УДК 512.541 MSC: 20K15, 20K27, 20K30
DOI 10.17223/19988621/67/6

А.Р. Чехлов, О.В. Иванец

О ПРОЕКТИВНО ИНЕРТНЫХ ПОДГРУППАХ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

Пусть группа G есть конечная прямая сумма групп без кручения G_i ранга 1. Доказано, что каждая проективно инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда все G_i не делятся ни на одно простое число p, причем у различных подгрупп G_i и G_j их типы равны либо несравнимы.

Ключевые слова: *проективно инертная подгруппа, вполне инвариантная подгруппа, соизмеримые подгруппы, индекс подгруппы, вполне разложимая группа.*

Все группы, если специально не оговорено, предполагаются абелевыми. Через $E(G)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы G. Подгруппы H, K группы G называются *соизмеримыми* (обозначение $H \sim K$), если обе факторгруппы $(K + H)/H$ и $(K + H)/K$ конечны. Соизмеримость является отношением эквивалентности. Если $\varphi \in E(G)$, то подгруппа $H \le G$ называется φ-*инертной*, если H соизмерима с $H + \varphi H$. Если H φ-инертна для всякого $\varphi \in E(G)$, то H называется *вполне инертной.* Подгруппу $H \le G$, π-инертную для всякой проекции π группы G, назовем *проективно инертной.* Проективно инертные подгруппы образуют более широкий класс групп, чем вполне инертные подгруппы. Так, в неразложимой группе всякая ее подгруппа проективно инвариантна.

Вполне инертные подгруппы абелевых групп изучались в [1–5]. Подгруппа, соизмеримая с некоторой вполне инертной подгруппой (в частности, с вполне инвариантной подгруппой), сама является вполне инертной [1, следствие 2.10]. В [2], соответственно и в [3], показано, что всякая вполне инертная подгруппа свободной группы и p-группы, разложимой в прямую сумму циклических групп, соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой; делимые группы таким свойством в общем случае не обладают [1]. Различным вопросам инертности в теории групп посвящена статья [6].

Лемма 1. *Для подгруппы H группы G следующие условия эквивалентны*:

1) *H проективно инертна*;

2) *$H \sim \pi H + (1 - \pi)H$ для всякой проекции π группы G*;

3) *$H \sim (A \cap H) \oplus (B \cap H)$ для всякого прямого разложения $G = A \oplus B$ группы G.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) справедлива ввиду равенства $\pi H + (1 - \pi)H = H + \pi H$.

1) $\Rightarrow$ 3) Поскольку $(\pi H + H)/H \cong \pi H/(\pi H \cap H)$, то $\pi H \cap H \sim \pi H$, аналогично $(1 - \pi)H \cap H \sim (1 - \pi)H$. Поэтому $(\pi H \cap H) + ((1 - \pi)H \cap H)) \sim \pi H + (1 - \pi)H = H + \pi H \sim H$. Теперь следует учесть, что $\pi H \cap H \subseteq A \cap H$ и $(1 - \pi)H \cap H \subseteq B \cap H$.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть π – проекция и $\pi(G) = A$, $(1 - \pi)G = B$. По условию $H \sim (A \cap H) \oplus (B \cap H)$. Поскольку $B \cap H \subseteq H$, то $H \sim (A \cap H) + H$. Осталось заметить, что $A \cap H$ имеет конечный индекс в πH. Действительно, условие

$H \sim (A \cap H) \oplus (B \cap H)$ означает, что почти все элементы подгруппы H содержатся в $(A \cap H) \oplus (B \cap H)$, но тогда почти все элементы πH содержатся в $A \cap H$.

Из доказательства импликации 3) $\Rightarrow$ 1) леммы 1 следует, что справедливо

Замечание. Если *H – проективно инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, то $A \cap H \sim \pi H$, где π – проекция группы G на A.*

Отметим следующие простые свойства.

1. *Подгруппа, соизмеримая с некоторой проективно инертной подгруппой (в частности, с проективно инвариантной подгруппой), сама является проективно инертной.*

В связи с этим свойством представляет интерес вопрос изучения классов групп, в которых все проективно инертные подгруппы соизмеримы с проективно инвариантными подгруппами.

2. *Если H – проективно инертная подгруппа группы G, то для любых проекций $\pi_1,\ldots,\pi_n$ группы G подгруппа $H + \pi_1(H) + \cdots + \pi_n(H)$ соизмерима с H.*

3. *Если H – проективно инертная подгруппа группы без кручения G, то $\pi(H) \subseteq H_*$ для всякой проекции π* группы *G, где H_* – чистая оболочка подгруппы H в G. В частности, подгруппа H_* является проективно инвариантной в G.*

Это свойство вытекает из того, что подгруппа H_*/H факторгруппы G/H совпадает с ее периодической частью.

