ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2020 Математика и механика № 67

УДК: 517.54 MSC 35C15
DOI 10.17223/19988621/67/3

О.В. Задорожная, В.К. Кочетков

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА

Рассматривается вопрос о построении интегрального представления решений обыкновенного специального дифференциального уравнения и дифференциального уравнения в частных производных, являющегося вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева в частном случае. Вводится новый метод исследования, в основе которого – установление уравнения связи между составляющими компонентами дифференциальных уравнений и введенными аналитическими функциями. Дается интегральное представление решений рассматриваемых дифференциальных уравнений, являющееся альтернативой построения решений в виде различных рядов.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения*, *интегральные представления решений*, *однолистные функции*, *конформные отображения.*

Рассмотрен метод интегрального представления решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, в котором правая часть является многочленом специального вида, и решений дифференциальных уравнений в частных производных, в которых правая часть является многочленом второго порядка.

Статья состоит из двух разделов. В первом излагается суть метода исследования, основанного на введении произвольных аналитических функций и указании связи между введенными функциями и составляющими компонентами (коэффициентами) дифференциального уравнения. Реализация уравнения связи состоит в указании выражения введенных функций в терминах коэффициентов исходного дифференциального уравнения. Приводятся разные варианты реализации уравнения связи, которые могут быть использованы в различных приложениях.

Полученные результаты используются во втором разделе, посвященном рассмотрению дифференциального уравнения Левнера – Куфарева с квадратичной правой частью, в настоящее время мало исследованного [1–8]. Заметим, что класс функций Базилевича и различные его модификации могут быть получены из второго уравнения Левнера – Куфарева с линейной правой частью, в то время, как в данной статье рассматривается уравнение с квадратичной частью, что является существенным обобщением. Метод интегрального представления решений дифференциальных уравнений, изложенный в статье, является альтернативой построения решений в виде различных рядов.

1. Исследование обыкновенного дифференциального уравнения вида $w' + a_0 w^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$

1.1. Общее уравнение связи. Общая теорема

Пусть $a_0 = a_0(z), a_1 = a_1(z)$ – аналитические в области $D \subset \mathbb{C}$ функции. Запишем дифференциальное уравнение

$$w' + a_0 + a_1 w^n = 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

в виде

$$kw' + a_0 - \theta + (1-k)w' + a_1 w^n + \theta = 0, \tag{1.2}$$

где $k = k(z)$, $\theta = \theta(z)$ – некоторые аналитические в области $D \subset \mathbb{C}$ функции. Для простоты изложения в дальнейшем будем опускать аргумент z.

Заметим, что в результате приведения подобных слагаемых в уравнении (1.2) получим выражение (1.1).

Введем обозначения

$$b_1 = \int \frac{\theta}{k} dz,\ b_2 = \int \frac{a_0}{k} dz. \tag{1.3}$$

Приравняем нулю первые три слагаемых в (1.2):

$$kw' + a_0 - \theta = 0, \tag{1.4}$$

а также последние три:

$$(1-k)w' + a_1 w^n + \theta = 0. \tag{1.5}$$

Из (1.4) следует

$$w_1' = w' = \frac{\theta}{k} - \frac{a_0}{k}, \tag{1.6}$$

а также, с учетом (1.3),

$$w = w_1 = b_1 - b_2 + c_1,\ c_1 = \text{const}. \tag{1.7}$$

Из (1.5) получаем

$$w' = w_2' = -\frac{\theta + a_1 w_2^n}{1-k}. \tag{1.8}$$

Считая, что $w_1' = w_2'$, приравняем правые части в (1.6) и в (1.8):

$$\frac{\theta}{k} - \frac{a_0}{k} = -\frac{\theta + a_1 w_2^n}{1-k}.$$

Преобразуем последнее выражение

$$(\theta - a_0)(1-k) = -k\theta - k a_1 w_2^n.$$

Откуда следует

$$\theta - a_0 + a_0 k = -k a_1 w_2^n$$

или

$$w_2^n = \frac{a_0(1-k) - \theta}{k a_1} = \frac{1}{a_1}\left(-\frac{\theta}{k} + \frac{a_0}{k} - a_0\right),$$

