ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2020 Математика и механика № 67

УДК 517.968.73 MSC 45E99, 45K99, 45D99
DOI 10.17223/19988621/67/4

С.К. Зарифзода, Р.Н. Одинаев

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

Для одного класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка со степенной и логарифмической сингулярностью в ядре, в классе функций, обращающихся в нуль с определённой асимптотикой, найдены интегральные представления многообразия решений через произвольные постоянные. Использован метод представления интегро-дифференциального уравнения второго порядка в виде произведения двух интегро-дифференциальных операторов первого порядка. Для этих одномерных интегро-дифференциальных операторов в случаях, когда корни характеристических уравнений являются вещественно разными, вещественно равными и комплексно-сопряженными, найдены обратные операторы. Выяснено, что присутствие степенно-логарифмической особенности в ядре действует на число произвольных констант в общем решении. Это число, в зависимости от корней соответствующих характеристических уравнений, может достигать девяти. Найдены случаи, когда данное интегро-дифференциальное уравнение имеет единственное решение. Использованный метод можно применять для изучения модельных и немодельных интегро-дифференциальных уравнений со степенно-логарифмической особенностью более высоких порядков.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение*, *степенные особенности*, *логарифмические особенности*, *интегральные представления*, *характеристическое уравнение.*

К рассмотрению интегро-дифференциальных уравнений приводят многие задачи прикладного характера из области математической биологии, теоретической экологии [1], финансовой математики, эконометрики [2] и других разделов современной науки. Например, задача моделирования рассеивания и роста популяции, задача Вольтерра о крутильных колебаниях [1], задача Прандтля о расчёте крыла самолёта [3, 4], задача об изучении кинетического уравнения Больцмана [5], задача разрешимости интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике [6] и т.д., приводят к изучению интегро-дифференциальных уравнений. В современности многие стохастические процессы с вероятностными скачками, например стохастические процессы Леви описываются интегро-дифференциальными уравнениями [7]. Помимо важнейшей прикладной стороны вопроса, не меньший интерес представляет математическое построение основ составляющей проблематики.

Особое внимание следует уделить исследованию различных случаев вырождения, например вырождения коэффициента при старших производных, сингулярности и сверхсингулярности ядра изучаемого уравнения и т.д. Изучению подобных объектов в регулярном случае посвящена обширная библиография [8 – 18]. Однако исследованию особых или сингулярных случаев в мировой литературе уделено мало внимания, поэтому список соответствующей литературы в этом направлении достаточно беден.

В данной работе излагается исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Вольтерра со степенной и логарифмической сингулярностью в ядре. Подобные уравнения, но только в одномерном случае, были исследованы в работах [19–22]. Хочется продолжить этот цикл работ и построить фундаментальные теории для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь привлекается аппарат представления общего интегро-дифференциального уравнения в виде произведения двух интегро-дифференциальных операторов первого порядка, один из которых содержит только степенную сингулярность, а другой – только логарифмическую. Однако важно заметить, что понятие сингулярности со стороны отдельных авторов понимается по-разному. Например, можно понимать это в смысле главного значения по Коши. Здесь для исследования привлекается аппарат теории аналитических функций [23]. Также можно понимать сингулярность в смысле обращения в нуль определителя матрицы главного оператора в уравнении. Для исследования таких уравнений привлекается аппарат распределения Соболева – Шварца, центральное место в которых занимает конструкция фундаментальной оператор-функции – аналога фундаментального решения [24, 25].

В наших исследованиях понятие сингулярности понимается в смысле сингулярности интеграла по Лебегу или сингулярности интеграла в обычном смысле Римана [21, 22].

Постановка задач и их решение

Через R обозначим область $R=\{(x,y):\ a<x<b,\ c<y<d\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1=\{(x,y): a<x<b,\ y=c\}$ и $\Gamma_2=\{(x,y): x=a,\ c<y<d\}$. В области R рассмотрим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка вида

$$U''_{xy}(x,y)+\int_a^x \frac{K_1(x,t)}{(t-a)^2}U'_y(t,y)\,dt+\int_c^y \frac{K_2(y,s)}{(s-c)^2}U'_x(x,s)\,ds+$$
$$+\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^2}\int_c^y \frac{K_3(x,t,y,s)}{(s-c)^2}U(t,s)\,ds=f(x,y), \qquad (1)$$

где $K_1(x,t)=p_1+p_2\left(\dfrac{x-a}{t-a}\right)$ – ядро, имеющее степенную особенность; $K_2(y,s)=q_1+q_2\ln\left(\dfrac{y-c}{s-c}\right)$ – ядро, имеющее логарифмическую особенность; $K_3(x,t,y,s)=K_1(x,t)K_2(y,s)$ – ядро, имеющее степенно-логарифмическую особенность; $f(x,y)$ – заданная функция в области R, $U(x,y)$ – искомая функция.

Через $C_{xy}^{\delta_1\delta_2}[a,b;c,d]$, или просто $C_{xy}^{\delta_1\delta_2}$, обозначим класс таких функций $U(x,y)$, которые имеют производные первого порядка по обеим переменным и смешанную производную второго порядка и в точке (a,c) обращаются в нуль с асимптотическим поведением

$$U(x,y)=o\left[(x-a)^{\gamma_1}(y-c)^{\gamma_2}\right],\ \gamma_1>\delta_1,\ \gamma_2>\delta_2,$$

и решение уравнения (1) будем искать в этом классе.

