

УДК 1(091)

К.А. Родин

ВИТГЕНШТЕЙН ПРОТИВ ГЁДЕЛЯ: ДОКАЗАННОСТЬ И ДОКАЗУЕМОСТЬ¹

Кратко обрисовывается история споров вокруг записей Л. Витгенштейна, в которых философ прямо или косвенно обсуждает Гёделеву первую теорему о неполноте; главные моменты трактовки Витгенштейном этой теоремы реконструируются в контексте некоторых «проблем» философии математики, обозначенных Витгенштейном в Заметках по основаниям математики.

Ключевые слова: теорема о неполноте, доказуемость, Витгенштейн.

0. Первая теорема Гёделя о неполноте занимала Витгенштейна 22–24 сентября 1937 г. и – еще два дня – 2–3 июля 1941 г. Тогда и были сделаны записи, опубликованные в составе «Заметок по основаниям математики» (ЗОМ) (это, соответственно, фрагменты: 1. RFM App. III, или в Nachlaß: MS 118, 105v–114r; 2. RFM §18,19,21,22, или в Nachlaß: MS 124, 87–94; в Nachlaß, кроме того, есть записи, которые, хотя и не многочисленны, однако, если пытаться вынести окончательный вердикт по делу «Витгенштейн&Гёдель», должны быть затребованы). После публикации в 1956 г. ЗОМ Георг Крайзель и Пауль Бернайс расценили указанные записи как свидетельство того, что Витгенштейн первую теорему о неполноте не понял [1. С. 153–54; 2. С. 15]. Позднее появились несколько более «дружественные» отзывы. Однако лишь в начале 2000-х дело обратило на себя пристальное внимание. Вышли в свет: «апологитическая» статья Дж. Флойд и Х. Патнема, статьи Дж. Флойда и М. Штейнера, разбор записей о Гёделе в Nachlaß В. Родича, его же критический отзыв на статью Флойда и Патнема с подробным обзором истории вопроса (соответственно [3, 4, 5, 6, 7]) (наибольшее количество откликов вызвала как раз статья Флойда и Патнема).

Известна реакция Гёделя относительно тех фрагментов записей Витгенштейна, которыми поделился с ним в личном письме Менгер (1972 г., цит. по: [8. С. 49]): «Что касается моей теоремы о неразрешимых утверждениях, то из процитированных тобой фрагментов несомненно: Витгенштейн ее не понял (или притворился что не понял). Он интерпретировал ее как вид логического парадокса, в то время как, наоборот, она представляет собой математическую теорему внутри абсолютно бесспорной части математики (теория финитных чисел или комбинаторика). Кстати, весь процитированный тобой фрагмент кажется мне бессмысленным. См., например: «суеверный страх математиков перед противоречиями». Гёдель в конце цитаты цитирует из §17

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (мероприятие 1.2.1, заявка №2012-1.2.1-12-000-3003-029), а также в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований (тематический план НИР Национального исследовательского Томского государственного университета №6.4832.2011).

приложения III ЗОМ (в русском переводе, сделанном с первого издания, это приложение из общепотребимого сейчас второго, дополненного издания 1976 г. имеет номер I (об изданиях, редакциях и переводах этой работы см. подробнее: [9])). Он, следовательно, имел дело с записями 1937 г., в которых Витгенштейн обсуждает семантическую, «необязательную» формулировку теоремы.