а также, с учетом (1.3),

$$w_2^n = \frac{1}{a_1}\left(-b_1' + b_2' - a_0\right)$$

и
$$w_2 = \left(\frac{1}{a_1}\left(-b_1' + b_2' - a_0\right)\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{1.9}$$

Считая, что w_1 в (1.7) равно w_2 в (1.9), имеем

$$b_1 - b_2 + c_1 = \left(\frac{1}{a_1}\left(-b_1' + b_2' - a_0\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

или
$$-b_1' + b_2' - a_0 = a_1\left(b_1 - b_2 + c_1\right)^n. \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) назовем уравнением связи между коэффициентами a_0, a_1 дифференциального уравнения (1.1) и введенными функциями θ и *k*.

Объединяя вышеизложенное, сформируем утверждение.

Утверждение 1 (общее).

Пусть функции $a_0(z)$, $a_1(z)$, $\theta(z)$, $k(z)$:

1) являются аналитическими в области $D \subset \mathbb{C}$ функциями;

2) удовлетворяют уравнению связи (1.10) в $D \subset \mathbb{C}$

$$-b_1' + b_2' - a_0 = a_1\left(b_1 - b_2 + c_1\right)^n.$$

Тогда функция $w(z)$ в (1.7)

$$w(z) = \int \frac{\theta}{k} dz - \int \frac{a_0}{k} dz + c_1,\ c_1 = \text{const},$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1):

$$w' + a_0 + a_1 w^n = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

1.2. Реализация уравнения связи (1.10) при $n = 2$, $c_1 = 0$ путем ввода выражения $a_0 - a_0$

Уравнение связи (1.10) при $n = 2$, $c_1 = 0$ перепишем в виде

$$-b_1' + b_2' - a_0 = a_1\left(b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2^2\right) + a_0 - a_0. \tag{1.11}$$

Применительно к уравнению (1.11) введем систему соотношений

$$a_0 = 2a_1 \cdot b_1 \cdot b_2; \tag{1.12}$$

$$-b_1' = a_0 + a_1 b_1^2; \tag{1.13}$$

$$b_2' = -a_0 + a_1 b_2^2. \tag{1.14}$$

Из (1.12) следует

$$b_2 = \frac{a_0}{2a_1 b_1}. \tag{1.15}$$

Подставим (1.15) в (1.14):

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)'\frac{1}{2b_1}-\frac{a_0}{2a_1}\cdot\frac{b_1'}{b_1^2}=-a_0+a_1\left(\frac{a_0}{2a_1}\right)^2\cdot\frac{1}{b_1^2}. \qquad (1.16)$$

Заменяя в (1.16) выражение $-b_1'$ выражением в правой части (1.13), перепишем выражение в (1.16) в виде

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)'\cdot\frac{1}{2b_1}+\frac{a_0\left(a_0+a_1b_1^2\right)}{2a_1b_1^2}=-a_0+a_1\left(\frac{a_0}{2a_1}\right)^2\cdot\frac{1}{b_1^2}.$$

Приведем подобные и умножим на $2b_1^2$ обе части последнего выражения:

$$3a_0b_1^2+\left(\frac{a_0}{a_1}\right)'b_1+\frac{a_0^2}{2a_1}=0.$$

Обозначив

$$A=\left(\frac{a_0}{a_1}\right)'^2-\frac{6a_0^3}{a_1}, \qquad (1.17)$$

укажем корни последнего квадратного уравнения

$$b_1^+=\frac{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)'+\sqrt{A}}{6a_0}; \qquad (1.18)$$

$$b_1^-=\frac{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)'-\sqrt{A}}{6a_0}. \qquad (1.19)$$

Из (1.18), (1.19) и (1.15) имеем

$$b_2^+=\frac{a_0}{2a_1b_1^+}; \qquad (1.20)$$

$$b_2^-=\frac{a_0}{2a_1b_1^-}. \qquad (1.21)$$

Утверждение 2. Пусть функции b_1^+, b_2^+ определяются по формулам (1.18), (1.20), а функции b_1^-, b_2^- – по формулам (1.19), (1.21) при условии (1.16), (1.11).

