

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2016

№ 5(43)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменичкин, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Igor A. Aleksandrov, Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Жалнина А.А. Влияние формы области на решение задачи об обтекании препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей	5
Жамбаа С., Касаткина Т.В., Бубенчиков А.М. Об определении констант в интеграле Кристоффеля – Шварца по методу П.П. Куфарева	21
Мищарина Е.Ю., Либин Э.Е., Бубенчиков М.А. О решении нестационарного уравнения Шредингера	28

МЕХАНИКА

Биматов В.И., Савкина Н.В., Фарапонов В.В. Сверхзвуковое обтекание и аэродинамические характеристики острого конуса для различных моделей турбулентной вязкости	35
Брагунцов Е.Я., Внучков Д.А., Галкин В.М., Иванов И.В., Звегинцев В.И. Испытания кольцевого сверхзвукового воздухозаборника изоэнтропического сжатия в аэродинамической трубе	43
Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Дунаевский Г.Е., Евсеев И.А., Киселева О.С., Кутенков В.О., Найманбаев Ф.Ж. Теория инерционного датчика измерения плотности нефтегазожидкостной смеси	53
Гамзаев Х.М., Гадимов И.К. Численное исследование течения вязкой жидкости в зазоре между двумя параллельными плоскими стенками	64
Покровский В.Г. Структурная оптимизация и декомпозиция конструкций электронной аппаратуры на основе эволюционных дискретных моделей	73
Тузov Ю.В. К вопросу о вязкости разрушения бериллия	83
Худаяров Б.А., Тураев Ф. Численное моделирование нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью	90
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	99

CONTENTS

MATHEMATICS

Zhalnina A.A. Domain shape influence on the solution of the problem about the flow of a mixture of compressible viscous fluids around an obstacle	5
Jambaa S., Kasatkina T.V., Bubenchikov A.M. On the determination of constants in the Schwarz – Christoffel integral by P.P. Kufarev's method	21
Mishcharina E.Yu., Libin E.E., Bubenchikov M.A. On the solution of the non-stationary Schrödinger equation	28

MECHANICS

Bimatov V. I., Savkina N. V., Faraponov V. V. Supersonic flow over a sharp cone and its aerodynamic characteristics for different models of turbulent viscosity	35
Braguntsov E.Ya., Vnuchkov D.A., Galkin V.M., Ivanov I.V., Zvegintsev V.I. Test of the annular supersonic air inlet with isentropic compression in the wind tunnel	43
Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Dunaevskiy G.E., Evseev I.A., Kiseleva O.S., Kutenkov V.O., Naymanbaev F.Zh. Theory of the inertial density-measuring sensor for the oil – liquid – gas mixture	53
Gamzaev Kh.M., Gadimov I.K. Numerical investigation of a viscous fluid flow through the gap between two parallel plates	64
Pokrovskiy V.G. Structural optimization and decomposition of electronic equipment constructions on the basis of evolutionary discrete models	73
Tuzov Yu.V. The issue of fracture toughness of beryllium	83
Khudayarov B. A., Turaev F. Numerical simulation of nonlinear oscillations of a viscoelastic pipeline with fluid	90
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	99

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

DOI 10.17223/19988621/433/1

А.А. Жалнина

**ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ОБЛАСТИ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
ОБ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЯ ПОТОКОМ
СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ**

Изучается зависимость решения неоднородной краевой задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений составного типа, моделирующей обтекание компактного препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей. Полученные результаты могут служить основой для исследования свойств функционалов от этих решений (например, функционала сопротивления), в частности для вычисления производной по области от функционала и последующего построения численного алгоритма поиска оптимальной формы тела, обтекаемого потоком смеси.

Ключевые слова: *смесь вязких сжимаемых жидкостей, обтекание препятствия, неоднородная краевая задача, сопряженная задача.*

Авторами [1] построено сильное обобщенное решение неоднородной краевой задачи, моделирующей обтекание препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей. Настоящая статья посвящается исследованию зависимости решения данной краевой задачи от формы области течения. Эти результаты имеют важное значение для анализа свойств функционалов (скажем, функционала сопротивления) от решений краевой задачи и, следовательно, для решения задачи оптимизации формы области течения.

Постановка задачи заключается в следующем. Область течения смеси вязких сжимаемых жидкостей представляет собой область $\Omega = B \setminus S$ евклидова пространства \mathbb{R}^3 точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, внешнюю по отношению к обтекаемому препятствию S (которое предполагается компактным множеством) и ограниченную замкнутой поверхностью Σ . Пусть $x \mapsto \vec{T}(x)$ обозначает векторное поле класса $C^2(\mathbb{R}^3)$, равное нулю в окрестности границы Σ . Определим отображение $x \mapsto y = \vec{T}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \vec{T}(x)$, задающее возмущение формы обтекаемого препятствия S . Для малых ε отображение $x \mapsto \vec{T}_\varepsilon(x)$ является диффеоморфизмом области течения Ω на область $\Omega_\varepsilon = B \setminus S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = \vec{T}_\varepsilon(S)$ – возмущенное обтекаемое препятствие.

Стационарное движение в области Ω_ε смеси вязких сжимаемых жидкостей описывается следующими уравнениями [2]:

$$\sum_{j=1}^2 L_{ij}(\vec{u}_\varepsilon^{(j)}) + \operatorname{Re} \rho_{i\varepsilon} (\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla) \vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} \nabla p_{i\varepsilon}(\rho_{i\varepsilon}) + \vec{J}^{(i)} = 0 \text{ на } \Omega_\varepsilon, i=1,2, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\rho_{i\varepsilon} \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, i=1,2, \quad (2)$$

где $\vec{u}_\varepsilon^{(1)}$, $\vec{u}_\varepsilon^{(2)}$ обозначают поля скоростей компонент смеси; $\rho_{1\varepsilon}$, $\rho_{2\varepsilon}$ – функции плотностей компонент, а соответствующие давления $p_{i\varepsilon} = p_{i\varepsilon}(\rho_{i\varepsilon})$, $i=1,2$, предполагаются известными достаточно гладкими функциями своей плотности; через Re и Ma обозначены числа Рейнольдса и Маха соответственно; L_{ij} , $i, j=1,2$, обозначают дифференциальные операторы второго порядка

$$L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) = -\mu_{ij} \Delta \vec{u}^{(j)} - (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \nabla \operatorname{div} \vec{u}^{(j)}, i, j=1,2,$$

причем постоянные (безразмерные) коэффициенты вязкости μ_{ij} , λ_{ij} удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \mu_{11} > 0, \quad 4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0, \quad \lambda_{11} + 2\mu_{11} > 0, \\ 4(\lambda_{11} + 2\mu_{11})(\lambda_{22} + 2\mu_{22}) - (\lambda_{12} + 2\mu_{12} + \lambda_{21} + 2\mu_{21})^2 > 0. \end{aligned}$$

Слагаемые $\vec{J}^{(i)} = (-1)^{(i)} a(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)})$, $a = \operatorname{const} > 0$, $i=1,2$, характеризуют интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси [3, 4]. Уравнения (1) и (2) отражают соответственно законы сохранения импульсов и массы компонент смеси.

Для постановки граничных условий используем заданные векторные поля $\vec{U}^{(j)}$, $j=1,2$, класса $C^3(\mathbb{R}^3)$, обращающиеся в нуль в окрестности множества S . С помощью вектор-функций $\vec{U}^{(j)}$ на границе Σ области B выделим участки «втекания»:

$$\Sigma_{\text{in}}^j = \{x \in \Sigma : \vec{U}^{(j)} \vec{n} < 0\}, j=1,2,$$

и участки «вытекания» (см. рис. 1):

$$\Sigma_{\text{out}}^j = \{x \in \Sigma : \vec{U}^{(j)} \vec{n} > 0\}, j=1,2.$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

Условие 1. Множества $\Gamma^j = cI \Sigma_{\text{in}}^j \cap (\Sigma \setminus \Sigma_{\text{in}}^j)$, $j=1,2$, («характеристические» части поверхности) представляют собой замкнутые одномерные многообразия, такие, что $\Sigma = \Sigma_{\text{in}}^j \cup \Gamma^j \cup \Sigma_{\text{out}}^j$ и, кроме того,

$$\int_{\Sigma} \vec{U}^{(j)} \vec{n} ds = 0, j=1,2; \quad \vec{U}^{(j)} \nabla (\vec{U}^{(j)} \vec{n}) > C > 0 \text{ на } \Gamma^j, j=1,2,$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная.

К уравнениям (1), (2) присоединим граничные условия

$$\vec{u}_\varepsilon^{(j)} = \vec{U}^{(j)} \text{ на } \Sigma, \quad \vec{u}_\varepsilon^{(j)} = 0 \text{ на } \partial S_\varepsilon, \quad \rho_{j\varepsilon} = \rho_{j\varepsilon}^0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^j, j=1,2, \quad (3)$$

где $\rho_{j\varepsilon}^0$, $j=1,2$, – заданные положительные постоянные.

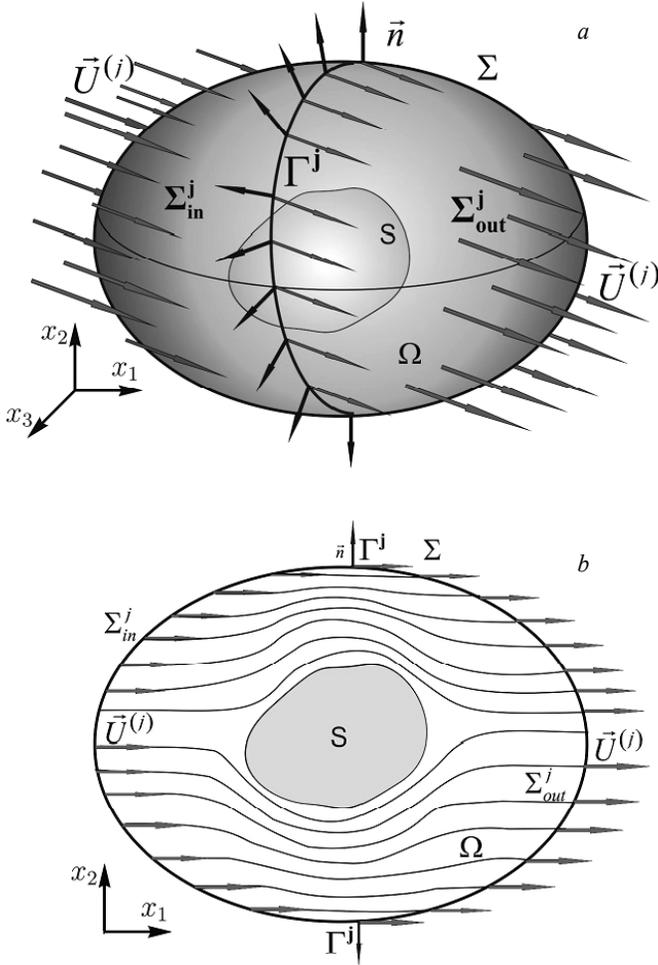


Рис. 1. Схемы обтекания препятствия j -й компонентой смеси:
 а – трехмерный поток; б – плоское сечение

Fig. 1. Schemes of a flow around an obstacle j th component of the mixture: a) a three-dimensional flow; b) plane section

Сила сопротивления набегающему потоку со стороны препятствия S_ε выражается посредством формулы

$$J_D(S_\varepsilon) = -\vec{U}^\infty \sum_{i=1}^2 \int_{\partial S_\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)} + (\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)})^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} I \right] - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2} p_i(\rho_\varepsilon) I \right) \cdot \vec{n} ds, \quad (4)$$

где \vec{U}^∞ – постоянный вектор, имитирующий скорость потока на «бесконечности». Проблема минимизации этого функционала означает решение задачи выбора оптимальной формы обтекаемого препятствия.

Задачу (1) – (3) удобно свести к краевой задаче в невозмущенной области Ω для однопараметрического семейства дифференциальных уравнений с возмущен-

ными коэффициентами. С этой целью вводятся функции $\bar{u}^{(i)}$ и $\rho_i, i = 1, 2$, определенные в Ω согласно формулам:

$$\bar{u}^{(i)}(x) = N(x)\bar{u}_\varepsilon^{(i)}(x + \varepsilon\bar{T}(x)), \rho_i(x) = \rho_{i\varepsilon}(x + \varepsilon\bar{T}(x)), x \in \Omega, i = 1, 2,$$

где $N(x) = (\det M(x))M^{-1}(x)$, $M(x) = I + \varepsilon D\bar{T}(x)$, $D\bar{T}(x) = \left\{ \frac{\partial T_i(x)}{\partial x_j} \right\}$ – матрица

Якоби отображения $x \mapsto \bar{T}(x)$.

В результате такого преобразования задача (1) – (3) трансформируется в задачу

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \bar{u}^{(j)} - \nabla q_i &= \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}(\bar{u}^{(j)}; N) + \text{Re} \mathcal{B}(\rho_i, \bar{u}^{(i)}, \bar{u}^{(i)}; N) + (-1)^i \mathcal{S}(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}; N) \text{ в } \Omega, \\ \text{div } \bar{u}^{(i)} &= \sum_{j=1}^2 g \sigma_{ij} p_j - \sum_{j=1}^2 g \gamma_{ij} q_j \text{ в } \Omega, \\ \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i + \rho_i \sum_{j=1}^2 g \sigma_{ij} p_j &= \rho_i \sum_{j=1}^2 g \gamma_{ij} q_j \text{ в } \Omega, \\ \bar{u}^{(i)} &= \bar{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \bar{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S, \rho_i = \rho_i^0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^i, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $g = g(x; N) = \sqrt{\det N(x)}$; линейные операторы \mathcal{A} , \mathcal{B} и нелинейное отображение \mathcal{S} определены по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\bar{u}; N) &= \Delta \bar{u} - (N^T)^{-1} \text{div} (g^{-1} N N^T \nabla (N^{-1} \bar{u})), \\ \mathcal{B}(\rho, \bar{u}, \bar{w}; N) &= \rho (N^T)^{-1} (\bar{u} \nabla (N^{-1} \bar{w})), \\ \mathcal{S}(\bar{u}; N) &= g \cdot a (N^T)^{-1} N^{-1} \bar{u}; \end{aligned}$$

$q_i = -\sum_{j=1}^2 g^{-1} (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \text{div } \bar{u}^{(j)} + \frac{\text{Re}}{\text{Ma}^2} p_i(\rho_i), i = 1, 2$, – эффективные вязкие давления;

γ_{ij} – элементы матрицы \varkappa^{-1} , обратной к матрице \varkappa , элементы которой есть

$$\mu_{ij} + \lambda_{ij}, i, j = 1, 2; \sigma_{ij} = \frac{\text{Re}}{\text{Ma}^2} \gamma_{ij}.$$

Решение задачи (5) строится в виде возмущения специальным образом выбранного достаточно гладкого течения $\bar{u}_*^{(i)}, \rho_i^*, q_i^{(*)}$, т. е.

$$\bar{u}^{(i)} = \bar{u}_*^{(i)} + \bar{v}^{(i)}, \rho_i = \rho_i^* + \varphi_i, q_i = q_i^* + \pi_i + \Lambda \cdot p_i(\rho_i^*) + \sum_{j=1}^2 (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) m_j,$$

где $\rho_i^* = \rho_i^0 = \text{const}$, $\Lambda = \frac{\text{Re}}{\text{Ma}^2}$, m_j – постоянные, служащие инструментом кон-

троля масс компонентов смеси в области Ω . В итоге основным объектом исследования становится задача для возмущений [1]:

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \bar{v}^{(j)} - \nabla \pi_i = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} A(\bar{u}^{(j)}; N) + \operatorname{Re} \mathcal{B}(\rho_i, \bar{u}^{(i)}, \bar{u}^{(i)}; N) + (-1)^i \mathcal{S}(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}; N) \text{ в } \Omega,$$

$$\operatorname{div} \bar{v}^{(i)} = g \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_i^*} \tau_{ij} \varphi_j - g \Phi_i[\bar{\theta}] - g m_i \text{ в } \Omega, \quad (6)$$

$$\bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i + \tau_{ii} \varphi_i = \Psi_i[\bar{\theta}] + g m_i \rho_i \text{ в } \Omega,$$

$$\bar{v}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial \Omega, \quad \varphi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^i, \quad \Pi \pi_i = \pi_i \left(\Pi q = q - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q dx \right), i = 1, 2;$$

$$\bar{m} = (m_1, m_2)^T, \quad \bar{m} = (kI - A)^{-1} \bar{f}, \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad \bar{f} = (f_1, f_2)^T,$$

$$k = \int_{\Omega} g dx, \quad a_{ij} = \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} g \rho_j \zeta_i^{(j)} dx, \quad f_i = \frac{1}{\rho_i^*} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 \zeta_i^{(j)} \Psi_j[\bar{\theta}] - g \Phi_i[\bar{\theta}] \right) dx;$$

$$-\operatorname{div}(\bar{u}^{(i)} \cdot \zeta_j^{(i)}) + \tau_{ii} \cdot \zeta_j^{(i)} = \tau_{ji} g \text{ в } \Omega, \quad \zeta_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{out}}^{(i)}, i, j = 1, 2.$$

Здесь постоянные параметры τ_{ij} связаны известным образом с коэффициентами вязкости μ_{ij}, λ_{ij} и заданными граничными значениями ρ_i^0 ; $\Phi_i[\bar{\theta}], \Psi_i[\bar{\theta}]$ – известные функции компонент вектора $\bar{\theta} = (\bar{v}^{(1)}, \bar{v}^{(2)}; \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2)$, выражения которых приведены в [1], где также доказана теорема существования

Теорема 1. Пусть поверхность Σ и векторные поля $\bar{U}^{(1)}, \bar{U}^{(2)}$ удовлетворяют условию 1. Тогда найдутся такие числа $\sigma^* > 1$ и $\tau^* \in (0, 1)$, что если матрица N выбрана из условия $\|I - N\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2, \tau \in (0, \tau^*], p_j(\rho_j) \in C^3(0, \infty), j = 1, 2$, а пара-

метры задачи таковы, что $\frac{1}{\Lambda} \leq \tau^2, \operatorname{Re} \leq \tau^2, a \leq \tau^2, |\tau_{12}| \leq \tau, |\tau_{21}| \leq \tau, \tau_{ii} \geq \sigma^*, i = 1, 2, \tau \in (0, \tau^*]$, то задача (6) имеет решение $\bar{\theta} = (\bar{v}^{(1)}, \bar{v}^{(2)}; \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2)$, $m_i, \zeta_i^{(j)}, i, j = 1, 2$, такое, что $\bar{\theta} \in V^{s,r} \times X^{s,r}, m_i \in \mathbb{R}, \zeta_i^{(j)} \in X^{s,r}$, где показатели $s \in (0, 1), r \in (1, \infty)$ удовлетворяют условиям $s \cdot r > 3, 2s - \frac{3}{r} < 1$. При этом вектор $\bar{\theta}$ принадлежит шару B_{τ} радиуса τ с центром в нуле пространства $V^{s,r} \times X^{s,r}$.

Здесь $V^{s,r}, X^{s,r}$ обозначают пространства

$$X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega), \quad V^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega),$$

причем $W^{l,p}(\Omega)$ (l – целое неотрицательное число, $1 \leq p < \infty$) – стандартное пространство С.Л. Соболева [5], состоящее из измеримых в Ω функций, имеющих обобщенные производные в Ω до порядка l включительно, суммируемые со степенью p . Для вещественных $s \in (0, 1), r \in (1, \infty)$ функциональное пространство $W^{s,r}(\Omega)$ получается методом вещественной интерполяции [6] между $L^r(\Omega)$ и $W^{1,r}(\Omega)$ и состоит из измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} = \|u\|_{L^r(\Omega)} + |u|_{s,r,\Omega}, |u|_{s,r,\Omega} = \int_{\Omega \times \Omega} |x-y|^{-3} \left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s} \right)^r dx dy.$$

В общем случае пространство $W^{l+s,r}(\Omega)$, $0 < s < 1$, $1 \leq r < \infty$, $l \geq 0$ – целое число, определяется как пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{l+s,r}(\Omega)} = \|u\|_{W^{l,r}(\Omega)} + \sup_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|_{W^{s,r}(\Omega)}.$$

Через $W_0^{s,r}(\Omega)$, $0 \leq s \leq 1$ обозначается замкнутое подпространство $W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, состоящее из всех функций $u \in W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, обращающихся в нуль вне области Ω . Для $0 < s < 1$, $1 < r < \infty$ обозначим через $\mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$ интерполяционное пространство $[W_0^{0,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega)]_{s,r}$ с нормой, определенной методом вещественной интерполяции.

Пусть $0 \leq s \leq 1$, $1 < r < \infty$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Через $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ обозначим замыкание $L^r(\Omega)$ относительно нормы:

$$\|v\|_{\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)} = \sup_{u \in \mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)} \left| \int_{\Omega} u \cdot v dx \right|.$$

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)} = 1$$

Как известно [7], пространство $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ для $0 < s < 1$, $1 < r < \infty$ топологически и алгебраически изоморфно банахову пространству $(\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega))'$, сопряженному $\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)$, и может быть отождествлено с ним.

Для любых $0 \leq s \leq 1$, $1 < r < \infty$ банахово пространство $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ представляет собой замыкание $L^r(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)} = \|\mathcal{L}_v\|_{(W^{s,r}(\Omega))'},$$

где $\mathcal{L}_v(u) = \langle v, u \rangle = \int_{\Omega} v(x) \cdot u(x) dx$ – непрерывный функционал на пространстве $W^{s,r'}(\Omega)$, непрерывно вложенном в $L^{r'}(\Omega)$. Известно [7], что если Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей класса C^1 , то $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ алгебраически и топологически изоморфно двойственному пространству $(W^{s,r'}(\Omega))'$ и может быть отождествлено с ним. Введем, кроме того, функциональные пространства

$$\mathcal{U}^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{V}^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \times W^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R},$$

$$\mathcal{Z}^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \cap L^2(\Omega),$$

$$\mathcal{E}^{s,r} = \mathcal{Z}^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^{s,r} = \mathcal{V}^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R},$$

Принадлежность векторной величины \vec{F} прямому произведению пространств $W_1 \times W_2 \times W_3$ следует понимать в том смысле, что \vec{F} составлен из трех компонентов (векторных или скалярных), разделенных точкой с запятой $\vec{F} = (F_1; F_2; F_3)$ и при этом $F_1 \in W_1, F_2 \in W_2, F_3 \in W_3$. Если $W_1 = W_2 = W_3 = W$, то пишем $\vec{F} \in W$ и компоненты вектора разделяем запятой.

Зависимость решений от формы области

Важнейшим этапом исследования задачи оптимизации формы является доказательство единственности решения задачи (6) и дифференцируемости ее решения относительно параметра ε . Для этого прежде всего необходимо исследовать зависимость этих решений от матрицы N , полностью определяемой деформацией области течения. На данном этапе структура матрицы N не имеет значения и поэтому полученные ниже результаты справедливы для произвольной гладкой матричнозначной функции $N(x), x \in \Omega$.

1. Задача для разностей. Для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$,

$$\vec{q}_i = (\bar{v}_i^{(1)}, \bar{v}_i^{(2)}; \pi_1^i, \pi_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i, \zeta_{1i}^{(1)}, \zeta_{2i}^{(1)}, \zeta_{1i}^{(2)}, \zeta_{2i}^{(2)}; m_1^i, m_2^i), \quad i = 0, 1,$$

решений задачи (6), полученных в соответствии с теоремой 1 и соответствующих различным матрицам N_0 и N_1 , введем обозначения

$$\bar{w}^{(j)} = \bar{v}_0^{(j)} - \bar{v}_1^{(j)}, \quad \omega_j = \pi_j^0 - \pi_j^1, \quad \psi_j = \varphi_j^0 - \varphi_j^1, \quad n_j = m_j^0 - m_j^1, \quad \xi_j^{(k)} = \zeta_{j0}^{(k)} - \zeta_{j1}^{(k)}, \quad k, j = 1, 2. \quad (7)$$

Из (6) следует, что вектор-функция

$$\vec{q}_0 - \vec{q}_1 = (\bar{w}^{(1)}, \bar{w}^{(2)}; \omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}; n_1, n_2)$$

является решением следующей линейной задачи:

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \Delta \bar{w}^{(j)} - \nabla \omega_i = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \mathcal{A}_0(\bar{w}^{(j)}) + \text{Re } \mathcal{L}(\psi_i, \bar{w}^{(i)}) + \mathcal{D}_i + (-1)^i (\mathcal{E} + \mathcal{S}_0(\bar{w}^{(2)} - \bar{w}^{(1)})) \quad (8)$$

$$\text{div } \bar{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \omega_j + \gamma_i n_i + \delta_i d; \quad (9)$$

$$\bar{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i = -\bar{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^2 \hat{\beta}_{ij} \omega_j + \hat{\gamma}_i n_i + \hat{\delta}_i d \text{ в } \Omega; \quad (10)$$

$$-\text{div}(\bar{u}_0^{(i)} \xi_j^{(i)}) + \tau_{ii} \xi_j^{(i)} = \text{div}(\bar{w}^{(i)} \zeta_{j1}^{(i)}) + \tau_{ji} d \text{ в } \Omega, \quad (11)$$

$$\bar{w}^{(i)} = 0 \text{ на } \Omega, \quad \psi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^i, \quad \omega_i = \Pi \omega_i, \quad \xi_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{out}}^i; \quad (12)$$

$$n_i = \sum_{k=1}^2 \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k d + \sum_{j=1}^2 (\tilde{\alpha}_{kj} \psi_j + \tilde{\beta}_{kj} \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj} \xi_j^{(k)}) \right] dx, \quad i, j = 1, 2. \quad (13)$$

В записи данных уравнений используются обозначения:

$$A_k(\bar{w}) = \mathcal{A}(\bar{w}; N_k), \quad B_k(\rho, \bar{u}, \bar{w}) = \mathcal{B}(\rho, \bar{u}, \bar{w}; N_k), \quad \mathcal{S}_k(\bar{w}) = \mathcal{S}(\bar{w}; N_k), \quad k = 0, 1,$$

$$\mathcal{L}(\psi_i, \bar{w}^{(i)}) = \mathcal{B}_0(\psi_i, \bar{u}_0^{(i)}, \bar{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1, \bar{w}^{(i)}, \bar{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1, \bar{u}_1^{(i)}, \bar{w}^{(i)}),$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_0(\bar{u}_1^{(2)} - \bar{u}_1^{(1)}) - \mathcal{S}_1(\bar{u}_1^{(2)} - \bar{u}_1^{(1)}),$$

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \left(\mathcal{A}_0(\bar{u}_1^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\bar{u}_1^{(j)}) \right) + \operatorname{Re} \left(\mathcal{B}_0(\rho_i^1, \bar{u}_1^{(i)}, \bar{u}_1^{(i)}) - \mathcal{B}_1(\rho_i^1, \bar{u}_1^{(i)}, \bar{u}_1^{(i)}) \right),$$

$$d = g_0 - g_1, \quad g_k = \sqrt{\det N_k}.$$

Символы χ_{ik}^0 обозначают элементы матрицы $(k(N_0)I - A(N_0, \bar{\theta}_0))^{-1}$. Коэффициенты $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i, \delta_i, \hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}, \hat{\gamma}_i, \hat{\delta}_i, \tilde{\alpha}_{ij}, \tilde{\beta}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\delta}_i, i, j = 1, 2$, в правых частях уравнений (9), (10) и (13) зависят от решений \bar{q}_0 и \bar{q}_1 и рассматриваются как известные функции. Выражения для этих коэффициентов весьма громоздки, в силу чего здесь не приводятся. Мы укажем лишь оценки для них, которые потребуются в дальнейшем. Именно, при выполнении условий теоремы 1 справедливы неравенства

$$\left\{ \|\alpha_{ij}\|_{X^{s,r}}, i \neq j, \|\beta_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\delta_i\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\alpha}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\beta}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\delta}_i\|_{X^{s,r}} \right\} \leq c\tau,$$

$$\left\{ \|\tilde{\alpha}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\beta}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\gamma}_{ij}\|_{X^{s,r}}, \|\tilde{\delta}_i\|_{X^{s,r}} \right\} \leq c\tau, \quad (14)$$

$$\left\{ \|\alpha_{ii}\|_{X^{s,r}}, \|\gamma_i\|_{X^{s,r}}, \|\hat{\gamma}_i\|_{X^{s,r}} \right\} \leq c, \quad i, j = 1, 2,$$

где параметр τ обозначает радиус шара в пространстве $V^{s,r} \times X^{s,r}$, которому принадлежат решения $\bar{\theta}_0$ и $\bar{\theta}_1$. Через c обозначена постоянная, зависящая только от области Ω , векторных полей $\bar{U}^{(1)}, \bar{U}^{(2)}$, и параметров $r, s, \tau_{11}, \tau_{22}$. В дальнейшем зависимость той или иной постоянной от $\Omega, \bar{U}^{(1)}, \bar{U}^{(2)}, \tau_{11}, \tau_{22}$ будем коротко называть зависимостью от данных задачи.

2. Сопряженная задача. Задача (8) – (13) для разности $\bar{q}_0 - \bar{q}_1$ имеет ту особенность, что к уравнениям (10), входящим в состав этой задачи, неприменимы известные результаты [7] о транспортных уравнениях, в силу того, что слагаемое $\bar{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1$ не удовлетворяет нужным условиям гладкости (не является ни гладким ни ограниченным). Однако из теоремы существования вытекает принадлежность слагаемых $\bar{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1$ пространству $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, и поэтому возникает возможность трактовать разность $\bar{q}_0 - \bar{q}_1$ как очень слабое решение задачи (8) – (13). В связи с этим сформулируем сопряженную задачу следующим образом.

Для заданных векторных полей $\vec{H}^{(i)}$, скалярных полей G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} и констант $s_i, i = 1, 2$ найти векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$, скалярные поля $\omega_i^*, \psi_i^*, \xi_i^{(j)*}$ и константы $n_i^*, i, j = 1, 2$, такие, что

$$\sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \left(\Delta \bar{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^* - \mathcal{A}_0(\bar{w}_*^{(j)}) \right) - \operatorname{Re} \mathcal{H}_i(\bar{w}_*^{(i)}) + (-1)^{i+1} \mathcal{S}_0(\bar{w}_*^{(2)} - \bar{w}_*^{(1)}) + \psi_i^* \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} = \bar{H}^{(i)} \text{ в } \Omega; \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \bar{w}_*^{(i)} = \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^*) \right] + \Pi G_i \text{ в } \Omega; \quad (16)$$

$$-\operatorname{div}(\psi_i^* \bar{u}_0^{(i)}) + \tau_{ii} \psi_i^* = \operatorname{Re} \mathcal{M}_i(\bar{w}_*^{(i)}) + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji} + \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^*) \right] + F_i \text{ в } \Omega; \quad (17)$$

$$\bar{u}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ij} \xi_j^{(i)*} = \tilde{\gamma}_{ij} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 + M_{ji} \text{ в } \Omega; \quad (18)$$

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx + s_i; \quad (19)$$

$$\bar{w}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{out}}^i, \quad \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^i, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, \quad i, j = 1, 2. \quad (20)$$

Здесь линейные операторы \mathcal{H}_i и \mathcal{M}_i определены формулами

$$\mathcal{H}_i(\bar{h}) = \rho_i^1 \nabla (N_0^{-1} \bar{u}_0^{(i)}) N_0^{-1} \bar{h} - (N_0^T)^{-1} \operatorname{div}(\rho_i^1 \bar{u}_1^{(i)} \otimes (N_0^{-1} \bar{h})),$$

$$\mathcal{M}_i(\bar{h}) = (\bar{u}_0^{(i)} \nabla (N_0^{-1} \bar{u}_0^{(i)})) \cdot N_0^{-1} \bar{h}, \quad i = 1, 2.$$

Дальнейшее содержание этого раздела посвящается доказательству существования и единственности сильных и слабых решений сопряженной задачи (15) – (20). Эти результаты позволяют вывести оценки норм разностей $\bar{w}^{(i)}$, ω_i , ψ_i , $\xi_i^{(j)}$ и n_i .