1. Построим формулу так, чтобы она выражала недоказуемость самой себя (вспомним известный парадокс об утверждении в рамке, утверждающем, что утверждение в рамке недоказуемо: если утверждение доказуемо, то доказуема его недоказуемость, а если утверждение недоказуемо, то оно истинно, ибо само о себе как раз и говорит, что утверждение недоказуемо; иначе: если утверждение ложно, то оно доказуемо, т.е. доказуема недоказуемость утверждения, что невозможно, следовательно, утверждение истинно). Для этого используем изложение Гёделева доказательства первой теоремы о неполноте, представленное в устной лекции проф. В.А. Успенского:

а) пронумеруем все формулы: C_1, C_2, C_3 и т.д., и все доказательства: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и т.д.;

б) рассмотрим функцию g : $g(s) = t$ тогда и только тогда, когда Γ_s есть доказательство формулы C_t ; функция g вычислима – её, следовательно, выражает некоторая формула G с параметрами x и y ; $G(s, t)$ истинна тогда и только тогда, когда доказательство с номером s является доказательством формулы с номером t ;

в) для каждого числа t формула $\exists \omega G(\omega, t)$ означает доказуемость формулы C_t и для каждого числа t формула $\neg \exists \omega G(\omega, t)$ означает недоказуемость формулы C_t ;

г) нумеруем все открытые формулы с единственным параметром x : A_1, A_2, A_3 ; $f(m, n)$ – номер формулы – закрытой – $A_m(n)$; поскольку f – вычислимая функция, её выражает некоторая формула F с параметрами x, y, z ; формула $F(m, n, p)$ истинна тогда и только тогда, когда p есть номер формулы $A_m(n)$;

д) формула $\exists u [G(e, u) \& F(m, n, u)]$ означает, что e – номер доказательства формулы $A_m(n)$, имеющей номер $f(m, n)$;

е) формула $\neg \exists \omega \exists u [G(\omega, u) \& F(m, n, u)]$ означает недоказуемость формулы $A_m(n)$, имеющей номер $f(m, n)$; для каждого числа n формула $\neg \exists \omega \exists u [G(\omega, u) \& F(n, n, u)]$ означает недоказуемость формулы $A_n(n)$, имеющей номер $f(n, n)$;

ж) рассмотрим формулу с единственным параметром x : $\neg \exists \omega \exists u [G(\omega, u) \& F(x, x, u)]$ – эта формула есть A_q при некотором q .

з) формула $A_q(q)$, т.е. формула $\neg \exists \omega \exists u [G(\omega, u) \& F(q, q, u)]$, имеет номер $f(q, q)$;

и) однако, согласно пункту е) формула та же, что в пункте з), $\neg \exists \omega \exists u [G(\omega, u) \& F(q, q, u)]$ означает недоказуемость формулы с номером $f(q, q)$. Сравним пункты з) и и).

Построена такая формула, что она утверждает собственную недоказуемость. Формула истинна на интуитивном уровне, и/но недоказуема. Построим формулу, чтобы невозможно было доказать ни её саму, ни её отрицания:

а) пусть $\gamma(C)$ – гёделевский номер формулы C , а $\Gamma(C)$ – гёделевский номер доказательства формулы, и пусть предикат $\text{Док}(y, x)$ утверждает, что y является гёделевским номером доказательства формулы s с гёделевским номером x (мы опускаем рассмотрение способа нумерации);

б) рассмотрим функцию $s(z) = \gamma(\Pi_{\gamma}^z \gamma^{-1}(z))$, которая вычисляет гёделевский номер формулы, полученной в результате подстановки в формулу $\gamma^{-1}(z)$ (эта запись означает, что мы по номеру восстанавливаем формулу) вместо z – x и введем предикат $G(x) = \forall y \neg \text{Док}(y, s(x))$;

в) пусть $q = \gamma(G(x))$; лемма: $s(q) = \gamma(G(q))$ $\{s(q) = \gamma(\Pi_{\gamma}^q \gamma^{-1}(q)) = \gamma(\Pi_{\gamma}^q \gamma(G(x))) = \gamma(G(q))\}$;

г) $G(q)$ – есть искомая формула; если $G(q)$ доказуемо, тогда есть некое доказательство с номером $m = \Gamma(G(q))$, следовательно: $\text{Док}(m, \gamma(G(q))) = \text{Док}(m, s(q)) = \exists y \text{Док}(y, s(q))$, однако $G(q) = \forall y \neg \text{Док}(y, s(q))$;

д) если же $G(q)$ недоказуемо, то доказуемо отрицание $G(q)$ (мы исходим из того, что система непротиворечива), то есть $\neg \forall y \neg \text{Док}(y, s(q)) = \exists y \text{Док}(y, s(q))$, опять противоречие, следовательно, формулу $G(q)$ нельзя ни доказать, ни опровергнуть (мы использовали материалы устной лекции проф. А.Б. Со-синского).