Тогда функции

$$w^+=b_1^+-b_2^+$$

и

$$w^-=b_1^--b_2^-$$

удовлетворяют уравнению (1.1).

1.3. Реализация уравнения связи (1.10) при $n=2$, $c_1=0$ путем ввода выражения $g(z)-g(z)$

Введением выражения $g(z)-g(z)$ уравнение связи (1.10) перепишется в виде

$$-b_1'+b_2'-a_0=a_1(b_1^2-2b_1b_2+b_2^2)+g(z)-g(z)=0\,. \tag{1.22}$$

Применительно к уравнению (1.22) введём систему соотношений

$$a_0=2a_1b_1b_2\,; \tag{1.23}$$

$$-b_1'=g+a_1b_1^2\,; \tag{1.24}$$

$$b_2'=-g+a_1b_2^2\,. \tag{1.25}$$

Из (1.23) следует

$$b_2=\frac{a_0}{2a_1b_1}\,. \tag{1.26}$$

Подставим (1.26) в (1.25):

$$\left(\frac{a_0}{2a_1}\right)'\frac{1}{b_1}-\frac{a_0}{2a_1}\frac{b_1'}{b_1^2}=-g+a_1\left(\frac{a_0}{2a_1}\right)^2\frac{1}{b_1^2}\,. \tag{1.27}$$

Заменяя в (1.27) выражение $-b_1'$ выражением в правой части (1.24), перепишем выражение в (1.27) в виде

$$\left(\frac{a_0}{2a_1}\right)'\frac{1}{b_1}+\frac{a_0(g+a_1b_1^2)}{2a_1b_1^2}=-g+\frac{a_0{}^2}{4a_1}\frac{1}{b_1{}^2}=0\,.$$

Умножим обе части последнего выражения на $2b_1^2$ и приведем подобные:

$$(a_0+2g)b^2{}_1+\left(\frac{a_0}{a_1}\right)'b_1-\frac{a_0}{2a_1}(a_0-2g)=0\,.$$

Обозначив

$$\frac{a_0}{a_1}=p(z)\,,\ B=p'^2+2p(a_0{}^2-4g^2)\,, \tag{1.28}$$

укажем корни последнего квадратного уравнения

$$b_1^+=\frac{-p'+\sqrt{B}}{2(a_0+2g)}\,; \tag{1.29}$$

$$b_1^-=\frac{-p'-\sqrt{B}}{2(a_0+2g)}\,. \tag{1.30}$$

Из (1.29), (1.30) и (1.26) имеем

$$b_2^+=\frac{p}{2b_1^+}\,; \tag{1.31}$$

$$b_2^-=\frac{p}{2b_1^+}\,. \tag{1.32}$$

Утверждение 3 (основное). Пусть $g(z)$ – произвольная аналитическая в $D \subset \mathbb{C}$ функция. Тогда при обозначениях (1.28 – 1.32) функции

$$w^+ = b_1^+ - b_2^+ \tag{1.33}$$

и

$$w^- = b_1^- - b_2^- \tag{1.34}$$

удовлетворяют уравнению (1.1) при $n = 2$, $c_1 = 0$.

1.4. Реализация условий связи (уравнения связи) при $n = 2$, $c_1 \neq 0$

Напомним, что реализация уравнения связи состоит в выражении дополнительных функций θ, k через коэффициенты a_0, a_1 или в указании связи (зависимости) коэффициентов a_0, a_1 между собой.