Для решения однородного уравнения (1) прежде всего представим его в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U'_y(x,y)+\int_c^y\frac{K_2(y,s)}{(s-c)^2}U(x,s)ds\right)+\int_a^x\frac{K_1(x,t)}{(t-a)^2}\left(U'_y(t,y)+\int_c^y\frac{K_2(y,s)}{(s-c)^2}U(t,s)ds\right)dt=0$$

или в виде произведения двух линейных интегро-дифференциальных операторов первого порядка вида

$$\Pi_a^x\Lambda_c^yU(x,y)=0, \tag{2}$$

где $\Pi_a^x(\cdot)=\dfrac{\partial}{\partial x}+\displaystyle\int_a^x\frac{K_1(x,t)}{(t-a)^2}(\cdot)dt$ и $\Lambda_c^y(\cdot)=\dfrac{\partial}{\partial y}+\displaystyle\int_c^y\frac{K_2(y,s)}{(s-c)^2}(\cdot)ds$.

Теперь, частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$U(x,y)=(x-a)^{\lambda}(y-c)^{\mu},$$

где λ и μ – постоянные числа. Подставляя эту функцию в левую часть уравнения (2) для определения λ и μ, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\left(\lambda+\frac{p_1}{\lambda-1}+\frac{p_2}{\lambda-2}\right)\left(\mu+\frac{q_1}{\mu-1}+\frac{q_2}{(\mu-1)^2}\right)=0, \tag{3}$$

только с тем ограничением, что λ и μ строго должны удовлетворять условиям $\lambda>2$, $\mu>1$. Эти условия определяют класс функций C_{xy}^{21}, в которых нужно искать решение уравнения (1).

Видно, что характеристическое уравнение (3) распадается на два алгебраических уравнения третьего порядка вида

$$\lambda+\frac{p_1}{\lambda-1}+\frac{p_2}{\lambda-2}=0 \tag{4}$$

и

$$\mu+\frac{q_1}{\mu-1}+\frac{q_2}{(\mu-1)^2}=0 \tag{5}$$

и поэтому в зависимости от корней этих алгебраических уравнений решение уравнения (2) получим в следующем виде:

I. Пусть корни характеристических уравнений (3) и (4) являются вещественными и разными. Тогда формально общее решение однородного уравнения (2) имеет вид

$$U(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x-a)^{\lambda_i}(y-c)^{\mu_j}c_i\tilde{c}_j,$$

где c_i, $\tilde{c}_j$ $\left(i,j=\overline{1,3}\right)$ – произвольные постоянные числа.

Далее, используя метод вариации произвольных постоянных решение неоднородного уравнения (1) легко находим в таком виде:

$$U(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x-a)^{\lambda_i}(y-c)^{\mu_j}c_i\tilde{c}_j+\left(\Pi_a^x\right)_I^{-1}\left(\Lambda_c^y\right)_I^{-1}f(x,y)\equiv$$
$$\equiv E_1^+\left[c_1,\,c_2,c_3,\,\tilde{c}_1,\,\tilde{c}_2,\tilde{c}_3,f(x,y)\right], \qquad (6)$$

где обратные операторы $\left(\Pi_a^x\right)_I^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y\right)_I^{-1}$ соответственно определяются из следующих равенств:

$$\left(\Pi_a^x\right)_I^{-1}(\cdot)=-\frac{1}{p_2\Delta_0}\int_a^x\left[\Delta_1(\lambda_1-2)(\lambda_1-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_1}+\Delta_2(\lambda_2-2)(\lambda_2-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_2}+\right.$$
$$\left.+\Delta_3(\lambda_3-2)(\lambda_3-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_3}\right](\cdot)dt,$$

$$\left(\Lambda_c^y\right)_I^{-1}(\cdot)=-\frac{1}{q_2\tilde{\Delta}_0}\int_c^y\left[\tilde{\Delta}_1(\mu_1-1)^2\left(\frac{y-c}{s-c}\right)^{\mu_1}+\tilde{\Delta}_2(\mu_2-1)^2\left(\frac{y-c}{s-c}\right)^{\mu_2}+\right.$$
$$\left.+\tilde{\Delta}_3(\mu_3-1)^2\left(\frac{y-c}{s-c}\right)^{\mu_3}\right](\cdot)ds,$$

где

$$\Delta_0=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ -\dfrac{1}{\lambda_1-2} & -\dfrac{1}{\lambda_2-2} & -\dfrac{1}{\lambda_3-2}\end{vmatrix},\ \tilde{\Delta}_0=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \dfrac{1}{\lambda_1-1} & \dfrac{1}{\lambda_2-1} & \dfrac{1}{\lambda_3-1}\end{vmatrix},$$

$\Delta_1,\,\Delta_2,\Delta_3$ и $\tilde{\Delta}_1,\,\tilde{\Delta}_2,\tilde{\Delta}_3$ – соответственно алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Δ_0 и $\tilde{\Delta}_0$.

Заметим, что необходимым условием для того, чтобы однородное уравнение (2) имело нетривиальное решение, являются условия $\lambda>2,\ \mu>1$. Поэтому если, например, выполняются условия

$$\lambda_1<2<\lambda_2<\lambda_3 \text{ и } \mu_1<1<\mu_2<\mu_3\,, \qquad (7)$$

то в общее решение (6) из всевозможных значений произвольных констант $c_1,\,\tilde{c}_1$ нужно выбирать только их нулевые значения.

