

**КОМБИНАТОРНЫЕ ЧИСЛА ДЛЯ ПОДСЧЁТА РАЗБИЕНИЙ
КОНЕЧНЫХ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ**

В. В. Гоцуленко

*Институт технической теплофизики НАН Украины, г. Киев, Украина***E-mail:** gosul@ukr.net

Рассматриваются комбинаторные числа для подсчёта всех разбиений произвольного конечного мультимножества как в упорядоченную, так и в неупорядоченную сумму его подмультимножеств. Найдены производящие функции для введённых комбинаторных чисел и исследованы некоторые свойства этих чисел.

Ключевые слова: разбиения мультимножества, диофантовы уравнения, производящие функции.

Введение

В классическом смысле под разбиением $[1, 2]$ произвольного множества понимают его представление в виде объединения произвольного числа попарно непересекающихся подмножеств. Всякое представление натурального числа суммой натуральных чисел также называется разбиением этого числа. Разбиения конечных множеств изучаются в комбинаторике и теории чисел.

К основным комбинаторным задачам относятся задачи подсчёта и перечисления разбиений данного типа $[1, 2]$. Разбиения конечных множеств, а также подсчёт числа различных разбиений, удовлетворяющих тем или иным условиям, представляет особый интерес в комбинаторике. В частности, некоторые комбинаторные числа естественно возникают как количества разбиений того или иного вида. Например, число Стирлинга второго рода $S(m, n)$ $[1, 2]$ представляет собой число неупорядоченных разбиений m -элементного множества на n частей. При этом мультиномиальный коэффициент $\binom{m}{k_1 k_2 \dots k_n}$ $[1-3]$ выражает число упорядоченных разбиений m -элементного множества на n частей фиксированных размеров $k_1, k_2, \dots, k_n$. Отметим, что многие комбинаторные задачи приводят к вычислению числа способов разбиения m -элементного множества на n подмножеств, среди которых допускаются и пустые подмножества. Однако в этом случае задача сводится к определению числа всех (неупорядоченных) разбиений заданного m -элементного множества на не более чем n непустых его подмножеств. Число всех неупорядоченных разбиений (без пустых подмножеств) m -элементного множества называется числом Белла B_m $[1, 2]$.

Одно из возможных обобщений приведённых выше комбинаторных конструкций связано с допущением дублирования во множествах некоторых элементов, т. е. переход к мультимножествам.

**1. Формализация комбинаторных чисел для подсчёта неупорядоченных
разбиений конечных мультимножеств**

Обозначим через $X = \{m_1 a_1, m_2 a_2, \dots, m_N a_N\}$ исходное мультимножество, которое необходимо представить в виде неупорядоченной суммы n подмультимножеств X_k ,

$k = 1, \dots, n$. Отметим также, что вектор первичной спецификации [4] каждого из подмультимножеств X_k имеет вид

$$[k_1, k_2, \dots, k_N]^T, \quad \text{где } 0 \leq k_i \leq m_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Для произвольного представления $X = \bigcup_{k=1}^n X_k$ обозначим через $x_{k_1, k_2, \dots, k_N}$ число подмультимножеств X_k с вектором первичной спецификации равным $[k_1, k_2, \dots, k_N]^T$.

Набор целых неотрицательных чисел $x_{k_1, k_2, \dots, k_N}$, как несложно проверить, является решением системы линейных диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \dots \sum_{k_N=0}^{m_N} x_{k_1, k_2, \dots, k_N} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{bmatrix}, \\ \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \dots \sum_{k_N=0}^{m_N} x_{k_1, k_2, \dots, k_N} = n. \end{cases} \quad (1)$$

Данная система содержит $(1 + m_1)(1 + m_2) \dots (1 + m_N)$ неизвестных $x_{k_1, k_2, \dots, k_N}$ и $N + 1$ уравнений.

Таким образом, задача сводится к определению числа всех целых неотрицательных решений системы уравнений (1). Обозначим данное число через $S(m_1, m_2, \dots, m_N; n)$.