При $n = 2$, $c_1 \neq 0$ выражение в (1.10) перепишется в виде (с добавлением выражения $a_0 - a_0$)

$$-b_1' + b_2' - a_0 = a_1(b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 - 2b_1 \cdot b_2 + 2b_1 \cdot c_1 - 2b_2c_1) + a_0 - a_0 = 0. \tag{1.35}$$

В случае (1.35) положим

$$-a_0 - c_1^2 a_1 = -a_1 \cdot 2b_1 \cdot b_2; \tag{1.36}$$

$$-b_1' = a_1 b_1^2 + 2a_1 b_1 c_1 + a_0; \tag{1.37}$$

$$b_2' = a_1 b_2^2 - 2a_1 b_2 c_1 - a_0. \tag{1.38}$$

Из (1.36) следует

$$b_2 = \frac{a_0 + c_1^2 a_1}{2a_1 b_1} = \frac{\alpha}{b_1}, \text{ где } \alpha = \frac{a_0 + c_1^2 a_1}{2a_1}. \tag{1.39}$$

Пусть функции b_1, b_2 в (1.3) удовлетворяют уравнениям (1.37) и (1.38) соответственно.

Подставим (1.39) в (1.38)

$$\frac{\alpha'}{b_1} - \alpha \frac{b_1'}{b_1^2} = a_1 \frac{\alpha^2}{b_1^2} - 2a_1 \frac{\alpha}{b_1} \cdot c_1 - a_0.$$

В последнем уравнении производную $-b_1'$ заменим выражением в правой части (1.37):

$$\frac{\alpha'}{b_1} + \frac{\alpha}{b_1^2}(a_1 \cdot b_1^2 + 2a_1 b_1 c_1 + a_0) = a_1 \frac{\alpha^2}{b_1^2} - 2a_1 \frac{\alpha}{b_1} \cdot c_1 - a_0.$$

Обе части последнего выражения умножим на b_1^2 и приведем подобные

$$b_1^2(a_1\alpha + a_0) + b_1(\alpha' + 4a_1\alpha c_1) - a_1\alpha^2 + \alpha a_0 = 0. \tag{1.40}$$

Коэффициент при b_1^2 обозначим через $\frac{\beta_2}{2}$ и преобразуем его:

$$\frac{\beta_2}{2} = \frac{3a_0 + a_1 c_1^2}{2}, \beta_2 = 3a_0 + a_1 c_1^2 . \tag{1.41}$$

Коэффициент при b_1 обозначим через $\frac{\beta_1}{2}$ и преобразуем его:

$$\frac{\beta_1}{2} = \alpha' + 4a_1 \alpha c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0 + a_1 c_1^2}{a_1}\right)' + \frac{4c_1(a_0 + a_1 c_1^2)}{2},$$

$$\beta_1 = \left(\frac{a_0 + a_1 c_1^2}{a_1}\right)' + 4c_1(a_0 + a_1 c_1^2) . \tag{1.42}$$

Коэффициент при b_1^0 обозначим через $\frac{\beta_0}{2}$ и преобразуем его:

$$\frac{\beta_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{\left(a_0 + a_1 c_1^2\right)\left(a_0 - a_1 c_1^2\right)}{2a_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a_0^2 - a_1^2 c_1^4}{2a_1} .$$

Откуда имеем

$$\beta_0 = \frac{a_0^2 - a_1^2 c_1^4}{2a_2} . \tag{1.43}$$

Умножая на 2 обе части выражения в (1.40), с учетом (1.41), (1.42) и (1.43), перепишем выражение в (1.40) в виде

$$\beta_2 \cdot b_1^2 + \beta_1 b_1 + \beta_0 = 0 .$$

Обозначив

$$B = \beta_1^2 - 4\beta_2 \cdot \beta_0 , \tag{1.44}$$

укажем корни последнего квадратного уравнения

$$b_1^+ = \frac{-\beta_1 + \sqrt{B}}{2\beta_2}, \; b_1^- = \frac{-\beta_1 - \sqrt{B}}{2\beta_2} . \tag{1.45}$$

С учетом (1.35) и (1.45) укажем b_2^+ и b_2^-:

$$b_2^+ = \frac{\alpha}{b_1^+}, \; b_2^- = \frac{\alpha}{b_1^-} .$$

Утверждение 4. При обозначениях (1.35) – (1.46), функции

$$w^+ = b_1^+ - b_2^+$$

и

$$w^- = b_1^- - b_2^-$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.1) при $n = 2$, $c_1 \neq 0$.