В первом и втором вышепредставленных способах доказательства число выступает в разных «интерпретациях»: как обычное число и как номер, кодирующий формулу. Своего рода постановка (Витгенштейн говорит: фокусы). Актер, который в жизни является одним человеком, на сцене играет роль другого. Эта метафора принадлежит Я. Хинтикки. У него же представлена наиболее короткая иллюстрация существа теоремы. Имеется лемма («diagonal lemma»), согласно которой для любой формулы $F(x)$ из элементарной теории чисел с единственной переменной x существует число n , которое является гёделевским номером формулы $F(n)$. Рассмотрим формулу $\sim \text{Prov}(x)$, где x обозначает гёделевский номер формулы. Возьмем число q , чтобы оно было гёделевским номером формулы $\sim \text{Prov}(q)$ (по лемме). Получаем формулу, которая говорит, что формула с гёделевским номером q недоказуема и которая сама же и есть эта формула [10. С. 31–33].

2. Обозначим буквой P формулу, которая выражает собственную недоказуемость. Очевидно, что среди приведенных доказательств не обнаруживается ни самореферентности, ни оправдания для семантической трактовки, при которой P объявлялась бы истинной, но недоказуемой. Кажется, Витгенштейн не обратил на это внимания: «Я представляю себе, что кто-то просит моего совета, он говорит: “Я сконструировал предложение в расселовских символах (обозначу его как P). С помощью определенных дефиниций и преобразований его можно истолковать так, что утверждается: “ P недоказуемо в расселовской системе”. Разве я не должен сказать об этом предложении: оно и истинно, и недоказуемо. Ведь допустив его ложность, мы получили бы, что оно доказуемо! А ведь этого не может быть. Будь же оно доказуемым, дока-

зуемым было бы и то, что оно недоказуемо. Стало быть, оно может быть лишь истинным, но не доказуемым» [11. С. 54].

Стало быть, прав Гёдель, и Витгенштейн не понял доказательства теоремы? Витгенштейн, скорее всего, доказательства не читал (кроме того, смысл выражения «понимать формальное доказательство» неясен: если я его воспроизвожу, разве это означает, что я его понимаю; если я его не воспроизвожу, то я его всего лишь не воспроизвожу). Математика как таковая не интересовала Витгенштейна (об отношении философии и математики см., например: ФИ, §124). Витгенштейн тем не менее должен был бы принять невозможность формализации математики посредством рекурсивной аксиоматической системы: в §46 III раздела ЗОМ сказано, что математика есть «пестрая смесь техник доказательства», что отсылает к понятию «семейного сходства», которое предполагает несводимость математики к общей системе. Почему Витгенштейн не заинтересовался доказательством и продолжил интерпретировать теорему семантически и рассматривать ее на манер самореферентной конструкции (отметим, что Гёдель (см. подробнее в работе [5. С. 263]) в статье о неразрешимости в *Principia Mathematica* от 1967 г. сам сравнивает теорему с парадоксом лжеца и делает из неё семантические выводы), хотя и не во всех соответствующих записях? Ответ кажется простым: в заметках о Гёделе Витгенштейн интересуется совсем не самореферентность/ несамореферентность P (после доказательства ничто не мешает нам рассматривать P как самореферентную конструкцию – в том смысле, что воспроизводится некая аналогичная структура). Кроме того, из записи от 1 января 1939 г. [MS 121 83v] видно, что Витгенштейн понимает не-рефлексивный характер формулы P , и нет оснований считать, что в 1937 г. он этого еще не понимал.