Далее, для сходимости интегралов в обратные операторы $\left(\Pi_a^x\right)_I^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y\right)_I^{-1}$, требуем, чтобы функция $f(x,y)$ в точке (a,c) обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x,y)=o\left[(x-a)^{\gamma_3}(y-c)^{\gamma_4}\right],\ \gamma_3>\lambda_3-1,\ \gamma_4>\mu_3-1\,. \qquad (8)$$

Подставляя найденное решение (6) в уравнение (1) легко определим, что в случае $c_1=0,\ \tilde{c}_1=0$ оно в действительности удовлетворяет этому уравнению.

Таким образом, доказано:

Теорема 1. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении* (*1*) *ядра* K_1, K_2 и K_3 *такие, что корни характеристических уравнений* (*4*) *и* (*5*) *являются вещественными и разными и они удовлетворяют условиям* (7). *Кроме того, пусть функция* $f(x,y) \in C(R)$ *и в точке* (a,c), $f(a,c) = 0$ *с асимптотическим поведением* (*8*).

Тогда неоднородное уравнение (*1*) *в классе функций* $U(x,y) \in C_{xy}^{21}$, *обращающихся в нуль в точке* (a,c), *всегда разрешимо и его общее решение даётся при помощи формулы* (*6*) *при* $c_1 = 0, \tilde{c}_1 = 0$.

Теперь, пусть вместо условия (7) выполняется один из следующих всевозможных случаев:

1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$ и $\mu_1 < 1 < \mu_2 < \mu_3$;

2) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 2$ и $\mu_1 < 1 < \mu_2 < \mu_3$;

3) $\lambda_1 < 2 < \lambda_2 < \lambda_3$ и $\mu_1 < \mu_2 < 1 < \mu_3$;

4) $\lambda_1 < 2 < \lambda_2 < \lambda_3$ и $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < 1$;

5) $\lambda_1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$, $\mu_1 < \mu_2 < 1 < \mu_3$;

6) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 2$ и $\mu_1 < \mu_2 < 1 < \mu_3$;

7) $\lambda_1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$ и $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < 1$,

тогда в каждом из этих случаев обратные операторы $\left(\Pi_a^x\right)^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y\right)^{-1}$ не меняются, а только меняется число линейно независимых решений однородного уравнения (1) или число нулей оператора $\Pi_a^x \Lambda_c^y(\cdot)$. То есть, при выполнении каждого из этих случаев в общее решение однородного уравнения (1) нужно взять только нулевые значения у тех произвольных констант $c_i, \tilde{c}_j$ $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$, индексы которых совпадают с индексами $\lambda_i < 2, \mu_j < 1$ $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$. Отсюда, в каждом из перечисленных случаев, легко можно определить размерность пространства $\operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right)$ или число нулей оператора $\Pi_a^x \Lambda_c^y$:

1) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 2$;

2) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$;

3) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 2$;

4) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$;

5) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 1$;

6) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$;

7) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$.

II. Пусть корни характеристических уравнений (3) и (4) являются вещественными и равными, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Тогда формально общее решение однородного уравнения (2) имеет вид

$$U(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x-a)^{\lambda}\ln^{i-1}(x-a)(y-c)^{\mu}\ln^{j-1}(y-c)c_{i+3}\tilde{c}_{j+3},$$

где c_{i+3}, $\tilde{c}_{j+3}$ $\left(i,j=\overline{1,3}\right)$ – произвольные постоянные числа.

В этом случае также используя метод вариации произвольных постоянных, общее решение неоднородного уравнения (1) находим в таком виде:

$$U(x,y)=\left(\Pi_a^x\right)_{II}^{-1}\left(\Lambda_c^y\right)_{II}^{-1}f(x,y), \tag{9}$$

где обратные операторы $\left(\Pi_a^x\right)_{II}^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y\right)_{II}^{-1}$ соответственно определяются из следующих равенств

$$\left(\Pi_a^x\right)_{II}^{-1}(\cdot)=-\frac{(\lambda-2)^3}{2P_2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\times$$
$$\times\left[(\lambda-2)(\lambda-1)\ln^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)+2(\lambda-2+\lambda-1)\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)+2\right](\cdot)\,dt,$$

$$\left(\Lambda_c^y\right)_{II}^{-1}(\cdot)=-\frac{(\mu-1)^3}{2q_2}\int_c^y\left(\frac{y-c}{s-c}\right)^{\mu}\left[(\lambda-1)^2\ln^2\left(\frac{y-c}{s-c}\right)+4(\lambda-1)\ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)+2\right](\cdot)\,ds.$$

Заметим, что необходимым условием для того, чтобы однородное уравнение (2) имело нетривиальное решение, являются условия

$$\lambda>2 \text{ и } \mu>1. \tag{10}$$

С другой стороны, из характеристических уравнений (4) и (5) видно, что в случае вещественно-равных корней должны выполнятся условия

$$3\lambda=3\Rightarrow\lambda=1 \text{ и } 3\mu=2\Rightarrow\mu=\frac{2}{3}.$$

Отсюда, так как условия (10) не выполняются, то однородное уравнение (2) в этом случае имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (2) имеет единственное решение (9).