4. *Если H – проективно инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, то подгруппа $A \cap H$ проективно инертна в A. Причем если $\varphi \in$* Hom *(B,A), а α – проекция группы G, то подгруппа $(A \cap H) + \varphi(B \cap H) + \pi\alpha(A \cap H)$ соизмерима с $A \cap H$, где π – проекция группы G на прямое слагаемое A.*

Первое утверждение этого свойства следует из того, что если $A = U \oplus V$, то $H \sim (U \cap H) \oplus (V \cap H) \oplus (B \cap H)$, где $A \cap H \sim (U \cap H) \oplus (V \cap H)$ и $U \cap H = U \cap (A \cap H)$, $V \cap H = V \cap (A \cap H)$. Далее, пусть $\pi\colon G \to A$ и $\theta\colon G \to B$ – проекции. Тогда $\pi + \pi\varphi\theta$ также является проекцией группы G и $(\pi + \pi\varphi\theta)((A \cap H) \oplus (B \cap H)) = (A \cap H) + \varphi(B \cap H)$. Подгруппа $(A \cap H) \oplus (B \cap H)$ ввиду проективной инертности соизмерима с $(A \cap H) \oplus (B \cap H) + (\pi + \pi\varphi\theta)((A \cap H) \oplus (B \cap H))$, поэтому подгруппа $A \cap H = \pi((A \cap H) \oplus (B \cap H))$ соизмерима с подгруппой $A \cap H + \varphi(B \cap H) = \pi((A \cap H + \varphi(B \cap H)) \oplus (B \cap H))$. Покажем теперь, что $A \cap H \sim A \cap H + \pi\alpha(A \cap H)$. Действительно, это следует из соотношений $A \cap H \sim \pi(H) \supseteq \pi\alpha(A \cap H)$. Итак, $A \cap H \sim A \cap H + \varphi(B \cap H)$ и $A \cap H \sim A \cap H + \pi\alpha(A \cap H)$, поэтому $A \cap H \sim A \cap H + \varphi(B \cap H) + \pi\alpha(A \cap H)$.

5. *Если проективно инертная подгруппа H группы G содержит ненулевую делимую подгруппу без кручения, то H содержит делимую часть $D = D(G)$ группы G; а если H содержит подгруппу, изоморфную квазициклической p-группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$, то H содержит p-компоненту группы D.*

Делимая часть $D(H)$ группы H выделяется прямым слагаемым в G, $G = D(H) \oplus K$. Имеем $D = D(H) \oplus (D \cap K)$. Поэтому если $D(H)$ группа непериодическая, то она содержит прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Q}$. Всякая делимая группа ранга 1 является гомоморфным образом группы $\mathbb{Q}$. Получаем, что для каждой делимой подгруппы D' ранга 1 группы $D \cap K$ существует такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(D(H), D')$, что $H \cap \varphi H$ является подгруппой конечного индекса в D'. Делимые группы не имеют собственных подгрупп конечного индекса, поэтому $D \subseteq H$. В случае подгруппы $\mathbb{Z}(p^\infty)$ рассуждения аналогичны.

6. *Если делимая часть без кручения F группы G имеет бесконечный ранг и проективно инертная подгруппа H группы G является непериодической, то H содержит делимую часть D группы G.*

Имеем $G = F \oplus K$ и $H \sim (F \cap H) \oplus (K \cap H)$. Поскольку всякая группа без кручения бесконечна, то из свойства 4 следует, что $F \cap H \neq 0$ и является существенной подгруппой в F. Ввиду бесконечности ранга группа $F \cap H$ имеет в качестве гомоморфного образа группу $\mathbb{Q}$. Поэтому, как в свойстве 5, получаем, что $D \leq H$.

Через G_p обозначим p-компоненту группы G.

7. *Если $G = D \oplus R$, где $D = F \oplus (\oplus_p D_p)$ – делимая часть группы G, F – делимая часть без кручения, $\oplus_p D_p$ –периодическая часть группы D и H – такая проективно инертная подгруппа группы G, что подгруппа $H \cap R$ не является периодической, то подгруппа $H \cap F$ существенна в F, причем $D \subseteq H$, если ранг без кручения подгруппы $H \cap R$ бесконечен. Если же подгруппа $H \cap R_p$ не является ограниченной, то $D_p \subseteq H$.*

Если подгруппа $H \cap R$ не является периодической, то она содержит бесконечную циклическую подгруппу. Поскольку делимые группы инъективны, то отсюда следует, что $H \cap D' \neq 0$ для всякой делимой подгруппы без кручения D' ранга 1, в частности $H \cap F$ существенна в F. Если же ранг без кручения подгруппы $H \cap R$ бесконечен, то она содержит свободную группу K бесконечного ранга, всякая счетная группа является гомоморфным образом группы K; откуда следует, что H содержит каждую подгруппу ранга 1 группы D, значит, $D \subseteq H$. Если группа $H \cap R_p$ неограниченная, то существует эпиморфизм $H \cap R_p \rightarrow \mathbb{Z}(p^\infty)$, откуда следует, что $D_p \subseteq H$.

Очевидно, что если A – вполне инвариантное прямое слагаемое группы G, то всякая проективно инертная подгруппа группы A будет проективно инертной подгруппой группы G. Справедливость следующего свойства также очевидна.

8. 1) *Пусть $G = A \oplus B$. проективно инертная подгруппа H группы A является проективно инертной подгруппой группы G тогда и только тогда, когда fH – конечная группа для каждого $f \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$. В частности, если A – проективно инертное прямое слагаемое в G, то $\mathrm{Hom}\,(A, B)A$ – периодическая подгруппа в B.*

2) *Если B – группа без кручения, а H – существенная проективно инертная подгруппа группы A, то H будет проективно инертной подгруппой группы $G = A \oplus B$ тогда и только тогда, когда A – вполне инвариантное прямое слагаемое в G.*

Из примера 4.7 статьи [1] следует справедливость следующего интересного факта.

Пример 1. *Если G – группа без кручения, конечного ранга n и $H \leq G$ – ее вполне разложимая однородная подгруппа ранга n, то H является вполне инертной в G.*

Пример 2. *Если G – группа без кручения, ранг аддитивной группы кольца $E(G) > 1$ и все ненулевые эндоморфизмы группы G суть мономорфизмы, то всякая циклическая подгруппа X группы G (будучи проективно инвариантной) не является вполне инертной.*

Действительно, в этом случае найдется $f \in E(G)$, такой, что $nf \neq m \cdot 1_G$, где 1_G – тождественный эндоморфизм группы G. Поскольку все ненулевые эндоморфизмы группы G есть мономорфизмы, то отсюда следует, что фактор-группа $(X + f(X)) / X$ будет бесконечной.

Пример 3. *Если A – неразложимая группа и $X \le A$, то для всякой группы B со свойством* $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$ *подгруппа $H = X \oplus B$ является проективно инвариантной в $G = A \oplus B$.*

Действительно, если $G = U \oplus V$, то $B = (U \cap B) \oplus (V \cap B)$ ввиду вполне инвариантности подгруппы B, где $U \cap B = U$ или $V \cap B = V$ в силу неразложимости группы A. Поэтому, если, к примеру, $U \cap B = U$, то $H = U \oplus (V \cap H)$.

Лемма 3. *Пусть $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, π_i: $G \to G_i$ – соответствующие проекции и H_i – проективно инертные подгруппы групп G_i $i = 1,\ldots,n$. Подгруппа $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ является проективно инертной тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1,\ldots,n$ подгруппа H_i соизмерима с $H_i + \pi_i\theta(H_i) + \varphi(\oplus_{j \ne i} H_j)$ при каждой проекции θ группы G и каждом $\varphi \in$* $\mathrm{Hom}(\oplus_{j \ne i} G_j, G_i)$.

Доказательство. Необходимость. Следует из свойства 4.

Достаточность. Пусть θ – проекция группы G. Имеем $\theta = \pi_1\theta + \ldots + \pi_n\theta$. Достаточно показать, что $H \sim H + \pi_i\theta(H)$ для каждого $i = 1,\ldots,n$. Данная соизмеримость является следствием соизмеримости H_i с $H_i + \pi_i\theta(H)$. Поскольку $\pi_i\theta(H) = \pi_i\theta(H_i) + \pi_i\theta(\oplus_{j \ne i} H_j)$, где $\pi_i\theta$ действует на $\oplus_{j \ne i} H_j$ как гомоморфизм из $\mathrm{Hom}(\oplus_{j \ne i} G_j, G_i)$, то соизмеримость H_i с $H_i + \pi_i\theta(H)$ выполняется по условию.

Следствие 4. *Пусть $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, а H – такая проективно инертная подгруппа группы G, что все подгруппы $H \cap G_i$ являются вполне инертными в G_i. Тогда подгруппа H является вполне инертной в G.*

Пример 4. *Пусть X – свободная группа конечного ранга, Y – периодическая группа. Тогда X является вполне инертной, не проективно инвариантной подгруппой в группе $X \oplus Y$.*

Поскольку $\mathrm{Hom}(X, Y) \ne 0$, то подгруппа X не проективно инвариантна в $X \oplus Y$, а поскольку образ $f(X)$ конечен для всякого $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, то X является вполне инертной подгруппой.

Пример 5. *Пусть A – неразложимая редуцированная группа без кручения и X – ее свободная подгруппа конечного ранга. Тогда если B – делимая группа без кручения конечного ранга, а Y – ее существенная свободная подгруппа, то $X \oplus Y$ является проективно инертной, но не проективно инвариантной подгруппой группы $G = A \oplus B$.*

Доказательство. Подгруппа X является проективно инвариантной в A, а Y вполне инертной в B. Для всякого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ фактор-группа $(X + \varphi(Y)) / X$ конечна как конечно порожденная периодическая группа. Поэтому по свойству 4 подгруппа $X \oplus Y$ является проективно инертной в G. Пусть f: $A \to B$ – такой гомоморфизм, что $f(x) \notin Y$ для некоторого $x \in X$; поскольку B – делимая группа, то такие гомоморфизмы существуют. Если теперь π: $G \to A$ и θ: $G \to B$ – проекции, то $\theta + \theta f\pi$ также является проекцией, для которой $(\theta + \theta f\pi)(x) \notin Y$. Значит, подгруппа $X \oplus Y$ не является проективно инвариантной. Если подгруппу X выбрать не вполне инертной в A, то и подгруппа $X \oplus Y$ не будет вполне инертной в G.

Теорема 5. *Пусть $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, где $r(G_i) = 1$, – вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Каждая проективно инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG_i \ne G_i$ для всякого $i = 1,\ldots,n$ и для всякого простого числа p, причем при всех $i,j = 1,\ldots,n$ типы $t(G_i)$, $t(G_j)$ либо равны, либо несравнимы.*

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку вполне инертные подгруппы являются проективно инертными, то необходимость утверждения следует из [5, теорема 2].

Достаточность. Пусть H – проективно инертная подгруппа группы G. Согласно лемме 1 достаточно показать, что подгруппа $(H \cap G_1) \oplus \ldots \oplus (H \cap G_n)$ соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой. Поскольку $pG_i \neq G_i$ для всякого простого числа p и для всех $i = 1,..,n$, то группа $\mathrm{Hom}\,(G_i, G_j)$ либо изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$ (если тип группы G_i равен типу группы G_j), либо $\mathrm{Hom}\,(G_i, G_j) = 0$ (если тип группы G_i не сравним с типом группы G_j), поэтому для всякой подгруппы $X \subseteq G_i$ имеет место равенство $\mathrm{Hom}\,(G_i, G_j)X = fX$, где f – гомоморфизм, порождающий $\mathrm{Hom}\,(G_i, G_j)$. В частности, всякая подгруппа группы G_i является вполне инвариантной в G_i. Поскольку $\mathrm{Hom}\,(G, G_i) \cong \mathrm{Hom}\,(G_1, G_i) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}\,(G_n, G_i)$, то отсюда следует, что если $\underline{H}_i = \mathrm{Hom}\,(G, G_i)((H \cap G_1) \oplus \ldots \oplus (H \cap G_n))$, то $H \cap G_i \subseteq \underline{H}_i$ и из свойства 4 следует, что подгруппа $H \cap G_i$ соизмерима с $\underline{H}_i$. Значит, $\underline{H} = \underline{H}_1 \oplus \ldots \oplus \underline{H}_n$ соизмерима с $(H \cap G_1) \oplus \ldots \oplus (H \cap G_n)$. Подгруппы $\underline{H}_i$ вполне инвариантны в G_i и поскольку $\mathrm{Hom}\,(G_i,G_j)\underline{H}_i \subseteq \underline{H}_j$, то подгруппа $\underline{H}$ вполне инвариантна в G.

Следствие 6. 1) *Если G – однородная вполне разложимая группа конечного ранга, то всякая ее проективно инертная подгруппа соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG \neq G$ для всякого простого числа p.*

2) *В однородной вполне разложимой группе G конечного ранга проективно инертная подгруппа H соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pH = H$ для всякого простого числа p со свойством $pG = G$.*

3) *Если в делимой группе без кручения G проективно инертная подгруппа H соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой, то $H = G$.*

Доказательство. 1) и 2) Вытекают из теоремы 5. 3) Следует из 2) и из того, что в такой группе G вполне инертная подгруппа должна быть существенной в G.

Предложение 7. *Если $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$ – группа без кручения, где $n \geq 2$, $G_i \cong G_j$ при $i,j = 1,\ldots,n$, то всякая проективно инертная подгруппа H группы G является вполне инертной.*

Доказательство. Пусть $f \in E(G)$, π_i: $G \to G_i$ – проекции. Тогда $f = \pi_1 f + \ldots + \pi_n f$. Далее, если $H_i = H \cap G_i$, то достаточно показать соизмеримость H_i с $H_i + \pi_i f(H_i) + \pi_i f(\oplus_{j \neq i} H_j)$. Соизмеримость H_i с $H_i + \pi_i f(\oplus_{j \neq i} H_j)$ есть следствие леммы 3, а соизмеримость H_i с $H_i + \pi_i f(H_i)$ следует из изоморфизма прямых слагаемых G_i. Образ $\pi_i f(H_i)$ соизмерим с образом подгруппы H_j $(j \neq i)$ при некотором гомоморфизме $G_j \to G_j$.

Отметим, что в [5] изучались вполне инертные подгруппы вполне разложимых групп бесконечного ранга; в частности, там получен следующий результат.

Пример 6. *Пусть A – однородная вполне разложимая группа без кручения конечного ранга и $pA \neq A$ для всякого простого числа p, B – однородная вполне разложимая идемпотентного типа группа без кручения бесконечного ранга и $t(B) > t(A)$. Тогда в $G = A \oplus B$ всякая вполне инертная подгруппа $H \neq 0$ соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S.* Fully inert subgroups of divisible Abelian groups // J. Group Theory. 2013. V. 16. No 6. P. 915–939.
2. *Dikranjan D., Salce L., Zanardo P.* Fully inert subgroups of free Abelian groups // Period. Math. Hungar. 2014. V. 69. No 1. P. 69–78.

3. *Goldsmith B.*, *Salce L.*, *Zanardo P.* Fully inert subgroups of Abelian p-groups // J. of Algebra. 2014. V. 419. P. 332–349.
4. *Чехлов А.Р.* Вполне инертные подгруппы вполне разложимых групп конечного ранга и их соизмеримость // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2016. № 3(41). С. 42–50. doi.org/10.17223/19988621/41/4.
5. *Чехлов А.Р.* О вполне инертных подгруппах вполне разложимых групп // Матем. заметки. 2017. Т. 101. № 2. С. 302–312. doi.org/10.4213/mzm11171.
6. *Dardano U., Dikranjan D., Rinauro S.* Inertial properties in groups. // Int. J. Group Theory. 2018. V. 7. No 3. P. 17–62. doi.org/10.22108/ijgt.2017.21611.

Статья поступила 15.04.2020 г.

Chekhlov A.R., Ivanets O.V. (2020) ON PROJECTIVELY INERT SUBGROUPS OF COMPLETELY DECOMPOSABLE FINITE RANK GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 63–68

DOI 10.17223/19988621/67/6

Let a group G be a finite direct sum of torsion-free rank 1 groups G_i. It is proved that every projectively inert subgroup of G is commensurate with a fully invariant subgroup if and only if all G_i are not divisible by any prime number p, and for different subgroups G_i and G_j their types are either equal or incomparable.

Keywords: projectively inert subgroup, fully invariant subgroup, commensurable subgroups, index of the subgroup, completely decomposable group.

AMS Mathematical Subject Classification: 20K15, 20K27, 20K30.

Andrey R. CHEKHLOV (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Olesya V. IVANETS (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivanetsolessya@gmail.com

REFERENCES

1. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. (2013) Fully inert subgroups of divisible Abelian groups. *Journal of Group Theory*. 16(6). pp. 915–939. DOI: 10.1515 / jgt-2013-0014.
2. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. (2014) Fully inert subgroups of free Abelian groups. *Periodica Mathematica Hungarica*. 69(1). pp. 69–78. doi.org/10.1007/s10998-014-0041-4.
3. Goldsmith B., Salce L., Zanardo P. (2014) Fully inert subgroups of Abelian p-groups. *Journal of Algebra*. 419. pp. 332–349. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.07.021.
4. Chekhlov A.R. (2016) Fully inert subgroups of completely decomposable finite rank groups and their commensurability. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 41(3). pp. 42–50. doi.org/10.17223/19988621/41/4.
5. Chekhlov A.R. (2017) On fully inert subgroups of completely decomposable groups. Mathematical Notes. 101. pp. 365–373. doi.org/10.1134/S0001434617010394.
6. Dardano U., Dikranjan D., Rinauro S. (2018) Inertial properties in groups. *International Journal of Group Theory.* 7(3), pp. 17–62. doi.org/10.22108/ijgt.2017.21611.

Received: April 15, 2020