3. Дж. Флойд в своей работе ссылается на Р. Гудстейна: «Не думаю, что Витгенштейн слышал об открытии Гёделя ранее 1935 года; после того, как он узнал о нём, его немедленная реакция, которая, по-моему, несомненно демонстрирует поразительное понимание, была в том, чтобы обратить внимание на тот факт, что формализации арифметики с помощью математической индукции и замены чисел переменными недостаточно для того, чтобы фиксировать понятие натурального числа. Потому что если в некоторой системе A все предложения $G(n)$, где n – натуральное число, доказуемы, но общее предложение $(\forall n)G(n)$ – недоказуемо, то должна быть такая интерпретация A , в которой n принимает такие значения, которые отличны от натуральных чисел и для которых $G(n)$ – ложно (независимо от работы Гёделя это в 1934 году показал Сколем)» [12. С. 279].

Витгенштейн так прямо не высказывался. Он, по нашему мнению, действительно мог независимо прийти к тому, о чем говорит Гудстейн в приведенной цитате, однако вряд ли рассматривал бы результат существования определенной интерпретации системы A , связанный с теоремой Гёделя, как нечто существенное для своей философии. Замечание Гудстейна (это, само собой, видно и из доказательств) позволяет провести аналогию с диагональю Кантора, которая в ЗОМ тоже рассматривается. Мы имеем ряд (удлиняемый до бесконечности) десятичных дробей и мы всегда можем написать десятичную дробь, которой в ряду еще нет. Мы выводим формулы-теоремы из аксиом и правил вывода, и, следовательно, они доказуемы, но всегда возможно напи-

сать такую «неложную» формулу Р, которая окажется недоказуемой (окончательно вынесем за скобки вопрос о том, понимал ли Витгенштейн теорему Гёделя и каким образом). Критика Витгенштейном сомнительной интерпретации диагонального метода проста. Зададимся вопросом: уместно ли говорить, что при обучении ребенка умножению его обучают и тому, что умножение возможно? Или: мы учим ребенка располагать в ряд некоторые предметы. Это своего рода техника, которая одновременно исключает не предусмотренные в ней ходы (так, например, в технике вычисления дробей выражение «наиближайшая по величине дробь» не имеет смысла) и сама в то же время не всегда может быть применена. Уместно ли говорить о предметах, множество которых исчислимо? Предположим, что диагональная процедура была известна до Кантора и использовалась для получения числа, отличного от данных. Непонятно, почему на основании этой техники-процедуры уместно говорить, что множество действительных чисел несчетно. Или: иррациональные числа не могут быть упорядочены, следовательно, нет системы иррациональных чисел, однако «нет и Сверх-Системы, нет множества иррациональных чисел с бесконечностью высшего порядка». «Из того, что у нас есть то или иное применение для некоего типа числительного, словно бы задающего число членов того или иного бесконечного ряда, не следует, что уместно также говорить о числе применительно к понятию «бесконечного ряда», как будто тут мы располагаем неким применением чего-то, сходного с числительным. И нет никакой грамматической техники применения такого выражения. Ибо я, конечно, могу составить выражение: «Класс всех классов, которые имеют числовое равенство с классом «бесконечная последовательность», так же как и выражение: «Класс всех ангелов, которые помещаются на острие иглы», но это выражение пусто, пока для него нет применения» [10. С. 64–65]. Логика размышлений действительно простая. Умножение применимо в повседневной жизни, тогда как высказывание о возможности умножения – нет. Точно так же мы применяем некоторый тип числительного для обозначения числа членов того или иного бесконечного ряда, но мы не употребляем числительное по отношению к бесконечной последовательности в качестве числительного как такового. То есть мы употребляем якобы число для обозначения членов бесконечной последовательности, но это не означает, что о нем уместно говорить как об «обычном» числе и оперировать с ним, как с «обычными» числами. Или, говорит Витгенштейн: если слово «бесконечно» придает исчислению значение вместо того, чтобы получать значение от исчисления, то его следует избегать.

Теперь процитируем из §17 III дополнения ЗОМ:

А как предположить, что Р доказано? С помощью доказательства недоказуемости? Или каким-то другим образом? Предположи, что с помощью доказательства недоказуемости. Затем, чтобы понять, что доказано, обрати внимание на доказательство! Может быть, здесь доказано, что такая-то форма доказательства не ведет к Р. – Или пусть Р доказано, так сказать, неким непосредственным образом, – тогда из этого следует предложение «Р недоказуемо», и теперь надо выяснить, как эта интерпретация символов Р сталкивается с фактом доказательства и почему от нее следует здесь отказаться.

Предположим, однако, что доказано не-Р. – Как доказано? Например, тем, что Р доказано непосредственным образом, – ибо из этого следует, что оно доказуемо, то есть что оно есть не Р. Что же я должен теперь высказывать: «Р» или «не-Р»? Почему не оба предложения? Если кто-нибудь спросит меня: «Что в данном случае верно – Р или не-Р?» – то я отвечу: Р стоит в конце расселовского доказательства, так что в системе Рассела ты пишешь Р; однако, с другой стороны, это как раз доказуемо, и это выражается через «не-Р», но это предложение не стоит в конце расселовского доказательства, то есть не относится к системе Рассела. – Когда для Р была дана интерпретация «Р недоказуемо», то еще было неизвестно это доказательство для Р, и поэтому нельзя сказать, что Р утверждает: *это* доказательство не существует. – Как только выстроено доказательство, тем самым создана *новая ситуация*: и теперь надо решать, будем ли мы называть *это* доказательством (*еще одним* доказательством) или же утверждением о недоказуемости [10. С. 57].

Витгенштейн различает между доказанностью и доказуемостью. Различие аналогично различию между процедурой умножения и возможностью умножения или между обозначением числа членов бесконечной последовательности некоторым «числительным» и произвольным псевдоупотреблением этого «числительного» наряду с «обычными» числительными. Обобщая, можно сказать, что подобные различия служат для воспроизводства некоторой элементарной феноменологии. Что же говорит Витгенштейн в §17? Ранее Витгенштейн отмечает, что только доказательство может служить критерием того, по праву ли нечто называется высказыванием «Х недоказуемо», и весь вопрос в том, является ли «доказательство недоказуемости Р» убедительным основанием для предположения, что доказательство Р не будет найдено (можно пользоваться формулой Р из приведенных доказательств, но удобнее взять следующее: «Р: Р недоказуемо»). Если Р не доказано, то неясно, что должно служить критерием его истинности, «и его смысл, можно сказать, еще скрыт». Если доказано Р, то тем самым доказано и не-Р. Однако если Р доказано, то это есть некоторый факт, т.е. Р прямо сейчас выведено (примерно так же мы можем сказать, что когда мы прибавляем к 2 единицу и получаем три, то непосредственно производим счет), но тогда «не-Р», оно выражает то, что мы только что доказали, не является прямо доказанным (оно не стоит в конце расселовского доказательства), и от него, как от интерпретации, следует отказаться. С другой стороны, Р не может утверждать, что то доказательство, которое мы якобы непосредственно получили, не существует, потому что Р было сформулировано до всякого «доказано» из предположения о «доказуемости». Какое отношение это имеет к доказательству теоремы Гёделя? Никакого.

4. Можно сказать, теорема Гёделя, согласно Витгенштейну, обладает «двойкой бесполезностью». Первую – математическую – «бесполезность» (она как раз и обсуждалась в предыдущем разделе) лучше всего резюмировать словами самого Витгенштейна: «Ты говоришь: “... следовательно, Р истинно и недоказуемо”. Это, вероятно, означает: “Итак, Р”. Пожалуй, я не возражаю, но с какой целью ты записываешь данное “утверждение”? (Оно равносильно тому, как если бы кто-нибудь, опираясь на известные принципы, касающиеся природных форм и архитектурного стиля, вывел из них утвер-

ждение, что на горе Эверест, где никто не может жить, должно стоять не-большое шале в стиле барокко.) И как бы ты смог объяснить мне истинность утверждения, если сам не можешь использовать его для чего-нибудь иного, кроме как для этих маленьких фокусов?» [10. С. 58]

«Вторая бесполезность» теоремы связана, так сказать, с пропедевтикой различных околофилософских и теологических спекуляций, с последующим избавлением от них. Спекуляции же связаны с поиском или уверенностью в существовании истин, недоступных разуму и пр. и т.д. На выходе они чаще всего дают «платонизм», и, хотя непосредственно теорема в этом не виновата, Гёдель был несколько заинтересован в подобного рода поиске. Приведем исчерпывающую характеристику Дж. Флойд: «Гёдель читает Лейбница и Гуссерля, чтобы лучше понять такие основные идеи, как реальность, истина, объект, концепт, число, тогда как Витгенштейн спрашивает, обладаем ли мы каким-либо способом ясного выражения или представления этих основных идей. Гёдель пытается конструировать логико-математический смысл различных философских направлений: логицизма, формализма, финитизма и интуиционизма, тогда как Витгенштейн настроен скептически относительно обоснованности (coherence) какой-либо теории, говорящей о математике в целом. Гёдель проявляет интерес к рациональной теологии. Витгенштейн, определенно из-за признания религии, относится с презрением к философским попыткам рационализации оснований религии и этической жизни, точно так же он отвергает проекты, которые ставят своей целью рационализацию оснований математики» [4. С. 288].

В заключение еще раз отметим, что Витгенштейн никогда не обсуждал первую теорему Гёделя о неполноте по существу. Его целью – кажется, он оказался успешен в ее достижении – было пропустить эту теорему, пройти мимо.

Литература

1. Kreisel G. Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics // British Journal for the Philosophy of Science, 1958. №9. P. 135–137.
2. Bernays P. Comments on Ludwig Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics // Ratio. 1959. Vol. II. №1. P. 1–22.
3. Floyd J., Putnam H. A Note on Wittgenstein's "Notorious Paragraph" about the Gödel Theorem // The Journal of Philosophy, 2000. Vol. 97, №11. P. 624–632.
4. Floyd J. Prose versus Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth // Philosophia Mathematica. 2001. Vol. 9. №3. P. 280–307.
5. Steiner M. Wittgenstein as his Own Worst Enemy: The Case of Gödel's Theorem // Philosophia Mathematica. 2001. Vol. 9, №3. P. 257–279.
6. Rodych V. Wittgenstein on Gödel: The Newly Published Remarks // Erkenntnis. 2002. Vol. 56, №3. P. 379–397.
7. Rodych V. Misunderstanding Gödel: New Arguments about Wittgenstein and New Remarks by Wittgenstein // Dialectica. 2003. Vol. 57, №3. P. 279–313.
8. Wang H. Reflections on Kurt Gödel. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1987.
9. Суровцев В.А., Ладов В.А. О VI разделе «Заметок по основаниям математики» Л. Витгенштейна (предисловие к русскому переводу) // Эпистемология и философия науки, 2007. Т. 12, №2. С. 216–219.
10. Hintikka J. On Gödel. – Boston: Wadsworth/Thomson Learning, Inc, 2000.
11. Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики // Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. II. М.: Гнозис, 1994.
12. Goodstein R.L. Wittgenstein's philosophy of mathematics // Ludwig Wittgenstein: Philosophy and Language. London: Allen&Unwin, 1972. P. 271–286.