В этом случае для сходимости интегралов в обратные операторы $\left(\Pi_a^x\right)_{II}^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y\right)_{II}^{-1}$ требуем, чтобы функция $f(x,y)$ в точке (a,c) обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x,y)=o\left[(x-a)^{\gamma_5}(y-c)^{\gamma_6}\right],\ \gamma_5>\lambda-1,\ \gamma_6>\mu-1. \tag{11}$$

Можно проверить, что при выполнении условия (11), полученное решение (9) в действительности принадлежит классу C_{xy}^{21} и оно удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, доказано:

Теорема 2. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении* (*1*) *ядра* K_1, K_2 и K_3 *такие, что корни характеристических уравнений* (*4*) *и* (*5*) *являются вещественными и равными. Кроме того, пусть функция* $f(x,y)\in C(R)$ *и в точке* (a,c), $f(a,c)=0$ *с асимптотическим поведением* (*11*).

Тогда неоднородное уравнение (*1*) *в классе функций* $U(x,y)\in C_{xy}^{21}$, *обращающихся в нуль в точке* (a,c), *всегда разрешимо и его единственное решение даётся при помощи формулы* (*9*).

Заметим, что в случае вещественно-равных корней характеристических уравнений (4) и (5) оператор $\Pi_a^x\Lambda_c^y(\cdot)$ не имеет нулей т.е. $\dim\operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x\Lambda_c^y\right)=0$.

III. Пусть среди корней характеристических уравнений (3) и (4) имеются комплексно-сопряженные корни, которые обозначим так: $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_{2,3}=\alpha_1\pm i\beta_1$ и $\mu_1=\mu,\ \mu_{2,3}=\alpha_2\pm i\beta_2$, тогда формально общее решение однородного уравнения (1) имеет вид

$$U(x,y)=\Big((x-a)^{\lambda}c_7+(x-a)^{\alpha_1}\left[\cos[\beta_1\ln(x-a)]c_8+\sin[\beta_1\ln(x-a)]c_9\right]\Big)\times$$
$$\times\Big((y-c)^{\mu}\tilde c_7+(y-c)^{\alpha_2}\left[\cos[\beta_2\ln(y-c)]\tilde c_8+\sin[\beta_2\ln(y-c)]\tilde c_9\right]\Big),$$

где $c_7,c_8,c_9,\tilde c_7,\tilde c_8,\tilde c_9$ – произвольные постоянные числа.

В этом случае решение неоднородного уравнения (1) находится в таком виде:

$$U(x,y)=\left(\Pi_a^x\right)_{III}^{-1}\left(\Lambda_c^y\right)_{III}^{-1}f(x,y), \qquad (12)$$

где обратные операторы $\left(\Pi_a^x\right)_{III}^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y\right)_{III}^{-1}$ определяются так:

$$\left(\Pi_a^x\right)_{III}^{-1}(\cdot)=\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{D_1p_2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}(\cdot)\,dt-$$
$$-\frac{1}{D_1p_2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha_1}\left[\alpha_3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]+\beta_3\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\right](\cdot)\,dt,$$

$$\left(\Lambda_c^y\right)_{III}^{-1}(\cdot)=\frac{(\mu-1)^2}{D_2q_2}\int_c^y\left(\frac{y-c}{s-c}\right)^{\mu}(\cdot)\,ds-$$
$$-\frac{1}{D_2q_2}\int_c^y\left(\frac{y-c}{s-c}\right)^{\alpha_2}\left[\alpha_4\cos\left[\beta_2\ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)\right]+\beta_4\sin\left[\beta_2\ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)\right]\right](\cdot)\,ds,$$

здесь
$$D_1=\frac{2\alpha_1-\lambda-2}{(\alpha_1-2)^2+\beta_1^2}-\frac{1}{\lambda-2},$$

$$\alpha_3=-(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)+(\alpha_1-1)(\lambda-\alpha_1)+(\alpha_1-2)(\lambda-\alpha_1)+\beta_1^2,$$
$$\beta_3=\frac{(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)(\lambda-\alpha_1)\alpha_1}{\beta_1}+(\alpha_1-1)\beta_1+(\alpha_1-2)\beta_1-(\lambda-\alpha_1)\beta_1,$$
$$\beta_4=-\frac{(\alpha_2-1)^2(\mu-\alpha_2)}{\beta_2}+(\alpha_2-1)\beta_2+(\alpha_2-1)\beta_2+(\mu-\alpha_2)\beta_2.$$

Здесь тоже необходимым условием для того, чтобы однородное уравнение (2) имело нетривиальное решение, являются условия

$$\lambda>2,\ \alpha_1>2\ \text{ и }\ \mu>1,\ \alpha_2>1. \qquad (13)$$

С другой стороны, из характеристического уравнения (4) и (5) видно, что в случае комплексно-сопряженных корней должны выполняться условия

$$\lambda + 2\alpha_1 = 3 \text{ и } \mu + 2\alpha_2 = 2. \quad (14)$$

Отсюда, так как условия (13) и (14) несовместимы, следует, что однородное уравнение (2) в этом случае тоже имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (2) имеет единственное решение вида (12).

Для сходимости интегралов в обратные операторы $\left(\Pi_a^x\right)_{III}^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y\right)_{III}^{-1}$ от функции $f(x,y)$ в точке (a,c) требуем следующую асимптотику:

$$f(x,y) = o\left[(x-a)^{\gamma_7}(y-c)^{\gamma_8}\right],\ \gamma_7 > \max\{\lambda,\ \alpha_1\}-1,\ \gamma_8 > \max\{\mu,\ \alpha_2\}-1. \quad (15)$$

В этом случае тоже при выполнении условие (15) полученное решение (12) принадлежит классу C_{xy}^{21} и оно удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении* (*1*) *ядра* K_1, K_2 и K_3 *такие, что корни характеристических уравнений* (*4*) *и* (*5*) *являются комплексно-сопряженными. Кроме того, пусть функция* $f(x,y) \in C(R)$ *и в точке* (a,c), $f(a,c) = 0$ *с асимптотическим поведением* (*15*).

Тогда неоднородное уравнение (*1*) *в классе функций* $U(x,y) \in C_{xy}^{21}$, *обращающихся в нуль в точке* (a,c), *всегда разрешимо и его единственное решение даётся при помощи формулы* (*13*).

Пусть вместо условия (13) выполняется одно из условий:

1) $\lambda < 2,\ \alpha_1 > 2$ и $\mu < 1,\ \alpha_2 > 1$;
2) $\lambda < 2,\ \alpha_1 > 2$ и $\mu > 1,\ \alpha_2 < 1$;
3) $\lambda > 2,\ \alpha_1 < 2$ и $\mu < 1,\ \alpha_2 > 1$;
4) $\lambda > 2,\ \alpha_1 < 2$ и $\mu > 1,\ \alpha_2 < 1$;
5) $\lambda < 2,\ \alpha_1 < 2$ и $\mu < 1,\ \alpha_2 > 1$;
6) $\lambda < 2,\ \alpha_1 < 2$ и $\mu > 1,\ \alpha_2 < 1$;
7) $\lambda > 2,\ \alpha_1 < 2$ и $\mu < 1,\ \alpha_2 < 1$;
8) $\lambda < 2,\ \alpha_1 > 2$ и $\mu < 1,\ \alpha_2 < 1$;
9) $\lambda < 2,\ \alpha_1 < 2$ и $\mu < 1,\ \alpha_2 < 1$.

В этих случаях также легко определим дефектные числа оператора $\Pi_a^x \Lambda_c^y$:

1) $\dim \mathrm{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 4$;
2) $\dim \mathrm{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 2$;
3) $\dim \mathrm{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 2$;
4) $\dim \mathrm{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 1$;
5) $\dim \mathrm{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$;
6) $\dim \mathrm{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$;

7) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$;

8) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$;

9) $\dim \operatorname{Ker}\left(\Pi_a^x \Lambda_c^y\right) = 0$.

Отсюда видно, что в пяти случаях однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение. В остальных случаях однородное уравнение (1) имеет нетривиальные решения, и поэтому общее решение неоднородного уравнения (1) содержит произвольные константы.

Замечание 1. Соответствующие теоремы легко можно получить в других возможных случаях корней характеристических уравнений (4) и (5), т.е., например: 1) корни уравнения (4) являются вещественно разными, а корни уравнения (5) являются вещественно равными; 2) корни уравнения (4) являются вещественно разными, а корни уравнения (5) являются комплексно-сопряженными; 3) корни уравнения (4) являются вещественно равными, а корни уравнения (5) являются вещественно разными и т. д.

Примеры

Приведём примеры:

Пример 1. Рассмотрим следующий пример:

$$U''_{xy}(x,y) + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right) \frac{U'_y(t,y)}{(t-a)^2} dt + \int_c^y \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{27} \ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)\right] \frac{U'_x(x,s)}{(s-c)^2} ds +$$

$$+ \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right) \frac{dt}{(t-a)^2} \int_c^y \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{27} \ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)\right] \frac{U(t,s)}{(s-c)^2} ds = (x-a)^2 (y-c). \tag{16}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\left(\lambda + \frac{0}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-2}\right)\left(\mu + \frac{\frac{1}{3}}{\mu-1} + \frac{\frac{1}{27}}{(\mu-1)^2}\right) = 0 .$$

Отсюда $(\lambda-1)^3 \left(\mu - \frac{2}{3}\right)^3 = 0$. То есть характеристическое уравнение имеет два трёхкратных корня $\lambda = 1,\ \mu = \frac{2}{3}$. Таким образом, так как условия $\lambda > 2,\ \mu > 1$ не выполняются, то согласно пункту II, однородное уравнение (16) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение имеет единственное решение, которое даётся по формуле

$$U(x,y) = -\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)\left[\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) - 1\right] \times$$

$$\times \int_c^y \left(\frac{y-c}{s-c}\right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{18} \ln^2\left(\frac{y-c}{s-c}\right) - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right) + 1\right] (t-a)^2 (s-c) ds.$$

Легко можно проверить, что найденное решение удовлетворяет уравнению (16).

Пример 2. Рассмотрим другой пример:

$$U''_{xy}(x,y)+\int_a^x\left[-30+12\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{U'_y(t,y)}{(t-a)^2}dt+\int_c^y\left[-4+6\ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)\right]\frac{U'_x(x,s)}{(s-c)^2}ds+$$

$$+\int_a^x\left[-30+12\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{dt}{(t-a)^2}\int_c^y\left[-4+6\ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)\right]\frac{U(t,s)}{(s-c)^2}ds=(x-a)^6(y-c)^3. \qquad (17)$$

Решение. Характеристическое уравнение в этом случае примет такой вид:

$$\left(\lambda-\frac{30}{\lambda-1}+\frac{12}{\lambda-2}\right)\left(\mu-\frac{4}{\mu-1}+\frac{6}{(\mu-1)^2}\right)=0,$$

или

$$(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+4)(\mu+2)\left(\mu^2-4\mu+5\right)=0.$$

Отсюда имеем такие корни: $\lambda_1=-4,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=4,\ \mu_1=-2,\ \mu_{2,3}=2\pm i$. Видно, что для этих корней выполняются условия $\lambda_1<2<\lambda_2<\lambda_3,\ \mu_1<1<\operatorname{Re}\{\mu_2,\mu_3\}$. Таким образом, согласно пунктам I и III, общее решение однородного уравнения (17) имеет вид

$$U_{oo}(x,y)=\left((x-a)^3c_2+(x-a)^4c_3\right)\left((y-c)^2\cos[\ln(y-c)]\tilde{c}_2+(y-c)^2\sin[\ln(y-c)]\tilde{c}_3\right),$$

где $c_2, c_2, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ – произвольные постоянные числа. Видно, что правая часть уравнения (17) по переменной x удовлетворяет условию (8), а по переменной y – условию (15) и поэтому частное решение неоднородного уравнения (17) даётся по формуле

$$U_{\text{чн}}(x,y)=\left(\Pi_a^x\right)_{\mathrm{I}}^{-1}\left(\Lambda_c^y\right)_{\mathrm{III}}^{-1}(x-a)^6(y-c)^3,$$

где обратные операторы $\left(\Pi_a^x\right)_{\mathrm{I}}^{-1}$ и $\left(\Lambda_c^y\right)_{\mathrm{III}}^{-1}$ соответственно определяются из следующих равенств

$$\left(\Pi_a^x\right)_{\mathrm{I}}^{-1}(\cdot)=-\frac{1}{12\Delta_0}\int_a^x\left[2\Delta_1\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-4}+6\Delta_2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^3+12\Delta_3\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^4\right](\cdot)dt,$$

$$\left(\Lambda_c^y\right)_{\mathrm{III}}^{-1}(\cdot)=\frac{3}{2D_2}\int_c^y\left(\frac{y-c}{s-c}\right)^{-2}(\cdot)ds-$$

$$-\frac{1}{6D_2}\int_c^y\left(\frac{y-c}{s-c}\right)^2\left[\alpha_4\cos\left[\ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)\right]+\beta_4\sin\left[\ln\left(\frac{y-c}{s-c}\right)\right]\right](\cdot)ds.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (17) определяется по формуле

$$U(x,y)=\left((x-a)^3c_2+(x-a)^4c_3\right)\times$$

$$\times\left((y-c)^2\cos[\ln(y-c)]\tilde{c}_2+(y-c)^2\sin[\ln(y-c)]\tilde{c}_3\right)+$$

$$+\left(\Pi_a^x\right)_{\mathrm{I}}^{-1}\left(\Lambda_c^y\right)_{\mathrm{III}}^{-1}(x-a)^6(y-c)^3\equiv E_{1,3}^{+}\left[c_1,c_2,c_3,0,\tilde{c}_2,\tilde{c}_3,(x-a)^6(y-c)^3\right].$$

В этом случае тоже легко проверяется, что найденное решение удовлетворяет уравнению (17).

Заключение

В заключение приведём некоторые отличительные свойства уравнения (1) от раньше рассмотренных уравнений типа Вольтерра:

1. Независимо от нефредгольмовости ядра уравнения (1) найдено решение этого уравнения в классе функций, обращающихся в нуль в точке (a,c), в явном виде.

2. Выяснено, что решение уравнения (1) в общем случае содержит четыре произвольных постоянных. Решение этого уравнения в других случаях может содержать либо 1, либо 2 произвольных констант.

3. Выделяется случай, когда уравнение (1) имеет единственное решение. Этот случай совпадает с теорией интегро-дифференциальных уравнений с регулярными ядрами.

4. Согласно общей теории, общее решение регулярных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка может содержать не более двух произвольных функций или констант. Отсюда выходит, что эффект степенной и логарифмической сингулярности ядра уравнения (1) действует на число произвольных констант в общем решении и это число для уравнения (1) достигает четырёх.

5. Выяснено, что степенная особенность ядра более сильная, чем логарифмическая. Эти особенности действуют на классах функций, обращающихся в нуль в точке (a,c) с определённой асимптотикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. *Кахкцян В.М.*, *Хачатрян А.Х.* Об аналитическо-численном решении одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в эконометрике // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 7. С. 1108–1112. https://doi.org/10.7868/S0044466913070144.
3. *Векуа И.Н.* Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // Прикл. матем. и мех. 1945. Т. 9. № 2. С. 143–150.
4. *Магнарадзе Л.Г.* Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолёта // Сообщ. АН Груз. ССР. 1942. Т. 3. № 6. С. 503–508.
5. *Годунов С.К.*, *Султангазин У.М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Усп. мат. наук. 1971. Т. 26. № 3(159). С. 3–51.
6. *Власов В.В.*, *Раутиан Н.А.*, *Шамаев А.С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 39. С. 36–65.
7. *Oton X.R.* Integro-Differential Equations: Regularity Theory and Pohozaev Identities. Barcelona. 2014. 301 p.
8. *Бободжанов А.А.*, *Сафонов В.Ф.* Задача с обратным временем для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения с диагональным вырождением ядра высокого порядка // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2016. Т. 80, №2. С. 3–15. DOI: https://doi.org/10.4213/im8335.
9. *Турсунов Д.А.*, *Эркебаев У.З.* Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. №1(39). С. 42–52. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/39/5.
10. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют полюсы // Вестник Томского

государственного университета. Математика и механика. 2019. № 59. С. 16–28. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/59/3.

11. *Нефедов Н.Н.*, *Никитин А.Г.* Начально-краевая задача для нелокального сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 6. С. 1042–1047.
12. *Качалов В.И.* О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 4. С. 64–71. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466917040056.
13. *Бесова М.И.* Об одном методе решения сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. № 2. С. 45–55.
14. *Юлдашев Т.К.* Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. №1. С. 58–66.
15. *Бьянка К.*, *Феррара М.*, *Guerrini L.* Асимптотический предел интегро-дифференциального уравнения, моделирующего сложные системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2014. Т. 78, №6. С. 49–64. DOI: https://doi.org/10.4213/im8066.
16. *Бураго П.Н.*, *Эгамов А.И.* О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // Журнал СВМО. 2019. Т. 21, № 4. С. 413–429. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.
17. *Белкина Т.А.*, *Конюхова Н.Б.*, *Курочкин С.В.* Сингулярная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 10. С. 1812–1846.
18. *Асхабов С.Н.* Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гилберта и монотонной нелинейностью // Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19. № 3. С. 11–20.
19. *Раджабов Н.* Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе: Деваштич. 2007. 221 с.
20. *Раджабов Н.*, *Раджабова Л.Н.*, *Репин О.А.* Об одном классе двумерных сопряженных интегральных уравнений вольтерровского типа // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 1–10.
21. *Зарипов С.К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегродифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 24–35. DOI: http://dx.doi.org/10.17223/19988621/46/4.
22. *Зарипов С.К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 2. С. 236–248. DOI: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1515.
23. *Hamoud A.A.*, *Ghadle K.P.* The approximate solutions of fractional Volterra–Fredholm integro-differential equations by using analytical techniques // Probl. Anal. Issues Anal. 2018. V. 7(25). No. 1. P. 41–58. DOI: https://doi.org/10.15393/j3.art.2018.4350.
24. *Фалалеев М. В.* Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 17. С. 77–85.
25. *Сидоров Н.А.*, *Сидоров Д.Н.* О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами // Математические заметки. 2014. Т. 96. № 5. С. 773–789. DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm10220.

Статья поступила 24.01.2020 г.

Zarifzoda S.K., Odinaev R.N.(2020) INVESTIGATION OF SOME CLASSES OF SECOND ORDER PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A POWER-LOGARITHMIC SINGULARITY IN THE KERNEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 40–54

DOI 10.17223/19988621/67/4

Keywords: integro-differential equation, power singularity, logarithmic singularity, integral representations, characteristic equation.

For a class of second-order partial integro-differential equations with a power singularity and logarithmic singularity in the kernel, integral representations of the solution manifold in terms of arbitrary constants are obtained in the class of functions vanishing with a certain asymptotic behavior. Although the kernel of the given equation is not a Fredholm type kernel, the solution of the studied equation in a class of vanishing functions is found in an explicit form. We represent a second-order integro-differential equation as a product of two first-order integro-differential operators. For these one-dimensional integro-differential operators, in the cases when the roots of the corresponding characteristic equations are real and different, real and equal and complex and conjugate, the inverse operators are found. It is found that the presence of power singularity and logarithmic singularity in the kernel affects the number of arbitrary constants in the general solution. This number, depending on the roots of the corresponding characteristic equations, can reach nine. Also, the cases when the given integro-differential equation has a unique solution are found. The correctness of the obtained results with the help of the detailed solutions of concrete examples are shown. The method of solving the given problem can be used for solving model and nonmodel integro-differential equations with a higher order power singularity and logarithmic singularity in the kernel.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 45E99, 45K99, 45D99

Sarvar K. ZARIFZODA (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mechanics, Tajik National University, Dushanbe, Republic of Tajikistan). E-mail: sarvar8383@list.ru

Raim N. ODINAEV (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Tajik National University, Tajik National University, Dushanbe, Republic of Tajikistan). E-mail: raim_odinaev @mail.ru

REFERENCES

1. Volterra V. (2005) *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. Dover.
2. Kakhktsyan V.M., Khachatryan A.Kh. (2013) Analytical–numerical solution of a nonlinear integrodifferential equation in econometrics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 53(7). pp. 933–936. DOI: 10.1134/S0965542513070130.
3. Vekua I.N. (1945) Ob integro-differencial'nom uravnenii Prandtlya [On the Prandtl integro-differential equation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 9(2). pp. 143–150.
4. Magnaradze L.G. (1942) Ob odnom novom integral'nom uravnenii teorii kryla samoljota [On a new integral equation of the aircraft wing theory]. *Soobshcheniya Akademii nauk Gruzinskoy SSR*. 3(6). pp. 503–508.
5. Godunov S.K., Sultangazin U.M. (1971) O diskretnykh modelyakh kineticheskogo uravneniya Bol'tsmana [On discrete models of the Boltzmann kinetic equation]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 26:3(159). pp. 3–51.
6. Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A.S. (2011) Spektral'nyy analiz i korrektnaya razreshimost' abstraktnykh integro-differentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike [Spectral analysis and correct solvability of abstract integro-differential

equations arising in thermophysics and acoustics]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nyye napravleniya.* 39. pp. 36–65.

7. Oton X.R. (2014) Integro-differential equations: Regularity theory and Pohozaev identities. Dissertation. Universitat Politecnica de Catalunya.
8. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. (2016) A problem with inverse time for a singularly perturbed integro-differential equation with diagonal degeneration of the kernel of high order. *Izvestiya: Mathematics*. 80(2). p. 285.
9. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. (2016) Asimptoticheskoye razlozheniye resheniya zadachi Dirikhle dlya kol'tsa s osobennost'yu na granitse [Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity at the boundary]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 42–52. DOI: 10.17223/19988621/39/5.
10. Tursunov D.A. (2019) Asimptotika resheniya singulyarno vozmushchennoy zadachi Koshi v sluchaye smeny ustoychivosti, kogda sobstvennyye znacheniya imeyut polyusy [Asymptotics of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem in the case of a change in the stability, when the eigenvalues have poles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 59. pp. 16–28. DOI: 10.17223/19988621/59/3.
11. Nefedov N.N., Nikitin A.G. (2012) The initial boundary value problem for a nonlocal singularly perturbed reaction–diffusion equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 52(6). pp. 926–931.
12. Kachalov V.I. (2017) On the holomorphic regularization of singularly perturbed systems of differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 57(4). pp. 653–660. DOI: 10.1134/S0965542517040054.
13. Besova M.I. (2019) Ob odnom metode resheniya singulyarno vozmushchennykh krayevykh zadach [On a method of solving singularly perturbed boundary value problems]. *Differentsial'nyye uravneniya i protsessy upravleniya*. 2. pp. 45–55.
14. Yuldashev T.K. (2013) Obratnaya zadacha dlya odnogo nelineynogo integro-differentsial'nogo uravneniya tret'yego poryadka. [Inverse problem for a nonlinear integro-differential equation of the third order]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*. 1. pp. 58–66.
15. Bianca C., Ferrara M., Guerrini L. (2014) The asymptotic limit of an integro-differential equation modelling complex systems. *Izvestiya: Mathematics*. 78(6). pp. 1105–1119.
16. Burago P.N., Egamov A.I. (2019) O svyazi resheniy nachal'no-krayevykh zadach dlya nekotorogo klassa integro-differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi i lineynogo giperbolicheskogo uravneniya [On the connection between solutions of initial boundary-value problems for a class of integro-differential partial differential equations and a linear hyperbolic equation]. *Zhurnal SVMO*. 21(4). pp. 413–429. DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.
17. Belkina T.A., Konyukhova N.B., Kurochkin S.V. (2012) Singular boundary value problem for the integrodifferential equation in an insurance model with stochastic premiums: Analysis and numerical solution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 52(10). pp. 1384–1416.
18. Askhabov S.N. (2017) Singulyarnyye integro-differentsial'nyye uravneniya s yadrom Gil-berta i monotonnoy nelineynost'yu [Singular integro-differential equations with a Hilbert kernel and monotonic nonlinearity]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal.* 19(3). pp. 11–20.
19. Radzhabov N. (2007) *Integral'nyye uravneniya tipov Vol'terra s fiksirovannymi granichnymi i vnutrennimi singulyarnymi i sverkhsingulyarnymi yadrami i ikh prilozheniya*. [Volterra type integral equations with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their applications]. Dushanbe: Devashtich.
20. Radzhabova L.N., Radzhabov N., Repin O.A. (2011) On a class of two-dimensional adjoint integral equations of Volterra type. *Differential Equations.* 47(3). pp. 1333–1343.
21. Zaripov S.K. (2017) Postroyeniye analoga teoremy Fredgol'ma dlya odnogo klassa model'nykh integrodifferentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka s singulyarnoy tochkoy v yadre [Construction of an analog of the Fredholm theorem for a class of model first order in-

tegro-differential equations with a singular point in the kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 46. pp. 24–35. DOI: 10.17223/19988621/46/4.

22. Zaripov S.K. (2017) Postroyeniye analoga teoremy Fredgol'ma dlya odnogo klassa model'nykh integro-differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka s logarifmicheskoy osobennost'yu v yadre [Construction of analog of a Fredholm theorem for a class of first order model integro-differential equation with a logarithmic singularity in the kernel]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki.* 21(2). pp. 236–248. DOI: 10.14498/vsgtu1515.
23. Hamoud A.A., Ghadle K.P. (2018) The approximate solutions of fractional Volterra–Fredholm integro-differential equations by using analytical techniques. *Issues of Analysis*. 7(1). pp. 41–58. DOI: 10.15393/j3.art.2018.4350.
24. Falaleev M.V. (2016) Vyrozhdennyye integro-differentsial'nyye uravneniya tipa svertki v banakhovykh prostranstvakh [Degenerate integro-differential convolution type equations in Banach spaces]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika*. 17. pp. 77–85.
25. Sidorov N.A., Sidorov D.N. (2014) On the solvability of a class of Volterra operator equations of the first kind with piecewise continuous kernels. *Mathematical Notes.* 96(5). pp. 811–826. DOI: 10.4213/mzm10220.

Received: January 24, 2020