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно параметры s, r таковы, что $\frac{1}{2} < s < 1$, $(1-s)r > 3$. Тогда найдутся числа c, σ_c и τ_c , зависящие от данных задачи и параметров s, r , такие, что если $\min\{\tau_{11}, \tau_{22}\} > \sigma_c$ и $0 < \tau \leq \tau_c$, то для каждой вектор-функции $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\bar{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i) \in \mathcal{U}^{s,r}$, задача (15) – (20) имеет единственное решение $\bar{h} = (\bar{h}^{(1)}, \bar{h}^{(2)})$, $\bar{h}^{(i)} = (\bar{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*) \in \mathcal{V}^{s,r}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\bar{h}\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{\mathcal{E}^{s,r}}. \quad (21)$$

Если наложить более ограничительное условие на правую часть \vec{f} , а именно $\vec{f} \in \mathcal{E}^{s,r}$, то решение \bar{h} принадлежит классу $\mathcal{F}^{s,r}$ и при этом имеет место неравенство

$$\|\bar{h}\|_{\mathcal{F}^{s,r}} \leq c \|\vec{f}\|_{\mathcal{E}^{s,r}}. \quad (22)$$

Схема доказательства теоремы 2. Уравнения (15) – (19) сопряженной задачи представим в символическом виде:

$$A[\bar{h}_*] - B[\bar{h}_*] = \bar{F}, \quad \bar{h}_* = (\bar{h}_*^{(1)}, \bar{h}_*^{(2)}), \quad \bar{h}_*^{(i)} = (\bar{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*)$$

где интегро-дифференциальные операторы A и B определяются посредством формул

$$A[\bar{h}_*] = (A_1[\bar{h}_*], A_2[\bar{h}_*]),$$

$$A_i[\bar{h}_*] = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \bar{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) + \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} \\ \operatorname{div} \bar{w}_*^{(i)} \\ -\operatorname{div}(\psi_i^* \bar{u}_0^{(i)}) + \tau_{ii} \psi_i^* - \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^* \\ \bar{u}_0^{(i)} \nabla \xi_1^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_1^{(i)*} \\ \bar{u}_0^{(i)} \nabla \xi_2^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_2^{(i)*} \\ n_i^* - \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx \end{array} \right\},$$

$$B[\bar{h}_*] = (B_1[\bar{h}_*], B_2[\bar{h}_*]),$$

$$B_i[\bar{h}_*] = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \mathcal{A}_0(\bar{w}_*^{(j)}) + \operatorname{Re} \mathcal{H}_i(\bar{w}_*^{(i)}) + (-1)^i \mathcal{S}_0(\bar{w}_*^{(2)} - \bar{w}_*^{(1)}) - \psi_i^* \cdot \nabla \phi_i^1 \\ \Pi \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\beta}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\beta}_{ji} + \mu_{kj} \beta_{ji} \omega_k^*) \right] \\ \operatorname{Re} \mathcal{M}_i(\bar{w}_*^{(i)}) + \sum_{k=1}^2 \left[\hat{\alpha}_{ki} \psi_k^* + \sum_{j=1}^2 (n_k^* \chi_{kj}^0 \tilde{\alpha}_{ji} + \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^*) \right] \\ \tilde{\gamma}_{i1} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 \\ \tilde{\gamma}_{i2} \sum_{k=1}^2 n_k^* \chi_{ki}^0 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу, присоединяя к системе уравнений

$$A[\bar{h}_*] = \bar{F} \quad (24)$$

граничные условия

$$\bar{w}_*^{(j)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{out}}^i, \quad \xi_1^{(i)*} = 0, \quad \xi_2^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^i, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что для каждой правой части $\bar{F} = (\bar{F}^{(1)}, \bar{F}^{(2)})$, $\bar{F}^{(i)} = (\bar{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i)$ из пространства $\mathcal{U}^{s,r}$ краевая задача (24), (25) распадается на несколько независимых линейных граничных задач, а именно, функции $\xi_j^{(i)*}$, $i, j = 1, 2$, определяются независимо как решения следующей задачи для

транспортного уравнения

$$\bar{u}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} = M_{ji} \text{ в } \Omega, \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i, j = 1, 2.$$

После этого компоненты $\bar{w}_*^{(i)}, \omega_i^*$, $i = 1, 2$, находятся как решения задач типа Стокса, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} (\Delta \bar{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) &= \bar{H}^{(i)} - \sum_{j=1}^2 \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{w}_*^{(i)} &= \Pi G_i \text{ в } \Omega, \\ \bar{w}_*^{(i)} &= 0 \text{ на } \partial\Omega, \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Следующий шаг – определение компонент ψ_i^* как решения краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\psi_i^* \bar{u}_0^{(i)}) + \tau_{ii} \psi_i^* = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^* + F_i \text{ в } \Omega, \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^i, i = 1, 2.$$

Завершает процедуру построения решения задачи (24), (25) нахождение постоянных n_i^* по формулам

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^2 \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx + s_i, i = 1, 2.$$

На основании известных результатов о транспортных уравнениях и линейной задаче типа Стокса [1, 7] можем утверждать существование таких констант c и σ_c , зависящих от данных задачи Ω , $\bar{U}^{(1)}, \bar{U}^{(2)}$ и параметров r, s , что если $\min\{\tau_{11}, \tau_{22}\} \geq \sigma_c$, то задача (24), (25) однозначно разрешима в пространствах $\mathcal{V}^{s,r}$ и справедливо неравенство

$$\|\bar{h}_*\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \leq c \|\bar{F}\|_{\mathcal{U}^{s,r}}. \tag{26}$$

Сказанное выше мы трактуем в виде существования (обратного) ограниченного линейного оператора $A^{-1} : \mathcal{U}^{s,r} \rightarrow \mathcal{V}^{s,r}$, сопоставляющего элементу $\bar{F} \in \mathcal{U}^{s,r}$ единственное решение $\bar{h}_* = A^{-1}[\bar{F}]$ краевой задачи (24), (25).

Обратимся теперь к интегрально-дифференциальному оператору B , заданному формулами (23), и отметим следующие его свойства.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $\frac{1}{2} < s < 1$, $(1-s)r > 3$. Тогда B – ограниченный линейный оператор из $\mathcal{V}^{s,r}$ в $\mathcal{U}^{s,r}$ и из $\mathcal{F}^{s,r}$ в $\mathcal{E}^{s,r}$, и при этом выполняются неравенства

$$\|B\bar{h}\|_{\mathcal{U}^{s,r}} \leq c \cdot \tau \|\bar{h}\|_{\mathcal{V}^{s,r}}; \tag{27}$$

$$\|B\bar{h}\|_{\mathcal{E}^{s,r}} \leq c \cdot \tau \|\bar{h}\|_{\mathcal{F}^{s,r}}. \tag{28}$$

Здесь постоянная c зависит только от Ω , векторных полей $\bar{U}^{(1)}, \bar{U}^{(2)}$ и параметров r, s .

Сейчас мы можем завершить доказательство существования и единственности решения сопряженной задачи.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Сопряженная задача (15) – (20) может быть записана в виде операторного уравнения

$$(I - A^{-1}B)\vec{h} = A^{-1}\vec{f}.$$

В силу (26), (27) линейные операторы $A^{-1} : \mathcal{U}^{s,r} \rightarrow \mathcal{V}^{s,r}$ и $A^{-1}B : \mathcal{V}^{s,r} \rightarrow \mathcal{V}^{s,r}$ ограничены, причем

$$\|A^{-1}B\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})} \leq c_V \cdot \tau, \quad (29)$$

где постоянная c_V зависит только от данных задачи и параметров r, s . На основании условий теоремы 1 параметр τ удовлетворяет условиям $0 < \tau \leq \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22})$. Выберем постоянную τ_c так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \tau_c \leq \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22}), \quad \tau_c \cdot c_V \leq q < 1.$$

Из (29) следует, что для $\tau \in (0; \tau_c]$ норма $\|A^{-1}B\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})}$ отделена от единицы и на основании известной теоремы оператор $(I - A^{-1}B)^{-1}$ существует и ограничен

$$\|(I - A^{-1}B)^{-1}\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})} \leq \frac{1}{1-q}.$$

Таким образом, для указанных значений τ и любых $\vec{f} \in \mathcal{U}^{s,r}$ сопряженная задача (15) – (20) имеет единственное решение $\vec{h} \in \mathcal{V}^{s,r}$, и для него имеет место неравенство (21).

Пусть теперь правая часть \vec{f} задачи (15) – (20) принадлежит пространству $\mathcal{E}^{s,r}$. Так как оператор A^{-1} решения задачи (24), (25) является ограниченным линейным оператором, действующим из $\mathcal{E}^{s,r}$ в $\mathcal{F}^{s,r}$, то в силу оценок (26), (28) имеем

$$\|A^{-1}B\|_{L(\mathcal{F}^{s,r})} \leq c_F \cdot \tau.$$

Если параметр τ подчинен условию $\tau \in (0; \tau_c]$, где

$$0 < \tau_c \leq \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22}), \quad \tau_c \cdot c_F \leq q < 1,$$

то подобно предыдущему случаю получаем, что при условии $\vec{f} \in \mathcal{E}^{s,r}$ решение \vec{h} задачи (15) – (20) принадлежит классу $\mathcal{F}^{s,r}$ и справедлива оценка (22). Теорема 2 доказана.

3. Оценки разностей. Для $s \in (0, 1)$, $r \in (1, \infty)$ обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ соотношение двойственности между парами пространств $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $\mathcal{W}^{s,r}(\Omega)$ соответственно.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда векторные поля $\vec{w}^{(j)}$, $j=1,2$, скалярные поля ω_j , Ψ_j , $\xi_j^{(i)}$, $i,j=1,2$, и постоянные n_j , $j=1,2$, , определенные по формулам (7) принадлежат соответственно пространствам $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$, $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, \mathbb{R} и удовлетворяют тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left[\langle \vec{H}^{(i)}, \vec{w}^{(i)} \rangle_1 + \langle \omega_i, G_i \rangle_0 + \langle \Psi_i, F_i \rangle_0 + \langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \rangle_0 + \langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \rangle_0 + n_i s_i \right] = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[\vec{w}_*^{(i)} (\mathcal{D}_i + (-1)^i \mathcal{E}) + d \left(\hat{\delta}_i \Psi_i^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j + \mu_{ij} \delta_j \omega_i^*) \right) \right] dx, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i)$, $i=1,2$, – произвольные функции из $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times \mathcal{W}^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, а $(\vec{w}_*^{(i)}; \omega_i^*, \Psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}; n_i^*)$, $i=1,2$, – соответствующее решение сопряженной задачи (15) – (20).

Доказательство. Поскольку множество $L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$ содержится в $\mathcal{R}^{s,r}$ и плотно в $\mathcal{U}^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times \mathcal{W}^{s,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, то для любого элемента $\vec{f} = (\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)} = (\vec{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i)$ из пространства $\mathcal{U}^{s,r}$ найдется последовательность $\vec{f}_n = (\vec{f}_n^{(1)}, \vec{f}_n^{(2)})$, $\vec{f}_n^{(i)} = (\vec{H}_n^{(i)}; G_{in}, F_{in}, M_{1in}, M_{2in}; s_{in})$, $\vec{f}_n^{(i)} \in L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, такая, что

$$\vec{f}_n \rightarrow \vec{f} \text{ в } \mathcal{U}^{s,r}, n \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Поэтому докажем тождество (30) сначала для вектор-функции \vec{f} из пространства $L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$. В этом случае соответствующее решение $(\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*, \Psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}, n_i^*)$, $i=1,2$, сопряженной задачи (15) – (20) принадлежит классу $V^{s,r} \times X^{s,r} \times \mathbb{R} = \mathcal{F}^{s,r}$ (в частности, это означает, что векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$ обладают непрерывными производными первого порядка и производными второго порядка, суммируемыми с квадратом, и скалярные функции $\omega_i^*, \Psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}$ непрерывны и обладают производными первого порядка, суммируемыми с квадратом). В силу теоремы 1 можем утверждать, что $\vec{w}^{(i)}, \vec{v}_k^{(i)}, \vec{u}_k^{(i)} \in V^{s,r}$, $\omega_i, \Psi_i, \xi_j^{(i)}, \rho_i^k, \pi_i^k, \phi_i^k, \zeta_{jk}^{(i)} \in X^{s,r}$, $i, j=1,2$, $k=0,1$. Непрерывность вложений $V^{s,r}$ в $C^1(\Omega)$ обеспечивает непрерывную дифференцируемость в Ω векторных полей $\vec{w}^{(i)}, \vec{v}_k^{(i)}, \vec{u}_k^{(i)}$ и, разумеется, принадлежность их $W^{2,2}(\Omega)$. Непрерывность вложения $X^{s,r}$ в $C(\Omega)$ влечет непрерывность скалярных функций $\omega_i, \Psi_i, \xi_j^{(i)}$, $\rho_i^k, \pi_i^k, \phi_i^k, \zeta_{jk}^{(i)}$, принадлежащих также пространствам $W^{1,2}(\Omega)$. Отсюда следует, что уравнения (8) – (11), (13) выполнены в сильном смысле. Умножая эти уравнения соответственно на решение $\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*, \Psi_i^*, \xi_1^{(i)*}, \xi_2^{(i)*}, n_i^*$, $i=1,2$, сопряженной задачи (15) – (20), соответствующее элементу $\vec{f} \in L^r(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, и интегрируя по частям, приходим к тождеству

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} \left(\bar{w}^{(i)} \bar{H}^{(i)} + \omega_i G_i + \psi_i F_i + \xi_1^{(i)} M_{1i} + \xi_2^{(i)} M_{2i} \right) dx + n_i s_i \right] = \\
& = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[\bar{w}_*^{(i)} (\mathcal{D}_i + (-1)^i \mathcal{E}^{s,r}) + d \left(\hat{\delta}_i \psi_i^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_j^{(i)*} + n_i^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j + \mu_{ij} \delta_j \omega_i^*) \right) \right] dx. \quad (32)
\end{aligned}$$

Заметим, что вектор-функции $(\bar{H}^{(i)}; \omega_i, \psi_i, \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$ и $(\bar{w}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i})$ принадлежат двойственным пространствам $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, и $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega) \times \mathcal{W}^{s,r}(\Omega)$, соответственно. Действительно, $\bar{H}^{(i)} \in \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ поскольку $\bar{H}^{(i)} \in L^r(\Omega)$ и имеет место ограниченное вложение $L^r(\Omega)$ в $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$. Скалярные поля $\omega_i, \psi_i, \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$ есть элементы $\mathcal{W}^{s,r}(\Omega)$, а в силу вложений $\mathcal{W}^{s,r}(\Omega) \subset L^r(\Omega) \subset \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$ ($r > 3$, $1 < r' = \frac{r}{r-1} < r$) получаем, что эти функции принадлежат $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$.

Далее, векторное поле $\bar{w}^{(i)} \in V^{s,r}$ и, следовательно, $\bar{w}^{(i)} \in C^1(\Omega)$. Кроме того $\bar{w}^{(i)}$ принимает нулевое значение на $\partial\Omega$. Таким образом, ясно, что $\bar{w}^{(i)} \in W_0^{1,r'}(\Omega)$. Так как $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ – интерполяционное пространство $[L^r(\Omega), W_0^{1,r'}(\Omega)]_{1-s,r'}$ и $W_0^{1,r'}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, то $W_0^{1,r'}(\Omega) \subset \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$. Итак, имеет место включение $\bar{w}^{(i)} \in \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$. С другой стороны, элементы G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i} принадлежат, очевидно, $\mathcal{W}^{s,r}(\Omega)$. В силу вышесказанного, интегралы в левой части тождества (32) могут быть записаны в терминах форм двойственности и, таким образом, тождество (30) леммы 2 доказано для вектор-функций $(\bar{H}^{(i)}; G_i, F_i, M_{1i}, M_{2i}; s_i)$ из более узкого функционального пространства $L^r(\Omega) \times \mathcal{W}^{1,r}(\Omega) \times \mathbb{R}$, т.е. имеем право написать

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left\{ \langle \bar{H}_n^{(i)}, \bar{w}^{(i)} \rangle_1 + \langle \omega_i, G_{in} \rangle_0 + \langle \psi_i, F_{in} \rangle_0 + \langle \xi_1^{(i)}, M_{1in} \rangle_0 + \langle \xi_2^{(i)}, M_{2in} \rangle_0 + n_i s_{in} \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ \bar{w}_n^{(i)} (\mathcal{D}_i + (-1)^i \mathcal{E}) + d \left(\hat{\delta}_i \psi_{in}^* + \sum_{j=1}^2 (\tau_{ji} \xi_{jn}^{(i)*} + n_{in}^* \chi_{ij}^0 \tilde{\delta}_j + \mu_{ij} \delta_j \omega_{in}^*) \right) \right\} dx, \quad (33)
\end{aligned}$$

где $\bar{h}_n^{(i)} = (\bar{w}_n^{(i)*}; \omega_{in}^*, \psi_{in}^*, \xi_{1n}^{(i)*}, \xi_{2n}^{(i)*}; n_{in}^*)$, $i=1,2$, – решение задачи (15) – (20), соответствующее «правой части» $\bar{f}_n^{(i)}$, $i=1,2$. Из (31) в силу теоремы 2 имеем, что

$$\bar{h}_n = (\bar{h}_n^{(1)}, \bar{h}_n^{(2)}) \rightarrow \bar{h} = (\bar{h}^{(1)}, \bar{h}^{(2)}) \text{ в } \mathcal{V}^{s,r}, n \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Совершая в (33) предельный переход при $n \rightarrow \infty$, получаем в силу (31) и (34) заявленное в лемме 2 тождество (30). Лемма 2 доказана.

Доказанное в лемме 2 тождество (30) означает, что разность $\bar{q}_0 - \bar{q}_1$ является очень слабым решением линейной задачи (8) – (13).

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^2 \left(\|\bar{w}^{(i)}\|_{W_0^{1-s,r'}} + \|\psi_i\|_{W^{-s,r'}} + \|\omega_i\|_{W^{-s,r'}} + \|\xi_1^{(i)}\|_{W^{-s,r'}} + \|\xi_2^{(i)}\|_{W^{-s,r'}} + |n_i| \right) \leq c \left(\|d\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_1\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)} \right), \quad (35)$$

где постоянная c зависит от данных задачи и параметров r, s .

Доказательство. Обращаясь к тождеству (30), заметим, что поскольку коэффициенты $\hat{\delta}_i, \tilde{\delta}_i, \delta_i$ ограничены по модулю константой, зависящей только от данных задачи и r, s (см. (14)), то правая часть этого тождества может быть оценена величиной

$$\sum_{i=1}^2 \left(\|\bar{w}_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\psi_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\omega_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\xi_1^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + \|\xi_2^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + |n_i^*| \right) \times \left(\|d\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_1\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)} \right) \cdot c. \quad (36)$$

Кроме того, в силу теоремы вложения и оценки (21) имеем

$$\sum_{i=1}^2 \left(\|\bar{w}_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\psi_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\omega_i^*\|_{C(\Omega)} + \|\xi_1^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + \|\xi_2^{(i)*}\|_{C(\Omega)} + |n_i^*| \right) \leq c \|\bar{h}\|_{V^{s,r}} \leq c \|\bar{f}\|_{U^{s,r}} \quad (37)$$

Из (36) и (37) получим

$$\left| \sum_{i=1}^2 \left\{ \langle \bar{H}^{(i)}, \bar{w}^{(i)} \rangle_1 + \langle \omega_i, G_i \rangle_0 + \langle \psi_i, F_i \rangle_0 + \langle \xi_1^{(i)}, M_{1i} \rangle_0 + \langle \xi_2^{(i)}, M_{2i} \rangle_0 + n_i s_i \right\} \right| \leq c \sum_{i=1}^2 \left(\|d\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{D}_i\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)} \right) \|\bar{f}\|_{U^{s,r}} \quad (38)$$

Из неравенства (38), очевидно, следует оценка (35). Лемма 3 доказана.

Из неравенства (35) вытекает, во-первых, единственность решения задачи (6). Кроме того, из (35) следует, что отображение, сопоставляющее матричнозначной функции N решение \bar{q} неоднородной краевой задачи (6) является Липшицевым в слабой норме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жалнина А.А., Кучер Н.А. О корректности неоднородной краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18. № 3. С. 26–39. DOI 10.17377/sibjim.2015.18.303.
2. Rajagopal K.R., Tao L. Mechanics of mixtures. Singapore: World Sci., 1995.
3. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Сер. гидромеханика. 1972. Т. 6. С. 93–174.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
6. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
7. Plotnikov P., Sokolowski J. Compressible Navier-Stokes equations: Theory and shape optimization. Basel: Springer, 2012. DOI 10.1007/978-3-0348-0367-0.

Zhalnina A.A. (2016) DOMAIN SHAPE INFLUENCE ON THE SOLUTION OF THE PROBLEM ABOUT THE FLOW OF A MIXTURE OF COMPRESSIBLE VISCOUS FLUIDS AROUND AN OBSTACLE *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 5–20

DOI 10.17223/19988621/433/1

In this paper, it is studied how the solution of the boundary value problem for the motion equations of a mixture of compressible viscous fluids depends on the shape of the domain. Such a problem arises in connection with the problem of searching for the optimum shape of the obstacle which is flown around by a stream of the mixture. The solution is reduced to studying the dependence of solutions of a nonlinear system of compound-type partial differential equations on the matrix setting the deformation of the domain. Properties of coefficients of the linear system obtained for a difference of two possible solutions (corresponding to two different matrices) allow one to construct only its very weak solutions. Therefore, there appears the necessity to consider the conjugate problem and to construct its solutions (weak and strong ones). The basic results of the work are estimations allowing one to assert that the mapping associating the solution of the abovementioned boundary value problem to the matrix is a Lipschitz mapping. In particular, this implies the uniqueness of the solution of the inhomogeneous boundary value problem for the initial system of equations. On the basis of the obtained results, differentiability of the functional reflecting the drag force of the streamlined obstacle can be established, as well as an explicit formula representing the derivative of the functional.

Keywords: mixture of viscous compressible fluids, flow around an obstacle, inhomogeneous boundary value problem, transposed problem.

ZHALNINA Alexandra Anatolevna (Kemerovo State University, Kemerovo, Russia)

E-mail: qwert1776@yandex.ru

REFERENCES

1. Zhalnina A.A., Kucher N.A. (2015) On the Well-Posedness of an Inhomogeneous Boundary Value Problem for the Equations of Mixtures of Viscous Compressible Fluids. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 9(4). pp. 598–610. DOI 10.17377/sibjim.2015.18.303.
2. Rajagopal K.R., Tao L. (1995) *Mechanics of Mixtures*. Singapore: World Sci. Publ.
3. Kraiko A.N., Nigmatulin R.I. (1972) Механика многофазных сред [Mechanics of Multiphase Media]. *Itogi Nauki. Gidromekhanika*. 6. pp. 93–174.
4. Nigmatulin R.I. (1987) *Динамика многофазных сред* [Dynamics of Multiphase Media]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ.
5. Sobolev S.L. (1991) *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Providence: AMS.
6. Bergh J., Löfström J. (1976) “*Interpolation Spaces: An Introduction*”. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Berlin, New York: Springer-Verlag.
7. Plotnikov P.I., Sokolowski J. (2012) *Compressible Navier – Stokes Equations: Theory and Shape Optimization*. Basel: Springer. DOI 10.1007/978-3-0348-0 367-0.

УДК 512.541

DOI 10.17223/19988621/433/2

С. Жамбаа, Т.В. Касаткина, А.М. Бубенчиков**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНСТАНТ В ИНТЕГРАЛЕ КРИСТОФФЕЛЯ – ШВАРЦА ПО МЕТОДУ П.П. КУФАРЕВА**

Применение формулы Кристоффеля – Шварца ограничено трудностями в нахождении прообразов вершин исходного многоугольника. Для определения констант Кристоффеля – Шварца использован метод П.П. Куфарева, который сводит проблему нахождения констант к более легкой задаче численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Описана численная реализация метода П.П. Куфарева и даны примеры гидродинамических расчетов, позволяющие оценить качество представленной математической технологии.

Ключевые слова: *конформное отображение прямолинейных многоугольников, образы и прообразы вершин, линии тока.*

Проблема констант в интеграле Кристоффеля – Шварца

Внешность односвязного многоугольника с заданным расположением вершин в области Z отображается на верхнюю полуплоскость W формулой Кристоффеля – Шварца

$$\frac{\partial Z}{\partial W} = \prod_{k=1}^n (W - a_k)^{\alpha_k} . \quad (1)$$

Само это отображение, сводящееся к вычислению интеграла по контуру, лежащему в области W , не представляет особых затруднений, но интеграл вида (1) получен в предположении, что известны прообразы вершин (a_k). Однако в действительности задаются лишь вершины многоугольника Z_k , а точки a_k остаются неизвестными. Это обстоятельство представляет главную трудность при практическом осуществлении конформного отображения. Многими авторами [2, 3] предпринимались попытки решить проблему параметров a_k , но при следовании обычным путем, задача всегда сводилась к нахождению корней сложной системы нелинейных уравнений между этими величинами. Однако еще в 1947 г. профессором Томского университета П.П. Куфаревым [4] был предложен совершенно необычный способ нахождения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца.

Краткое описание метода П.П. Куфарева

Метод Куфарева [5] применим к многоугольникам, имеющим хотя бы один прямолинейный разрез, то есть к таким, например, как показано на рис. 1. Причем последнее звено (4–5) не должно в точности доходить до вещественной оси. Имеются, таким образом, как внешние (1–5), так и внутренние (6–9) вершины, пронумерованные соответственно.

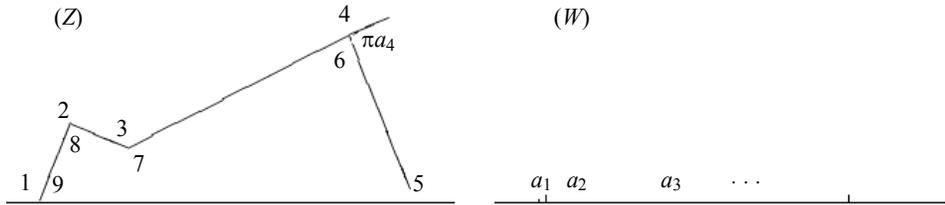


Рис. 1. Отображение внешности многоугольника на верхнюю полуплоскость
 Fig. 1. Mapping of the polygon exterior on the upper half plane

Прообраз вершины разреза (5), обозначим через λ . Тогда, учитывая, что показатель степени α для этой вершины равен единице, в уравнении (1) должен появиться множитель $(W - \lambda)$ т.е.

$$\frac{\partial Z}{\partial W} = (W - \lambda) \prod_{k=1}^n (W - a_k)^{\alpha_k}. \quad (2)$$

В методе Куфарева прообразы вершин многоугольника $a_k = a_k(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ рассматриваются как функции некоторого параметра t и одновременно с уравнением (2) привлекается еще одно дифференциальное уравнение, называемое уравнением Левнера, которое имеет вид

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = - \prod_{k=1}^n (W - a_k)^{\alpha_k} = \frac{1}{\lambda - W} \frac{\partial Z}{\partial W}. \quad (3)$$

Задача состоит в нахождении таких зависимостей $\lambda = \lambda(t)$ и $a_k = a_k(t)$, чтобы уравнения (2) и (3) выполнялись одновременно, то есть из уравнения (3) должно следовать уравнение (2). Чтобы получить необходимые соотношения, рассмотрим функцию

$$\Phi(W, t) = \ln \frac{\partial Z}{\partial W}. \quad (4)$$

Вычисляя для нее частную производную по переменной t и дифференцируя равенство (3) по W , находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z / \partial t \partial W}{\partial Z / \partial W}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial W} = \frac{1}{(\lambda - W)^2} \frac{\partial Z}{\partial W} + \frac{1}{\lambda - W} \frac{\partial^2 Z}{\partial W^2}. \quad (5)$$

Из двух формул (5) следует, что функция $\Phi(W, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{(\lambda - W)^2} + \frac{1}{\lambda - W} \frac{\partial \Phi}{\partial W}. \quad (6)$$

С другой стороны, исходя из формулы (1), имеем

$$\begin{aligned} \Phi(W, t) &= \ln \left(\frac{\partial Z}{\partial W} \right) = \ln(W - \lambda) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(W - a_k), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= - \frac{\dot{\lambda}}{W - \lambda} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \dot{a}_k}{W - a_k}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial W} = \frac{1}{W - \lambda} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{W - a_k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя частные производные функции $\Phi(W, t)$ из формулы (7) в (6), получаем

$$-\frac{\dot{\lambda}}{W-\lambda} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \dot{a}_k}{W-a_k} = \frac{1}{(\lambda-W)^2} + \frac{1}{\lambda-W} \left[\frac{1}{W-\lambda} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{W-a_k} \right]. \quad (8)$$

Сгруппируем члены в последнем выражении следующим образом:

$$\frac{1}{W-\lambda} \left(\dot{\lambda} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda-a_k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{W-a_k} \left(\dot{a}_k - \frac{1}{a_k-\lambda} \right) = 0. \quad (9)$$

Так как равенство (9) должно выполняться при произвольных значениях W , то отсюда можно найти

$$\dot{a}_k = \frac{1}{a_k-\lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda-a_k}, \quad \lambda = -\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k + \text{const}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Формулы (10) являются необходимыми и достаточными условиями тождественности уравнений (2) и (3) [5]. Они представляют собой дифференциальные уравнения для нахождения прообразов вершин многоугольника. Эти прообразы изменяются вместе с параметром t согласно уравнениям (10).

Свойство преобразования Куфарева

Посмотрим, что происходит с вершинами многоугольника в плоскости Z . Запишем полную производную от Z по t , допуская, что W также зависит от t . Тогда, получим

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial W} \dot{W} = \frac{\partial Z}{\partial W} \left(\dot{W} + \frac{1}{\lambda-W} \right). \quad (11)$$

Здесь использована формула (3). Если в (11) положить $W = a_k$, то, в силу (10), правая часть (11) будет равна нулю. Это означает, что вершины многоугольника в плоскости Z , не совпадающие с концом разреза λ , не зависят от параметра t и остаются неподвижными.

Далее, если подставить в уравнение (11) $W = \lambda$ и учесть, что $\partial Z / \partial W$ содержит множитель $(W-\lambda)$, то получим

$$\left. \frac{dZ}{dt} \right|_{W=\lambda} = \frac{\partial Z}{\partial W} \frac{1}{\lambda-W} = \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda)^{\alpha_k}. \quad (12)$$

Если через L обозначим длину разреза, то

$$\frac{dL}{dt} = \left| \frac{dZ}{dt} \right|_{W=\lambda} = \prod_{k=1}^n |a_k - \lambda|^{\alpha_k}. \quad (13)$$

Приведенные рассуждения приводят к следующему выводу:

Если при $t = t_0$ известны константы Кристоффеля – Шварца (прообразы a_k) при отображении верхней полуплоскости на многоугольник, то уравнения (10) и (13) описывают изменения этих констант при добавлении к n -угольнику прямолинейного разреза длины $L(t)$. Это замечательное свойство метода Куфарева можно использовать для определения констант Кристоффеля – Шварца практически любого односвязного многоугольника, составленного из прямолинейных разрезов, выпускаемых в определенной последовательности.

Интегрирование дифференциальных уравнений (10) и (13) следует производить до того момента t , для которого длина соответствующего разреза достигнет заданного значения.

Проблема начальных условий

При численном интегрировании дифференциальных уравнений (10) и (13) имеется небольшое затруднение. Прообраз вершины разреза λ заключен между двумя величинами $a_i < \lambda < a_{i+1}$, причем в начальный момент, когда длина выпускаемого разреза еще равна нулю, эти три точки совпадают и, при этом, правая часть трех уравнений из системы (10) обращается в бесконечность. Эта трудность преодолевается тем, что начальный шаг по t можно взять настолько малым, что за этот промежуток времени счета все остальные прообразы a_k практически не меняются, за исключением трех особых точек a_i , λ и a_{i+1} . Последние три дифференциальных уравнения можно решить аналитическим способом. Запишем их в виде

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{1}{a_i - \lambda}, \quad \lambda = \lambda_0 - \alpha_i a_i - \alpha_{i+1} a_{i+1}, \quad \frac{da_{i+1}}{dt} = \frac{1}{a_{i+1} - \lambda}. \quad (14)$$

Легко показать, что эта система уравнений имеет следующее решение:

$$a_i = \lambda_0 - \sqrt{\frac{1 + \alpha_{i+1}}{1 + \alpha_i}} \sqrt{2t}, \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1}}{\sqrt{(1 + \alpha_i)(1 + \alpha_{i+1})}} \sqrt{2t}, \quad a_{i+1} = \lambda_0 + \sqrt{\frac{1 + \alpha_i}{1 + \alpha_{i+1}}} \sqrt{2t}. \quad (15)$$

Здесь видно, что при малом шаге t , смещаются все три точки в соответствии с показателями степеней α .

Численная реализация

Систему дифференциальных уравнений П.П. Куфарова (10) удобнее записывать в векторной форме:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \mathbf{M}(\alpha) \frac{1}{\vec{b}}, \quad b_k = a_k - \lambda, \quad \frac{dL}{dt} = \prod_{k=1}^n |b_k|^{\alpha_k}. \quad (16)$$

Здесь матрица $\mathbf{M}(\alpha)$ зависит только от показателей степеней и имеет простой вид. Для четырех подвижных точек система уравнений (16) будет, например, следующей:

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \\ \dot{b}_3 \\ \dot{b}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & 1 + \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 + \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 + \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/b_1 \\ 1/b_2 \\ 1/b_3 \\ 1/b_4 \end{pmatrix}, \quad \dot{L} = |b_1|^{\alpha_1} |b_2|^{\alpha_2} |b_3|^{\alpha_3} |b_4|^{\alpha_4}. \quad (17)$$

Если в данном примере в начальный момент известны величины b_1 и b_4 , а $b_2 = b_3 = 0$, то нужно использовать формулы (15) для их начального сдвига. После этого численное интегрирование системы (17) можно осуществлять известными способами. Хороший результат дает и метод Эйлера с мелким шагом.

При проведении последовательности разрезов нужно каждый раз повторять решение системы (16) с увеличенным на две единицы числом подвижных точек. Состояние прообразов вершин и показателей степени интеграла (2) сохраняется в соответствующих двухстрочных матрицах \mathbf{D} . Среди входных параметров программного модуля содержится предыдущая матрица \mathbf{D}_n , и необходимая информация о проводимом разрезе. На выходе возвращается новая матрица \mathbf{D}_{n+1} . Этот же модуль рисует и образы линий $\text{Im}(W) = \text{const}$ в плоскости Z (линии тока), для чего применяется численное интегрирование по переменной W в формуле (2).