2. Второе дифференциальное уравнение в частных производных Левнера – Куфарева с квадратичной правой частью

Обозначим:

C – класс регулярных и однолистных в $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $p(z)$, отображающих E на область, расположенную в правой полуплоскости;

$C(T)$ – множество функций $p(z,t)$, принадлежащих классу C при каждом фиксированном $t \in T = [0;+\infty) = \{t : t \geq 0\}$.

В геометрической теории функций комплексного переменного хорошо известны первое и второе дифференциальные уравнения Левнера – Куфарева, последнее из которых имеет вид

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = p(z,t), \quad p(z,t) \in C(T).$$

В данном параграфе рассматривается второе дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева в случае

$$p(z,t) = p_2(z)t^2 + p_1(z)t + p_0(z),$$

где $p_i(z) \in C, i = \overline{0,2}, t \geq 0$.

Решение $F(z,t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = p_2(z)t^2 + p_1(z)t + p_0(z) \tag{2.1}$$

будем искать в виде

$$F(z,t) = \frac{a(z)t + b(z)}{c(z)t + 1}. \tag{2.2}$$

Дифференцируя функцию $F(z,t)$ в (2.2) по z, получим

$$F'_z = \frac{b_2(z)t^2 + b_1(z)t + b_0}{(ct+1)^2},$$

где

$$b_2 = a'c - ac'; \tag{2.3}$$

$$b_1 = a' + b'c - bc'; \tag{2.4}$$

$$b_0 = b'. \tag{2.5}$$

Частная производная F'_t, с учетом (2.2), равна

$$F'_t = \frac{a - bc}{(ct+1)^2}.$$

Рассмотрим отношение вышеизложенных частных производных:

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = \frac{zb_2}{m}t^2 + \frac{zb_1}{m}t + \frac{zb_0}{m}, \tag{2.6}$$

где

$$m = a - bc. \tag{2.7}$$

Обозначив через $p_2(z), p_1(z), p_0(z)$ коэффициенты при t^2, t^1, t^0 в (2.6), с последующим преобразованием, получим систему уравнений

$$z(a'c - ac') = p_2 m\,; \tag{2.8}$$

$$z(a' + b'c - bc') = p_1 m\,; \tag{2.9}$$

$$zb' = p_0 m\,. \tag{2.10}$$

С помощью операции интегрирования разрешим уравнение (2.8) относительно a:

$$a = cu_2\,, \tag{2.11}$$

где

$$u_2 = \int \frac{p_2 m}{zc^2}\,dz + c_2\,,\ c_2 = \text{const}\,, \tag{2.12}$$

а уравнение (2.10) разрешим относительно b:

$$b = u_0\,, \tag{2.13}$$

где

$$u_0 = \int \frac{p_0 m}{z}\,dz + c_0\,,\ c_0 = \text{const}\,. \tag{2.14}$$

Подставляя (2.11) – (2.14) в (2.9), перепишем его в виде

$$z\left(c'(u_2 - u_0) + c\left(\frac{p_2 m}{zc^2} + \frac{p_0 m}{z}\right)\right) = p_1 m\,. \tag{2.15}$$

С учетом (2.11) – (2.14) выражение (2.7) перепишется в виде

$$m = c(u_2 - u_0)\,.$$

Откуда следует

$$u_2 - u_0 = \frac{m}{c}\,. \tag{2.16}$$

Используя (2.11) – (2.14), продифференцируем обе части в (2.16)

$$\left(\frac{m}{c}\right)' = \frac{m}{c}\gamma\,,$$

где

$$\gamma = \frac{p_2}{zc} - \frac{cp_0}{z}\,.$$

Интегрируем последнее дифференциальное уравнение

$$m = c_3 \cdot c \cdot e^{\int \gamma(z)dz}\,,\ c_3 = \text{const}\,. \tag{2.17}$$

Подставив (2.16) в (2.15), преобразуем его в виде уравнения Риккати

$$c' + \frac{p_2}{z} - \frac{p_1}{z}c + \frac{p_0}{z}c^2 = 0\,. \tag{2.18}$$

Полагая

$$c = e(z)w\,, \tag{2.19}$$

найдем

$$c' = e'(z)w + e(z)w'\,.$$

С учетом (2.19) имеем

$$e'(z)w + e(z)w' + \frac{p_2}{z} - \frac{p_1}{z}e(z)w + \frac{p_0}{z}e^2(z)w^2 = 0$$

и

$$w' + \frac{p_2}{ze(z)} + w\left(\frac{e'(z)}{e(z)} - \frac{p_1}{z}\right) + \frac{p_0}{z}e(z)w^2 = 0\,. \qquad (2.20)$$

С целью простоты исследования и приведения дифференциального уравнения (2.20) к виду дифференциального уравнения, рассмотренного в пункте 1.3 первого раздела, приравняем к нулю выражение при w

$$\frac{e'(z)}{e(z)} - \frac{p_1}{z} = 0\,.$$

Последующим его интегрированием, получим

$$e(z) = c_4 \exp\left[\int \frac{p_1}{z}dz\right], \;\; c_4 = \text{const}\,. \qquad (2.21)$$

С учетом (2.21), выражение в (2.20) перепишется в виде дифференциального уравнения

$$w' + a_0 + a_1 w^2 = 0\,,$$

где

$$a_0 = \frac{p_2}{ze(z)}, \;\; a_1 = \frac{p_0}{z}e(z)\,,$$

интегрирование которого рассмотрено в первом разделе в пункте 1.3.

Определив w^+, w^-, используя (2.21), по формуле (2.19) определим c^+, c^-, затем m^+, m^- находим по формуле (2.17).

Последовательно определяем остальные составляющие a^+, a^-, b^+, b^-, F^+, F^-. Развернутую запись вышеуказанных составляющих в статье не приводим в силу их громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та,, 2001. 220 с.
2. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009. 672 с.
3. *Базилевич И.Е.* Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера – Куфарева // Матем. сб. 1995. Т. 37. № 3. С. 471–476.
4. *Деревенский В.П.* Полиномиальные дифференциальные уравнения первого порядка над матричными косыми рядами // Изв. вузов. Математика. 2014. № 9. С. 3–16.
5. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Структура интегралов второго дифференциального уравнения Левнера – Куфарева в частном случае // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 12–21. DOI: 10.17223/19988621/55/2.
6. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Некоторые методы исследования интегрируемости обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка специального вида // Математика и математическое моделирование. 2019. № 2. С. 48–62. https://doi.org/10.24108/mathm.0219.0000177

7. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Альтернативные методы интегрируемости обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с полиномиальной частью // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. Т. 16. № 2. С. 6–14. https://doi.org/10.31429/vestnik-16-2-6-14
8. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Практический метод интегрального представления решений однородного дифференциального уравнения второго порядка // Инновационные исследования как локомотив развития современной науки: от теоретических парадигм к практике»: электронный сборник научных статей по материалам XIX Международной научно-практической конференции. М.: НИЦ МИСИ, 2019. С. 23–28. URL: http://conference-nicmisi.ru/innovatsionnye-issledovaniya-kak-lokomotiv-razvitiya-sovremennoj-nauki-ot-teoreticheskih-paradigm-k-praktike.html
9. *Ильяшенко Ю.С., Яковенко С.Ю.* Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Т. 1. М.:МЦНМО, 2013. 428 с.
10. *Матвеев П.Н.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений: учебное пособие. СПб.: М.: Краснодар: Лань, 2008. 330 с.

Статья поступила 20.11.2019 г.

Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2020) INTEGRAL REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION AND THE LOEWNER–KUFAREV EQUATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 28–39

Keywords: differential equations, integral representations of solutions, univalent functions, conformal mappings.

DOI 10.17223/19988621/67/3

The article presents a method of integral representation of solutions of ordinary differential equations and partial differential equations with a polynomial right-hand side part, which is an alternative to the construction of solutions of differential equations in the form of different series.

The method is based on the introduction of additional analytical functions establishing the equation of connection between the introduced functions and the constituent components of the original differential equation. The implementation of the coupling equations contributes to the representation of solutions of the differential equation in the integral form, which allows solving some problems of mathematics and mathematical physics.

The first part of the article describes the coupling equation for an ordinary differential equation of the first order with a special polynomial part of a higher order. Here, the integral representation of the solution of a differential equation with a second-order polynomial part is indicated in detail.

In the second part of the paper, we consider the integral representation of the solution of a partial differential equation with the polynomial second-order part of the Loewner–Kufarev equation, which is an equation for univalent functions.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 35C15

Olga V. ZADOROZHNAYA (Candidate of Pedagogics, Associate Professor of the Department of Algebra and Analysis, Kalmyk State University, Elista, Russian Federation). E-mail: ovz_70@mail.ru

Vladimir K. KOCHETKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Algebra and Analysis, Kalmyk State University, Elista, Russian Federation). E-mail: kvk1106@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of geometrical theory of analytical functions]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Arnold V.I., Varchenko A.N., Gusein-Zade S.M. (2012) *Singularities of Differentiable Maps*. Basel: Birkhäuser.
3. Bazilevich I.E. (1995) Ob odnom sluchaye integriruyemosti v kvadraturakh uravneniya Levnera – Kufareva [On a case of integrability in quadratures of the Loewner–Kufarev equation]. *Mathematicheskiy sbornik*. E 37(3). pp. 471–476.
4. Derevenskii V.P. (2014) First-order polynomial differential equations over matrix skew series. *Russian Mathematics*. 58(9). pp. 1–12.
5. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2018) The structure of integrals of the second Loewner–Kufarev differential equation in a particular case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 12–21. DOI: 10.17223/19988621/55/2.
6. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Nekotoryye metody issledovaniya integriruyemosti obyknovennogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka spetsial'nogo vida [Some study methods for ordinary differential equation integrability of the second order of a certain type]. *Matematika i matematicheskoye modelirovaniye*. (2). pp. 48–62. doi.org/10.24108/mathm.0219.0000177
7. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Al'ternativnyye metody integriruyemosti obyknovennogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka s polinomial'noy chast'yu [Alternative methods of integrability of an ordinary nonlinear differential equation of the first order with a polynomial part]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*. 16(2). pp. 6–14. doi.org/10.31429/vestnik-16-2-6-14
8. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Prakticheskiy metod integral'nogo predstavleniya resheniy odnorodnogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [A practical method for integral representation of solutions to a homogeneous second-order differential equation]. *Innovatsionnyye issledovaniya kak lokomotiv razvitiya sovremennoy nauki*: *ot teoreticheskikh paradigm k praktike – Innovative investigations as a locomotive of the development of present-day science*. pp. 23–28. Access mode: http://conference-nicmisi.ru/innovatsionnye-issledovaniya-kak-lokomotiv-razvitiya-sovremennoj-nauki-ot-teoreticheskih-paradigm-k-praktike.html
9. Il'yashenko Yu.S., Yakovenko S.Yu. (2013) *Analiticheskaya teoriya differentsial'nykh uravneniy* [Analytical theory of differential equations]. Moscow: MCCME.
10. Matveev P.N. (2009) *Lektsii po analiticheskoy teorii differentsial'nykh uravneniy* [Lectures on analytical theory of differential equations]. St. Petersburg: LAN.

Received: November 20, 2019