Получим производящую функцию для введённых комбинаторных чисел $S(m_1, m_2, \dots, m_N; n)$. Рассмотрим для этого следующую промежуточную задачу. Обозначим через $A = (a_{ij})_{n \times m}$ произвольную матрицу с целыми неотрицательными элементами, через $b = (b_i)_n$ — произвольный вектор-столбец с целыми неотрицательными элементами. Определим число всех целых неотрицательных решений системы линейных диофантовых уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = b_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Данное число равно коэффициенту при $t_1^{b_1} t_2^{b_2} \dots t_n^{b_n}$ в разложении в степенной ряд производящей функции

$$\prod_{j=1}^m (1 - t_1^{a_{1j}} t_2^{a_{2j}} \dots t_n^{a_{nj}})^{-1}. \quad (3)$$

Для применения формулы (3) к определению числа целочисленных неотрицательных решений системы диофантовых уравнений (1) перенумеруем неизвестные $x_{k_1, k_2, \dots, k_N}$, $k_i = 0, 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, N$, с помощью одного индекса. Одно из возможных таких взаимно однозначных соответствий, как несложно проверить, задаётся следующей последовательностью рекурсивно определяемых функций:

$$\begin{aligned} \forall (0 \leq i_1 \leq m_1, 0 \leq i_2 \leq m_2, \dots, 0 \leq i_N \leq m_N) \\ f_2(i_1, i_2) &= i_1(m_2 + 1) + i_2 + 1, \\ f_3(i_1, i_2, i_3) &= f_2(i_1, i_2) + i_3 f_2(m_1, m_2), \\ &\dots \\ f_N(i_1, i_2, \dots, i_N) &= f_{N-1}(i_1, i_2, \dots, i_{N-1}) + i_N f_{N-1}(m_1, m_2, \dots, m_{N-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, задача (1) допускает представление в виде (2), если положить

$$A = (a_{ij})_{(N+1) \times f_N(m_1, m_2, \dots, m_N)}, \quad b = (b_i)_{N+1}, \quad (4)$$

где

$$\forall p \in \{0, \dots, m_1\} (a_{1k} = p), k = f_N(p, i_2, i_3, \dots, i_{N-1}, i_N), 0 \leq i_s \leq m_s, s \in \{1, \dots, N\} \setminus \{1\};$$

$$\forall p \in \{0, \dots, m_2\} (a_{2k} = p), k = f_N(i_1, p, i_3, \dots, i_{N-1}, i_N), 0 \leq i_s \leq m_s, s \in \{1, \dots, N\} \setminus \{2\};$$

...

$$\forall p \in \{0, \dots, m_N\} (a_{N,k} = p), k = f_N(i_1, i_2, \dots, i_{N-1}, p), 0 \leq i_s \leq m_s, s \in \{1, \dots, N-1\};$$

$$a_{N+1,k} = 1, k = 1, \dots, f_N(m_1, m_2, \dots, m_N);$$

$$b_k = m_k, k = 1, \dots, N; \quad b_{N+1} = n.$$

Таким образом, полагая

$$\Psi_{m_1, m_2, \dots, m_N}(t_1, t_2, \dots, t_{N+1}) = \prod_{j=1}^{f_N(m_1, m_2, \dots, m_N)} (1 - t_1^{a_{1j}} t_2^{a_{2j}} \dots t_{N+1}^{a_{N+1,j}})^{-1},$$

где элементы матрицы A определяются формулами (4), получаем, что число $S(m_1, m_2, \dots, m_N; n)$ равно коэффициенту при $t_1^{m_1} \dots t_N^{m_N} t_{N+1}^n$ в разложении функции $\Psi_{m_1, m_2, \dots, m_N}(t_1, t_2, \dots, t_{N+1})$ в степенной ряд, т. е. имеет место равенство

$$S(m_1, m_2, \dots, m_N; n) = \psi_{m_1, m_2, \dots, m_N; n}^{m_1, m_2, \dots, m_N; n},$$

где

$$\Psi_{m_1, m_2, \dots, m_N}(t_1, t_2, \dots, t_{N+1}) = \sum_{r_1, \dots, r_{N+1} \geq 0} \psi_{r_1, r_2, \dots, r_N, r_{N+1}}^{m_1, m_2, \dots, m_N; n} t_1^{r_1} t_2^{r_2} \dots t_N^{r_N} t_{N+1}^{r_{N+1}}.$$

Для введённых комбинаторных чисел справедлива формула

$$S(m_1, m_2, \dots, m_N; m) = S(m_1, m_2, \dots, m_N; n) \quad \text{для всех } m \geq n = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (5)$$

Действительно, если $n = \sum_{i=1}^N m_i$, то в этом случае лишь одно разбиение, состоящее из

одноэлементных множеств, не содержит пустых множеств. Поэтому при $n > \sum_{i=1}^N m_i$ все разбиения мультимножества $X = \{m_1 a_1, m_2 a_2, \dots, m_N a_N\}$ получаются путём добавления $n - \sum_{i=1}^N m_i$ пустых множеств в каждое разбиение при $n = \sum_{i=1}^N m_i$, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между рассматриваемыми разбиениями и, таким образом, доказывает формулу (5).

Далее рассматриваются некоторые частные случаи и примеры вычисления рассмотренных комбинаторных чисел.

Пример 1. Полагая $m_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, N$, получаем, что комбинаторное число $S(m_1, m_2, \dots, m_N; n)$ определяет число всех неупорядоченных n -элементных разбиений N -элементного множества. Поэтому при $n = N$ получаем, что $S(1, 1, \dots, 1; n) = B_n$, где B_n — число Белла.

Как частный случай формулы (5), получаем

$$S(1, 1, \dots, 1; m) = S(1, 1, \dots, 1; n) \quad \text{для всех } m \geq n, n \in \mathbb{N}.$$

В данном случае элементы матрицы (4) лежат в булеане $\{0, 1\}$ и легко вычисляются, так как рекурсивная функция $f_N(i_1, i_2, i_3, \dots, i_N)$ допускает представление в явной форме

$$f_N(i_1, i_2, i_3, \dots, i_N) = 1 + 2i_1 + i_2 + \sum_{k=3}^N 2^{k-1}i_k, \quad i_s \in \{0, 1\}, \quad s = 1, \dots, N.$$

Например, для случая $N = 3$ матрица (4) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, коэффициент при $t_1 t_2 t_3 t_4^n$ в разложении в степенной ряд производящей функции

$$\frac{(1 - t_3 t_4)^{-1} (1 - t_2 t_3 t_4)^{-1} (1 - t_1 t_3 t_4)^{-1} (1 - t_1 t_2 t_3 t_4)^{-1}}{(1 - t_4) (1 - t_2 t_4) (1 - t_1 t_4) (1 - t_1 t_2 t_4)}$$

определяет комбинаторное число

$$S(1, 1, 1; n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 2, & \text{если } n = 2, \\ 5, & \text{если } n \geq 3. \end{cases}$$

Пример 2. Предположим, что имеется m_1 предметов вида a_1 и m_2 предметов вида a_2 . Рассмотрим задачу определения числа способов разложения этих предметов по n одинаковым коробкам без каких-либо ограничений.

Таким образом, необходимо найти число способов разложения мультимножества $X = \{m_1 a_1, m_2 a_2\}$ в неупорядоченную сумму n его подмультимножеств $X = \bigcup_{k=1}^n \{X_k\}$.

В этом случае формулы (4) (при $N = 2$) приводят к следующему результату:

$$A = (a_{ij})_{3 \times (m_1+1)(m_2+1)}, \quad b = (b_i)_3,$$

где

$$\begin{aligned} \forall p \in \{0, \dots, m_1\} (a_{1k} = p) & \text{ при } p(m_2 + 1) + 1 \leq k \leq (p + 1)(m_2 + 1); \\ \forall p \in \{0, \dots, m_2\} (a_{2k} = p) & \text{ при } k = i(m_2 + 1) + p + 1, i = 0, \dots, m_1; \\ a_{3k} = 1, k = 1, \dots, (m_1 + 1)(m_2 + 1); & \quad b_1 = m_1, b_2 = m_2, b_3 = n. \end{aligned}$$

Например, если $m_1 = 1$ и $m_2 = 3$, то матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, комбинаторное число $S(1, 3; n)$ определяется как коэффициент при $t_1 t_2^3 t_3^n$ в разложении в степенной ряд производящей функции

$$\frac{(1 - t_1 t_3)^{-1} (1 - t_1 t_2 t_3)^{-1} (1 - t_1 t_2^2 t_3)^{-1} (1 - t_1 t_2^3 t_3)^{-1}}{(1 - t_3) (1 - t_2 t_3) (1 - t_2^2 t_3) (1 - t_2^3 t_3)}.$$

Элементарные подсчёты показывают, что

$$S(1, 3; n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 4, & \text{если } n = 2, \\ 6, & \text{если } n = 3, \\ 7, & \text{если } n \geq 4. \end{cases}$$

2. Формализация комбинаторных чисел для подсчёта упорядоченных разбиений конечных мультимножеств

Обозначим $\tilde{S}(m_1, m_2, \dots, m_N; n)$ число всех упорядоченных n -элементных разбиений мультимножества $X = \{m_1 a_1, m_2 a_2, \dots, m_N a_N\}$, предполагая, что допускаются повторения подмультимножеств, а также пустые подмультимножества. Зафиксируем произвольное упорядоченное разбиение $\{X_i : i = 1, \dots, n\}$ мультимножества X . Обозначим через $[k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{Ni}]$, $0 \leq k_{si} \leq m_s$, $s = 1, \dots, N$, вектор первичной спецификации подмультимножества X_i .

Тогда каждое упорядоченное разбиение мультимножества X однозначно задаётся следующей матрицей:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nn} \end{bmatrix}.$$

При этом из равенства $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$ следует, что элементы данной матрицы должны быть решениями в целых неотрицательных числах системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} = m_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Переименуем неизвестные k_{ij} одним индексом с помощью отображения $(i, j) \rightarrow (i-1)n + j$ [5] и запишем систему (6) в стандартной форме

$$\sum_{j=1}^{Nn} a_{ij} x_j = m_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i-1)n + 1 \leq j \leq in, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, Nn. \quad (7)$$

Таким образом, из соотношений (2)–(3), (7) следует, что комбинаторное число $\tilde{S}(m_1, m_2, \dots, m_N; n)$ равно коэффициенту при $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_N^{m_N}$ в разложении в степенной ряд производящей функции

$$((1-t_1)^n (1-t_2)^n \dots (1-t_N)^n)^{-1}.$$

Наконец, используя разложение

$$\frac{1}{(1-t)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-r}{k} t^k,$$

получим

$$\tilde{S}(m_1, m_2, \dots, m_N; n) = (-1)^{m_1+m_2+\dots+m_N} \binom{-n}{m_1} \binom{-n}{m_2} \dots \binom{-n}{m_N}.$$

Замечание. Отметим, что формула для подсчёта упорядоченных разбиений конечных мультимножеств может быть получена без применения формул (2)–(3). Действительно, окончательно задача сводится к определению числа всех целых неотрицательных решений системы линейных диофантовых уравнений (6). Несложно проверить, что данное число равно коэффициенту при $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_N^{m_N}$ в стандартном разложении по возрастающим степеням $t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_N^{a_N}$ производящей функции

$$\left(\frac{1}{1-t_1} \right)^n \left(\frac{1}{1-t_2} \right)^n \dots \left(\frac{1}{1-t_N} \right)^n.$$

Отсюда, воспользовавшись тождеством

$$\left(\frac{1}{1-t} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k,$$

получаем

$$\tilde{S}(m_1, m_2, \dots, m_N; n) = \binom{n+m_1-1}{m_1} \binom{n+m_2-1}{m_2} \dots \binom{n+m_N-1}{m_N}.$$

Заключение

В данной работе задача о подсчёте числа различных разбиений конечного мультимножества сведена к определению числа всех целых неотрицательных решений соответствующей системы линейных диофантовых уравнений с многоиндексной нумерацией неизвестных. Полученные соотношения (4) позволяют представить данную систему в стандартной форме (2), для которой известен явный вид производящей функции (3). Это позволило получить производящие функции для рассматриваемых комбинаторных чисел и исследовать некоторые их свойства. При этом для числа всех разбиений произвольного конечного мультимножества в упорядоченную сумму его подмультимножеств получены явные формулы.

Отметим, что для практики, безусловно, важны не только формулы (или алгоритмы) вычисления тех или иных комбинаторных чисел, но и оценки и асимптотики этих чисел [6]. Однако вопросы, связанные с эффективностью реализации вычислений с помощью полученных соотношений, требуют дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990. 400 с.
2. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2009. 384 с.
3. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 323 с.
4. *Заторский Р. А.* Подсчет m -подмультимножеств через их вторичные спецификации / под ред. К. А. Рыбникова // Комбинаторный анализ. М.: МГУ, 1986. Вып. 7. С. 136–145.
5. *Гоцуленко В. В.* Формула для числа сочетаний с повторениями при ограничениях и её применение // Прикладная дискретная математика. 2013. № 2(20). С. 71–77.
6. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.