Результаты счета

На рис. 2 показан результат расчета линий тока, обтекающих многоугольник, образованный тремя последовательными разрезами.

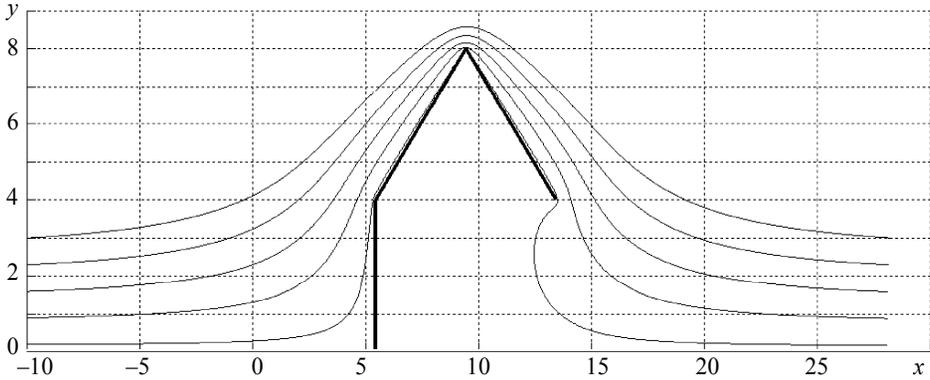


Рис. 2. Линии тока вокруг семиугольника с тремя разрезами над верхней полуплоскостью
 Fig.2. Streamlines around a heptagon with three cuts on the upper half plane

Матрица D_3 , полученная после третьего разреза, содержит следующие элементы:

$$D_3 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & -0.5 & -0.25 & -0.5 \\ -21.8902 & -20.1356 & -10.2456 & 0 & 0.6142 & 0.6438 & 0.6556 \end{pmatrix}.$$

В верхней строчке находятся показатели при вершинах, а в нижней — прообразы вершин b_k многоугольника в возрастающем порядке. Точка $\lambda = 0$ делит номера вершин на внешние и внутренние. Прообразы внутренних вершин (справа от нуля) очень близки, и при увеличении длины третьего разреза они практически сольются в одну общую вершину с показателем степени $\alpha = -1.25$. Это обстоятельство, характерное для метода П.П. Куфарева, позволяет применять его необычный метод для аппроксимации областей, не имеющих форму разреза. В таких случаях остается только внешняя часть многоугольника в плоскости Z , в то время как его внутренняя часть стягивается в точку.

На рис. 3 представлен другой случай течения вокруг профиля в виде разреза.

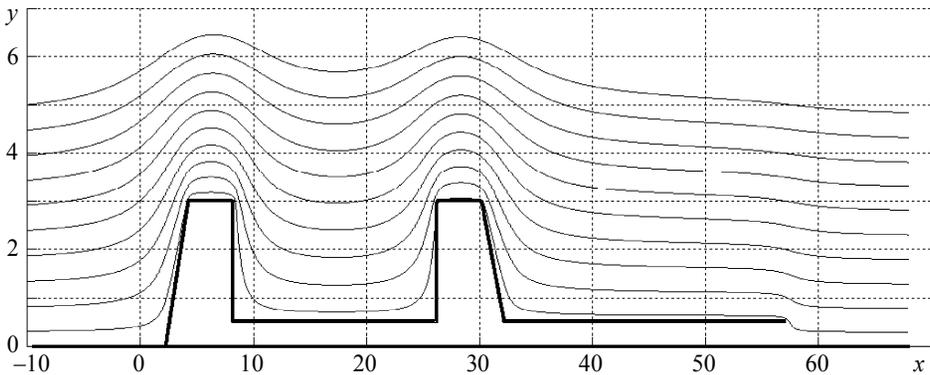


Рис. 3. Обтекание многоугольника в виде более сложного разреза
 Fig. 3. Streamlines around a polygon in the form of a more complex shape

Прообразы внутренних вершин данного разреза слились в одну точку, и поэтому течение имеет такой же вид, как и для контура без разреза.

Заключение

Определение постоянных в интеграле Кристоффеля – Шварца по методу П.П. Куфарева имеет надежную теоретическую основу, и свойства этого метода подтверждаются вычислениями. Теория метода П.П. Куфарева не входит в справочники и учебную литературу. Она описана только в двух малодоступных работах [4, 5], и поэтому ее целесообразно развивать и обобщать в различных направлениях. Так, например, в книге И.А. Александрова [5] показывается, что таким способом можно отображать также и круговые многоугольники. Кроме большого теоретического значения метод П.П. Куфарева должен быть интересным и для широкого круга специалистов, применяющих интеграл Кристоффеля – Шварца в своих практических расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koppenfels W., Stallmann F.* Praxis der konformen abbildung. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1959. 375 с.
2. *Фильчаков П.Ф.* Численные и графические методы прикладной математики. Киев: Наукова думка, 1970. 796 с.
3. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.; М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949. 695 с.
4. *Куфарев П.П.* Об одном методе определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца // ДАН СССР. 1947. Т. 57. С. 535–537.
5. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.

Статья поступила 27.05.2016 г.

Jambaa S., Kasatkina T.V., Bubenchikov A.M. (2016) ON THE DETERMINATION OF CONSTANTS IN THE SCHWARZ – CHRISTOFFEL INTEGRAL BY P.P. KUFAREV'S METHOD. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*.5(43). pp. 21–27

DOI 10.17223/19988621/433/2

Schwarz – Christoffel's integral maps simple-connected polygonal domains onto the upper half-plane and is successfully used in various applications related to problems of hydrodynamics, electrodynamics, and elasticity theory. The main difficulty in the practical use of this integral is in the determination of parameters entering into it. This paper investigates P.P. Kufarev's method (1947) for the numerical determination of parameters involved in the Schwarz–Christoffel transformation. In this method, the difficult problem of determining parameters is reduced to an easier one, namely, to numerical integration of a system of ordinary differential equations. These equations describe the motion of preimages of polygon vertices.

The paper presents an analysis of Kufarev's equations and describes properties of this transformation. The problem of initial conditions and a way to solve it are also considered. Determining constants in the Schwarz–Christoffel integral by Kufarev's method has a reliable theoretical basis, and the properties of this method are corroborated by calculations.

Keywords: conformal mapping of rectilinear polygons, direct images and counter images of vertices, streamlines.

JAMBAA Soninbayar (School of Engineering and Applied Sciences, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

KASATKINA Tat'yana Vasilyevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: tkasatkina@mail.tsu.ru

BUBENCHIKOV Aleksey Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: alexy121@mail.ru

REFERENCES

1. Koppenfels W., Stallmann F. (1959) *Praxis der konformen Abbildung*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag.
2. Fil'chakov P.F. (1972) *Chislennyye i graficheskiye metody prikladnoi matematiki* [Numerical and graphical methods of applied mathematics]. Kiev: Naukova Dumka.
3. Kantorovich L.V., Krylov V.I. (1949) *Priblizhennyiye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Leningrad, Moscow: Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
4. Kufarev P.P. (1947) Ob odnom metode opredeleniya parametrov v integrale Kristoffelya – Shvarza [A method for determining the parameters of the Schwarz – Christoffel integral]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 57. pp. 535–537.
5. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of one-sheeted functions]. Moscow: Nauka.

УДК 530.145.61
DOI 10.17223/19988621/433/3

Е.Ю. Мицарина, Э.Е. Либин, М.А. Бубенчиков

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Уравнение Шредингера описывает квантово-механические процессы, происходящие при движении частиц через потенциальный барьер. В такой задаче, нужно находить плотность вероятности частиц и проследить ее эволюцию во времени. Результаты такой теории находят применения в ряде вопросов теоретической физики, например в нанотехнологиях, где нужно вычислять накопления материальных частиц в потенциальных ямках. Зависящее от времени уравнение Шредингера имеет прямую аналогию с уравнением теплопроводности. Поэтому в качестве численного алгоритма применяется метод матричной экспоненты, применяемый ранее для решения уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: амплитуда вероятности, уравнение Шредингера, матричная экспонента, уравнение теплопроводности, потенциальные барьеры.

Постановка задачи

Известное из квантовой механики [1, 2] уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + U(x, y, z) \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = 0. \quad (1)$$

При надлежащем выборе масштабов по переменным x и t его записывают также в нормализованной форме:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i(\Delta - U(x, y, z)) \psi. \quad (2)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (2) тесно связано с уравнением теплопроводности вида

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = (\Delta - U(x, y, z)) \theta. \quad (3)$$

Связь между функциями ψ и θ такова, что если мы знаем какое-либо решение уравнения (3), записанное в форме: $\theta = \theta(x, y, z, t)$, то связанное с ним решение уравнения (2) имеет следующий вид: $\psi = \theta(x, y, z, it)$, то есть просто сводится к замене вещественного времени t его мнимой величиной it . При этом функция ψ всегда оказывается комплексной величиной, даже если функция θ – вещественна. Квадрат модуля функции ψ в квантовой механике интерпретируется как вероятность локализации частицы в элементарном объеме, и величину ψ называют поэтому амплитудой вероятности.

Если из уравнения (2) исключить время, положив, что $\psi = \Psi \exp(-ik^2 t)$, то тогда для функции Ψ получается стационарное уравнение Шредингера, имеющее вид

$$\Delta \Psi + (k^2 - U(x, y, z)) \Psi = 0. \quad (4)$$

Это уравнение, не содержащее времени, легче поддается решению, чем уравнение (2) и применяется, в основном, для описания прохождения частиц через потенциальный барьер или для нахождения его собственных чисел и собственных функций этого оператора.

Трудность аналитического или численного решения нестационарного уравнения (2) или (3) возникает из-за наличия переменного коэффициента $U(x, y, z)$ в этих уравнениях. Таким образом, задача состоит в выборе эффективного метода решения уравнения теплопроводности (3).

Одномерная задача. Точные решения

В одномерном случае, когда функция ψ зависит только от одного пространственного аргумента x , уравнения (2) и (3) записываются в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - U(x) \right) \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - U(x) \right) \theta. \quad (5)$$

При произвольно заданном потенциальном барьере $U(x)$ уравнения (5) не могут быть решены в явной аналитической форме. Поэтому, чтобы выяснить общий характер поведения решений, рассмотрим сначала случай, когда отсутствует потенциальный барьер, т.е. когда $U(x) = 0$, и уравнения (5) имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Рассмотрим два примера точных решений уравнений (6).

Пример 1. На бесконечном интервале изменения переменной $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ одно из частных решений уравнения теплопроводности и соответственно уравнения Шредингера будет следующим:

$$\theta(x, t) = \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{1+4t}\right)}{\sqrt{1+4t}}, \quad \psi(x, t) = \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{1+4it}\right)}{\sqrt{1+4it}}, \quad \rho(x, t) = |\psi|^2 = \frac{\exp\left(\frac{-2x^2}{1+16t^2}\right)}{\sqrt{1+16t^2}}. \quad (7)$$

Здесь $\rho(x, t)$ — плотность вероятности локализации частицы в точке с координатами (x, t) .

Из формул (7) видно, что как температура θ , так и плотность вероятности $\rho(x, t)$ монотонно убывают с ростом величин x и t , хотя они и ведут себя при этом по-разному.

Пример 2. Методом разделения переменных и разложением в ряд Фурье можно найти следующее решение уравнений (6), определенное на конечном интервале переменной $0 < x < L$:

$$\theta = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda} e^{-\lambda^2 t}, \quad \psi = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda} e^{-i\lambda^2 t}, \quad \lambda = \frac{\pi(2n-1)}{L}. \quad (8)$$

Оно соответствует нулевым граничным условиям на концах интервала и постоянному (единичному) начальному распределению температуры. Вычисленные по формулам (8) значения амплитуды вероятности $|\psi|^2$ в точках плоскости (x, t) показаны на рис. 1. Повышенная амплитуда вероятности $|\psi|^2$ отмечена на нем бо-

лее темным цветом. Видно, что функция ψ совершает непрерывающиеся бесконечные колебания во времени. Этот рисунок демонстрирует сложную периодическую по времени структуру поведения амплитуды вероятности. Этим свойством и отличается решение нестационарного уравнения Шредингера от решения связанного с ним уравнения теплопроводности, которое, согласно формулам (8), всегда очень быстро убывает по времени.

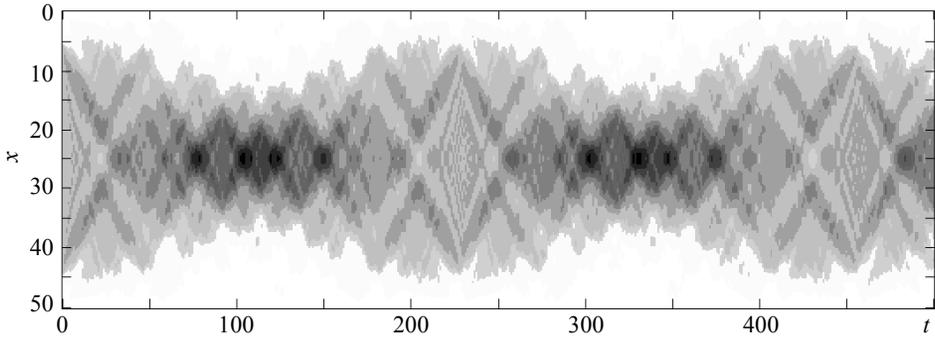


Рис. 1. Пространственно-временное поведение амплитуды вероятности
Fig. 1. Space-time behavior of the probability amplitude

На рис. 2 показан график среднего по времени (на участке T) значения функции $|\psi|^2$, который определяется из выражения

$$\hat{\rho}'(x) = \frac{1}{T} \int_0^T |\psi(x,t)|^2 dt. \quad (9)$$

Такой график показывает, что материальная частица большую часть своего времени проводит в средней области участка $0 < x < L$.

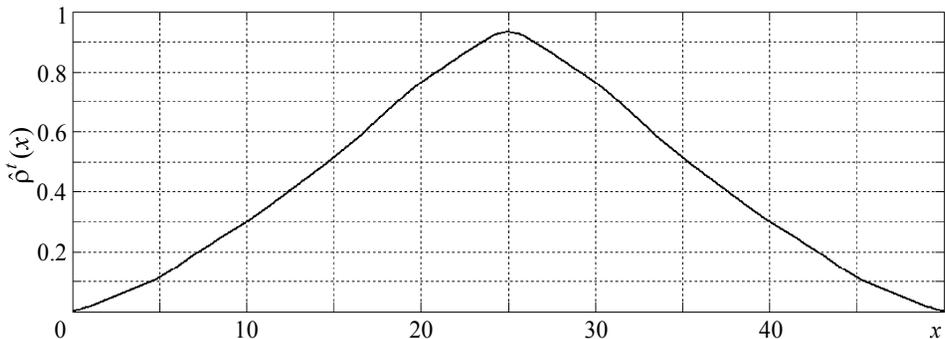


Рис. 2. График осредненного по времени значения амплитуды вероятности
Fig. 2. Plot of the time-averaged value of the probability amplitude

Вычисление методом матричной экспоненты

Решение однородного уравнения теплопроводности вида (6) можно формально записать в символической форме, имея ввиду разложение показательного дифференциального оператора в ряд Тейлора:

$$\theta(x, t) = e^{t \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \theta(x, 0) = \left[1 + t \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{t^2}{2!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{t^4}{4!} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \dots \right] \theta(x, 0). \quad (10)$$

Так, например, нетрудно непосредственно проверить, что если $\theta(x, 0)$ – многочлен по переменной x , то ряд в формуле (10) обрывается и мы получаем точное решение уравнения теплопроводности (6).

С другой стороны, при численной реализации решения, оператор дифференцирования по переменной x обычно заменяется его конечно-разностной аппроксимацией

$$\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial x^2} \approx \frac{\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1}}{h^2} \quad (11)$$

Таким образом, оператор дифференцирования – это трех диагональная квадратная матрица H_2 , действующая на вектор столбец состоящий из чисел θ_n , $n = 1, 2, 3, \dots, N$. В таком случае, имея ввиду, что θ — это векторы-столбцы, мы можем просто записывать решение (10) в векторно-матричном виде

$$\theta(x, t) = \exp m(tH_2) \cdot \theta(x, 0). \quad (12)$$

Функция от матрицы $f(A) = e^A$, известная как матричная экспонента, является стандартной программой в ряде вычислительных систем, и ею всегда можно воспользоваться. Такой подход применялся в работе [3], где с помощью матричной экспоненты успешно решалась задача с начальным условием как для одномерного, так и для двумерного уравнения теплопроводности.

Ясно, что таким же способом можно решать и более общее уравнение (5), где учитывается влияние потенциального барьера $U(x)$. Там только нужно от дифференциального оператора H_2 отнять диагональную матрицу $U(x_i)$, тогда получим

$$\psi(x, t) = e^{iHt} \psi(x, 0), \quad \theta(x, t) = e^{iHt} \theta(x, 0), \quad H = H_2 - \text{diag}(U). \quad (13)$$

Отметим следующие свойства расчета решения уравнения Шредингера методом матричной экспоненты:

1. Возможность учитывать наличие потенциальных барьеров в уравнении Шредингера, что практически нельзя осуществить аналитическими методами.
2. Время входит непосредственно как параметр матричной экспоненты.
3. Вычисление матричной экспоненты для матрицы H при $N < 300$ занимает время порядка 3–5 с. Таким образом, этот способ обладает высоким быстродействием и точностью.
4. Автоматическое выполнение нулевого граничного условия на концах интервала обусловлено выбором конструкцией матрицей H_2 в виде формулы (11).

Результаты расчетов

На рис. 3 – 6 приведены результаты расчетов по нашей программе для некоторых случаев расположения потенциальных барьеров в этой области решения. На них представлена диаграмма распределения амплитуды вероятности, а также ее среднее значение по времени.

Из рис. 3 видно, что амплитуда вероятности минимальна внутри барьеров и максимальна в средней части между ними. Проникновение частиц через оба барьера объясняется тем, что начальное условие в этой области было отлично от нуля.

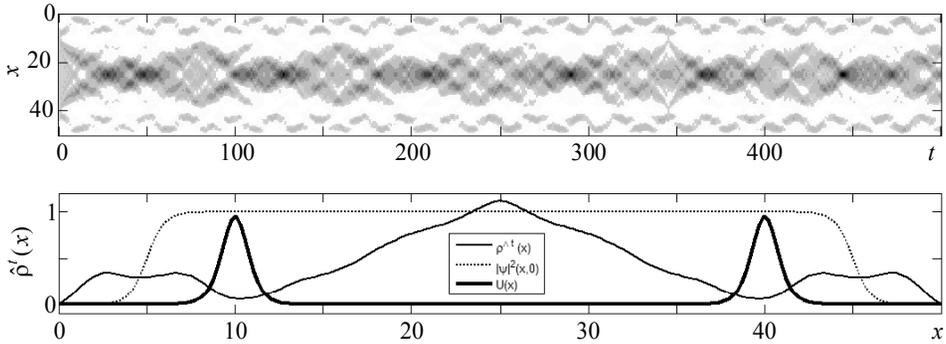


Рис. 3. Распределение амплитуды вероятности и его среднее значение по времени
Fig. 3. Probability amplitude distribution and its mean value over time

Если барьеры отодвинуть к концам интервала, то проникновение через барьер исчезает (рис. 4).

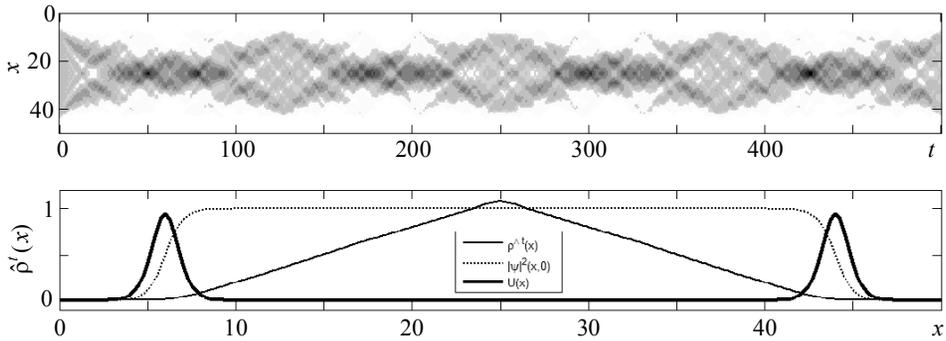


Рис. 4. Распределение амплитуды вероятности и его среднее значение по времени
Fig. 4. Probability amplitude distribution and its mean value over time

Если между крайними барьерами вставить еще один промежуточный барьер (рис. 5), то появляются два максимальных пика амплитуды вероятности.

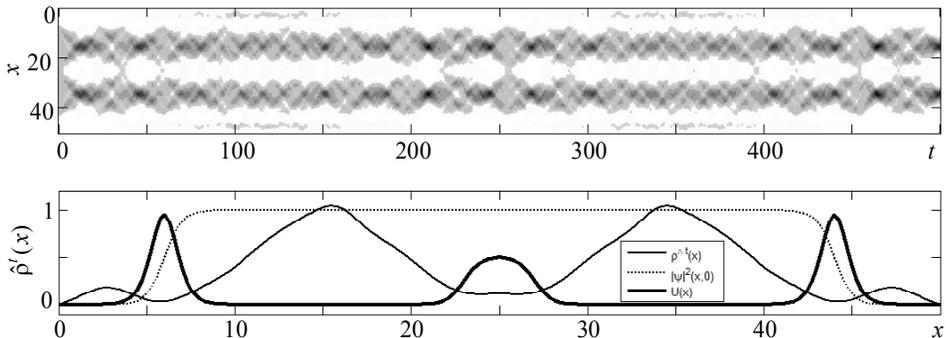


Рис. 5. Распределение амплитуды вероятности и его среднее значение по времени
Fig. 5. Probability amplitude distribution and its mean value over time

А если заменить средний барьер потенциальной ямкой (рис. 6), то максимальная вероятность локализуется в области этой ямки.

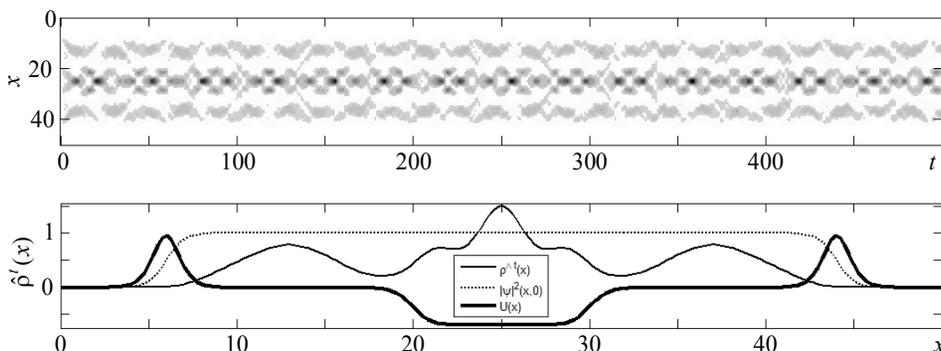


Рис. 6. Распределение амплитуды вероятности и его среднее значение по времени
Fig. 6. Probability amplitude distribution and its mean value over time

Такого эффекта следовало ожидать, так как частицы должны накапливаться в области с минимальной энергией.

Заключение

Применение методов матричной экспоненты к решению нестационарного уравнения Шредингера дало ожидаемые результаты при вычислении амплитуды вероятности. Наибольшее накопление частиц происходит в ямках потенциального барьера. Эту технологию можно распространить и на двумерные задачи, которые представляют больший научный интерес для объяснения явления абсорбции в подобных вопросах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Feshbach H., Morse Ph.M.* Methods of Theoretical Physics. Part II. New York: McGraw-Hill, 1953. 997 p.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1969. Т. III: Квантовая механика. Нерелятивистская теория. 767 с.
3. *Терновых Е.Ю.* Применение матричных разностных операторов для решения уравнения теплопроводности // Актуальные проблемы современной механики сплошных сред. Всероссийская молодежная научная конференция. Томск, 16–19 октября 2010 г. Тез. докл. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. С. 209–211 .

Статья поступила 16.06.2016 г.

Mishcharina E.Yu., Libin E.E., Bubenchikov M.A. (2016) ON THE SOLUTION OF THE NON-STATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 28–34

DOI 10.17223/19988621/433/3

The Schrödinger equation describes quantum mechanics processes occurring when particles pass through a potential barrier. In this problem, it is necessary to find the probability density of particles and to track its evolution in time. In this paper, it is shown that time-dependent Schrödinger's equation has a direct analogy to the heat conductivity equation, differing from it in the imaginary time. As a numerical method of the decision, it is offered to apply the method of

matrix exponential function in which a finite difference analogue of the one-dimensional Laplacian is considered as a matrix operating on a vector. This way of the solution allows one to consider potential barriers of any form in the Schrödinger equation. Time is included now into the decision as a parameter, and it allows one to get rid of the necessity of time quantization and to do it only on a spatial variable. In this aspect, this way favorably differs from traditional ways of solving evolutionary equations which use quantization both on time and on a spatial variable. Results of numerical experiments show that the greatest amplitudes of probability are localized in the field of minima of potential barriers.

Keywords: probability amplitude, Schrödinger equation, matrix exhibitor, heat conductivity equation, potential barriers.

MISHCHARINA Elena Yuryevna (Tomsk State University, Tomsk, Russia)
E-mail: sweetyhemp@gmail.com

LIBIN Eduard Efimovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia)

BUBENCHIKOV Mikhail Alekseevich (Candidate of Physics and Mathematics,
Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russia)
E-mail: m.bubenchikov@gtt.gazprom.ru

REFERENCES

1. Feshbach H., Morse Ph. M. (1953) *Methods of Theoretical Physics. Part II*. New York: McGraw-Hill.
2. Landau L.D., Lifshits E.M. (1969) *Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya* [Quantum mechanics. Nonrelativistic theory]. Moscow: Nauka.
3. *Ternovyykh E. Yu.* (2010) Primenenie matrichnykh raznostnykh operatorov dlya resheniya uravneniya teploprovodnosti [Application matrix difference operators for the solution of the thermal conductivity equation]. *Aktual'nye problemy sovremennoy mekhaniki sploshnykh sred.* [Current Problems of Present-Day Continuum Mechanics]. Proc. of the All-Russia youth Conference. Tomsk: TGU Publ. pp. 209–211.

МЕХАНИКА

УДК 533.6.011.5

DOI 10.17223/19988621/433/4

В.И. Биматов, Н.В. Савкина, В.В. Фарапонов

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ
И АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСТРОГО КОНУСА
ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Исследования направлены на решение задачи динамического взаимодействия реального газа с движущимся в нем телом в условиях значительного изменения кинематических параметров. Рассмотрена задача расчета нелинейных аэродинамических характеристик острого конуса. Наиболее полной среди численных моделей является модель, описываемая уравнениями Навье–Стокса, позволяющая учесть эффекты сжимаемости, вязкости и теплопроводности газа с применением нескольких моделей турбулентности и диффузии. Приведены сравнения полученных расчетов с результатами баллистических экспериментов

Ключевые слова: *сверхзвуковое обтекание, турбулентный поток, сжимаемая вязкая жидкость, коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы.*

В данной работе приведены результаты численного расчета параметров обтекания и аэродинамических характеристик острого конуса с углом при вершине $2\theta_k = 30^\circ$ для различных моделей турбулентной вязкости. Для расчета используется газодинамический подход. Геометрические параметры исследуемого тела представлены на рис. 1. Угол атаки изменялся в диапазоне от $0-40^\circ$.

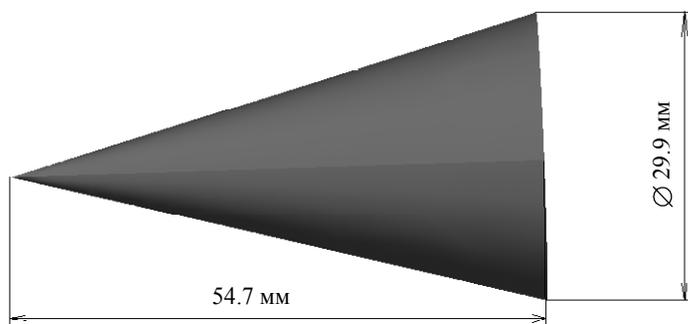


Рис. 1. Геометрия обтекаемого тела
Fig. 1. Geometry of the streamlined body

Постановка задачи

Математическое описание течения воздуха около исследуемого тела описывается системой осредненных уравнений Навье – Стокса при следующих основных допущениях.

1. Режим течения воздуха турбулентный. Для описания турбулентного характера движения воздуха используются осредненные уравнения сжимаемой вязкой жидкости и гипотеза вихревой вязкости.

2. Пренебрегаем массовыми силами.

Уравнение неразрывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho U) = 0 \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса (уравнение движения)

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla(\rho U \otimes U) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau, \quad (2)$$

где τ – тензор вязких напряжений:

$$\tau = \mu \left(\nabla U + (\nabla U)^T - \frac{2}{3} \delta \nabla U \right); \quad \mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t,$$

p – давление.

Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial(\rho h_{\text{tot}})}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(\rho U h_{\text{tot}}) = \nabla(\lambda_{\text{eff}} \nabla T) + \nabla(U \cdot \tau), \quad \lambda_{\text{eff}} = \lambda + \frac{C_p \mu_t}{\text{Pr}_t}, \quad (3)$$

где h_{tot} – полная энтальпия: $h_{\text{tot}} = h + \frac{1}{2} U^2$, h – энтальпия: $h = C_p T$, ρ – плотность газа; U – вектор скорости; T – температура.

Исходная форма уравнения состояния имеет вид

$$\rho = \frac{p_{\text{ср}} + p}{\frac{R}{M_w} T}, \quad (4)$$

где $p_{\text{ср}}$ – рабочее давление; M_w – молекулярная масса; R – универсальная газовая постоянная.

В модели турбулентности Спаларта – Аллмареса (SA) [1] уравнение переноса определено для величины $\tilde{\nu}$, которая совпадает с турбулентной вязкостью всюду, кроме пристеночных областей:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho(v + \tilde{\nu})}{\sigma_v} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + \frac{C_{b2} \rho}{\sigma_v} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + \rho P_v - \rho \epsilon_v,$$

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad (5)$$

где P_v – скорость генерации турбулентной вязкости, а ϵ_v – скорость её диссипации.

Турбулентная вязкость моделируется слагаемым P_v :

$$P_v = C_{v1} \tilde{S} \tilde{v}, \quad \tilde{S} = |\Omega| + \frac{\tilde{v}}{(\kappa d)^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (6)$$

где d – расстояние до ближайшей твёрдой поверхности.

Диссипация турбулентности ε_v моделируется следующим образом:

$$\varepsilon_v = C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{v}}{d} \right)^2, \quad (7)$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} (r^6 + r), \quad r = \frac{\tilde{v}}{(\kappa d)^2} \frac{1}{\tilde{S}},$$

$$\kappa = 0.4187, \quad C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \sigma_v = 2/3, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2.0,$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_v}.$$

В k - ε -модели используется формула Колмогорова – Прандтля для расчёта турбулентной вязкости [1], а для k и ε определяют уравнения переноса. Уравнение для k и уравнение переноса для ε представлено в виде

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho P_k - \rho C_\mu k \omega; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon), \quad \mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (9)$$

Для k - ε -модели определен стандартный рекомендуемый набор эмпирических констант (10):

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (10)$$

Созданная Ф. Менгером [2] комбинированная модель сдвиговых напряжений (SST-модель) объединила модель k - ε и k - ω -модель Вилкокса [3].

Уравнения SST-модели представлены в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho P_k - \rho C_\mu k \omega, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + (1 - F_1) 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha_3 \frac{\omega}{k} \rho P_k - \rho \beta_3 \omega^2,$$

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega},$$

Коэффициенты σ_{k3} , $\sigma_{\omega 3}$, α_3 и β_3 рассчитываются как $\Phi_3 = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 – коэффициенты k - ω и k - ε -моделей соответственно. В расчетах применяются следующие значения констант:

$$C_\mu = 0.09, \quad \alpha_1 = 5/9, \quad \alpha_2 = 0.44, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta_2 = 0.0828, \\ \sigma_{k1} = 2, \quad \sigma_{k2} = 1, \quad \sigma_{\omega 1} = 2, \quad \sigma_{\omega 2} = 1/0.856, \quad Pr_t = 2.$$

Размеры расчетной области выбираются относительно большими, чтобы дальние граничные условия не смогли исказить поле течения вблизи самого тела. Она представляет собой пространство в виде цилиндра, внутри которого находится модель (рис. 2).

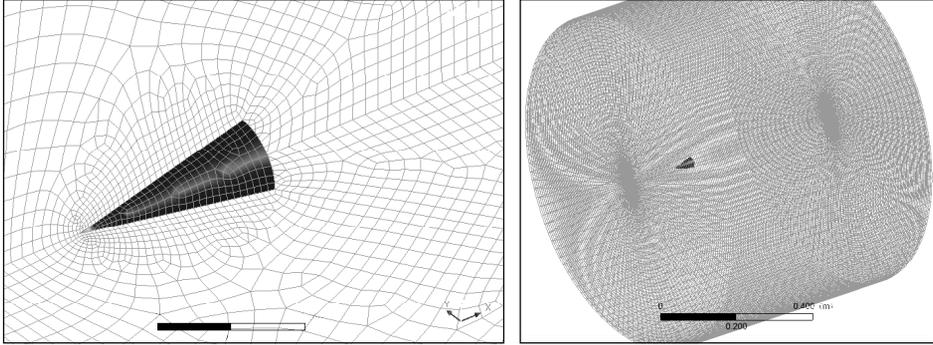


Рис. 2. Вид расчетной сетки для острого конуса
Fig. 2. View of the computational grid for a sharp cone

Условия на входной границе: величина и направление скорости набегающего потока: $U = U_0 \cos(\alpha)$; $V = 0$; $W = U_0 \sin(\alpha)$; турбулентная интенсивность: $I = 5\%$; статические температура и давление: $T = 20^\circ\text{C}$, $P = 1$ атм; $k_{\text{inlet}} = \frac{3}{2} I^2 U^2$; $\varepsilon_{\text{inlet}} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\mu_t}$, где $\mu_t = 1000 I \mu$. На выходной границе задавалось среднее статическое давление: по всему выходу $P_{\text{из}} = 0$, если $M < 1$, т.е. равенство избыточного давления воздуха нулю. По этому условию воздух может только выходить из расчетной области через указанную грань ($\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} = 0$, $\frac{\partial^2 k}{\partial n^2} = 0$). Если $M > 1$, то граничные условия на выходе не задаются. На боковой границе задается граничное условие равенства нулю избыточного давления $p = 0$, при этом через эту грань допускается вход-выход воздуха в расчетную область. При расчете аэродинамических характеристик рассматривается 1/2 конуса. На диаметральной плоскости выставляются граничные условия симметрии:

$$W = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \phi = \{P, U, W, \rho, k, \varepsilon\}.$$

Результаты расчета

На рис. 3 представлены поля скоростей (в числах Маха), распределение давления и линии тока в плоскости симметрии для углов атаки 0° и 40° для скорости набегающего потока $M_\infty = 3.47$.

Отчетливо виден головной криволинейный скачок, отсоединенный от обтекаемого тела. За телом образуется область возвратно-циркуляционного течения. О.М. Белоцерковским [4] отмечается существование внутреннего и внешнего следов при сверхзвуковом обтекании тела вязким газом. Внутренний вязкий след об-

разован вязким пограничным слоем на теле, внешний след – криволинейным головным скачком уплотнения. С увеличением угла атаки происходит искривление этих следов в связи с образованием на наветренной стороне обтекаемого тела зоны отрыва.

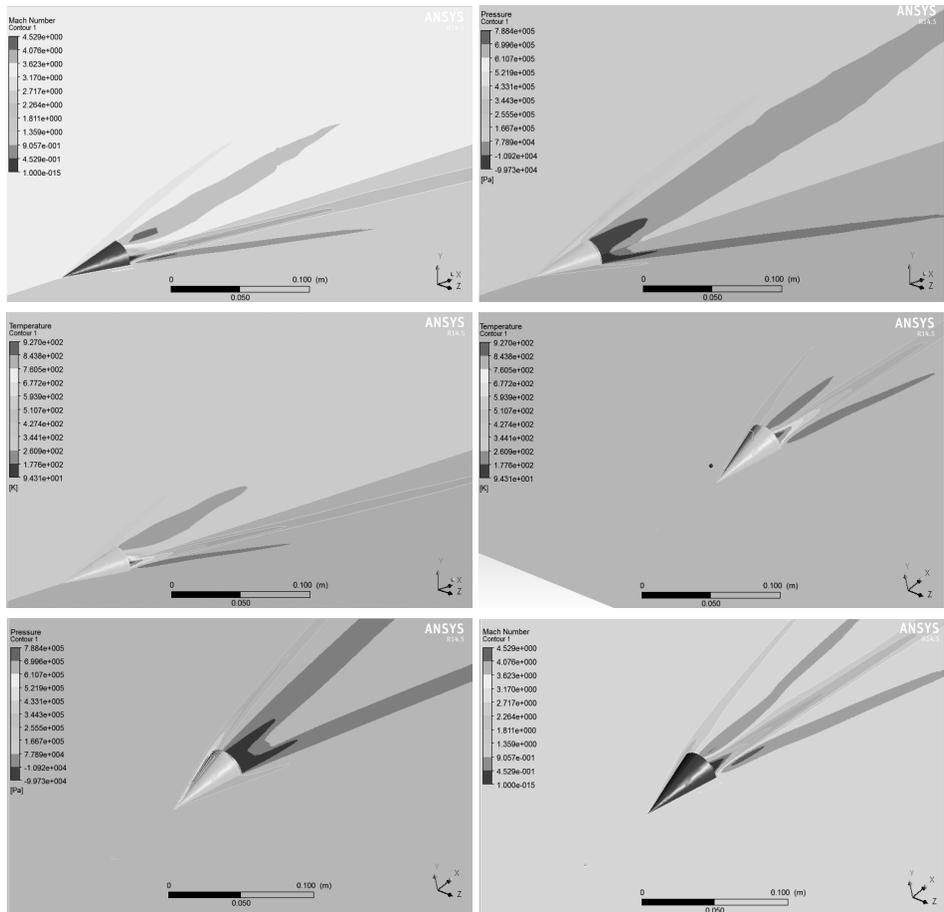


Рис. 3. Поля скоростей (в числах Маха), распределение давления и температур для углов атаки 10° и 15° ($M_\infty = 3.47$)

Fig. 3. Velocity fields (in terms of the Mach number), distribution of the pressure and temperature for attack angles of 10° and 15° ($M_\infty = 3.47$)

В таблице представлена сеточная сходимость по коэффициенту C_x как наиболее значимой аэродинамической характеристики при разных моделях турбулентности и $M_\infty = 3.47$. Видно, что наилучшей сходимостью и точностью расчета коэффициента C_x обладает SST-модель.

На рис. 4 представлены зависимости коэффициентов подъемной силы C_y и лобового сопротивления C_x от угла атаки. Сплошными линиями представлены результаты, полученные на баллистической трассе ФТИ им. Иоффе РАН [5], пунктирными линиями – результаты, полученные при численном моделировании для SST-модели. Относительное рассогласование не превысило 4–6%. Нелинейный

характер C_y проявляется при $\alpha \geq 25^\circ$. Для коэффициента C_x при $\alpha \leq 20^\circ$ наблюдается параболическая зависимость от α . С дальнейшим ростом угла атаки проявляется «завал» характеристики C_x .

Модель турбулентности	Cells	C_x	$\delta C_x, \%$
SA (Спаларта–Аллмареса)- модель	34080	0.1968	5.7419
	133410	0.1914	3.0825
	676110	0.1868	0.6959
	983030	0.1855	
Стандартная k - ε -модель	32610	0.1896	4.6941
	130440	0.18414	1.8681
	621760	0.1817	0.5504
	902560	0.1807	
SST-модель	37860	0.18849	3.2309
	151440	0.1824	1.4254
	565760	0.1798	0.4449
	846780	0.179	

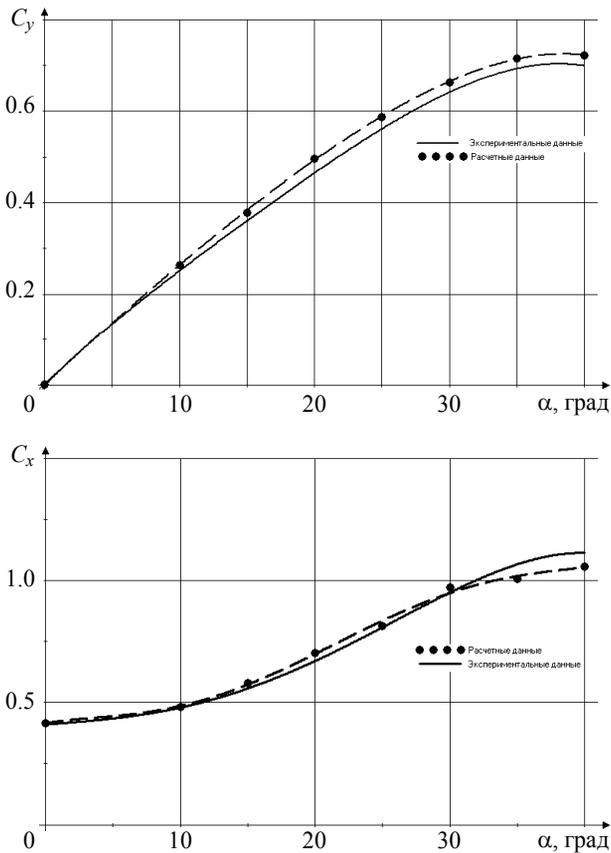


Рис. 4. Зависимость C_y и C_x от угла атаки для острого конуса
Fig. 4. C_y and C_x as functions of the attack angle for a sharp cone

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Снегирёв А.Ю.* Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
2. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. La Canada, California: DCW Industries Inc., 1998. 477 p.
3. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal*. 1994. V. 32. No 8. P. 1598–1605.
4. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 392 с.
5. *Менде Н.П.* Обратная задача нелинейной баллистики. I. Плоское движение // Препринт 1326 ФТИ АН ССР, Ленинград, 1989. 44 с.

Статья поступила 01.09.2016.

Bimatov V.I., Savkina N.V., Faraponov V.V. (2016) SUPERSONIC FLOW OVER A SHARP CONE AND ITS AERODYNAMIC CHARACTERISTICS FOR DIFFERENT MODELS OF TURBULENT VISCOSITY. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 35–42

DOI 10.17223/19988621/433/4

Creation of reliable methods for calculating the aircraft aerodynamic characteristics with allowance for their essentially non-linear and sometimes ambiguous dependence on the motion parameters is of great interest, both in the aspect of developing non-stationary supersonic aerodynamics and for solving some practical problems of control for the motion of bodies under study. The investigations are intended to solve the problem of dynamic interaction between a real gas and a body moving within it in conditions of a significant change in kinematic parameters. In this paper, the problem of calculating nonlinear aerodynamic characteristics of a sharp cone is considered. The most complete numerical model is that described by Navier–Stokes equations, which allows taking into account the effects of gas compressibility, viscosity, and thermal conductivity with application of several models of turbulence and diffusion. The obtained results of calculations are compared with results of ballistic experiments.

Keywords: supersonic flow, turbulent flow, compressible viscous fluid, drag and lift coefficients.

BIMATOV Vladimir Ismagilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: vbimatov@mail.ru

SAVKINA Nadezhda Valer'evna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Tomsk branch), Tomsk, Russia)

E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

FARAPONOV Valeriy Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: fff@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Snegirev A.Yu. (2009) *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniya v tekhnicheskoy fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy* [High-performance computations in engineering physics. Numerical modeling of turbulent flows]. St. Petersburg: Polytechnic University Publ.
2. Wilcox D.C. (1998) *Turbulence Modeling for CFD*. La Canada, California: DCW Industries Inc.
3. Menter F.R. (1994) Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*. 32 (8). pp. 1598–1605.

4. Belotserkovskiy O.M., Davydov Yu.M. (1982) *Metod khrupnykh chastits v gazovoy dinamike* [Method of coarse particles in the gas dynamics]. Moscow: Nauka.
5. Mende N.P. (1989) *Obratnaya zadacha nelineynoy ballistiki. I. Ploskoe dvizhenie* [The inverse problem of nonlinear ballistics. I. Plane motion]. Leningrad.

УДК 519.63 + 533.697.24
DOI 10.17223/19988621/433/5

Е.Я. Брагунцов, Д.А. Внучков, В.М. Галкин, И.В. Иванов, В.И. Звезгинцев

ИСПЫТАНИЯ КОЛЬЦЕВОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ВОЗДУХОЗАБОРНИКА ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОГО СЖАТИЯ В АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Для апробации предложенной ранее методики профилирования кольцевых сверхзвуковых воздухозаборников изоэнтропического сжатия разработана конструкция открывающегося бокового секторного воздухозаборника. Проведены испытания воздухозаборника в аэродинамической трубе, в которых впервые осуществлен процесс открывания и закрывания бокового воздухозаборника в сверхзвуковом набегающем потоке. По фотографиям течения видно, что в исследованном диапазоне чисел Маха ($M = 2.5-4$) воздухозаборник после открывания находится в запущенном состоянии.

Ключевые слова: *сопло, воздухозаборник, сверхзвуковое течение, идеальный газ, обращенное течение, открывающийся воздухозаборник.*

Воздухозаборники прямоточных воздушно-реактивных двигателей (ПВРД), как правило, изготавливаются либо с носовым (лобовым), либо с боковым расположением относительно корпуса летательного аппарата [1] и выполняют свою роль в создании тяги силовой установки только на маршевом участке траектории полета. На участке разгона и при полете с неработающим ПВРД воздухозаборники вместе с проточным трактом создают значительное аэродинамическое сопротивление, которое существенно снижает дальность полета аппарата. Известны предложения по созданию открывающихся и закрывающихся в полете боковых воздухозаборников [2], но реальность таких конструкций до сих пор не подтверждена на практике. В данной работе была поставлена задача создания реальной конструкции открывающегося бокового воздухозаборника с демонстрацией процесса его открывания в сверхзвуковом потоке воздуха.

При разработке конструкции воздухозаборника использовалась разработанная ранее [3–5] технология проектирования кольцевых воздухозаборников как задача обращения сверхзвукового изоэнтропического течения в осесимметричном сопле. Геометрические размеры воздухозаборника подбирались таким образом, чтобы его длина и максимальные поперечные размеры в раскрытом состоянии позволяли проводить испытания в аэродинамической трубе Т-313 ИТПМ СО РАН.

Построение контура воздухозаборника

Общая технология проектирования кольцевых воздухозаборников как задача обращения сверхзвукового изоэнтропического течения в осесимметричном сопле описана в [3–5]. В соответствии с этой технологией для построения воздухозаборника данной работы, прежде всего, был построен безразмерный контур классического осесимметричного сопла без центрального тела (рис. 1). Рассматривалось течение совершенного идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$. Число

Маха на входе сопла $M_1 = 1$, на выходе сопла $M_2 = 3$. Линейные размеры R и X отнесены к R_0 – размеру минимального сечения

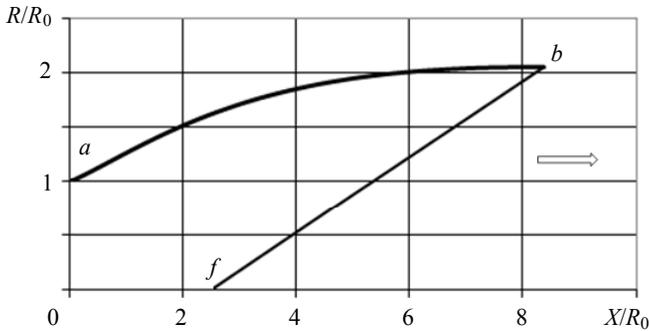


Рис. 1. Контур исходного осесимметричного сопла. ab – контур сопла с угловой точкой, fb – равномерная характеристика на выходе

Fig. 1. Contour of the original axisymmetric nozzle. ab line is the contour of the nozzle with an angular point, fb line is the uniform characteristic at the output

На следующем шаге производилось масштабирование контура сопла для получения кольцевого воздухозаборника с требуемыми геометрическими характеристиками. Геометрические размеры воздухозаборника подбирались таким образом, чтобы максимальные поперечные размеры в раскрытом состоянии не превышали 200 мм и позволяли проводить испытания в аэродинамической трубе Т-313. Полученный контур воздухозаборника в размерном виде приведен на рис. 2. Контур состоит из верхней и нижней обечайек, которые соответствуют трубкам тока в исходном сопле с относительным расходом $G/G_{\max} = 1$ и $G/G_{\max} = 0.6$. По требованиям компоновки сечение входа (между двумя обечайками) размещается над поверхностью цилиндра радиусом 61 мм, а сечение выхода находится внутри этого цилиндра. Нижняя обечайка поднята над поверхностью цилиндра на 11 мм в соответствии с ожидаемой толщиной пограничного слоя на цилиндре. Характерные размеры воздухозаборника приведены в табл. 1 в колонке «исходный контур».

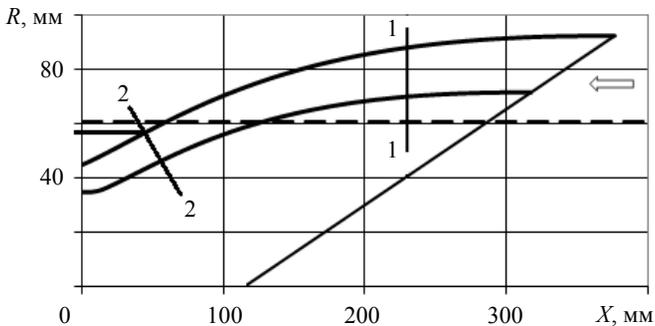


Рис. 2. Контур изоэнтропического кольцевого воздухозаборника. Пунктир – радиус цилиндрического центрального тела;

1–1 сечение входа; 2–2 сечение горла

Fig. 2. Contour of the annular isentropic air inlet. The dotted line is the radius of the central cylindrical body; 1–1, input section; 2–2, throat section

Далее контур был подвергнут дополнительной корректировке для выполнения следующих условий (рис. 2):

Из условий запуска канала внутреннего сжатия угловая точка верхней обечайки была перенесена ближе к входу (из положения $X = 0$ мм в положение $X = 46$ мм). За счет этого было увеличено критическое сечение канала 2–2, т.е. относительная площадь горла стала $F_2/F_1 = 0.3896$ вместо исходного значения 0.2361.

По соображениям уменьшения общей длины сечение входа 1–1 было перенесено из положения $X = 376.64$ мм в положение $X = 230$ мм. При этом появился угол наклона верхней обечайки к потоку (4.17°) и отрицательный угол наклона нижней обечайки (-2.52°).

Характерные размеры исходного и укороченного воздухозаборников приведены в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение характерных размеров воздухозаборника до и после корректировки

Параметр	Исходный контур	Укороченный контур
Вход		
Радиус верхней обечайки, мм	92.60	88.28
Длина верхней обечайки, мм	376.64	183.8
Угол наклона стенки, град.	0	4.17
Расстояние верхней обечайки от корпуса, мм	31.60	27.28
Радиус нижней обечайки, мм	71.73	70.12
Длина нижней обечайки, мм	317.61	173.8
Угол наклона стенки, град.	0	-2.52
Расстояние нижней обечайки от корпуса, мм	10.73	9.12
Площадь захватываемой струи, мм ²	10774	9037
Горло		
Радиус верхней обечайки, мм	45.00	57.29
Угол наклона стенки, град.	11.58	14.91
Радиус нижней обечайки, мм	34.86	46.49
Угол наклона стенки, град.	0	13.81
Площадь горла, мм ²	2544	3520
Относительная площадь горла F_2/F_1	0.2361	0.3896
Число Маха в горле	1	2

Конструкция модели

Общий вид разработанной модели открывающегося 4-секторного бокового воздухозаборника показан на рис. 3 и рис. 4.

Модель летательного аппарата для установки бокового воздухозаборника выполнена в виде цилиндра с габаритным диаметром 122 мм. Общая длина модели 700 мм. Основные геометрические характеристики воздухозаборника показаны в табл. 2.

Таблица 2

Основные геометрические характеристики 4-х секторного воздухозаборника

Параметр	Значение
Площадь входа секторов F_1 , мм ²	4×1150
Площадь горла секторов F_2 , мм ²	4×538
Относительная площадь горла F_2/F_1	0.4678

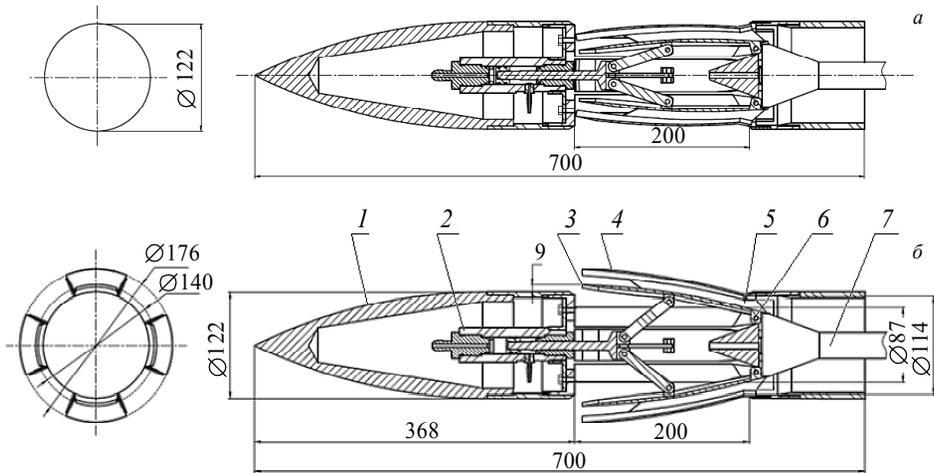


Рис. 3. Схема открывающегося 4-секторного воздухозаборника: *а* – закрытое положение, *б* – открытое положение: 1 – носовая часть; 2 – пневмоцилиндр; 3 – нижняя обечайка; 4 – верхняя обечайка; 5 – горло; 6 – ось вращения; 7 – державка

Fig. 3. Scheme of the 4-sectioned air inlet: (a) closed position and (b) open position: 1, nose; 2, pneumatic cylinder; 3, bottom cowl; 4, upper cowl; 5, throat; 6, axis of rotation; 7, axial holder

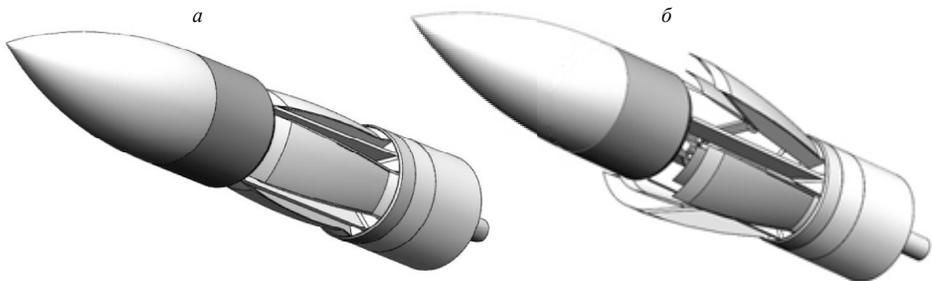


Рис. 4. Общий вид 4-секторного воздухозаборника:

а – закрытое положение, *б* – открытое положение

Fig. 4. General view of the 4-sectioned air inlet:

(a) closed position and (b) open position

Носовая часть (1) имеет оживальную форму. Отсек воздухозаборника занимает длину 200 мм. В отсеке размещаются 4 открывающихся сектора с углом 40° , между которыми имеются продольные перегородки толщиной 2 мм, обеспечивающие жесткость всей конструкции. Каждый сектор состоит из верхней (4) и нижней (3) обечайек, жестко соединенных между собой тонкими боковыми щеками (рис. 3). Обечайки спрофилированы в соответствии с описанной выше процедурой и образуют сужающийся канал сжатия и горло (5). После горла поток воздуха из каждого сектора вытекает в расширяющийся кольцевой канал ($F_3/F_2 = 4.4$), после которого может быть установлена камера сгорания.

Для раскрытия секторов воздухозаборника используется пневмоцилиндр (2) с диаметром поршня 20 мм, установленный по оси модели и соединенный с нижней обечайкой каждого сектора при помощи рычажной системы. Рабочее давле-

ние в цилиндре до 10 МПа. При подаче давления в полость «на открытие» шток пневмоцилиндра перемещается по потоку на 30 мм, и рычаги одновременно выдвигают из корпуса все 4 сектора, поворачивая их относительно соответствующих осей вращения (6). В процессе выдвигания задние кромки верхней и нижней обечаек упираются в цилиндрический корпус и в корпус центрального тела, образуя герметизированный стык и проток воздуха из сектора в расширяющийся канал. За счет подгонки стыкуемых поверхностей обеспечивается точное фиксированное положение верхней и нижней обечаек относительно цилиндрического корпуса в открытом состоянии секторов. При подаче давления в полость «на закрытие» шток пневмоцилиндра перемещается против потока и рычаги одновременно прячут в корпусе все 4 подвижных сектора. Для крепления модели в аэродинамической трубе предусмотрена хвостовая державка (7) диаметром 30 мм.

Условия испытаний

Испытания проводились в сверхзвуковой трубе Т-313 ИТПМ СО РАН [6]. Целью первых испытаний модели воздухозаборника в аэродинамической трубе являлась, прежде всего, визуальная проверка работы механизма открытия и закрытия секторов воздухозаборника в условиях набегающего сверхзвукового потока воздуха. Кроме того, при помощи визуализации течения на входе в воздухозаборник предполагалось установить факт реализации запущенного состояния канала сжатия.

Аэродинамическая труба Т-313 ИТПМ СО РАН (рис. 5) является установкой периодического действия. Труба оснащена плоскими сменными соплами, которые обеспечивают рабочий диапазон чисел Маха потока от $M = 1.75$ до $M = 7$. Рабочая часть имеет прямоугольное сечение размером $0.6 \times 0.6 \times 2$ м и помещена в так называемую камеру давления, служащую для размещения в ней плавающей рамы механизма внешних механических аэродинамических весов и механизма изменения угла атаки. За рабочей частью последовательно расположены сверхзвуковой диффузор, система из двух эжекторов и шахта шумоглушения.

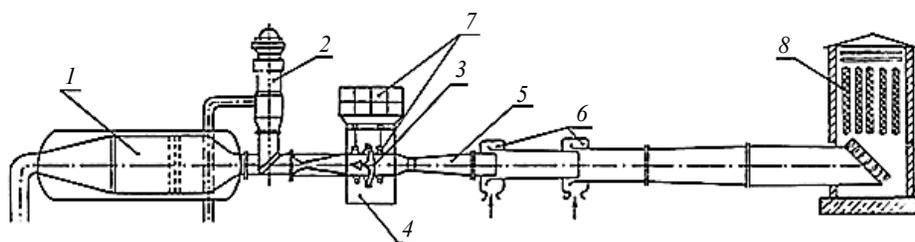


Рис. 5. Контур аэродинамической трубы Т-313 ИТПМ СО РАН. 1 – форкамера; 2 – подогреватель; 3 – рабочая часть; 4 – камера давления; 5 – сверхзвуковой диффузор; 6 – эжекторы; 7 – аэродинамические весы; 8 – шахта шумоглушения

Fig. 5. Circuit of the T-313 wind tunnel, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch Russian Academy of Sciences. 1, settling chamber; 2, heater; 3, working section; 4, pressure chamber; 5, supersonic diffuser; 6, ejectors; 7, aerodynamic balance; 8, silencer

Время одного пуска Т-313 составляет от 3 до 10 мин, в зависимости от рабочего режима. Рабочий воздух в тракт трубы подается от накопительных баллонов – газгольдеров с давлением до 1.8 МПа, которые наполняются воздухом, посту-

пающим от турбокомпрессорной станции. Два эжектора трубы и максимально допустимое давление торможения потока в 1.6 МПа позволяют варьировать числа Рейнольдса в рабочей части трубы в пределах $Re = (5-70) \cdot 10^6$ 1/м. Механизм изменения угла атаки позволяет осуществлять отклонение модели в потоке в диапазоне углов атаки от -4° до $+22^\circ$.

Относительные среднеквадратические отклонения чисел Маха в зоне расположения моделей не превышают 0.5 % при $M = 2-4$. Погрешность определения параметров торможения составляет 0.1–0.3 %, точность определения угла атаки не хуже $\pm 0.05^\circ$.

Испытываемая модель устанавливалась на осевой державке силоизмерительного механизма аэродинамической трубы под нулевым углом атаки (рис. 6). За счет подбора длины державки обеспечивалось размещение входного сечения воздухозаборника в поле зрения оптической системы трубы.

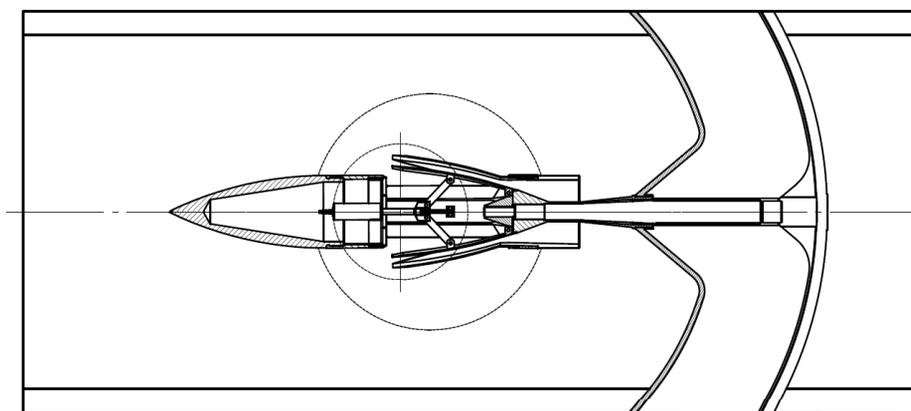


Рис. 6. Установка модели воздухозаборника в рабочей части трубы Т-313.

Окружности показывают поле зрения оптической системы

Fig. 6. Arrangement of the air inlet in the working section of the T-313 wind tunnel.

The circles denote the field of view of the optical system

После выхода аэродинамической трубы на рабочий режим производилось открывание и закрывание секторов воздухозаборника в набегающем потоке путем подачи сжатого воздуха на пневмоцилиндр внутри модели. При этом производилась скоростная видеосъемка процесса открывания и закрывания, с визуализацией течения на входе в воздухозаборник шпирен-методом. Визуализация течения выполнялась через теневой прибор ИАБ-45, с помощью высокоскоростной цифровой видеокамеры Phantom v310M. Видеорегистрация осуществлялась с разрешением 512×384 пикселей, со скоростью записи 300 кадров в секунду и с экспозицией кадра 2 мкс.

Всего было выполнено около 20 опытов с открыванием воздухозаборника. В табл. 3 представлены типичные параметры потока в аэродинамической трубе Т-313, при которых производились испытания секторного изоэнтропического воздухозаборника (здесь: P_0 и T_0 – давление и температура в форкамере, M – число Маха в рабочей части, Re – единичное число Рейнольдса, q – скоростной напор набегающего потока).

Типичные условия испытаний в Т-313

Параметры режимов при испытаниях в Т-313					
Опыт №№	P_0 , кПа	T_0 , К	M	$Re \cdot 10^{-6}$, 1/м	q , кПа
3855	266.3	282	2.53	33.3	84.3
3858	415.0	280	3.05	34.6	68.6
3850	1028.2	287	4.05	50.9	72.4

Результаты испытаний

На рис. 7–9 показаны фотографии обтекания одного из секторов воздухозаборника в закрытом (левая фотография) и в открытом (правая фотография) положении.

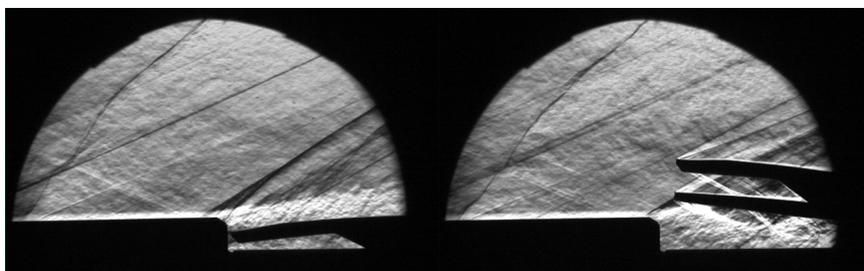


Рис. 7. Опыт 3855; $M = 2.53$
 Fig. 7. Test 3855, $M = 2.53$

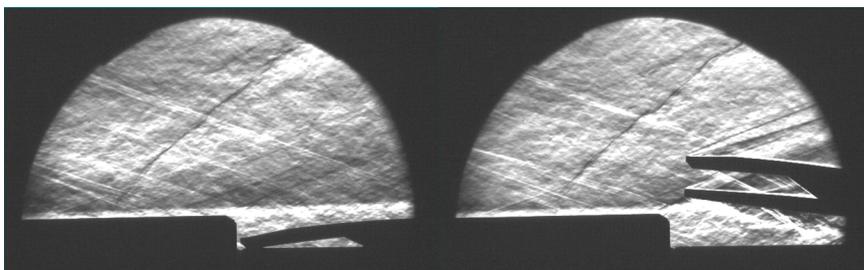


Рис. 8. Опыт 3858; $M = 3.05$
 Fig. 8. Test 3858, $M = 3.05$

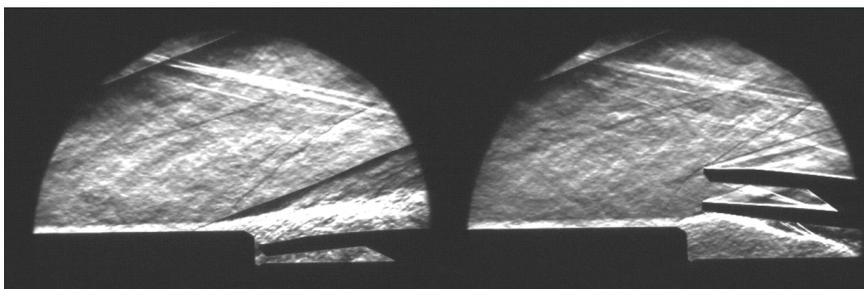


Рис. 9. Опыт 3850; $M = 4.05$
 Fig. 9. Test 3850, $M = 4.05$

На поверхности модели перед входом в воздухозаборник хорошо виден пограничный слой толщиной 4–5 мм. Изменение числа Рейнольдса в 2 раза практически не влияет на видимую толщину пограничного слоя. Для открывания в пневмоцилиндр подавался сжатый воздух с давлением порядка 1 МПа. Аэродинамическое сопротивление способствовало процессу открывания, поэтому открывание секторов воздухозаборника происходило быстро (примерно за 0.05 с). После открывания пограничный слой попадает под нижнюю обечайку и не влияет на течение внутри контура сжатия. Внутри воздухозаборника виден скачок уплотнения от верхней обечайки и веер волн разрежения от нижней обечайки. Это обозначает, что внутренний тракт запускается сразу после открывания и остается в запущенном состоянии вплоть до закрывания. Для закрывания в пневмоцилиндр подавалось давление порядка 7 МПа, после чего происходило закрывание в течение 0.25–0.28 с. Увеличение давления в пневмоцилиндре и замедление процесса закрывания объясняются необходимостью преодоления высоких аэродинамических нагрузок на сектора воздухозаборника, в отличие от процесса открывания.

Заключение

Выполнена практическая реализация предложенной ранее методики профилирования кольцевых сверхзвуковых воздухозаборников изоэнтропического сжатия. Разработана конструкция открывающегося секторного воздухозаборника, рассчитанного на число Маха набегающего потока $M = 3$. Проведены испытания воздухозаборника в аэродинамической трубе Т-313 ИТПМ СО РАН в диапазоне $M = 2.5 \div 4$. Впервые осуществлен процесс открывания и закрывания бокового воздухозаборника в сверхзвуковом набегающем потоке. Открывание воздухозаборника происходило за 0.05 с, а закрывание за 0.25 с. Получены фотографии открытого и закрытого состояния воздухозаборника в сверхзвуковом потоке. По фотографиям видно, что при открывании воздухозаборник запускается в исследованном диапазоне чисел Маха и остается в запущенном состоянии на протяжении рабочего режима аэродинамической трубы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.Н., Быцкевич В.М., Верховолов В.К. и др. Интегральные прямоточные воздушно-реактивные двигатели на твердых топливах (Основы теории и расчета) / под ред. Л.С. Яновского. М.: ИКЦ «Академкнига», 2006. 343 с.
2. Медведев В.Т. Воздухозаборник. Патент РФ 2078717 от 10.05.1997.
3. Галкин В.М., Звегинцев В.И. Построение туннельных осесимметричных сверхзвуковых воздухозаборников // Известия Томского политехнического университета. Т. 326. № 4. 2015. С. 117–124.
4. Галкин В.М., Внучков Д.А., Звегинцев В.И. Газодинамическое конструирование туннельного осесимметричного воздухозаборника изоэнтропического сжатия // Прикладная механика и техническая физика. № 5. 2015. С. 111–118.
5. Галкин В.М., Звегинцев В.И., Внучков Д.А. Проектирование кольцевых сверхзвуковых воздухозаборников изоэнтропического сжатия // Теплофизика и аэромеханика. № 5. 2016.
6. Харитонов А.М. Техника и методы аэрофизического эксперимента. Ч.1 Аэродинамические трубы и газодинамические установки: учебник. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. 220 с.

Статья поступила 11.08.2016 г.

Braguntsov E.Ya., Vnuchkov D.A., Galkin V.M., Ivanov I.V., Zvegintsev V.I. (2016) TEST OF THE ANNULAR SUPERSONIC AIR INLET WITH ISENTROPIC COMPRESSION IN THE WIND TUNNEL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 43–52

DOI 10.17223/19988621/433/5

In this paper, the practical implementation of the previously proposed design method of the annular supersonic air inlet with isentropic compression is considered. In the beginning, the contour of the annular supersonic nozzle is calculated. Here, the ideal gas is isentropically accelerated from $M = 1$ to $M = 3$. When the flow direction turns around 180 degrees, the walls of the nozzle and each flow line can be considered as compression surfaces for the supersonic air inlet. In this study, two flow lines with relative mass flow rate equal to 1.0 and 0.6 were chosen as inlet compression surfaces. Then, the theoretical contour was transformed into a real inlet profile in accordance with the given restrictions. The profile was transformed into four sectors with possibilities of both folding and unfolding inside and outside the central cylindrical body of 120 mm in diameter. The movement of the sectors is implemented by pneumatic cylinder at air pressure up to 10 MPa.

The resulting air inlet model was tested in the wind tunnel at Mach number varying from $M = 2.5$ to $M = 4$. Over the course of experiments, the process of both inlet folding and unfolding in the supersonic air flow was demonstrated. The time of folding and unfolding was 0.25 and 0.05 s, respectively. According to the shadow visualization results in each inlet sector in the working position, the flow pattern complies with theoretical predictions.

Keywords: nozzle, air inlet, supersonic flow, ideal gas, reversed flow, opening inlet.

BRAGUNTSOV Egor Yakovlevich (Candidate of Technical Sciences, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: braeg@yandex.ru

VNUCHKOV Dmitry Aleksandrovich (Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: vnuchkov@itam.nsc.ru

GALKIN Vladislav Mikhailovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: vlg@tpu.ru

IVANOV Igor Vladimirovich (Candidate of Technical Science, JSC «SPA SPLAV», Tula, Russian Federation)

E-mail: ivaig@rambler.ru

ZVEGINTSEV Valery Ivanovich (Doctor of Technical Sciences, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: zvegin@itam.nsc.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov V.N., Bytskevich V.M., Verkholomov V.K., et al. (2010) *Integral'nye pryamo-tochnye vozdušno-reaktivnye dvigateli na tverdykh toplivakh (Osnovy teorii i rascheta)* [Integral solid fueled ramjets (Fundamentals of theory and calculations)]. Moscow: Akademkniga.
2. Medvedev V.T. *Vozdukhovozabornik*. Patent RU 2078717, 10.05.1997.
3. Galkin V.M., Zvegintsev V.I. (2015) Postroenie tunnel'nykh osesimmetrichnykh sverkhzvukovykh vozdukhovozabornikov [Forming of ducted axisymmetric supersonic air inlets]. *Izvestiya*

Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Tomsk Polytechnic University. 326(4). pp. 117–124.

4. Galkin V.M., Vnuchkov D.A., Zvegintsev V. I. (2015) Gas-dynamic design of an axisymmetric tunnel air inlet with isentropic compression. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 56(5). pp. 831–837. DOI:10.1134/S0021894415050090.
5. Galkin V.M., Zvegintsev V. I., Vnuchkov D.A. (2016). Contouring of annular supersonic inlets with isentropic compression. *Thermophysics and Aeromechanics.* 5. pp. 665–676.
6. Kharitonov A.M. (2005) *Tekhnika i metody aerofizicheskogo eksperimenta. Ch.1 Aerodinamicheskie truby i gazodinamicheskie ustanovki. Uchebnik* [Techniques and Methods of Aerophysical Experiments. Part 1. Wind Tunnels and Gas-Dynamic Installations]. Novosibirsk: NGTU.

УДК 534

DOI 10.17223/19988621/433/6

А.М. Бубенчиков, М.А. Бубенчиков, Г.Е. Дунаевский, И.А. Евсеев,
О.С. Киселева, В.О. Кутенков, Ф.Ж. Найманбаев

ТЕОРИЯ ИНЕРЦИОННОГО ДАТЧИКА ИЗМЕРЕНИЯ ПЛОТНОСТИ НЕФТЕГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Построена математическая модель инерционного датчика для измерения плотности газожидкостной среды. На основе теоремы о моменте количества движения для относительного движения около подвижной оси, проходящей через центр масс системы, получено определяющее уравнение для крутильных колебаний рамки расходомера. Найдены аналитическое и численное решения полученного уравнения, на базе которых оценивается влияние плотности смеси на величину амплитуды крутильных колебаний рамки.

Ключевые слова: *нефтегазожидкостная смесь, инерционный датчик плотности, рамка расходомера, электромагниты, крутильные колебания.*

Транспортная фирма «Emerson», США, занимающаяся доставкой нефтегазожидкостного сырья потребителю, разработала инерционный датчик измерения плотности среды. Принцип работы датчика основан на действии сил Кориолиса, отклоняющих вибрирующую трубку с движущейся в ней газожидкостной смесью. Прибор запатентован и успешно прошел испытания, а также стадию практического применения. Однако в отдельных случаях датчик показывает отрицательную плотность. Несмотря на то, что принцип работы датчика использует классический эффект проявления инерционных сил, к настоящему времени не было построено механической модели и отвечающей ей математической теории. Желание восполнить этот пробел, а главное, разобраться с причинами аномального поведения в работе прибора, побудило нас создать элементарную теорию инерционного датчика.

Реальный датчик состоит из двух одинаковых металлических трубок, в которых, как и в основной трубе, движется газожидкостная смесь. В центральной части этой системы между трубками установлены два электромагнита, которые приводят трубки в колебательное движение вокруг оси, параллельной оси трубопровода. В результате действия сил Кориолиса каждый из периферийных участков трубчатого ответвления (рамки) получает более значимые отклонения, нежели их центральные части. Эти отклонения, зависящие от плотности и скорости движения смеси в трубках, регистрируются электрической системой, в основе работы которой лежит закон электромагнитной индукции Фарадея. Поэтому механические колебания однозначным образом определяют соответствующие электрические комбинации гармоник, расшифровка которых и позволяет найти плотность газожидкостной смеси.

Для упрощения ситуации мы использовали одну трубку и жесткую подставку, между которыми установили электромагниты (рис. 1). Кроме этого, скругленную рамку заменили кусочно-линейными участками и сделали резиновые крепления рамки с основным каналом. Но сделанные упрощения не являются принципиальными и без труда могут быть устранены при дальнейших обобщениях математической модели. Задачи транспорта нефти и газа входят в область производствен-

ных интересов авторов этой статьи, так же как и задача об эволюции границы нефтяной залежи [1]. Особый интерес представляют те из них, в которых удается добиться относительного продвижения средствами и методами классической механики [2–8].

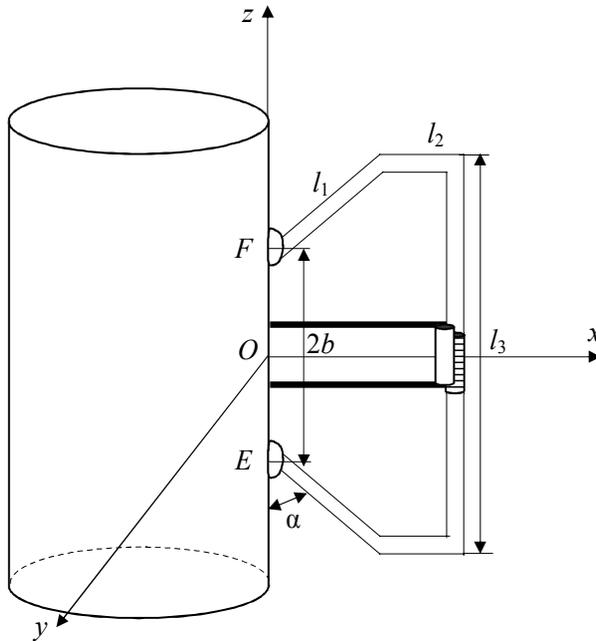


Рис. 1. Рамка расходомера, прикрепленная к трубе с нефтегазожидкостной смесью
Fig. 1. Flow meter frame attached to the pipe with the oil-gas-liquid mixture

Момент инерции рамки относительно оси Ox

Для удобства подсчета момента инерции разобьем рамку, показанную на рис. 1, на 5 фрагментов: 2 наклонных, 2 горизонтальных и вертикальный, но рассматривать будем три участка, остальные добавляются по симметрии. Соответственно длины этих участков будут l_1 , l_2 , l_3 , а массы трубок вместе со средой, в них находящейся, – m_1 , m_2 , m_3 . Вертикальный фрагмент имеет момент инерции

$$A_3 = \frac{m_3 l_3^2}{12}, \quad (1)$$

каждый из горизонтальных

$$A_2 = m_2 l_2^2. \quad (2)$$

Моменты инерции наклонных фрагментов можно определить интегрированием по координате, отсчитываемой вдоль оси трубки ξ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{l_1} z^2 dm = \tilde{\rho} \tilde{s} \int_0^{l_1} z^2 d\xi = \tilde{\rho} \tilde{s} \int_0^{l_1} (b + \xi \cos \alpha)^2 d\xi = \\ &= \tilde{\rho} \tilde{s} \left(b^2 l_1 + b l_1^2 \cos \alpha + \frac{l_1^3}{3} \cos^2 \alpha \right) = m_1 \left(b^2 + b l_1 \cos \alpha + \frac{l_1^2}{3} \cos^2 \alpha \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{\rho}\tilde{s} = \rho_0 s_0 + \rho s$ – масса единицы длины трубки и среды, в ней находящейся, ρ_0 – плотность материала трубки, s_0 – площадь сечения металлической части трубки, ρ – плотность газожидкостной среды, s – площадь открытого сечения, $\tilde{\rho}\tilde{s}l_1 = m_1$ – масса трубки, заполненной газожидкостной смесью, длиной l_1 .

Тогда момент инерции рамки, содержащей смесь, будет

$$A = 2A_1 + 2A_2 + A_3 = 2m_1 \left(b^2 + bl_1 \cos \alpha + \frac{l_1^2}{3} \cos^2 \alpha \right) + 2m_2 l_2^2 + \frac{m_3 l_3^2}{12}. \quad (4)$$

Действие кориолисовых сил

Пусть масса среды на каждом из выделенных участков будет $m'_i = \rho s l_i$. Пусть также \bar{v}_i , ($i = \overline{1, 3}$) – скорость течения среды в трубках на каждом из определяющих участков рамки, а $\bar{\omega}$ – угловая скорость вращения рамки относительно оси Oz . Тогда инерционная сила Кориолиса, действующая на каждом из участков, будет

$$\bar{F}_i^C = -2m'_i \bar{\omega} \times \bar{v}_i. \quad (5)$$

В настоящей работе мы рассматриваем крутильные колебания рамки вокруг оси Ox . При этом сама рамка во все время движения находится в плоскости xOz . Поскольку вектор $\bar{\omega}$ направлен по оси Oz , а все скорости \bar{v}_i лежат в плоскости xOz , то силы \bar{F}_i^C будут направлены по оси Oy . Следовательно, моменты этих сил будут направлены по оси Ox . Величина каждого из моментов кориолисовых сил определится как

$$\beta_i F_i^C \quad (i = 1, 2).$$

Здесь β_i – плечо силы. Причем, как следует из рис. 1,

$$\beta_1 = b + \frac{l_1 \cos \alpha}{2}, \quad \beta_2 = b + l_1 \cos \alpha. \quad (6)$$

В то же время абсолютные значения кориолисовых сил от отдельных участков рамки будут следующими:

$$F_1^C = 2\rho s l_1 \omega v \sin \alpha, \quad F_2^C = 2\rho s l_2 \omega v, \quad F_3^C = 0. \quad (7)$$

Поскольку рамка является симметричной относительно оси Ox , то участков действия сил Кориолиса не два, а четыре. Поэтому суммарная величина моментов от этих сил будет

$$M_x^C = 2(\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2). \quad (8)$$

В результате действия электромагнитов, закрепленных на стойке и на рамке, ось Ox , жестко связанная с рамкой, колеблется относительно неподвижной стойки. Нас будут интересовать крутильные колебания около оси Ox , вызванные действием сил Кориолиса. Поскольку описание проводится в рамках модели абсолютно твердого тела, то рамка должна оставаться плоской во все время движения. Чтобы она оставалась таковой при крутильных колебаниях, точки крепления рамки E и F в процессе движения должны немного смещаться. Это смещение будет тем меньше, чем более сближены эти точки. Поэтому места крепления рамки должны быть выполнены из эластичного материала, например резины. В результате имеем, что ось Oz проходит через подвижные точки крепления E и F , ось Ox – через центр

масс рамки и перпендикуляр к Oz , а ось Oy дополняет их до правой тройки. Тогда уравнение крутильных колебаний рамки можно записать на основе теоремы о моменте количества движения для относительного движения около подвижной оси Ox , которая является главной центральной осью инерции рамки [9]:

$$A \frac{dp}{dt} = M_x^{(e)} - M_x^C. \quad (9)$$

Причем в качестве момента внешних сил необходимо взять момент сопротивления, пропорциональный угловой скорости p , и момент упругих сил, пропорциональный углу поворота рамки:

$$M_x^{(e)} = -fp - c\varphi. \quad (10)$$

Таким образом, окончательно система уравнений, определяющих положение рамки при ее поворотах около оси Ox будет

$$A \frac{dp}{dt} = -fp - c\varphi - 4\rho s a v (\beta_1 l_1 \sin \alpha + \beta_2 l_2); \quad (11)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = p. \quad (12)$$

Здесь p – угловая скорость вращения рамки относительно оси Ox . Причем угловую скорость колебаний рамки относительно оси Oz будем определять гармоническим законом, получающемся в результате действия переменного тока на катушку электромагнита

$$\omega = a \cos kt. \quad (13)$$

Определяющее уравнение крутильных колебаний

Систему (11), (12) запишем в виде одного уравнения

$$A\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi} + c\varphi = -N \cos kt, \quad (14)$$

где $N = 4\rho s a v (\beta_1 l_1 \sin \alpha + \beta_2 l_2)$.

Разделим (14) на A , тогда вместо последнего уравнения можно записать:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + n^2\varphi = -N_1 \cos kt. \quad (15)$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{f}{A}, \quad n^2 = \frac{c}{A}, \quad N_1 = \frac{N}{A}. \quad (16)$$

Движение однородной среды с трубах расходомера

В случае движения однородной среды ($\rho = const$) в трубках расходомера можно получить аналитическое решение уравнения (15). Общее решение этого уравнения есть общее решение соответствующего однородного уравнения, сложенное с частным решением неоднородного. Решение же однородного уравнения будем искать в виде

$$\varphi = \exp(\alpha t). \quad (17)$$

Подставляя это распределение в однородную часть (15) и приравнявая ее к нулю, получим характеристическое уравнение для нахождения α :

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + n^2 = 0, \quad (18)$$

которое имеет два корня:

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - n^2}. \quad (19)$$

Датчик плотности, работающий в режиме колебаний рамки, не должен терять много механической энергии во время своей работы. Другими словами, назначение прибора предполагает малые величины трения в нем. В этой связи нас будут интересовать только случаи $\beta < n$. Ограничиваясь только этим режимом, мы можем записать общее решение однородного уравнения в виде

$$\varphi = B \exp(-\beta t) \sin(n_1 t + \varepsilon), \quad (20)$$

где B и ε – пока произвольные постоянные, $n_1 = \sqrt{\beta^2 - n^2}$.

Частное решение неоднородного уравнения определяется по виду его правой части, следовательно, оно должно быть линейной комбинацией двух гармонических волн, имеющих частоту k :

$$\varphi = C \cos kt + D \sin kt, \quad (21)$$

откуда получаем

$$\dot{\varphi} = -Ck \sin kt + Dk \cos kt,$$

$$\ddot{\varphi} = -Ck^2 \cos kt - Dk^2 \sin kt.$$

Подставляя эти распределения в (15) и приравнивая коэффициенты при $\sin kt$ и $\cos kt$ нулю, найдем

$$C = -\frac{(n^2 - k^2)N_1}{4b^2k^2 + (n^2 - k^2)^2}, \quad D = -\frac{2bkN_1}{4b^2k^2 + (n^2 - k^2)^2}. \quad (22)$$

Таким образом, общее решение (15) есть

$$\varphi = B \exp(-\beta t) \sin(n_1 t + \varepsilon) + C \cos kt + D \sin kt. \quad (23)$$

Это решение состоит из собственного колебания (первое слагаемое) и вынужденного колебания (второе и третье слагаемые). Интересным с теоретической точки зрения и очень близким к практической ситуации является случай нулевого трения в системе, при котором $\beta = 0$, тогда для φ получаем распределение

$$\varphi = B \sin(nt + \varepsilon) - \frac{N_1}{n^2 - k^2} \cos kt. \quad (24)$$

Здесь при стремлении частоты вынужденного колебания k к частоте собственного колебания n возможен неограниченный рост амплитуды вынужденного колебания.

Естественно, что до момента подачи тока на электромагниты рамка находилась в покое, т.е. при $t = 0$ $\dot{\varphi} = 0$. Реализуя это условие из (24), найдем, что $\varepsilon = \pi/2$, тогда

$$\varphi = B \cos nt - \frac{N_1}{n^2 - k^2} \cos kt. \quad (25)$$

В то же время нет никаких оснований считать рамку смещенной в начальный момент времени так, что при $t = 0$ $\varphi = 0$. Это условие, в свою очередь, позволяет определить вторую произвольную постоянную $B = \frac{N_1}{n^2 - k^2}$.

Тогда окончательно для угла поворота рамки около оси Ox найдем:

$$\varphi = \frac{N_1}{n^2 - k^2} (\cos nt - \cos kt). \quad (26)$$

Формула (26) позволяет выявить зависимость характера колебаний от геометрических характеристик рамки и найти амплитуду колебаний в зависимости от этих же параметров, а также от значений плотности смеси и от скорости ее подачи через трубки. Разлагая косинусы в (26) в ряд Тейлора и деля результат на $n^2 - k^2$, получим, что конечное выражение не будет содержать особенности в знаменателе при $k \rightarrow n$. Однако с течением времени амплитуда колебаний все равно будет неограниченно расти.

Резонансные явления, столь важные с теоретической точки зрения, в практических ситуациях являются нежелательными. Поэтому расходомер должен быть спроектирован так, чтобы ни при каких обстоятельствах не выполнялось условие $n = k$. Это легко обеспечить за счет выбора частоты колебаний электрического тока, подаваемого на катушки электромагнитов. Если же все-таки преобразователь частоты отсутствует, то имеются широкие возможности за счет выбора толщины стенок трубки, от которых зависит жесткость рамки c по отношению к поворотам около оси Ox .

Пробковый режим движения среды в трубках расходомера

Известно, что в узких трубках под действием капиллярных сил газожидкостная среда способна переходить к поршневому (пробковому) режиму движения. В дальнейшем, не вдаваясь в детали проблемы перехода от пузырькового к поршневому режиму, оценим лишь вклад уже существующего пробкового режима в работу инерционного датчика измерения плотности рассматриваемого типа. Причем для простоты примем, что размер газовых и жидких пробок является одинаковым.

Расположение пробок, чередующихся в пространстве и со временем на участке l_2 для нескольких соотношений l_p и l_2 показан на рис. 2–4.

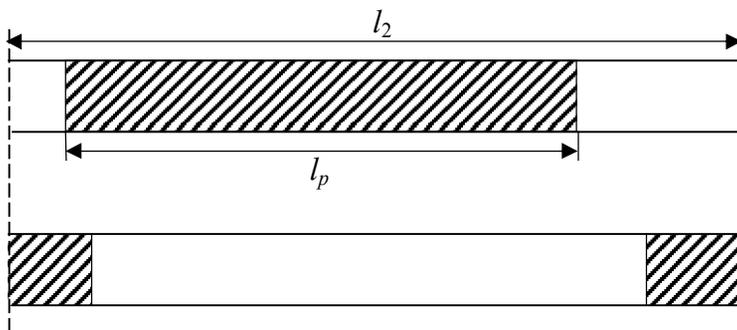


Рис. 2. Случай, когда на участке l_2 укладывается одна целая пробка
Fig. 2. The case of one intact plug located in the section l_2

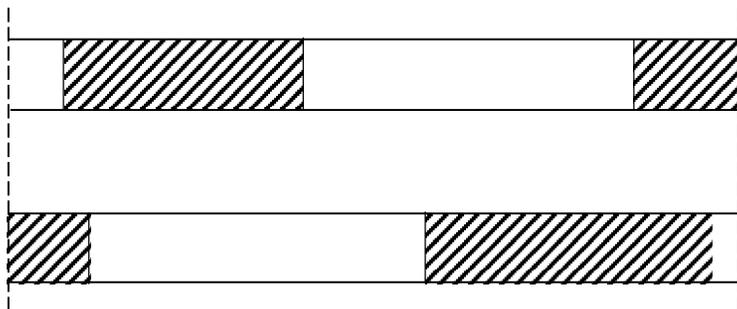


Рис. 3. Случай, когда на рассматриваемом участке располагаются две целые пробки различных фаз

Fig. 3. The case of two intact plugs of different phases located in the section of interest

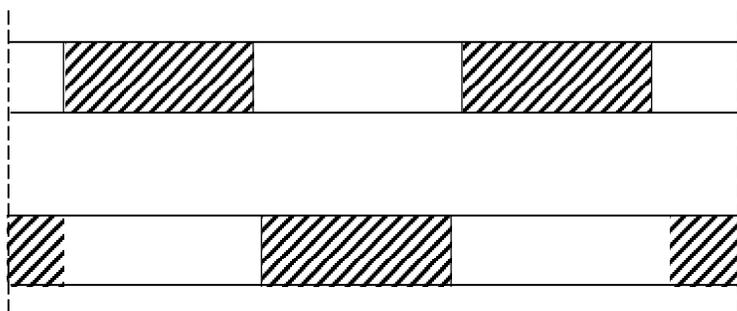


Рис. 4. Пример, когда на участке l_2 укладываются одна пробка одной из фаз и две другие – альтернативной фазы

Fig. 4. An example of one intact plug of one phase with other two plugs of alternative phase, all located in the section l_2

Введем в рассмотрение две целые величины, определяемые как целые части от деления соответствующих длин на l_p :

$$z_2 = [l_2/l_p], \quad z = [vt/l_p]. \quad (27)$$

Первая характеризует количество зон чередующейся фазы на участке l_2 , вторая – количество таких зон на участке пути $s = vt$, пройденном газожидкостной средой по бесконечно длинной трубке.

Тогда доля объема конкретной фазы в трубке длиной l_2 будет при нечетном z_2

$$\delta^+ = \frac{z_2 + 1}{2} \frac{l_p}{l_2}, \quad (28)$$

при четном z_2

$$\delta^+ = \frac{z_2}{2} \frac{l_p}{l_2}. \quad (29)$$

При этом во всех случаях

$$\delta^- = 1 - \delta^+. \quad (30)$$

Чередувание полостей, занятых газом и жидкостью, может быть учтено по следующим формулам для локальной плотности:

$$\rho^+ = \frac{1+(-1)^z}{2} \rho_f + \frac{1-(-1)^z}{2} \rho_g; \quad (31)$$

$$\rho^- = \frac{1-(-1)^z}{2} \rho_f + \frac{1+(-1)^z}{2} \rho_g, \quad (32)$$

из которых следует, что при четном z локальные значения плотностей на входе и выходе из определяющего участка будут $\rho^+ = \rho_f$ и $\rho^- = \rho_g$, а при нечетном – наоборот.

Тогда окончательно средняя на участке l_2 плотность среды определится по формуле

$$\rho = \rho^+ \delta^+ + \rho^- \delta^-.$$

В случае, когда плотность в трубах расходомера является переменной во времени величиной, мы не можем получить аналитическое решение. Поэтому в дальнейшем решение уравнения (15) строится с использованием технологии Рунге-Кутты стандартного четвертого порядка точности.

Результаты расчетов

Вычисления проведены для случая $l_1 = 0.15$ м, $l_2 = 0.05$ м, $l_3 = 0.25$ м, $d = 0.01$ м, $\alpha = \pi/4$, $v = 10$ м/с, $a = \pi/20$, $s_0/s = 1/4$, $n = 5$ с⁻¹, $k = 50$ с⁻¹.

На рис. 5 аналитическим решением (26) определены два распределения: одно показано серой кривой, это случай плотности $\rho = 500$ кг/м³; второе – пунктир – $\rho = 100$ кг/м³. Третья кривая, показанная черной сплошной линией, есть пробковый режим с одинаковыми длинами газовых и жидких пробок равными 0.05 м. В этом случае газожидкостная смесь не является однородной и локальная плотность при движении среды меняется скачком от значения плотности жидкости $\rho_f = 999$ кг/м³ до значения плотности газа $\rho_g = 1$ кг/м³, и наоборот. При этом, однако, средняя во времени плотность составляет величину $\rho = 500$ кг/м³.

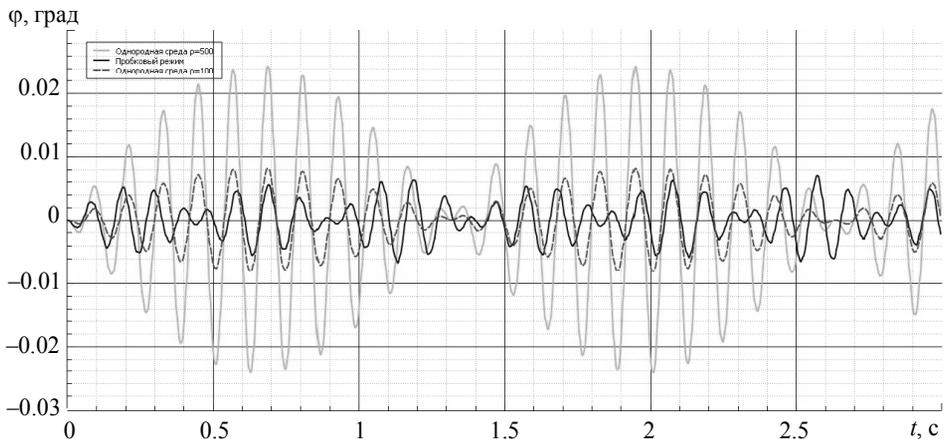


Рис. 5. Изменение угла крутильных колебаний со временем
Fig. 5. Dependence of the torsional vibration angle on time

Как видно из рисунка, получившееся распределение уже не имеет формы биения, поскольку в процесс крутильных колебаний рамки включилась третья частота, определенная движением пробки. Напомним, что биения отвечают режиму колебаний с двумя близкими частотами при равных амплитудах обоих колебаний.

Но самое примечательное в расчете варианта пробкового режима в том, что максимальная амплитуда колебаний стала меньше, чем в случае движения однородной среды с величиной плотности $\rho = 100 \text{ кг/м}^3$ (пунктир). Резкое снижение амплитуды колебаний в пробковом режиме является первой из причин, определяющих отрицательные показания плотности применяемым датчиком.

Второй причиной аномальных показаний давления является несоответствие нелинейного характера изменения амплитуды биений (сплошная линия на рис. 6) линейной шкале для ее определения (пунктирная прямая). Если двигаться по пунктирной кривой с равным шагом по амплитуде, то в области малых амплитуд мы быстро придем к отрицательной плотности.

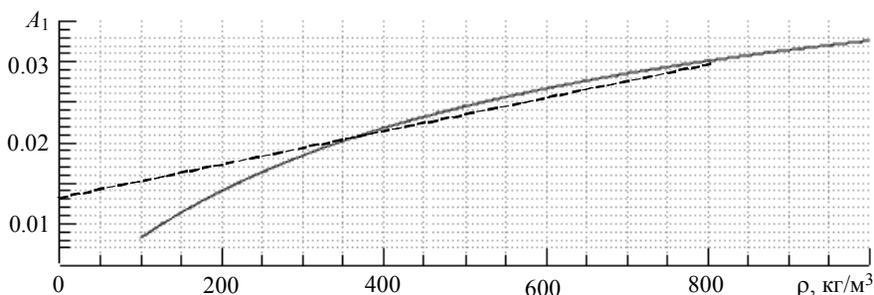


Рис. 6. Зависимость амплитуды биений от плотности смеси

Fig. 6. Dependence of the beat amplitude on mixture density

На рис. 6 показана зависимость коэффициента $A_1 = N_1 / (n^2 - k^2)$ от плотности нефтегазожидкостной смеси ρ . Как видим, характер представленной зависимости является нелинейным. При этом шкала для определения плотности по максимальной амплитуде является линейной.

Реальный датчик измерения плотности имеет две спаренные рамки, которые имеют скругленные углы. Кроме того, в местах скрепления с трубой не резиновые соединения, а сварные швы. Однако для устранения этих различий не требуется существенной модификации описанной здесь математической модели. Усовершенствования будут касаться подсчета момента инерции на скругленных участках и введения в рассмотрение недеформируемых частей рамок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khudobina J., Bubenchikov A., Bubenchikov M., et al. Numerical Simulation of Oil Pool Boundary Evolution // Advanced Materials in Technology and Construction (AMTC-2015): AIP Conf. Proc. 1698, 060006 (2016). Doi 10.1063/1.4937861
2. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., et al. Condensed-state physicsthe potential field of carbon bodies as a basis for sorption properties of barrier gas systems // Russ. Phys. J. 2015. V. 58. No. 7. P. 882–888.
3. Bubenchikov A., Bubenchikov M., Matvienko O., Shcherbakov N. The mathematical model of the chevron-arch gearing transmitter // Advanced Materials in Technology and Construction (AMTC-2015): AIP Conf. Proc. 1698, 060005 (2016). Doi 10.1063/1.4937860.

4. *Bubenchikov A., Bubenchikov M., Matvienko O., et al.* Simple energy barrier for component mixture of natural gases // *Advanced Materials in Technology and Construction (AMTC-2015): AIP Conf. Proc.* 1698, 060007 (2016). Doi 10.1063/1.4937862.
5. *Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Ukolov A.V.* Permeability of ultra-thin amorphous carbonfilms // *EPJ Web of Conferences.*110, 01078 (2016). Doi 10.1051/epjconf/201611001077.
6. *Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Tsyrenova V.B.* Ability of fullerene to accumulate hydrogen // *EPJ Web of Conferences.*110, 01077 (2016). Doi 10.1051/epjconf/201611001077.
7. *Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Bubenchikov A.M., et al.* The interaction potential of an open nanotube and its permeability: molecular dynamicssimulation // *EPJ Web of Conferences.*110, 01061 (2016). Doi 10.1051/epjconf/201611001061.
8. *Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., et al.* Separation of gases using ultra-thin porouslayers of monodisperse nanoparticles // *EPJ Web of Conferences.* 110, 01014 (2016). Doi 10.1051/epjconf/201611001014.
9. *Томилов Е.Д.* Теоретическая механика. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1970. Ч. 2. 317 с.

Статья поступила: 16.05.2016 г.

Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Dunaevskiy G.E., Evseev I.A., Kiseleva O.S., Kutenkov V.O., Naymanbaev F.Zh. (2016) THEORY OF THE INERTIAL DENSITY-MEASURING SENSOR FOR THE OIL – LIQUID – GAS MIXTURE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 5(43). pp. 53–63

DOI 10.17223/19988621/433/6

The Emerson transport company (USA), which is engaged in delivery of oil to consumers, has developed an inertial sensor for medium density measurements. The sensor operating principle is based on Coriolis forces the action of which causes the deflection of a vibrating tube with a moving liquid–gas mixture in it. The real sensor (Emerson) consists of two metal tubes with a gas–liquid mixture flow. In the central part of the system, there are two electromagnets which create axial vibrations of the frames. In this paper, a single pipe and a rigid stand with electromagnets between them are used. The rounded frame is replaced by piecewise linear sections and fixed onto the main channel by rubber elements. On the basis of the angular momentum theory for relative motion around a mobile axis passing through the mass center of the system, the governing equation for torsional vibrations of the meter frame has been obtained. The analytical and numerical solutions of this equation are obtained and used as a basis for estimating the effect of the mixture density on the amplitude of frame torsional vibrations.

Keywords: oil and gas–liquid mixture, inertial density sensor, meter frame, electromagnets, torsional vibrations.

BUBENCHIKOV Aleksey Mikhaylovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia). E-mail: alexy121@mail.ru

BUBENCHIKOV Mikhail Alexeevich (Candidate of Physics and Mathematics, GazpromTransgaz Tomsk, Tomsk, Russia). E-mail: michael121@mail.ru

DUNAEVSKY Grigoriy Ephimovich (Doctor of Technical Science, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russia).

EVSEEV Igor' Aleksandrovich (Tomsk State University, Tomsk, Russia).

KISELEVA Ol'ga Sergeevna (Tomsk State University, Tomsk, Russia).

KUTENKOV Viktor Olegovich (Tomsk State University, Tomsk, Russia).

NAYMANBAEV Farkhat Zhumagalievich (Tomsk State University, Tomsk, Russia).

REFERENCES

1. Khudobina J., Bubenchikov A., Bubenchikov M., Matvienko O., Libin E. (2016) Numerical Simulation of Oil Pool Boundary Evolution. *Advanced Materials in Technology and Construction* (AMTC-2015) : AIP Conf. Proc. 1698, 060006. DOI 10.1063/1.4937861.
2. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Libin E.E., Khudobina Yu.P. (2015) Condensed-state physics the potential field of carbon bodies as a basis for sorption properties of barrier gas systems. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 882–888.
3. Bubenchikov A., Bubenchikov M., Matvienko O., Shcherbakov N. (2016) The mathematical model of the chevron-arch gearing transmitter. *Advanced Materials in Technology and Construction* (AMTC-2015): AIP Conf. Proc. 1698, 060005. DOI 10.1063/1.4937860.
4. Bubenchikov A., Bubenchikov M., Matvienko O., Tarasov E., Usenko O. (2016) Simple energy barrier for component mixture of natural gases. *Advanced Materials in Technology and Construction* (AMTC-2015): AIP Conf. Proc. 1698, 060007. DOI 10.1063/1.4937862.
5. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Ukolov A.V. (2016) Permeability of ultra-thin amorphous carbon films. *EPJ Web of Conferences*.110, 01078. DOI 10.1051/epjconf/201611001077.
6. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Tsyrenova V.B. (2016) Ability of fullerene to accumulate hydrogen. *EPJ Web of Conferences*.110, 01077. DOI 10.1051/epjconf/201611001077.
7. Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Malozemov A.V., Tarasov E.A. (2016) The interaction potential of an open nanotube and its permeability: molecular dynamics simulation. *EPJ Web of Conferences*.110, 01061. DOI 10.1051/epjconf/201611001061.
8. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Poteryaeva V.A., Jambaa S. (2016) Separation of gases using ultra-thin porous layers of monodisperse nanoparticles. *EPJ Web of Conferences*. 110, 01014. DOI 10.1051/epjconf/201611001014.
9. Tomilov E.D. (1970) *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. Tomsk: Tomsk St. Univ. Publ.

УДК 532.546: 519.6
DOI 10.17223/19988621/433/7

Х.М. Гамзаев, И.К. Гадимов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

Рассматривается процесс нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя параллельными плоскими стенками. Для описания данного процесса предлагается одномерная модель плоскопараллельного течения вязкой жидкости. В рамках этой модели поставлена задача, с нелокальным дополнительным условием, об определении зависимости перепада давления от времени по заданному объемному расходу жидкости через данный зазор. Данная задача относится к классу обратных задач, связанных с восстановлением зависимости правых частей параболических уравнений от времени. Поставленная задача путем дискретизации по времени преобразуется к полудискретной задаче, для решения которой предлагается специальное представление. В результате решение исходной задачи на каждом временном слое сводится к решению двух краевых задач с локальными условиями и линейному уравнению относительно приближенного значения перепада давления.

Ключевые слова: *течение жидкости в зазоре, расход жидкости через зазор, нелокальное условие, перепад давления по длине зазоре, обратная задача.*

Известно, что под герметичностью гидросистемы понимается непроницаемость жидкости, находящейся под некоторым избыточным давлением, через стык двух перемещающихся одна относительно другой или неподвижных жестких поверхностей деталей, не составляющих единого целого. Обычно герметичность достигается устранением зазора между уплотняемыми поверхностями с помощью уплотнения из какого-либо мягкого эластичного материала или созданием малого зазора между поверхностями соединяемых элементов [1]. Достаточная герметичность соединений элементов в гидросистемах чаще всего обеспечивается выполнением гарантированного малого зазора между поверхностями. Зазоры делятся на две основные группы: зазоры, образованные двумя параллельными плоскими стенками (плоские щели), и зазоры, образованные двумя криволинейными, обычно цилиндрическими, поверхностями (кольцевые щели).

Течения жидкостей в зазорах представляет практический интерес в связи с решением задач по герметизацию соединений элементов в гидросистемах [2–5]. При исследовании течения жидкостей в зазорах гидросистем возникают следующие задачи:

- определение перепада давления, необходимого для пропускания заданного расхода жидкости через данный зазор;
- определение расхода жидкости через данный зазор при заданном перепаде давления.

В практике для решения этих задач в основном используется математическая модель стационарного течения однородных несжимаемых жидкостей в зазорах

при соответствующих реологических законах. Однако в связи с тем, что большинство течений жидкостей в зазорах характеризуются нестационарностью, применение модели стационарного течения может привести к получению неверных оценок параметров течения.

В данной работе исследуется задача определения перепада давления при нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости по заданному расходу жидкости через данный зазор.

Постановка задачи

Пусть рассматривается процесс нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре длиной l , образованном двумя параллельными неподвижными плоскими стенками, находящимися одна от другой на расстоянии δ . Начало системы координат разместим на нижней стенке зазора, направив ось OX вдоль течения жидкости, а ось OZ – по нормали к стенкам (рис. 1).



Рис. 1. Схема течения в зазоре

Fig. 1. Scheme of the flow through the gap

Предполагается, что поток жидкости направлен вдоль оси OX так, что из трех компонент скорости (u_x, u_y, u_z) остается лишь одна $u_x \neq 0$, а $u_z = 0$ и $u_y = 0$.

Учитывая, что движение жидкости происходит прямолинейно параллельно оси OX , математическую модель нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре можно представить в виде [6]

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$
(1)

где u_x – компонент скорости течения жидкости, направленный параллельно оси OX , ρ – плотность жидкости, P – давление, μ – динамическая вязкость жидкости.

При этом предполагается, что ширина зазора b (не указана на рис.) достаточно большая ($b \gg \delta$), чтобы не учитывать краевые эффекты.

Из второго и третьего уравнений системы (1) следует, что u_x представляет функцию только z и t , а из двух последних – независимость давления P от y и z , т.е.

$$u_x = u_x(z, t), \quad P = P(x, t).$$

Тогда из системы (1) приходим к следующей форме уравнения нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x},$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости. Обратим внимание на следующую особенность последнего уравнения: левая часть его не зависит от x , а правая часть от z . Это возможно только в том случае, если $\frac{\partial P}{\partial x}$ является функцией только времени. Полагая

$$u(z, t) = u_x(z, t), \quad -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P(t)}{l},$$

математическую модель течения вязкой жидкости в зазоре между двумя параллельными плоскими стенками можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{l}, \quad 0 < z < \delta, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

где $\Delta P(t)$ — перепад давления по длине зазора в направлении потока.

Пусть для уравнения (2) задается начальное условие

$$u|_{t=0} = \phi(z). \quad (3)$$

Необходимо отметить, что на течение жидкости в зазоре существенное влияние оказывают граничные условия, соответствующие взаимодействию жидкости с неподвижными плоскими стенками зазора. Предположим, что на стенках зазора выполняется так называемое условие прилипания. Тогда для уравнения (2) будем иметь следующие граничные условия:

$$u|_{z=0} = 0, \quad (4)$$

$$u|_{z=\delta} = 0. \quad (5)$$

Очевидно, что задавая закон изменения перепада давления $\Delta P(t)$ во времени, решив задачу (2) – (5), можно найти объемный расход жидкости через зазор по формуле

$$Q(t) = \int_0^{\delta} b u(z, t) dz. \quad (6)$$

Теперь предположим, что закон изменения объемного расхода жидкости $Q(t)$ известен и требуется найти такой закон изменения перепада давления $\Delta P(t)$, который обеспечивал бы пропуск заданного расхода жидкости через зазор.

Таким образом, задача заключается в определении функций $u(z, t)$ и $\Delta P(t)$, удовлетворяющих уравнению (2) и условиям (3) – (6). Поставленная задача относится к классу обратных задач, связанных с восстановлением зависимости правых частей параболических уравнений от времени [7–9]. Однако в данной задаче в качестве дополнительного условия задается интегральная характеристика исследуемого процесса. Следовательно, условие (6) не является классическим, локальным условием для уравнения (2).

Метод решения

Введем равномерную разностную сетку в области $[0 \leq t \leq T]$ по переменной t

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\Delta t, \quad j = \overline{0, m}\}$$

с шагом дискретизации $\Delta t = \frac{T}{m}$. Производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ в уравнении (2) при t_j , $j = \overline{1, m}$, заменим приближенно левосторонним разностным отношением

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(z, t_j)} \approx \frac{u(z, t_j) - u(z, t_{j-1})}{\Delta t}.$$

Вводя обозначение $u^j(z) \approx u(z, t_j)$, задачи (2) – (6) запишем в виде

$$\frac{u^j(z) - u^{j-1}(z)}{\Delta t} = \nu \frac{d^2 u^j}{dz^2} + \frac{1}{\rho l} \Delta P^j, \quad 0 < z < \delta; \quad (7)$$

$$u^0(z) = \phi(z); \quad (8)$$

$$u^j|_{z=0} = 0; \quad (9)$$

$$u^j|_{z=\delta} = 0; \quad (10)$$

$$Q^j = \int_0^\delta b u^j(z) dz, \quad (11)$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

где $Q^j = Q(t_j)$, $\Delta P^j \approx \Delta P(t_j)$.

Решение полудискретной задачи (7) – (11) на каждом временном слое $j = 1, 2, \dots, m$, представим в виде

$$u^j(z) = w^j(z) + r(z) \Delta P^j, \quad (12)$$

где $w^j(z)$ и $r(z)$ – неизвестные функции. Подставив (12) в уравнение (7), будем иметь

$$\frac{w^j(z) + r(z) \Delta P^j - u^{j-1}(z)}{\Delta t} = \nu \frac{d^2 w^j}{dz^2} + \nu \frac{d^2 r}{dz^2} \Delta P^j + \frac{1}{\rho l} \Delta P^j.$$

Отсюда получим следующие краевые задачи относительно неизвестных функций $w^j(z)$ и $r(z)$:

$$\frac{w^j(z) - u^{j-1}(z)}{\Delta t} = v \frac{d^2 w^j}{dz^2}; \quad (13)$$

$$w^j|_{z=0} = 0; \quad (14)$$

$$w^j|_{z=\delta} = 0, \quad (15)$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

$$\frac{r(z)}{\Delta t} = v \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{1}{\rho l}; \quad (16)$$

$$r|_{z=0} = 0; \quad (17)$$

$$r|_{z=\delta} = 0. \quad (18)$$

А подстановка (12) в дополнительное условие (11) дает

$$Q^j = \int_0^{\delta} b w^j(z) dz + \Delta P^j \int_0^{\delta} b r(z) dz$$

или

$$\Delta P^j = \frac{Q^j - \int_0^{\delta} b w^j(z) dz}{\int_0^{\delta} b r(z) dz}, \quad (19)$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, для решения обратной задачи (2) – (6) по определению функций $u(z, t)$ и $\Delta P(t)$ сначала надо определить функцию $r(z)$ из решения задачи (16) – (18).

После этого для каждого временного слоя $j = 1, 2, \dots, m$ надо последовательно определить функцию $w^j(z)$ из решения задачи (13) – (15), ΔP^j по формуле (19) и, наконец, $u^j(z)$ по формуле (12).

Для численного решения задач (13) – (15) и (16) – (18) можно использовать метод конечных разностей. Введем равномерную разностную сетку в области $[0 \leq z \leq \delta]$ по переменной z

$$\overline{\omega}_h = \{z_i = i\Delta z, i = 0, n\}$$

с шагом $\Delta z = \frac{\delta}{n}$. Применяя интегральный метод, разностный аналог задачи (13) – (15) на разностной сетке $\overline{\omega}_h$ можно представить виде

$$\frac{w_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = v \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{\Delta z^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

$$w_0^j = 0,$$

$$w_n^j = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

где $w_i^j \approx w^j(z_i)$, $u_i^{j-1} \approx u^{j-1}(z_i)$.

Полученная система разностных уравнений представляет собой линейную систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Решение этой системы можно определить обычным методом прогонки.

Аналогично строится разностный аналог задачи (16) – (18) на сетке $\overline{\omega}_h$:

$$v \frac{r_{i+1} - 2r_i + r_{i-1}}{\Delta z^2} - \frac{r_i}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

$$r_0 = 0,$$

$$r_n = 0,$$

где $r_i \approx r(z_i)$.

При этом полученная система разностных уравнений также представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, решение которой определяется методом прогонки.

А при определении ΔP^j по формуле (19) можно воспользоваться одной из приближенных формул численного интегрирования.

Результаты численных расчетов

Для выяснения эффективности практического применения предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента заключается в следующем: для заданного перепада давления $\Delta P(t)$ решается прямая задача (2) – (5) и определяется объемный расход жидкости $Q(t)$ по формуле (6). Найденная зависимость $Q(t)$ принимается за точные данные для численного решения обратной задачи по восстановлению $\Delta P(t)$. При этом для решения прямой задачи (2) – (5) используется метод конечных разностей. С этой целью строится дискретный аналог задачи на сетке $\overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = v \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta z^2} + \frac{1}{\rho l} \Delta P^j,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$u_i^0 = \phi_i,$$

$$u_0^j = 0,$$

$$u_n^j = 0,$$

где $\phi_i = \phi(z_i)$, $u_i^j \approx u(z_i, t_j)$.

Полученная система разностных уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, и решение

данной системы определяется методом прогонки. А для вычисления объемного расхода жидкости $Q(t)$ применяется метод численного интегрирования – метод трапеций.

Первая серия расчетов выполнялась с использованием этих невозмущенных данных. Вторая серия расчетов проводилась при наложении на $Q(t)$ некоторой функции, моделирующей погрешность экспериментальных данных

$$\tilde{Q}(t) = Q(t) + \varepsilon\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ – случайный процесс, моделируемый с помощью датчика случайных чисел, ε – уровень погрешности.

Расчеты выполнялись на пространственно–временной разностной сетке с шагами $\Delta z = 0.005$ м, $\Delta t = 0.5$; $\Delta t = 1$ с. Результаты численного эксперимента, проведенного для случая $\mu = 3 \cdot 10^{-3}$ Па·с; $\rho = 850$ кг/м³; $\delta = 0.1$ м; $\phi(z) = 0$; $\Delta P(t) = 1 - 0.25 \sin 2t$ атм/м; $b = 0.25$ м; $l = 0.25$ м использованием невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в таблице; в ней ΔP^t – точные значения функций $\Delta P(t)$, $\overline{\Delta P}$ и $\tilde{\Delta P}$ – вычисленные значения функции $\Delta P(t)$ при невозмущенных и возмущенных данных. Для возмущения входных данных использовалась погрешность уровня $\varepsilon = 0.5$.

Результаты численного эксперимента

t, с	ΔP^t , атм/м	$\overline{\Delta P}$, атм/м		$\tilde{\Delta P}$, атм/м $\Delta t = 1$ с
		$\Delta t = 0.5$ с	$\Delta t = 1$ с	
10	0.772	0.772	0.772	0.776
20	0.814	0.814	0.814	0.782
30	1.076	1.076	1.076	1.037
40	1.248	1.248	1.248	1.190
50	1.127	1.127	1.127	1.122
60	0.855	0.855	0.855	0.828
70	0.755	0.755	0.755	0.731
80	0.945	0.945	0.945	0.965
90	1.200	1.200	1.200	1.231
100	1.218	1.218	1.218	1.228
110	0.978	0.978	0.978	0.965
120	0.764	0.764	0.764	0.773
130	0.829	0.829	0.829	0.832
140	1.097	1.097	1.097	1.106
150	1.250	1.250	1.250	1.259
160	1.107	1.107	1.107	1.119
170	0.837	0.837	0.837	0.893
180	0.760	0.760	0.760	0.769
190	0.967	0.967	0.967	0.936
200	1.213	1.213	1.213	1.185

Как показывают результаты численного эксперимента, при использовании невозмущенных входных данных искомая функция $\Delta P(t)$ восстанавливается точно при всех расчетных сетках по времени (3-й и 4-й столбцы таблицы); ΔP^t – точные

значения функций $\Delta P(t)$ и $\overline{\Delta P}$ – вычисленные значения функции $\Delta P(t)$ при невозмущенных данных абсолютно совпадают. При использовании возмущенных входных данных, в которых погрешность имеет флуктуационный характер, проявляется слабая чувствительность восстановления функции $\Delta P(t)$ от погрешности во входных данных. При уменьшении уровня погрешности решение восстанавливается более точно. Однако при проведении численных экспериментов было обнаружено, что использование очень малых шагов по времени ($\Delta t \leq 0.01$) при решении задачи с возмущенными данными приводят к неустойчивости вычисляемого решения.

Использование очень малых шагов по времени при решении задачи с возмущенными данными дает противоположный эффект по сравнению с численным решением прямых задач: с ростом временного шага увеличивается и точность вычисляемого решения.

Заключение

Рассмотрена задача определения перепада давления в нестационарном потоке вязкой жидкости в зазоре между двумя параллельными плоскими стенками на основании информации об изменении во времени объёмного расхода жидкости в зазоре. Вычислительный алгоритм решения данной задачи базируется на дискретизации задачи по времени и использовании специального представления для решения полученной полудискретной задачи. При этом эффект регуляризации обеспечивается за счет выбора разностной сетки. В отличие от метода глобальной регуляризации, где решение обратной задачи определяется на все моменты времени одновременно, в предложенном подходе учитывается специфика обратной задачи и решение определяется последовательно на отдельные моменты времени. Предложенный метод исследования нестационарного течения вязких жидкостей в зазорах можно применять при решении задач по герметизацию соединений элементов в гидросистемах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башта Т.М.* Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы. М.: Машиностроение, 1970. 502 с.
2. *Шейнак А.А.* Гидравлика и гидропневмопривод: учеб. пособие. Ч. 1. Основы механики жидкости и газа. Изд. 2-е, пер. и доп. М.: Изд-во МГИУ, 2003. 192 с.
3. *Лепешкин А.В., Михайлин А.А., Шейнак А.А.* Гидравлика и гидропневмопривод. В 2 ч. Ч. 2. Гидравлические машины и гидропневмопривод: учеб. для вузов. 4-е изд., пер. и доп. / под ред. А.А. Шейнака. М.: МГИУ, 2009. 352 с.
4. *Mott R.L.* Applied Fluid Mechanics. 6th ed. Prentice Hall, 2005. 640 p.
5. *Esposito A.* Fluid Power with Applications. 7th ed. Prentice Hall, 2008. 672 p.
6. *Лойцанский Л.Г.* Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
7. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
8. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009.
9. *Гамзаев Х.М.* О численном моделировании движения жидкости в двухпластовой системе // Вестник Томского государственного университета. Математика и Механика. 2015. № 3(35). С. 52–59.

Статья поступила 10.06.2016 г.

Gamzaev Kh.M., Gadimov I.K. (2016) NUMERICAL INVESTIGATION OF A VISCOUS FLUID FLOW THROUGH THE GAP BETWEEN TWO PARALLEL PLATES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 64–72

DOI 10.17223/19988621/433/7

The process of unsteady flow of a viscous incompressible fluid through the gap between two parallel plates is considered. To describe the process, a one-dimensional model of the plane-parallel flow of a viscous fluid is proposed. Within the framework of this model, the problem with nonlocal additional condition for obtaining the pressure drop versus the time for a given volumetric flow rate of the fluid through the gap is posed. This problem belongs to the class of inverse problems associated with the reconstruction of right-hand sides of parabolic equations as functions of time. Using the time sampling, the posed problem is converted to a semidiscrete problem. In order to solve this problem, a special formulation is suggested. As a result, the solution of the original problem at each time step is reduced to solving two boundary value problems with local boundary conditions and the linear equation with respect to the approximate value of the pressure drop.

Keywords: fluid flow through the gap, fluid flow rate through the gap, nonlocal condition, pressure drop along the gap length, inverse problem.

GAMZAEV Khanlar Mekhvali ogly (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Azerbaijan State University of Oil and Industry, Baku, Azerbaijan)
E-mail: xan.h@rambler.ru

GADIMOV Ilgar Kamil ogly (Azerbaijan State University of Oil and Industry, Baku, Azerbaijan)
E-mail: qadimovilqar@gmail.com

REFERENCES

1. Bashta T.M. (1970) *Gidravlika, gidravlicheskie mashiny i gidravlicheskie privody*. [Hydraulics, hydraulic machines, and hydraulic drives]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Sheypak A.A. (2003) *Gidravlika i gidropnevmoprivod: ucheb. posobie Ch. 1. Osnovy mekhaniki zhidkosti i gaza* [Hydraulics and hydropneumatic: a textbook. Part 1. Fundamentals of fluid and gas mechanics]. 2nd ed. Moscow: MGIU.
3. Lepeshkin A.V., Mikhaylin A.A., Sheypak A.A. (2009) *Gidravlika i gidropnevmoprivod. Ch. 2. Gidravlicheskie mashiny i gidropnevmoprivod: uchebnik dlya vuzov* [Hydraulics and hydropneumatic. Part 2. Hydraulic machines and hydropneumatic: a textbook for high schools] 4th ed. Ed. by A.A. Sheypak. Moscow: MGIU.
4. Mott R.L. (2005) *Applied Fluid Mechanics*. Prentice Hall.
5. Esposito A. (2008) *Fluid Power with Applications*. Prentice Hall.
6. Loytsyanskiy L.G. (2003) *Mekhanika zhidkosti i gaza: Uchebnik dlya vuzov* [Fluid mechanics: a textbook for high schools]. Moscow: Drofa.
7. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rummyantsev S.V. (1988) *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka.
8. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. (2009) *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: LKI publ.
9. Gamzaev Kh.M. (2015) O chislenom modelirovanii dvizheniya zhidkosti v dvukhplastovoy sisteme [On numerical simulation of the fluid flow in a dualcompletion water-bearing system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 52–59. DOI 10.17223/19988621/35/7.

УДК 621.396.6, 004.942, 519.876.5
DOI 10.17223/19988621/433/8

В.Г. Покровский

СТРУКТУРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ НА ОСНОВЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассматривается способ построения трёхмерных дискретных моделей стержневых систем для решения задач структурной оптимизации конструкций электронной аппаратуры. Описан подход к оптимизации структуры конструкций и их декомпозиции на несвязанные фрагменты. Показан способ определения матрицы переменных проектирования фрагментов конструкции. Решена задача оптимизации структуры конструкции.

Ключевые слова: *напряжённо-деформированное состояние, конструкции электронной аппаратуры, автоматизация проектирования, инженерный анализ конструкций, оптимизация конструкций.*

Сокращение сроков и затрат при проектировании и подготовке производства новых изделий, а также повышение качества выпускаемой продукции возможно при всестороннем применении математического и компьютерного моделирования, а также средств автоматизации проектно-конструкторских работ [1]. Моделирование воздействий, которым изделие будет подвергаться в процессе эксплуатации, может быть осуществлено с помощью программно-технических комплексов автоматизированного проектирования и моделирования. Такие комплексы могут быть построены на основе применения численных методов анализа физических процессов в конструкциях проектируемых изделий. Существует большое количество программно-технических комплексов автоматизации проектно-конструкторских работ и инженерного анализа конструкций, которые содержат в себе полный набор CAD/CAE решений. Например, такие комплексы, как Autodesk Inventor, CATIA, IronCAD, SolidWorks, T-FLEX CAD, SCAD, NX Nastran, MSC.Nastran, APM WinMachine, Creo Parametric, Pro/MECHANICA. Большинство указанных программных продуктов включают модули, которые позволяют выполнять функции конечно-элементного анализа объектов проектирования при различных воздействиях. Системы инженерного анализа, которые построены на основе применения моделей с фиксированным количеством переменных проектирования, позволяют выполнять моделирование конструкций, структура которых определена и задана. Кроме того, при решении задачи моделирования, в случае изменения конструктивных параметров объекта проектирования, это также не влечет за собой модификации математической модели.

Необходимость в изменении математической модели объекта проектирования возникает только при решении задачи структурной оптимизации, что подразумевает модификацию структуры проектируемой конструкции, что в свою очередь, влечёт за собой изменение количества переменных проектирования математической модели. Чтобы выполнить модификацию математической модели объекта проектирования, необходимо использовать соответствующий математический аппарат предметно-ориентированной логики. На основе такого математического ап-

парата можно строить логико-алгебраические выражения, позволяющие вводить и исключать переменные и функции и, как следствие, – создавать математические модели с нефиксированным количеством переменных проектирования [2].

Задача разработки программно-технических комплексов имитационного моделирования и оптимизации конструкций на основе применения математических моделей с нефиксированным количеством переменных проектирования, позволяющих решать задачи структурной оптимизации проектируемых изделий, обладающих дискретной структурой, в настоящее время является актуальной.

Предлагается математическая модель трёхмерной стержневой системы с нефиксированным количеством переменных проектирования, позволяющая осуществлять целенаправленное преобразование структуры проектируемых конструкций электронной аппаратуры, рассматриваемых как стержневые, таких, как стойки, каркасы, рамы, в соответствии с заданными эксплуатационными воздействиями и конструкторско-технологическими ограничениями. Также разработан программный комплекс в виде системы имитационного моделирования для решения задач структурной оптимизации стержневых конструкций.

Структурная оптимизация стержневых конструкций реализуется путем введения элементов или стержней в стержневую систему или их исключения. Введение и исключение переменных и функций, например переменных проектирования, связано с введением и исключением стержневых элементов. Такие операции реализуются с применением соответствующего математического аппарата предметно-ориентированной логики [3, 4].

Реализация функции выбора в задачах структурной оптимизации конструкций выполняется с помощью операций импликативной алгебры выбора. Применение операций импликативной алгебры выбора позволяет формализовать задачи модификации модели проектируемой стержневой системы посредством введения и исключения переменных проектирования.

Порождающее выражение импликативной алгебры выбора:

$$z = \left(\alpha_1 y_1^\mu + \alpha_2 y_2^\mu + \dots + \alpha_n y_n^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad (1)$$

где α_i – весовые коэффициенты; μ – степенные коэффициенты; y_i – математические объекты или предметные переменные.

При $\mu = 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, порождающее выражение имеет следующий вид:

$$z = (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n). \quad (2)$$

Логическая и алгебраическая формы записи базовых операций импликативной алгебры выбора представлены ниже:

- предикатная конъюнкция, или умножение (\wedge , $\&$)

$$z_2 = \wedge_{(\alpha_1, \alpha_2)}(y_1, y_2) = \alpha_2 y_1 + \alpha_1 y_2; \quad (3)$$

- предикатная дизъюнкция, или предикатная сумма, сложение (\vee)

$$\begin{aligned} z_1 &= \vee_{(\alpha_1, \alpha_2)}(y_1, y_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \\ &= 0,5[(y_1 + y_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + (y_1 - y_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]; \end{aligned} \quad (4)$$

где α_1, α_2 – предикатные переменные; $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$; y_1, y_2 – предметные переменные.

Предметной переменной может быть любой математический объект. В качестве такового может использоваться, например, матрица-вектор переменных, описывающих элемент стержневой системы. В ситуации, когда стержень должен быть удален или введен, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ и $y_2 = 0$.

Тогда выражение для предикатной дизъюнкции

$$z_1 = \vee_{(\alpha_1, \alpha_2)}(y_1, y_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0,5[(y_1)(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1) + (y_1)(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)] = 0,5[y_1 + y_1(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)] = \alpha_1 y_1, \quad (5)$$

или
$$z_1 = \vee_{\alpha_1}(y_1) = \alpha_1 y_1. \quad (6)$$

Выражение (6) – это частный случай предикатной дизъюнкции или выбора или исключения предметной переменной y_i по значению предикатной переменной α_i . В этом случае используется запись вида $\vee_{\alpha_i}(y_i)$ или $\alpha_i y_i$.

При построении модели трёхмерной стержневой системы используется модель области проектирования пространственных стержневых систем, метод конечных элементов, положения теории эволюционного моделирования. Описание структуры конструкции выполняется с применением математического аппарата имплицитивной алгебры выбора. Это позволяет формализовать процесс структурной оптимизации проектируемых конструкций, рассматриваемых как стержневые, на основе введения и исключения переменных проектирования и функций состояния.

Оптимизация структуры конструкции выполняется по результатам вычисления и исследования напряженно-деформированного состояния стержневых элементов. Чтобы задать проект стержневой системы, необходимо выбрать переменные проектирования. В качестве переменных проектирования элементов стержневой системы можно рассматривать: геометрические параметры поперечных сечений стержневых элементов, координаты их торцевых граней, физико-механические характеристики материала конструкции. Из уравнений, описывающих поведение стержневой системы, определяются переменные состояния. В качестве переменных состояния можно рассматривать составляющие смещений торцевых граней стержня [5, 6].

Для построения модели трёхмерной стержневой системы используется понятие области проектирования. Область проектирования определена как область автоматического формирования расчетной модели конструкции. Внутри области проектирования может располагаться одна или несколько областей решения. Область решения является областью с дискретной структурой и переменными границами и рассматривается как подобласть области проектирования. В области решения определены искомые функции, также для нее могут быть найдены значения целевой функции. В ходе модификации происходит изменение конфигурации области решения таким образом, что для одной или нескольких несвязанных областей достигается экстремум целевой функции. Область проектирования заполняется сеткой. Внутри нее строится дискретная модель стержневой системы. При этом узлы сетки соответствуют соединениям стержней, связи между узлами – элементам системы или стержням. Принято считать, что каждый стержневой элемент конструкции является отдельным дискретным элементом. При построении модели и объединении отдельных стержневых элементов в систему узловые реакции суммируются. Область проектирования является описанием способа объединения элементов или стержней в стержневую систему. Формирование уравнений модели выполняется применительно к одной области проектирования [5].

Для формализации процедуры структурной оптимизации применяется операция предикатной дизъюнкции. В этом случае, матрица-вектор $\overline{B_{E_i}^{g_U e}}$ переменных проектирования стержневого элемента объема является аналогом предметной переменной y_i . Операция предикатной дизъюнкции для выбора или исключения стержневого элемента определяется как выбор или исключение матрицы-вектора $\overline{B_{E_i}^{g_U e}}$ переменных проектирования элемента стержневой системы:

$$z_1 = \vee (\alpha_i^{g_U e}) \left(\overline{B_{E_i}^{g_U e}} \right) = \alpha_i^{g_U e} \overline{B_{E_i}^{g_U e}}. \quad (7)$$

Здесь e – номер прилегающей к узлу связи, $e = 1, \dots, N_e$; N_e – количество прилегающих к узлу связей; g_U – номер типа узла, $g_U = 1, 2, 3, 4, 5$; E_i – номер стержневого элемента в глобальной системе координат.

В развёрнутом виде матрицу-вектор переменных проектирования стержневого элемента можно представить следующим образом:

$$\overline{B_{E_i}^{g_U e}} = [h_y, h_z, h_t, h_d, x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, E, \nu, \rho]^T, \quad (8)$$

Здесь h_y, h_z, h_t, h_d – параметры поперечного сечения стержневого элемента объёма, $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$ – координаты концов стержневого элемента, E – модуль упругости материала стержневого элемента, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала.

В качестве компонентов матрица-вектор составляющих переменных проектирования стержневой системы содержит в своём составе матрицы-векторы переменных проектирования стержневых элементов:

$$\overline{B^{g_U}} = \left[\overline{b_{(1)}^{g_U}}, \dots, \overline{b_{(e)}^{g_U}}, \dots, \overline{b_{(N_s)}^{g_U}} \right]^T, \quad (9)$$

Здесь N_s – количество стержней в системе.

Компонента матрицы-вектора составляющих переменных проектирования стержневой системы определяется как произведение матрицы-вектора переменных проектирования стержневого элемента $\overline{B_{E_i}^{g_U e}}$ и предикатной переменной $\alpha_i^{g_U e}$:

$$\overline{b_e^{g_U}} = \overline{B_{E_i}^{g_U e}} \cdot \alpha_i^{g_U e}, \quad (10)$$

где $\overline{B_{E_i}^{g_U e}}$ – матрица-вектор переменных проектирования стержня, $\alpha_i^{g_U e}$ – предикатная переменная, соответствующая выбору или наличию стержня с номером e , $\alpha_i^{g_U e} \in \{0, 1\}$ (для алгебраической формы записи $\alpha_i^{g_U e} = 1$, если стержень под номером e существует, $\alpha_i^{g_U e} = 0$ – при его отсутствии).

Матрица жесткости стержневого элемента определяется как функция, аргументом которой является компонент матрицы-вектора составляющих переменных проектирования стержневой системы:

$$K_M^{g_U e} \left(\overline{b_e^{g_U}} \right). \quad (11)$$

Компонента матрицы-вектора составляющих жёсткостей стержня определяется как произведение соответствующей компоненты вектор-строки матрицы жёсткости стержня и предикатной переменной $\alpha_{L(r)}^{gU^e}$ [6]:

$$k_{V(p)}^{gU^e} = k_{M(r,p)}^{gU^e} \cdot \alpha_{L(r)}^{gU^e}. \tag{12}$$

Компонента матрицы-вектора узловых составляющих жёсткостей соответствует матрице-вектору составляющих жёсткостей стержня:

$$\overline{k_e^{gUr}} = \overline{K_V^{gU^e}}, \tag{13}$$

где $\overline{K_V^{gU^e}}$ – матрица-вектор составляющих жёсткостей стержня и выглядит следующим образом:

$$\overline{K_V^{gU^e}} = \left[k_{V(1)}^{gU^e}, \dots, k_{V(p)}^{gU^e}, \dots, k_{V(N_p)}^{gU^e} \right]. \tag{14}$$

Здесь p – номер линейного или углового смещения конца стержня, которому соответствует компонента $k_{V(p)}^{gU^e}$ матрицы-вектора составляющих жёсткостей стержня, $p = 1, \dots, N_p$; N_p – количество линейных и угловых смещений в матрице-векторе составляющих смещений стержня, $N_p = 12$.

Поскольку задача вычисления напряженно-деформированного состояния стержневой системы решается относительно узловых значений, то необходимо ввести понятие матрицы-вектора узловых составляющих жёсткостей. Как правило, характеристика жёсткости относится к элементам конструкции, в данном случае к стержням. Однако поскольку вычисления выполняются относительно узловых значений, то это требует приведения характеристик конструкции, в том числе характеристики жёсткости, также к узловым значениям.

Матрица-вектор узловых составляющих жёсткостей:

$$\overline{K^{gUr}} = \left[\overline{k_{(1)}^{gUr}}, \dots, \overline{k_{(e)}^{gUr}}, \dots, \overline{k_{(N_e)}^{gUr}} \right]. \tag{15}$$

Матрица-вектор составляющих узловых смещений стержневой системы содержит в своём составе компоненты матриц-векторов составляющих смещений концов (торцевых граней) стержневых элементов:

$$\overline{T^{gU}} = \left[\overline{t_{(1)}^{gU}}, \dots, \overline{t_{(e)}^{gU}}, \dots, \overline{t_{(N_e)}^{gU}} \right], \tag{16}$$

Компонента матрицы-вектора составляющих узловых смещений определяется как произведение матрицы-вектора составляющих смещений концов (торцевых граней) стержневого элемента $\overline{T_{M_i}^{gU^e}}$ и предикатной переменной $\alpha_i^{gU^e}$ и выглядит следующим образом:

$$\overline{t_{(e)}^{gU}} = \overline{T_{M_i}^{gU^e}} \cdot \alpha_i^{gU^e}, \tag{17}$$

где $\overline{T_{M_i}^{gU^e}}$ – матрица-вектор составляющих смещений концов стержневого элемента объёма.

Матрица-вектор составляющих смещений торцевых граней стержневого элемента содержит в качестве компонент линейные и угловые смещения:

$$\overline{T_{M_i}^{g_U^e}} = \left[t_{M(1)}^{g_U^e}, \dots, t_{M(p)}^{g_U^e}, \dots, t_{M(12)}^{g_U^e} \right], \quad (18)$$

где $t_{M(1)}^{g_U^e} = U_{(m)}^{g_U^e}$ – линейное смещение U по направлению координаты X конца (торцевой грани) номер один (m), связи (стержня) с номером e , примыкающей к узлу типа g_U , $t_{M(12)}^{g_U^e} = \Theta_{z(n)}^{g_U^e}$ – угловое смещение Θ_z , соответствующее повороту вокруг оси координат Z конца (торцевой грани) номер два (n), связи (стержня) с номером e , примыкающей к узлу типа g_U .

Разработана методика формальной оптимизации стержневых систем. Оптимизация структуры конструкции проводится следующим образом. Выполняется процедура анализа области проектирования. Результаты решения задачи анализа представлены массивами значений механических напряжений в стержневых элементах конструкции. Затем сравниваются расчётные напряжения, полученные по результатам решения задачи анализа конструкции, и допускаемые напряжения для каждого стержневого элемента. Определяется весовой коэффициент, которым является перегрузка, характеризующая степень нагружения каждого конкретного стержневого элемента. Далее определяются элементы, перегрузка в которых ниже заранее установленного уровня. Эти стержневые элементы удаляются и формируется признак изменения структуры. Этот признак впоследствии используется в качестве критерия остановки процесса оптимизации. Считается, что если структура конструкции модифицирована, то значение признака изменения становится равным единице, в противном случае значение признака остается нулевым.

Если структура конструкции была модифицирована, то вновь решается задача анализа области проектирования для выявления других элементов, подлежащих удалению. Если в результате проведения процедуры анализа такие элементы не выявлены, структура конструкции не модифицируется, процесс оптимизации конструкции прекращается.

В ряде ситуаций применяемая схема нагружения может привести к локализации нагрузок в некоторых частях конструкции. Механические напряжения в стержневых элементах, входящих в эти фрагменты конструкции, могут существенно отличаться от этих же параметров в других частях конструкции. Это может привести к тому, что малонагруженные элементы, связывающие эти фрагменты, будут удалены и конструкция будет разделена на несколько не связанных между собой фрагментов. Тогда в одной области проектирования будет существовать несколько областей решения, в каждой из которых будет решаться отдельная задача оптимизации конкретного фрагмента. Такая задача называется задачей декомпозиции конструкции.

Решение задачи декомпозиции фактически приводит к ситуации, когда в одной области проектирования появляется несколько отдельных конструкций. Тогда матрица-вектор составляющих переменных проектирования стержневой системы в качестве элементов будет содержать в своём составе матрицы-векторы составляющих переменных проектирования фрагментов стержневой системы. Выражение (9) можно будет переписать так:

$$\overline{B} = \left[\overline{B_1^{g_U}}, \dots, \overline{B_f^{g_U}}, \dots, \overline{B_{N_f}^{g_U}} \right]^T, \quad (19)$$

Здесь N_f – количество фрагментов в стержневой системе, f – порядковый номер фрагмента.

Решена задача структурной оптимизации конструкции при одновариантном механическом нагружении. Начальная структура представляет собой трёхмерную стержневую конструкцию, выполненную из стержневых элементов в виде стальных труб квадратного сечения со стороной 40 мм. Сеточная модель исходной заготовки представлена на рис. 1.

Также на этом рисунке условно изображены силовые воздействия, локализованные в узлах сеточной модели. Схема размещения точек приложения силовых воздействий подобрана таким образом, чтобы локализовать механические напряжения и деформации в правой и левой частях исходной конструкции. Этот искусственный приём позволяет выделить в конструкции массивы элементов, несущих значительную механическую нагрузку и, путём проведения пошаговой оптимизации, преобразовать исходную, избыточную по элементам заготовку в несколько несвязанных между собой фрагментов. Внизу сеточной модели условно изображены опоры, которые предотвращают смещение конструкции по направлениям координатных осей. Крайние опоры справа и слева предотвращают вертикальное смещение конструкции по направлению оси Y . Внутренние опоры предотвращают смещение конструкции по направлениям всех координатных осей.

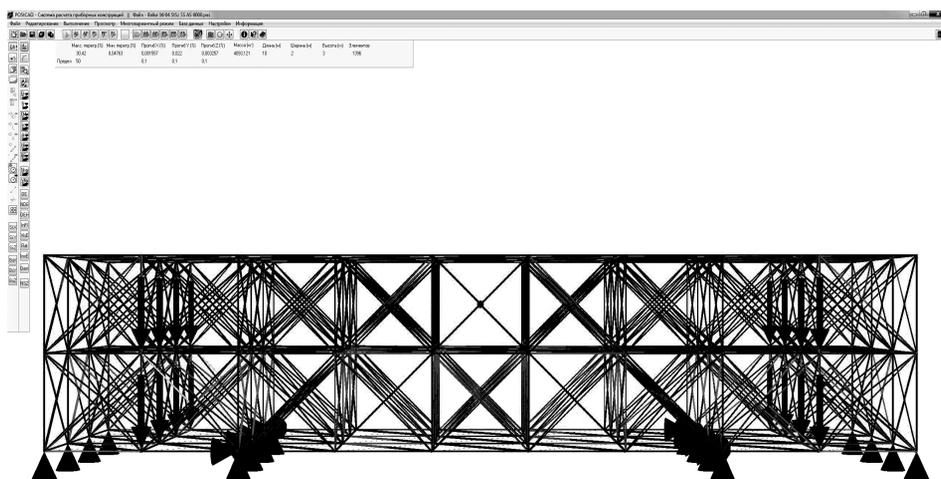


Рис. 1. Сеточная модель стержневой конструкции в главном окне программного комплекса
Fig. 1. Gridded model of the spatial bar construction in the main window of the software package

Исходные данные при решении задачи оптимизации структуры конструкции: количество стержней в исходной структуре – 1562 шт.; масса конструкции – 4564.460 кг; значения силовых воздействий в узлах сеточной модели по направлению оси Y – 40000 Н; длина исходной конструкции по оси X – 10 м; высота исходной конструкции по оси Y – 2 м; глубина исходной конструкции по оси Z – 3 м.

Результаты проведения процедуры структурной оптимизации конструкции: время решения – 9 мин 30 с; количество стержневых элементов – 144 шт.; общая масса фрагментов конструкции – 424.875 кг; максимальная перегрузка в элементах относительно допускаемых напряжений – 44.72 %; максимальный прогиб в вертикальной плоскости – 0.038 % от максимального линейного размера, при норме – 0.1%.

Задача оптимизации структуры конструкции была решена в автоматическом режиме. На рис. 2 изображена структура конструкции, которая была получена после выполнения тридцать девятого шага структурной оптимизации. После выполнения двести пятьдесят четвёртого шага структурной оптимизации была получена структура, изображённая на рис. 3.

Это была последняя неразделенная структура конструкции. На следующем шаге структурной оптимизации произошло разделение конструкции на два несвязанных фрагмента. Разделение конструкции на восемь несвязанных фрагментов произошло на четыреста пятнадцатом шаге структурной оптимизации. Структура, полученная на следующем, четыреста шестнадцатом шаге, стала конечной структурой, она представлена на рис. 4. Последующее удаление стержневых элементов приводит к ухудшению прочностных свойств конструкции, поэтому структура, изображённая на рис. 4, является конечной.

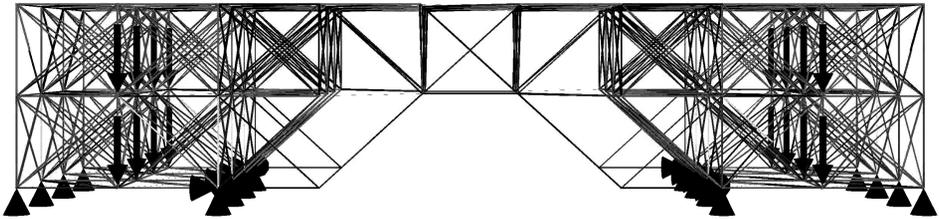


Рис. 2. Тридцать девятый шаг структурной оптимизации конструкции
Fig. 2. The thirty-ninth step of the structural optimization of the construction



Рис. 3. Двести пятьдесят четвёртый шаг структурной оптимизации конструкции.
 Непосредственно перед разделением
Fig. 3. The two hundred and fifty-fourth step of the structural optimization of the construction.
 Directly before division



Рис. 4. Четыреста шестнадцатый шаг структурной оптимизации конструкции.
 Конечная структура
Fig. 4. The four hundred and sixteenth step of the structural optimization of the construction.
 The final structure

Методика формальной оптимизации, реализованная в разработанной системе имитационного моделирования, позволяет получать стержневые конструкции, оптимальные для конкретного вида нагружения. В отдельных случаях реализация данного подхода к проектированию приводит к разделению исходной заготовки проектируемой конструкции на несколько несвязанных фрагментов. Решение задачи оптимизации, приводящее к декомпозиции конструкции на несвязанные фрагменты, может выполняться в автоматическом режиме без участия проектировщика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвинская О.С., Сальников И.И. Математическая модель выбора стандарта радиointерфейса // *Фундаментальные исследования: Научный журнал*. Пенза: ООО Издательский Дом «Академия Естествознания», 2011. № 12-3. С. 562–567.
2. Андреева Т.В., Курносое В.Е. Методология решения задач синтеза конструкций по заданным воздействиям // *XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс: Научное периодическое издание*. Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. акад., 2012. № 01(05). С. 192 – 197.
3. Волгин Л.И., Левин В.И. Непрерывная логика. Теория и применение. Таллинн: Изд-во Академии наук Эстонии, 1990. 210 с.
4. Левин В.И. Непрерывная логика. Основные понятия // *Логические исследования: Научно-теоретический журнал*. М.: Институт философии Российской академии наук, 2006. № 13. С. 90–107.
5. Покровский В.Г. Информационные технологии в проектировании несущих конструкций электронной аппаратуры на основе эволюционных дискретных моделей // *XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс: Научное периодическое издание*. Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. акад., 2012. № 05(09). С. 198–205.
6. Покровский В.Г. Программный комплекс структурной оптимизации стержневых несущих конструкций на основе импликативной алгебры выбора // *Информационные системы и технологии: Научно-технический журнал*. Орёл: ФГБОУ ВПО «Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс» (Госуниверситет – УНПК), 2013. № 2(76).

Статья поступила 13.05.2016 г.

Pokrovskiy V.G. (2016) STRUCTURAL OPTIMIZATION AND DECOMPOSITION OF ELECTRONIC EQUIPMENT CONSTRUCTIONS ON THE BASIS OF EVOLUTIONARY DISCRETE MODELS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 73–82

DOI 10.17223/19988621/433/8

The article is devoted to the method of three-dimensional discrete modeling of the spatial bar systems for solving problems of simulation and structural optimization of electronic equipment constructions. A way of designing mathematical models of constructions with a non-fixed number of design variables and a method for the formation of the rigidity matrix are described. The mathematical modeling of the constructions with a non-fixed number of design variables is possible providing the application of the mathematical apparatus of implicative choice algebra.

Under certain conditions, in the course of solving the problem of optimizing the construction structure, it is possible to divide the computational model of construction into some untied fragments. The process is accompanied by simultaneous and independent solution of both modeling problem and structural optimization of the obtained fragments in one area of design. The approach to the structure optimization of constructions and decomposition of constructions into untied fragments is described. The method for determining the matrix of design variables of construction fragments is shown. The problem of construction structure optimization at one-alternative loading is solved.

Keywords: stress-strain state; electronic equipment constructions; design automation; engineering analysis of constructions, optimization of constructions.

POKROVSKIY Vladimir Gennad'evich (Candidate of Technical Sciences, Penza State Technological University, Penza, Russian Federation)

E-mail: svg0106@mail.ru

REFERENCES

1. Litvinskaya O.S., Sal'nikov I.I. (2011) Matematicheskaya model' vybora standarta radiointerfeysa [Mathematical model of choice radiointerface standards] *Fundamental'nye issledovaniya – Fundamental Investigations*. Penza: Akademiya Estestvoznaniya. 12(3). pp. 562–567.
2. Andreeva T.V., Kurnosov V.E. (2012) Metodologiya resheniya zadach sinteza konstruktsiy po zadannym vozdeystviyam [The methodology of solving problems on stated load construction synthesis]. *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego – XXI century: Resumes of the Past and Challenges of the Present*. Penza: Izd-vo Penz. gos. tekhnol. akad. 1(5). pp. 192–197.
3. Volgin L.I., Levin V.I. (1990) *Nepreryvnaya logika. Teoriya i primenenie* [Continuous logic. Theory and application]. Tallinn: Izd-vo Akademii nauk Estonii.
4. Levin V.I. (2006) Nepreryvnaya logika. Osnovnye ponyatiya [Continuous logic. Basic comprehension]. *Logicheskie issledovaniya: Nauchno-teoreticheskiy zhurnal – Logical Investigations: Scientific-Theoretical Journal*. Moscow: Institut Filosofii Rossiyskoy Akademii Nauk. 13. pp. 90–107.
5. Pokrovskiy V.G. (2012) Informatsionnye tekhnologii v proektirovanii nesushchikh konstruktsiy elektronnoy apparatury na osnove evolyutsionnykh diskretnykh modeley [Information technologies in design of load-bearing structures of the electronic equipment on the basis of evolutionary discrete models]. *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego – XXI century: Resumes of the Past and Challenges of the Present*. Penza: Izd-vo Penz. Gos. Tekhnol. Akad. 5(9). pp. 198–205.
6. Pokrovskiy V.G. (2013) Programmnyy kompleks strukturnoy optimizatsii sterzhnevyykh nesushchikh konstruktsiy na osnove implikativnoy algebry vybora [The software complex of structural optimization of load-bearing bar constructions on the basis of the implicative algebra of choice]. *Informatsionnye sistemy i tekhnologii – Information Systems and Technologies*. Orel: Gosudarstvennyy Universitet – uchebno-nauchno-proizvodstvennyy kompleks». 2(76). pp. 39–48.

УДК 669.725:621.039.532.5
DOI 10.17223/19988621/433/9

Ю.В. Тузов

К ВОПРОСУ О ВЯЗКОСТИ РАЗРУШЕНИЯ БЕРИЛЛИЯ

На базе нового подхода к проблеме прочности и пластичности бериллия критически проанализированы опубликованные к настоящему времени данные по результатам измерения вязкости разрушения бериллия. Показано, что для бериллия неприемлемы существующие методы измерения вязкости разрушения, хорошо зарекомендовавшие себя на других металлах, и необходима разработка нового метода измерения вязкости разрушения, учитывающего природную специфику бериллия.

Ключевые слова: *бериллий, вязкость разрушения.*

Испытания бериллия на вязкость разрушения сопряжены с двумя трудностями. Во-первых, для этого необходимы крупногабаритные образцы сложной формы. Во-вторых, значительные трудности вызывает создание в таких образцах усталостной трещины. Для многих типов образцов из бериллия попытки ввести усталостную трещину так и не увенчались успехом из-за преждевременного разрушения. Хотя во многих работах отмечается, что наличие или отсутствие первоначальной трещины существенно не сказывается на результатах испытаний на вязкость разрушения бериллия, но тем не менее эта проблема требует дальнейшего детального анализа. Отметим, что зарубежные публикации на эту тему заканчиваются в конце 70-х годов.

В этой связи представляет интерес докторская диссертация П.И. Стоева [1], одна из глав которой целиком посвящена измерению вязкости разрушения K_{IC} различных отечественных сортов бериллия при различных температурах, а также сделан исчерпывающий аналитический обзор зарубежных публикаций. Один из основных выводов, относящийся к испытаниям при комнатной температуре, заключается в том, что величина K_{IC} не коррелирует ни с одним из обычных структурных факторов, таких, как размер зерна, содержание примесей (в том числе и BeO), термообработка и т.п. (по крайней мере, не обнаружена какая-либо простая взаимосвязь), т.е. полное понимание природы разрушения отсутствует. Использование бериллия в технике в основном ограничивается изделиями, несущими исключительно физические функции – отражения нейтронов (отражатели атомных реакторов), поглощения тепла (тормозные колодки самолетов, теплозащитные экраны ракет и космических аппаратов), размерной стабильности (гироскопы) и т.п. В то же время, использование бериллия в деталях нагруженных конструкций немислимо без предварительных расчетов предельного равновесия материала с трещинами и экспериментального определения его вязкости разрушения.

1. Необходимые сведения

В данной статье мы попытаемся проанализировать результаты работы [1] с позиций концепции остаточных термических микронапряжений (ОТМ). Сама концепция (более известная как модель механических свойств бериллия) подробно

изложена в работах [2–4], поэтому здесь кратко перечислим лишь основные её, доказанные экспериментально, следствия, необходимые для анализа.

1. Существует линейная зависимость между пределом прочности и величиной ОТМ, т.е. с ростом ОТМ возрастает предел прочности.

2. Величина ОТМ, в основном, зависит от возможности зернограничного проскальзывания, которая, в свою очередь, зависит от количества и степени дисперсности зернограничных включений оксида и интерметаллидов.

3. Коэффициент однородности структуры f_c – безразмерная величина, характеризующая степень отклонения значения механических свойств конкретного материала от некоторой «идеальной» кривой, построенной на базе модельных представлений и статистических данных. Величина f_c хорошо коррелирует с работоспособностью (в частности, с термпрочностью) изделий из бериллия.

2. Анализ результатов работы [1]

ОТМ присутствуют в любом поликристаллическом бериллии, причём характер их таков, что каждое зерно оказывается сжатым вдоль гексагональной оси, т.е. ОТМ блокируют разрушение по плоскости базиса. Как известно [5], разрушение по плоскости базиса является основным видом разрушения бериллия. Вблизи вершины растущей трещины происходит мгновенная релаксация ОТМ и прочность материала в её окрестностях падает до величин, характерных для монокристаллов. Этим и объясняются трудности при создании усталостной трещины в бериллии, так как, только зародившись, она катастрофически распространяется через весь объём образца при невысоких напряжениях. Разрушение при этом будет в основном внутризёрненным (по плоскостям базиса). Приведённые в [1] микрофрактограммы подтверждают такой вывод (см. рис. 1). Из рис. 1 видно, что при 20 °С разрушение происходит преимущественно сколом по плоскости базиса и в меньшей степени по границам зерен. Межзёрненное разрушение наблюдается большей частью в случае мелких зерен. Рис. 1, *а*, *б*, *в* относятся соответственно к участкам в начале, середине и конце трещины. Видно, что вклад разрушения по плоскости спайности возрастает по мере движения трещины (увеличения ее скорости) при одновременном уменьшении пластической деформации. К сожалению, в [1] не проводилось измерение ОТМ рентгеновским методом, поэтому вышеприведённые рассуждения носят лишь качественный характер.

В [1] отмечен большой разброс результатов измерений K_{IC} на образцах, вырезанных из одной горячепрессованной заготовки. Возможно, это объясняется тем, что образцы сначала травились в кислоте на глубину 0,3 мм для снятия повреждённого при вырезке поверхностного слоя, а после этого в них создавался надрез методом электроэрозионной резки. В то же время, электроэрозионная резка, в зависимости от режима, сама может создавать поверхностные микротрещины, по крайней мере, в пределах одного зерна [5]. Эти микротрещины в вершине надреза в дальнейшем вполне могли стать зародышами магистральной трещины. На рис. 2 показаны поверхностные микротрещины в бериллии сорта Т-56 после резки по стандартному режиму. Безусловно, для создания надреза надо было выбирать самый мягкий и фиксированный режим резки, а травление проводить в последнюю очередь.

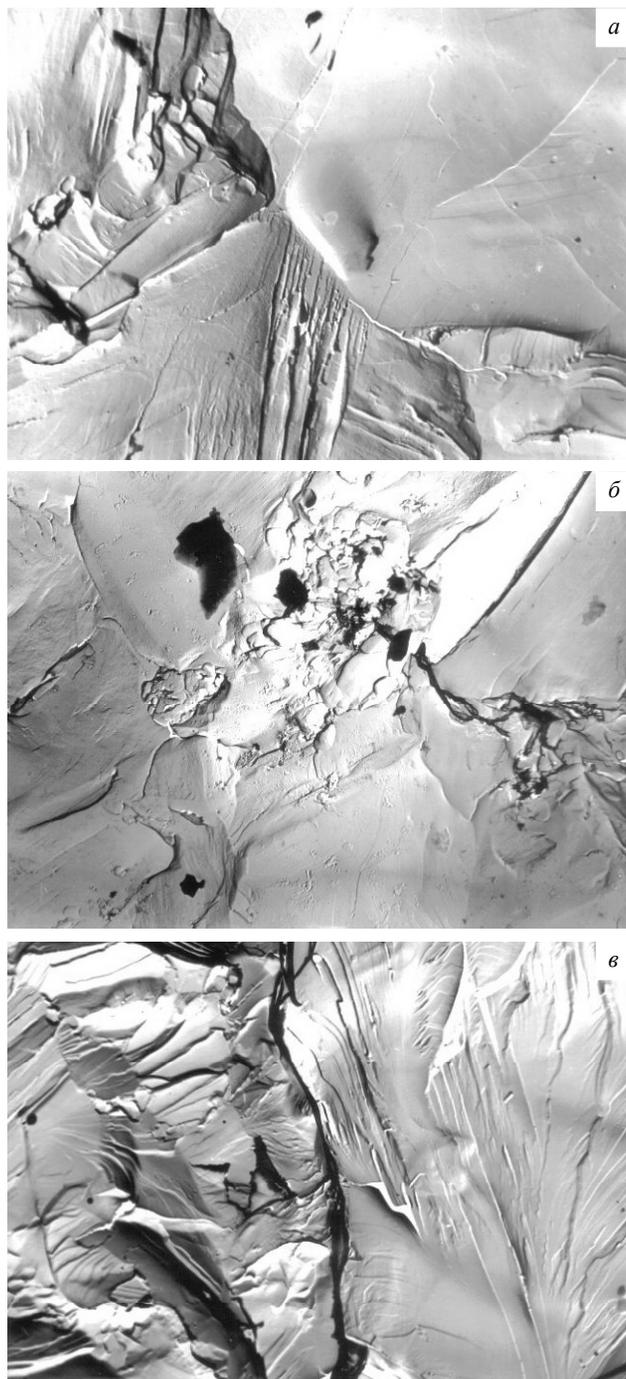


Рис. 1. Микрофрактограммы образца, испытанного на вязкость разрушения при комнатной температуре. Увеличение $\times 5000$
Fig. 1. The sample tested for fracture toughness microfractogramme. Magnification $\times 5000$

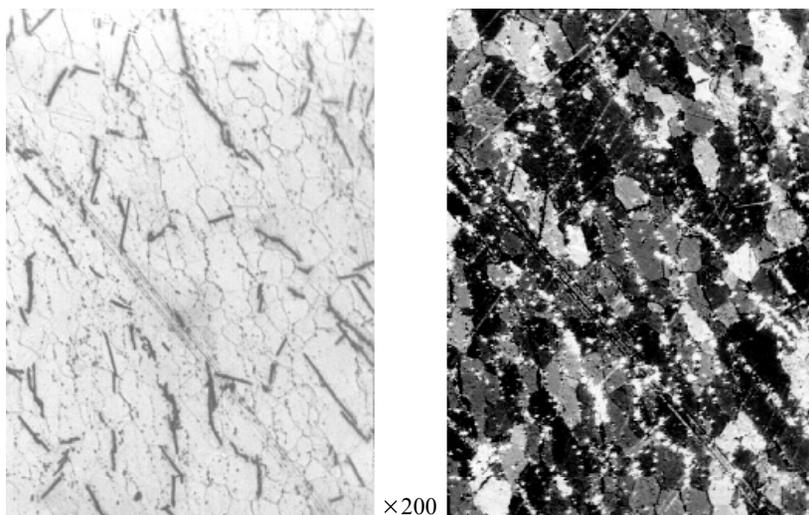


Рис. 2. Поверхностные трещины в бериллии сорта Т-56 после электроэрозионной резки
Fig. 2. The beryllium T-56 surface cracks after EDM cutting

Ещё один аспект, который просто невозможно было учесть в [1], заключается в том, что коэффициент однородности структуры f_c , безусловно влияющий на работоспособность изделий из бериллия [3], может оказаться полезным при анализе факторов, влияющих на величину K_{IC} . Для использованных в [1] сортов горяче-прессованного бериллия, по методике, изложенной в [6], были рассчитаны значения коэффициента однородности и сопоставлены с результатами измерения K_{IC} при комнатной температуре (см. рис. 3). Можно видеть, что зависимость имеет экстремальный характер с максимумом при $f_c = 0.8$. Попытка математической интерпретации полученных результатов приводит к сложной зависимости:

$$Y = -430.3x^3 + 742.4x^2 - 368.1x + 98.28.$$

К сожалению, из-за ограниченного количества и значительного разброса экспериментальных точек можно дать лишь качественное объяснение приведённой зависимости. Рассмотрим два крайних случая:

- весьма неоднородная структура ($f_c < 0.5$) содержит крупные включения оксида и интерметаллидов при большой дисперсии размеров зёрен, которые сами могут быть источниками трещин. Именно такая структура характерна для материала сорта Т-56.

- однородная структура, когда значение f_c приближается к единице. В этом случае в материале отсутствуют элементы структуры (включения нужного размера и/или конгломераты мелких зёрен), способные остановить или замедлить развитие трещины. Косвенно этот вывод подтверждается тем, что по данным [1] чистый металл литейного происхождения, не содержащий включений оксида, обладает втрое меньшей вязкостью разрушения по сравнению с порошковым металлом.

Таким образом, налицо необходимость в определённом компромиссе, а именно: при попытках максимально повысить работоспособность изделий из бериллия за счёт увеличения однородности структуры неизбежно происходит некоторое снижение вязкости разрушения. Разумеется, в силу отмеченных выше обстоятельств, этот вывод следует рассматривать как предварительный.

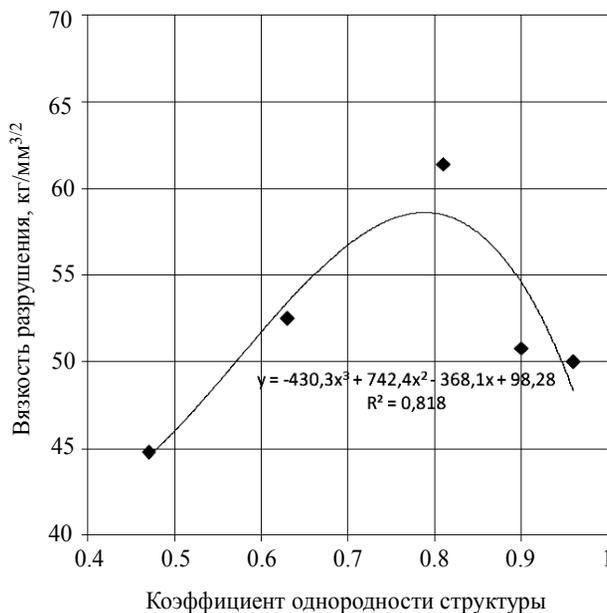


Рис. 3. Корреляция между f_c и вязкостью разрушения для отечественных сортов бериллия по данным [1]

Fig. 3. f_c and fracture toughness correlation

Заключение

Данную статью следует рассматривать как попытку объяснить имеющиеся к настоящему времени результаты измерения вязкости разрушения бериллия при комнатной температуре, основываясь на современных представлениях о прочности и пластичности бериллия.

С позиций концепции ОТМ объяснены трудности, возникающие при создании усталостной трещины в бериллии. К сожалению это обусловлено самой природой бериллия, и поэтому, применительно к бериллию, необходимо разработать новую методику измерения K_{IC} , учитывающую его специфические особенности.

Показано, что причиной большого разброса результатов измерений K_{IC} могут быть поверхностные микротрещины, образующиеся при создании надреза, а также возможное сложное и неоднозначное влияние однородности структуры исследованных образцов.

Решение указанных задач может потребовать не меньших усилий, чем те, которые были в свое время затрачены на исследование возможностей улучшения пластических характеристик бериллия. Даже из ограниченного количества имеющихся данных можно заключить, что пути повышения пластичности и вязкости бериллия могут оказаться различными. Если дальнейшие исследования подтвердят это, то понадобится повторить многое из того, что было сделано ранее при изучении пластичности бериллия, для выяснения возможностей повышения его вязкости. Из-за больших размеров и сложной конфигурации образцов и существующей в настоящее время неопределённости в методике испытаний решение этой задачи, несомненно, вызывает значительные трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стоев П.И.* Влияние структурных факторов на формирование механических, вязкостных, динамических свойств и акустическую эмиссию новых бериллиевых материалов: дис. докт. физ.-мат. наук. Харьков: ХФТИ, 1999. 445 с.
2. *Хомутов А.М., Михайлов В.С., Куринский П.Е.* Особенности структуры бериллия и их связь с работоспособностью поликристаллического металла в различных условиях // *Металлы*. 2002. № 1. С. 88–96.
3. *Тузов Ю.В., Хомутов А.М.* Разработка обобщающего критерия работоспособности изделий из бериллия // *Деформация и разрушение материалов*. 2010. № 3.
4. *Тузов Ю.В., Хомутов А.М.* Механизмы релаксации остаточных термических микронапряжений в бериллии // *Цветные металлы*. 2009. № 12.
5. *Beryllium. Science and Technology*. V.1–2 / ed. by D. Webster and G.I. London. New York & London: Plenum Press, 1979. Сокр. русский перевод: Бериллий. Наука и технология. М.: Металлургия, 1984. 624 с.
6. *Коновалов Ю.В., Тузов Ю.В., Хомутов А.М.* Разработка программного обеспечения для анализа влияния технологических факторов на конечные свойства заготовок из бериллия // *Химическая технология*. 2010. Т. 11. № 3. С. 175–180

Статья поступила 05.05.2016 г.

Tuzov Yu.V. THE ISSUE OF FRACTURE TOUGHNESS OF BERYLLIUM. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 83–89

DOI 10.17223/19988621/433/9

There are residual thermal stresses (RTS) in any polycrystalline beryllium. The destruction of the plane of the basis was blocked by the RTS. The stress relaxation was in a top of the growing cracks and the strength of material reduced.

It is difficult for the establishing a fatigue crack. The dimensionless deviation of the mechanical properties from ideal (model) named the uniformity coefficient of the structure. The calculated coefficient uniformity and fracture toughness for the hot pressed beryllium was compared. The maximum ($f_c = 0.8$) is on the dependence.

Large inclusions and dispersions of grain size exist at heterogeneous structure ($f_c < 0.5$) such as T-56 material. There are not elements that can stop the developing of cracks in homogeneous structure ($f_c = 1$). It is the casting beryllium.

The increasing homogeneity of the structure for improving efficiency of articles of beryllium leads to reduction of fracture toughness.

Keywords: beryllium, fracture toughness.

TUZOV Yuriy Valentinovich (Candidate of Technical Sciences, National Research Nuclear University MEPhI, Russia)

REFERENCES

1. Stoev P.I. (1999) Vliyanie strukturnykh faktorov na formirovanie mekhanicheskikh, vyazkostnykh, dinamicheskikh svoystv i akusticheskuyu emissiyu novykh berillievyykh materialov [Influence of structural factors on the mechanical, viscosity, dynamic properties and acoustic emission of new beryllium materials]. Phys. and Math. Dr. Diss. Kharkov: KhPTI. 445 p.
2. Khomutov A.M., Mikhailov V.S., Kurinskiy P.E. (2002) Osobennosti struktury berilliya i ih svyaz s rabotosposobnostyu polykrystallicheskogo metalla v razlichnykh usloviyah [The relationship the performance of polycrystalline metal with features of the structure of beryllium under different conditions]. *Journal Metals*. 1. pp. 88–96.
3. Tuzov Yu.V., Khomutov A.M. (2010) Razrabotka obobshchayuschego kriteriya rabotospocobnosti berilliy [The workable criteria for beryllium summarizing the development]. *Razrushenie materialov – Journal the Materials Deformation and Fracture*. 3. pp. 34–42.

4. Tuzov Yu.V., Khomutov A.M. (2009) Mekhanizmy relaksatsii termicheskikh ostatochnykh napryazheniy [The relaxation of residual thermal stresses mechanisms]. *Tsvetnye metally – Journal Non-ferrous Metals*. 12. pp. 15–23.
5. Beryllium. Science and Technology v.1–2, ed. by D. Webster and G.I. London (1979) New York & London: Plenum Press.
6. Konovalov Yu.V., Tuzov Yu.V., Khomutov A.M. (2010) Razrabotka programmnoogo obespecheniya dlya analiza vliyaniya tehnologicheskikh faktorov na konechnye svoystva zagotvok iz berilliya [Software development for analyzing the influence of technological factors on the final properties of workpieces made of beryllium]. *Khimicheskaya tehnologiya – Journal Chemical Technology*. 11(3) pp.175–180.

УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/433/10

Б.А. Худаяров, Ф. Тураев

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ВЯЗКОУПРУГОГО ТРУБОПРОВОДА С ЖИДКОСТЬЮ**

Приведена математическая модель задачи о нелинейных колебаниях вязкоупругого трубопровода с протекающей через неё жидкостью. С помощью метода Бубнова – Галеркина математическая модель задачи сводится к решению системы обыкновенных интегродифференциальных уравнений, решаемая численным методом исключения слабосингулярных особенностей в интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях. Установлено, что для выявления влияния вязкоупругих свойств материала конструкций на колебания трубопровода, необходимо использовать слабосингулярные ядра наследственности типа Абеля.

Ключевые слова: математическая модель, вязкоупругость, интегродифференциальные уравнения, алгоритм, трубопровод.

В настоящее время нефтегазовая промышленность часто сталкивается с проблемами ремонта, реконструкции и восстановления трубопроводов из-за воздействия на них различных внешних факторов. Одним из путей решения данной проблемы является применение современных, ресурсосберегающих, экологически безопасных технологий, к которым можно отнести использование неметаллических, в частности полимерных композиционных материалов [1–3].

Целью данной работы является создание математической модели, численного алгоритма и компьютерной программы для решения задачи о нелинейных колебаниях вязкоупругих тонкостенных трубопроводов большого диаметра на базе теории оболочек [4, 5].

Рассмотрим поведение тонкой круговой вязкоупругой цилиндрической оболочки, внутри которой с постоянной скоростью U движется идеальная жидкость.

Используя в [5] и полагая $k_x = 0$, $k_y = \frac{1}{R}$, $y = R\theta$, уравнение колебаний вязкоупругой цилиндрической оболочки с учетом геометрической нелинейности запишем

$$\begin{aligned} (1-R^*) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + L_1(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ (1-R^*) \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + L_2(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \quad (1) \\ D(1-R^*) \nabla^4 w + L_3^*(u, v, w) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q, \end{aligned}$$

где μ – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости, ρ – плотность материала;

h – толщина оболочки; R^* – интегральный оператор вида $R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$;

$R(t-\tau)$ – ядро релаксации;

$$L_1(w) = -\frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, k_x = 0, k_y = \frac{1}{R}, y = R\theta;$$

$$L_2(w) = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\mu}{2R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$L_1^*(u, v, w) = (1-R^*) \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ -\frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R^2} - \frac{\mu}{2R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} -$$

$$-\frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\mu w}{R} \right] + \frac{(1-\mu)}{2R} \frac{\partial w}{\partial \theta} (1-R^*) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} -$$

$$-\frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} (1-R^*) \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R} \right] + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\},$$

где q – давление жидкости на стенку трубопровода.

Решение систем нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных (1) при различных граничных условиях и при наличии сингулярных ядер наследственности представляет собой значительные математические трудности. Поэтому естественным способом решения этих систем является дискретизация по пространственным переменным и получение системы разрешающих нелинейных ИДУ относительно функций времени.

Приближенное решение системы (1) будем искать в виде

$$u(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \sin(m\theta),$$

$$v(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \cos(m\theta), \quad (2)$$

$$w(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin(m\theta).$$

Подставляя (2) в систему (1) и применяя метод Бубнова – Галёркина, получим систему интегродифференциальных уравнений (ИДУ):

$$\ddot{u}_{kl} + (1-R^*) \left\{ \left(k^2 \pi^2 \delta^2 \gamma^2 + \frac{1-\mu}{2} l^2 \delta^2 \right) u_{kl} - \frac{1-\mu}{2} kl\pi\gamma\delta^2 v_{kl} + \right.$$

$$+ \mu \delta^2 \gamma^2 k \pi w_{kl} + \sum_{n,i=1}^N \sum_{r=1}^M \left(\frac{ni^2 \pi^2}{2} \gamma^3 \delta + \frac{1-\mu}{2} \frac{nr^2}{2} \gamma \delta \right) \bar{\Delta}_{1klnmir} w_{nm} w_{ir} -$$

$$\left. - \frac{1+\mu}{2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{r=1}^M \frac{imr}{2} \gamma \delta \bar{\Delta}_{2klnmir} w_{nm} w_{ir} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \ddot{v}_{kl} + (1 - R^*) \left\{ \left[\frac{1 - \mu}{2} k^2 \pi^2 \delta^2 \gamma^2 + l^2 \delta^2 \right] v_{kl} - \frac{1 + \mu}{2} kl \pi \gamma \delta^2 u_{kl} - l \delta^2 w_{kl} - \right. \\ & - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \frac{mr^2}{2\pi} \delta \bar{\Delta}_{3klnmir} w_{nm} w_{ir} + \frac{1 + \mu}{2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \frac{inr\pi}{2} \gamma^2 \delta \bar{\Delta}_{4klnmir} w_{nm} w_{ir} - \\ & \left. - \frac{1 - \mu}{2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \frac{i^2 m \pi}{2} \gamma^2 \delta \bar{\Delta}_{3klnmir} w_{nm} w_{ir} \right\} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & (1 + \Phi_{\alpha l}^*) \dot{w}_{kl} + (1 - R^*) \left\{ \left(\frac{1}{12} [k^2 \pi^2 \gamma^2 + l^2]^2 + \delta^2 \right) w_{kl} + \pi \mu \gamma \delta^2 k u_{kl} - l \delta^2 v_{kl} - \right. \\ & - \frac{\delta}{4\pi} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M mr \bar{\Delta}_{5klnmir} w_{nm} w_{ir} - \frac{\pi \mu \gamma^2 \delta}{4} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M ni \bar{\Delta}_{6klnmir} w_{nm} w_{ir} \left. \right\} + \\ & + \frac{1 - \mu}{4} \gamma \delta \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M w_{nm} n (1 - R^*) \left[\gamma \pi i r v_{ir} - r^2 u_{ir} \right] \bar{\Delta}_{6klnmir} + \\ & + \frac{\delta}{2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M m w_{nm} (1 - R^*) \left[i r \mu \gamma u_{ir} - \frac{r^2}{\pi} v_{ir} + \frac{r}{\pi} w_{ir} \right] \bar{\Delta}_{5klnmir} + \\ & + \frac{1 - \mu}{4} \delta \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M m w_{nm} (1 - R^*) \left[i r \gamma u_{ir} - \gamma^2 i^2 \pi v_{ir} \right] \bar{\Delta}_{5klnmir} - \\ & - \frac{\delta}{2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M n w_{nm} (1 - R^*) \left[i r \mu \gamma^2 \pi v_{ir} - i^2 \gamma^3 \pi^2 u_{ir} - \mu \pi i \gamma^2 w_{ir} \right] \bar{\Delta}_{6klnmir} - \\ & - \frac{1 - \mu}{4} \delta \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M n m w_{nm} (1 - R^*) \left[r \gamma u_{ir} - i \gamma^2 \pi v_{ir} \right] \bar{\Delta}_{7klnmir} - \\ & - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M m^2 w_{nm} (1 - R^*) \left[i \mu \gamma u_{ir} - \frac{r}{\pi} v_{ir} + \frac{1}{\pi} w_{ir} \right] \frac{\delta}{2} \bar{\Delta}_{8klnmir} - \\ & - \frac{1 - \mu}{4} \delta \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M n m w_{nm} (1 - R^*) \left[r \gamma u_{ir} - i \gamma^2 \pi v_{ir} \right] \bar{\Delta}_{7klnmir} - \\ & - \frac{\delta}{2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M n^2 w_{nm} (1 - R^*) \left[i \gamma^3 \pi^2 u_{ir} - \mu r \gamma^2 \pi v_{ir} + \mu \gamma^2 \pi w_{ir} \right] \bar{\Delta}_{8klnmir} - \\ & - \delta^2 M^{*2} \gamma^2 M_E^2 k^2 \pi^2 \Phi_{\alpha l}^* w_{kl} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{nm}(0) &= u_{0nm}, \quad \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, \quad v_{nm}(0) = v_{0nm}, \quad \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, \\ w_{nm}(0) &= w_{0nm}, \quad \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm}. \end{aligned}$$

Далее к системе (3), описывающей нелинейные задачи о колебаниях вязкоупругих трубопроводов, применен численный метод [6–8]. Следующим этапом численного метода является регуляризация системы ИДУ (3) с сингулярными ядра

ми. С помощью замены переменных

$$t - \tau = z^{1/\alpha}, \quad 0 \leq z \leq t^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

интеграл при ядре Колтунова – Ржаницына с особенностью следующего вида:

$$A \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \exp(-\beta(t - \tau)) w(\tau) d\tau,$$

записывается как

$$\frac{A}{\alpha} \int_0^{t^\alpha} \exp(-\beta z^{1/\alpha}) w(t - z^{1/\alpha}) dz.$$

Заметим, что после замены переменных подынтегральная функция относительно z становится регулярной. Полагая затем $t = t_i$, $t_i = i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ ($\Delta t = \text{const}$ – шаг интерполяции) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами (в частности, по формуле трапеции), имеем

$$\frac{A}{\alpha} \sum_{k=0}^i B_k \exp(-\beta t_k) w_{i-k},$$

где коэффициенты

$$B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}; \quad B_i = \frac{\Delta t^\alpha (i^\alpha - (i-1)^\alpha)}{2}; \quad B_k = \frac{\Delta t^\alpha ((k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha)}{2}, \quad k = \overline{1, i-1}.$$

На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (3). Интегрируя систему (3) два раза по t , можно записать ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим сингулярные особенности интегрального оператора R^* . Затем, полагая $t = t_i$, $t_i = ih$, $i = 1, 2, \dots$ ($h = \text{const}$) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $u_{ikl} = u_{kl}(t_i)$, $v_{ikl} = v_{kl}(t_i)$ и $w_{ikl} = w_{kl}(t_i)$, получим рекуррентные формулы для ядра Колтунова – Ржаницына $\left(R(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \right)$.

Таким образом, согласно численному методу относительно неизвестных получим систему алгебраических уравнений. Для решения системы используется метод Гаусса. На базе разработанного алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ.

Результаты вычислений, полученные для следующих числовых значений основных параметров трубопровода: $\mu = 0.32$; $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см²; $\rho = 7.8$, представлены в виде графиков. На рис. 1–4 приведены графики перемещений W , U , V в зависимости от времени t соответственно. Расчеты показали, что при решении данных задач в разложении метода Бубнова – Галеркина достаточно удерживать 10 первых гармоник ($N = 2$; $M = 5$), так как дальнейшее увеличение количества членов не оказывает существенного влияния на амплитуду колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки.

На рис. 1 сопоставлены кривые изменения во времени перемещений W (рис. 1, а), U (рис. 1, б), V (рис. 1, в) срединной точки упругой ($A = 0$ – кривая 1) и вязкоупругой трубопроводов типа цилиндрических оболочек ($A = 0.05, 0.1$ – кривые 2, 3). Как видно из рисунка, учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к затуханию колебательного процесса, при этом, хотя решение упругой и вязкоупругой задач в начальный период времени мало отличаются друг от друга, с течением времени вязкоупругие свойства оказывают существенное влияние.

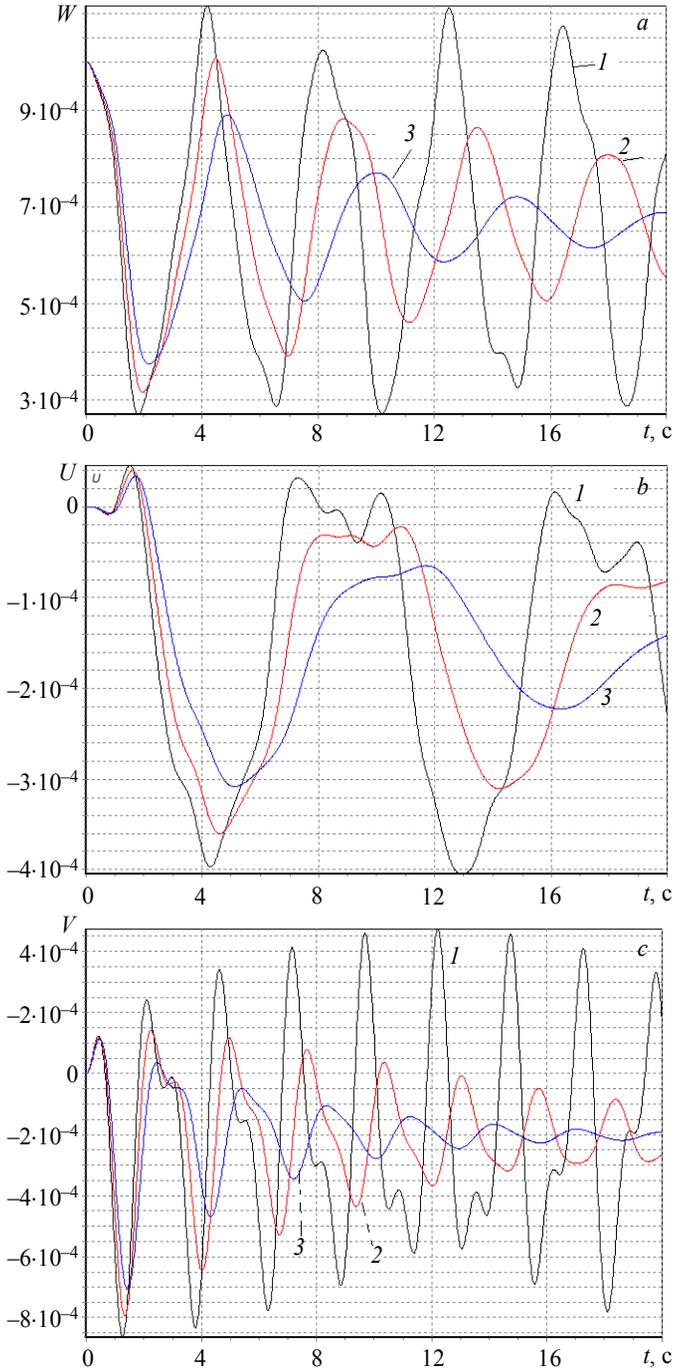


Рис. 1. Зависимости перемещений от времени при $A = 0$ (1), $A = 0.05$ (2), $A = 0.1$ (3); $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.005$; $\gamma = 0.02$; $\delta = 1.2$; $\rho = 7.8$; $E = 2 \cdot 10^6$; $N = 2$; $M = 5$; $M_1 = 0.1$.
Fig. 1. Displacement as a function of time at $A = 0$ (1), $A = 0.05$ (2), $A = 0.1$ (3); $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.005$; $\gamma = 0.02$; $\delta = 1.2$; $\rho = 7.8$; $E = 2 \cdot 10^6$; $N = 2$; $M = 5$; $M_1 = 0.1$

Влияние реологического параметра α на колебательный процесс показано на рис. 2. Из рисунка видно, что увеличение значения этого параметра приводит к увеличению амплитуды и частоты колебания.

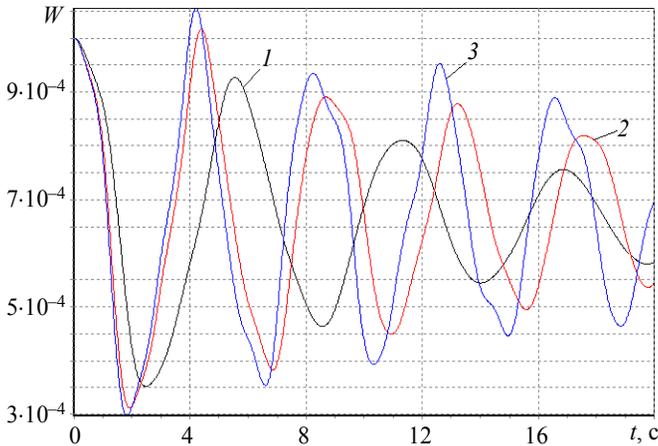


Рис. 2. Зависимость прогиба от времени при $\alpha = 0.1$ (1), $\alpha = 0.3$ (2), $\alpha = 0.7$ (3); $A = 0.05$; $\beta = 0.005$; $\gamma = 0.02$; $\rho = 7.8$; $E = 2 \cdot 10^6$; $N = 2$; $M = 5$; $M_1 = 0.1$, $\delta = 1.2$
Fig. 2. Deflection as a function of time at $\alpha = 0.1$ (1), $\alpha = 0.3$ (2), $\alpha = 0.7$ (3); $A = 0.05$; $\beta = 0.005$; $\gamma = 0.02$; $\rho = 7.8$; $E = 2 \cdot 10^6$; $N = 2$; $M = 5$; $M_1 = 0.1$, $\delta = 1.2$

Изучено также влияние геометрического параметра γ , равного отношению радиуса R к длине L трубопровода (рис. 3). Вычисления проводились для вязкоупругих труб с относительной длиной $\gamma = R/L$, изменяющейся в пределах от 0.01 до 0.5. Из рисунка видно, что увеличение этого параметра приводит к уменьшению частоты колебаний и одновременно к увеличению амплитуды изгибных перемещений W трубопровода.

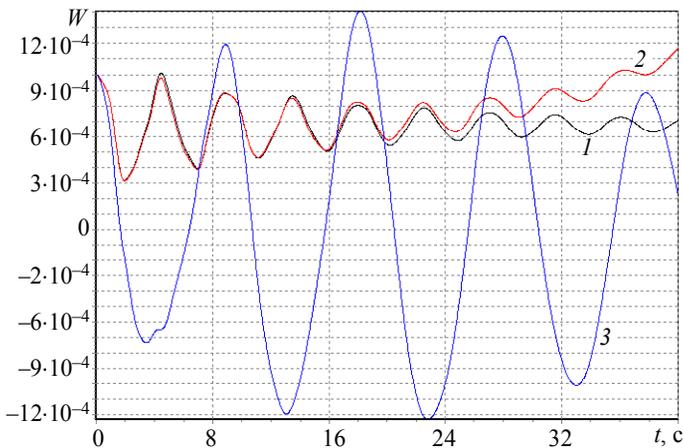


Рис. 3. Зависимость прогиба от времени при $\gamma = 0.01$ (1), $\gamma = 0.05$ (2), $\gamma = 0.5$ (3); $A = 0.05$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.005$; $\delta = 1.2$; $\rho = 7.8$; $E = 2 \cdot 10^6$; $N = 2$; $M = 5$; $M_1 = 0.1$
Fig. 3. Deflection as a function of time at $\gamma = 0.01$ (1), $\gamma = 0.05$ (2), $\gamma = 0.5$ (3); $A = 0.05$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.005$; $\delta = 1.2$; $\rho = 7.8$; $E = 2 \cdot 10^6$; $N = 2$; $M = 5$; $M_1 = 0.1$

На рис. 4 изображены кривые зависимости прогиба W от времени вязкоупругого трубопровода при различных значениях параметра $\delta = R/h$. Вычисление проводилось для вязкоупругих труб с относительной толщиной $\delta = R/h$, изменяемой в пределе от 1.1 до 5. Анализ указанных кривых позволяет сделать вывод, что уменьшению толщины трубопровода способствует повышение частоты колебаний. На рис. 4 наблюдается довольно заметное увеличение амплитуды прогиба трубопровода в случае $\delta = 5$ (кривая 3).

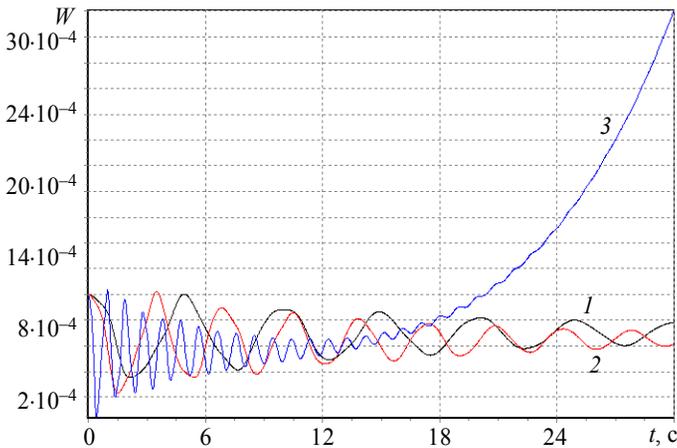


Рис. 4. Зависимость прогиба от времени при $\delta = 1.1$ (1), $\delta = 1.5$ (2), $\delta = 5$ (3); $A = 0.05$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.005$; $\gamma = 0.02$; $\rho = 7.8$; $E = 2 \cdot 10^6$; $N = 2$; $M = 5$; $M_1 = 0.1$

Fig. 4. Deflection as a function of time at $\delta = 1.1$ (1), $\delta = 1.5$ (2), $\delta = 5$ (3); $A = 0.05$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.005$; $\gamma = 0.02$; $\rho = 7.8$; $E = 2 \cdot 10^6$; $N = 2$; $M = 5$; $M_1 = 0.1$

Необходимо отметить, что алгоритм предлагаемого метода позволяет детально исследовать влияние реологических параметров вязкости на характер колебательной устойчивости вязкоупругих трубопроводов, в частности при исследовании свободных колебаний трубопроводов на базе теории идеально-упругих оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аношкин А.Н., Зуйко В.Ю., Иванов С.Г. Расчет напряженно-деформированного состояния и прогнозирование прочности полимерных армированных труб газового назначения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 6(56). С. 419–426.
2. Ягубов Э.З. Использование высокопрочных стеклопластиковых труб в нефтяной промышленности // Нефтяное хозяйство. 2001. № 6. С.68–70.
3. Ягубов Э.З., Цхадая Н.Д., Якубов З.Х. Многоканальные трубопроводы для транспортировки нефтегазовых сред и восстановление изношенных нефтегазопроводов // Научные труды. 2013. № 1. С. 57–63.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука, Физматлит, 1997. 272 с.
6. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
7. Худаяров Б.А., Бандурин Н.Г. Нелинейный флаттер вязкоупругих ортотропных цилиндрических панелей // Математическое моделирование. РАН. 2005. Т. 17. № 10. С. 79–86.

8. Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А., Абдукаримов А. Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственно-деформируемых систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. Российская академия наук. 2007. № 4. С. 107–110.

Статья поступила 26.05.2016 г.

Khudayarov B.A., Turaev F. (2016) NUMERICAL SIMULATION OF NONLINEAR OSCILLATIONS OF A VISCOELASTIC PIPELINE WITH FLUID. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 90–98

DOI 10.17223/19988621/433/10

In this paper, mathematical models of nonlinear dynamic problems with fluid and gas flows through pipelines have been developed based on the Boltzmann – Volterra integral models with weakly singular hereditary kernels. Using the Bubnov–Galerkin method for the boundary conditions, the resulting nonlinear integrodifferential equations with partial derivatives are reduced to solving systems of nonlinear ordinary integrodifferential equations with both constant and variable coefficients as functions of time. It is proposed to investigate oscillating processes occurring in a pipeline by a numerical algorithm for solving the nonlinear integrodifferential equations with weakly singular hereditary kernels, which is convenient for a computer implementation. On the basis of the developed computational algorithm, a complex of computer application programs allowing one to explore a completely new class of mathematic simulation problems, such as an oscillatory process of viscoelastic thin-walled pipelines with a large diameter, in terms of the shell theory is designed. The influence of a singularity in the hereditary kernels on oscillations of the construction with viscoelastic properties has been numerically investigated. When simulating the nonlinear problems, a number of new dynamic effects were explored. It was found that the determination of the effect of viscoelastic properties of the construction material on vibrations of the pipeline with a flowing liquid requires applying weakly singular hereditary kernels with an Abel type singularity.

Keywords: mathematical model, viscoelasticity, integrodifferential equations, algorithm, pipeline.

KHUDAYAROV Bakhtiyar Alimovich (Doctor of Technical Sciences, Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, Tashkent, Uzbekistan).

E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

TURAEV Fozil Zhurakulovich (Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, Tashkent, Uzbekistan).

E-mail: khudayarovba@umail.uz

REFERENCES

1. Anoshkin A.N., Zuyko V.Yu., Ivanov S.G. (2007) Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya i prognozirovaniye prochnosti polimernykh armirovannykh trub gazovogo naznacheniya [Stress-strain analysis and strength prediction of metal-reinforced thermoplastic gas pipes]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya – Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*. 6(56). pp. 419–426.
2. Yagubov E.Z. (2001) Ispol'zovanie vysokoprochnykh stekloplastikovykh trub v neftyanoy promyshlennosti [The use of high-strength glass-reinforced plastic pipes in oil industry]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry Journal*. 6. pp. 68–70.
3. Yagubov E.Z., Tskhadaya N.D., Yakubov Z.Kh. (2013) Mnogokanal'nye truboprovody dlya transportirovki neftegazovykh sred i vosstanovlenie iznoshennykh neftegazoprovodov [Multichannel pipelines for transportation of oil and gas media and restoration of depreciated oil and gas pipelines]. *Nauchnye trudy*. 1. pp. 57–63.
4. Vol'mir A.S. (1979) *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti*. [Shells in fluid and gas flow. Problems of hydroelasticity]. Moscow: Nauka.

5. Grigolyuk E.I., Mamay V.I. (1997) *Nelineynoe deformirovanie tonkostennykh konstruksiy* [Nonlinear deformation of thin-walled structures]. Moscow: Nauka, Fizmatlit.
6. Badalov F.B. (1987) *Metody resheniya integralnykh i integro-differentsial'nykh uravneniy nasledstvennoy teorii vyazkouprugosti*. [Methods for solving integral and integro-differential equations of the hereditary theory of viscoelasticity]. Tashkent: Mekhnat.
7. Khudayarov B. A., Bandurin N.G. (2005) Nonlinear flutter of viscoelastic orthotropic cylindrical panels. *Mathematic Simulation*. 17(10). pp. 79–86.
8. Badalov F.B., Khudayarov B.A., Abdukarimov A. (2007) Effect of the hereditary kernel on the solution of linear and nonlinear dynamic problems of hereditary deformable systems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 36. pp. 328–335.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БИМАТОВ Владимир Исмагилович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой динамики полета Томского государственного университета. E-mail: vbimatov@mail.ru

БРАГУНЦОВ Егор Яковлевич – кандидат технических наук, ведущий конструктор института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН. E-mail: braeg@yandex.ru

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: alexy121@mail.ru

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, специалист отдела инновационного развития и интеллектуальной собственности производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск», доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: m.bubenchikov@gtt.gazprom.ru, michael121@mail.ru

ВНУЧКОВ Дмитрий Александрович – младший научный сотрудник института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН. E-mail: vnuchkov@itam.nsc.ru

ГАДИМОВ Илгар Камил – инженер кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности. E-mail: qadimovilqar@gmail.com

ГАЛКИН Владислав Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геологии и разработки нефтяных месторождений Томского политехнического университета. E-mail: vlg@tpu.ru

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглы – доктор технических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности. E-mail: xan.h@rambler.ru

ДУНАЕВСКИЙ Григорий Ефимович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой радиоэлектроники Томского государственного университета.

ЕВСЕЕВ Игорь Александрович – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета.

ЖАЛНИНА Александра Анатольевна – старший преподаватель кафедры фундаментальной математики математического факультета Кемеровского государственного университета. E-mail: qwert1776@yandex.ru

ЖАМБАА Сонинбаяр – аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета, преподаватель кафедры прикладной математики Монгольского национального университета. E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

ЗВЕГИНЦЕВ Валерий Иванович – доктор технических наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН. E-mail: zvegin@itam.nsc.ru

ИВАНОВ Игорь Владимирович – кандидат технических наук, главный конструктор направления, АО «НПО «Сплав». E-mail: ivaig@rambler.ru

КАСАТКИНА Татьяна Васильевна – кандидат физико-математических наук, заведующая отделом аспирантуры и докторантуры Томского государственного университета. E-mail: tkasatkina@mail.tsu.ru

КИСЕЛЕВА Ольга Сергеевна – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета.

КУТЕНКОВ Виктор Олегович – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета.

ЛИБИН Эдуард Ефимович – кандидат физико-математических наук, доцент физико-технического факультета Томского государственного университета.

МИЩАРИНА Елена Юрьевна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sweetyhemp@gmail.com

НАЙМАНБАЕВ Фархат Жумагалиевич – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета.

ПОКРОВСКИЙ Владимир Геннадьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительных машин и систем Пензенского государственного технологического университета. E-mail: svg0106@mail.ru

САВКИНА Надежда Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры динамики полета Томского государственного университета. E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

ТУЗОВ Юрий Валентинович – кандидат технических наук, директор института Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». E-mail: 79032370891@yandex.ru

ТУРАЕВ Фозил Журакулович – ассистент кафедры высшей математики Ташкентского института ирригации и мелиорации. E-mail: khudayarovba@umail.uz

ФАРАПОНОВ Валерий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры динамики полета Томского государственного университета. E-mail: fff@ftf.tsu.ru

ХУДАЯРОВ Бахтияр Алимович – доктор технических наук, заведующий кафедрой высшей математики Ташкентского института ирригации и мелиорации. E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.10.2016.
Формат 70 × 100^{1/16}. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 8.06. Уч.-изд. л. 9.03. Тираж 300 экз. Заказ № 29.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 2026.

<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru