗ, состоящим из модельного пастообразного топлива при различных компоновках выстрела.

С использованием математической модели получены картины изменения газодинамических параметров в заснарядном пространстве при использовании топлив в качестве присоединенного заряда.

Получен закон диспергирования с учетом ускорения метаемой сборки и присоединенного заряда, позволяющий с высокой точность описывать процессы в заснарядном пространстве для различных масс метаемых сборок и типов зернового порохового заряда в условиях модельной баллистической установки в рассматриваемом диапазоне давлений.

Список обозначений

ρ – плотность ПЗ [г/см³]; ν – показатель степени [БР]; υ – показатель степени [БР]; μ – показатель степени [БР]; I_1 – импульс давления на фронте горения [МПа·с]; $l_{ПЗ}$ – длина ПЗ [м]; m – масса ПЗ [г]; $m_{ом}$ – масса оставшегося моноблока топлива в виде ПЗ не сгоревшего за время выстрела [г]; $m_{оч}$ – суммарная масса оставшихся частиц топлива не сгоревших за время выстрела [г]; P – давление в газе на фронте диспергирования [МПа]; P_{max} – максимальное давление в камере заряжания [МПа]; P_{s1} , P_{s2} – давление на левой и правой границе ПЗ [МПа]; $P_{атм}$ – атмосферное давление [МПа]; $P_{кн}(t)$ – давление в камере заряжания [МПа]; q – масса метаемой сборки снаряда – поршня [г]; S – площадь поперечного сечения ПЗ [м²]; U_1 – коэффициент, зависящий от химической природы топлива [мм/с]; U_c – скорость послынного горения диспергированных частиц топлива, зависящая от давления [мм/с]; U_s – скорость диспергирования [м/с]; $U_{сг}$ – скорость послынного горения диспергированных частиц топлива, зависящая от ускорения [мм/с]; V – дульная скорость снаряда [м/с]; $V_{сн}(t)$ – скорость снаряда в стволе [м/с]; $x_{кд}$ – координата снаряда при окончании диспергирования ПЗ [см]; ψ_0 – степень превращения (отношение сгоревшей массы элемента к его начальной массе) [БР]; A_s – коэффициент в законе скорости диспергирования [мм/с]; B_s – коэффициент в законе скорости диспергирования [м/с]; g – ускорение свободного падения на поверхности Земли [м/с²].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическая модель и программный комплекс для теоретического исследования внутрибаллистических процессов в ствольных системах: учебное пособие. Томск: Изд. дом Том. гос. ун-та, 2015. 70 с.
2. Ищенко А.Н., Дьячковский А.С., Зыкова А.И., Саморокова Н.М. Исследование температурного градиента выстрела с присоединенным зарядом из пастообразных топлив // Высокоэнергетические и специальные материалы: демилитаризация, антитерроризм и гражданское применение: сборник тезисов XIV Международной конференции «HEMs-2018», 3–5 сентября 2018 года, г. Томск, Россия. Томск: Изд. дом Том. гос. ун-та, 2018. С. 245–250.
3. Zykova I., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Samorokova N.M., Diachkovskiy A.S. Determining the parameters of the combustion law of the travelling charge propellant in 30-mm ballistic installation shot // AIP Conf. Proc. Vol. 2103, 020004 (2019); Published: Apr 29, 2019. ISBN: 978–0-7354-1835-6 doi: 10.1063/1.5099868.
4. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Рогаев К.С. Исследование газодинамических особенностей ствольного старта модели с импульсным реактивным двигателем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. Т. 3. № 35. С. 45–51.
5. Ishchenko A.N., Zykova A.I., Kasimov V.Z., Samorokova N.M. Improvement of projectile muzzle velocity at using a two-segment travelling charge // Высокоэнергетические и специальные материалы: демилитаризация, антитерроризм и гражданское применение: сборник тезисов XIV Международной конференции «HEMs-2018», 3–5 сентября 2018 г., г. Томск, Россия. Томск: Изд. дом Том. гос. ун-та, 2018. С. 176–178.
6. Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В. Присоединенный высокоплотный заряд конвективного горения в комбинированной схеме выстрела: новые результаты // Горение и взрыв. 2013. № 6. С. 206–210.
7. Ермолаев Б.С., Романьков А.В., Сулимов А.А. Баллистическое подобие для выстрелов с присоединенным зарядом // Горение и взрыв. 2019. Т. 12. № 4. С. 138–144.
8. Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В., Храповский В.Е., Беляев А.А., Кроули А.Б. Конвективное горение блочных зарядов из семиканальных пороховых зерен, ингибированных поливинилбутиралем // Химическая физика. 2015. Т. 34. № 5. С. 1–11.
9. Сафронов А.И., Крайнов А.Ю. Внутренняя баллистика ствольной системы с присоединенной камерой подгона // Вестник ТГПУ. 2004. Серия: Естественные и точные науки. Т. 6. № 43. С. 67–70.
10. Сафронов А.И. Повышение скоростей метания элементов для изучения поведения материалов при импульсных воздействиях // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 27. С. 169–172.
11. Horst A.W. A Brief Journey Through the History of Gun Propulsion. ARL-TR-3671 November 2005.
12. Damse R.S., Singh A. Advanced Concepts of the Propulsion System for the Futuristic Gun Ammunition // Defence Science Journal. 2003. V. 53. No. 4. P. 341–350.
13. Xin Lu, Yanhuang Zhou, Yonggang Yu. Experimental and numerical investigations on travelling charge gun using liquid fuels // J. Appl. Mech. 2011. V. 78. Iss. 5. 051002. 6 pp.
14. Tompkins R.E., White K.J., Oberle W.F., Juhasz A.A. Traveling charge gun firings using very high burning rate propellants// Army Ballistic Research Lab Aberdeen Proving Ground Md. Technical report. ADA203307. 35 pp.
15. Ikuta K. Two stage travelling charge accelerator for high velocity // Sci. Technol. Energy. 2004. V. 65. No. 1. P. 25–27.
16. Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Рогаев К.С., Саморокова Н.М. Особенности диспергирования и горения пастообразного топлива в баллистических экспериментах // Сборник материалов IX Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», посвященной 55-летию полета Ю.А. Гагарина, г. Томск, 21–25 сентября 2016 г. Томск, 2016. С. 157–158.

17. Буркин В.В., Ищенко А.Н., Майстренко И.В., Фуфачев В.М., Дьячковский А.С., Бураков В.А., Корольков Л.В., Степанов Е.Ю., Чупашиев А.В., Рогаев К.С., Саммель А.Ю., Сидоров А.Д. Баллистический ударный стенд // Патент на полезную модель. Заявка № 2018111538 от 30.03.2018.
18. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Корольков Л.В., Рогаев К.С., Саммель А.Ю., Степанов Е.Ю., Чупашиев А.В. Информационно-измерительный комплекс НИИ ПММ ТГУ // Сборник материалов Международной молодежной научной конференции «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики», 17–19 ноября 2014. Томск: ТГУ, 2014. С. 127–128.
19. Прибор измерения скорости в стволе ДДС 6000: паспорт. М.: Таис, 2010. 8 с.
20. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Егоров А.Л., Ищенко А.Н., Корольков Л.В., Майстренко И.В., Рогаев К.С., Степанов Е.Ю., Чупашиев А.В. // Датчик дульной скорости. Патент на полезную модель № 161396, заявка RU 2015127042 06.07.2015.
21. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
22. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М.: Оборонгиз, 1962. 703 с.

Статья поступила 17.07.2020 г.

Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S., Samorokova N.M. (2020) STUDY OF THE PASTE-LIKE PROPELLANT COMBUSTION AT VARIOUS LOADING SCHEMES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 89–101

DOI 10.17223/19988621/67/9

Keywords: internal ballistics, barrel systems, gas dynamics, traveling charge, combustion, dispersion of paste-like propellants.

The experimental and theoretical studies of the paste-like propellant combustion in a model ballistic installation are implemented. The research is carried out using three masses of projectile assemblies and three types of the propellant charge. The paper presents two versions of the law of dispersion for paste-like propellants which allow accounting for the pressure on the front and acceleration of the projectile assembly with a traveling charge. The coefficients in the laws of dispersion are obtained. Using the mathematical model presented in this work, the gas-dynamic pictures of the shots when the propellants are applied as traveling charges are obtained for each dispersion law. Based on the results, a detailed study of the processes occurring with the traveling charge consisting of a model paste-like propellant is implemented for various shot arrangements. The discrepancy between theoretical results and the results obtained in the set of experiments is no more than 2% for the maximum pressure and no more than 1% for the muzzle velocity. The dispersion law accounting for the projectile assembly acceleration and traveling charge makes it possible to describe accurately the processes in the space behind the projectile for projectile assemblies of various masses and different types of granulated powder charge in terms of the model ballistic installation in the considered pressure range.

Financial support. The paper uses the results obtained while working on the project No. 8.2.09.2018 within the Tomsk State University Competitiveness Improvement Program.

Viktor V. BURKIN (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Aleksey S. D'YACHKOVSKIY (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Aleksandr N. ISHCENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Vladimir Z. KASIMOV (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ksm@niipmm.tsu.ru

Konstantin S. ROGAEV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

Nina M. SAMOROKOVA (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru.

REFERENCES

1. Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (2015) *Matematicheskaya model' i programmnyy kompleks dlya teoreticheskogo issledovaniya vnutribalisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical model and software package for the theoretical study of intraballistic processes in barrel systems]. Tomsk: Tomsk State University Publishing House.
2. D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Zykova A.I., Samorokova N.M. (2018) Temperature gradient investigation of the shot with travelling charge from pasty propellant. *Abstracts of the XIV International Conference "HEMs-2018" High-energy and Special materials: Demilitarization, Anti-terrorism and Civilian Use*. Tomsk: TSU. pp. 245–250.
3. Zykova A.I., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Samorokova N.M., Diachkovskiy A.S. (2019) Determining the parameters of the combustion law of the travelling charge propellant in 30-mm ballistic installation shot. *AIP Conference Proceedings*. 2103(020004). pp. 1–7. DOI: 10.1063/1.5099868.
4. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S. (2015) Issledovanie gazodinamicheskikh osobennostey stvol'nogo starta modeli s impul'snym reaktivnym dvigatelem [Investigation of gas-dynamic features of a moving model with a pulse jet engine (CPJE) inside a barrel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 45–51.
5. Ishchenko A.N., Zykova A.I., Kasimov V.Z., Samorokova N.M. Improvement of projectile muzzle velocity at using a two-segment travelling charge. *Abstracts of the XIV International Conference "HEMs-2018" High-energy and Special materials: Demilitarization, Anti-terrorism and Civilian Use*. Tomsk: TSU. pp. 176–178.
6. Ermolaev B.S., Romankov A.V., Sulimov A.A., Crowley A.B. (2014) Compacted modified propellant blocks as traveling charge in the hybrid shot scheme. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 39. pp. 1–10. DOI: 10.1002/prep.201400154.
7. Ermolaev B.S., Roman'kov A.V., Sulimov A.A. Ballisticheskoe podobie dlya vystrel'ov s prisoedinennym zaryadom [Ballistic similarity for gun shots with a traveling charge]. *Gorenie i vzryv – Combustion and Explosion*. 12(4). pp. 138–144. DOI: 10.30826/CE19120415.
8. Ermolaev B.S., Sulimov A.A., Roman'kov A.V., Khrapovskiy V.E., Belyaev A.A., Krouli A.B. (2015) Konvektivnoe gorenie blochnykh zaryadov iz semikanal'nykh porokhovyykh zeren, ingibirovannykh polivinilbutiralem [Convective combustion of block charges from seven-channel powder grains inhibited by polyvinyl butyral]. *Khimicheskaya fizika – Russian Journal of Physical Chemistry B: Focus on Physics*. 34(5). pp. 1–11. DOI: 10.7868/S0207401X15050040.
9. Safronov A.I., Kraynov A.Yu. (2004) Vnutrennyaya ballistika stvol'noy sistemy s prisoedinennoy kameroy podgona [Interior ballistics of the barrel system with an attached matching chamber]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Tomsk State Pedagogical University Bulletin*. 43(6). pp. 67–70.
10. Safronov A.I. (2004) Povyshenie skorostey metaniya elementov dlya izucheniya povedeniya materialov pri impul'snykh vozdeystviyakh [Increasing the speed of the projection elements

- to study the behavior of materials under impulse actions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, Seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 27. pp. 169–172. DOI: 10.14498/vsgtu297.
11. Horst A.W. (2005) *A Brief Journey Through the History of Gun Propulsion*. DOI: 10.21236/ada441021.
 12. Damse R.S., Singh A. (2003) Advanced concepts of the propulsion system for the futuristic gun ammunition. *Defence Science Journal*. 53(4). pp. 341–350. DOI: 10.14429/dsj.53.2279.
 13. Xin Lu, Yanhuang Zhou, Yonggang Yu. (2011) Experimental and numerical investigations on traveling charge gun using liquid fuels. *Journal of Applied Mechanics*. 78(5). pp. 051002-1–051002-6. DOI: 10.1115/1.4004292.
 14. Tompkins R.E., White K.J., Oberle W.F., Juhasz A.A. (1988) Traveling charge gun firings using very high burning rate propellants. *Army Ballistic Research Lab Aberdeen Proving Ground Md. Technical report – ADA203307*.
 15. Ikuta K. (2004) Two stage travelling charge accelerator for high velocity. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 65(1). pp. 25–27. DOI: 10.1002/prep.201400154.
 16. D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S., Samorokova N.M. (2016) Osobennosti dispergirovaniya i goreniya pastoobraznogo topliva v ballisticheskikh eksperimentakh [Features of dispersion and combustion of paste-like propellant in ballistic experiments]. *Proceedings of the IX All-Russian Conference "Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics"*. Tomsk: RIAMM. pp. 157–158.
 17. Burkin V.V., Ishchenko A.N., Maystrenko I.V., Fufachev V.M., D'yachkovskiy A.S., Burakov V.A., Korol'kov L.V., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V., Rogaev K.S., Summel' A.Yu., Sidorov A.D. (2018) *Ballisticheskii udarnyy stend* [Ballistic shock stand]. RF Patent 180958.
 18. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Korol'kov L.V., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V. (2014) Informatsionno izmeritel'nyy kompleks NII PMM TGU [Data measuring complex of RIAMM]. *Proceedings of International Youth Scientific Conference "Actual Problems of Modern Continuum Mechanics and Celestial Mechanics"*. Tomsk: RIAMM. pp. 127–128.
 19. (2010) *Pribor izmereniya skorosti v stvole DDS 6000: pasport* [A device for measuring the speed in the barrel DDS 6000: passport]. Moscow: Tais.
 20. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Egorov A.L., Ishchenko A.N., Korol'kov L.V., Maystrenko I.V., Rogaev K.S., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V. (2015) *Datchik dul'noy skorosti* [Muzzle velocity sensor]. RF Patent 161396.
 21. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical simulation of intraballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.
 22. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.

Received: July 17, 2020

УДК: 539.424, 669.1

DOI 10.17223/19988621/67/10

**А.Б. Ворожцов, В.В. Платов, А.А. Козулин, А.П. Хрусталеv,
И.П. Мишин, И.А. Жуков**

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЧАСТИЦ TiB_2 НА СТРУКТУРУ, ДЕФОРМАЦИОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ И СВОЙСТВА АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА 1550¹

В работе исследовано влияние частиц TiB_2 на структуру и механические свойства алюминиевого сплава 1550 до и после деформационной обработки. Методом СВС синтезированы лигатуры, содержащие частицы TiB_2 . Для введения лигатур в расплав и улучшения распределения частиц проводилась ультразвуковая обработка расплава. Установлено влияние частиц TiB_2 на измельчение зерна сплава 1550 и изменение твёрдости и механических свойств при растяжении. Установлено, что введение частиц TiB_2 в сплав 1550 способствует увеличению показателей прочности и пластичности как литых, так и прокатанных сплавов по сравнению с исходным сплавом.

Ключевые слова: *легкие сплавы, наноразмерные частицы, диборид титана, упрочнение, структура, твёрдость, прочность, предел текучести.*

1. Введение

В настоящее время сплавы системы Al-Mg широко используются в авиационной технике, морском транспорте, изготовлении трубопроводов за счёт высокой коррозионной стойкости и хорошей свариваемости традиционными методами [1, 2]. Отечественный деформируемый сплав марки 1550 относится к сплавам системы Al-Mg и используется в виде листового проката. Наибольшие показатели свойств этого сплава достигаются за счёт дисперсионного твердения при введении таких элементов, как цирконий или скандий [3–5]. Основным недостатком данного метода упрочнения является высокая стоимость, которая приводит к значительному удорожанию изделий. Дополнительная деформационная обработка при производстве проката влияет на формирование особой внутренней структуры сплава, напрямую воздействуя на изменение механических свойств. Также для увеличения физико-механических свойств алюминиевых сплавов, кроме дисперсионного твердения и деформационной обработки, известны такие методы, как модифицирование структуры путем измельчения зерна при кристаллизации расплава и упрочнение металлической матрицы введением неметаллических частиц, волокон [6–9].

Часто при модифицировании структуры в алюминиевый сплав вводится химический иннокулятор. За счёт близких параметров кристаллического строения, иннокуляторы способны выступать в качестве центров переохлаждения в расплаве при его кристаллизации [10]. Наиболее широко используемым модификатором для сплавов алюминия является диборид титана (TiB_2). Модификатор TiB_2 вводится «ex-situ» при помощи лигатуры Al-5Ti-1B [10–12] (содержит частицы Al_3Ti и TiB_2 в алюминиевой матрице), либо синтезируется «in-situ» при помощи солей

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-90020.

K_2TiF_6 и KBF_4 [13]. Как показали последние исследования, частицы TiB_2 титана не являются достаточно активными центрами кристаллизации для измельчения зерна, но их активность зародышеобразования значительно повышается при синтезе на поверхности TiB_2 двумерного соединения Al_3Ti [10]. В работе [13] показано, что оптимальный размер частиц для их использования в качестве иннокуляторов в алюминиевых сплавах составляет от 1 до 5 мкм. Дополнительным механизмом выступает дисперсное упрочнение [14], для которого необходимо использование частиц размером до 500 нм [15–17]. При этом неметаллические наночастицы должны быть равномерно распределены в объёме алюминиевой матрицы и иметь с ней хорошую связь, которая сохранится во время движения дислокаций. Эффективным препятствием для движения дислокаций в алюминии может выступать TiB_2 благодаря его высокой твёрдости [18]. Перспективным является одновременное использование частиц TiB_2 как для модифицирования, так и для дисперсного упрочнения структуры алюминиевых сплавов. Для этого должны быть использованы лигатуры заданного состава, содержащие частицы TiB_2 в достаточном количестве нано- и микроразмерного диапазона. Так, например, в работе [19] было показано, что отдельное введение смеси модифицирующих микрочастиц TiB_2 и наночастиц оксида алюминия позволяет модифицировать структуру и упрочнять алюминиевую матрицу, увеличивая прочность и электропроводность.

Основными целями данной работы стало изготовление лигатур, пригодных для введения в расплав алюминиевого сплава 1550 при одновременном воздействии ультразвука с последующей кристаллизацией в кокиле с проведением деформационной обработки полученных сплавов до состояния листового проката в цилиндрических валках при повышенных температурах.

2. Материалы и методика

На первом этапе были синтезированы лигатуры $Al-TiB_2$ из смеси на основе алюминиевого порошка субмикронных размеров и порошка TiB_2 с бимодальным распределением размеров частиц. При изготовлении лигатур необходимым условием выступало использование порошка с бимодальными структурами. Для получения бимодального распределения частиц TiB_2 в лигатуре использован метод самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) [20]. Управляя основными факторами синтеза, такими, как скорость и температура исходной порошковой системы $Al-Ti-B$, можно регулировать размер частиц TiB_2 , формирующихся в процессе горения, и фазовый состав получаемых лигатур. Использование экзотермической реакции стехиометрического соотношения титана и бора при изготовлении лигатур делает указанный метод энергоэффективным, так как не требует подвода дополнительной энергии для инициирования и поддержания процесса горения. Морфология, дисперсность, химический состав порошковых материалов, оборудование для получения, методика проведения СВС-эксперимента подробно описана в [19, 21].

В работе после проведения трех экспериментов по синтезу были получены три смеси с бимодальным распределением частиц по размерам: смесь 1 – 0.1 мкм – 1.9 об. %, 0.9 мкм – 7.5 %; смесь 2 – 0.1 мкм – 1.1 об. %, 2 мкм – 7 %; смесь 3 – 0.1 мкм – 1.9 об. %, 1 мкм – 8.2 %.

Полученные лигатуры вводили в расплав алюминиевого сплава с одновременным ультразвуковым (УЗ) воздействием. В качестве исходного сплава использован алюминиевый сплав марки 1550 (91.9–94.68 % Al, 4.8–5.8 % Mg, 0.6 % Mn). УЗ-обработка необходима для дегазации расплава [22] и улучшения смачиваемо-

сти поверхности частиц TiB_2 [23]. 1 кг сплава 1550 помещали в графитовый тигель, расплавляли в муфельной печи (780°C) и выдерживали в течение двух часов. В расплав помещался ультразвуковой волновод и осуществлялось введение лигатуры с одновременной УЗ-обработкой при температуре расплава 730°C . УЗ-обработка осуществлялась с использованием магнитострикционного водоохлаждаемого преобразователя (мощность 4.1 кВ и частота 17.6 кГц). После полного растворения лигатуры УЗ-обработка осуществлялась в течение 2 минут. Полученный расплав выдерживали в печи в течение 30 минут. Литье расплава в стальной кокиль осуществлялось при температуре 720°C . Исходный сплав 1550 был получен с аналогичными параметрами литья без введения лигатуры. Данные о полученных сплавах приведены в табл. 1.

Таблица 1

Данные о полученных сплавах

Номер группы	Основа, сплав	Средний размер, мкм/содержание, об. % частиц TiB_2	Количество частиц TiB_2 в лигатуре, %	Количество частиц TiB_2 в 1 кг сплава, шт.
1	1550	0.1/17, 0.9/83	30	$4 \cdot 10^{20} \pm 6 \cdot 10^{10}$
2	1550	0.1/14, 2/86	30	$4 \cdot 10^{20} \pm 6 \cdot 10^{10}$
3	1550	0.1/18, 1/82	43	$4.5 \cdot 10^{20} \pm 7.3 \cdot 10^{10}$
4	1550	-	-	-

Из полученных отливок сплавов групп 1, 2, 3, 4 (табл. 1) вырезали призматические заготовки – слэбы, размерами $11 \times 17 \times 40$ мм. Для проведения прокатки использовался лабораторный двухвалковый прокатный стан с диаметром валков 80 мм и скоростью вращения 24 об/мин. Прокатка исследуемых алюминиевых сплавов проводилась в состоянии предварительного нагрева заготовок, которые помещались в муфельную печь, разогретую до 300°C , на 30 мин. Обработку прокаткой проводили до толщины слэбов с 11 до 2 мм за несколько циклов с промежуточным прогревом в течение 15 мин при температуре 300°C . Суммарная деформация слэба составляла 80 %. Каждый цикл разбивался на 7 реверсивных проходов. За один проход прокатки реализовывалось обжатие до 4 %. Количество проходов за цикл выбиралось экспериментальным путем исходя из значений температуры слэбов при остывании. Прокатка при низких температурах ведет к появлению дефектов в объеме слэба и росту магистральной трещины при последующих циклах обработки независимо от температурных и деформационных режимов.

Металлографический анализ литых сплавов проводили с помощью оптического микроскопа Olympus GX71. Структуру литых материалов изучали после механической шлифовки, полировки и травления образцов раствором Келлера ($0.5 \text{ HF} - 1.8 \text{ HCl}_2 - 2.7 \text{ HNO}_3 - 95 \text{ H}_2\text{O}$). Средний размер зерен определяли методом сечущих по стандарту ASTM 112-13 по результатам не менее 300 измерений для каждого состояния и выделение границ на оптических изображениях проводили с использованием программного обеспечения Olympus Stream. Дополнительные исследования микроструктуры и текстуры прокатанных сплавов проводили методами дифракции обратного рассеяния электронов (EBSD) на электронном микроскопе Tescan Vega II LMU, снабженном дополнительным устройством дифракции обратного рассеяния электронов. Поверхность исследуемых образцов была подготовлена методом предварительной механической полировки с последующим ионным травлением на аппарате SEMPRep2. Полученные данные анализировались с

использованием лицензионного программного обеспечения HKL-Channel 5. Фактографические исследования изломов после испытаний на одноосное растяжение образцов сплавов в состояниях после отливки и после прокатки проводили на растровом электронном микроскопе Philips SEM 500 при одинаковых увеличениях.

Измерения твердости по Бринеллю (HB) проведены в соответствии со стандартом ASTM E103 [24] в разных частях широкой стороны призматической отливки. Для эксперимента использовался автоматический твердомер Duramin 500. Внедрение сферического индентора радиусом 5 мм проводили с усилием 250 кг и выдержкой 30 с. В экспериментах по одноосному растяжению использовался универсальный электромеханический испытательный стенд Instron 3369 со скоростью нагружения 0.2 мм/мин. Образцы вырезались из отливок и прокатанных пластин при помощи электроэрозионной резки и представляли собой плоские лопатки, длиной и шириной рабочей части 25 и 6 мм, толщиной 2 мм, радиусом скругления 14 мм. Испытания проводились согласно стандарту ASTM E8M:2008 [25].

3. Результаты исследования микроструктуры сплавов

Эффект измельчения зерна сплавов 1550 с добавленными бимодальными субмикронными и микронными частицами TiB_2 отражен на поляризованных оптических микрофотографиях на рис. 1, *a–d*.

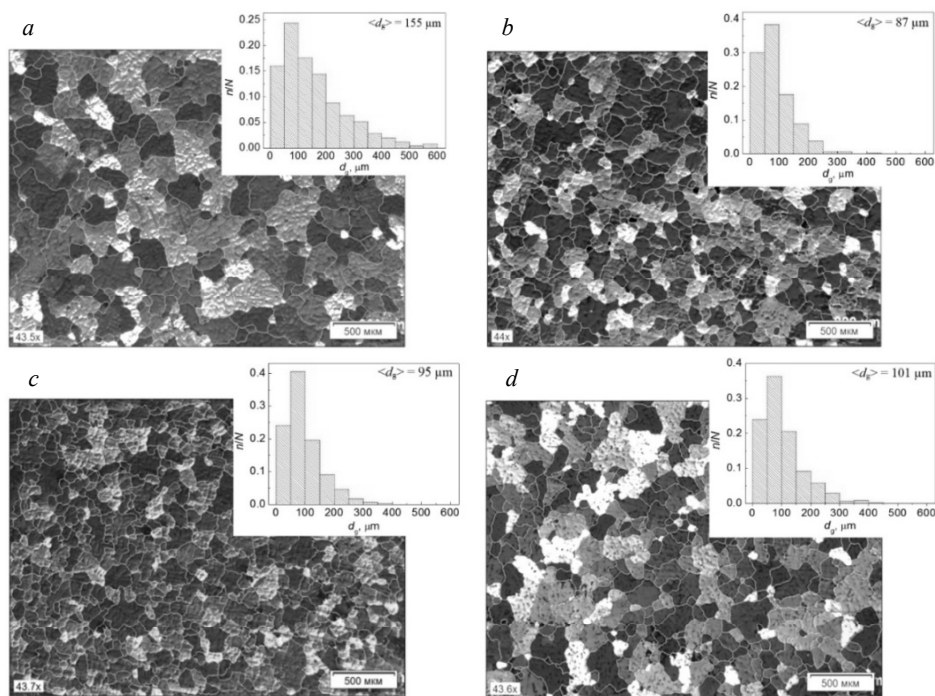


Рис. 1. Поляризованные оптические фотографии исследуемых сплавов: *a* – группа 4 (исходный сплав), *b* – группа 1 (УЗ+смесь 1), *c* – группа 2 (УЗ+смесь 2), *d* – группа 3 (УЗ+смесь 3)

Fig. 1. Polarized optical micrographs of the studied alloys: (*a*) group 4 (initial alloy), (*b*) group 1 (US+mixture 1), (*c*) group 2 (US+mixture 2), and (*d*) group 3 (US+mixture 3)

На рис. 2 представлены гистограммы распределения зерен по размерам в исследуемых сплавах, полученные при статистической обработке измерений структурных составляющих сплавов. На гистограммах d_g – размер зерна, n и N – количество зерен определенного размера и общее количество измерений. Очевидно, что исходный сплав без частиц (рис. 1, *a*) имел грубую и неравномерную дендритную структуру со средним размером зерна около 155 мкм. В сплаве преобладали крупные первичные дендриты со сложной формой. На следующих изображениях видно, что добавление частиц в сплав привело к более равномерному измельчению первичных дендритов и появлению мелких равноосных дендритов в равной степени в зависимости от состава лигатур. Полученные данные свидетельствуют о том, что микрочастицы TiB_2 различной дисперсности, содержащиеся в лигатурах, позволили измельчить структуру алюминиевого сплава 1550. Это может свидетельствовать о том, что синтезированные СВС-методом частицы TiB_2 выступают в качестве новых центров кристаллизации при охлаждении расплава [10]. В общем случае, введение лигатур с частицами TiB_2 позволило снизить средний размер зерна до 87, 95 и 101 мкм, соответственно после введения смесей 1, 2, 3.

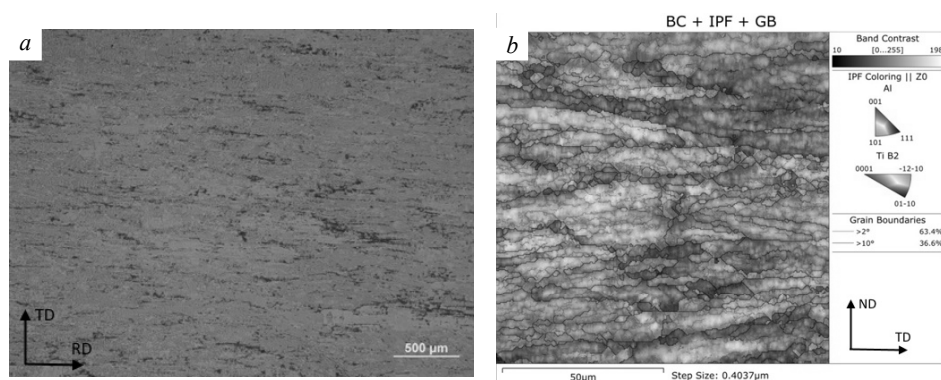


Рис. 2. Оптическое изображение микроструктуры поверхности прокатанного сплава и результаты EBSD-анализа поперечного сечения образца: *a* – прокатанная поверхность, *b* – сечения поперек прокатки

Fig. 2. Optical micrograph of the microstructure of a rolled alloy surface and the results of the EBSD analysis of the sample cross section: (*a*) rolled surface and (*b*) a cross-section in the rolling

Пример микроструктуры прокатанных сплавов можно увидеть на рис. 2, где представлено оптическое изображение поверхности рис. 2, *a* и электронное изображение поперечного сечения, полученное с использованием EBSD-анализа (рис. 2, *b*) сплава 1550. Прокатка при 300 °C с суммарной степенью пластической деформации ~ 80 % привела к формированию новой зеренной структуры – отличной от исходной, со значительной вытяжкой зерен вдоль направления прокатки *RD* (рис. 2, *a*). По результатам оптической микроскопии средний размер зерен в продольном и поперечном направлениях составляет 150 и 25 мкм соответственно. На оптических изображениях полированных поверхностей всех прокатанных пластин в межзеренном пространстве отмечены темные выделяющиеся области, отличные от матрицы фазы. Предположительно это могли быть фазы выделенных из матрицы элементов и их интерметаллических соединений в сочетании температурного и деформационного воздействий. Вычисление среднего размера зерен по результатам оптической микроскопии из-за преобладания полосчатых структур

и наличия мелких разнородных зерен между ними является затруднительным. Приблизительные размеры в продольном и поперечном направлениях составляют 150 и 25 мкм соответственно и мелких зерен около 5 мкм.

Результаты EBSD-анализа сечения прокатанного образца сплава 1550, проходящего поперек направления проката, с использованием электронного микроскопа, представлены на рис. 2, *b*. Структура в сечении выражена бимодальным распределением зерен, среди которых большую площадь занимают плоские неравноосные зерна, вытянутые параллельно плоскости проката с максимальными размерами 42 мкм. Большие зерна характеризуются развитой субзеренной структурой с преобладанием малоугловых ($2-10^\circ$) границ, что говорит о значительной дефектности структуры, подверженной большим пластическим деформациям. Кроме этого видно, что вытянутые зёрна отклоняются относительно направления проката, что связано со смещением границ зёрен из-за взаимодействия с пересекающимися субграницами и может наблюдаться в алюминиевых сплавах, содержащих 5 мас.% магния [28]. Между большими зернами располагаются мелкие равноосные рекристаллизованные зерна со средними размерами 5.9 мкм.

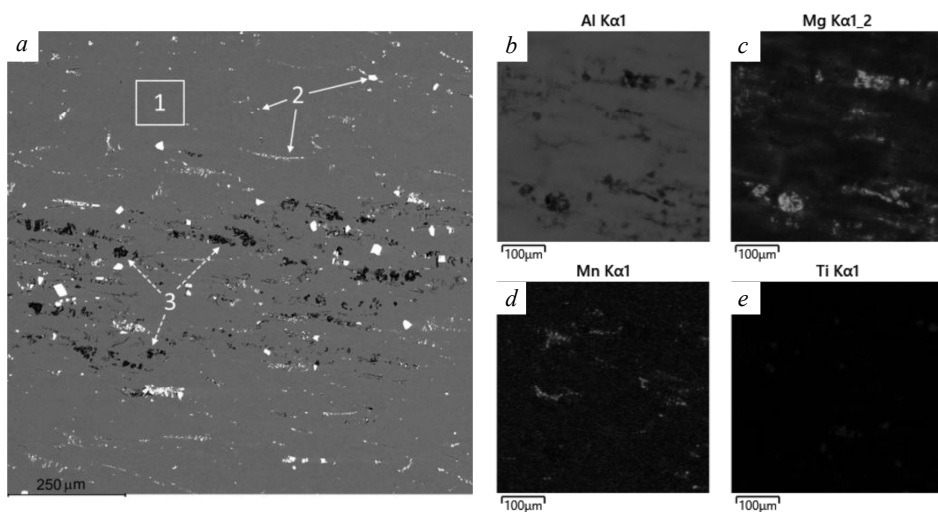


Рис. 3. Результаты ЭДС-анализа и поэлементное картирование участка поверхности прокатанного сплава с частицами TiB_2 , где *a* – общий вид, *b* – Al, *c* – Mg, *d* – Mn и *e* – Ti

Fig. 3. Results of the EDS analysis and the element-by-element mapping of the rolled alloy surface area with TiB_2 particles: (*a*) general view, (*b*) Al, (*c*) Mg, (*d*) Mn, and (*e*) Ti

На рис. 3, *a* представлено BSE-изображение фрагмента структуры поверхности прокатанного образца сплава 1550 с введенными частицами TiB_2 после ЭДС-анализа, показанное на рис. 4, *a*, и характерные для выделенной поверхности фазы. Из рисунка видно, что сплав представлен тремя характерными фазами, из которых основными фазами являются: «1» (выделенная квадратом) – характеризует матричный материал (химический состав Al – 4Mg – 0.6Mn мас.%); «2» (выделенная белыми стрелками) – светлые включения (химический состав Al – 3Mg – 15Ti – 4 мас.%); «3» (выделенная пунктирными стрелками) – темные включения (химический состав Al – 56Mg – 5Si – 0.5Fe), по-видимому, входящие в состав ин-

терметаллических фаз соединений, в том числе (Fe, Mn)Al₆ [28], выделенных из твердого раствора матрицы.

Очаги присутствия титана в больших количествах, кратно превышающих имеющийся в составе сплава, которыми являются светлые включения 2 на рис. 5, являются частицами введенного порошка TiB₂, который агломерирован в крупные частицы размерами до 28 мкм, что можно наблюдать в виде крупных включений по всей поверхности образца. Однако, в то же время в сплаве фиксируются микроскопические и субмикронные частицы, одиночные распределенные по всему объему сплава и сгруппированные в тонких продольных полосках, очевидно на границах, вытянутых вдоль направления прокатки, зерен.

Распределение введенных частиц по всему объему сплава свидетельствует об эффективном использовании режимов УЗ-обработки расплава перед его кристаллизацией. Фаза 3 на рис. 3, а характерна для всех исследуемых материалов, как для исходного прокатанного сплава, так и для прокатанных сплавов с частицами.

4. Результаты исследования механических свойств

Исследования твёрдости полученных сплавов показали, что введение частиц TiB₂ незначительно влияет на твёрдость сплава 1550. Твёрдость исходного сплава 1550 составила 58±3 НВ, а введение частиц TiB₂ групп 1 и 2 привело к увеличению до 65±3 и 64±1 НВ соответственно. Введение частиц в сплав группы 3 не привело к изменению твёрдости, которая составила 60±1 НВ. Это может быть связано с наибольшим содержанием субмикронных частиц (18 об. %) в сплаве группы 3, по сравнению с группами 1 (17 об. %) и 2 (14 об. %). Возможно, более равномерное распределение субмикронных частиц TiB₂ не привело к существенному изменению твёрдости.

В табл. 2. представлены результаты обработки экспериментальных данных по одноосному растяжению исследуемых литых сплавов. Из таблицы видно, что значения условного предела текучести ($\sigma_{0.2}$), предела прочности при растяжении (σ_B) и относительного удлинения до разрушения (ϵ_f) инокулированных сплавов увеличивались одновременно по сравнению с показателями основного сплава.

Деформационная обработка прокаткой заготовок, полученных из отливок сплава 1550, позволяет повысить предел текучести исходного сплава до 332 МПа, а сплавов с введенными частицами до 328, 334, 337 МПа для лигатур со смесью 1, 2 и 3, соответственно (табл. 3), разница между этими показателями незначительна. Предел прочности у прокатанных сплавов с частицами составляет 365, 369, 367 МПа смесей 1, 2, 3, соответственно и выше, чем у исходного прокатанного 363 МПа (табл. 3). Значения относительного удлинения сплавов с частицами превосходят значения для прокатанного сплава без частиц.

Таблица 2

Механические свойства
полученных литьем сплавов

Группа (см. табл.1)	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_B , МПа	ϵ_f , %
4	53	153	11.5
1	74	189	14.6
2	66	187	15.2
3	78	191	17.1

Таблица 3

Механические свойства деформированных
прокаткой сплавов на основе 1550

Группа (см. табл.1)	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_B , МПа	ϵ_f , %
4	332±11	363±16	4±0.3
1 (УЗ+смесь 1)	328±13	365±17	7±0.4
2 (УЗ+смесь 2)	334±16	369±19	5.5±0.2
3 (УЗ+смесь 3)	337±12	367±17	5±0.3

Особенностью поведения исследуемых материалов при комнатной температуре является нестабильность пластического течения, наблюдаемая в каждом из исследуемых сплавов. Возникновение подобных осцилляций на кривых деформации алюминий-магниевых сплавов обычно ассоциируется с эффектом Портевена – Ле Шателье (ПЛШ) и связано с динамическим деформационным старением [26].

5. Фрактография литых и прокатанных сплавов

Микрофотографии типичных поверхностей разрушения литых сплавов после испытаний на растяжение, полученные в ходе фрактографического анализа изломов, представлены на рис. 4. При комнатной температуре разрушение литых сплавов (рис. 4, 5) без деформационной обработки при скорости деформации 0.001 с^{-1} происходит в основном по вязкому механизму. Контуры поверхностей разрушения рваные в виде нечетких границ из-за рыхлой структуры изломов. Основную площадь поверхности разрушения занимает волокнистая зона, сформированная ямками разрушения.

На изломе образцов литых сплавов (рис. 4, *a–c*) без добавления частиц обнаружены зоны со сферическими свободными поверхностями зерен (рис. 4, *c*), соизмеренные с размерами структурных составляющих, определенными при микроструктурном анализе. На рис. 4, *b* недеформированные зерна показаны штрихованными белыми стрелками, а поры – сплошными белыми стрелками. По виду это разрушение можно интерпретировать как квазимежкристаллитное, так как на поверхностях других зерен еще видны следы вязкого разрушения.

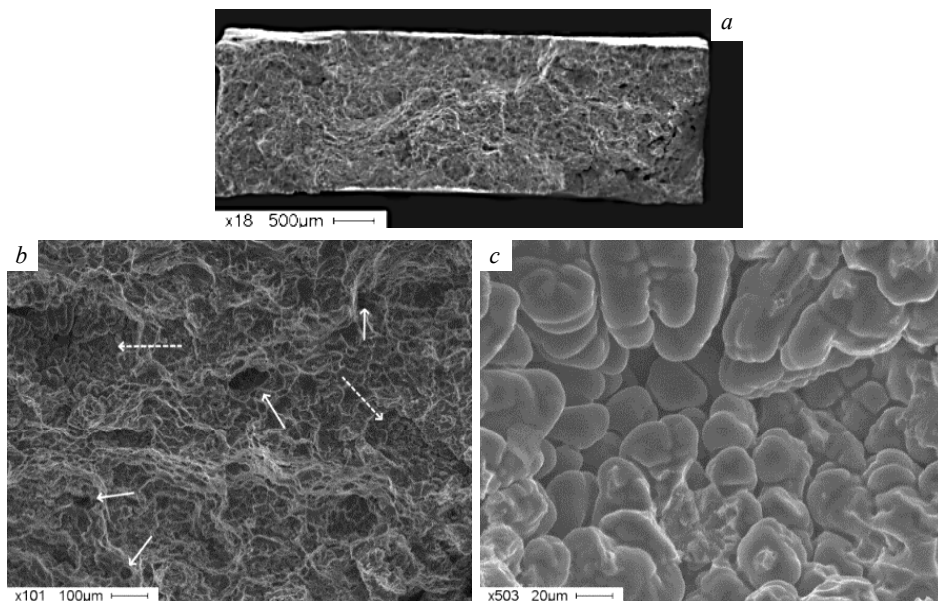


Рис. 4. Поверхность излома образца из литого алюминиевого сплава группы 4 без добавления частиц и без обработки УЗ: *a* – общий вид поверхности разрушения, *b* – типичный вид излома, *c* – отмеченные особенности разрушения

Fig. 4. Fracture surface of the cast aluminum alloy sample of group 4 with no particles added and without US-treatment: (*a*) general view of the fracture surface, (*b*) typical fracture, and (*c*) distinguished fracture features

Наличие подобных картин со свободными поверхностями зерен на изломах для литых сплавов является следствием наличия больших дендритов и, как следствие, слабой связью на границе между их ячейками, являющейся основным источником концентрации напряжений и, следовательно, распространения трещин, что приводит к образованию межзеренного разрушения под нагрузкой. Наличие вторичных фаз на поверхностях разрушения не выявлено.

На поверхностях разрушения образцов из литого сплава с добавлением частиц и воздействием УЗ перед разливкой не зафиксировано присутствие макропор и усадочных раковин (рис. 5, *a-c*). В отличие от исходного, в сплаве с добавлением частиц TiB_2 микронного размера было гораздо больше мелких ямочек, указывающих на то, что последние подвергались большей пластической деформации до разрушения. Таким образом, были получены более высокая прочность и удлинение. Внутри ямок видны микропоры.

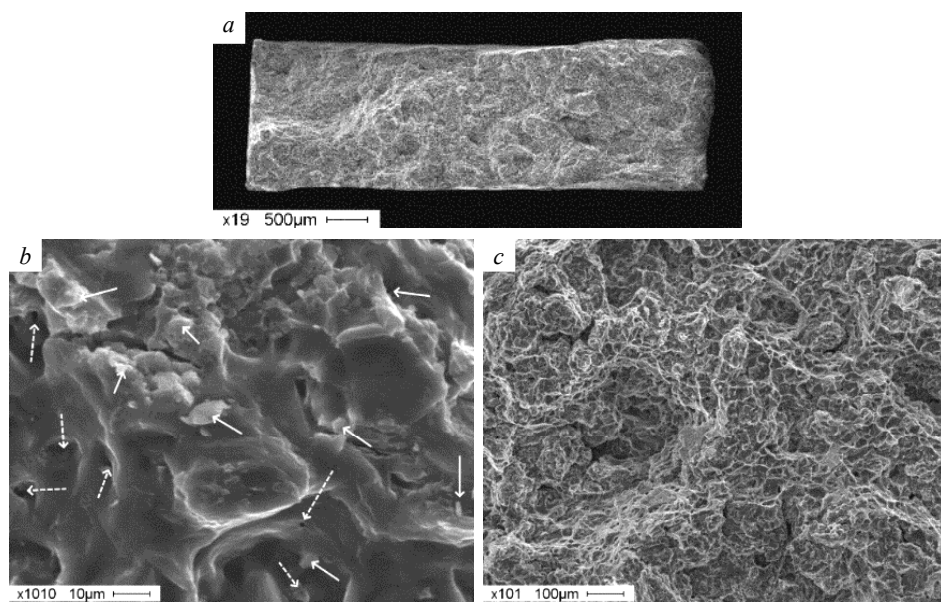


Рис. 5. Поверхность излома образца из литого алюминиевого сплава группы 3 с добавлением частиц и с обработкой УЗ: *a* – общий вид поверхности разрушения, *b* – типичный вид излома; (*c*) отмеченные особенности разрушения

Fig. 5. Fracture surface of the cast aluminum alloy sample of group 3 with the addition of particles and with US-treatment: (*a*) general view of the fracture surface, (*b*) typical fracture, and (*c*) distinguished fracture features

По-видимому, разрушение инициировано образованием и ростом множества микропор на границах микродефектов или частиц. На стенках и в основании отдельных ямок обнаруживаются множественные образования второй фазы, как на рис. 5, *c*, выделенные сплошными стрелками, в виде агломератов частиц размера-ми до 5 мкм. На рис. 5, *c* микропоры на дне ямок показаны штрихованными белыми стрелками, а частицы второй фазы на стенках ямок – сплошными белыми стрелками. В данном случае для инокулированных материалов разрушение произошло по преобладающему транскристаллитному механизму.

Схема излома для образцов сплавов после деформационной обработки прокаткой, образовавшегося в результате среза в тонком сечении при растяжении, показана на рис. 6. Большая часть поверхности излома – под углом 45° к толщине образца, т.е. в плоскости действия максимальных касательных напряжений. Этот тип излома часто называют косым изломом. Поверхности разрушения сплавов после деформационной обработки прокаткой (рис. 6) не такие рыхлые за счет преобладания деформации сдвига, как в случае со сплавами после литья. Контуры изломов ровные, разрушение происходит, практически, в ровной плоскости, расположенной под углом к толщине образца.

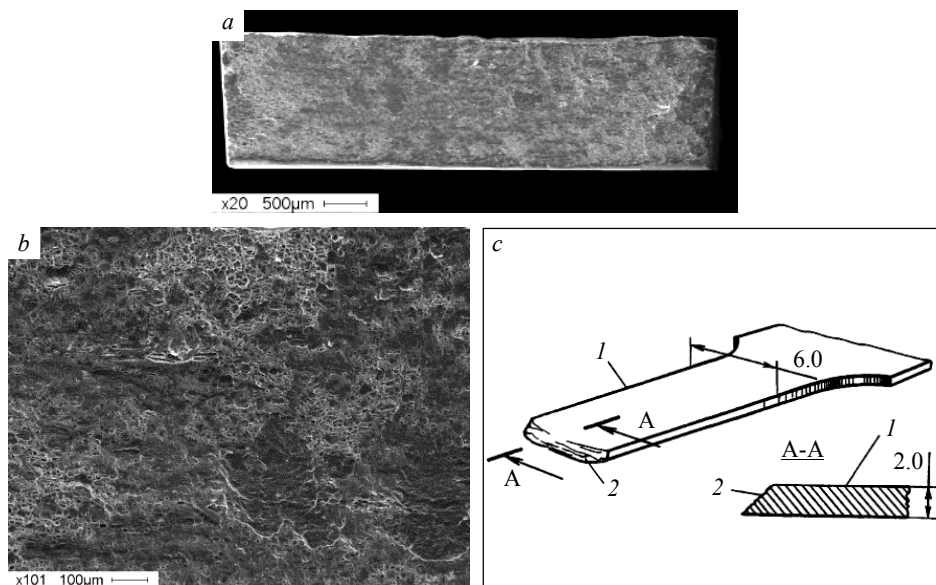


Рис. 6. Поверхность излома образца из прокатанного алюминиевого сплава группы 4 без добавления частиц и без обработки УЗ: *a* – общий вид поверхности разрушения, *b* – типичный вид излома; *c* – схема косого излома плоского стального образца, разрушившегося в результате среза при растяжении [27]. В этом случае разрушение произошло вдоль направления действия максимальных касательных напряжений: *1* – образец после испытания на растяжение; *2* – поверхность излома

Fig. 6. Fracture surface of the rolled aluminum alloy sample of group 4 with no particles added and without US-treatment: (*a*) general view of the fracture surface, (*b*) typical fracture, and (*c*) diagram of an oblique fracture of a flat steel sample that failed as a result of the shear in tension [27]. In this case, the fracture occurred along the action of maximum shear stresses: *1*, sample after tensile test and *2*, fracture surface

Фрактографические исследования образцов прокатанных сплавов показали, что при комнатной температуре основным механизмом разрушения является вязкий транскристаллитный. На поверхности излома видны мелкие округлой формы и крупные ямки отрыва, меньшие по размерам, чем у сплавов после литья. Ямки отрыва образуются путем слияния нескольких микропор вдоль границ сплава. Аналогично исходному сплаву, на дне ямок присутствуют частицы вторых фаз. Большее количество мелких ямок на поверхности разрушения прокатанных сплавов также свидетельствуют о больших величинах пластических деформаций до

разрушения, чем у исходного прокатанного сплава. Дополнительной характерной чертой обоих прокатанных сплавов, разрушенных при скоростях деформации 0.001 с^{-1} , необходимо отметить присутствие множественных гладких областей на поверхности разрушения с мелкими полосами скольжения.

Выводы

Проведено комплексное изучение изменения физико-механических свойств от технологии изготовления и обработки каждой партии полученных сплавов. Установлены зависимости увеличения твердости, значений пределов текучести и пределов прочности при растяжении от введения упрочняющих частиц, режимов деформационной обработки и отжига. Сплавы исходного состава без введения частиц имеют преимущественно крупнокристаллическую дендритную структуру со средним размером дендритных кластеров 155 мкм. Сплавы, содержащие частицы TiB_2 , имеют сформировавшуюся зернистую структуру с меньшими размерами. Зерна имеют выраженную равноосность со средними размерами 87–101 мкм. Синтезированные частицы TiB_2 при введении в расплав являются эффективным модификатором литой структуры, позволяющим получать отливки с недендритной структурой.

Установлено, что введение частиц TiB_2 в количестве $4\text{--}4.5 \cdot 10^{20}$ шт. позволяет повысить предел текучести, предел прочности и пластичность сплава с 53 до 78 МПа, с 153 до 191 МПа и с 11.5 до 17.1 % соответственно. Наибольший эффект измельчения структуры литых сплавов достигается при использовании лигатуры, содержащей микрочастицы TiB_2 размером 1 мкм.

После деформационной обработки сплавы имеют вновь сформированную мелкозернистую структуру. Между крупными вытянутыми зернами присутствуют очаги субмикронных равноосных зерен, которые являются интерметаллическими соединениями, сформированными в процессе воздействия температуры и больших степеней деформации. Частицы TiB_2 присутствуют в прокатанных сплавах в виде крупных агломератов и скоплений субмикронных частиц.

Деформационная обработка позволяет увеличить предел текучести и предел прочности исходного сплава 1550 до 332 и 363 МПа соответственно с одновременным снижением пластичности до 4 %. Введение частиц TiB_2 $(4\text{--}4.5) \cdot 10^{20}$ шт./кг с последующей деформационной обработкой позволило увеличить предел текучести и предел прочности исходного сплава 1550 до 328 и 365 МПа соответственно. Пластичность деформированного сплава 1550 с частицами увеличилась до 7 % по сравнению с деформированным сплавом 1550 без частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kawazoe M., Shibata T., Mukai T., Higashi K. Elevated temperature mechanical properties of A 5056 Al-Mg alloy processed by equal-channel-angular-extrusion // Scripta Materialia. 1997. V. 36. No. 6. P. 699–705. DOI: 10.1016/S1359-6462(96)00446-0.
2. Jones R.H. The influence of hydrogen on the stress-corrosion cracking of low-strength Al-Mg alloys // JOM. 2003. V. 55. No. 2. P. 42–46. DOI: 10.1007/s11837-003-0225-5.
3. Lee S., Utsunomiya A., Akamatsu H., Neishi K., Furukawa M., Horita Z., Langdon T.G. Influence of scandium and zirconium on grain stability and superplastic ductilities in ultrafine-grained Al-Mg alloys // Acta Materialia. 2002. V. 50. No. 3. P. 553–564. DOI: 10.1016/S1359-6454(01)00368-8.
4. Filatov Y.A., Yelagin V.I., Zakharov V.V. New Al-Mg-Sc alloys // Materials Science and Engineering: A. 2000. V. 280. No. 1. P. 97–101. DOI: 10.1016/S0921-5093(99)00673-5.

5. Ahmad Z. The properties and application of scandium-reinforced aluminum // JOM. 2003. V. 55. No. 2. P. 35–39. DOI: 10.1007/s11837-003-0224-6.
6. Yan S.J., Dai S.L., Zhang X.Y., Yang C., Hong Q.H., Chen J.Z., Lin Z.M. Investigating aluminum alloy reinforced by graphene nanoflakes // Materials Science and Engineering: A. 2014. V. 612. P. 440–444. DOI: 10.1016/j.msea.2014.06.077.
7. Vorozhtsov S., Minkov L., Dammer V., Khrustalyov A., Zhukov I., Promakhov V., Vorozhtsov A., Khmeleva M. Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: modeling and experiment // JOM. 2017. V. 69. No. 12. P. 2653–2657. DOI: 10.1007/s11837-017-2594-1.
8. Li B., Zhang Z., Shen Y., Hu W., Luo L. Dissimilar friction stir welding of Ti–6Al–4V alloy and aluminum alloy employing a modified butt joint configuration: Influences of process variables on the weld interfaces and tensile properties // Materials & Design. 2014. V. 53. P. 838–848. DOI: 10.1016/j.matdes.2013.07.019.
9. Zhukov I., Promakhov V., Vorozhtsov S., Kozulin A., Khrustalyov A., Vorozhtsov A. Influence of Dispersion Hardening and Severe Plastic Deformation on Structure, Strength and Ductility Behavior of an AA6082 Aluminum Alloy // JOM. 2018. V. 70. No. 11. P. 2731–2738. DOI: 10.1007/s11837-018-3132-5.
10. Fan Z., Wang Y., Zhang Y., Qin T., Zhou X.R., Thompson G.E., Pennycook T., Hashimoto T. Grain refining mechanism in the Al/Al–Ti–B system // Acta Materialia. 2015. V. 84. P. 292–304. DOI: 10.1016/j.actamat.2014.10.055.
11. Kotadia H.R., Qian M., Eskin D.G., Das A. On the microstructural refinement in commercial purity Al and Al-10 wt% Cu alloy under ultrasonication during solidification // Materials & Design. 2017. V. 132. P. 266–274. DOI: 10.1016/j.matdes.2017.06.065.
12. Li Y., Bai Q.L., Liu J.C., Li H.X., Du Q., Zhang J.S., Zhuang L.Z. The influences of grain size and morphology on the hot tearing susceptibility, contraction, and load behaviors of AA7050 alloy inoculated with Al-5Ti-1B master alloy // Metallurgical and Materials Transactions A. 2016. V. 47. No. 8. P. 4024–4037. DOI: 10.1007/s11661-016-3543-2.
13. Greer A.L., Bunn A.M., Tronche A., Evans P.V., Bristow D.J. Modelling of inoculation of metallic melts: application to grain refinement of aluminium by Al–Ti–B // Acta Materialia. 2000. V. 48. No. 11. P. 2823–2835. DOI: 10.1016/S1359-6454(00)00094-X.
14. Liu H., Gao Y., Qi L., Wang Y., Nie Jian-Feng. Phase-field simulation of Orowan strengthening by coherent precipitate plates in an aluminum alloy // Metallurgical and Materials Transactions A. 2015. V. 46. No. 7. P. 3287–3301. DOI: 10.1007/s11661-015-2895-3.
15. Ezatpour H.R., Parizi M.T., Sajjadi S.A., Ebrahimi G.R., Chaichi A. Microstructure, mechanical analysis and optimal selection of 7075 aluminum alloy based composite reinforced with alumina nanoparticles // Materials Chemistry and Physics. 2016. V. 178. P. 119–127. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2016.04.078.
16. Vorozhtsov S.A., Eskin D.G., Tamayo J., Vorozhtsov A.B., Promakhov V.V., Averin A.A., Khrustalyov A.P. The application of external fields to the manufacturing of novel dense composite master alloys and aluminum-based nanocomposites // Metallurgical and Materials Transactions A. 2015. V. 46. No. 7. P. 2870–2875. DOI: 10.1007/s11661-015-2850-3.
17. Mousavian R.T., Khosroshahi R.A., Yazdani S., Brabazon D., Boostani A.F. Fabrication of aluminum matrix composites reinforced with nano-to micrometer-sized SiC particles // Materials & Design. 2016. V. 89. P. 58–70. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.09.130.
18. Gao Q., Wu S., Lü S., Xiong X., Du R., An P. Improvement of particles distribution of in-situ 5 vol% TiB₂ particulates reinforced Al-4.5 Cu alloy matrix composites with ultrasonic vibration treatment // Journal of Alloys and Compounds. 2017. V. 692. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.jallcom.2016.09.013.
19. Zhukov I.A., Kozulin A.A., Khrustalyov A.P., Matveev A.E., Platov V.V., Vorozhtsov A.B., Zhukova T.V., Promakhov V.V. The Impact of Particle Reinforcement with Al₂O₃, TiB₂, and TiC and Severe Plastic Deformation Treatment on the Combination of Strength and Electrical Conductivity of Pure Aluminum // Metals. 2019. V. 9. No. 1. P. 65-1–65-10. DOI: 10.3390/met9010065.

20. Eskin D.G., Al-Helal K., Tzanakis I. Application of a plate sonotrode to ultrasonic degassing of aluminum melt: acoustic measurements and feasibility study // *Journal of Materials Processing Technology*. 2015. V. 222. P. 148–154. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2015.03.006.
21. Xuan Y., Nastac L. The role of ultrasonic cavitation in refining the microstructure of aluminum based nanocomposites during the solidification process // *Ultrasonics*. 2018. V. 83. P. 94–102. DOI: 10.1016/j.ultras.2017.06.023.
22. Zhukov I.A., Ziatdinov M.Kh., Vorozhtsov A.B., Zhukov A.S., Vorozhtsov S.A., Promakhov V.V. Self-propagating high-temperature synthesis of Al and Ti borides // *Russian Physics Journal*. 2016. V. 59. No. 8. P. 1324–1326. DOI: 10.1007/s11182-016-0911-8.
23. Zhukov I.A., Promakhov V.V., Matveev A.E., Platov V.V., Khrustalev A.P., Dubkova Ya.A., Vorozhtsov S.A., Potekaev A.I. Principles of Structure and Phase Composition Formation in Composite Master Alloys of the Al–Ti–B₄C Systems Used for Aluminum Alloy Modification // *Russian Physics Journal*. 2018. V. 60. No. 11. P. 2025–2031. DOI: 10.1007/s11182-018-1319-4.
24. ASTM E10:2017. Standard Test Method for Brinell Hardness of Metallic Materials.
25. ASTM E8M:2008. Standard test method for tension testing of metallic materials.
26. Kang J., Wilkinson D.S., Jain M., Embury J.D., Beaudoin A.J., Kim S., Mishra R., Sachdev A.K. On the sequence of inhomogeneous deformation processes occurring during tensile deformation of strip cast AA5754 // *Acta Materialia*. 2006. V. 54. P. 209–218. DOI: 10.1016/j.actamat.2005.08.045.
27. Фрактография и атлас фрактограмм: справ. изд.: пер. с англ. / под ред. Дж. Феллоуза. М.: Металлургия, 1982. 489 с.
28. McQueen H.J., Evangelista E., Bowles J., Crawford G. Hot deformation and dynamic recrystallization of Al-5Mg-0.8Mn alloy // *Metal Science*. 1984. V. 18(8). P. 395–402. DOI: 10.1179/030634584790419854.

Статья поступила 05.08.2020 г.

Vorozhtsov A.B., Platov V.V., Kozulin A.A., Khrustalev A.P., Mishin I.P., Zhukov I.A. STUDY OF THE EFFECT OF TiB₂ PARTICLES ON THE STRUCTURE, DEFORMATION BEHAVIOR, AND PROPERTIES OF THE ALUMINUM ALLOY 1550. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 102–116

DOI 10.17223/19988621/67/10

Keywords: light alloys, nanosized particles, titanium diboride, hardness, structure, ultimate tensile strength, yield strength.

In this work, the special master alloys containing aluminum and TiB₂ powder with bimodal particle size distribution in three mixture compositions are prepared. The master alloys are infused into the melts using an external ultrasound source. The castings with particles had smaller grain sizes than the initial castings without particles. It is found that the hardness, yield strength, and ultimate tensile strength reach higher values with an increase in the relative elongation of the cast alloys with added particles. A warm rolling mode is employed for the studied alloys to obtain sheet blanks. It is shown that the staged shrinkage of the billets up to deformation of 80 % with periodic heating up to 300 °C allows one to obtain defect-free sheet products. The structure of the rolled sheet-alloys is characterized by the plate-shaped grains elongated along the rolling direction with pockets of submicron-sized grains in between. The strength properties of the studied rolled alloys exceeded those of the cast alloys. In the case of the rolled alloys, an increase in the yield strength, ultimate tensile strength, and ductility is revealed for the alloys with particles as compared to the ones with no particles added.

Financial support. The reported study was funded by RFBR, project No. 19-38-90020.

Aleksandr B. VOROZHTSOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: abv1953@mail.ru

Vladimir V. PLATOV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vova.platov.85@mail.ru

Aleksandr A. KOZULIN (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kozulyn@ftf.tsu.ru

Anton P. KHRUSTALEV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tofik0014@gmail.com

Ivan P. MISHIN (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mip@ispms.tsc.ru

Il'ya A. ZHUKOV (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

REFERENCES

1. Kawazoe M., Shibata T., Mukai T., Higashi K. (1997) Elevated temperature mechanical properties of A 5056 Al-Mg alloy processed by equal-channel-angular-extrusion. *Scripta Materialia*. 36(6). pp. 699–705. DOI: 10.1016/S1359-6462(96)00446-0.
2. Jones R.H. (2003) The influence of hydrogen on the stress-corrosion cracking of low-strength Al-Mg alloys. *JOM*. 55(2). pp. 42–46. DOI: 10.1007/s11837-003-0225-5.
3. Lee S., Utsunomiya A., Akamatsu H., Neishi K., Furukawa M., Horita Z., Langdon T.G. (2002) Influence of scandium and zirconium on grain stability and superplastic ductilities in ultrafine-grained Al-Mg alloys. *Acta Materialia*. 50(3). pp. 553–564. DOI: 10.1016/S1359-6454(01)00368-8.
4. Filatov Y.A., Yelagin V.I., Zakharov V.V. (2000) New Al-Mg-Sc alloys. *Materials Science and Engineering: A*. 280(1). pp. 97–101. DOI: 10.1016/S0921-5093(99)00673-5.
5. Ahmad Z. (2003) The properties and application of scandium-reinforced aluminum. *JOM*. 55(2). pp. 35–39. DOI: 10.1007/s11837-003-0224-6.
6. Yan S.J., Dai S.L., Zhang X.Y., Yang C., Hong Q.H., Chen J.Z., Lin Z.M. (2014) Investigating aluminum alloy reinforced by graphene nanoflakes. *Materials Science and Engineering: A*. 612. pp. 440–444. DOI: 10.1016/j.msea.2014.06.077.
7. Vorozhtsov S., Minkov L., Dammer V., Khrustalyov A., Zhukov I., Promakhov V., Vorozhtsov A., Khmeleva M. (2017) Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: modeling and experiment. *JOM*. 69(12). pp. 2653–2657. DOI: 10.1007/s11837-017-2594-1.
8. Li B., Zhang Z., Shen Y., Hu W., Luo L. (2014) Dissimilar friction stir welding of Ti–6Al–4V alloy and aluminum alloy employing a modified butt joint configuration: Influences of process variables on the weld interfaces and tensile properties. *Materials & Design*. 53. pp. 838–848. DOI: 10.1016/j.matdes.2013.07.019.
9. Zhukov I., Promakhov V., Vorozhtsov S., Kozulin A., Khrustalyov A., Vorozhtsov A. (2018) Influence of dispersion hardening and severe plastic deformation on structure, strength and ductility behavior of an AA6082 aluminum alloy. *JOM*. 70(11). pp. 2731–2738. DOI: 10.1007/s11837-018-3132-5.
10. Fan Z., Wang Y., Zhang Y., Qin T., Zhou X.R., Thompson G.E., Pennycook T., Hashimoto T. (2015) Grain refining mechanism in the Al/Al–Ti–B system. *Acta Materialia*. 84. pp. 292–304. DOI: 10.1016/j.actamat.2014.10.055.
11. Kotadia H.R., Qian M., Eskin D.G., Das A. (2017) On the microstructural refinement in commercial purity Al and Al-10 wt% Cu alloy under ultrasonication during solidification. *Materials & Design*. 132. pp. 266–274. DOI: 10.1016/j.matdes.2017.06.065.
12. Li Y., Bai Q.L., Liu J.C., Li H.X., Du Q., Zhang J.S., Zhuang L.Z. (2016) The influences of grain size and morphology on the hot tearing susceptibility, contraction, and load behaviors

- of AA7050 alloy inoculated with Al-5Ti-1B master alloy. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 47(8). pp. 4024–4037. DOI: 10.1007/s11661-016-3543-2.
13. Greer A.L., Bunn A.M., Tronche A., Evans P.V., Bristow D.J. (2000) Modelling of inoculation of metallic melts: application to grain refinement of aluminium by Al–Ti–B. *Acta Materialia*. 48(11). pp. 2823–2835. DOI: 10.1016/S1359-6454(00)00094-X.
 14. Liu H., Gao Y., Qi L., Wang Y., Nie J.-F. (2015) Phase-field simulation of Orowan strengthening by coherent precipitate plates in an aluminum alloy. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 46(7). pp. 3287–3301. DOI: 10.1007/s11661-015-2895-3.
 15. Ezatpour H.R., Parizi M.T., Sajjadi S.A., Ebrahimi G.R., Chaichi A. (2016) Microstructure, mechanical analysis and optimal selection of 7075 aluminum alloy based composite reinforced with alumina nanoparticles. *Materials Chemistry and Physics*. 178. pp. 119–127. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2016.04.078.
 16. Vorozhtsov S.A., Eskin D.G., Tamayo J., Vorozhtsov A.B., Promakhov V.V., Averin A.A., Khurstal'ov A.P. (2015) The application of external fields to the manufacturing of novel dense composite master alloys and aluminum-based nanocomposites. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 46(7). pp. 2870–2875. DOI: 10.1007/s11661-015-2850-3.
 17. Mousavian R.T., Khosroshahi R.A., Yazdani S., Brabazon D., Boostani A.F. (2016) Fabrication of aluminum matrix composites reinforced with nano-to micrometer-sized SiC particles. *Materials & Design*. 89. pp. 58–70. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.09.130.
 18. Gao Q., Wu S., Lü S., Xiong X., Du R., An P. (2017) Improvement of particles distribution of in-situ 5 vol% TiB₂ particulates reinforced Al-4.5 Cu alloy matrix composites with ultrasonic vibration treatment. *Journal of Alloys and Compounds*. 692. pp. 1–9. DOI: 10.1016/j.jallcom.2016.09.013.
 19. Zhukov I.A., Kozulin A.A., Khurstal'ov A.P., Matveev A.E., Platov V.V., Vorozhtsov A.B., Zhukova T.V., Promakhov V.V. (2019) The impact of particle reinforcement with Al₂O₃, TiB₂, and TiC and severe plastic deformation treatment on the combination of strength and electrical conductivity of pure aluminum. *Metals*. 9(1). pp. 65–1–65–10. DOI: 10.3390/met9010065.
 20. Eskin D.G., Al-Helal K., Tzanakis I. (2015) Application of a plate sonotrode to ultrasonic degassing of aluminum melt: acoustic measurements and feasibility study. *Journal of Materials Processing Technology*. 222. pp. 148–154. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2015.03.006.
 21. Xuan Y., Nastac L. (2018) The role of ultrasonic cavitation in refining the microstructure of aluminum based nanocomposites during the solidification process. *Ultrasonics*. 83. pp. 94–102. DOI: 10.1016/j.ultras.2017.06.023.
 22. Zhukov I.A., Ziatdinov M.Kh., Vorozhtsov A.B., Zhukov A.S., Vorozhtsov S.A., Promakhov V.V. (2016) Self-propagating high-temperature synthesis of Al and Ti borides. *Russian Physics Journal*. 59(8). pp. 1324–1326. DOI: 10.1007/s11182-016-0911-8.
 23. Zhukov I.A., Promakhov V.V., Matveev A.E., Platov V.V., Khurstal'ev A.P., Dubkova Ya.A., Vorozhtsov S.A., Potekaev A.I. (2018) Principles of structure and phase composition formation in composite master alloys of the Al–Ti–B₄C systems used for aluminum alloy modification. *Russian Physics Journal*. 60(11). pp. 2025–2031. DOI: 10.1007/s11182-018-1319-4.
 24. ASTM E10:2017. Standard Test Method for Brinell Hardness of Metallic Materials.
 25. ASTM E8M:2008. Standard Test Method for Tension Testing of Metallic Materials.
 26. Kang J., Wilkinson D.S., Jain M., Embury J.D., Beaudoin A.J., Kim S., Mishra R., Sachdev A.K. (2006) On the sequence of inhomogeneous deformation processes occurring during tensile deformation of strip cast AA5754. *Acta Materialia*. 54. pp. 209–218. DOI: 10.1016/j.actamat.2005.08.045.
 27. (1982) *Fraktografiya i atlas fraktogramm* [Metals Handbook: Fractography and Atlas of Fractographs]. Moscow: Metallurgiya.
 28. McQueen H.J., Evangelista E., Bowles J., Crawford G. (1984) Hot deformation and dynamic recrystallization of Al-5Mg-0.8Mn alloy. *Metal Science*. 18(8). pp. 395–402. DOI: 10.1179/030634584790419854.

Received: August 05, 2020

УДК 539.3+539.4+620.18
DOI 10.17223/19988621/67/11

В.А. Зимина

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ, УПРУГИХ И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРИСТОЙ КОРУНДОВОЙ КЕРАМИКИ¹

Представлены результаты экспериментальных исследований структурных, прочностных и упругих свойств образцов из корундовой керамики, полученной при температурах спекания 1400, 1500 и 1600 °С. Выполнены механические испытания образцов на трехточечный изгиб. Предел прочности варьировался от 135 до 265 МПа, а модуль упругости находился в диапазоне 58–113 ГПа в зависимости от температуры спекания. Анализ внутренней структуры керамики выявил зависимость пористости, размеров пор и зерен от температуры спекания.

Ключевые слова: оксид алюминия, пористая керамика, трехточечный изгиб, микроструктура, РЭМ-анализ, прочность на изгиб, модуль Юнга.

Комбинация таких характеристик керамических материалов как химическая и термическая стабильность, низкая тепло- и электропроводность, высокая прочность, термо- и электроизоляция, высокая твердость, биосовместимость, биоинертность делают их привлекательным материалом для использования в различных сферах деятельности. Например, изделия из керамики на основе оксида алюминия (корундовой керамики) применяются в аэрокосмической, электрической, оборонной, автомобильной, химической, медицинской и других отраслях промышленности [1–4]. Одним из факторов, ограничивающих промышленное применение этой керамики, является ее хрупкость. Проведение испытаний хрупких материалов на одноосное растяжение считаются весьма трудно реализуемыми, так как при испытаниях возникают трудности, связанные со сложностью крепления образца в испытательной машине. Поэтому для оценки прочности при растяжении керамики, как и других хрупких материалов, широко применяются косвенные методы. Наиболее распространенными из таких методов считаются испытания на трехточечный изгиб и метод диаметрального сжатия цилиндрических образцов (бразильский тест) [5 – 10].

Хорошо известно, что на прочность керамики влияет ее структура, а именно, фазовый состав, наличие микродефектов, размер и форма пор и зерен. В зависимости от технологии и условий изготовления керамических материалов, они могут обладать структурой с различным содержанием и конфигурацией пор, следовательно, различными физико-механическими свойствами. Также в ней могут присутствовать поверхностные и внутренние дефекты, которые локально увеличивают концентрацию напряжений, что приводит к распространению трещин в керамике и впоследствии выходу из строя изделий в процессе эксплуатации.

На сегодняшний день существует достаточно много экспериментальных работ, по изучению механических свойств, внутренней структуры корундовой керамики,

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, проект III.23.2.3 и при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ.

а также связи между ними, но не все аспекты данной проблемы до конца выяснены. Потребность в этих материалах оставляет задачу определения влияния структуры пористых керамик на упругие и прочностные свойства актуальной. Соответственно определение прочности и характера разрушения пористых керамик, полученных в разных условиях и обладающих разной структурой, с помощью экспериментальных исследований является перспективным направлением.

Целью настоящей работы является исследование структуры и оценка упругих и прочностных характеристик образцов из пористой корундовой керамики, полученной при различных температурах спекания.

Материалы, методы и оборудование

Образцы были получены методом шликерного литья из технически чистого порошка Al_2O_3 и спекались изотермически с выдержкой 1 ч при трех разных температурах 1400, 1500, 1600 °С. После этого была измерена пористость полученных образцов. Вычисление пористости проводилось на основе измеренных значений массы и объема образцов. Объем определяли геометрическим способом, с последующим расчетом плотности. Массу – с помощью лабораторных весов АВ-120-01.

Пористость рассчитывалась согласно формуле

$$\Pi = 100 \% - \frac{\rho}{\rho_{\text{плотн}}} 100 \%, \quad (1)$$

где Π – пористость спеченного образца, %; ρ – плотность спеченного образца; $\rho_{\text{плотн}} = 3.97 \text{ г/см}^3$ – плотность беспористого Al_2O_3 [11].

Для определения механических свойств спеченных образцов был применен метод трехточечного изгиба. Согласно данному способу нагружения, часть образца испытывает сжимающие нагрузки, а другая – растягивающие напряжения, наиболее опасные для пористых керамик. Эксперимент проводился на универсальной испытательной машине Instron 1185 со скоростью нагружения 0.1 мм/мин. Были испытаны по 5 образцов для каждого значения температуры спекания. Расстояние между опорами составляло 30 мм. Схема нагружения образца и фотография реального образца в испытательной машине в ходе эксперимента представлены на рис. 1. Значения прочности на изгиб (σ) и модуля упругости (E) керамических образцов рассчитывались согласно формулам, представленным в [12, 13]:

$$\sigma = \frac{3Pl}{2bh^2}; \quad (2)$$

$$E = \frac{(F_2 - F_1)l^3}{4(l_2 - l_1)bh^3}, \quad (3)$$

где P – максимальная нагрузка, установленная при испытании образца, Н; l – расстояние между нижними опорами (база $l = 30 \text{ мм}$), мм; b – ширина образца, мм; h – средняя толщина образца, мм; F_1, F_2 – усилия на линейном участке диаграммы нагружения, Н; l_1, l_2 – прогибы, соответствующие нагрузкам F_1 и F_2 , которые определялись из диаграмм нагружения.

Исследование микроструктуры керамических образцов проводилось с помощью растрового электронного микроскопа Vega 3 LMU, оснащенного программным обеспечением AZtec для обработки и анализа изображений.

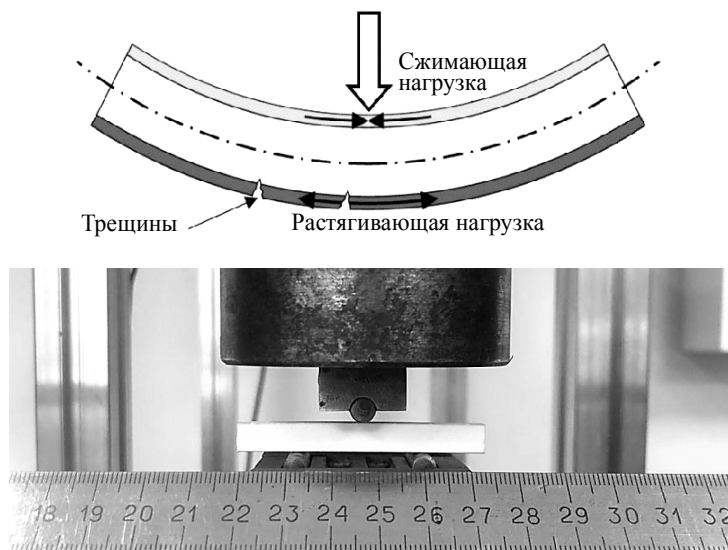


Рис. 1. Схематическое представление трехточечного изгиба образца (а), реальный эксперимент (b)

Fig. 1. (a) Schematic representation of a three-point bending of the sample; (b) a natural experiment

Результаты и обсуждение

На рис. 2 представлены фотографии поверхности образцов корундовой керамики после травления для каждого значения температуры спекания. На этих фотографиях хорошо видна структура керамических образцов. Анализ этих структур позволил выявить морфологические особенности порового пространства и размеры таких структурных элементов, как зерна и поры.

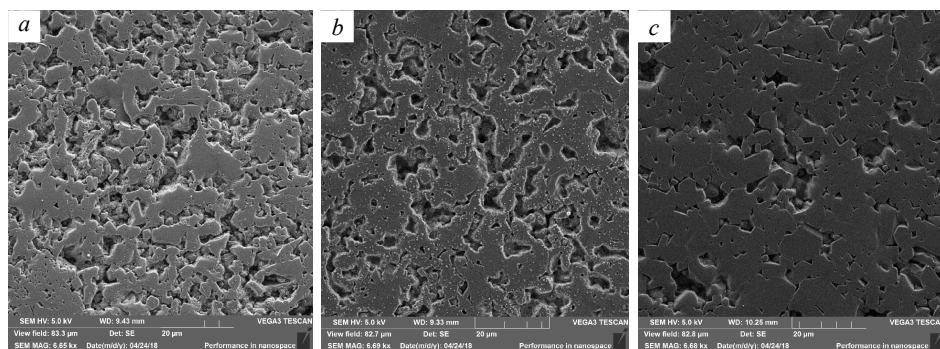


Рис. 2. Снимки поверхности образцов корундовой керамики после травления, полученные при помощи растрового электронного микроскопа. Температура спекания образцов: 1400 (а), 1500 (b) и 1600 °C (c)

Fig. 2. The images of the surface of alumina ceramic samples after etching obtained using a scanning electron microscope. A sintering temperature for the samples is of: (a) 1400, (b) 1500, and (c) 1600 °C

На снимках структур видно, что поры имеют сложное извилистое строение. При температуре спекания 1400 °С большинство пор сообщаются друг с другом. С ростом температуры спекания количество открытой пористости уменьшается, а закрытой пористости – увеличивается.

Анализируя результаты исследования распределения пор по размерам (рис. 3, слева), можно отметить, что все распределения имеют унимодальный характер и средний размер пор для температур спекания от 1400 до 1600 °С практически не меняется. Ожидалось, что средний размер пор должен уменьшаться с ростом температуры спекания, однако этого не наблюдается. Это может быть обусловлено большим значением среднеквадратичных отклонений результатов измерений.

Анализ диаграмм распределения зерен по размерам (рис. 3, справа) в образцах, спеченных при разных температурах, показывает, что распределения являются также унимодальными. Средний размер зерен для всех температур спекания составляет 2–3 мкм.

Среднее значение пористости образцов, спеченных при температурах 1400, 1500 и 1600 °С составило 33, 26 и 17 % соответственно.

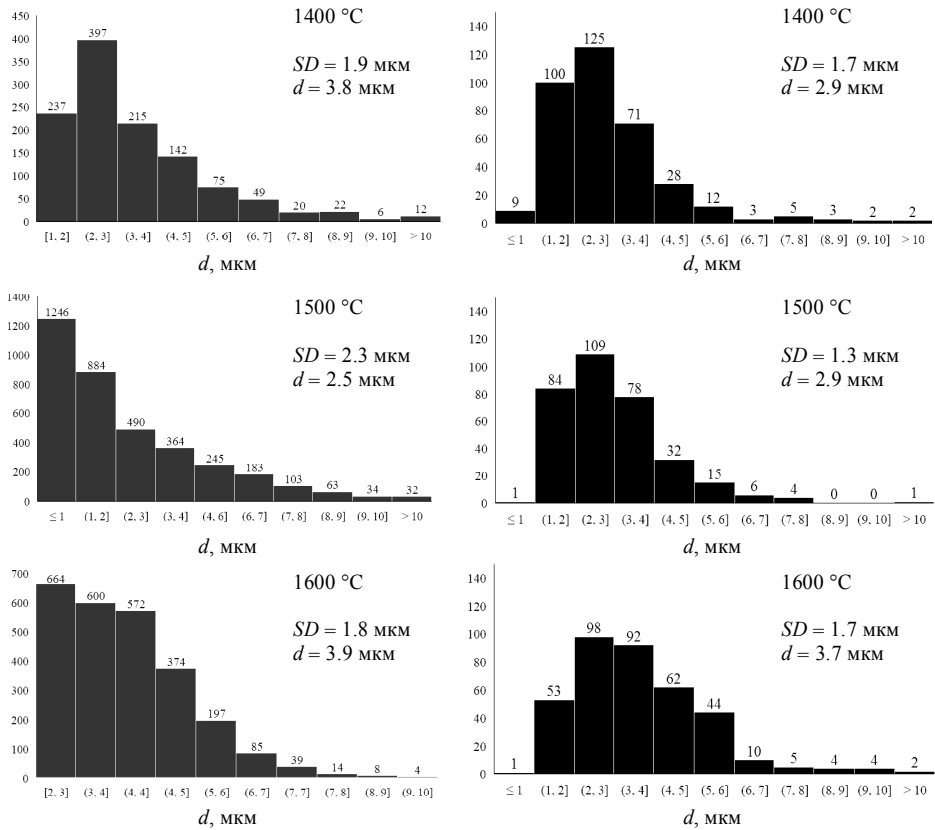


Рис. 3. Распределения пор (слева) и зерен (справа) по размерам в керамических образцах различной температуры спекания
Fig. 3. The size distributions of pores (on the left) and grains (on the right) for ceramic samples sintered at different temperatures

По результатам испытаний на трехточечный изгиб были построены кривые нагружения и рассчитаны пределы прочности на изгиб и модули упругости образцов для различных значений пористости. На рис. 4, *a* изображены по одной кривой нагружения для каждого значения температуры спекания. На рис. 4, *b* и *c* представлены зависимости пористости от температуры спекания образцов и прочности от пористости образцов. Полученные в результате обработки измерений физико-механические характеристики спеченных образцов приведены в таблице.

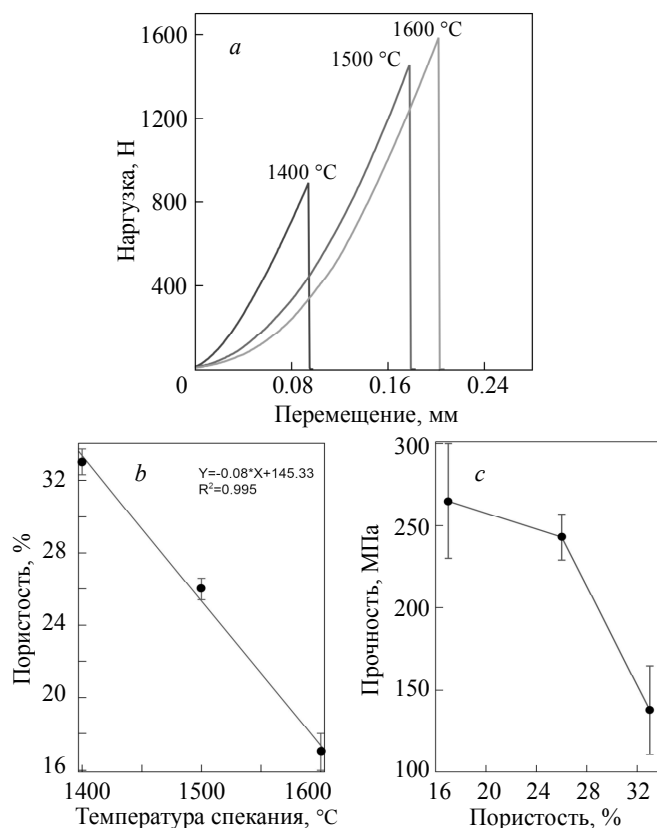


Рис. 4. Экспериментальные кривые нагружения (*a*), зависимость пористости от температуры спекания образцов (*b*) и зависимость прочности от пористости образцов (*c*)

Fig. 4. (*a*) Experimental load–displacement curves, (*b*) dependence of the porosity on the sintering temperature of the samples, and (*c*) dependence of the strength on the porosity of the samples

Характеристики образцов корундовой керамики

Температура спекания, °C	Масса, г	Объем, см ³	Плотность, г/см ³	Пористость, %	Предел прочности σ , МПа	Модуль упругости E , ГПа
1400	6.393±0.014	2.419±0.019	2.642±0.028	33±0.7	138±27	58±7
1500	6.399±0.006	2.174±0.016	2.944± 0.021	26±0.6	243±14	80±13
1600	6.395±0.017	1.956±0.018	3.27± 0.036	17±1	265±35	173±16

Анализируя результаты, представленные в таблице, можно отметить, что при повышении температуры спекания наблюдается усадка образцов и соответственно уменьшение их пористости. Пористость образцов линейно уменьшается при увеличении температуры спекания примерно на 7–9 % на каждые 100 °С (рис. 4, *b*). С уменьшением значения пористости в образцах увеличивается предел прочности и модуль упругости, причем эти зависимости нелинейные, что согласуется с теоретическими и экспериментальными данными других авторов [14–16].

В целом можно отметить, что структура образцов оказывает существенное влияние на упругие и прочностные свойства керамических образцов. Сама поровая структура не является периодической, а имеет случайный характер. В этом случае для анализа прочностных зависимостей применяют статистические методы. Для описания статистического поведения механических свойств многих материалов, в том числе и керамик, широко используется анализ Вейбулла [17–20]. Поэтому в работе статистический анализ прочности исследуемых образцов был проведен с помощью модели Вейбулла [17].

На рис. 5 представлены графики Вейбулла для прочности керамических образцов, спеченных при различных температурах. Видно, что данные предела прочности для температур спекания 1500 и 1600 °С хорошо описываются распределением Вейбулла, а при температуре спекания 1400 °С отмечается большее отклонение экспериментальных точек от графика Вейбулла. Форма распределения Вейбулла характеризуется значением модуля Вейбулла. Чем больше его величина, тем меньше разброс в экспериментальных значениях, соответственно одно значение прочности может служить хорошим описанием всей выборки. В данной работе максимальное значение модуля Вейбулла составило 22 для образцов, спеченных при температуре 1500 °С, а для образцов, спеченных при температурах 1400 и 1600 °С, они сравнимы (5.8 и 6.7) и соответствуют данным для корундовой керамики, приведенным в статье [18].

Заключение

В результате проведенного исследования, показано, что с увеличением температуры спекания на 100 °С значение пористости корундовых керамических образцов уменьшается на 7–9 %. Анализ структуры показал, что средние размеры пор практически не меняются от температуры спекания, а размеры зерен в керамике увеличиваются с ее ростом.

Показано, что прочность и модуль упругости нелинейно возрастают с увеличением температуры спекания. При этом разброс их значений достаточно велик и обусловлен присутствием структурных неоднородностей в образцах и их влиянием на механические характеристики. Следует отметить, что оценка механических свойств производилась в зависимости только от значений общей пористости. Как показал проведенный анализ, этого недостаточно для наиболее полного описания механического поведения керамических образцов. Возможно, нужно учитывать другие характеристики поровой структуры, такие, как форма пор, связность и прочее.

Проведенный статистический анализ полученных экспериментальных данных о прочности при изгибе исследуемых образцов показал, что они хорошо описываются распределением Вейбулла. Максимальное значение модуля Вейбулла получено для температуры спекания 1500 °С.

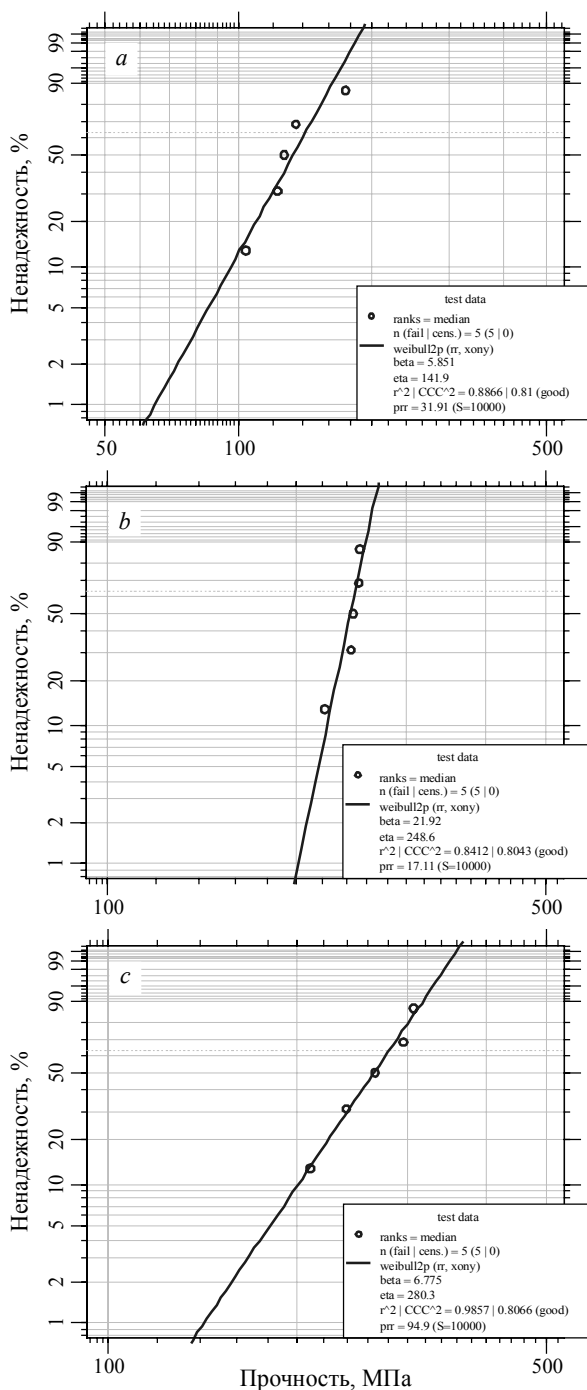


Рис. 5. Анализ Вейбулла для керамических образцов с различной температурой спекания: 1400 (a), 1500 (b) и 1600 °C (c)
Fig. 5. Weibull analysis for ceramic samples with different sintering temperatures: (a) 1400, (b) 1500, and (c) 1600 °C

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И.Ю. Смолину за обсуждение полученных результатов и за полезные замечания при написании статьи, а также А.С. Кулькову за участие в экспериментах и проведение анализа внутренней структуры образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Okada A.* Ceramic technologies for automotive industry: current status and perspectives // *Mater. Sci. Eng. B.* 2009. V. 161. P. 182–187. DOI: 10.1016/j.mseb.2008.11.017.
2. *Sequeira S., Fernandes M.H., Neves N., Almeida M.M.* Development and characterization of zirconia-alumina composites for orthopedic implants // *Ceram. Int.* 2017. V. 43. P. 693–703. DOI: 10.1016/j.ceramint.2016.09.216.
3. *Лукин Е. С., Макаров Н.А., Козлов А.И., Попова Н.А., Ануфриева Е.В., Вартамян М.А., Козлов И.А., Сафина М.Н., Лемешев Д.О., Горелик Е.И.* Оксидная керамика нового поколения и области ее применения // *Стекло и керамика.* 2008. №10. С. 27–31.
4. *Красный Б.Л., Тарасовский В.П., Красный А.Б., Кутейникова А.Л.* Свойства пористой проницаемой керамики на основе монофракционных порошков корунда и нанодисперсного связующего // *Стекло и керамика.* 2009. № 6. С. 18–21.
5. *Жолудев Д.С., Григорьев С.С., Панфилов П.Е., Зайцев Д.В.* Обоснование использования керамики на основе оксида алюминия с помощью изучения её механических свойств // *Современные проблемы науки и образования.* 2014. № 3. С. 520.
6. *Carter C.B., Norton M.G.* Ceramic materials: science and engineering. New York: Springer, 2007. 716 p.
7. *Basu B., Balani K.* Advanced Structural Ceramics. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2011. 512 p.
8. *Севостьянова И.Н., Саблина Т.Ю., Горбатенко В.В., Кульков С.Н.* Локализация деформации при диаметральной сжатии керамики ZrO_2 (Y_2O_3) // *Письма в ЖТФ.* 2019. Т. 45. Вып. 18. С.40–43. DOI: 10.21883/PJTF.2019.18.48237.17766.
9. *Johnstone C., Ruiz C.* Dynamic testing of ceramics under tensile stress // *Int. J. Solids Struct.* 1995. V. 32 (17–18). P. 2647–2656. DOI: 10.1016/0020-7683(94)00287-7.
10. *Sheikh M. Z., Wang Z., Du B., Suo T., Li Y., Zhou F., Wang Y., Dar U. A., Gao G., Wang Y.* Static and dynamic Brazilian disk tests for mechanical characterization of annealed and chemically strengthened glass // *Ceram. Int.* 2019. V. 45. P. 7931–7944. DOI: 10.1016/j.ceramint.2019.01.106.
11. *Properties: Alumina – Aluminium Oxide – Al_2O_3 – A Refractory Ceramic Oxide.* URL: <https://www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=52> (дата обращения: 13.04.2020).
12. *ГОСТ Р 57749-2017 (ИСО 17138:2014)* Композиты керамические. Метод испытания на изгиб при нормальной температуре, М.: Стандартинформ, 2017. 11 с.
13. *ГОСТ 9550-81* Пластмассы. Методы определения модуля упругости при растяжении, сжатии и изгибе. М.: ИПК Изд-во стандартов, 2004. 6 с.
14. *Григорьев М.В., Савченко Н.Л., Буякова С.П., Кульков С.Н.* Неупругое поведение при сжатии керамики с иерархической поровой структурой // *Письма в ЖТФ.* 2017. Т. 43. Вып. 15. С. 79–86. DOI: 10.21883/PJTF.2017.15.44874.16652.
15. *Смолин И.Ю., Еремин М.О., Макаров П.В., Буякова С.П., Кульков С.Н., Евтушенко Е.П.* Численное моделирование механического поведения модельных хрупких пористых материалов на мезоуровне // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2013. № 5(25). С. 78–90.
16. *Savchenko N., Sevostyanova I., Sablina T., Gömze L., Kulkov S.* The influence of porosity on the elasticity and strength of alumina and zirconia ceramics // *AIP Conference Proceedings.* 2014. V. 1623 (1). P. 547–550. DOI: 10.1063/1.4899003.
17. *Weibull W.* A statistical distribution function of wide applicability // *J. Appl. Mech.* 1951. V. 18. P. 293–305.
18. *Le Corre V., Brusselle-Dupend N., Moreaud M.* Numerical modeling of the effective ductile damage of macroporous alumina // *Mech. Mater.* 2017. V. 114. P. 161–171. DOI: 10.1016/j.mechmat.2017.08.002.

19. Ćurković L., Bakić A., Kodvanj J., Haramina T. Flexural strength of alumina ceramics: Weibull analysis // Transactions of Famena. 2010. V. 34(1). P. 13–19.
20. Meille S., Lombardi M., Chevalier J., Montanaro L. Mechanical properties of porous ceramics in compression: On the transition between elastic, brittle, and cellular behavior // J. Eur. Ceram. Soc. 2012. V. 32. P. 3959–3967. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2012.05.006.

Статья поступила 10.06.2020 г.

Zimina V.A. (2020) EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE STRUCTURE, ELASTIC, AND STRENGTH CHARACTERISTICS OF POROUS CORUNDUM CERAMICS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 117–126

DOI 10.17223/19988621/67/11

Keywords: alumina, porous ceramics, three-point bending, microstructure, SEM analysis, flexural strength, Young's modulus.

This paper aims to investigate the internal structure and to evaluate the elastic and strength characteristics of the corundum ceramic samples sintered at different temperatures. The average value of porosity of the sintered samples at the temperatures of 1400, 1500, and 1600 °C is 33, 26, and 17%, respectively. Mechanical tests of the ceramic samples are performed using the three-point bending method. The ultimate bending strength varies from 135 to 265 MPa in the studied sintering temperature range. The elastic moduli of the sintered samples are found to be in the range of 58 – 113 GPa. An analysis of the ceramic samples' microstructure is performed using a scanning electron microscope. The dependence of the porosity, pore size, and grain size on the sintering temperature is indicated. The values of strength and elastic modulus of the samples increase nonlinearly with rising sintering temperature in the experiment. Statistical behavior of mechanical properties of the ceramic samples is described using the Weibull analysis. The strength data for the sintering temperatures of 1500 and 1600 °C are well described by the Weibull distribution, and the strength values for a sintering temperature of 1400 °C are described with a significant scatter.

Valentina A. ZIMINA (Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mikushina_93@mail.ru

Financial support. The work was performed according to the Government research assignment for ISPMS SB RAS, project No. III.23.2.3 and with the support of the Tomsk State University Competitiveness Improvement Program.

REFERENCES

1. Okada A. (2009) Ceramic technologies for automotive industry: current status and perspectives. *Materials Science and Engineering: B*. 161. pp. 182–187. DOI: 10.1016/j.mseb.2008.11.017.
2. Sequeira S., Fernandes M.H., Neves N., Almeida M.M. (2017) Development and characterization of zirconia-alumina composites for orthopedic implants. *Ceramics International*. 43. pp. 693–703. DOI: 10.1016/j.ceramint.2016.09.216.
3. Lukin E.S., Makarov N.A., Kozlov A.I., Popova N.A., Anufrieva E.V., Vartanyan M.A., Kozlov I.A., Safina M.N., Lemeshev D.O., Gorelik E.I. (2008) Oxide ceramics of the new generation and areas of application. *Glass and Ceramics*. 65(9). pp. 348–352. DOI: 10.1007/s10717-009-9085-y.
4. Krasnyi B.L., Tarasovskii V.P., Krasnyi A.B., Kuteinikova A.L. (2009) Properties of porous permeable ceramic based on monofractional corundum powders and nanodispersed binder. *Glass and Ceramics*. 66. pp. 212–215. DOI: 10.1007/s10717-009-9164-0.
5. Zholudev D.S., Grigoriev S.S., Panfilov P.E., Zaytsev D.V. (2014) Obosnovanie ispol'zovaniya keramiki na osnove oksida alyuminiya s pomoshch'yu izucheniya ee

- mekhanicheskikh svoystv [Rationale for use of ceramics based on alumina by studying its mechanical properties]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya – Modern Problems of Science and Education*. 3. p. 520.
6. Carter C.B., Norton M.G. (2007) *Ceramic Materials: Science and Engineering*. New York: Springer.
 7. Basu B., Balani K. (2011) *Advanced Structural Ceramics*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
 8. Sevostyanova I.N., Sablina T.Y., Gorbatenko V.V., Kulkov S.N. (2019) Strain localization during diametral compression of $ZrO_2(Y_2O_3)$. *Technical Physics Letters*. 45. pp. 943–946. DOI: 10.1134/S1063785019090281.
 9. Johnstone C., Ruiz C. (1995) Dynamic testing of ceramics under tensile stress. *International Journal of Solids and Structures*. 17–18. pp. 2647–2656. DOI: 10.1016/0020-7683(94)00287-7.
 10. Sheikh M.Z., Wang Z., Du B., Suo T., Li Y., Zhou F., Wang Y., Dar U.A., Gao G., Wang Y. (2019) Static and dynamic Brazilian disk tests for mechanical characterization of annealed and chemically strengthened glass. *Ceramics International*. 45. pp. 7931–7944. DOI: 10.1016/j.ceramint.2019.01.106.
 11. Properties: Alumina – Aluminium Oxide – Al_2O_3 – A Refractory Ceramic Oxide. Access mode: <https://www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=52>.
 12. ISO 17138:2014 (2014) Fine ceramics (advanced ceramics, advanced technical ceramics) – Mechanical properties of ceramic composites at room temperature – Determination of flexural strength.
 13. GOST 9550-81 (2004) *Plastmassy. Metody dlya opredeleniya modulya uprugosti pri rastyazhenii, szhatii i izgibe* [Plastics. Methods for determination of elasticity modulus at strength, compression, and bending].
 14. Grigor'ev M.V., Savchenko N.L., Buyakova S.P., Kul'kov S.N. (2017) Inelastic behavior of ceramics with hierarchical pore structure under compression. *Technical Physics Letters*. 43. pp. 723–726. DOI: 10.1134/S1063785017080089.
 15. Smolin I.Yu., Eremin M.O., Makarov P.V., Buyakova S.P., Kulkov S.N., Evtushenko E.P. (2013) Chislennoe modelirovanie mekhanicheskogo povedeniya model'nykh khрупkikh poristyykh materialov na mezourovne [Numerical modeling of mechanical behaviour of model brittle porous materials at mesoscale]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(25). pp. 78–90.
 16. Savchenko N., Sevostyanova I., Sablina T., Gömze L., Kulkov S. (2014) The influence of porosity on the elasticity and strength of alumina and zirconia ceramics. *AIP Conference Proceedings*. 1623(1). pp. 547–550. DOI: 10.1063/1.4899003.
 17. Weibull W.A (1951) Statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*. 18. pp. 293–305.
 18. Le Corre V., Brusselle-Dupend N., Moreaud M. (2017) Numerical modeling of the effective ductile damage of macroporous alumina. *Mechanics of Materials*. 114. pp. 161–171. DOI: 10.1016/j.mechmat.2017.08.002.
 19. Ćurković L., Bakić A., Kodvanj J., Haramina T. (2010) Flexural strength of alumina ceramics: Weibull analysis. *Transactions of Famena*. 34(1). pp. 13–19.
 20. Meille S., Lombardi M., Chevalier J., Montanaro L. (2012) Mechanical properties of porous ceramics in compression: On the transition between elastic, brittle, and cellular behavior. *Journal of the European Ceramic Society*. 32. pp. 3959–3967. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2012.05.006.

Received: June 10, 2020

УДК: 533.17; 519.62

DOI 10.17223/19988621/67/12

К.В. Костюшин**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ПРИ СТАРТЕ ТВЕРДОТОПЛИВНЫХ РАКЕТ¹**

Представлены результаты разработки методики сквозного расчета нестационарных газодинамических процессов, протекающих при старте ракетоносителей (РН), в газодинамических трактах ракетных двигателей (РД) и внешних областях. Методика учитывает изменение геометрии поверхности горения твердого топлива в процессе работы РДТТ и изменение геометрии расчетной области с учетом динамики старта РН. Проведен анализ нестационарного силового воздействия сверхзвуковой струи на поверхность старта находится в окрестности дисков Маха невозмущенной струи. Проведены численные исследования газодинамических процессов при старте модельного твердотопливного ускорителя, в том числе с учетом вскрытия сопловой заглушки. Показана величина вклада составляющих силы тяги на этапе выхода на режим. Наличие заглушки на начальном этапе запуска РД приводит к скачкообразному изменению тяги, и незначительным колебаниям, которые демпфируются по мере повышения давления в камере сгорания.

Ключевые слова: *твердотопливный ракетный двигатель, нестационарная газовая динамика, сверхзвуковая струя, математическое моделирование, подвижные расчетные сетки, метод Годунова, тяга.*

Исследование процессов аэрогазодинамики старта ракетоносителей (РН), и разработка методов расчета входят в число сложных и актуальных научно-технических проблем, возникающих в процессе разработки, и эксплуатации ракетных комплексов (РК) [1]. Ряд проблем обусловлен нестационарным силовым воздействием продуктов сгорания твердых ракетных топлив на элементы конструкции РК. Это воздействие во многом определяется газодинамическими схемами РН, которые характеризуются значительным разнообразием форм, габаритов и функциональных особенностей. С другой стороны, динамика движения и нестационарная пространственная газодинамическая картина течения при старте определяется режимом работы ракетного двигателя (РД). Нестационарные газодинамические процессы, характерные для периода выхода ракетного двигателя на твердом топливе на режим («выброс» сопловой заглушки, разгар заряда твердого топлива) оказывают влияние на динамику движения, нестационарную пространственную газодинамическую картину течения и в общем случае определяют газодинамические нагрузки действующие на элементы конструкции РДТТ и стартовую площадку [2].

Проведение физического моделирования, особенно натурных экспериментов на начальном этапе проектирования, для этих целей связано с высокими материальными затратами. Поэтому один из подходов к решению данной проблемы со-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-50049/19.

стоит в применении методов математического моделирования. Это позволяет уменьшить расходы на проектирование и сократить сроки отработки РДТТ путем замены значительной части экспериментов математическим моделированием на ЭВМ с использованием современных высокопроизводительных программных комплексов [3].

К настоящему времени применительно к отдельным исследуемым процессам разработан достаточно мощный математический аппарат [4–9], и на его основе созданы современные пакеты прикладных программ, в том числе на основе инженерных методик расчета. Дальнейшее развитие методов математического моделирования газодинамических процессов, возникающих в процессе эксплуатации РН, связано с разработкой комплексных методик, позволяющих в рамках единого газодинамического расчета определять внутрибаллистические и энерготяговые характеристики РДТТ и внешнебаллистические характеристики РН [1].

В данной статье представлены результаты разработки методики сквозного расчета нестационарных газодинамических процессов, протекающих при старте РН, в газодинамических трактах РД и внешних областях, включающих в себя: камеру сгорания с изменяемой в процессе разгара наполнителя геометрией; сопловой блок; сверхзвуковую струю взаимодействующую с обтекаемыми поверхностями РН и поверхностью старта.

Постановка задачи

Рассматривается задача математического моделирования газовой динамики старта РН на нестационарных режимах работы РДТТ с учетом изменения поверхности горения заряда твердого топлива (ТТ) и силового взаимодействия сверхзвуковых струй продуктов сгорания с поверхностью старта и элементами конструкции РН. Работа крупногабаритных РДТТ характеризуется неравномерным выгоранием заряда ТТ по длине канала, что в случае исследования нестационарных процессов приводит к необходимости учета изменения геометрии заряда. РН находится под действием газодинамических сил (сил тяги, аэродинамического сопротивления) и силы тяжести. Истекающая струя газообразных продуктов сгорания взаимодействует с поверхностью старта и элементами конструкции РН.

Схема расчетной области показана на рис. 1 и включает в себя: 1 – внешний корпус РН; 2 – заряд ТТ; 3 – газодинамический тракт РД; 4 – поверхность горения заряда ТТ; 5 – корпус камеры сгорания; 6 – сопловой блок РД; 7 – сопловая заглушка; 8 – ось симметрии; 9, 10 – внешние границы расчетной области; 11 – непроницаемая поверхность старта; 12 – внешняя расчетная область.

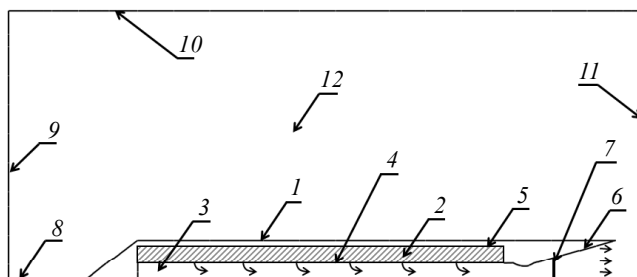


Рис. 1. Схема расчетной области
Fig. 1. Scheme of a computational domain

Предполагается что в начальный момент времени фронт горения моментально распространяется по всей поверхности заряда твердого топлива. Продукты сгорания представляют собой невязкий сжимаемый идеальный газ. Нестационарная система уравнений Эйлера, описывающая пространственные течения идеального газа, имеет вид [10]

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_G \rho dG \right) + \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_G \rho \mathbf{v} dG \right) + \iint_S (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \hat{\mathbf{I}}) \cdot d\mathbf{S} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_G e dG \right) + \iint_S (e + p) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (3)$$

где G – конечная область в трехмерном пространстве; $dG = dx dy dz$ – элемент объема; S – поверхность ограничивающая область G ; $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ – ориентированный элемент поверхности S ; где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к S , а dS – элемент площади; t – время; ρ – плотность; p – давление; $\mathbf{v} = [u, v, w]^T$ – вектор скорости движения газа; ε – удельная внутренняя энергия, $e = \rho \varepsilon + \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2$ – полная энергия единицы объема; $\hat{\mathbf{I}} = \text{diag}[1, 1, 1]$ – единичный тензор размерности 3×3 ; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ – скалярное произведение двух векторов.

Система уравнений (1) – (3) замыкается уравнением состояния идеального газа

$$\varepsilon = \frac{p}{(k-1)\rho}. \quad (4)$$

Для численного решения уравнений (1) – (4) используется схема Годунова, адаптированная к произвольному количеству граней в расчетной ячейке. Для построения разностной схемы используется метод конечных объемов. Вся вычислительная область покрывается дискретными ячейками, состоящими из произвольных выпуклых конечных многогранников с объемами G_i , где $i = 1, 2, \dots$ – номер такого объема, и числом граней $m = m(i)$. Каждая грань имеет площадь S_j , где $j = 1, 2, \dots, m(i)$. Тогда интегральные уравнения в каждом многограннике G_i аппроксимируются следующим образом:

$$G_i \frac{\rho_i^{k+1} - \rho_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} R_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{S}_j) = 0; \quad (5)$$

$$G_i \frac{(\rho \mathbf{v})_i^{k+1} - (\rho \mathbf{v})_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} (R_j \mathbf{v}_j) (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{S}_j) + \sum_{j=1}^{m(i)} P_j \mathbf{S}_j = 0; \quad (6)$$

$$G_i \frac{e_i^{k+1} - e_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} (E_j + P_j) (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{S}_j) = 0. \quad (7)$$

В результате получим схему Годунова [11] для произвольной расчетной сетки. Здесь $\mathbf{S}_j = \mathbf{n}_j S_j$, а Δt – шаг по времени. Нижний целый индекс i обозначает величины функций, отнесенные к центру масс i -го многогранника, а нижний целый индекс j обозначает величины, отнесенные к центру j -й грани дискретной ячейки. Верхний целый индекс k обозначает номер шага по времени. Большие величины R , $\mathbf{V}$, P , E обозначают соответственно плотность, скорость, давление и полную энергию на гранях дискретной сеточной ячейки. Эти величины определяются из решения задачи Римана [11] в направлении внешней нормали. Для расчета потоков могут быть использованы и другие методы, основанные на приближенных решениях задачи Риммана: Рое, Ошера, HLL, HLLC, HLLC и др.[8]. Схема (5) – (7) легко обобщается на двумерное и осесимметричное приближения.

Для общего случая подвижной пространственной дискретной ячейки используется следующая схема [10]:

$$\frac{(\rho G)_i^{k+1} - (\rho G)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} R_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j = 0; \quad (8)$$

$$\frac{(\rho \mathbf{v} G)_i^{k+1} - (\rho \mathbf{v} G)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} (R \mathbf{V})_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j + \sum_{j=1}^{m(i)} P_j \mathbf{S}_j^{k+1/2} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{(e G)_i^{k+1} - (e G)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} E_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j + \sum_{j=1}^{m(i)} P_j \mathbf{S}_j^{k+1/2} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{G_i^{k+1} - G_i^k}{\Delta t} - \sum_{j=1}^{m(i)} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j = 0. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{D}_j$ – скорость движения центра j -й грани дискретной ячейки. Полуцелые верхние индексы $k+1/2$ обозначают значения соответствующих величин в момент времени $t+1/2\Delta t$. Уравнение (11) есть уравнение изменения объема дискретной ячейки G_i . В расчетах использовалась декартовая система координат, связанная с РН.

Расчет шага по времени на подвижной расчетной сетке проводится по следующему алгоритму:

1. Определение нового положения вершин подвижных расчетных ячеек.
2. Определение площадей граней подвижных расчетных ячеек в моменты времени $t+1/2\Delta t$ и $t+\Delta t$.
3. Определение скоростей движения центров граней подвижных ячеек.
4. Определение объемов подвижных ячеек в момент времени $t+\Delta t$.
5. Определение параметров газа на гранях расчетных ячеек.
6. Определение локальных газодинамических параметров на новом временном слое с использованием расчетной схемы (8) – (11).

Изменение положения вершин расчетных ячеек в рассматриваемой задаче происходит за счет учета изменения поверхности заряда ТТ в процессе горения и движения РН относительно стартовой поверхности под действием газодинамических сил.

Моделирование выгорания заряда твердого топлива

Для моделирования процесса выгорания заряда твердого топлива используется методика [12], основанная на аппроксимации формы канала заряда совокупностью граней элементарных ячеек, расположенных в окрестности поверхности горения. Для определения нового положения поверхности горения и локального газоприхода используется степенной закон горения

$$u_v = u_0 p_v^v, \quad (12)$$

где u_v – локальная скорость горения в окрестности вершины подвижной грани на текущем шаге по времени; p_v – локальное давление в окрестности вершины подвижной грани; u_0 , v – константы в законе скорости горения.

Новое положение вершин ячейки на поверхности горения вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{n}_x u_v \Delta t, \quad (13)$$

где $\mathbf{x}$ – координаты вершины подвижной грани ячейки; $\mathbf{n}_x$ – единичный вектор внутренней нормали к поверхности горения в точке $\mathbf{x}$.

Расчет локального газоприхода m с грани расчетной ячейки, лежащей на поверхности горения, можно проводить с использованием следующего соотношения:

$$m = \rho_f u_e S_e, \quad (14)$$

где u_e – локальная скорость горения в центре грани расчетной ячейки; ρ_f – плотность ТТ; S_e – площадь грани расчетной ячейки.

Однако для выполнения закона сохранения массы продуктов сгорания, поступающих с поверхности горения, с учетом изменения объема ячейки, в работе использовалось следующее соотношение:

$$m = \rho_f \Delta G^k / \Delta t, \quad (15)$$

где ΔG^k – изменение объема ячейки на текущем шаге по времени.

Алгоритм расчета с учетом перестроения расчетной сетки в окрестности поверхности горения на текущем шаге по времени строится следующим образом:

1. По известному значению давления в центре ячейки определяется локальное давление в окрестности вершин её подвижной грани.

2. С использованием (12) определяется локальная скорость горения в окрестности вершины подвижной грани.

3. Определяется единичный вектор внутренней нормали к поверхности горения в вершине подвижной грани как: $\mathbf{n}_x = (\mathbf{n}_l + \mathbf{n}_r) / 2$, где $\mathbf{n}_l$ и $\mathbf{n}_r$ – единичные векторы внешних нормалей граней расчетных ячеек, лежащих на поверхности горения и имеющих общую вершину $\mathbf{x}$.

4. С использованием (13) определяются новые координаты вершин подвижных граней ячеек.

5. Для всех подвижных ячеек пересчитываются геометрические параметры (объем ячейки и площади граней).

6. С использованием (15) определяется локальный газоприход через грани расчетной сетки, лежащие на поверхности горения.

Моделирование движения ракетносителя

Для определения характеристик движения ракетносителя используется следующий алгоритм расчета:

1. По известному распределению газодинамических параметров на текущем шаге по времени определяется равнодействующая газодинамических сил, действующих на поверхности РН:

$$\mathbf{F} = \iint_S p \mathbf{n} dS, \quad (16)$$

где S – поверхность внутренних и внешних элементов РН; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к элементарной площадке dS .

2. Масса РН на текущем шаге по времени вычисляется как: $m_{\text{РН}}^k = m_{\text{РН}}^{k-1} - m_{\text{т}}^k$, где $m_{\text{РН}}^{k-1}$ – масса РН на предыдущем шаге по времени, $m_{\text{т}}^k$ – масса топлива сгоревшего на текущем шаге по времени, равная суммарному газоприходу с поверхности горения.

3. По известной равнодействующей газодинамических сил и силы тяжести определяется скорость и ускорение РН на текущем шаге по времени.

С учетом известных параметров движения РН расчетная сетка в окрестности поверхности старта перестраивается с использованием следующего алгоритма:

1. Определяется единичный вектор внутренней нормали к поверхности старта в вершине подвижной грани.

2. Новые координаты вершин подвижных граней ячеек определяются как $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{n}_x u_{\text{roc}} \Delta t$, где u_{roc} – скорость ракетносителя на текущем шаге по времени.

3. Проводится проверка на достижение заданного ограничения на геометрические характеристики расчетной ячейки в окрестности поверхности старта, по достижении которого ячейка делится на две.

4. Пересчитываются геометрические параметры подвижных ячеек (объем ячейки и площади граней), определяются скорости движения граней.

Расчет энерготяговых характеристик

Важным вопросом при исследовании нестационарных режимов работы РД является определение энерготяговых характеристик. В общем случае тяга ракетного двигателя определяется как интеграл сил давления, действующих на внутренние и внешние поверхности РД, за исключением сил внешнего аэродинамического сопротивления [1]:

$$\mathbf{P}_1 = \iint_S p \mathbf{n} ds \quad (17)$$

Кроме того, согласно [2], тягу можно определить следующим образом:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_{\text{ст}} + \mathbf{P}_{\text{нест}}, \quad (18)$$

где $\mathbf{P}_p$ – реактивная составляющая вектора тяги, $\mathbf{P}_{\text{ст}}$ – статическая составляющая вектора тяги, $\mathbf{P}_{\text{нест}}$ – нестационарная составляющая вектора тяги.

Реактивная составляющая вектора тяги определяется как импульс продуктов сгорания, истекающих через срез сопла в единицу времени:

$$\mathbf{P}_p = \iint_{F_a} \rho_a v_{na} \mathbf{v}_a dF, \quad (19)$$

где F_a – поверхность выходного сечения сопла; v_{na} – проекция вектора скорости на элементарную площадку dF .

В предположении равномерности распределения атмосферного давления по контуру внешней контрольной поверхности РН статическая составляющая вектора тяги определяется как

$$\mathbf{P}_{ст} = - \iint_{F_a} (p_a - p_H) \mathbf{n} dF, \quad (20)$$

где p_H – давление невозмущенной окружающей среды.

Нестационарная составляющая вектора тяги определяется как изменение количества движения по свободному объему газодинамического тракта РД:

$$\mathbf{P}_{нест} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV, \quad (21)$$

где V – внутренний объем РД.

В предположении $V = V_{кам} + V_{спл}$, где $V_{кам}$ – свободный объем камеры сгорания, а $V_{спл}$ – свободный объем соплового блока можно записать

$$\mathbf{P}_{нест} = \mathbf{P}_{нест.кам} + \mathbf{P}_{нест.спл}, \quad (22)$$

где $\mathbf{P}_{нест.кам} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_{кам}} \rho \mathbf{v} dV$ – нестационарная составляющая тяги по объему камеры

сгорания, а $\mathbf{P}_{нест.спл} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_{спл}} \rho \mathbf{v} dV$ – нестационарная составляющая тяги по объему

соплового блока.

Достаточно часто при исследовании преимущественно стационарных режимов работы РД в (18) пренебрегают нестационарной составляющей вектора тяги. В таком случае тяга РД может быть определена как

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_{ст}. \quad (23)$$

В работе проведен анализ тяги и её составляющих (17) – (23) на нестационарных режимах работы РДТТ.

Численные исследования

На базе изложенной методики разработан программный комплекс, позволяющий проводить расчет нестационарных течений продуктов сгорания в газодинамических трактах РД и внешних областях. Проведены численные исследования газодинамики старта модельного осесимметричного твердотопливного ускорителя. Длина РН $L_{уск} = 20.5$ м; длина соплового блока $L_c = 4.3$ м; длина сверхзвуковой части сопла $L_{св} = 3.5$ м; диаметр РН – 3 м; радиус входного сечения сопла – 0.6 м; радиус критического сечения $R^* = 0.5$ м; радиус среза сопла $R_a = 1.5$ м. Рассмотрен характерный для стартовых ускорителей модельный цилиндрический одношапечный заряд ТТ внутреннего горения. Длина заряда твердого топлива $L_{зар} = 14.2$ м; радиус внутренней поверхности заряда ТТ $R_{вну} = 0.6$ м; радиус внешней поверхности заряда ТТ $R_{вне} = 1.4$ м; масса ускорителя (с учетом заряда твердого топлива) –

187000 кг; плотность ТТ $\rho_f = 2200 \text{ кг/м}^3$; температура продуктов сгорания 3400 К; равновесный показатель адиабаты газообразной смеси двухфазных продуктов сгорания 1.16; константы в законе скорости горения ТТ: $u_0 = 0.006 \text{ м/с}$, $\nu = 0.3$. Сопловая заглушка располагается на расстоянии $1/3 L_{\text{св}}$ от критического сечения сопла. Расстояние от среза сопла до поверхности старта в начальный момент времени составляет 1 м. Схема ускорителя показана на рис. 2.

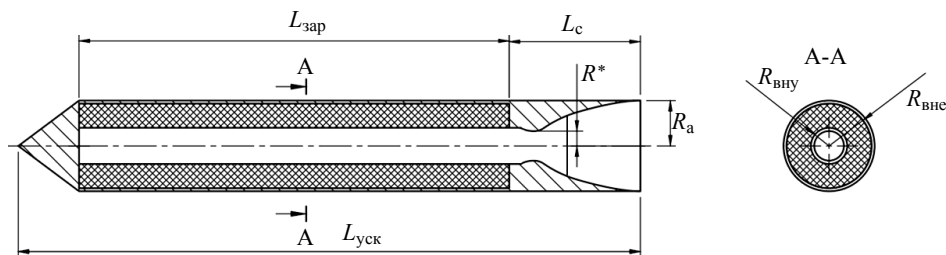


Рис. 2. Схема модельного ускорителя
Fig. 2. Schematic view of a booster rocket

В качестве начальных условий в расчетной области 12 (рис. 1) принимались условия невозмущенной окружающей среды у поверхности Земли: $P_a = 101325 \text{ Па}$, $T_a = 300 \text{ К}$. На границах 1, 5, 6 и 11 задавались граничные условия непротекания; на границе 8 – условия симметрии; на гранях ячеек, лежащих на поверхности горения (граница 4), – локальный газоприход; на границе 9 – параметры набегающего потока, соответствующего скорости РН на текущем шаге по времени: $P_\infty = P_a$, $T_\infty = T_a$, $\mathbf{V}_\infty = [-u_{\text{roc}}, 0, 0]^T$; на границе 10 – мягкие граничные условия; до момента вскрытия заглушки на границе 7 ставится условие непротекания.

Расчеты проведены в осесимметричной постановке на блочно-структурированной расчетной сетке, построенной с использованием алгоритма, приведенного в работе [13]. Особенностью алгоритма является использование расчетных сеток с произвольным количеством граней расчетных ячеек, что позволяет проводить расчеты в областях с достаточно произвольной геометрией на структурированных и неструктурированных сетках. В начальный момент времени размер расчетной сетки в свободном объеме камеры сгорания составлял 200×10 ячеек, в сопловом блоке – 60×20 ячеек.

Численные исследования проведены для конфигурации РД при наличии сопловой заглушки и без неё. Вскрытие заглушки проводилось при силовом воздействии, эквивалентном равномерному распределению давления по внутренней поверхности заглушки 5, 10 и 15 бар. Предполагалось, что сопловая заглушка представляет собой мембрану, которая моментально вскрывается по достижении условия

$$\mathbf{F}_{\text{вск}} \leq \mathbf{F}_{\text{заг}} = \iint_{s_{\text{заг}}} p n dS, \quad (24)$$

где $\mathbf{F}_{\text{вск}}$ – усилие вскрытия заглушки; $\mathbf{F}_{\text{заг}}$ – усилие, действующее на заглушку в текущий момент времени; $s_{\text{заг}}$ – внутренняя и внешняя поверхность заглушки.

Время расчета ограничено $t = 2.9 \text{ с}$ и соответствует выходу РД на номинальный режим работы и удалению РН от поверхности старта на расстояние равное

$4L_{\text{уск}}$. В типовом варианте расчета общее число ячеек в момент времени $t = 0$ с составляло порядка $1 \cdot 10^4$, а в момент времени $t = 2.9$ с – $8 \cdot 10^4$. На рис. 3 приведено поле чисел Маха в расчетной области для варианта расчета без сопловой заглушки в моменты времени 1.3 и 2.1 с, где показана структура струи.

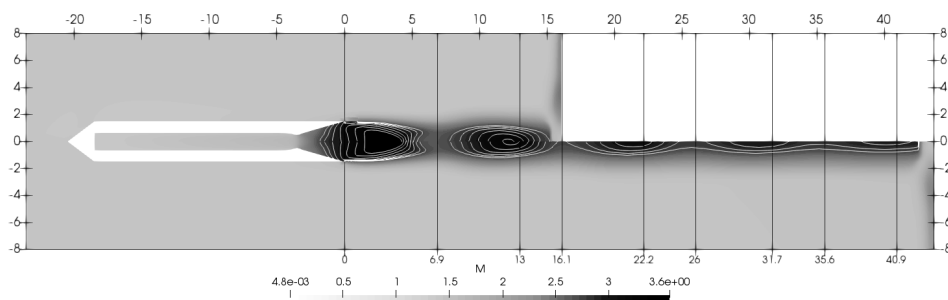


Рис. 3. Поле чисел Маха в моменты времени 1.3 (сверху) и 2.1 с (снизу)

Fig. 3. Distribution of the Mach numbers at time instants of 1.3 (on the top) and 2.1 s (on the bottom)

Характер изменения максимального давления на поверхности старта по времени показан на рис. 4. Наблюдаются четыре локальных пика давления в моменты времени $t = 0.83, 1.3, 1.6$ и 1.9 с. Эти пики соответствуют промежуточному расположению поверхности старта в окрестности дисков Маха невозмущенной струи (рис. 3) на расстояниях 6.9, 16.1, 26.0 и 35.6 м от среза сопла. Максимум давления на преграде составляет 14.6 бар в момент времени $t = 0.83$ с., что соответствует взаимодействию сверхзвуковой струи продуктов сгорания с поверхностью старта в области скачка уплотнения на первом диске Маха. Минимальное силовое воздействие на преграду соответствует взаимодействию в сечениях 2–5 боков невозмущенной струи на расстояниях 13.0, 22.2, 31.7 и 40.9 м. от среза сопла до поверхности преграды. Данный результата качественно хорошо согласуется с результатами работы [14] для неподвижной расчетной области.

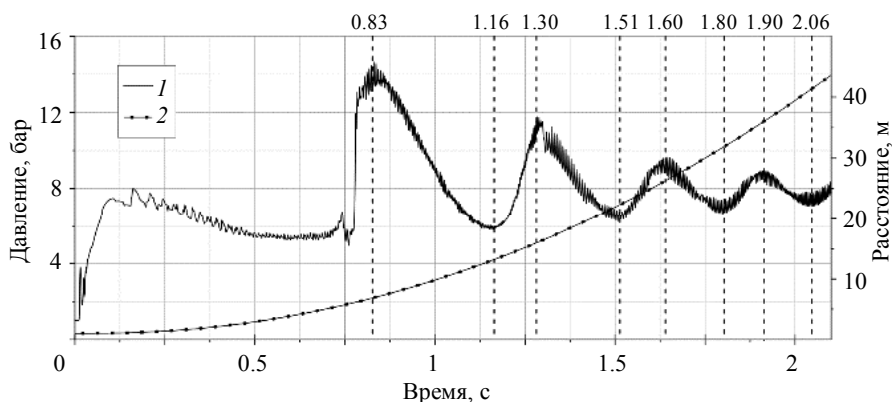


Рис. 4. Максимальное давление на поверхности старта (1) и расстояние

от среза сопла РН до преграды (2) для конфигурации без заглушки

Fig. 4. (1) Maximum pressure on the launch surface and (2) the distance from the nozzle exit PH to the obstacle for a configuration without plug

На рис. 5 показана динамика изменения максимального давления на поверхности старта до момента начала отрыва РН. Следует отметить, что наличие заглушки приводит к увеличению максимального давления на поверхности старта на этапе выхода двигателя на режим (от 0 до 0.03 с) с 3.8 бар (без заглушки) до 10 бар (при усилии срабатывания в 15 бар). Это обусловлено взаимодействием сверхзвуковой струи с преградой на расстоянии 1 м от среза сопла после прорыва мембраны. Данный эффект, связанный с вскрытием заглушки, нивелируется на этапе роста давления в камере сгорания и выходом двигателя на основной участок работы (рис. 5).

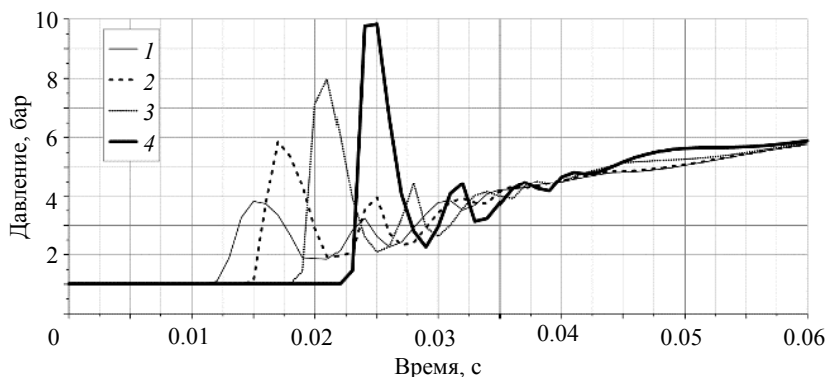


Рис. 5. Максимальное давление на поверхности старта для конфигураций: 1 – без заглушки, 2 – заглушка 5 бар, 3 – заглушка 10 бар, 4 – заглушка 15 бар

Fig. 5. Maximum pressure on the launch surface for configurations: 1, without plug; 2, 5-bar plug; 3, 10-bar plug; and 4, 15-bar plug

Проведен анализ энерготяговых характеристик РД на исследованных нестационарных режимах работы для конфигурации РДТТ без сопловой заглушки. На рис. 6 показано изменение x -компонент вектора тяги и осредненное по объёму камеры давление на временном промежутке от 0 до 2.9 с. Стоит отметить, что тяга,

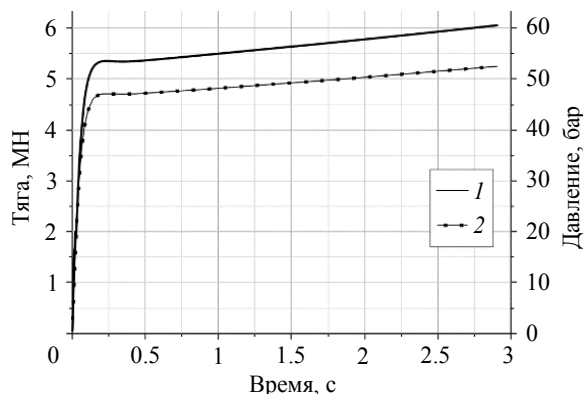


Рис. 6. Изменение тяги (1) и давления в камере сгорания (2), в диапазоне от 0 до 2.9 с

Fig. 6. Variation of the (1) thrust and (2) pressure in the combustion chamber in the range from 0 to 2.9 s

вычисленная с использованием соотношения (17), отличается от тяги, вычисленной с использованием (18), не более чем на 0.8 % на всем временном интервале.

Изменения x -компонент векторов тяги на временном промежутке от 0 до 0.15 с, вычисленных с использованием соотношений (18), – кривая 1 и (23) – кривая 2, приведены на рис. 7. Вклад реактивной, статической и нестационарной составляющих в общую тягу (18) показан на рис. 8. Вклад каждой компоненты определялся как: $\tilde{P}_{\text{комп}} = P_{\text{комп}} / P_2$, где $P_{\text{комп}}$ – составляющая тяги. На рис. 9 показано изменение нестационарной составляющей тяги (22) (кривая 1), и её компонент вычисленных по объему камеры сгорания ($P_{\text{нест.кам}}$, кривая 2) и по объему соплового блока ($P_{\text{нест.спл}}$, кривая 3).

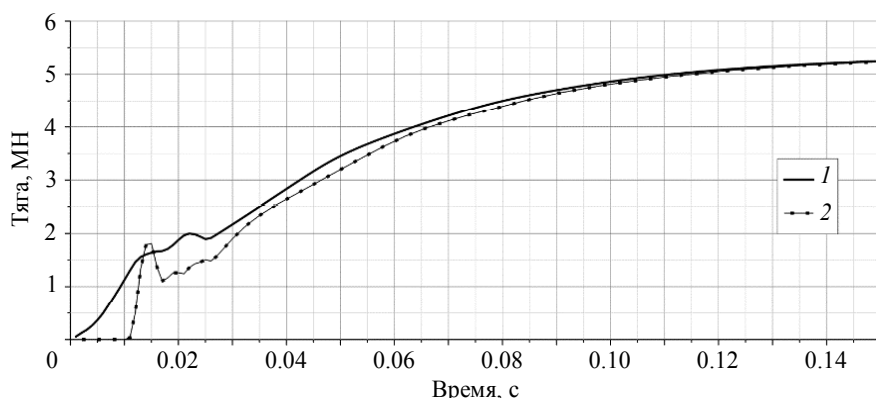


Рис. 7. Изменение тяги РД в диапазоне от 0 до 0.15 с:

1 – тяга вычисленная по (18), 2 – тяга вычисленная по (23)

Fig. 7. Variation of the thrust in the range from 0 to 0.15 s:

1, the thrust calculated using (18) and 2, the thrust calculated using (23)

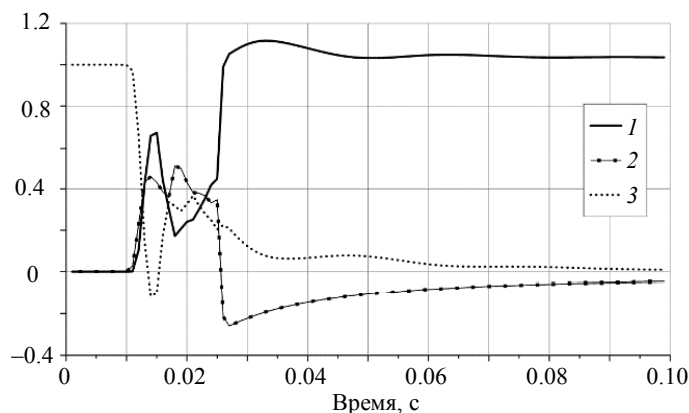


Рис. 8. Составляющие тяги: 1 – реактивная, 2 – статическая, 3 – нестационарная

Fig. 8. Thrust components: 1, reactive; 2, static; and 3, unsteady

В интервале от 0 до 0.01 с, пока продукты сгорания заполняют свободный объем камеры сгорания, а расход газа через выходное сечение сопла равен нулю,

общая тяга РД определяется исключительно нестационарной составляющей тяги (рис. 8, кривая 3). Этот период характеризуется резким ростом изменения количества движения продуктов сгорания по объему камеры (до 25 % от общей тяги) и сопловому блоку (до 75 %) (рис. 9).

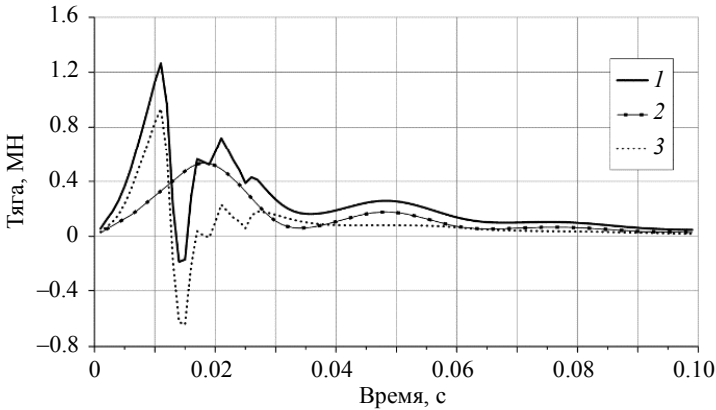


Рис. 9. Компоненты нестационарной составляющей тяги: 1 – нестационарная тяга, 2 – изменение количества движения по объему камеры сгорания, 3 – изменение количества движения по объему соплового блока

Fig. 9. Unsteady thrust components: 1, unsteady thrust; 2, unsteady thrust along the volume of the combustion chamber; and 3, unsteady thrust along the volume of the nozzle block

Далее на временном интервале от 0.01 до 0.03 с происходит распространение скачка уплотнения от минимального сечения к срезу сопла, что приводит к формированию сверхзвукового режима истечения продуктов сгорания в сопловом блоке РД (рис. 10) и определяет рост вклада реактивной составляющей тяги (рис. 8) в общую тягу РД. Резкий спад реактивной составляющей тяги на участке от 0.015 до 0.018 с обусловлен локальным торможением дозвукового потока в сверхзвуковой части сопла под действием отраженного от поверхности старта скачка уплотнения (рис. 11). Воздействие отраженной волны приводит к уменьшению интеграла сил давления по поверхности сверхзвуковой части сопла (рис. 12). Вклад нестационарной составляющей тяги на этом участке составляет до 40 %.

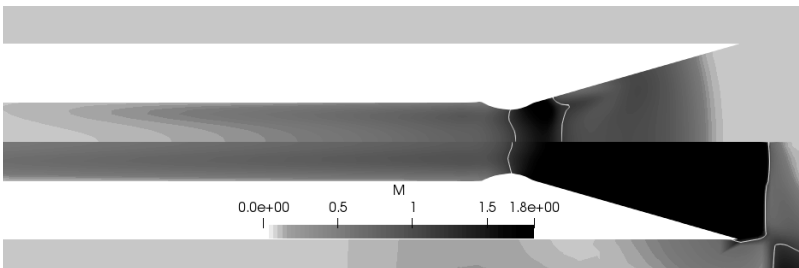


Рис. 10. Поля чисел Маха в момент времени 0.01 (сверху) и 0.03 с (снизу)
Fig. 10. Distribution of the Mach numbers at time instants of 0.01 (on the top) and 0.03 s (on the bottom)

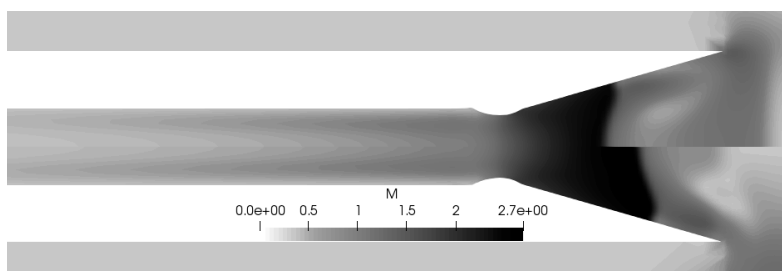


Рис. 11. Поля чисел Маха в момент времени 0.015 (сверху) и 0.018 с (снизу)

Fig. 11. Distribution of the Mach numbers at time instants of 0.015 (on the top) and 0.018 s (on the bottom)

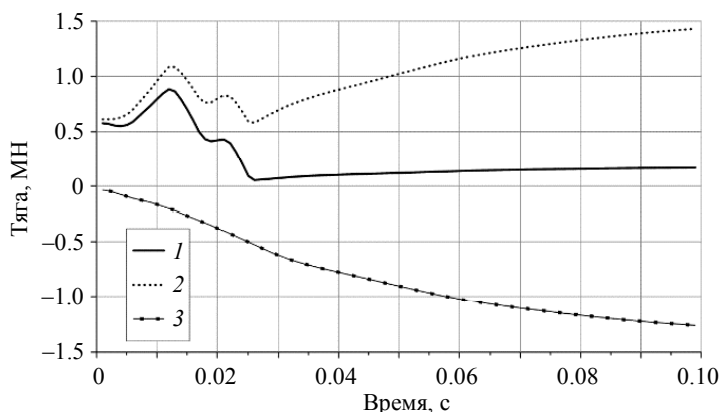


Рис. 12. Интеграл сил давления по соплу: 1 – по всей поверхности сопла, 2 – по сверхзвуковой части сопла, 3 – по дозвуковой части сопла

Fig. 12. Integral of the pressure forces over the nozzle surfaces: 1, over the entire surface of the nozzle; 2, along the supersonic part of the nozzle; and 3, along the subsonic part of the nozzle

На временном интервале от 0.03 до 0.3 с происходит постепенный выход двигателя на режим и установление локальных газодинамических параметров в камере сгорания и сопловом блоке РД. Вклад нестационарной составляющей тяги уменьшается с 12 до 0.2 %, статической – с 20 до 3 %, при этом рост тяги происходит в основном за счет нарастающего действия сил давления на заднее днище камеры сгорания РД (рис. 13).

Влияние сопловой заглушки на тяговые характеристики модельного РД заметно на временном интервале от 0.01 до 0.03 с. Время срабатывания заглушки для конфигурации с давлением вскрытия 5 бар составляет 0.01 с, 10 бар – 0.015 с, и 15 бар – 0.02 с (рис. 14). Видно, что при наличии сопловой заглушки наблюдается резкий скачок тяги и дальнейший волновой характер выхода тяги на режим, обусловленный прохождением интенсивной ударной волны через сверхзвуковую часть сопла, образовавшейся вследствие вскрытия заглушки и серии отраженных от поверхности старта скачков.

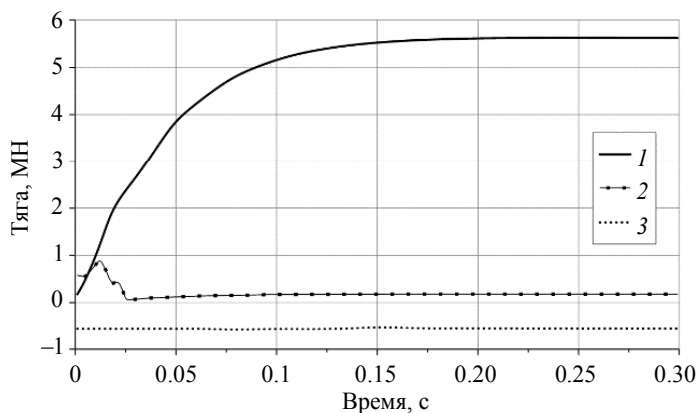


Рис. 13. Интеграл сил давления: 1 – по камере сгорания, 2 – по соплу, 3 – по внешнему контуру РН

Fig. 13. Integral of the pressure forces: 1, along the combustion chamber; 2, along the nozzle; and 3, along the outer contour of the rocket

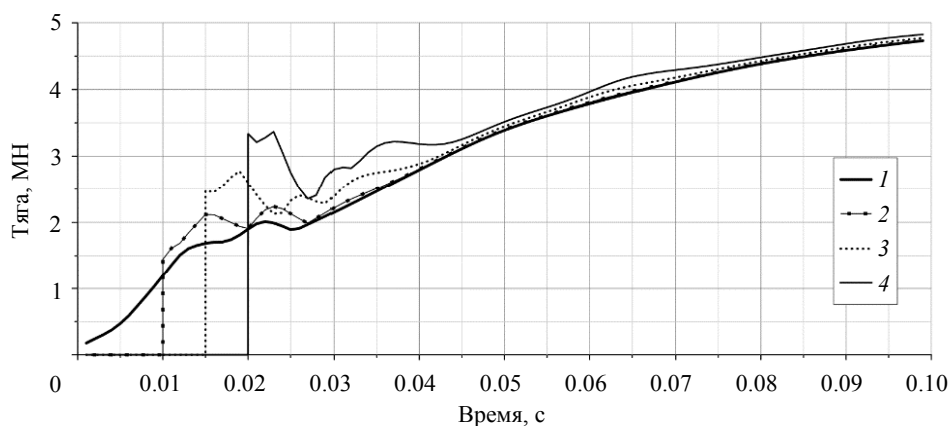


Рис. 14. Изменение тяги РД: 1 – без заглушки, 2 – заглушка 5 бар, 3 – заглушка 10 бар, 4 – заглушка 15 бар

Рис. 14. Variation of the thrust: 1, without plug; 2, 5-bar plug; 3, 10-bar plug; and 4, 15-bar plug

Закключение

Разработана методика расчета газовой динамики старта РН и энерготяговых характеристик РДТТ на нестационарных режимах работы. Методика учитывает изменение геометрии поверхности горения твердого топлива в процессе работы РДТТ и изменение геометрии расчетной области с учетом динамики старта РН. Проведен анализ нестационарного силового воздействия сверхзвуковой струи на поверхность старта. Показано, что максимум силового воздействия находится в окрестности дисков Маха невозмущенной струи. Проведены численные исследования газодинамических процессов при старте модельного твердотопливного ускорителя, в том числе с учетом вскрытия сопловой заглушки. Показана величина вклада составляющих силы тяги на этапе выхода на режим. Наличие заглушки на

начальном этапе запуска РД приводит к скачкообразному изменению тяги, и незначительным колебаниям, которые демпфируются по мере повышения давления в камере сгорания.

Автор выражает благодарность Емельянову Владиславу Николаевичу и сотрудникам кафедры А9 Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова за помощь при подготовке работы и объективную критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев А.В., Амарантов Г.И., Вахрушев А.В. Внутренняя баллистика РДТТ / под ред. А.М. Липанова, Ю.М. Милёхина. М.: Машиностроение, 2007. 504 с.
2. Ерохин Б.Т. Теория внутрикамерных процессов и проектирование РДТТ: Учебник для высших технических учебных заведений. М.: Машиностроение. 1991. 560 с.
3. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012. 468 с.
4. Липанов А.М., Бобрышев В.П., Алиев А.В., Спиридонов Ф.Ф., Лисица В.Д. Численный эксперимент в теории РДТТ. Екатеринбург: Наука, 1994. 300 с.
5. Липанов А.М., Дадикина С.Ю., Шумихин А.А., Королева М.Р., Карпов А.И. Численное моделирование внутрикамерных нестационарных турбулентных течений. Часть 1 // Вестник ЮУрГУ ММП. 2019. Т. 12, № 1. С. 32–43. DOI: 10.14529/mmp190103.
6. Vasenin I.M., Krainov A.Yu., Lipanov A.M., and Shrager E.R. Method for direct numerical simulation of turbulent gas flows in curvilinear coordinates // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. V. 55(5). P. 883–890. DOI: 10.1134/S0965542515050176.
7. Vasenin I.M. Shrager E.R. Glazunov A.A. Krainov A.Yu. Krainov D.A. Modeling of the Process of Motion of a Scramjet in the Atmosphere // Russ. Phys. J. 2013. V. 56. P. 908–913. DOI: 10.1007/s11182-013-0117-2.
8. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Карпенко А.Г., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015. 416 с.
9. Minkov L.L., Shrager E.R. and Kiryushkin A.E. Two Approaches for Simulating the Burning Surface in Gas Dynamics // Key Engineering Materials. 2016. V. 685. P. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
10. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 607 с.
11. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
12. Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kagenov A.M., Zhiltsov K.N., Tyryshkin I.M., Sereda M.S., Chervakova A.V. Method of gas flows calculation in solid propellant rocket engines taking into account the combustion of solid fuel charge // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. 2019. 597:012077. DOI: 10.1088/1757-899X/597/1/012077
13. Kostyushin K.V., Kotonogov V.A., Kagenov A.M., Tyryshkin I.M., Glazunov A.A., Eremin I.V., Zhiltsov K.N. The universal algorithm for solving the gas dynamics equations on the mesh with arbitrary number of cell faces // Journal of Physics Conference Series. 2018. 1145(1):012048. DOI: 10.1088/1742-6596/1145/1/012048.
14. Глазунов А.А., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Еремин И.В., Котоногов В.А., Алигасанова К.Л. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с преградами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 87–101. DOI: 10.17222/19988621/63/8.

Статья поступила 20.07.2020 г.

Kostyushin K.V. (2020) NUMERICAL INVESTIGATION OF UNSTEADY GASDYNAMIC PROCESSES AT THE LAUNCH OF SOLID-PROPELLANT ROCKETS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 127–143

DOI 10.17223/19988621/67/12

Keywords: solid-propellant rocket engine, unsteady gas dynamics, supersonic jet, mathematical modeling, movable computational grids, Godunov's method, thrust.

The paper presents the results of the methodology developed for calculating unsteady gas-dynamic processes occurring at the launch of missiles, in the gas-dynamic paths of rocket engines, and in the external regions. The method accounts for the variation in the geometry of the solid-propellant charge in the course of solid-propellant rocket engine operation and in the geometry of the computational domain at the rocket launch. The analysis of the unsteady force impact of the supersonic jet on the launch surface is carried out. It is shown that the maximum force action is located in the vicinity of the Mach disks of the unperturbed jet. Numerical studies of gasdynamic processes at the launch of a model solid-propellant booster rocket are implemented including the case when the nozzle plug opening is taken into account. The contribution of the thrust force components at the stage of bootstrap operation is assessed. The presence of the plug at the initial stage of the engine start leads to an abrupt change in the thrust and minor fluctuations, which are damped as the pressure in the combustion chamber rises.

Financial support. The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 19-31-50049/19.

Kirill V. KOSTYUSHIN (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Aliev A.V., Amarantov G.N. Vakhrushev A.V. (2007) *Vnutrennyaya ballistika RDTT* [Internal ballistics of solid-propellant rocket motors]. Ed. by Lipanov A.M., Milekhin Yu.M. Moscow: Mashinostoenie.
2. Erokhin B.T. (1991) *Teoriya vnutrikamernykh protsessov i proektirovaniya RDTT* [Theory of intrachamber processes and design of solid-propellant rocket motors]. Moscow: Mashinostoenie.
3. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2012) *Vychislitel'nye tekhnologii v zadachakh mekhaniki zhidkosti i gaza* [Computational technologies in problems of fluid and gas mechanics]. Moscow: Fizmatlit.
4. Lipanov A.M., Bobryshev V.P., Aliev A.V., Spiridonov F.F., Lisitsa V.D. (1994) *Chislennyy eksperiment v teorii RDTT* [A numerical experiment in the theory of solid-propellant rocket motors]. Ekaterinburg: UIF Nauka.
5. Lipanov A.M., Dadikina S.Yu., Shumikhin A.A., Koroleva M.R., Karpov A.I. (2019) Numerical simulation intra-chamber of unsteady turbulent flows stimulate. Part 1. *Bulletin SUSU MMCS*. 12(1). pp. 32–43. DOI: 10.14529/mmp190103.
6. Vasenin I.M., Krainov A.Yu., Lipanov A.M., Shrager E.R. (2015) Method for direct numerical simulation of turbulent gas flows in curvilinear coordinates. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 55(5). pp. 883–890. DOI: 10.1134/S0965542515050176.
7. Vasenin I.M., Shrager E.R., Glazunov A.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2013) Modeling of the process of motion of a Scramjet in the atmosphere. *Russian Physics Journal*. 56. pp. 908–913. DOI: 10.1007/s11182-013-0117-2.
8. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emel'yanov V.N., Kozelkov A.S., Karpenko A.G., Teterina I.V. (2015) *Raznostnye skhemy v zadachakh gazovoy dinamiki na nestrukturirovannykh*

- setkakh* [Difference schemes in problems of gas dynamics on unstructured grids]. Moscow: Fizmatlit.
9. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. (2016) Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
 10. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. (2000) *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems*. Boca Raton: CRC Press.
 11. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solving of multi-dimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
 12. Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kagenov A.M., Zhiltsov K.N., Tyryshkin I.M., Sereda M.S., Chervakova A.V. (2019) Method of gas flows calculation in solid propellant rocket engines taking into account the combustion of solid fuel charge. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 597(012077). DOI: 10.1088/1757-899X/597/1/012077.
 13. Kostyushin K.V., Kotonogov V.A., Kagenov A.M., Tyryshkin I.M., Glazunov A.A., Eremin I.V., Zhiltsov K.N. (2018) The universal algorithm for solving the gas dynamics equations on the mesh with arbitrary number of cell faces. *Journal of Physics Conference Series*. 1145(1):012048. DOI: 10.1088/1742-6596/1145/1/012048.
 14. Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aligasanova K.L. (2019) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya odinochnoy sverkhzvukovoy strui s pregradami [Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with obstacles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 87–101. DOI: 10.17222/19988621/63/8.

Received: July 20, 2020

УДК 532.546

DOI 10.17223/19988621/67/13

**А.С. Чиглинцева, А.А. Насыров, И.А. Чиглинцев,
С.А. Лепихин, В.В. Коледин**

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГИДРАТООБРАЗОВАНИЯ В ОТКАЧИВАЮЩЕМ ТРУБОПРОВОДЕ С ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ ОТБОРЕ ГАЗА ИЗ «КУПОЛА-СЕПАРАТОРА»¹

На основе численного моделирования исследуется образование гидратов в вертикальном трубопроводе, через который происходит отбор газа из «купола-сепаратора» – устройства, предназначенного для сбора энергетических углеводородов, вытекающих из поврежденных глубоководных добывающих скважин и транспортных трубопроводов. Анализируется влияние на интенсивность гидратообразования в газоотводной трубе наличия и толщины теплоизоляционного покрытия трубы и скорости движения морской воды.

Ключевые слова: *утечка углеводородов, «купол-сепаратор», движение газа, образование газового гидрата, теплообмен.*

Добыча нефти и газа на шельфе всегда сопряжена с потенциально высокой угрозой загрязнения окружающей среды и, в случае серьезных аварий, может обернуться крупномасштабной экологической катастрофой, подобной разливу нефти в Мексиканском заливе после взрыва на нефтедобывающей платформе в 2010 году [1–4]. Тогда для сбора и последующей откачки вытекающей из разрушенной скважины нефти был применен специальный купол, который установили непосредственно над местом утечки. При этом ликвидаторы аварии столкнулись с проблемой образования в куполе достаточно большого количества гидрата, что негативно сказалось на устойчивости купола и создало трудности при отборе углеводородного сырья из купола [3, 4].

Некоторые численные модели глубоководных нефтяных и газовых выбросов из скважин и сравнение результатов моделирования с натуральными экспериментами представлены в [5–8]. В [7, 8] основное внимание уделено проблеме образования гидрата в затопленных струях.

В [9–12] рассмотрены теоретические основы функционирования «купола-сепаратора» с учетом различных механизмов образования в нем гидратов. Проанализированы возможные случаи расслоения на фазы газожидкостной смеси в куполе, изучены динамика наполняемости купола пластовой жидкостью и реализующиеся при этом поля температур и давлений. Проведен анализ образования и скорости прироста газогидратов в «куполе-сепараторе» при различных дебитах скважины. В [13] проанализировано влияние на интенсивность гидратообразования в куполе дополнительного теплоизоляционного покрытия, установленного на его внешней поверхности. Отмечается сравнительно слабый эффект от такого способа предотвращения накопления гидратов в установке, особенно при сравнительно быстром наполнении купола углеводородами.

¹ Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук, номер гранта: МД-2179.2020.1.

Модели образования гидрата в вертикальных трубопроводах малого диаметра, в том числе в трубе, через которую происходит отбора газа из «купола-сепаратора», и влияние на скорость прироста гидратных отложений толщины газоотводной трубы рассмотрены в [14, 15].

В данной работе, которая является продолжением и дальнейшим развитием исследований [10, 12–14] изучается интенсивность гидратообразования в газоотводной трубе, снабженной внешним теплоизоляционным покрытием разной толщины и при наличии движения окружающей водной среды.

Постановка задачи и основные уравнения

Отбираемый из «купола-сепаратора» газ будем рассматривать как газожидкостную смесь, содержащую в своем составе легкие углеводороды и воду в виде пара и взвеси капель. Если термобарические условия, при которых ведется отбор газа, благоприятны для образования гидратов, то на внутренней поверхности газоотводного трубопровода будет происходить нарастание газогидратного слоя, уменьшающего живое сечение трубопровода [16–18].

Процессы течения газожидкостной смеси в отводящей трубе и образования в ней газового гидрата будем рассматривать в рамках следующих допущений: скорость течения газа гораздо меньше скорости звука, течение квазиустановившееся, массовый расход газа превышает скорость прироста массы газогидрата, температура жидкой и газовой фаз в любой точке сечения трубопровода одинакова, фазовые превращения равновесные. Взвесь жидкой воды в потоке принимаем мелкодисперсной, ее объемную концентрацию незначительной. Это позволяет пренебречь влиянием дисперсной фазы на течение газа и считать скорости капель воды и газа равными [19, 20].

Физические параметры, относящиеся к воде и газовому потоку в целом, снабдим нижними индексами w и g , параметры воды в парообразном и жидком (капельном) состоянии – нижними индексами ϑ и l соответственно. Параметрам, характеризующим равновесные состояния, припишем нижний индекс s .

Количество газа, перекачиваемого за единицу времени из «купола-сепаратора» через газоотводный трубопровод на поверхность океана, принимаем постоянным по всей длине трубопровода:

$$m_g = \rho_g w_g S = \text{const}, \quad (1)$$

где ρ_g и w_g – плотность и скорость газа в трубопроводе; $S = \pi a^2$ – площадь «живого» сечения трубопровода.

В процессе отбора газа из «купола-сепаратора» образующийся газогидрат будет нарастать в виде слоя на внутренней поверхности трубопровода. Эти гидратные отложения учтем в виде толщины газогидратного слоя δ_h . Так как интенсивность гидратообразования по длине трубопровода будет неодинакова, то δ_h очевидно будет зависеть от координаты z , а также времени t . Ось z , относительно которой будем рассматривать движение газа, направим вверх вдоль трубопровода, совместив ее начало с входным сечением. Тогда δ_h может быть представлена как

$$\delta_h(z, t) = a_0 - a(z, t),$$

где a_0 – внутренний радиус стального трубопровода; a – радиус «живого» сечения трубопровода.

Полагаем, что доминирующим фактором образования гидрата в трубопроводе является интенсивный отвод теплоты, выделяющейся при его образовании, в ок-

ружающую среду [13, 21]. Поэтому с целью анализа предупреждения гидратообразования путем снижения тепловых потерь от газового потока рассмотрим трубопровод длиной L , покрытый снаружи слоями пенополиуретана и полиуретана толщиной δ_{pp} и δ_p соответственно (рис. 1).

Влагосодержание газового потока зададим через массовую концентрацию воды k_w . Вода в составе транспортируемой газовой смеси может присутствовать как в парообразном, так и жидком (в виде капель) состояниях. Тогда для массовой концентрации воды можно записать

$$k_w = k_l + (1 - k_l) k_v, \quad (2)$$

где k_l , k_v – массовые концентрации капель и пара соответственно.

Для описания установившегося течения газа в отводящем трубопроводе запишем уравнение импульсов в стационарном приближении:

$$m_g \frac{dw_g}{dz} = -S \frac{dp}{dz} - \rho_g g S - f, \quad (3)$$

где p – давление газа.

Силу вязкого трения между потоком газа и внутренней поверхностью трубопровода зададим как [22, 23]

$$f = 2\pi a \tau, \quad \tau = \lambda \frac{\rho_g w_g^2}{8},$$

где τ – сила гидравлического трения, отнесенная к единице площади внутренней поверхности трубопровода.

Коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda = f(\text{Re}, \varepsilon)$ в общем случае является функцией двух параметров [23]: числа Рейнольдса $\text{Re} = 2a \rho_g w_g / \mu_g = 2m_g / \pi a \mu_g$ и относительной шероховатости внутренней поверхности трубы $\varepsilon = \beta/a$, где β – высота выступов шероховатости, μ_g – динамическая вязкость газа.

При откачке газа из-под «купола-сепаратора» в трубопроводе будет реализовываться турбулентный режим течения. Для его описания будем считать, что коэффициент гидравлического сопротивления λ принимает значения, соответствующие закону сопротивления гладких труб. В этом случае λ будет определяться только числом Рейнольдса, и при значениях $\text{Re} < 10^5$ может быть определен по формуле Блазиуса [23]

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}.$$

Движение газа в отводящем трубопроводе, содержащем в своём составе пары воды, будет сопровождаться их конденсацией, в результате чего будет выделяться энергия. Для передачи тепла от газового потока к внутренней стенке трубки запишем уравнение сохранения энергии в виде

$$m_g c_g \frac{dT_g}{dz} = \frac{m_g}{\rho_g} \frac{dp}{dz} + m_g l_w \frac{dk_l}{dz} - Q_{gen}, \quad Q_{gen} = 2\pi a q_{gen}. \quad (4)$$

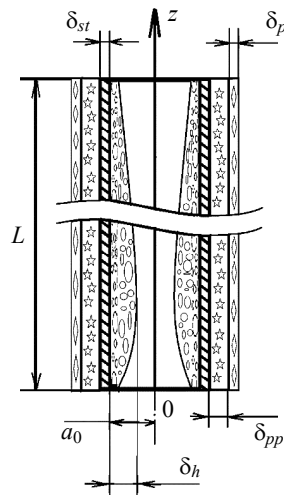


Рис. 1. Принципиальная схема трубопровода с теплоизоляцией
Fig. 1. Basic scheme of a gas pipeline with insulation

Здесь l_w – удельная теплота парообразования воды, c_g , T_g – удельная теплоемкость и температура газа, q_{gen} – общая интенсивность теплопередачи от газового потока к стенке трубопровода, приходящаяся на единицу площади.

Тепловые потоки от газа в трубе к внешней среде через многослойную цилиндрическую поверхность трубопровода (рис. 2) зададим как

$$\begin{aligned} q_g &= \beta_g (T_g - T_h'), & q_h &= \beta_h (T_h' - T_h''), & q_{st} &= \beta_{st} (T_{st}' - T_{st}''), \\ q_{pp} &= \beta_{pp} (T_{pp}' - T_{pp}''), & q_p &= \beta_p (T_p' - T_p''), & q_w &= \beta_w (T_{p1}' - T_w), \\ q_{gen} &= q_g = q_h = q_{st} = q_{pp} = q_p = q_w, \\ q_{gen} &= \beta_{gen} (T_g - T_w), \\ \frac{1}{\beta_{gen}} &= \frac{1}{\beta_g} + \frac{1}{\beta_h} + \frac{1}{\beta_{st}} + \frac{1}{\beta_{pp}} + \frac{1}{\beta_p} + \frac{1}{\beta_w}, \\ \beta_g &= \frac{\lambda_g \text{Nu}_g}{2R}, \quad \beta_h = \frac{\lambda_h}{\delta_h}, \quad \beta_{st} = \frac{\lambda_{st}}{\delta_{st}}, \quad \beta_{pp} = \frac{\lambda_{pp}}{\delta_{pp}}, \quad \beta_p = \frac{\lambda_p}{\delta_p}, \quad \beta_w = \frac{\lambda_w \text{Nu}_w}{L}, \end{aligned} \quad (5)$$

где T_i^j – температура, которая указана на рис. 2 (нижний индекс $i = g, h, st, pp, p, w$ определяет принадлежность параметра соответственно газу, слою гидрата, стальной стенке трубопровода, пенополиуретановому и полиуретановому теплоизоляционным слоям и окружающей воде; верхний индекс j в виде одного штриха характеризует температуру на внутренней поверхности слоя вещества, в виде двух штрихов – на внешней поверхности); q_i – интенсивность передачи тепла через единицу площади поверхности; λ_i – коэффициенты теплопроводности; L – длина (высота) трубопровода.

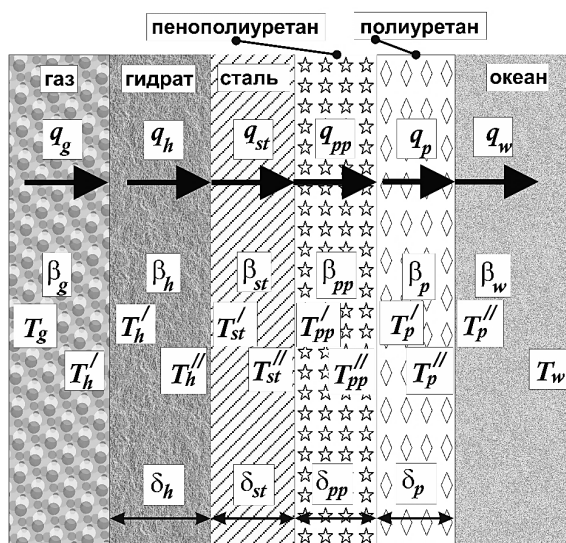


Рис. 2. Схема тепловых потоков через стенку трубопровода
Fig. 2. Scheme of heat flows through a pipeline wall

Согласно [24, 25], передача тепла от газового потока к стенке трубы вдоль самого трубопровода может осуществляться в трех режимах, в зависимости от термобарических условий и влагосодержания потока. Первому режиму теплопередачи соответствует участок трубопровода, на котором отсутствует гидратообразование ($q_h = 0$, $1/\beta_h = 0$).

Второй и третий режимы теплопередачи сопровождаются образованием слоя газогидрата в откачивающем трубопроводе. Во втором режиме гидратообразование лимитируется теплоотводом:

$$q_g = \beta_g (T_g - T_s(p)), \quad (6)$$

где $T_s(p)$ – равновесная температура гидратообразования, а в третьем – диффузионными процессами:

$$\begin{aligned} q_g &= \beta_g (T_g - T_h'), \\ q_g + l_h j_h &= q_w, \\ T_h' &= \frac{\beta_g T_g + \beta_w T_w + l_h j_h}{\beta_w + \beta_g}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь j_h – интенсивность гидратообразования, отнесённая к единице площади контактной поверхности; l_h – удельная теплота гидратообразования.

Поскольку заметный прирост гидратных отложений в трубопроводе происходит за достаточно длительный промежуток времени, то пренебрежём временными эффектами образования кристаллов гидрата, считая процесс гидратообразования мгновенным.

Зададим критерии Нуссельта Nu_g и Nu_w , характеризующие конвективные потоки тепла от газа в трубопроводе к внутренней поверхности трубы и от внешней поверхности трубопровода к окружающей водной среде. Движение океанических вод, омывающих газоотводный трубопровод, учтем в рамках случая поперечного обтекания одиночного цилиндра. Тогда средний коэффициент теплоотдачи будет определяться из выражений [23, 25]:

$$Nu_g = 0.021 Re^{0.8} Pr^{0.43}, \quad Nu_w = C Pr^n Re_w^m, \quad (8)$$

где $Re_w = \frac{w_w D_{equl}}{v_w}$; $Nu_w = \frac{\alpha D_{equl}}{\lambda_w}$; Pr – число Прандтля; w_w – скорость движения

омывающих океанических масс; v_w , λ_w – кинематическая вязкость морской воды и её теплопроводность; α – коэффициент теплоотдачи; $n = 0.35$ – коэффициент, определяемый эмпирическим путем; C и m – коэффициенты, зависящие от скорости обтекания цилиндра и его формы. Для упрощения расчетов будем полагать, что скорость морского течения вдоль всего отводящего трубопровода постоянна и варьируется в пределах от 0.25 до 1 м/с. Тогда для коэффициентов можно принять значения $C = 0.026$, $m = 0.8$ [26].

Записанные уравнения сохранения массы газа (1), импульса (3) и энергии (4) для газового потока образуют замкнутую систему при дополнении их уравнением состояния газа и выражениями для интенсивности теплоотвода Q_{gen} и гидравлического трения f . Преобразование этих уравнений позволяет получить систему дифференциальных уравнений первого порядка, способных описать распределение температуры газа и его давления вдоль отводящего трубопровода:

$$\frac{dT_g}{dz} = \left(\frac{w_g S}{m_g R_g} - \frac{p S^2}{m_g^2 R_g} \right) \frac{dp}{dz} - \frac{p \rho_g g S^2}{m_g^2 R_g} - \frac{p S}{m_g^2 R_g} f ; \quad (9)$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\frac{\rho_g c_g g p S_g^2}{m_g R_g} + \frac{k_v \rho_g g T_w^* l_w p S_g^2}{T_g^2 m_g R_g} + \left(\frac{c_g p S_g}{m_g R_g} + \frac{k_v T_w^* l_w p S_g}{T_g^2 m_g R_g} \right) \cdot f - Q_{gen}}{\left(m_g c_g + \frac{m_g k_v l_w T_w^*}{T_g^2} \right) \left(\frac{w_g S_g}{m_g R_g} - \frac{p S_g^2}{m_g^2 R_g} \right) - \frac{m_g}{\rho_g} - \frac{m_g k_v l_w}{p}}. \quad (10)$$

Решение данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений может быть получено методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Образование газогидратов в трубопроводе

Образование гидрата в откачивающем трубопроводе определяется местными значениями давления и температуры газового потока и его влагосодержанием. Принимая во внимание уравнение состояния газа, а также зависимость между давлением и температурой, при которых наступает состояние насыщения, можно получить выражение, описывающее распределение равновесной концентрации водяного пара вдоль трубопровода [20]:

$$k_v^* = \frac{p_w^* R_g}{p R_v} \exp \left(- \frac{T_w^*}{T_g} \right). \quad (11)$$

Пар, поступающий на входе в отводящий трубопровод, будем считать сухим. Это позволяет записать условие

$$k_{v0} < k_v^*, \quad k_v^* = \frac{p_w^* R_g}{p_0 R_v} \exp \left(- \frac{T_w^*}{T_{g0}} \right),$$

где k_{v0} и k_v^* – фактическая концентрация пара на входе в трубопровод и равновесная концентрация, соответствующая температуре T_{g0} и давлению p_0 на входном сечении трубопровода. Тогда из (11) и вышеописанных выражений можно определить сечения в канале, в которых реализуется условие, соответствующее точке росы. Это условие зависит от температуры T_c^- и давления газа на внутренней стенке трубопровода и имеет вид

$$k_l = \frac{k_w - k_v^*}{1 - k_v^*} > 0, \quad k_v^* = \frac{p_w^* R_g}{p R_v} \exp \left(- \frac{T_w^*}{T_g} \right), \quad T_c^- \leq T_s(p).$$

Если условия в газовом потоке благоприятны образованию гидратов, то в отводящем трубопроводе будет происходить уменьшение содержания влаги. Уравнение сохранения массы воды в этом случае запишем как

$$m_g \frac{dk_w}{dz} = -J_w, \quad J_w = 2\pi a j_w. \quad (12)$$

Здесь J_w и j_w – интенсивности отбора влаги из газового потока, идущие на образование гидрата, отнесённые на единицу длины внутренней стенки трубопровода и её площади соответственно.

Скорость прироста газогидратных отложений на внутренней стенке трубопровода зададим как

$$\frac{\partial \delta_h}{\partial t} = \frac{j_h}{\rho_h}, \quad (13)$$

где j_h – интенсивность гидратообразования, приведённая к единице площади контактной поверхности, ρ_h – плотность газогидратов.

Будем полагать, что интенсивность гидратообразования и интенсивность отбора влаги из газового потока для образования гидрата связаны между собой «стехиометрическим» соотношением

$$j_w = (1 - k_{gh}) j_h, \quad (14)$$

где k_{gh} – массовая доля гидратообразующего газа в составе гидрата.

В процессе образования газогидратов можно выделить два основных механизма. В случае реализации одного из них наблюдается достаточное поступление гидратообразующих компонентов, поэтому процесс перехода газа в гидрат будет лимитироваться отводом тепла от межфазной поверхности. Для его описания необходимо применить условие теплового баланса. Обозначим через T_h' температуру межфазной поверхности, которая остаётся постоянной и будет равна равновесной температуре образования гидрата $T_s(p)$ при соответствующем давлении p в потоке отбираемого газа ($T_h' = T_s(p)$) [16].

Тогда условие теплового баланса для поверхности гидратных отложений в отводящем трубопроводе позволяет записать

$$j_h l_h = q_w - q_g. \quad (15)$$

В случае реализации другого механизма наблюдается нехватка влаги для образования газогидрата, поэтому скорость фазового перехода будет зависеть от количества влаги, которая поступает к межфазной границе. Для данного режима так же должно выполняться условие для температуры поверхности гидрата в виде $T_c^- \leq T_s(p)$, при текущем давлении p . Концентрацию влаги в газе близкого к слою гидрата будем считать равной $k_{wc} = 0$. Используя соотношения тепломассопереноса [27, 28] при турбулентном режиме, получим

$$j_{h(w)} = \frac{v^{(D)}}{2a} \rho_g k_w \text{Sh}, \quad (16)$$

$$\text{Sh} = 0.021 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{(D)0.43}, \quad \text{Pr}^{(D)} = \frac{v^{(\mu)}}{v^{(D)}}, \quad v^{(\mu)} = \frac{\mu_g}{\rho_g}.$$

Здесь $v^{(D)}$ и $v^{(\mu)}$ – коэффициенты диффузии и кинематической вязкости, $\text{Pr}^{(D)}$, Sh – критерии Прандтля и Шервуда соответственно.

Нарастание гидратного слоя в трубопроводе при отборе газа из «купола-сепаратора» будет происходить в зоне трубопровода, для которой характерно выполнение условий $k_{l(w)} > 0$ и $T_c^- \leq T_s(p)$.

Как правило, основным компонентом попутного газа является метан [29], поэтому примем за температуру образования гидратов температуру гидратообразования метана при текущем давлении p_g . Эту температуру можно задать формулой [24, 30]

$$T_s(p) = T_{h0} + T_* \ln \left(\frac{p}{p_{h0}} \right), \quad (17)$$

где T_{h0} , p_{h0} , T_* – параметры, определяемые опытным путем.

Результаты расчетов

На основе построенной модели были исследованы особенности течения газа, откачиваемого из «купола-сепаратора», в вертикальном трубопроводе длиной $l = 1500$ м и внутренним радиусом $a_0 = 5$ см в трех ситуациях: при отсутствии внешнего теплоизоляционного покрытия трубопровода и с внешним утеплением трубопровода слоями пенополиуретана и полиуретана при двух разных значениях толщины пенополиуретанового слоя. Толщина стенки и слоев теплоизоляции в расчетах составляла: $\delta_{st} = 1$ см, $\delta_p = 0.5$ см, $\delta_{pp} = 0.5$ и 1 см. Теплофизические параметры системы равны: $T_w = 277$ К; $m_g = 1$ кг/с; $R_g = 519.38$ Дж/(кг·К); $\mu_g = 1028 \cdot 10^{-8}$ кг/(м·с); $c_g = 2365$ Дж/(кг·К); $\lambda_g = 0.03$ Вт/(м·К); $\lambda_p = 0.25$ Вт/(м·К); $\lambda_{pp} = 0.024$ Вт/(м·К); $\lambda_{st} = 86$ Вт/(м·К); $l_w = 1.7 \cdot 10^6$ Дж/кг; $R_v = 461$ Дж/(кг·К); $p_w^* = 9.34 \cdot 10^9$ Па; $T_w^* = 4228$ К; $l_h = 5 \cdot 10^5$ Дж/кг; $k_v = 3 \cdot 10^{-3}$; $\rho_h = 910$ кг/м³; $T_{h0} = 283$ К, $p_{h0} = 6.95$ МПа, $T_* = 10$ К. Начальные температура и давление газа на входе трубопровода: $T_g^0 = 310$ К; $p_g^0 = 150$ атм. Скорость омыwania трубопровода океаническими водами $w_0 = 0.25$ м/с.

На рис. 3 представлены распределения основных параметров газового потока и гидратных образований в трубопроводе спустя 35 ч после начала откачки газа из «купола-сепаратора». Линии 1 соответствуют трубопроводу без внешнего утепления, линии 2 и 3 – трубопроводу с теплоизоляционным покрытием с толщиной пенополиуретанового слоя $\delta_{pp} = 0.5$ и 1 см соответственно.

Видно, что температура газового потока в трубопроводе без теплоизоляционного покрытия достаточно быстро снижается до температуры окружающей среды (рис. 3, а), что обусловлено интенсивным оттоком тепла от газа через металлическую стенку трубопровода, обладающую низким термическим сопротивлением. Это приводит к тому, что термобарические условия образования газогидратов в трубопроводе достигаются уже в его нижней части вблизи входного сечения. Об этом свидетельствует резкое падение давления газа на отметке $z \approx 70$ м (рис. 3, б), которое связано с адиабатным расширением газа после прохождения области сужения в канале, образующегося из-за отложений газогидрата на стенках трубопровода, а также уменьшение влагосодержания газового потока вследствие перехода воды в состав гидратных образований (рис. 3, в). При этом, как показывают расчеты, содержание воды в газовом потоке вверх по трубопроводу постепенно снижается практически до нуля, вследствие чего в газопроводе локализуется зона гидратных отложений протяженностью несколько десятков метров. Причем, по истечению уже полутора суток с момента откачки газа из купола, труба радиусом 5 см может быть практически полностью перекрыта газогидратными образованиями (рис. 3, д). Это, в свою очередь, приводит к многократному возрастанию скорости газового потока в области сужения канала (рис. 4), которое может привести к отрыву потоком и появлению в составе газа твердых частиц гидрата.

Утепление внешней поверхности газоотводной трубы слоями пенополиуретана и полиуретана приводит к уменьшению тепловых потерь газового потока и, как следствие, более медленному снижению температуры газа вдоль трубопровода,

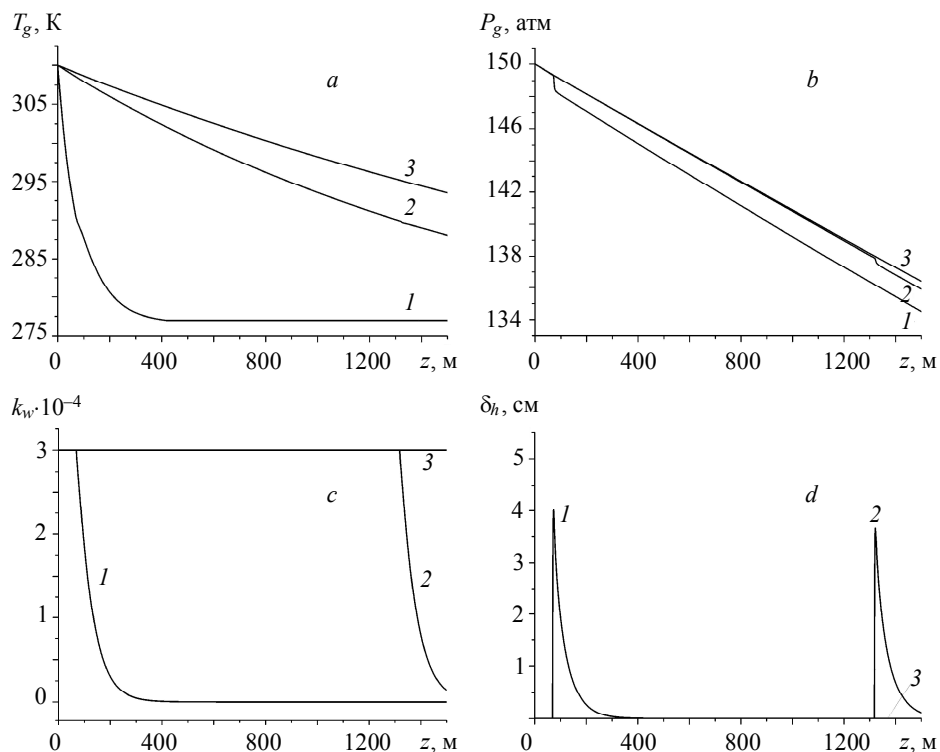


Рис. 3. Распределение температуры (а), давления (b) и влагосодержания газового потока (с) и гидратных отложений (d) в трубопроводе
Fig. 3. Distribution of the (a) temperature, (b) pressure, and (c) moisture content of the gas flow, and (d) hydrated deposits in the pipeline

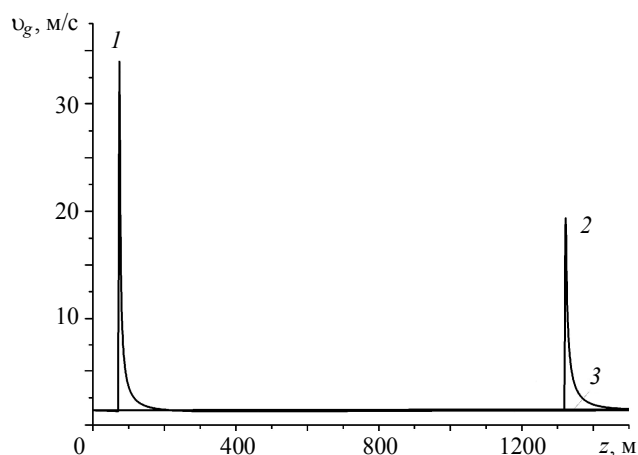


Рис. 4. Распределение скорости газового потока в трубопроводе
Fig. 4. Distribution of the gas flow velocity in the pipeline

в результате чего условия, благоприятные гидратообразованию, смещаются вверх по трубопроводу. Так, при толщине слоя пенополиуретана в 0.5 см, зона гидратных образований наблюдается практически у верхнего конца откачивающего газопровода, где происходит характерное снижение давления и влагосодержания газового потока (линии 2 на рис. 3). Как показывают расчеты, в таком утепленном трубопроводе за 35 ч образуется практически столько же газогидрата, как в трубе без теплоизоляции, что может представлять серьезную проблему при откачке газа из «купола-сепаратора».

Толщина пенополиуретанового покрытия в 1 см обеспечивает уже такое снижение температуры газового потока, при котором условия гидратообразования не достигаются ни в какой части трубопровода и транспорт газа из купола-сепаратора может происходить в безгидратном режиме. Линии распределения давления и концентрации воды в трубопроводе остаются прямыми и не имеют резкого снижения, характерного для процесса потребления влаги из газа на образование гидрата (линии 3 на рис. 3, *b* и 3, *c*). Зона гидратных отложений (рис. 3, *d*) и связанное с ее формированием пиковое возрастание скорости газового потока (рис. 4) не наблюдаются.

На рис. 5 проанализировано влияние на процесс гидратообразования в газопроводе скорости движения обтекающих его вод. Рассмотрен случай утепленного трубопровода с толщиной пенополиуретанового слоя $\delta_{pp} = 0.5$ см. Сплошная, штриховая и пунктирная линии на рисунке соответствуют скоростям морского течения $w_0 = 0, 0.5$ м/с и 1 м/с соответственно. Время расчёта также составляет 35 ч. Видно, что наличие движения окружающей воды со скоростями до 1 м/с не оказывает существенного влияния на процессы гидратообразования в утепленном трубопроводе. Количество формирующегося гидрата остается практически одинаковым, а зона гидратных отложений с увеличением скорости омывающих водных масс незначительно смещается вниз по каналу. Сдвиг зоны гидратообразования вниз по трубе обусловлен тем, что с увеличением скорости омывающих вод

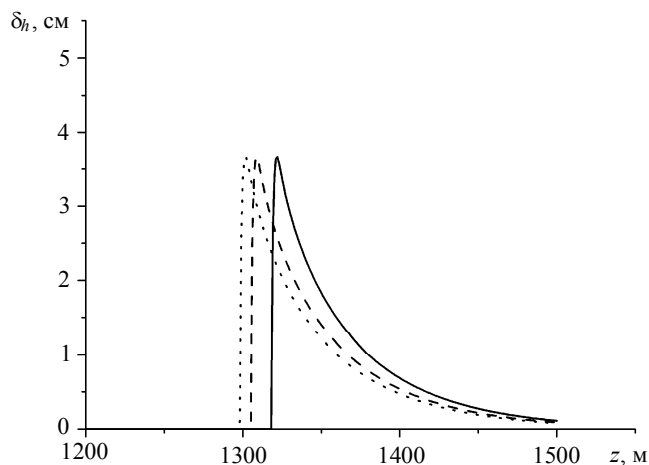


Рис. 5. Зона газогидратных отложений в трубопроводе при разной скорости обтекания морской водой

Fig. 5. A zone of hydrated deposits in the pipeline at different velocities of the sea current

возрастает интенсивность отвода тепла от газового потока в окружающую среду, и температура газа вдоль трубопровода снижается несколько быстрее. В стальном трубопроводе без теплоизоляции заметного смещения зоны гидратообразования при увеличении скорости движения окружающей воды не наблюдается в силу незначительного влияния движения омывающих вод на теплообменные процессы между газом и окружающей средой из-за низкого термического сопротивления материала трубопровода.

Заключение

На основе построенной математической модели рассмотрен процесс течения газа, откачиваемого из глубоководного «купола-сепаратора», по вертикального трубопроводу. Анализируются влияние на достижение в трубопроводе условий гидратообразования и формирование гидратных отложений наличия и толщины теплоизоляционного покрытия трубопровода и скорости подводных морских течений.

Отмечено, что в стальном газопроводе, не обладающем внешним утеплением, происходит быстрое охлаждение газового потока и гидрат может образовываться уже на начальном участке трубопровода вблизи купола. При этом уже в течение первых суток эксплуатации газопровода возникает вероятность закупорки гидратными отложениями транспортного канала. Снабжение трубопровода внешней теплоизоляцией в виде слоев пенополиуретана и полиуретана приводит к более медленному охлаждению газового потока, в результате чего условия гидратообразования, в зависимости от толщины теплоизолятора, реализуются ближе к выходу газопровода или вообще не достигаются.

Движение омывающей трубопровод морской воды не приводит к существенным изменениям в протекании физико-химических процессов в газопроводе из-за незначительного влияния на теплообменные процессы между газом и окружающей средой.

Таким образом, можно заключить, что при отборе газа из глубоководного «купола-сепаратора» покрытие откачивающего трубопровода теплоизоляцией может быть эффективным способом предотвращения в нем образования газогидратов и закупорки транспортного канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григулецкий В.Г. Краткий технологический анализ аварии на скважине MC-2S2 в Мексиканском заливе // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. 2011. № 6. С. 2–11.
2. Богоявленский В.И., Баринов П.С., Богоявленский И.В. Катастрофа в Мексиканском заливе на месторождении Ixtoc комплекса Cantarell // Бурение и нефть. 2018. № 1. С. 3–13.
3. Murawski S., Ainsworth C., Gilbert S., Hollander D., Paris C., Schlueter M., Wetzel D. (Eds.) Scenarios and Responses to Future Deep Oil Spills Fighting the Next War: Fighting the Next War. Springer International Publishing. 2020. 542 p. DOI: 10.1007/978-3-030-12963-7.
4. Иванов А.Ю., Терлеева Н.В. Нефтяной разлив в Мексиканском заливе – вклад дистанционного зондирования в мониторинг чрезвычайной ситуации // Земля из космоса: наиболее эффективные решения. 2011. № 8. С. 72–79.
5. Zheng L., Yapa P.D., Chen F. A model for simulating deepwater oil and gas blowouts – Part I: Theory and model formulation // Journal of Hydraulic Research. 2002. V. 41. No. 4. P. 339–351. <https://doi.org/10.1080/00221680309499980>.
6. Chen F.H., Yapa P.D. A model for simulating deep water oil and gas blowouts – Part II: Comparison of numerical simulations with “Deepspill” field experiments //

- Journal of Hydraulic Research. 2003. V. 41. No. 4. P. 353–365. <https://doi.org/10.1080/00221680309499981>.
7. Yapa P.D., Dasanavaka L.K., Bandara U.C., Nakata K. A model to simulate the transport and fate of gas and hydrates released in deepwater // Journal of Hydraulic Research. 2010. V. 48. No. 5. P. 559–572. <https://doi.org/10.1080/00221686.2010.507010>.
 8. Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р. Модель затопленной струи с учетом двух предельных схем гидратообразования // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25. № 1. С. 79–88.
 9. Жуков А.В., Звонарев М.И., Жукова Ю.А. Способ добычи газа из глубоководных месторождений газогидратов // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. № 10. Ч. 1. С. 16–20. URL: <https://applied-research.ru/ru/article/view?id=4042> (дата обращения: 04.05.2020).
 10. Насыров А.А. Моделирование процесса наполнения «купола-сепаратора», предназначенного для ликвидации нефтегазовых выбросов в зоне морского дна // Вестник Кемеровского государственного университета. 2015. Т. 1. № 2(62). С. 41–45. <https://doi.org/10.21603/2078-8975-2015-2-141>.
 11. Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р. К теории начального этапа накопления нефти в куполе-сепараторе // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 3. С. 401–406. DOI: 10.1134/S0869864315030130.
 12. Chiglintsev I.A., Nasyrov A.A. Modeling of the process of filling a dome separator with the decomposition of a gas hydrate formed during the mounting of the installation // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2016. V. 89. Iss. 4. P. 854–863. DOI: 10.1007/s10891-016-1446-0
 13. Насыров А.А., Чиглинцев И.А., Лепихин С.А. К вопросу разложения газогидрата в куполе-сепараторе, предназначенном для отбора выбросов углеводородов в шельфовой зоне // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. 2019. Т. 9. № 1. С. 35–41.
 14. Уразов Р.Р., Чиглинцев И.А., Насыров А.А. Влияние толщины стенки отводящей трубы на гидратообразование при отборе газа из «купола – сепаратора» // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22. № 2. С. 330–335.
 15. Шайдаков В.В., Сухоносоев А.Л., Людвиницкая А.Р., Джафаров Р.Д., Драган Ф.В. Математическая модель процесса гидратообразования в трубопроводе малого диаметра в квазистатическом приближении // Экспозиция. Нефть. Газ. Научно-технический журнал. Набережные Челны. 2015. № 4. С. 34–37. URL: <https://rucont.ru/efd/532702>.
 16. Билюшов В.М. Математическая модель образования гидратов при течении влажного газа в трубах // Инженерно-физический журнал. 1984. Т. 46. № 1. С. 57–64.
 17. Бондарев Э.А., Габыева Л.Н., Каниболотский М.А. Моделирование образования гидратов при движении газа в трубах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 5. С. 105–112.
 18. Истомин В.А. Фазовые равновесия и физико-химические свойства газовых гидратов. М.: Изд-во ГТК «Газпром», 1992. 41 с.
 19. Вараксин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 3. С. 421–455.
 20. Нисматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
 21. Бекиров Т.М., Шаталов А.Т. Сбор и подготовка к транспорту природных газов. М.: Недра, 1986. 261 с.
 22. Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И., Нурисламов О.Р. К теории образования и разложения газогидратных частиц в процессе их всплытия в воде // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6(26). С. 106–113.
 23. Гужов А.И., Титов В.Г., Медведев В.Ф., Васильев В.А. Сбор, транспорт и хранение природных углеводородных газов. М.: Недра. 1978. 401 с.
 24. Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Сыртланов В.Р. О возможности вымывания газа из газогидратного массива посредством циркуляции теплой воды // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50. № 4. С. 100–111. DOI: 10.1007/s10808-009-0084-0.

25. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат. 1979. 416 с.
26. Кутателадзе С.С., Боришанский В.М. Справочник по теплопередаче. М.: Госэнергоиздат. 1958. 417 с.
27. Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г., Уразов Р.Р. Математическая модель течения природного газа в трубопроводах с учетом диссоциации газогидратов // Инженерно-физический журнал. 2008. Т. 81. № 2. С.271–279. DOI: 10.1007/s10891-008-0036-1.
28. Шагапов В.Ш., Уразов Р.Р. Характеристики газопровода при наличии гидратоотложений // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42. № 3. С. 461–468.
29. Гиматуллин Ш.К. Физика нефтяного и газового пласта. М.: Недра, 1971. 312 с.
30. Бык С.Ш., Макогон Ю.Ф., Фомина В.И. Газовые гидраты. М.: Химия. 1980. 296 с.

Статья поступила 27.05.2020 г.

Chiglintseva A.S., Nasyrov A.A., Chiglintsev I.A., Lepikhin S.A., Koledin V.V. (2020) STUDY OF THE HYDRATE FORMATION IN A PIPELINE WITH INSULATION COATING DURING GAS TRANSFER FROM THE “DOME-SEPARATOR”. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 144–158

DOI 10.17223/19988621/67/13

Keywords: hydrocarbon leak, “dome-separator”, gas flow, gas hydrate formation, heat transfer.

The paper proposes a mathematical model describing the process of the hydrate formation in a vertical pipeline through which the gas is transported from the dome-separator designed to eliminate a technogenic spill of oil from the well at the seabed. If the dome is located in the zone of stable hydrate existence, then hydrate deposits can form within and in the pipeline, which can lead to the pipeline clogging.

The influence of the presence of a pipeline insulation coating, which consists of the layers of polyurethane and polyurethane foam, and its thickness on the hydrate formation process in a steel pipeline is studied on the basis of numerical modeling. It is shown that if the gas is derived from the dome located at a depth of 1500 m, the zone of hydrate deposits is formed at the inlet of the pipeline without insulation (in the dome-separator vicinity). When the thermal insulation of the pipeline is used, it leads to an upward shift of the hydrate formation conditions. As a result, depending on the thickness of the insulation coating, the zone of hydrate deposits is formed near the outlet of the pipeline (in the ocean surface vicinity) or no hydrates are formed in the pipe.

It is also shown that the motion of the seawater around the pipeline has almost no effect on the process of hydrate formation within the pipe.

Financial support. The research was funded by a grant of the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists – doctors of sciences (Competition – MD-2020), according to the research project No. MD-2179.2020.1

Angelina S. CHIGLINTSEVA (Doctor of Physics and Mathematics, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation). E-mail: changelina@rambler.ru

Azat A. NASYROV (Candidate of Physics and Mathematics, Bashkir State University, Birk branch, Birk, Russian Federation). E-mail: nasaza@mail.ru

Igor' A. CHIGLINTSEV (Candidate of Physics and Mathematics, Bashkir State University, Birk branch, Birk, Russian Federation). E-mail: schnik@mail.ru

Sergey A. LEPIKHIN (Candidate of Physics and Mathematics, Industrial University of Tyumen, Surgut branch, Surgut, Russian Federation). E-mail: sg81@bk.ru

Viktor V. KOLEDIN (Candidate of Physics and Mathematics, South Ural State University, Nizhnevartovsk branch, Nizhnevartovsk, Russian Federation). E-mail: vikoled@mail.ru

REFERENCES

1. Griguletskiy V.G. (2011) Kratkiy tekhnologicheskiy analiz avarii na skvazhine MS-2S2 v Meksikanskom zalive [A brief technological analysis of the accident at well MS-2S2 in the Gulf of Mexico]. *Stroitel'stvo neftyanykh i gazovykh skvazhin na sushe i na more*. 6. pp. 2–11.
2. Bogoyavlenskiy V.I., Barinov P.S., Bogoyavlenskiy I.V. (2018) Katastrofa v Meksikanskom zalive na mestorozhdenii Ixtoc kompleksa Cantarell [Catastrophe in the gulf of Mexico at the Ixtoc field of the Cantarell complex]. *Burenie i nef't – Drilling and Oil*. 1. pp. 3–13.
3. Murawski S., Ainsworth C., Gilbert S., Hollander D., Paris C., Schlueter M., Wetzel D. (2020) *Scenarios and Responses to Future Deep Oil Spills Fighting the Next War: Fighting the Next War*. Switzerland: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-030-12963-7.
4. Ivanov A.Yu., Terleeva N.V. (2011) Neftyanoy razliv v Meksikanskom zalive – vklad distantsionnogo zondirovaniya v monitoring chrezvychaynoy situatsii [Gulf of Mexico oil spill – contribution of remote sensing to emergency monitoring]. *Zemlya iz kosmosa: naibolee effektivnye resheniya – Earth from Space: The Most Effective Solutions*. 8. pp. 72–79.
5. Zheng L., Yapa P.D., Chen F. (2002) A model for simulating deepwater oil and gas blowouts – Part I: Theory and model formulation. *Journal of Hydraulic Research*. 41(4). pp. 339–351. DOI: 10.1080/00221680309499980.
6. Chen F.H., Yapa P.D. (2003) A model for simulating deep water oil and gas blowouts – Part II: Comparison of numerical simulations with “Deepspill” field experiments. *Journal of Hydraulic Research*. 41(4). pp. 353–365. DOI: 10.1080/00221680309499981.
7. Yapa P.D., Dasanavaka L.K., Bandara U.C., Nakata K. (2010) A model to simulate the transport and fate of gas and hydrates released in deepwater. *Journal of Hydraulic Research*. 48(5). pp. 559–572. DOI: 10.1080/00221686.2010.507010.
8. Gimaltdinov I.K., Kildibaeva S.R. (2018) Model' zatoplennoy strui s uchetom dvukh predel'nykh skhem gidratoobrazovaniya [Model of a submerged jet accounting for two limiting schemes of hydrate formation]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 25(1). pp. 75–83. DOI: 10.1134/S0869864318010079.
9. Zhukov A.V., Zvonarev M.I., Zhukova Yu.A. (2013) Sposob dobychi gaza iz glubokovodnykh mestorozhdeniy gazogidratov [A method of gas extraction from deep water deposits of gas hydrates]. *Mezhdunarodniy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy – International Journal of Applied and Fundamental Research*. 10. pp. 16–20.
10. Nasyrov A.A. (2015) Modelirovanie protsessa napolneniya «kupola-separatora», prednaznachennogo dlya likvidatsii neftegazovykh vybrosov v zone morskogo dna [Modelling of filling the “dome-separator” intended for elimination of oil and gas emissions in the seabed zone]. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Kemerovo State University*. 1(2). pp. 41–45. DOI: 10.21603/2078-8975-2015-2-141.
11. Gimaltdinov I.K., Kildibaeva S.R. (2015) About the theory of initial stage of oil accumulation in a dome-separator. *Thermophysics and Aeromechanics*. 22(3). pp. 387–392. DOI: 10.1134/S0869864315030130.
12. Chiglintsev I.A., Nasyrov A.A. (2016) Modeling of the process of filling a dome separator with the decomposition of a gas hydrate formed during the mounting of the installation. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(4). pp. 854–863. DOI: 10.1007/s10891-016-1446-0.
13. Nasyrov A.A., Chiglintsev I.A., Lepikhin S.A. (2019) K voprosu razlozheniya gazogidrata v kupole-separatora, prednaznachennogo dlya otbora uglevodorodov v shel'fovoy zone [To the issue of gas hydrate decomposition in dome-separator intended for elimination of petroleum hydrocarbons emissions on the shelf]. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo gosudarstvennogo universiteta – Proceedings of the Kabardino-Balkarian State University*. 9(1). pp. 35–41.
14. Urazov R.R., Chiglintsev I.A., Nasyrov A.A. (2017) Vliyanie tolshchiny stenki otvodyashchey trubki na gidratoobrazovanie pri otbore gaza iz «kupola – separatora» [The influence of the thickness of the wall of the outlet pipe on the hydrate formation at extraction

- of gas from the “dome-separator”]. *Vestnik Bashkirskogo universiteta – Bulletin of Bashkir University*. 22(2). pp. 330–335.
15. Shaydakov V.V., Sukhonosov A.L., Lyudvinitskaya A.R., Dzhafarov R.D., Dragan F.V. (2015) Matematicheskaya model' protsessa gidratoobrazovaniya v truboprovode malogo diametra v kvazistaticheskom priblizhenii [A mathematical model of the hydrate formation process in a small-diameter pipeline in a quasistatic approximation]. *Ekspozitsiya. Neft'. Gaz – Exposition. Oil & Gas*. 4. pp. 34–37.
 16. Bilyushov V.M. (1984) Matematicheskaya model' obrazovaniya gidratov pri techenii vlazhnogo gaza v trubakh [Mathematical model of hydrate formation in the flow of moist gas in tubes]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal – Engineering Physics Journal*. 46(1). pp. 46–52.
 17. Bondarev E.A., Gabysheva L.N., Kanibolotsky M.A. (1982) Simulation of the formation of hydrates during gas flow in tubes. *Fluid Dynamics*. 19(5). pp. 105–112.
 18. Istomin V.A. (1992) *Fazovyye ravnovesiya i fiziko-khimicheskie svoystva gazovykh gidratov* [Phase equilibria and physicochemical properties of gas hydrates]. Moscow: Izdatel'stvo GSK "Gazprom".
 19. Varaksin A.Yu. (2013) Gidrogazodinamika i teplofizika dvukhfaznykh potokov: problemy i dostizheniya (obzor) [Fluid dynamics and thermal physics of two-phase flows: problems and achievements (review)]. *Teplofizika vysokikh temperatur – High Temperature*. 51(3). pp. 377–407. DOI: 10.1134/S0018151X13030073.
 20. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Part 1. Moscow: Nauka.
 21. Bekirov T.M., Shatalov A.T. (1986) *Sbor i podgotovka k transportu prirodnnykh gazov* [Natural gas collection and preparation for transportation]. Moscow: Nedra.
 22. Shagapov V.Sh., Tazetdinov B.I., Nurislamov O.R. (2013) K teorii obrazovaniya i razlozheniya gazogidratnykh chastits v protsesse ikh vsplytiya v vode [A contribution to the theory of gas hydrate particle formation and decomposition in the process of their ascent in water]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(26). pp. 106–113.
 23. Guzhov A.I., Titov V.G., Medvedev V.F., Vasil'ev V.A. (1978) *Sbor, transport i khraneniye prirodnnykh uglevodorodnykh gazov* [Collection, transportation, and storage of natural hydrocarbon gases]. Moscow: Nedra.
 24. Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Syrtlanov V.R. (2009) Possibility of gas washout from a gas-hydrate massif by circulation of warm water. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 50(4). pp. 628–637. DOI: 10.1007/s10808-009-0084-0.
 25. Kutateladze S.S. (1979) *Osnovy teorii teploobmena* [Foundations of the heat transfer theory]. Moscow: Atomizdat.
 26. Kutateladze S.S., Borishanskiy V.M. (1958) *Spravochnik po teploperedache* [Heat transfer handbook]. Moscow: Gosenergoizdat.
 27. Shagapov V.Sh., Musakaev N.G., Urazov R.R. (2008) Mathematical model of natural gas flow in pipelines with allowance for the dissociation of gas hydrates. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 81(2). pp. 287–296. DOI: 10.1007/s10891-008-0036-1.
 28. Shagapov V.Sh., Urazov R.R. (2004) The characteristics of a gas pipeline in the presence of hydrate deposits. *High Temperature*. 42(3). pp. 463–470. DOI: 10.1023/B:HITE.0000033884.53813.1d.
 29. Gimatudinov Sh.K. (1971) *Fizika neftyanogo i gazovogo plasta* [Physics of the oil and gas reservoir]. Moscow: Nedra.
 30. Byk S.Sh., Makogon Yu.F., Fomina V.I. (1980) *Gazovye gidrati* [Gas hydrates]. Moscow: Khimiya.

Received: May 27, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕЛОВ Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: n.n.belov@mail.ru

БОРЗЕНКО Евгений Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

БУРКИН Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: rozaburkina@yandex.ru

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ВОРОЖЦОВ Александр Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: abv1953@mail.ru

ГАРБУЗОВ Дмитрий Николаевич – студент кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: garbuzov98@ftf.tsu.ru

ДЬЯЧКОВСКИЙ Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lex_okha@mail.ru

ЖАМБАА Сонинбаяр Иванович – директор Центра фундаментальных исследований Монгольского университета науки и технологий Монгольского национального университета, доцент кафедры прикладной математики школы инженерии и прикладных наук Национального университета Монголии, г. Улан-Батор, Монголия. E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

ЖУКОВ Илья Александрович – кандидат технических наук старший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gofra930@gmail.com

ЗАДОРЖНАЯ Ольга Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры и анализа Калмыцкого государственного университета им. Б.Б. Городовикова, г. Элиста. E-mail: ovz_70@mail.ru

ЗАРИФЗОДА Сарвар Кахрамон – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой вычислительной математики и механики Таджикского национального университета, г. Душанбе, Республика Таджикистан. E-mail: sarvar8383@list.ru

ЗИМИНА Валентина Алексеевна – младший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН, аспирантка Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: mikushina_93@mail.ru

ИВАНЕЦ Олеся Владимировна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ivanetsolessya@gmail.com

ИЩЕНКО Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, заместитель директора по НИР Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

КАСИМОВ Владимир Зинатович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией 72 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ksm@niipmm.ru

КОЗУЛИН Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kozulyln@ftf.tsu.ru

КОЛЕДИН Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры гуманитарных, естественнонаучных и технических дисциплин филиала Южно-Уральского государственного университета в г. Нижневартовске, г. Нижневартовск, Россия. E-mail: vikoled@mail.ru

КОСТЮШИН Кирилл Владимирович – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

КОЧЕТКОВ Владимир Константинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и анализа Калмыцкого государственного университета им. Б.Б. Городовикова, г. Элиста, Россия. E-mail: kvk1106@mail.ru

ЛЕПИХИН Сергей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин филиала Тюменского промышленного университета в г. Сургуте, г. Сургут, Россия. E-mail: sg81@bk.ru

ЛУН-ФУ Александр Викторович – главный инженер, первый заместитель генерального директора ООО «Газпром трансгаз Томск», аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: a.lunfu@gtt.gazprom.ru

МИШИН Иван Петрович – кандидат физико-математических наук, инженер Томского материаловедческого центра коллективного пользования, научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск, Россия. E-mail: mip@ispms.tsc.ru

НАСЫРОВ Азат Аскатович – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры технологического образования Бирского филиала Башкирского государственного университета, г. Бирск, Россия. E-mail: nasaza@mail.ru

НОРБОСАМБУЕВ Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: nstdsdtts@yandex.ru

ОДИНАЕВ Раим Назарович – доктор физико-математических наук, доцент, декан механико-математического факультета Таджикского национального университета, г. Душанбе, Республика Таджикистан. E-mail: raim_odinaev@mail.ru

ПЛАТОВ Владимир Владимирович – младший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: vova.platov.85@mail.ru

РОГАЕВ Константин Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

САММЕЛЬ Антон Юрьевич – младший научный сотрудник научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: anton_sammel@mail.ru

САМОРОКОВА Нина Михайловна – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ksm@niipmm.ru

СТЕПАНОВ Евгений Юрьевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: stepanov_eu@mail.ru

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического цен-

тра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

ХРУСТАЛЁВ Антон Павлович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tofik0014@mail.ru

ЧЕЛНОКОВА Анна Сергеевна – аспирантка кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

ЧИГЛИНЦЕВ Игорь Александрович – кандидат физико-математических наук доцент кафедры технологического образования Бирского филиала Башкирского государственного университета, г. Бирск, Россия. E-mail: schnik@mail.ru

ЧИГЛИНЦЕВА Ангелина Сергеевна – доктор физико-математических наук, доцент кафедры физики Уфимского государственного нефтяного технического университета, г. Уфа, Россия. E-mail: changelina@rambler.ru

ЮГОВ Николай Тихонович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: n.t.yugov@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 15.10.2020. Выпуск в свет 23.10.2020.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 13.06. Уч.-изд. л. 14.63. Тираж 250 экз. Заказ № 20. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4470.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru