

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2017**

**№ 45**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### **Учредитель:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменишчиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

### **EDITORIAL COUNCIL**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

### **EDITORIAL BOARD**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Igor A. Aleksandrov, Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

**H-index:** <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Бухтяк М.С.</b> Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала.....	5
<b>Забарина А.И., Пестов Г.Г., Фомина Е.А.</b> К теории 2-упорядоченных групп .....	25
<b>Иванов Д.Ю.</b> Замкнутость сумм неограниченных операторов, действующих по разным переменным в пространствах квадратично суммируемых функций нескольких переменных.....	35
<b>Тагиев Р.К., Касумов Р.А.</b> Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием .....	49

### МЕХАНИКА

<b>Азин А.В., Пономарев С.В., Рикконен С.В., Храмцов А.М.</b> Экспериментальные исследования режимов работы пьезоактюатора .....	60
<b>Бошнятов Б.В.</b> Теплопроводность пузырьковых газожидкостных сред повышенной концентрации.....	69
<b>Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Тарасов Е.А., Усенко О.В., Челнокова А.С.</b> Разделение метано-гелиевой смеси с помощью пористого графена.....	80
<b>Дьяченко Н.Н., Дьяченко Л.И., Гурова В.С., Синюкая С.А.</b> Численное исследование влияния аэродинамического дробления частиц конденсата на двухфазные потери импульса в соплах РДТТ.....	88
<b>Порязов В.А., Крайнов А.Ю.</b> Горение твердого топлива с добавлением порошка алюминия при перегрузках.....	95
<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> .....	104

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Bukhtyak M.S.</b> Generalization of minimal surfaces and simulation of the shape of an orthotropic material construction.....	5
<b>Zabarina A.I., Pestov G.G., Fomina E.A.</b> On the theory of 2-ordered groups.....	25
<b>Ivanov D.Y.</b> Closedness of sums of unbounded operators acting on different variables in the spaces of square-integrable functions of several variables.....	35
<b>Tagiev R.K., Kasumov R.A.</b> On the optimization formulation of the coefficient inverse problem for a parabolic equation with an additional integral condition.....	49

### MECHANICS

<b>Azin A.V., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V., Khramtsov A.M.</b> Experimental research on the operating conditions of pzt stack actuator.....	60
<b>Boshenyatov B.V.</b> Thermal conductivity of the bubble gas-liquid media with a high concentration.....	69
<b>Bubenchikov A.M, Bubenchikov M.A., Tarasov E.A., Usenko O.V., Chelnokova A.S.</b> Separation of methane-helium mixture by porous graphite.....	80
<b>Dyachenko N.N., Dyachenko L.I., Gurova V.S., Sineokaya S.A.</b> Numerical investigation of the effect of aerodynamic fragmentation of condensate particles on the two-phase impulse losses in a solid-fuel rocket engine nozzle.....	88
<b>Poryazov V.A., Krainov A.Yu.</b> Combustion of the solid propellant with addition of aluminum powder under an acceleration load.....	95
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	104

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22  
DOI 10.17223/19988621/45/1

М.С. Бухтяк

**ОБОБЩЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ КОНСТРУКЦИИ  
ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА**

Данная публикация продолжает серию работ автора о моделировании деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора. Строится геометрическая модель хорошо известного «матрасного эффекта», вполне аналогичного тому, который наблюдается при раскрытии зонтика. Модель базируется на гипотезе: поверхность сетеполотна параболического рефлектора – в изотропном случае – принимает форму, близкую к минимальной поверхности. Учтен тот факт, что для ортотропного сетеполотна сумма главных кривизн дальше от нуля, нежели в изотропном случае. Детально исследована область надежности модели. Математический аппарат модели – классическая дифференциальная геометрия.

**Ключевые слова:** параболический рефлектор, главные кривизны, ортотропия, минимальная поверхность, задание поверхности посредством семейства образующих кривых.

### 1. Псевдоминимальная поверхность

Моделирование деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора рассматривалось автором в [1–5].

Строится геометрическая модель хорошо известного [6–8, 1] «матрасного эффекта», вполне аналогичного тому, который наблюдается при раскрытии зонтика. Основная гипотеза: поверхность сетеполотна параболического рефлектора – в изотропном случае – принимает форму, близкую к минимальной поверхности [9, 10]. Учтен тот факт, что для ортотропного сетеполотна сумма главных кривизн [9, 10] дальше от нуля, нежели в изотропном случае. Исследована область надежности модели. Математический аппарат модели – классическая дифференциальная геометрия [9, 10]. Алгоритм и его обоснование приведены в [1].

Пусть сетеполотно ортотропно и коэффициент его растяжения в радиальном направлении обозначим  $коэфф_{рад}$ , а вдоль окружностей, ортогональным радиусам –  $коэфф_{окр}$ . Выясним, как соответствующие деформации отразятся на главных кривизнах.

В литературе известны исследования указанного эффекта (например, [6], там же приведена библиография). Авторы упомянутой книги в основу исследования положили механические свойства сетеполотна, испытывающего нагрузки, обу-

словенные скреплением с жесткими ребрами. Иногда, впрочем, данный эффект игнорируется (например, [11], где лепесток параболоида аппроксимируется куском параболического цилиндра, проходящего через соседние рёбра). Мы в своём подходе к проблеме исходим из того, что независимо от того, какие усилия заставили сетеполотно принять форму, воспроизводящую матрасный эффект, она (форма) в случае изотропного материала весьма близка к минимальной поверхности.

Существенную роль играет величина, которую естественно назвать коэффициентом ортотропности, а именно,

$$L = \left( \frac{\text{коэфф}\phi_{\text{рад}}}{\text{коэфф}\phi_{\text{окр}}} \right)^2.$$

В случае изотропного сетеполотна имеем, очевидно,  $L = 1$ .

Мыльная пленка, натянутая на замкнутый контур, принимает (как правило) форму поверхности с нулевой средней кривизной. Это связано с тем, что усилия, возникающие в данной точке пленки под действием сил натяжения и стремящиеся сместить ее в одном из двух нормальных направлений, должны быть уравновешены силами, также направленными по нормали в той же точке, но в противоположную сторону. Равновесие сил обеспечивается обращением в нуль суммы главных кривизн. Данное условие симметрично относительно главных кривизн и не зависит от ориентации поверхности.

Главная кривизна поверхности в её точке  $M_0$  есть величина, обратная длине окружности, соприкасающейся для линии кривизны в этой точке.

Данный факт позволяет считать правдоподобным следующее предположение. Пусть ортотропный материал имеет форму поверхности  $\Sigma$  и в точке  $M_0$  этой поверхности ортотропные направления материала совпадают с главными направлениями поверхности. Пусть, далее, материал принял форму поверхности  $\Sigma$  в результате приложения растягивающего усилия к плоскому листу так, что во всех касательных направлениях в любой точке усилие одинаково и реакция материала такова, что вдоль одного главного направления происходит удлинение материала с некоторым постоянным коэффициентом, а вдоль второго – удлинение с иным постоянным коэффициентом. Тогда модули главных кривизн пропорциональны указанным коэффициентам. Такое условие (при неравных коэффициентах) несимметрично и требует более детального описания.

Пусть  $\Sigma$  – лишенная омбилических точек достаточно гладкая поверхность (пока безотносительно к лепесткам и деформациям). Допустим, что располагаем заданием нашей поверхности

$$\Sigma : \bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^2. \quad (1.1)$$

Главные кривизны получают обозначения  $k_1, k_2$ . Отсутствие омбилических точек позволяет считать, что во всех точках

$$k_1 < k_2.$$

Наличие (1.1) дает возможность вычислить главные кривизны и алгоритмически отнести их к первому либо второму номеру.

Коэффициенты растяжения материала пусть  $m_1, m_2$ . Тогда

$$m_2 |k_1| - m_1 |k_2| = 0, \quad m_1 > 0, \quad m_2 > 0. \quad (1.2)$$

Заметим, что условие типа (1.2) имеет смысл и в том случае, когда коэффициенты при кривизнах не рассматриваются как коэффициенты растяжения. Тогда вместо (1.2) мы имеем условие

$$M_2 k_1 + M_1 k_2 = 0, \quad M_1^2 + M_2^2 \neq 0.$$

Последнее можно записать в виде

$$k_1 + a k_2 = 0, \quad a \neq 0, \quad a = const. \quad (1.3)$$

**Определение 1.** Поверхность (1.1) вместе с упорядоченной парой главных кривизн  $k_1, k_2$ , для которых выполнено условие (1.3), будем называть *псевдоминимальной* поверхностью веса  $a$ .

В частности, псевдоминимальная поверхность веса 1 (при любой упорядоченности главных кривизн) – минимальная поверхность. Данное обстоятельство автор не склонен рассматривать как терминологическое недоразумение: в [12, с. 60] псевдориманово многообразие определено таким образом, что риманово многообразие оказывается его частным случаем.

Вернемся к поверхности  $\Sigma$ , освободив её от вышеприведенных качеств. Данная поверхность может оказаться лишь объектом планирования будущих построений, и о её инвариантах – главных кривизнах – мы можем рассуждать лишь декларативно. В частности, декларативным является и нумерация главных кривизн. В этом случае актуально следующее. Допустим, что одна из главных кривизн пропорциональна другой главной кривизне с данным коэффициентом пропорциональности, но какая именно – неизвестно. Тогда нет возможности вариант (1.3) предпочесть варианту

$$k_2 + a k_1 = 0, \quad a \neq 0, \quad a = const. \quad (1.4)$$

В этом случае условие (1.3) заменится на условие

$$(k_1 + a k_2)(a k_1 + k_2) = 0, \quad a \neq 0, \quad a = const. \quad (1.5)$$

Последнее условие, очевидно, симметрично относительно  $k_1, k_2$  и сохраняется при замене  $a$  на  $a^{-1}$ .

**Определение 2.** Условие (1.5) будем называть *ослабленным условием псевдоминимальности поверхности*. Величину  $\frac{k_1}{k_2} + a$  будем называть безразмерным индексом *псевдоминимальности*.

Заметим, что корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

связаны условием (1.5) тогда и только тогда, когда

$$ap^2 + (1-a)^2 q = 0. \quad (1.6)$$

Пусть  $E, F, G$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (1), а  $L, M, N$  – коэффициенты второй квадратичной формы. Главные кривизны – корни уравнения

$$(EG - F^2)k^2 + (2MF - EN - LG)k + (LN - M^2) = 0. \quad (1.7)$$

Если мы потребуем, чтобы корни уравнения (1.7) удовлетворяли условию (1.6), то должно быть выполнено соотношение

$$a(2MF - EN - LG)^2 + (1-a)^2(LN - M^2)(EG - F^2) = 0. \quad (1.8)$$

Заметим, что если поверхность  $\Sigma$  задана уравнением

$$z = f(x, y) \in C^2,$$

то уравнение (1.8) примет вид

$$a\left[(1+f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_y^2)f_{xx}\right]^2 + (1+f_x^2 + f_y^2)(1-a)^2(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) = 0.$$

Исследование данного уравнения осложнено (кроме прочего) тем, что неизвестно, является ли оно уравнением Эйлера – Лагранжа для какого-либо функционала.

## 2. Теорема существования

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве  $E_3$  подвижной репер [3]  $\{M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ , деривационные формулы которого имеют вид

$$d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\omega^i$ ,  $\omega_i^j$  – формы Пфаффа [3], удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

и уравнениям, обусловленным евклидовой метрикой:

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

Помещаем вершину репера  $M$  в текущую точку поверхности  $\Sigma$  (она предполагается имеющей тот класс гладкости, для которого наши дальнейшие построения корректны). Векторы  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$  репера помещаем в касательную плоскость поверхности в точке  $M$ . Тогда, очевидно,

$$\omega^3 = 0.$$

Внешнее дифференцирование этого уравнения приводит к внешнему квадратичному уравнению

$$\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

Разрешая его по лемме Картана [3], получаем соотношения

$$\omega_1^3 = A\omega^1 + B\omega^2, \quad \omega_2^3 = B\omega^1 + C\omega^2, \quad (2.1)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – функции параметров, управляющих смещением точки  $M$  по поверхности (главных параметров) и параметров, управляющих преобразованиями репера при закрепленной точке  $M$  (вторичных параметров).

Дифференцируя внешним образом последние пфаффовы уравнения, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (dA - 2B\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (dB + (A - C)\omega_1^2) \wedge \omega^2 &= 0, \\ (dB + (A - C)\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (dC - 2B\omega_2^1) \wedge \omega^2 &= 0. \end{aligned}$$

Разрешение этих уравнений по лемме Картана дает нам уравнения

$$\begin{aligned} dA - 2B\omega_1^2 &\equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}, \\ dB + (A - C)\omega_1^2 &\equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}, \\ dC + 2B\omega_1^2 &\equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}. \end{aligned}$$

Полагая в этих уравнениях  $\omega^1 = \omega^2 = 0$ , получаем в обозначениях [13] следующие соотношения:

$$\delta A = 2B\Pi_1^2, \quad \delta B = (C - A)\Pi_1^2, \quad \delta C = 2B\Pi_2^1. \quad (2.2)$$

В нашем подвижном репере, очевидно, первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = d\overline{M}^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

и коэффициенты

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Поскольку вторая квадратичная форма равна

$$(d^2\overline{M}, \overline{e}_3) = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = A(\omega^1)^2 + 2B\omega^1\omega^2 + C(\omega^2)^2, \quad (2.3)$$

то для стандартных обозначений ее коэффициентов справедливо следующее:

$$L = A, \quad M = B, \quad N = C.$$

Уравнение главных кривизн (1.7) принимает вид

$$k^2 - (A + C)k + (AC - B^2) = 0.$$

С помощью (2.2) обычным путем [13] проводим частичную специализацию репера

$$C - A \neq 0, \quad B = 0, \quad \Pi_1^2 = 0. \quad (2.4)$$

Теперь величины  $A$  и  $C$  – инварианты (главные кривизны), а уравнения (2.1) принимают вид

$$\omega_1^3 = A\omega^1, \quad \omega_2^3 = C\omega^2, \quad (2.5)$$

и к ним следует присоединить уравнение

$$\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2. \quad (2.6)$$

Внешнее дифференцирование уравнений (2.5) и (2.6) приводит к квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge \omega^1 + d\beta \wedge \omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + AC)\omega^1 \wedge \omega^2 &= 0, \\ (dA + \alpha(C - A)\omega^2) \wedge \omega^1 &= 0, \\ (dC + \beta(C - A)\omega^1) \wedge \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Потребуем теперь, чтобы отношение главных кривизн было постоянным, то есть пусть существует достаточно гладкая функция  $L$ , заданная на поверхности, такая, что

$$A = p_1L, \quad C = p_2L \quad p_1, p_2 = const.$$

При этом полагаем, что гауссова кривизна не обращается в нуль и точка не омбилическая, то есть считаем, что

$$p_1p_2 \neq 0, \quad p_1 - p_2 \neq 0.$$

Тогда два последних уравнений в (2.7) принимают вид

$$\begin{aligned} (p_1 dL + \alpha(p_2 - p_1)L\omega^2) \wedge \omega^1 &= 0, \\ (p_2 dL + \beta(p_2 - p_1)L\omega^1) \wedge \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Однако формы  $\omega^1$  и  $\omega^2$  линейно независимы, и из (2.8) следует, что

$$\left( \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \right) \frac{dL}{L} = \beta p_1 \omega^1 + \alpha p_2 \omega^2. \quad (2.9)$$

Таким образом, форма  $\beta p_1 \omega^1 + \alpha p_2 \omega^2$  – полный дифференциал, и, следовательно, ее внешний дифференциал равен нулю. Отсюда получаем соотношение

$$p_1 (d\beta - \alpha\beta\omega^2) \wedge \omega^1 + p_2 (d\alpha + \alpha\beta\omega^1) \wedge \omega^2 = 0. \quad (2.10)$$

Оба уравнения (2.8) выполняются вследствие (2.9). Внешние квадратичные уравнения, обеспечивающие существование исследуемого геометрического образа, суть первое уравнение в (2.7) и (2.10). Действуя обычным путем [13], находим, что система в инволюции и широта класса искомым поверхностям – две функции одного аргумента.

**Предложение.** Класс псевдоминимальных поверхностей гиперболического типа характеризуется постоянством угла между асимптотическими линиями.

Для доказательства достаточно заметить, что согласно (2.3) и (2.4) уравнение асимптотических направлений имеет вид

$$A(\omega^1)^2 + C(\omega^2)^2 = 0,$$

а базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$  декартов.

### 3. Рассмотрение примера

Речь пойдет о поверхности, для которой условие (1.3) выполнено приближенно. Простой пример строится в классе поверхностей вращения. Индивидуализация главных кривизн совершается естественным путем:  $k_1$  – кривизна меридиана,  $k_2$  – кривизна (с обратным знаком) второй линии кривизны.

Пусть уравнения начального меридиана

$$y = 0, \quad z = f(x), \quad f(x) \in C^2.$$

Тогда

$$k_1 = \frac{\frac{d^2}{dx^2} f(x)}{\left( 1 + \left( \frac{d}{dx} f(x) \right)^2 \right)^{3/2}},$$

а вторая главная кривизна

$$k_2 = \frac{-1}{f(x) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{dx} f(x) \right)^2}}.$$

Псевдосредняя кривизна

$$H(f(x), a) = \left( \frac{d^2}{dx^2} f(x) \right) f(x) - a \left( 1 + \left( \frac{d}{dx} f(x) \right)^2 \right). \quad (3.1)$$

Для отыскания обобщено-минимальных поверхностей следует решить дифференциальное уравнение  $H(a) = 0$ .

Как и следовало ожидать, при  $a = 1$  линия  $y = f(x)$  есть цепная линия.

Имеется счетное множество констант  $a$ , для которых это уравнение разрешается в квадратурах, однако, имея в виду практические применения конструкции, следует сосредоточиться на приближенных решениях, пригодных для континуума значений параметра  $a$ . Не видно никаких оснований связывать данное уравнение с условием равновесия нити ( $a$  значит, называть полученную линию  $y = f(x)$  обобщенной цепной линией). Точное решение уравнения (3.1) для произвольного вещественного значения  $a$  выражается через гипергеометрическую функцию и для применения неудобно. Приближенное решение в виде отрезка ряда Маклорена для начальных условий  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  имеет вид

$$f(x) \approx g(x) = 1 + \frac{a}{2}x^2 + \left( \frac{a^3}{12} - \frac{a^2}{24} \right)x^4 + \left( -\frac{11a^4}{360} + \frac{7a^3}{720}a + \frac{a^5}{45} \right)x^6 + \\ + \left( \frac{43a^5}{3360} - \frac{127a^4}{40320} - \frac{11a^6}{672} + \frac{17a^7}{2520} \right)x^8.$$

Невязку решения уравнения (3.1) оцениваем выражением

$$\varepsilon(a) = \int_{-1}^1 (g(x), a)^2 dx.$$

Рис. 1 дает представление о невязке решения.

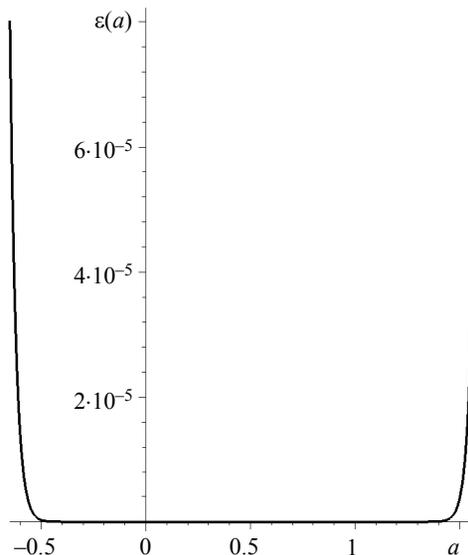
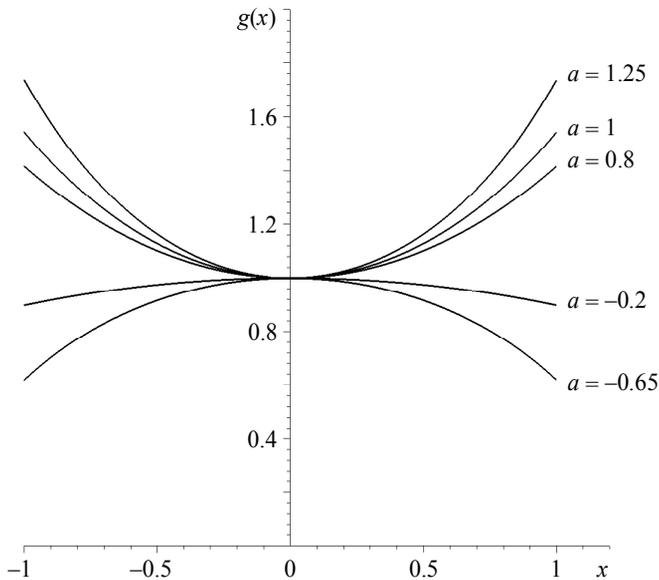


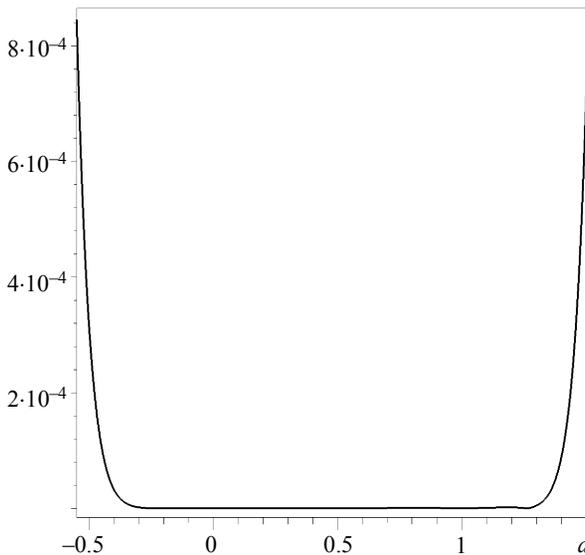
Рис. 1. График функции  $\varepsilon(a)$  для 14 слагаемых ряда Маклорена  
Fig. 1. Function  $\varepsilon(a)$  graph for the 14 summands of the Maclaurin series

Графики функций  $g(x)$  для некоторых значений параметра  $a$  представлены на рис. 2.



**Рис. 2.** График функции  $g(x)$  при различных значениях параметра  $a$   
**Fig. 2.** Function  $g(x)$  graph at different values of the parameter  $a$

Рис. 3 показывает хорошее соответствие поверхности вращения требованию псевдоминимальности.



**Рис. 3.** График зависимости интегрального среднего безразмерного индекса псевдоминимальности от  $a$   
**Fig. 3.** Integral average non-dimensional infinite index dependency on a graph

#### 4. Применение к моделированию лепестка сетеполотна

Осесимметричный рефлектор – в первом приближении – есть вырезка из параболоида вращения (он называется родительским параболоидом) круглым цилиндром, соосным с параболоидом. В системе координат, канонически связанной с параболоидом вращения (других мы не рассматриваем), уравнение параболоида имеет вид

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}. \quad (4.1)$$

Здесь  $F$  – фокусное расстояние параболоида.

Сетеполотно, натянутое между соседними параболическими ребрами несущей конструкции, подвержено изгибанию внутрь купола, подобно тому, что мы наблюдаем, раскрывая зонтик. Это явление носит название «матрасного» (иногда «подушечного») эффекта [6–8, 14].



**Рис. 4.** Лепесток сетеполотна, искривленный вследствие «матрасного эффекта». Видна срединная (гребневая) линия

**Fig. 4.** Metallic mesh petal, bent due to “mattress effect”.

Mean (ridge) line is visible

Осесимметричный зонтичный рефлектор характеризуется следующими конструктивными параметрами:

$F$  – фокусное расстояние родительского параболоида;

$R$  – радиус вырезающего цилиндра;

$n$  – число жестких параболических ребер несущего каркаса;

$\text{коэфф}_{\text{рад}}$  – коэффициент растяжения сетеполотна в радиальном направлении;

$\text{коэфф}_{\text{окр}}$  – коэффициент растяжения сетеполотна в тангенциальном направлении;

Линейные размеры – в метрах.

Для вычислительных экспериментов мы (как правило) будем использовать вполне реалистичные значения конструктивных параметров, а именно,

$$F_0 = 8, R_0 = 6, L_0 = 1, n_0 = 12.$$

Впрочем, число ребер занимает особое положение. Учитывая его влияние на вычисляемые в дальнейшем числовые характеристики модели, зарезервируем возможность выбора параметра  $n$  из списка

$$nn = [12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42].$$

Пусть сетеполотно ортотропно и (как сказано выше) коэффициент его растяжения в радиальном направлении равен  $\text{коэфф}_{\text{рад}}$ , а вдоль окружностей, ортогональным радиусам –  $\text{коэфф}_{\text{окр}}$ . Выясним, как соответствующие деформации отразятся на главных кривизнах.

Хорошо известно [3, 4], что если  $k_1, k_2$  – главные кривизны поверхности в её точке  $M_0$ , то в некоторой декартовой системе координат  $\{M_0, X, Y, Z\}$  уравнение соприкасающегося параболоида [1] запишется в виде

$$Z = \frac{1}{2}(k_1 X^2 + k_2 Y^2). \quad (4.2)$$

Отметим, что деформированный лепесток есть поверхность отрицательной гауссовой кривизны, то есть его точки – гиперболические.

Для соприкасающегося параболоида  $Q$  деформированного лепестка точка  $M_0$  – вершина, а  $k_1, k_2$  – главные кривизны того же параболоида  $Q$  в его вершине. Заметим сразу, что в дифференциальной геометрии поверхностей кривизна нормального сечения имеет знак, зависящий от сонаправленности либо разнонаправленности главной нормали нормального сечения с нормалью поверхности. В гиперболической точке, таким образом, главные нормали имеют разные знаки.

Пусть поверхность  $\Sigma$  в окрестности точки  $M_0$  подвергнута деформации вдоль первого главного направления с коэффициентом  $a_1$ , а вдоль второго – с коэффициентом  $a_2$ . Получаем новую поверхность  $\tilde{\Sigma}$ . Соответственно соприкасающийся параболоид (4.2) деформируется вдоль оси  $M_0 X$  с коэффициентом  $a_1$  и вдоль оси  $M_0 Y$  с коэффициентом  $a_2$ .

Уравнение соприкасающегося параболоида теперь имеет вид

$$Z = \frac{1}{2} \left( k_1 \frac{X^2}{a_1^2} + k_2 \frac{Y^2}{a_2^2} \right).$$

Главные кривизны  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$  деформированного соприкасающегося параболоида в его вершине (они же – главные кривизны поверхности  $\tilde{\Sigma}$  в точке  $M_0$ ) связаны с главными кривизнами до деформации соотношениями

$$\tilde{k}_1 = \frac{k_1}{a_1^2}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{k_2}{a_2^2}.$$

Соответственно

$$\frac{\tilde{k}_1}{\tilde{k}_2} = \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 \frac{k_1}{k_2}. \quad (4.3)$$

В основе модели лежат следующие соображения. Перед прикреплением к несущим конструкциям сетеполотно на раскроечном столе подвергают нагружению, прилагая одинаковое усилие и в продольном и в поперечном направлениях. Реакция сетеполотна неодинакова в разных направлениях, что обусловлено ортотропностью. Вследствие этого главные кривизны поверхности деформированного лепестка сетеполотна ( $k_{\text{окр}}$  и  $k_{\text{рад}}$ ), имея разные знаки, будут отличаться по моду-

лю. Связь указанных кривизн с коэффициентами деформации сетеполотна имеет (что следует из (4.3)) вид

$$\left| \frac{k_{\text{окр}}}{k_{\text{рад}}} \right| = \left( \frac{\text{коэфф}_{\text{рад}}}{\text{коэфф}_{\text{окр}}} \right)^2 \triangleq L. \quad (4.4)$$

Надежда задать аналитически поверхность, во всех точках которой выполнено условие (4.4), невелика. Наша цель – обеспечить выполнение указанного условия приближенно.

Именно, к текущей точке  $M$  гребневой линии  $Gr$  (на рис. 5 – пунктирная линия) присоединяем переменную параболу  $Par(M)$ , расположенную в нормальной плоскости гребневой линии таким образом, что концевые точки параболической дуги лежат на параболических ребрах  $(OA)$  и  $(OB)$ . Эта парабола симметрична относительно главной нормали линии  $Gr$ . Заметим, что гребневая линия  $Gr$  и каждая из парабол  $Par(M)$  пока не рассматривается как линия на поверхности и у нас нет оснований приписывать их кривизнам знаки. Кривизну гребневой линии в точке  $M$  обозначим  $k_{\text{греб}}(M)$ , а кривизну параболы  $Par(M)$  в её вершине  $M$  обозначим  $k_{\text{пар}}(M)$ . В силу приведенных оговорок,

$$k_{\text{греб}}(M) > 0, \quad k_{\text{пар}}(M) > 0.$$

Потребуем выполнения условия (4.4) вдоль гребневой линии. Тогда для всякой точки  $M \in Gr$  должно выполняться равенство

$$\frac{k_{\text{пар}}(M)}{k_{\text{греб}}(M)} = \left( \frac{\text{коэфф}_{\text{рад}}}{\text{коэфф}_{\text{окр}}} \right)^2 \triangleq L.$$

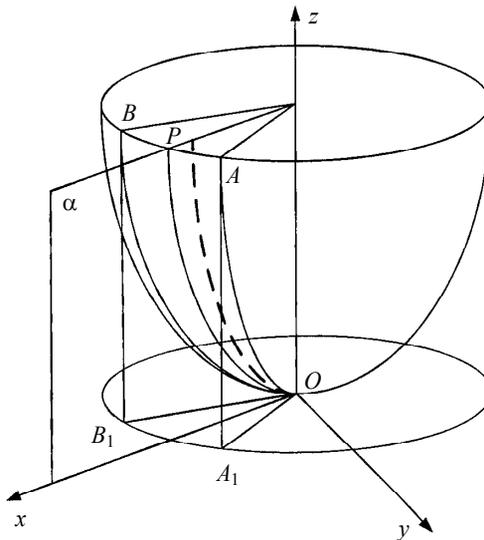


Рис. 5. Схема расположения соседних параболических спиц и гребневой линии (показана пунктиром)

Fig. 5. Layout of adjacent parabolic spokes and ridge line (shown dashed)

Приведенные здесь соображения, касающиеся поверхности сетеполотна деформированного лепестка, допускают распространение на произвольную достаточно гладкую поверхность. Теперь мы, однако, должны считаться, во-первых, с равноправием главных кривизн, а во-вторых, с зависимостью знака главной кривизны от ориентации нормали поверхности.

Полагаем, что модель, в точности учитывающая ортотропные свойства сетеполотна должна приводить к псевдоминимальной поверхности. Однако, ввиду приближенности наших построений, условие  $\tilde{H}_L = 0$  будет выполнено только вдоль гребневой линии. В остальной же области псевдосредняя кривизна даст оценку несовершенства модели

Безразмерный индекс псевдоминимальности теперь имеет вид

$$\frac{k_1(u, v)}{k_2(u, v)} + L. \quad (4.5)$$

Обратимся к рис. 5. Сетеполотно крепится к параболическим спицам (их  $n$  штук), проекции которых на плоскость  $xOy$  суть отрезки с равными углами между соседними отрезками. Нас интересует один из секторов в плоскости  $xOy$ , ограниченных соседними отрезками. Будем полагать, что ось  $Ox$  имеет биссектральное направление для этого сектора (см. рис. 5).

Соседние параболические ребра –  $OA$  и  $OB$ . Гребневая линия – пунктирная линия. Параболоид пересечен плоскостью  $xOz$  по параболе  $Op$ . Угол  $\angle A_1OB_1$  равен  $\frac{2\pi}{n}$ , а поскольку ось  $Ox$  биссектральная для этого угла, то уравнение плоскости  $OA_1A_1$  имеет вид

$$y = Kx, \text{ где } K = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Гребневая линия лежит в плоскости  $\alpha$ , и мы задаем её вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \{t, 0, f(t)\}, \quad f(t) \in C^2, \quad (0 \leq t \leq R).$$

Если мысленно дополнить гребневую линию её зеркальным отражением от плоскости  $yOz$ , то получим линию  $\Psi$ , заданную вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \{t, 0, \hat{f}(t)\}, \quad \hat{f}(t) \in C^2, \quad 0 \leq t \leq R,$$

где

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} -f(t), & (-R \leq t \leq 0), \\ f(t), & (0 \leq t \leq R). \end{cases}$$

Таким образом, линия  $\Psi$  симметрична относительно замены  $t$  на  $-t$ . Далее,

$$\hat{f}(0) = \hat{f}'(0) = 0.$$

Следовательно, для  $f(t)$  имеем также

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

и, поскольку  $f(t)$  есть ограничение четной функции, то маклореновское приближение её имеет вид

$$f(t) = Mt^2 + Nt^4 + o(t^5).$$

Отбросим слагаемые более четвертой степени и для оставшегося полинома сохраним обозначение  $f(t)$ . Тогда

$$f(t) = Mt^2 + Nt^4, \quad 0 \leq t \leq R. \quad (4.6)$$

Мы не закладываем в нашу модель учет особенности формы лепестка, обусловленной наличием свободного (незакрепленного) конца на периферии рефлектора, поскольку, как отмечено в [13, 1], данное обстоятельство заметно проявляется лишь в непосредственной близости края.

К текущей точке  $C$  гребневой линии присоединяем параболу, расположенную в нормальной плоскости указанной линии (точка  $C$  – вершина параболы) и проходящую через соседние параболические ребра. Ориентированная кривизна параболы в точке  $C$  должна (с учетом перемены знака) соотноситься с ориентированной кривизной гребневой линии в той же точке по формуле (1.4).

Если сетеполотно изотропно, то в (4.4) имеем  $L = 1$  и сумма главных кривизн построенной поверхности равна нулю вдоль гребневой линии. Таким образом, мы получаем (в изотропном случае) поверхность, для которой условие минимальности выполняется точно вдоль гребневой линии  $OC$  и приближенно – в окрестности этой линии.

Следует отметить, что полученная таким образом поверхность имеет форму, показанную на рис. 4 (и желательную для моделирования) лишь при условии, что гребневая линия расположена «выше», в очевидном смысле, нежели парабола  $Op$  (рис. 5), и зазор увеличивается при удалении от точки  $O$ . Отметим, что парабола

$$Op \text{ задается вектор-функцией } \mathbf{q} = \left\{ t, 0, \frac{t^2}{4F} \right\}.$$

Условие надежности нашей модели – положительность на промежутке  $(0, R]$  функции

$$g(t) = Mt^2 + Nt^4 - \frac{t^2}{4F},$$

а также положительность главных членов (слагаемых второй степени) функций  $f(t)$  и  $g(t)$  и производной функции  $g(t)$ . Учитывая, что практически всегда  $R < F$ , будем требовать выполнения условий на промежутке  $(0, F]$ . Таким образом, область надежности нашей модели описывается системой неравенств

$$M > 0, \quad N < 0, \quad 4MF - 1 > 0, \quad 4NF^3 + 4MF - 1 > 0.$$

В работе [4] автором получены выражения для  $M, N$  в виде

$$M = \frac{K^2 + 1}{4F(1 - K^2L)}, \quad N = \frac{K^2L(K^2 + 1)^3}{16F^3(6K^2L - 1)(1 - K^2L)^3}.$$

Для испытания модели полагаем  $F=8, R=6, L=1$ . Зададим несколько значений числа секторов, и для них вычислим значения  $M, N$  и  $T$  (табл. 1).

Полиномиальные приближения для первой и третьей компонент вектор-функции  $\mathbf{R}$  по степеням параметров  $M$  и  $N$  принимаем в виде

$$\begin{aligned} X_s = & t + 24u^2Lt^5N^2 + 16u^2Lt^3NM + (2u^2Lt - 768u^2Lt^7N^2)M^2 - 192u^2Lt^5NM^3 + \\ & + (-16u^2Lt^3 + 9600u^2Lt^9N^2)M^4 + 1536u^2Lt^7NM^5, \end{aligned}$$

$$Zs = (t^4 - 6u^2Lt^2)N + (t^2 - u^2L + 224u^2Lt^6N^2)M + 80u^2Lt^4NM^2 + \\ + (8u^2Lt^2 - 3456u^2Lt^8N^2)M^3 - 672u^2Lt^6NM^4 + (-48u^2Lt^4 + 33792u^2Lt^{10}N^2)M^5.$$

В частности, для  $F = 8, R = 6, L = 1$  и  $n = 12$  имеем

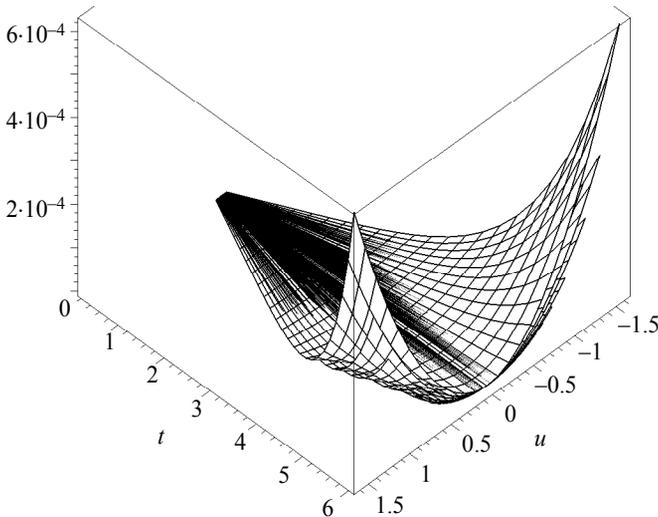
$$Xs = t + 0.000000227u^2t^5 - 0.00004081u^2t^3 + 0.002604u^2t - \\ - 0.0000000027895u^2t^7 + 9.1461 \times 10^{-12}u^2t^9, \\ Zs = -0.00002371t^4 + 0.0005181u^2t^2 + 0.03608t^2 - 0.03608u^2 + \\ 0.00000003155u^2t^6 - 0.000005406u^2t^4 - 9.1247 \times 10^{-11}u^2t^8 + 1.1617 \cdot 10^{-12}u^2t^{10}.$$

Таблица 1

Значения параметров модели

Номер	Число ребер	$M$	$N$	$K$	$T$
1	12	0.03608	-0.000024	0.26795	5.7956
2	14	0.03469	-0.000013	0.2282	5.8496
3	16	0.03383	-0.8031*10 <sup>-5</sup>	0.1989	5.8847
4	20	0.03286	-0.4190*10 <sup>-5</sup>	0.1584	5.9261
5	24	0.03235	-0.2620*10 <sup>-5</sup>	0.1317	5.9487
6	28	0.03205	-0.1810*10 <sup>-5</sup>	0.1127	5.9623
7	32	0.03186	-0.1333*10 <sup>-5</sup>	0.0985	5.9711
8	36	0.03173	-0.1025*10 <sup>-5</sup>	0.0875	5.9772
9	42	0.03160	-0.7338*10 <sup>-6</sup>	0.0749	5/9832

О качестве данных полиномиальных приближений можно судить по относительной погрешности, представленной на рис. 6 для первой координаты.



**Рис. 6.** Графическое представление относительной погрешности полиномиального приближения координаты  $X$  для  $L = 1$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)  
**Fig. 6.** Graphical description of the relative error of poly-nominal approximation of coordinate  $X$  for  $L = 1$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)

Вполне аналогичен по числовым значениям график относительной погрешности полиномиального приближения координаты  $X$  для  $L = 1$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$ .

Хорошей оценкой удаленности точки с координатами  $(X, Y, Z)$  от параболоида (4.1) служит формула

$$\rho(X, Y, Z) = \frac{4FZ - X^2 - Y^2}{2\sqrt{X^2 + Y^2 + 4F^2}}. \quad (4.7)$$

Применим эту формулу для деформированного сетеполотна, то есть, используя (4.7), вычислим

$$\varphi(t, u) = \rho(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3). \quad (4.8)$$

Функция (4.8) весьма сложна и для наших целей неудобна. Полиномиальное приближение примем в виде

$$\Phi(t, u) = \sum_{j=0}^1 \left( \sum_{i=0}^3 b_{i,j} t^{2i} u^{2j} \right), \quad (4.9)$$

где

$$b_{0,0} = 0, \quad b_{0,1} = -\frac{4LMF + 1}{4F}, \quad b_{1,0} = \frac{4MF - 1}{4F},$$

$$b_{1,1} = \frac{1 + 2LMF - 2MF - 96LNF^3 - 16LM^2F^2 + 128LM^3F^3}{16F^3}, \quad b_{2,0} = \frac{1 + 32NF^3 - 4MF}{32F^3},$$

$$512 \cdot b_{2,2} \cdot F^5 = -9 + 40960LM^2F^5N + 128LM^2F^2 - 64NF^3 + 384LNF^3 - 768LM^3F^3 + 4096LM^4F^4 - 12LMF + 24MF - 4096MF^4LN - 24576LM^5F^5,$$

$$b_{3,0} = -\frac{3 + 64NF^3 - 12MF}{512F^5}$$

$$b_{3,1} \cdot 1024 \cdot F^7 = 48NF^3 - 144LNF^3 - 12288LN^2F^6 - 14848LM^2F^5N - 72LM^2F^2 + 5 + 98304LM^3F^6N + 384LM^3F^3 + 5LMF - 15MF + 229376MF^7LN^2 + 2048MF^4LN + 10240LM^5F^5 - 2048LM^4F^4 - 688128LM^4F^7N.$$

Приближение (4.9) следует признать удовлетворительным согласно рис. 7.

Оценка среднего квадратичного отклонения деформированного лепестка от родительского параболоида вычисляется по формуле

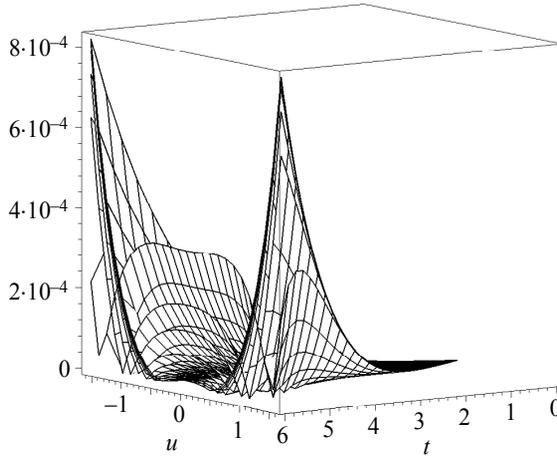
$$SKO = \sqrt{\frac{\int_0^{0.9R} dt \int_{-Kt}^{Kt} \Phi(t, u)^2 du}{\pi \int_0^{0.9R} h \sqrt{4F^2 + h^2} dh}}.$$

Верхний предел интегрирования равен  $0.9R$  для исключения эффекта провисания сетеполотна на периферии. Для различных значений  $n$  получаем следующие значения SKO (табл. 2).

Таблица 2

Значения SKO для различного количества ребер

$n$	12	14	16	20	24	28	32	36	42
SKO	0.0563	0.0415	0.0319	0.0209	0.0151	0.0116	0.0093	0.0077	0.0061

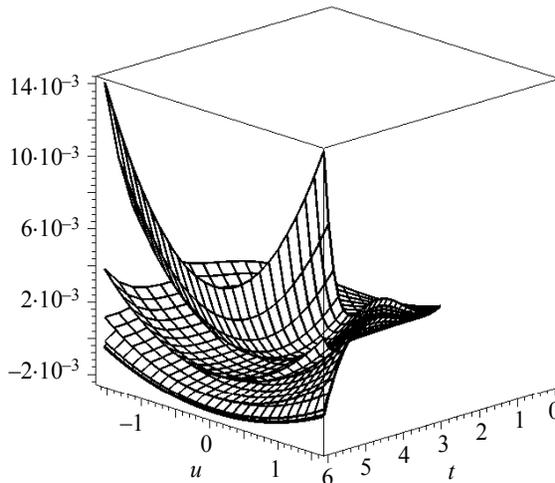


**Рис. 7.** Графическое представление погрешности полиномиального приближения (4.9) для  $L = 1$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 7.** Graphical description of error of polynomial approximation (4.12) for  $L = 1$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)

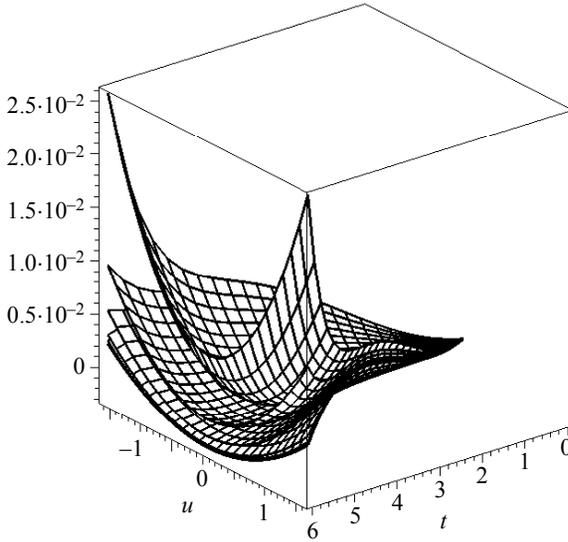
Для оценивания безразмерного инварианта, как и прежде, принимаем  $F = 8.0(m)$ ,  $R = 6.0(m)$ , оставляя  $L$  переменным. Строим графики величины (4.5) для значений  $L = 0.8$ ,  $L = 1.0$  (изотропное сетеполотно) и  $L = 1.2$ .

Эти графики представлены на рис. 8 – 10.



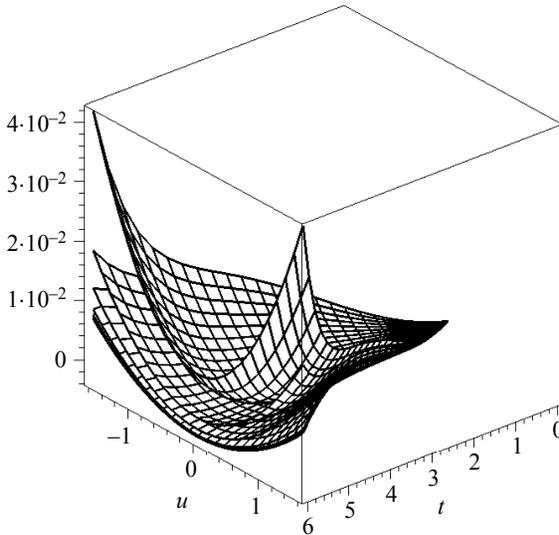
**Рис. 8.** График безразмерного индекса псевдоминимальности деформированного лепестка для  $L = 0.8$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 8.** Graph of non-dimensional index for pseudo-minimality of deformed petal for  $L = 0.8$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)



**Рис. 9.** График безразмерного индекса псевдоминимальности деформированного лепестка для  $L = 1.0$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 9.** Graph of non-dimensional index for pseudo-minimality of deformed petal for  $L = 1.0$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)



**Рис. 10.** График безразмерного индекса псевдоминимальности деформированного лепестка для  $L = 1.2$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 10.** Graph of non-dimensional index for pseudo-minimality of deformed petal for  $L = 1.2$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)

### Заключение

Автор полагает, что предложенная им модель деформированного сетеполотна осесимметричного рефлектора в известной степени адекватна. В то же время, значения коэффициентов в (4.6) могут быть определены из иных соображений (вариационных). Получится иная модель. Представляет интерес их сравнение, но это – материал дальнейших исследований.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39. № 1. С. 97–106.
2. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 5–17. DOI 10.17223/19988621/40/1.
3. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте пары поверхностей применительно к раскрою сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 13–24. DOI: 10.17223/19988621/39/2.
4. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1.
5. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(29). С. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1.
6. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.
7. Hedgepeth J.M. Accuracy Potential for Large Space Antenna Reflectors with Passive Structure // J. Spacecraft. 1982. V. 19. No. 3. P. 211–217.
8. Азюкин А.В. Специфика ДН и КНД зеркальных зонтичных антенн // Анализ и синтез антенных систем / под ред. Г.Г. Бубнова. – М., 1984. С. 82–88.
9. Раишевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. 420 с.
10. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1960. 559 с.
11. Азюкин А.В., Классен В.И. О направленных свойствах раскрывающихся зеркальных антенн // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 8. С. 1519–1526.
12. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964. 533 с.
13. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 432 с.
14. Ingerson P.G., Wong W.C. The Analysis of Deployable Umbrella Parabolic Reflectors // IEEE Trans. 1972. V. AP-20. No. 4. P. 409–414.

Статья поступила 02.11.2016 г.

Bukhtyak M.S. (2017) GENERALIZATION OF MINIMAL SURFACES AND SIMULATION OF THE SHAPE OF AN ORTHOTROPIC MATERIAL CONSTRUCTION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 5–24

DOI 10.17223/19988621/45/1

An axisymmetric reflector consists of parabolic spokes and metallic fabric attached to them. A piece of this fabric between the adjacent spokes is subject to the so-called ‘mattress effect’ (bending into the parabolic bowl). Simulation of the form of this petal is complicated by the fact that the stretching ratios for the fabric in two opposite orthogonal directions are not equal (the orthotropic property). The problem of modelling is solved with the help of the notion of a pseudominimal surface. It is a surface for which the ratio of main curvatures is constant (in other words, asymptotical lines intersect at a constant angle). The existence theorem for pseudominimal surfaces has been proven. The breadth of the class of such surfaces has been determined

(it coincides with that of the class of minimal surfaces). An example of a pseudominimal surface of revolution has been constructed. A special composite surface is used for the geometric simulation of a deformed metallic fabric petal: a parabola located in the normal plane of the line  $L$  is attached to each point of some line  $L$ . The vertex of the parabola is on the line  $L$ , the parabola crosses the adjacent hard edges of the reflector structure, and the ratio of curvatures of the line  $L$  and attached parabola does not depend on the point of pasting. Thus, a new substantiation of the construction applied by the author earlier has been developed. The standard mean square deviation of reflector's deformed petal from the parent paraboloid has been calculated. For the complicated functions describing the simulation, polynomial approximations have been constructed and their reliability have been estimated.

Keywords: parabolic reflector, principal curvatures, orthotropy, minimal surface, representation of a surface by a family of generating curves.

*BUKHTYAK Mikhail Stepanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

#### REFERENCES

1. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical Modeling of a Metallic Mesh Deformation of the parabolic Reflektor. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461. DOI: 10.1134/S2070048216040050.
2. Bukhtyak M.S. (2016) Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepestka setepolotna [Defect of mapping for deformed segment of metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/40/1.
3. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2016) Ob odnom invariante otobrazheniya poverkhnostey primenitel'no k raskroyu setepolotna [On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 13–24. DOI: 10.17223/19988621/39/2.
4. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axisymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1.
5. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2 [Geometric modelling of metallic mesh tailoring for axisymmetric refltor. Part 2]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1.
6. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertyvaemye zerkal'nye anteny zontichnogo tipa* [Deployable Mirror Umbrella-Type Antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.
7. Hedgepeth J.M. (1982) Accuracy potential for large space antenna reflectors with passive structure. *J. Spacecraft*. 19(3). pp. 211–217.
8. Azyukin A.V. (1984) Spetsifika DN i KND zerkal'nykh zontichnykh antenn [Specificity of the directional pattern and directivity factor of mirror umbrella antennas]. *Analiz i sintez antenykh system* [Analysis and Synthesis of Antenna Systems]. Ed. by G.G. Bubnov. Moscow. pp. 82–88.
9. Rashevskiy P.K. (1956) *Kurs differentsial'noy geometrii* [A course of differential geometry]. Moscow; Leningrad: GITTL.
10. Favard J. (1957) *Cours de Geometrie Dfferentielle Locale*. Paris: Gauthier-Villars.
11. Azyukin A.V., Klassen V.I. (1982) O napravlennykh svoystvakh raskryvayushchikhsya zerkal'nykh antenn [Directional properties of folding reflector antenna]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*. 27(8). pp. 1519–1526.

12. Helgason S. (1962) *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. New York, London: Academic Press, 1962.
13. Finikov S.P. (1948) *Metod vneshnikh form Kartana* [Cartan's method of exterior forms]. Moscow; Leningrad: GITTL.
14. Ingerson P.G., Wong W.C. (1972) The Analysis of Deployable Umbrella Parabolic Reflectors. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions*. Issue 4. V. 20. pp. 409–414.

УДК 512.545.8  
DOI 10.17223/19988621/45/2

А.И. Забарина, Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

### К ТЕОРИИ 2-УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

В группе  $l_{e,\alpha}$ , не являющейся линейно упорядоченной, выделена линейно упорядоченная подгруппа. Доказано, что для каждого натурального  $n \in \mathbb{N}$  количество элементов порядка  $n$  в 2-упорядоченной группе  $G$  не превосходит  $n$ , если группа  $\langle \{x \in G \mid x^n = e\}, \cdot, \zeta \rangle$  – невырожденная.

**Ключевые слова:** линейно упорядоченная группа, двумерный порядок, 2-упорядоченная группа, инволюция, прямая.

В [1, 2] приведены различные примеры 2-упорядоченных групп и доказаны некоторые их свойства. В данной статье эта работа продолжена: обобщена теорема о мощности множества элементов порядка  $n$  и исследованы свойства порядка на прямой  $l_{e,\alpha}$ , где  $o(\alpha) = 2$ . Будем пользоваться терминологией теории 2-порядка, приведённой в [1, 2].

#### 1. О порядке на прямой $l_{e,\alpha}$

Пусть  $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$  – невырожденная 2-упорядоченная группа,  $\alpha \in G$ ,  $o(\alpha) = 2$ . Рассмотрим прямую

$$l_{e,\alpha} = \{x \in G \mid \zeta(\alpha, e, x) = 0\}.$$

В [2, с. 37] доказано, что  $l_{e,\alpha} \triangleleft G$ . В силу невырожденности группы  $G$  имеем

$$l_{e,\alpha} \neq G.$$

Следовательно,

$$\exists c \in G (\zeta(c, \alpha, e) \neq 0).$$

Так как

$$\zeta(c, \alpha, e) = -\zeta(c\alpha, \alpha, e),$$

то, не нарушая общности, будем считать, что

$$\zeta(c, \alpha, e) = 1. \tag{1}$$

Для любых  $x, y \in l_{e,\alpha}$  положим

$$x < y \Leftrightarrow \zeta_c(x, y) = \zeta(c, x, y) = 1.$$

Известно [3, с. 19], что функция  $\zeta_c$  задаёт на прямой  $l_{e,\alpha}$  отношение линейного порядка. Заметим, что относительно этого порядка  $\alpha < e$ . Однако, так как  $\alpha \in l_{e,\alpha}$ , то группу  $\langle l_{e,\alpha}, \cdot \rangle$  нельзя линейно упорядочить.

Наша задача: выделить в ней подгруппу, которая относительно указанного порядка  $\zeta_c$  является линейно упорядоченной.

Пусть

$$P = \{x \in l_{e,\alpha} \mid x \geq e\}, H = P \cup P^{-1}.$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.1.** Если  $|P| \neq 1$ , то  $\langle H, \cdot, \zeta_c \rangle$  – линейно упорядоченная группа. Докажем предварительно ряд утверждений.

**Лемма 1.2.** Пусть  $x \in P$ . Тогда функции  $\zeta_c, \zeta_{xc}, \zeta_{cx}, \zeta_{x^{-1}c}, \zeta_{cx^{-1}}$  задают на прямой  $l_{e,\alpha}$  один и тот же порядок, то есть

$$\zeta_c = \zeta_{xc} = \zeta_{cx} = \zeta_{x^{-1}c} = \zeta_{cx^{-1}}. \quad (2)$$

*Доказательство.* Согласно [3, с. 19], для того чтобы доказать, что  $\zeta_a = \zeta_b$ , достаточно найти элементы  $u, v \in l_{e,\alpha}$ , для которых выполнено равенство

$$\zeta_a(u, v) = \zeta_b(u, v).$$

Так как

$$\zeta(c, \alpha, e) = \zeta(c\alpha, \alpha^2, \alpha) = -\zeta(c\alpha, \alpha, e),$$

то [3, с. 19]

$$\forall u, v \in l_{e,\alpha} \quad [\zeta_c(u, v) = -\zeta_{c\alpha}(u, v)],$$

то есть функции  $\zeta_c$  и  $\zeta_{c\alpha}$  задают на прямой  $l_{e,\alpha}$  противоположные порядки. Так как  $\alpha \in Z(G)$  [1, с. 6], то

$$\zeta_c = -\zeta_{c\alpha} = -\zeta_{\alpha c}. \quad (3)$$

Пусть  $x \in P$  и  $x > e$  (для  $x = e$  равенства (2) очевидны). Тогда  $\zeta(c, e, x) = 1$ . Отсюда, используя (3), получаем

$$\zeta(c\alpha, \alpha, x\alpha) = -\zeta(c\alpha, x\alpha, \alpha) = \zeta(c, x\alpha, \alpha) = 1,$$

то есть  $x\alpha < \alpha$ .

Применяя (1), получаем

$$x\alpha < \alpha < e < x.$$

Отсюда  $x\alpha < x$ , то есть

$$\zeta(c, x\alpha, x) = 1.$$

Таким образом,

$$\zeta(cx^{-1}, \alpha, e) = \zeta(x^{-1}c, \alpha, e) = 1,$$

поэтому

$$\zeta_{cx^{-1}}(\alpha, e) = \zeta_{x^{-1}c}(\alpha, e) = \zeta_c(\alpha, e).$$

Следовательно,

$$\zeta_{cx^{-1}} = \zeta_{x^{-1}c} = \zeta_c.$$

Так как

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(x^{-1}c, e, x) = \zeta(c, x, x^2) = 1,$$

то  $x < x^2$ . И, наконец, из равенств

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(cx, x, x^2) = \zeta(xc, x, x^2) = \zeta(c, x, x^2) = 1$$

следует, что

$$\zeta_c = \zeta_{cx} = \zeta_{xc}. \#$$

**Следствие 1.3.** Если  $x > e$ , то  $x^{-1} < e$ .

*Доказательство.* Истинность импликации вытекает из равенств

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(cx^{-1}, x^{-1}, e) = \zeta(c, x^{-1}, e) = 1. \#$$

Заметим, что обратное утверждение ложно, например, для  $x = \alpha$ .

**Предложение 1.4.** Пусть  $P = \{x \in l_{e,\alpha}, x \geq e\}$ ,  $H = P \cup P^{-1}$ . Тогда  $\langle H, \cdot \rangle$  – группа.

*Доказательство.* Так как  $H \subset l_{e,\alpha}$ , то достаточно проверить замкнутость операции умножения на  $H$ .

а) Пусть  $x, y \in P \setminus \{e\}$  и  $x \leq y$ . Согласно следствию 1.3,

$$x^{-1} < e < x \leq y.$$

Отсюда

$$x^{-1} < y,$$

то есть

$$\zeta(c, x^{-1}, y) = 1 = \zeta(xc, e, xy).$$

Воспользовавшись леммой 1.2., получаем

$$\zeta(c, e, xy) = 1,$$

то есть

$$xy \in P, xy \in H.$$

б) Пусть  $x, y \in P^{-1} \setminus \{e\}$ . Тогда  $x^{-1}, y^{-1} \in P \setminus \{e\}$ . Согласно пункту а),

$$y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1} \in P.$$

Следовательно,

$$xy \in P^{-1}, xy \in H.$$

в) Пусть  $x \in P, y \in P^{-1}$ . Так как порядок на  $l_{e,\alpha}$  – линейный, то

$$xy \geq e \text{ или } xy < e.$$

Если  $xy \geq e$ , то  $xy \in H$ . Пусть  $xy < e$ . Покажем, что  $(xy)^{-1} \in P$ .

Так как  $y \in P^{-1}$ , то  $y^{-1} \in P, y^{-1} > e$ . Применяя лемму 1.2 для элемента  $y^{-1}$ , имеем

$$\zeta(c, xy, e) = \zeta(cy^{-1}, x, y^{-1}) = \zeta(c, x, y^{-1}) = 1.$$

Следовательно,

$$\zeta(cx^{-1}, e, y^{-1}x^{-1}) = \zeta(c, e, y^{-1}x^{-1}) = 1,$$

то есть

$$e < (xy)^{-1},$$

отсюда

$$(xy)^{-1} \in P \text{ и } xy \in H.$$

г) Аналогичные рассуждения можно провести для случая  $x \in P^{-1}, y \in P$ . #

**Предложение 1.5.** Множество

$$P = \{x \in l_{e,\alpha} \mid \zeta(c, e, x) = 1\} \cup \{e\}$$

является положительным конусом группы  $\langle H, \cdot \rangle$ .

**Доказательство.** Согласно критерию положительного конуса линейного порядка в группе [4, с. 26], множество  $P$  должно удовлетворять условиям

$$P \cup P^{-1} = H; \quad P \cap P^{-1} = \{e\}; \quad P \cdot P \subset P; \quad \forall h \in H (h^{-1}Ph \subset P).$$

Из определения множества  $H$  и доказательства пункта а) предложения 1.4 следует истинность первых трёх условий. Докажем свойство инвариантности множества  $P$ .

Пусть  $x \in P, x > e$  и  $h \in P, h > e$ . Так как

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(ch, h, xh) = 1 \text{ и } h > e,$$

то

$$\zeta(c, h, xh) = 1.$$

Отсюда

$$\zeta(h^{-1}c, e, h^{-1}xh) = \zeta(c, e, h^{-1}xh) = 1,$$

то есть  $h^{-1}xh \in P$ .

Пусть  $x \in P, h \in P^{-1}$ . Следовательно,  $x > e, h^{-1} > e$ . Так как

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(h^{-1}c, h^{-1}, h^{-1}x) = \zeta(c, h^{-1}, h^{-1}x) = 1,$$

то

$$\zeta(ch, e, h^{-1}xh) = \zeta(c, e, h^{-1}xh) = 1,$$

то есть  $h^{-1}xh \in P$ . #

Истинность теоремы 1.1 непосредственно следует из предложений 1.4 и 1.5.

В заключение приведём примеры прямых  $l_{e,\alpha}$  и соответствующих им подгрупп  $H$  в некоторых 2-упорядоченных группах.

1) Пусть  $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta \rangle$  – 2-упорядоченная группа ненулевых комплексных чисел, где функция 2-порядка есть естественная ориентация  $\eta$ . Имеем

$$\alpha = -1, \quad l_{1,-1} = \mathbf{R}^*, \quad H = \mathbf{R}^+.$$

2) В циклической группе  $\langle \mathbf{C}_{2n}, \cdot, \zeta \rangle$  [4, с. 98]

$$l_{1,-1} = \{-1, 1\}, \quad H = \{1\}.$$

3) Пусть  $\langle \Gamma, \cdot, \zeta_1 \rangle$  – произвольная линейно упорядоченная группа с функцией линейного порядка  $\zeta_1$ ,  $T_0$  – тороидальная группа. Согласно Сверчковскому [4, с. 97],

$$G = \langle T_0 \times \Gamma, \cdot, \zeta_1 \rangle$$

– циклически упорядоченная группа, инволюцией которой является элемент  $\alpha = (-1, e)$ . Так как значение  $\zeta_1(g_1, g_2, g_3)$  равно 0 тогда и только тогда, когда, по крайней мере, две координаты точки совпадают, то

$$l_{(1,e),(-1,e)} = \{(1, e), (-1, e)\} \text{ и } H = \{(1, e)\}.$$

На группе  $\langle T_0 \times \Gamma, \cdot, \zeta \rangle$  удалось задать отличный от  $\zeta_1$  2-порядок [5, с. 25].

Пусть

$$\begin{aligned} g &= (g_1, g_2, g_3), \\ g_k &= (t_k, \gamma_k), t_k \in T_0, \gamma_k \in \Gamma, k \in \{1, 2, 3\}, \\ t &= (t_1, t_2, t_3), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \end{aligned}$$

Обозначим функцию двумерного циклического порядка на  $T_0$  через  $\omega$  и положим

$$\zeta_2(g) = \begin{cases} \omega(t), & \text{если } |\text{set}(t)| = 3; \\ \zeta_1(\gamma_1, \gamma_2)\omega(t_3^{-1}t_1, e, t_1^{-1}t_3), & \text{если } t_1 = t_2; \\ \zeta_2(\gamma_2, \gamma_3)\omega(t_1^{-1}t_2, e, t_2^{-1}t_1), & \text{если } t_2 = t_3; \\ \zeta_1(\gamma_3, \gamma_1)\omega(t_2^{-1}t_3, e, t_3^{-1}t_2), & \text{если } t_1 = t_3; \\ 0, & \text{если } |\text{set}(t)| = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$l_{(1,e),(-1,e)} = \{(-1, \gamma), (1, \gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \text{ и } H = \{(1, \gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

4) Пусть  $\langle F, F^u \rangle$  – двумерно упорядоченное поле с базой  $F_0$ , где  $F^u = \{x \in F \mid \zeta(0, 1, x) \geq 0\}$  – верхний конус поля  $F$  [3];

$$F_0 = \{x \in F \mid \zeta(0, 1, x) = 0\} \text{ [3].}$$

Элемент  $a \in F$  называется бесконечно близким к базе  $F_0$ , если

$$\forall n \forall r \in F_0 (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in F^u$$

или

$$\forall n \forall r \in F_0 (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in -F^u.$$

Множество  $B$  бесконечно близких к базе  $F_0$  элементов поля  $F$  относительно операций сложения и умножения образует бесконечно узкое поле  $\langle B, +, \cdot \rangle$  [6].

Бесконечно узкие поля допускают как линейное, так и двумерное упорядочивание [7–8].

В частности,  $\mathbf{Q}(\pi)$  – бесконечно узкое поле. Произвольный элемент  $b$  этого поля представим в виде

$$b = \frac{f(\pi)}{g(\pi)},$$

где  $f(x), g(x) \in \mathbf{Q}[x]$ .

Мультипликативную группу  $\langle \mathbf{Q}^*(\pi), \cdot \rangle$  этого поля можно двумерно упорядочить следующим образом [7]:

$$\forall b \in \mathbf{Q}^*(\pi) (\zeta(0, 1, b) = 1 \Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) \Big|_{x=b} > 0).$$

Тогда

$$\alpha = -1, l_{1,-1} = \mathbf{Q}^*(\pi), H = \mathbf{Q}^+(\pi).$$

В общем случае бесконечно узкого поля  $B$  имеем

$$\alpha = -e, \quad l_{e,-e} = B, \quad H = B^+.$$

## 2. О мощности множества элементов порядка $n$ в 2-упорядоченной группе

Теорема о том, что в произвольной невырожденной 2-упорядоченной группе  $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$  существует не более одной инволюции, доказана в [2, с. 34].

Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$ . Так как  $T(G) \subset Z(G)$  [1, с. 6], то  $H < G$  и  $H$  – абелева. Следовательно,  $\langle H, \cdot, \zeta \rangle$  – локально конечная 2-упорядоченная группа. Рассмотрим случай, когда  $\zeta \neq 0$  на  $H$ .

Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$  – невырожденная 2-упорядоченная группа,  $n \in \mathbb{N}$  и  $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$ . Если  $\zeta \neq 0$  на  $H$ , то  $|H| \leq n$ .

Известно, что периодическая часть циклически упорядоченной группы вкладывается с сохранением порядка в группу  $\langle C, \cdot \rangle$  комплексных корней из 1 [4, с. 98].

Так как  $T(H) = H$ , то для доказательства теоремы достаточно убедиться, что  $\langle H, \cdot, \zeta \rangle$  – циклически упорядоченная группа.

Истинность этого утверждения доказана методом математической индукции в [9, с. 32] для произвольных невырожденных  $n$ -упорядоченных групп. (Каждая локально конечная  $n$ -упорядоченная группа с невырожденным порядком является  $n$ -циклически упорядоченной.)

Для  $n = 2$  это доказательство более наглядно и конструктивно. Приведём его.

Напомним, что известное определение циклически упорядоченной группы [4, с. 97] равносильно следующему.

**Определение 2.1.** Невырожденная 2-упорядоченная группа  $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$  называется **циклически упорядоченной**, если в каждом невырожденном её подмножестве  $\langle X_4, \zeta \rangle$  каждый элемент из множества  $X_4$  является в нём внешней точкой [9, с. 24].

Нам понадобится также понятие отделимой точки в 2-упорядоченном множестве  $\langle X, \zeta \rangle$ , введённое в [10].

**Определение 2.2.** Пусть  $\langle X, \zeta \rangle$  – 2-упорядоченное множество. Элемент  $a \in X$  называется **точкой, отделимой в  $\langle X, \zeta \rangle$** , если существует грань  $P \subset X$ , такая, что

$$\zeta(P, a) = 1 \quad \text{и} \quad \forall x \in X \setminus \{a\} \quad (\zeta(P, x) \leq 0)$$

или

$$\zeta(P, a) = -1 \quad \text{и} \quad \forall x \in X \setminus \{a\} \quad (\zeta(P, x) \geq 0).$$

Здесь же [10, с. 238] доказано

**Предложение 2.2.** Если точка  $a$  отделима в  $\langle X, \zeta \rangle$ ,  $a \in X_4$ ,  $X_4 \subset X$ , множество  $\langle X_4, \zeta \rangle$  – невырожденное, то точка  $a$  отделима в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ .

Приведём план доказательства теоремы 2.1.

1) Пусть  $X_4 \subset X$ ,  $a \in X_4$ . Докажем, что если точка  $a$  отделима в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ , то  $a$  – внешняя точка в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ .

2) Покажем, что в каждом конечном невырожденном 2-упорядоченном множестве  $\langle X, \zeta \rangle$  существует отделимая точка.

3) Убедимся, что в каждой конечной невырожденной 2-упорядоченной группе все её элементы являются в ней отделимыми точками.

Из пунктов 1)–3) непосредственно следует, что невырожденная локально конечная группа  $\langle H, \cdot, \zeta \rangle$  является циклически упорядоченной.

Действительно, пусть  $X_4 \subset H$  и  $\langle X_4, \zeta \rangle$  – невырожденное множество. Рассмотрим группу  $S = \langle \langle X_4 \rangle, \cdot, \zeta \rangle$ . Очевидно,  $S$  – конечная невырожденная 2-упорядоченная группа. Согласно пункту 3) все её элементы являются отдельными в  $\langle S, \zeta \rangle$  точками.

Из предложения 2.2 следует, что все они отделимы в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ . Осталось применить пункт 1). Таким образом, из истинности пунктов 1)–3) истинность теоремы 2.1 будет доказана.

При доказательстве пунктов 1)–3) будем пользоваться следующей аксиоматикой 2-упорядоченного множества [11].

Пусть  $\zeta : X^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ , функция  $\zeta$  – антисимметрична (то есть меняет значение на противоположное при каждой перестановке двух аргументов). Пара  $\langle X, \zeta \rangle$  называется 2-упорядоченным множеством, если  $\zeta$  удовлетворяет следующим условиям:

С1. Если  $X_4 \subset X$ , множество  $\langle X_4, \zeta \rangle$  – невырожденное, то в  $\langle X_4, \zeta \rangle$  существует, по крайней мере, две внешние грани.

С2. Если  $X_2 \subset X$ ,  $a, b, c \in X$  и

$$\zeta(X_2, a) = \zeta(X_2, b) = \zeta(X_2, c) = 1,$$

$$\zeta(X_1, a, b) = \zeta(X_1, b, c) = 1,$$

то

$$\zeta(X_1, a, c) = 1.$$

С3. Пусть  $S \subset X$ ,  $|S| \leq 6$ ;  $G', G''$  – грани в  $\langle S, \zeta \rangle$ , причём

$$\forall x \in G'' (\zeta(G', x) = 0).$$

Тогда существует  $\varepsilon = \pm 1$ , такое, что

$$\forall x \in S (\zeta(G', x) = \varepsilon \zeta(G'', x)).$$

Это одна из систем аксиом 2-порядка, предложенных в работах Г. Г. Пестова [3, 11]. Там же рассмотрен вопрос об их равносильности.

**Предложение 2.3.** Пусть  $\langle X, \zeta \rangle$  – 2-упорядоченное множество;  $X_4 \subset X$ ,  $a \in X_4$ . Если точка  $a$  отделима в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ , то  $a$  – внешняя точка в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть  $X_4 = \{a, x_1, x_2, x_3\}$  и точка  $a$  – отделима в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ . Не нарушая общности, можно считать, что

$$\zeta(x_1, x_2, a) = 1 \text{ и } \zeta(x_1, x_2, x_3) \leq 0.$$

Следовательно,  $\langle X_4, \zeta \rangle$  – невырожденное множество. Согласно аксиоме С1, в  $\langle X_4, \zeta \rangle$  существует внешняя грань  $P$ .

Если  $a \in P$ , то  $a$  – внешняя в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ . Пусть  $a \notin P$ . Так как  $P \neq \{x_1, x_2\}$ , то

$$P = \{x_1, x_3\} \text{ или } P = \{x_2, x_3\}.$$

Рассмотрим оба случая.

$$\zeta(x_1, x_3, x_2) = \zeta(x_1, x_3, a) \neq 0,$$

отсюда

$$\zeta(x_1, x_3, a) = 1.$$

Следовательно,

$$\zeta(x_1, a, x_3) = \zeta(x_1, a, x_2) = -1,$$

то есть точка  $a$  – внешняя точка в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ .

Аналогично,

$$\zeta(x_2, x_3, x_1) = \zeta(x_2, x_3, a) = -1.$$

Значит,

$$\zeta(x_2, a, x_3) = \zeta(x_2, a, x_1) = 1,$$

отсюда – точка  $a$  является внешней точкой в  $\langle X_4, \zeta \rangle$ . #

Истинность пункта 1) доказана.

**Предложение 2.4.** В каждом конечном невырожденном 2-упорядоченном множестве  $\langle X, \zeta \rangle$  существуют отделимые точки.

*Доказательство.* Пусть  $\langle X, \zeta \rangle$  – конечное невырожденное 2-упорядоченное множество. Согласно [12, с. 31], во множестве  $X$  существует нестрогая внешняя грань  $P = \{x_1, x_2\}$ , такая, что

$$\forall x \in X (\zeta(x_1, x_2, x) \geq 0).$$

Так как  $\zeta \neq 0$  на  $X$ , то

$$\exists a \in X (\zeta(x_1, x_2, a) = 1).$$

Рассмотрим прямую

$$l_{x_1, x_2} = \{x \in X \mid \zeta(x_1, x_2, x) = 0\}.$$

Линейно упорядоченное множество  $\langle l_{x_1, x_2}; \zeta_a \rangle$  является конечным. Следовательно, в нём существуют наибольший и непосредственно предшествующий ему элементы  $b$  и  $k$  соответственно. Таким образом,

$$\begin{cases} \zeta_a(k, b) = \zeta(a, k, b) = 1, \\ \forall x \in l_{x_1, x_2} \setminus \{b\} (\zeta_a(k, x) \leq 0). \end{cases} \quad (4)$$

Покажем, что элемент  $b$  – отделимая точка во множестве  $\langle X, \zeta \rangle$ . Пусть  $Y = X \setminus l_{x_1, x_2}$ . Так как  $a \in Y$ , то  $Y \neq \emptyset$ . Для любых  $u, v \in Y$  положим

$$u < v \Leftrightarrow \zeta(k, u, v) \leq 0.$$

Убедимся, что  $<$  – отношение линейного предпорядка на множестве  $Y$ . Очевидно, что  $<$  является рефлексивным и связным отношением. Покажем, что оно транзитивно.

**Лемма 2.5.** Пусть  $\langle X, \zeta \rangle$  – конечное невырожденное 2-упорядоченное множество, тогда

$$\forall x \in X (\zeta(x_1, x_2, x) = \zeta(k, b, x)).$$

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in X$ . Рассмотрим множество

$$S = \{x_1, x_2, k, b, a, x_0\}.$$

Очевидно,  $|S| \leq 6$ . Так как

$$x_1 \neq x_2, \quad k \neq b, \quad \zeta(x_1, x_2, a) \neq 0, \quad \zeta(k, b, a) \neq 0$$

то

$$G_1 = \{x_1, x_2\}; \quad G_2 = \{k, b\} -$$

грани в  $\langle S, \zeta \rangle$ .

Так как  $k, b$  – элементы прямой  $l_{x_1, x_2}$ , то

$$\zeta(G_1, k) = \zeta(G_1, b) = 0.$$

Согласно свойству элемента  $a$  и (4),

$$\zeta(G_1, a) = \zeta(G_2, a).$$

Применив аксиому СЗ, имеем

$$\zeta(G_1, x_0) = \zeta(G_2, x_0),$$

то есть лемма доказана.

Пусть  $x, y, z \in Y, x < y, y < z$ . Следовательно,

$$\zeta(k, x, y) \leq 0; \quad \zeta(k, y, z) \leq 0.$$

Убедимся, что

$$\zeta(k, x, z) \leq 0. \quad (5)$$

Так как  $x, y, z \notin l_{x_1, x_2}$ , то согласно лемме

$$\zeta(k, b, x) = 1; \quad \zeta(k, b, y) = 1; \quad \zeta(k, b, z) = 1 \quad (6)$$

Рассмотрим все возможные случаи:

а)  $\zeta(k, x, y) = \zeta(k, y, z) = -1$ .

Так как  $\zeta(k, y, x) = \zeta(k, z, y) = 1$ , то применяя (6) и аксиому С2, получаем

$$\zeta(k, x, z) = -1,$$

неравенство (5) – истинно.

б)  $\zeta(k, x, y) = -1$ ;  $\zeta(k, y, z) = 0$ .

Пусть  $S = \{k, y, z, x, b\}$ . Очевидно,

$$G_1 = \{k, y\}; \quad G_2 = \{k, z\} -$$

границы в  $\langle S, \zeta \rangle$ , причём

$$\zeta(G_1, k) = \zeta(G_1, z) = 0.$$

Так как согласно (6),

$$\zeta(k, y, b) = \zeta(k, z, b),$$

то согласно С3,

$$\zeta(k, y, x) = \zeta(k, z, x) = 1,$$

отсюда  $\zeta(k, x, z) = -1$ , то есть неравенство (5) – истинно.

в) Случай  $\zeta(k, x, y) = 0$ ;  $\zeta(k, y, z) = 1$  рассматривается аналогично случаю б).

г)  $\zeta(k, x, y) = \zeta(k, y, z) = 0$ .

Пусть  $S = \{k, x, y, z, b\}$ . Предположим, что  $\zeta(k, x, z) = 1$ . Тогда

$$G_1 = \{k, y\}; \quad G_2 = \{x, z\} -$$

границы в  $\langle S, \zeta \rangle$ , такие, что

$$\zeta(G_1, x) = \zeta(G_1, z) = 0.$$

Согласно С3,

$$\exists \varepsilon = \pm 1 \quad \forall s \in S \quad (\zeta(k, y, s) = \varepsilon \zeta(x, z, s)),$$

но

$$\zeta(k, y, k) \neq \varepsilon \zeta(x, z, k).$$

Получили противоречие. Таким образом,  $\zeta(k, x, z) \leq 0$  и отношение  $<$  на  $Y$  транзитивно.

Так как  $Y$  является конечным множеством, то

$$\exists c \in Y \quad \forall x \in Y \quad (x < c),$$

то есть

$$\forall x \in Y \quad (\zeta(k, x, c) \leq 0). \quad (7)$$

Покажем, что грань  $P = \{k, c\}$  отделяет элемент  $b$  во множестве  $\langle X, \zeta \rangle$ . Согласно (7),

$$\forall x \in Y \quad (\zeta(k, c, x) \geq 0). \quad (8)$$

Так как  $c \notin l_{x_1, x_2}$ , то

$$\zeta(x_1, x_2, a) = \zeta(x_1, x_2, c),$$

значит, функции порядка  $\zeta_c$  и  $\zeta_a$  на прямой  $l_{x_1, x_2}$  равны:  $\zeta_c = \zeta_a$ .

Из (4) получаем

$$\begin{aligned} \zeta(k, c, b) &= \zeta(k, a, b) = -1; \\ \forall x \in l_{x_1, x_2} \quad (x \neq b \rightarrow \zeta(k, c, x) &= \zeta(k, a, x) \geq 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что элемент  $b$  является точкой, отделимой в  $\langle X, \zeta \rangle$ . #

Пункт 2) доказан.

**Следствие 2.6.** В каждой конечной невырожденной 2-упорядоченной группе  $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$  все элементы являются отделимыми во множестве  $\langle G, \zeta \rangle$  точками.

**Доказательство.** Пусть  $c$  – отделимая в  $\langle G, \zeta \rangle$  точка и  $P = \{x_1, x_2\}$  – грань, та-  
кая, что

$$\zeta(x_1, x_2, c) = 1 \quad \text{и} \quad \forall x \in G \setminus \{c\} \quad (\zeta(x_1, x_2, x) \leq 0).$$

Пусть  $g \in G$ . Тогда

$$\zeta(gc^{-1}x_1, gc^{-1}x_2, g) = 1.$$

Пусть  $x_0 \neq g$ . Значит,  $cg^{-1}x_0 \neq c$ , отсюда

$$\zeta(x_1, x_2, cg^{-1}x_0) \leq 0.$$

Тогда

$$\zeta(gc^{-1}x_1, gc^{-1}x_2, x_0) \leq 0.$$

Таким образом, произвольный элемент  $g \in G$  является отделимой в  $\langle G, \zeta \rangle$  точкой. #

Пункт 3) доказан. Таким образом, теорема 2.1 доказана полностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Забарина А.И., Пестов Г.Г. Двумерно упорядоченные группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 5–8.
2. Пестов Г.Г., Забарина А.И., Тоболкин А.А., Фомина Е.А. О 2-упорядоченных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 30–40.
3. Пестов Г.Г. Двумерно упорядоченные поля. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. 128 с.
4. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965. 342 с.
5. Тоболкин А.А. К теории  $n$ -упорядоченных групп: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Томск, 2009. 71 с. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000370652>
6. Пестов Г.Г., Фомина Е.А. Подполе  $B$  бесконечно близких к базе элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 41–47.
7. Пестов Г.Г., Фомина Е.А. Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1(1). С. 50–53.
8. Фомина Е.А. Критерий бесконечно узкого поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 27–30.
9. Забарина А.И. О циклически упорядоченных группах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Томск, 1984. 84 с.
10. Терпе А.И. Элементы геометрии  $n$ -мерного порядка. Томск, 1982. 36 с. [Деп. в ВИНТИ 27-10-82, № 5941 82].
11. Пестов Г.Г. К теории упорядоченных алгебраических систем: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.06. Томск, 2003. 273 с.
12. Пестов Г.Г. Исследования по теории  $n$ -мерной функции порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1966. 131 с.

Статья поступила 04.10.2016 г.

Zabarina A.I., [Pestov G.G.](#), Fomina E.A. (2017) ON THE THEORY OF 2-ORDERED GROUPS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 25–34

DOI 10.17223/19988621/45/2

#### 1. On the order on a straight line $l_{e,\alpha}$ .

Let  $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$  is a non-degenerate 2-ordered group,  $\alpha \in G$ ,  $o(\alpha) = 2$ ,  $l_{e,\alpha} = \{x \in G \mid \zeta(\alpha, e, x) = 0\}$ .

It is known that  $l_{e,\alpha} \triangleleft G$ . As  $l_{e,\alpha} \neq G$ , then  $\exists c \in G$  ( $\zeta(c, \alpha, e) \neq 0$ ). Let  $\zeta(c, \alpha, e) = 1$ .

Let:  $x < y \Leftrightarrow \zeta_c(x, y) = \zeta(c, x, y) = 1$ .

It is known that the function  $\zeta_c$  sets linear order on the line  $l_{e,\alpha}$ . Let us note that  $\alpha < e$  regarding this order. As  $\alpha \in l_{e,\alpha}$  then the group  $\langle l_{e,\alpha}, \cdot \rangle$  cannot be linearly ordered. Let us find a subgroup which is linearly ordered regarding to the specified order  $\zeta_c$ .

**Theorem 1.1.** Let  $P = \{x \in l_{e,\alpha} \mid x \geq e\}$ ,  $H = P \cup P^{-1}$ . If  $|P| \neq 1$ , then  $\langle H, \cdot, \zeta_c \rangle$  is a linearly ordered group.

## 2. On the cardinality of the set of elements of order $n$ in 2-ordered group

Let  $n \in \mathbf{N}$  and  $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$ . As  $T(G) \subset Z(G)$ , then  $H < G$  and  $H$  is an Abelian group. Consequently,  $\langle H, \cdot, \zeta \rangle$  is a locally finite 2-ordered group. Let  $\zeta \neq 0$  on the set  $H$ .

**Theorem 2.1.** Let  $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$  be a non-degenerate 2-ordered group,  $n \in \mathbf{N}$  and  $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$ . If  $\zeta \neq 0$  on the set  $H$ , then  $|H| \leq n$ .

Keywords: linearly ordered group, two-dimensional order, 2-ordered group, involution, straight line.

ZABARINA Anna Ivanovna (Candidate of Physics and Mathematics,  
Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: aizabarina@gmail.com

PESTOV German Gavrilovich (Doctor of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University Tomsk, Russian Federation)

FOMINA Elena Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics,  
Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: ef254@mail.ru

## REFERENCES

- Zabarina A.I., Pestov G.G. (2011). Dvumerno uporyadochennyye gruppy [Two-dimensionally ordered groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1 (13). pp. 5–8.
- Pestov G.G., Zabarina A.I., Tobolkin A.A., Fomina E.A. (2015). O 2-uporyadochennykh gruppakh [On 2-ordered groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 30–40. DOI: 10.17223/19988621/34/3.
- Pestov G.G. (2003). *Dvumerno uporyadochennyye polya* [Two-dimensionally ordered fields]. Tomsk: Tomsk St. Univ. Publ.
- Fuchs L. (1963). *Partially ordered algebraic systems*. Oxford: Pergamon Press.
- Tobolkin A.A. (2009). *K teorii n-uporyadochennykh grupp* [On the theory of  $n$ -ordered groups]. Dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 71 p. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000370652> (in Russian)
- Pestov G.G., Fomina E.A. (2009). Podpole  $B$  beskonechno blizkikh k baze elementov [A subfield  $B$  of elements which are infinitely close to the base of elements]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(6). pp. 41–47.
- Pestov G.G., Fomina E.A. (2007). Konstruktsiya beskonechno uzкого dvumerno uporyadochennogo polya [Construction of an infinitely narrow 2-dimensionally ordered field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(1). pp. 50–53.
- Fomina E.A. (2009). Kriteriy beskonechno uzкого polya [A criterion of an infinitely narrow field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(5). pp. 27–30.
- Zabarina A.I. (1984). *O tsiklicheski uporyadochennykh gruppakh* [On cyclically ordered groups]. Dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 84 p.
- Terre A.I. (1982). Elementy geometrii  $n$ -mernogo poryadka [Elements of geometry of the  $n$ -dimensional order]. Tomsk [Dep. VINITI 27-10-82, № 5941 82]. 36 p.
- Pestov G.G. (2003). *K teorii uporyadochennykh algebraicheskyykh sistem* [On the theory of ordered algebraic systems]. Dis. doct. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 273 p.
- Pestov G.G. (1966). *Issledivaniya po teorii n-mernoy funktsii poryadka* [Research on the theory of the  $n$ -dimensional order function]. Dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 131 p.

УДК 517.983.24  
DOI 10.17223/19988621/45/3

Д.Ю. Иванов

## ЗАМКНУТОСТЬ СУММ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ПО РАЗНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ В ПРОСТРАНСТВАХ КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Доказана замкнутость сумм некоторых неограниченных операторов, действующих по разным переменным в пространствах квадратично суммируемых функций нескольких переменных. Входящие в такие суммы операторы являются генераторами сжимающих  $C_0$ -полугрупп, и все, кроме, быть может, одного, самосопряжены и имеют чисто точечные спектры. В качестве примера рассмотрены суммы обыкновенных дифференциальных операторов, возникающие в задачах многомерной нестационарной теплопроводности. Исследована гладкость функций, входящих в области определения таких замкнутых операторных сумм.

**Ключевые слова:** замкнутый линейный оператор, сумма операторов, генератор  $C_0$ -полугруппы, область определения оператора.

Получены достаточные условия замкнутости сумм некоторых неограниченных операторов в пространствах квадратично суммируемых функций нескольких переменных. А именно: для замкнутости операторных сумм достаточно, чтобы входящие в суммы операторы действовали по разным переменным, являлись генераторами сжимающих  $C_0$ -полугрупп и все, кроме, быть может, одного, были самосопряжены и имели чисто точечные спектры.

То обстоятельство, что сумма генераторов коммутирующих  $C_0$ -полугрупп сжатий замыкаема, хорошо известно [1, с. 269; 2, с. 88]. Но автору не встречались в литературе примеры совпадающих со своими замыканиями сумм неограниченных генераторов  $C_0$ -полугрупп сжатий.

Замыкание суммы генераторов сжимающих  $C_0$ -полугрупп, операторы которых коммутируют друг с другом, само является генератором сжимающей  $C_0$ -полугруппы [2, с. 88]. Генераторы  $C_0$ -полугрупп используются для постановки задач математической физики в виде краевых задач для дифференциально-операторных уравнений, в которых генератор  $C_0$ -полугруппы играет роль операторного коэффициента. Условия корректности таких краевых задач определяются на основе областей определения операторных коэффициентов. Поэтому замкнутость операторных сумм, играющих роль операторных коэффициентов, позволяет более просто описать области определения последних.

В работах [3, 4] исследовались краевые задачи для двумерных дифференциально-операторных уравнений  $\Delta_2 \mathbf{u}(x) = \overline{D_\Sigma} \mathbf{u}(x)$   $x \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$ ,  $\Delta_2 \equiv \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$ , соответствующие начально-краевым задачам теплопроводности в прямом цилиндре  $\Omega \times I_Y$  ( $I_Y \equiv [0, Y]$ ) на временном интервале  $I_T \equiv [0, T]$  ( $Y$  и  $T$  – конечные положительные числа). Операторный коэффициент  $\overline{D_\Sigma}$  является замыканием опе-

раторной суммы  $\mathbf{D}_\Sigma \equiv \mathbf{D}_t + \mathbf{D}_y$  в пространстве  $L'_2 \equiv L_2(I_Y \times I_T)$ . При этом оператор  $\mathbf{D}_t : (\mathbf{D}_t f)(y, t) = \partial_t f(y, t)$ , определен на абсолютно непрерывных по  $t$  функциях  $f(y, t) \in L'_2$ , таких, что  $\partial_t f \in L'_2$  и  $f|_{t=0} = 0$  при  $y \in I_Y$ , а также на эквивалентных им. Оператор  $\mathbf{D}_y : (\mathbf{D}_y f)(y, t) = -\partial_{yy}^2 f(y, t)$ , задан на абсолютно непрерывно дифференцируемых по  $y$  функциях  $f(y, t) \in L'_2$ , таких, что  $\partial_{yy}^2 f \in L'_2$  и  $(\partial_y f - \lambda_0 f)|_{y=0} = (\partial_y f + \lambda_Y f)|_{y=Y} = 0$  ( $0 \leq \lambda_0, \lambda_Y \leq \infty$ ) при  $t \in I_T$ , а также на эквивалентных им. Получены решения указанных краевых задач с помощью двумерных граничных интегральных уравнений (ГИУ) с операторным ядром, выраженным через  $C_0$ -полугруппу, порождаемую оператором  $\overline{\mathbf{D}_\Sigma}$ . В работах [5, 6] разработан алгоритм численного решения указанных ГИУ на основе разрешающих их сеточных операторов, вычисляемых в алгебре полиномов, образованных степенями полугруппового оператора. Отметим, что для вычисления таких разрешающих операторов требуется значительно меньший объем вычислений, чем для получения разрешающих операторов, построенных на основе обычных трехмерных ГИУ.

Для обоснования аппроксимирующих свойств и устойчивости вычислительных схем [5, 6] в работе [7] установлена инвариантность пространств  $C^k(\partial\Omega, H^n(I_Y \times I_T))$  относительно прямых и обратных операторов ГИУ, а также ограниченность таких операторов в указанных пространствах. Здесь  $C^k(\partial\Omega, H^n(I_Y \times I_T))$  – пространство  $k$  раз непрерывно дифференцируемых вдоль границы  $\partial\Omega$  векторных функций со значениями в  $H^n(I_Y \times I_T)$ ;  $H^n(I_Y \times I_T)$  – пространство типа Соболева, определяемое  $n$  первыми степенями оператора  $\overline{\mathbf{D}_\Sigma}$ .

Из инвариантности пространств  $C^k(\partial\Omega, H^n(I_Y \times I_T))$  следует инвариантность областей определения операторов  $(\overline{\mathbf{D}_\Sigma})^n$  относительно обратных операторов ГИУ. Так как входными данными задачи являются правые части ГИУ, то этот факт позволяет задать гладкость решения ГИУ с помощью правой части, если известна гладкость функций, входящих в области определения операторов  $(\overline{\mathbf{D}_\Sigma})^n$ . Очевидно, что задание гладкости решений ГИУ необходимо для определения аппроксимирующих свойств сеточного аналога прямого оператора ГИУ.

В силу результатов настоящей работы операторы  $\mathbf{D}_\Sigma$  замкнуты, поэтому гладкость функций, входящих в области определения операторов  $(\overline{\mathbf{D}_\Sigma})^n$ , непосредственно определяется гладкостью функций, входящих в области определения операторов  $\mathbf{D}_t$  и  $\mathbf{D}_y$ . В заключительной части настоящей работы исследована гладкость функций, входящих в области определения степеней сумм обыкновенных дифференциальных операторов типа  $\mathbf{D}_\Sigma$ : доказано существование абсолютно непрерывных на множестве  $I_Y \times I_T$  частных производных этих функций при  $n \geq 2$ .

**Представление тензорных сумм операторов  
в виде обычных операторных сумм**

Пусть  $H$  и  $G$  – комплексные гильбертовы пространства,  $H \otimes G$  – пространство конечных линейных комбинаций билинейных форм вида  $p \otimes q$ , где  $p \in H$ ,  $q \in G$ , со скалярным произведением

$$\left( \sum_{i,j} p'_i \otimes q'_j, \sum_{k,l} p''_k \otimes q''_l \right)_{H \otimes G} = \sum_{i,j,k,l} (p'_i, p''_k)_H (q'_j, q''_l)_G.$$

Определим гильбертово пространство  $H \bar{\otimes} G$  как пополнение  $H \otimes G$  по указанному скалярному произведению [8, с. 65].

Пусть  $A$  и  $B$  – линейные замыкаемые операторы в пространствах  $H$  и  $G$  соответственно, со всюду плотными областями определения  $D(A)$  и  $D(B)$ . Обозначим через  $D(A) \otimes D(B)$  множество конечных линейных комбинаций элементов вида  $p \otimes q$ , где  $p \in D(A)$ ,  $q \in D(B)$ . Оператор  $A \otimes B$ , определенный на множестве  $D(A) \otimes D(B)$ :

$$(A \otimes B) \sum_{i,j} p_i \otimes q_j = \sum_{i,j} A p_i \otimes B q_j,$$

закрываем в норме гильбертова пространства  $H \bar{\otimes} G$  [8, с. 326]. Замыкания операторов  $A \otimes B$  и  $A \otimes I'' + I' \otimes B$  обозначим соответственно как  $A \bar{\otimes} B$  и  $\overline{A + B}$  ( $I'$ ,  $I''$  – тождественные операторы в  $H$ ,  $G$ ). Операторы  $A \bar{\otimes} B$  и  $\overline{A + B}$  будем называть соответственно тензорным произведением и тензорной суммой операторов  $A$  и  $B$ . Операторную сумму  $A \bar{\otimes} I'' + I' \bar{\otimes} B$ , определенную на  $D(A \bar{\otimes} I'') \cap D(I' \bar{\otimes} B)$ , обозначим через  $A + B$ . В силу того, что имеют место включения

$$A \otimes I'' + I' \otimes B \subseteq A + B \subseteq \overline{A + B}, \tag{1}$$

оператор  $A + B$  замыкаем, и его замыкание совпадает с оператором  $\overline{A + B}$ . Операторное произведение  $(A \bar{\otimes} I'')(I' \bar{\otimes} B)$  обозначим через  $AB$ . Если операторы  $A$  и  $B$  ограничены, то  $AB = A \bar{\otimes} B$  и  $\|AB\| = \|A\| \|B\|$ .

Также нам понадобится понятие векторнозначного скалярного произведения  $(f, q)_G$  элементов  $f \in H \bar{\otimes} G$  и  $q \in G$ . Согласно [9, с. 135], оно определяется как некий элемент  $\tilde{p} \in H$ , для которого при любом  $p \in H$  выполняется равенство  $(f, p \otimes q)_{H \bar{\otimes} G} = (\tilde{p}, p)_H$ .

**Лемма 1.** Пусть  $A$  и  $B$  – линейные всюду плотно определенные и замыкаемые в соответствующих гильбертовых пространствах  $H$  и  $G$  операторы, причем ортонормированная система  $\{e_\beta, \beta \in B\}$  собственных функций оператора  $B$  ( $B e_\beta \equiv \sigma_\beta e_\beta$ ) образует базис в пространстве  $G$  (множество  $B$  может быть несчетно). Тогда для того чтобы  $f \in D(\overline{A + B})$ , необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$(\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G \in D(\bar{A}) \quad (\beta \in B), \quad (2a)$$

$$([\bar{A} + \mathbf{B}] \mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G = [\bar{A} + \sigma_\beta \mathbf{I}'](\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G \quad (\beta \in B); \quad (2b)$$

$$\sum_{\beta \in B} \|[\bar{A} + \sigma_\beta \mathbf{I}'](\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G\|_H^2 < \infty, \quad (3)$$

где  $\bar{A}$  – замыкание оператора  $A$ . Обратное, для того чтобы  $\mathbf{f} \in D(\overline{A + B})$ , достаточно, чтобы  $\mathbf{f} \in H \bar{\otimes} G$  и выполнялись соотношения (2a) и (3). При этом элемент  $(\overline{A + B}) \mathbf{f}$  может быть представлен в виде

$$(\overline{A + B}) \mathbf{f} = \sum_{\beta \in B} [\bar{A} + \sigma_\beta \mathbf{I}'](\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G \otimes \mathbf{e}_\beta. \quad (4)$$

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $\mathbf{f} \in D(\overline{A + B})$  и  $\mathbf{p} \in D(A^*)$ . Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} ([\bar{A} + \mathbf{B}] \mathbf{f}, \mathbf{p} \otimes \mathbf{e}_\beta)_{H \bar{\otimes} G} &= (\mathbf{f}, [A^* + \sigma_\beta \mathbf{I}'] \mathbf{p} \otimes \mathbf{e}_\beta)_{H \bar{\otimes} G} = \\ &= ((\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G, [A^* + \sigma_\beta \mathbf{I}'] \mathbf{p})_H \quad (\beta \in B). \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, имеем

$$([\bar{A} + \mathbf{B}] \mathbf{f}, \mathbf{p} \otimes \mathbf{e}_\beta)_{H \bar{\otimes} G} = (([\bar{A} + \mathbf{B}] \mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G, \mathbf{p})_H \quad (\beta \in B). \quad (6)$$

Принимая во внимание произвольность элемента  $\mathbf{p} \in D(A^*)$ , а также плотность множества  $D(A^*)$  в пространстве  $H$  вследствие замыкаемости оператора  $A$ , при сравнении равенств (5) и (6) убеждаемся в справедливости соотношений (2).

В силу замкнутости ортонормированной системы  $\{\mathbf{e}_\beta, \beta \in B\}$  имеет место предельное соотношение  $\sum_{\beta \in B} \|([\bar{A} + \mathbf{B}] \mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G\|_H^2 < \infty$  [9, с. 137], которое с учетом (2) может быть записано в виде (3).

*Достаточность.* Пусть для элемента  $\mathbf{f} \in H \bar{\otimes} G$  выполняются условия (2a) и (3). Обозначим через  $\{\mathbf{d}_\alpha, \alpha \in A\}$  произвольный ортонормированный базис в пространстве  $H$ . Тогда  $\{\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta, \alpha \in A, \beta \in B\}$  – ортонормированный базис в пространстве  $H \bar{\otimes} G$ . С учетом равенств Парсеваля:

$$\|[\bar{A} + \sigma_\beta \mathbf{I}'](\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G\|_H^2 = \sum_{\alpha \in A} |([\bar{A} + \sigma_\beta \mathbf{I}'](\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G, \mathbf{d}_\alpha)_H|^2 < \infty \quad (\beta \in B),$$

предельное соотношение (3) может быть записано как

$$\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} |([\bar{A} + \sigma_\beta \mathbf{I}'](\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G, \mathbf{d}_\alpha)_H|^2 < \infty.$$

Вследствие полноты пространства  $H \bar{\otimes} G$  отсюда можно сделать вывод, что существует элемент  $\mathbf{g} \in H \bar{\otimes} G$ , представимый в виде

$$\mathbf{g} = \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} ([\bar{A} + \sigma_\beta \mathbf{I}'](\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta)_G, \mathbf{d}_\alpha)_H \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta.$$

Суммируя по  $\alpha$ , преобразуем последнее выражение:

$$g = \sum_{\beta \in B} [\bar{A} + \sigma_\beta I'](f, e_\beta)_G \otimes e_\beta.$$

Отсюда в силу замкнутости оператора  $\overline{A+B}$  имеем

$$g = \overline{(A+B)} f, \quad f \in D(\overline{A+B}).$$

Лемма полностью доказана.

Заметим, что формула (4) есть разложение оператора  $\overline{A+B}$  в прямую операторную сумму  $\bigoplus_{\beta \in B} (\bar{A} + \sigma_\beta I')$ , порождаемую спектральным разложением оператора  $B$ .

Согласно лемме 1, область определения оператора  $\overline{A+B}$  может быть представлена в следующем виде:

$$D(\overline{A+B}) = \left\{ f \in H \bar{\otimes} G : (f, e_\beta)_G \in D(\bar{A}) (\beta \in B); \sum_{\beta \in B} \| [\bar{A} + \sigma_\beta I'](f, e_\beta)_G \|_H^2 < \infty \right\}. \quad (7)$$

Полагая  $A = O'$  ( $O'$  – нулевой оператор в пространстве  $H$ ), получаем на основании формулы (7) область определения оператора  $I' \bar{\otimes} B$ :

$$D(I' \bar{\otimes} B) = \left\{ f \in H \bar{\otimes} G : \sum_{\beta \in B} |\sigma_\beta|^2 \| (f, e_\beta)_G \|_H^2 < \infty \right\}. \quad (8)$$

Аналогично, полагая  $B = O''$  ( $O''$  – нулевой оператор в пространстве  $G$ ), имеем область определения оператора  $A \bar{\otimes} I''$ :

$$D(A \bar{\otimes} I'') = \left\{ f \in H \bar{\otimes} G : (f, e_\beta)_G \in D(\bar{A}), \beta \in B; \sum_{\beta \in B} \| \bar{A}(f, e_\beta)_G \|_H^2 < \infty \right\}. \quad (9)$$

Заметим, что в качестве  $\{e_\beta, \beta \in B\}$  в формуле (9) может быть использован произвольный ортонормированный базис в пространстве  $G$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A$  и  $B$  – линейные всюду плотно определенные и замыкаемые в соответствующих гильбертовых пространствах  $H$  и  $G$  операторы, причем ортонормированная система  $\{e_\beta, \beta \in B\}$  собственных функций оператора  $B$  образует базис в пространстве  $G$ . Кроме того, операторы  $A$  и  $B$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{A}p, p)_H &\geq \omega'(p, p)_H \quad (p \in D(\bar{A})), \\ \operatorname{Re}(\bar{B}q, q)_G &\geq \omega''(q, q)_G \quad (q \in D(\bar{B})), \end{aligned} \quad (10)$$

при некоторых фиксированных  $\omega', \omega'' \in \mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$  и хотя бы одному из условий

$$(\bar{A}p, p)_H \in \mathbf{R} \quad (p \in D(\bar{A})), \quad (\bar{B}q, q)_G \in \mathbf{R} \quad (q \in D(\bar{B})). \quad (11)$$

Тогда имеет место равенство:

$$\overline{A+B} = A+B. \quad (12)$$

**Доказательство.** Рассмотрим сначала частный случай, когда  $\omega' = \omega'' = 0$ . Неравенства (10) при этом принимают вид

$$\operatorname{Re}(\bar{A}p, p)_H \geq 0 \quad (p \in D(\bar{A})), \quad \operatorname{Re}(\bar{B}q, q)_G \geq 0 \quad (q \in D(\bar{B})). \quad (13)$$

Поскольку выполняется одно из условий (11), то имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\overline{A}(f, e_\beta)_G\|_H^2 &\leq \|[\overline{A} + \sigma_\beta I'](f, e_\beta)_G\|_H^2, \\ |\sigma_\beta|^2 \|(f, e_\beta)_G\|_H^2 &\leq \|[\overline{A} + \sigma_\beta I'](f, e_\beta)_G\|_H^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $f \in D(\overline{A+B})$  ( $\beta \in B$ ). На основании формул (7) – (9) и оценок (14) получаем следующие включения:

$$D(\overline{A+B}) \subseteq D(\overline{A \otimes I''}), \quad D(\overline{A+B}) \subseteq D(\overline{I' \otimes B}).$$

В силу противоположного включения (1) это означает, что  $D(\overline{A+B}) = D(A+B)$ , следовательно, имеет место равенство (12).

Рассмотрим теперь общий случай:  $\omega', \omega'' \in \mathbf{R}$ . С помощью равенств  $A_\omega = A - \omega' I'$ ,  $B_\omega = B - \omega'' I''$  зададим операторы  $A_\omega$ ,  $B_\omega$  на множествах  $D(A)$ ,  $D(B)$  соответственно. Операторы  $A_\omega$ ,  $B_\omega$  удовлетворяют условиям теоремы, причем для них справедливы неравенства (13). По доказанному имеем  $\overline{A_\omega + B_\omega} = \overline{A_\omega} + \overline{B_\omega}$ . Отсюда, учитывая, что  $\overline{A \otimes I''} = \overline{A_\omega} \otimes \overline{I''} + \omega' I'$ ,  $\overline{I' \otimes B} = \overline{I' \otimes B_\omega} + \omega'' I''$ ,  $\overline{A+B} = \overline{A_\omega + B_\omega} + (\omega' + \omega'') I$  ( $I$  – тождественный оператор в пространстве  $H \otimes G$ ), приходим к равенству (12). Теорема доказана.

Известно [10, с. 202], что если операторы  $A$  и  $B$  являются генераторами  $C_0$ -полугрупп  $T_A(\tau)$  и  $T_B(\tau)$ :  $Af = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(f - T_A(\tau)f)$  ( $f \in D(A)$ ), то операторы  $T_A(\tau)T_B(\tau) = \overline{T_A(\tau) \otimes T_B(\tau)}$  образуют  $C_0$ -полугруппу, а тензорная сумма  $\overline{A+B}$  является ее генератором.

**Следствие 1.** Пусть линейные операторы  $A$  и  $B_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), действующие в соответствующих гильбертовых пространствах  $H$  и  $G_i$ , являются генераторами соответствующих  $C_0$ -полугрупп  $T_A(\tau)$  и  $T_{B_i}(\tau)$  с условиями

$$\|T_A(\tau)\| \leq e^{\omega' \tau}, \quad \|T_{B_i}(\tau)\| \leq e^{\omega_i'' \tau}, \quad (15)$$

при некоторых фиксированных  $\omega', \omega_i'' \in \mathbf{R}$ , причем операторы  $B_i$  самосопряжены и имеют чисто точечные спектры. Тогда справедливы равенства

$$C_\Sigma \equiv A + B_1 + B_2 + \dots + B_n = \overline{A + B_1 + B_2 + \dots + B_n}, \quad (16)$$

и оператор  $C_\Sigma$  является генератором  $C_0$ -полугруппы  $T_\Sigma(\tau) \equiv T_A(\tau)T_{B_1}(\tau)\dots T_{B_n}(\tau)$ .

**Доказательство.** Линейные операторы  $A$  и  $B_i$ , будучи генераторами  $C_0$ -полугрупп, всюду плотно определены в соответствующих пространствах  $H$  и  $G_i$  и замкнуты, причем в силу условий (15) для операторов  $A$  и  $B_i$  выполнены неравенства вида (10) [11, с. 112]. Так как операторы  $B_i$  самосопряжены, то для них выполнены условия вида (11). В силу того, что самосопряженные операторы  $B_i$  обладают чисто точечными спектрами, ортонормированные системы их собственных функций образуют базисы в соответствующих пространствах  $G_i$ . Учитывая также, что тензорная сумма генераторов  $C_0$ -полугрупп сама является генератором  $C_0$ -полугруппы, на основании теоремы 1 последовательно получаем равенства

$A_i \equiv A_{i-1} + B_i = \overline{A_{i-1} + B_i}$  ( $i = 1, n$ ,  $A_0 \equiv A$ ), так как для операторов  $A_i$  выполняются те же условия теоремы 1, что и для оператора  $A$ . Равенство  $A_n = \overline{A_{n-1} + B_n}$  совпадает с равенством (16). Утверждение доказано.

**Замкнутость сумм неограниченных операторов,  
действующих по разным переменным в пространствах  
квадратично суммируемых функций нескольких переменных**

Пусть  $\Omega'$  и  $\Omega''$  – некоторые измеримые по Лебегу множества в метрических пространствах  $\mathbf{R}^m$  и  $\mathbf{R}^n$ . Далее будут рассматриваться комплексные гильбертовы пространства  $L_2(\Omega')$ ,  $L_2(\Omega'')$ ,  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$ . Между пространствами  $L_2(\Omega') \otimes L_2(\Omega'')$  и  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$  существует изоморфизм  $U$ , такой, что выполняется равенство  $U(p \otimes q) = pq$  для произвольных  $p \in L_2(\Omega')$  и  $q \in L_2(\Omega'')$  [8, с. 67]. На основании такого изоморфизма в пространство  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$  переносится ряд понятий, связанных с тензорными произведениями гильбертовых пространств. Так, например, векторнозначное скалярное произведение  $(f, p)_{L_2(\Omega')}$  для произвольных  $f(x', x'') \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$  и  $p(x') \in L_2(\Omega')$  задается при помощи равенства  $(f, p)_{L_2(\Omega')}(x'') = \int_{\Omega'} f(x', x'') p(x') dx'$ . Здесь  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ ,  $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  ( $x'_i, x''_j \in \mathbf{R}$ ).

Кроме того, существует естественный изоморфизм между пространством  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$  и  $L_2(\Omega'', L_2(\Omega'))$  – пространством квадратично суммируемых на  $\Omega''$  векторнозначных функций  $f(y)$  со значениями в  $L_2(\Omega')$ . Такой изоморфизм переводит  $f(t, y) \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$  в  $f(y) \in L_2(\Omega'', L_2(\Omega'))$ . Поэтому условимся там, где это необходимо, рассматривать элементы  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$  как векторнозначные функции  $f(y)$ .

Пусть  $A$  – произвольный линейный оператор в пространстве  $L_2(\Omega')$ . Определим в пространстве  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$  оператор  $\tilde{A}$  на основе равенств

$$(\tilde{A}f)(x'') = Af(x'') \quad (f \in D(\tilde{A}), x'' \in \Omega''). \tag{17}$$

Равенства (17) означают, что элемент  $f \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$ , представленный некоторой функцией  $f(x'')$  со значениями в  $D(A)$ , принадлежит области определения  $D(\tilde{A})$ , если существует элемент  $g \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$ , представленный такой функцией  $g(x'')$ , что почти всюду по мере Лебега на множестве  $\Omega''$  выполняются поточечные равенства  $g(x'') = Af(x'')$ . Тогда  $\tilde{A}f = g$ .

Определенный таким образом оператор  $\tilde{A}$  однозначен, т.е. определен корректно, и линеен.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  – замкнутый, вообще говоря, неограниченный оператор со всюду плотной в пространстве  $L_2(\Omega')$  областью определения, имеющий хотя бы одну резольвентную точку. Тогда  $\hat{A} = \tilde{A}$ , где  $\hat{A} \equiv U(A \otimes I'')U^{-1}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сначала частный случай, когда оператор  $A$  ограничен и всюду определен в пространстве  $L_2(\Omega')$ . Имеем равенства:

$$((\hat{A}f, p)_{L_2(\Omega')}, q)_{L_2(\Omega'')} = ((f, A^*p)_{L_2(\Omega')}, q)_{L_2(\Omega'')},$$

где  $f \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$ ,  $p \in L_2(\Omega')$ ,  $q \in L_2(\Omega'')$ . Отсюда получаем сначала  $((\hat{A}f)(x''), p)_{L_2(\Omega')} = (f(x''), A^*p)_{L_2(\Omega')}$  в силу произвольности  $q \in L_2(\Omega'')$ , затем  $(\hat{A}f)(x'') = Af(x'')$  в силу произвольности  $p \in L_2(\Omega')$  ( $x'' \in \Omega''$ ) и, наконец,  $\hat{A} = \tilde{A}$  в силу произвольности  $f \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$ . Таким образом, если оператор  $A$  ограничен и всюду определен в  $L_2(\Omega')$ , то  $\hat{A} = \tilde{A}$ .

Пусть теперь  $A$  – замкнутый, вообще говоря, неограниченный оператор со всюду плотной в пространстве  $L_2(\Omega')$  областью определения, имеющий хотя бы одну резольвентную точку  $\lambda$ . Введем обозначения  $R_\lambda \equiv (\lambda I' - A)^{-1}$  и  $\hat{R}_\lambda \equiv U(R_\lambda \otimes I'')U^{-1}$ . Так как оператор  $R_\lambda$  ограничен и всюду определен в пространстве  $L_2(\Omega')$ , то по доказанному выполняются соотношения  $(\hat{R}_\lambda f)(x'') = R_\lambda f(x'')$  ( $f \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$ ), используя которые, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} ([\lambda I - \tilde{A}]\hat{R}_\lambda f)(y) &= (\lambda I' - A)R_\lambda f(y) = f(y) \quad (f \in L_2(\Omega' \times \Omega'')), \\ (\hat{R}_\lambda [\lambda I - \tilde{A}]f)(y) &= R_\lambda (\lambda I' - A)f(y) = f(y) \quad (f \in D(\tilde{A})). \end{aligned} \quad (18)$$

Так как оператор  $\hat{R}_\lambda$  ограничен ( $\|\hat{R}_\lambda\| = \|R_\lambda\|$ ), то равенства (18) означают, что  $\hat{R}_\lambda$  является резольвентой оператора  $\tilde{A}$  в точке  $\lambda$ . С другой стороны,  $\hat{R}_\lambda = (\lambda I - \hat{A})^{-1}$ , следовательно,  $\hat{A} = \tilde{A}$ . Теорема доказана.

**Следствие 2.** Пусть линейный оператор  $A$ , действующий в пространстве  $L_2(\Omega')$ , является генератором  $C_0$ -полугруппы  $T_A(\tau)$ . С помощью операторов  $A$ ,  $T_A(\tau)$  на основании равенств типа (17) в пространстве  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$  определены соответствующие операторы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{T}_A(\tau)$ . Тогда операторы  $\tilde{T}_A(\tau)$  образуют  $C_0$ -полугруппу, генератором которой является оператор  $\tilde{A}$ .

**Доказательство.** В самом деле, поскольку оператор  $B = O''$  является генератором  $C_0$ -полугруппы  $T_B(\tau) = I''$ , то оператор  $\overline{A + O''} = A \otimes I''$  является генератором  $C_0$ -полугруппы  $T_A(\tau) \otimes I''$ . Утверждение доказано.

С учетом следствия 1 получаем следующее утверждение:

**Следствие 3.** Пусть линейные операторы  $A$  и  $B_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), действующие в соответствующих пространствах  $L_2(\Omega')$  и  $L_2(\Omega''_i)$ , являются генераторами соответствующих  $C_0$ -полугрупп  $T_A(\tau)$  и  $T_{B_i}(\tau)$  с условиями

$$\|T_A(\tau)\| \leq e^{\omega'\tau}, \quad \|T_{B_i}(\tau)\| \leq e^{\omega''_i\tau},$$

при некоторых фиксированных  $\omega', \omega''_i \in \mathbf{R}$ , причем операторы  $B_i$  самосопряжены и имеют чисто точечные спектры. С помощью перечисленных операторов на основании равенств типа (17) в пространстве  $L_2(\Omega' \times \Omega''_1 \times \dots \times \Omega''_n)$

определены соответствующие операторы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $\tilde{T}_A(\tau)$  и  $\tilde{T}_{B_i}(\tau)$ . Тогда операторы  $\tilde{T}_\Sigma(\tau) \equiv \tilde{T}_A(\tau)\tilde{T}_{B_1}(\tau)\dots\tilde{T}_{B_n}(\tau)$  образуют  $C_0$ -полугруппу, а оператор  $\tilde{C}_\Sigma \equiv \tilde{A} + \tilde{B}_1 + \dots + \tilde{B}_n$ , определенный на пересечении областей определения операторов  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), замкнут и является генератором этой  $C_0$ -полугруппы.

**Замкнутые суммы дифференциальных операторов, действующих по разным переменным в пространствах  $L_2$**

Оператор  $D_\Sigma$ , определенный во введении, согласно следствию 3, замкнут. Действительно,  $D_t = \tilde{A}_t$  и  $D_y = \tilde{B}_y$ , где оператор  $A_t : (A_t f)(t) = f'(t)$ , определен на абсолютно непрерывных функциях  $f(t) \in L_2(I_T)$ , таких, что  $f'(t) \in L_2(I_T)$  и  $f(0) = 0$ , а также на эквивалентных им; оператор  $B_y : (B_y f)(y) = -f''(y)$ , задан на абсолютно непрерывно дифференцируемых функциях  $f(y) \in L_2(I_Y)$ , таких, что  $f''(y) \in L_2$  и  $f'(0) - \lambda_0 f(0) = 0$ ,  $f'(0) + \lambda_Y f(0) = 0$ , а также на эквивалентных им. Оператор  $A_t$  является генератором  $C_0$ -полугруппы правых сдвигов  $T_{A_t}(\tau) : (T_{A_t}(\tau)f)(t) = f(t - \tau)$  при  $\tau < t$  и  $(T_{A_t}(\tau)f)(t) = 0$  при  $\tau \geq t$  [12, с. 189]. Оператор  $B_y$  самосопряжен и имеет неположительный чисто точечный спектр [13, с. 224]. Вследствие этого оператор  $B_y$  также является генератором сжимающей  $C_0$ -полугруппы, допускающей спектральное разложение по собственным функциям оператора  $B_y$ .

Введем в рассмотрение самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы  $B_m$  ( $m \in N \equiv \{1, 2, \dots\}$ ), имеющие чисто точечные спектры и полуограниченные снизу, которые согласно [14, с. 123], задаются с помощью самосопряженного дифференциального выражения

$$(-1)^n (p_0 f^{(m)})^{(m)} + (-1)^{(m-1)} (p_1 f^{(m-1)})^{(m-1)} + \dots + p_m f$$

на функциях  $f \in L_2(I_Y)$  (и на эквивалентных им), имеющих квазипроизводные  $f^{[k]}$  ( $k = \overline{0, 2m}$ ):

$$f^{[0]} = f, f^{[k]} = f^{(k)} \quad (k = \overline{1, m-1}), f^{[m]} = p_0 f^{(m)},$$

$$f^{[m+k]} = p_k f^{(m-k)} - (f^{[m+k-1]})' \quad (k = \overline{1, m}), \tag{19}$$

абсолютно непрерывные до порядка  $2m - 1$  включительно, и  $f^{[2m]} \in L_2(I_Y)$ . При этом функции  $f(y)$  удовлетворяют системе граничных условий

$$\sum_{k=1}^{2m} [\alpha_{jk} f^{[k-1]}(0) + \beta_{jk} f^{[k-1]}(Y)] = 0 \quad (j = \overline{1, 2m}),$$

где

$$\sum_{l=1}^m [\alpha_{jl} \overline{\alpha_{k, 2m-l+1}} - \alpha_{j, 2m-l+1} \overline{\alpha_{kl}}] = \sum_{l=1}^m [\beta_{jl} \overline{\beta_{k, 2m-l+1}} - \beta_{j, 2m-l+1} \overline{\beta_{kl}}] \quad (j, k = \overline{1, 2m}).$$

Коэффициенты  $p_i(y)$  ( $i = \overline{0, m}$ ) имеют на  $I_Y$  непрерывные производные порядка  $m-i$ , функция  $1/p_0(y)$  суммируема на  $I_Y$  и  $p_0(y) > 0$ .

Операторы  $B_m$  порождают  $C_0$ -полугруппы, для которых выполнены условия (15). Одним из представителей операторов  $B_m$  при  $m=1$  является оператор  $B_y$ .

Согласно следствию 3, операторы  $\tilde{A}_i + \tilde{B}_m$  замкнуты. Заметим, что операторы типа  $\tilde{B}_m$ , действующие по разным переменным, между собой также образуют замкнутые суммы.

Определим гладкость функций, входящих в области определения операторов  $(\tilde{A}_i + \tilde{B}_m)^n$  при  $n \geq 2$ . В соответствии с [15, с. 246] введем понятие абсолютно непрерывной функции двух переменных:

**Определение.** Функция  $f(y, t)$  называется абсолютно непрерывной функцией на множестве  $I_Y \times I_T$ , если:

(i) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что если  $J_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – непересекающиеся между собой множества вида  $J \equiv (y_1, y_2) \times (t_1, t_2)$  ( $0 \leq y_1 < y_2 \leq Y$ ,  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ ), сумма площадей которых меньше  $\delta$ , то выполнено неравенство  $|\sum_{k=1}^n F(J_k)| < \varepsilon$ , где

$$F(J) \equiv f(y_2, t_2) - f(y_1, t_2) - f(y_2, t_1) + f(y_1, t_1);$$

(ii)  $f(0, t)$  и  $f(y, 0)$  – абсолютно непрерывные функции переменных  $t$  и  $y$  соответственно.

**Лемма 2.** Пусть функция  $f(y, t) \in L_1(I_Y \times I_T)$  при почти всех  $y \in I_Y$  абсолютно непрерывна по  $t \in I_T$ , а при почти всех  $t \in I_T$  абсолютно непрерывна по  $y \in I_Y$ . Кроме того, пусть функция  $f_t \equiv \partial_t f$  при почти всех  $t \in I_T$  абсолютно непрерывна по  $y \in I_Y$ , а функция  $f_{ty} \equiv \partial_y f_t$  абсолютно суммируема на  $I_Y \times I_T$ . Тогда функция  $f_y \equiv \partial_y f$  абсолютно непрерывна по  $t \in I_T$  при почти всех  $y \in I_Y$ , функции  $f_{ty}$  и  $f_{yt} \equiv \partial_t f_y$  равны при почти всех  $y \in I_Y$  и любых  $t \in I_T$ , а сама функция  $f$  при почти всех  $y \in I_Y$  и всех  $t \in I_T$  совпадает с некоторой абсолютно непрерывной на  $I_Y \times I_T$  функцией.

**Доказательство.** Пусть числа  $y_0 \in I_Y$  и  $t_0 \in I_T$  таковы, что функция  $f(y_0, t)$  абсолютно непрерывна по  $t \in I_T$ , а функция  $f(y, t_0)$  абсолютно непрерывна по  $y \in I_Y$ . Так как функция  $f_t$  абсолютно непрерывна по  $y \in I_Y$  при почти всех  $t \in I_T$ , то

$$g(y, t) \equiv \iint_{[y_0, y] \times [t_0, t]} f_{ty}(t', y') dt' dy' = \int_{t_0}^t f_t(y, t') dt' - \int_{t_0}^t f_t(y_0, t') dt'$$

при  $(y, t) \in I_Y \times I_T$ . Так как функция  $f(y_0, t)$  абсолютно непрерывна по  $t \in I_T$ , то

$$f(y, t) = f(y, t_0) + f(y_0, t) - f(y_0, t_0) + g(y, t) \quad (20)$$

при почти всех  $y \in I_Y$  и любых  $t \in I_T$ . Так как функция  $f(y, t_0)$  абсолютно непрерывна по  $y \in I_Y$  и  $g(y, t) = \int_{y_0}^y \int_{t_0}^t f_{ty}(y', t') dt' dy'$ , то

$$f_y(y, t) = f_y(y, t_0) + \int_{t_0}^t f_{ty}(y, t') dt'$$

при почти всех  $y \in I_Y$  и любых  $t \in I_T$ . Следовательно, функция  $f_y$  абсолютно непрерывна по  $t \in I_T$  при почти всех  $y \in I_Y$ , и равенство  $f_{yt} = f_{ty}$  выполнено при почти всех  $y \in I_Y$  и любых  $t \in I_T$ .

Зададим с помощью правой части равенства (20) функцию  $\tilde{f}(y, t)$ , непрерывную на  $I_Y \times I_T$  и совпадающую при почти всех  $y \in I_Y$  и всех  $t \in I_T$  с функцией  $f(y, t)$ . Покажем, что функция  $\tilde{f}(y, t)$  абсолютно непрерывна. Для одномерных функций  $f(y, t_0)$  и  $f(y_0, t)$  условие абсолютной непрерывности (i) выполняется тождественно, а для неопределенного интеграла  $g(y, t)$  – в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, по аналогии с одномерным случаем [16, с. 345]. Функция  $\tilde{f}(0, t)$  может быть представлена в виде

$$f(0, t) = f(y_0, t) + \int_{t_0}^t h(t') dt' + C \quad (h(t) \equiv \int_{y_0}^0 f_y(y', t) dy' \in L_1(I_T), \\ C \equiv f(0, t_0) - f(y_0, t_0)),$$

вследствие чего она абсолютно непрерывна по  $t \in I_T$ . Аналогичным образом абсолютно непрерывна по  $y \in I_Y$  функция  $\tilde{f}(y, 0)$ , поэтому условие (ii) для функции  $\tilde{f}(y, t)$  также выполнено. Лемма доказана.

Потребуем дополнительно для операторов  $B_m$ , чтобы функция  $p_0(y)$  не имела нулей на множестве  $I_Y$ . Тогда в силу теоремы 1 [15, с. 234] и равенств (19) производные  $f^{(k)}$  функции  $f(y) \in D(B_m)$ , как и квазипроизводные  $f^{[k]}$ , абсолютно непрерывны до порядка  $2m - 1$  включительно и  $f^{(2m)} \in L_2(I_Y)$ . С учетом леммы 2 получаем утверждение:

**Теорема 3.** Если  $f(y, t) \in D\left(\left(\tilde{A}_l + \tilde{B}_m\right)^n\right)$  ( $m \in N$ ,  $n \geq 2$ ), то почти всюду на  $I_Y \times I_T$  существуют производные  $\partial_t^{l-1} \partial_y^{2m(n-l)-1} f$  ( $l = \overline{1, n-1}$ ), эквивалентные абсолютно непрерывным на  $I_Y \times I_T$  функциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 400 с.
2. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., Дуйн К., Пахтер Б. Однопараметрические уравнения. Абстрактные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Мир, 1992. 351 с.
3. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.

4. Иванов Д.Ю. Использование векторных потенциалов для решения двумерной задачи Робена, описывающей теплопроводность в прямом цилиндре // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 3. С. 8–14.
5. Иванов Д.Ю. Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цилиндрах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2014. № 9. С. 16–32.
6. Иванов Д.Ю. Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 4(22). С. 26–38.
7. Иванов Д.Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 33–45.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
9. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. Киев: Наукова думка, 1982. 210 с.
10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
11. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
12. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
13. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1979. 685 с.
14. Виленкин Н.Я., Горин Е.А., Костюченко А.Г., Красносельский М.А., Крейн С.Г. и др. Функциональный анализ. Серия: Справочная математическая библиотека / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1964. 425 с.
15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 5. М.: ГИФМЛ, 1959. 655 с.
16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.

Статья поступила 03.10.2016 г.

Ivanov D.Y. (2017) CLOSEDNESS OF SUMS OF UNBOUNDED OPERATORS ACTING ON DIFFERENT VARIABLES IN THE SPACES OF SQUARE-INTEGRABLE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 35–48

DOI 10.17223/19988621/45/3

Let  $\Omega'$  and  $\Omega''$  be some Lebesgue measurable sets in the metric spaces  $\mathbf{R}^m$  and  $\mathbf{R}^n$ , respectively, and  $A$  be a linear operator in the space  $L_2(\Omega')$ . We define an operator  $\tilde{A}$  in the space  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$  on the basis of equalities

$$(\tilde{A}f)(x'') = Af(x') \quad (f \in D(\tilde{A}), x'' \in \Omega''),$$

where  $D(\tilde{A})$  is the domain of the operator  $\tilde{A}$ . These equations mean that an element  $f \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$  represented by a function  $f(x')$  with values in  $D(A)$  belongs to the set  $D(\tilde{A})$  if there exists an element  $g \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$  represented by the function  $g(x'')$  such that the pointwise equalities  $g(x'') = Af(x')$  are satisfied almost everywhere in the Lebesgue measure on the set  $\Omega''$ . Then,  $\tilde{A}f = g$ . Similarly, using a linear operator  $B$  acting in the space  $L_2(\Omega'')$ , we define an operator  $\tilde{B}$  in the space  $L_2(\Omega' \times \Omega'')$ . It is proved that the sum of operators  $\tilde{A} + \tilde{B}$  defined on the set  $D(\tilde{A}) \cap D(\tilde{B})$  is closed if the operators  $A$  and  $B$  are generators of some  $C_0$ -

semigroups of contractions; here, the operator  $\mathbf{B}$  is selfadjoint and has a purely point spectrum. For example, if the operator  $\mathbf{A}_t$ ,  $(\mathbf{A}_t \mathbf{f})(t) = f'(t)$ , is defined on absolutely continuous functions  $f(t) \in L_2(I_T)$  ( $I_T \equiv [0, T]$ ) such that  $f'(t) \in L_2(I_T)$  and  $f(0) = 0$ , as well as on equivalent functions and operator  $\mathbf{B}_y$ ,  $(\mathbf{B}_y \mathbf{f})(y) = -f''(y)$ , is defined on absolutely continuously differentiable functions  $f(y) \in L_2(I_Y)$  ( $I_Y \equiv [0, Y]$ ) such that  $f''(y) \in L_2$  and  $f'(0) - \lambda_0 f(0) = 0$ ,  $f'(0) + \lambda_Y f(0) = 0$  ( $0 \leq \lambda_0, \lambda_Y \leq \infty$ ), as well as on equivalent functions, the sum of differential operators  $\tilde{\mathbf{A}}_t + \tilde{\mathbf{B}}_y$  is closed. The closure of the operator  $\tilde{\mathbf{A}}_t + \tilde{\mathbf{B}}_y$  is used as a coefficient in operator-differential equations in the formulation of problems of multidimensional non-stationary heat conduction. We have studied smoothness of functions included in the domains of powers of operators  $\tilde{\mathbf{A}}_t + \tilde{\mathbf{B}}_y$ . It is proved that if  $f(y, t) \in D\left(\left(\tilde{\mathbf{A}}_t + \tilde{\mathbf{B}}_y\right)^n\right)$  ( $n \geq 2$ ), then, almost everywhere on the set  $I_Y \times I_T$ , there exist derivatives  $\partial_t^{l-1} \partial_y^{2(n-l)-1} f$  ( $l = \overline{1, n-1}$ ) equivalent to functions absolutely continuous on  $I_Y \times I_T$ .

Keywords: closed linear operator, sum of operators, generator of  $C_0$ -semigroup, domain of definition of operator.

*IVANOV Dmitrii Yurievich* (Candidate of Physics and Mathematics,  
Moscow State Academy of Water Transport, Moscow, Russian Federation)  
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Reed M., Simon B. (1975) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 2. Fourier Analysis, Self-adjointness*. New York; London: Academic Press.
2. Clément Ph., Heijmans H.J.A.M., Angenent S., Duijn C.J. van and Pagter B. de (1987) *One-parameter Semigroups*. CWI Monographs 5. Amsterdam; New York: Noth Holland.
3. Ivanov D.Yu. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 8(46). pp. 1104–1113. DOI: 10.1134/S0012266110080045.
4. Ivanov D.Yu. (2016) Ispolzovanie vektornykh potentsialov dlya resheniya dvumernoy zadachi Robena, opisyivayushey teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Using of vector potentials for solving of the two-dimensional Robin problem describing the heat conductivity in a right cylinder]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk – Actual Problems of Humanitarian and Natural Sciences*. 3. pp. 8–14.
5. Ivanov D.Yu. (2014) Ehkonomichnyy metod vychisleniya operatorov, razreshayushchikh nekotorye zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh [An economical method of the calculation of operators resolving some heat conduction problems in straight cylinders]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk – Actual Problems of Humanitarian and Natural Sciences*. 9. pp. 16–32.
6. Ivanov D.Yu. (2014) Vychislenie operatorov, razreshayushchikh zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh, s ispol'zovaniem polugruppovoy simmetrii [Calculation of operators resolving problems of heat conduction in straight cylinders using the semigroup symmetry]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI – Proceedings of Moscow State Technical University MAMI*. 4(4). pp. 26–38.
7. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State*

- University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp. 33–45. DOI 10.17223/19988621/38/4.
8. Reed M., Simon B. (1972) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis*. New York; London: Academic Press.
  9. Lyantse V.E., Storozh O.G. (1983) *Metody teorii neogranichennykh operatorov* [Methods of the Theory of Unbounded Operators]. Kiev: Naukova Dumka.
  10. Reed M., Simon B. (1978) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Analysis of Operators*. New York; London: Academic Press.
  11. Kreyn S.G. (1967) *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banahovom prostranstve* [Linear Differential Equations in the Banach Space]. Moscow: Nauka.
  12. Kato T. (1966) *Perturbation theory for linear operators*. Berlin; New York: Springer Verlag.
  13. Budak B.M., Samarskiy A.A., Tikhonov A.N. (1979) *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike* [Collection of Problems in Mathematical Physics]. Moscow: Nauka.
  14. Vilenkin N.Ya., Gorin E.A., Kostyuchenko A.G., Krasnosel'skiy M.A., Kreyn S.G. et al. (1964) *Funktsionalnyy analiz* [Functional Analysis]. *Seriya: Spravochnaya matematicheskaya biblioteka* [Series: Reference mathematical library] (ed. Kreyn S.G.). Moscow: Nauka.
  15. Smirnov V.I. (1959) *Kurs vysshey matematiki* [A Course of Higher Mathematics]. Vol. 5. Moscow: St. Publ. Phys. Math. Lit.
  16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (1976) *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow: Nauka.

УДК 517.95  
DOI 10.17223/19988621/45/4

Р.К. Тагиев, Р.А. Касумов

## ОБ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассматривается оптимизационная постановка коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием. Исследованы вопросы корректности оптимизационной постановки обратной задачи. Доказана дифференцируемость целевого функционала и найдена формула для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

**Ключевые слова:** *оптимальное управление, параболическое уравнение, интегральное граничное условие, условие оптимальности.*

Обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть сведены к задачам оптимального управления соответствующими системами. Например, обратные задачи для уравнений тепломассообмена могут рассматриваться как задачи оптимального управления тепловыми режимами технических объектов. При этом управляющие воздействия обычно входят в коэффициенты уравнений тепломассообмена или граничные условия для них. Эти воздействия должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворить условия. Обычно эти критерия качества составляются на основе дополнительных информации и их называют функционалами невязки, или целевыми функционалами.

Одним из основных типов обратных задач для уравнений с частными производными являются задачи, в которых подлежат определению коэффициенты уравнений или величин, в них входящих, по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называются коэффициентными обратными задачами для уравнений с частными производными.

В работе А.Н.Тихонова [1] предложена идея использования методов теории оптимального управления для решения обратных задач. В работах [2–7] и др. обратные задачи об определении коэффициентов соответствующих уравнений с частными производными сводились к задачам оптимизации для этих уравнений с управлениями в коэффициентах, т.е. исследовались оптимизационные постановки коэффициентных обратных задач. Во многих этих работах дополнительные условия, по которым подлежат определению коэффициенты уравнений, являются локальными. Оптимизационные постановки коэффициентных обратных задач с дополнительными нелокальными условиями мало изучены.

В данной работе рассматривается оптимизационная постановка одной коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с целевым функционалом, соответствующим дополнительному интегральному условию. Исследованы вопросы корректности оптимизационной постановки обратной задачи. Доказана дифференцируемость по Фреше целевого функционала и найдено выражение для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

### 1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается в  $Q_T = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$  следующей начально-краевой задачей для линейного параболического уравнения

$$u_t - (k(x,t)u_x)_x + q(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

Здесь  $\ell, T > 0$  – заданные числа,  $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi(x) \in W_2^1(0, \ell)$  – заданные функции,  $k(x,t)$ ,  $q(x,t)$  – неизвестные коэффициенты,  $v(x,t) = (k(x,t), q(x,t))$  – управление,  $u = u(x,t) = u(x,t; v)$  – решение задачи (1) – (3) – состояние процесса, соответствующее управлению  $v = v(x,t)$ .

Введем множество допустимых управлений

$$V = \{v(x,t) = (k(x,t), q(x,t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < v \leq k(x,t) \leq \mu, \\ |k_x(x,t)| \leq \mu_1, |k_t(x,t)| \leq \mu_2, 0 \leq q_0 \leq q(x,t) \leq q_1 \text{ п.в. на } Q_T\}, \quad (4)$$

где  $\mu \geq v > 0$ ,  $\mu_1, \mu_2 > 0$ ,  $q_1 \geq q_0 \geq 0$  – заданные числа.

Поставим следующую коэффициентную обратную задачу типа оптимального управления: среди всех допустимых управлений  $v(x,t) = (k(x,t), q(x,t)) \in V$  найти управление  $v_*(x,t) = (k_*(x,t), q_*(x,t)) \in V$ , минимизирующее функционал

$$J(v) = \int_0^T \int_0^\ell K(x,t)u(x,t;v)dx - E(t) \Big| dt, \quad (5)$$

где  $K(x,t) \in L_\infty(Q_T)$ ,  $E(t) \in L_2(0, T)$  – заданные функции, причем  $|K(x,t)| \leq \mu_3$ , п.в. на  $Q_T$ ,  $\mu_3 = \text{const} > 0$ . Эту задачу ниже будем называть задачей (1) – (5).

Обозначения используемых в работе функциональных пространств соответствуют принятым в [8, с. 12–17]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаем через  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Под решением краевой задачи (1) – (3), при каждом фиксированном управлении  $v = v(x,t) \in V$ , будем понимать обобщенное решение из  $V_2^{1,0}(Q_T)$ , т.е. функцию  $u = u(x,t) = u(x,t; v) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ , удовлетворяющую для всех  $\eta = \eta(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T)$ ,  $\eta(x, T) = 0$  интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} [-u\eta_t + k(x,t)u_x\eta_x + q(x,t)u\eta] dxdt = \int_0^\ell \varphi(x)\eta(x,0)dx + \iint_{Q_T} f(x,t)\eta dxdt. \quad (6)$$

При сделанных предположениях краевая задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение  $u = u(x,t; v)$  из  $V_2^{1,0}(Q_T)$  при каждом фиксированном  $v = v(x,t) \in V$  и справедлива оценка [8, с. 181–189]

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \|u\|_{Q_T} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x,t; v)\|_{L_2(0, \ell)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)} \leq M_1 [\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{L_2(0, \ell)}]. \quad (7)$$

Более того, это решение принадлежит также пространству  $W_2^{2,1}(Q_T)$ , удовлетворяет уравнению (1) при почти всех  $(x, t) \in Q_T$  и справедлива оценка [8, с. 203–211]

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq M_1 \left[ \|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q)} \right]. \quad (8)$$

Используя оценки (8) теорем вложения [8, с.78; 9, с. 33] и рассуждая аналогично работе [10] можно показать, что для решения краевой задачи (1) – (3) справедлива также оценка

$$\|u\|_{L_\infty(Q_T)} + \|u_x\|_{L_6(Q_T)} \leq M_2 \left[ \|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} \right]. \quad (9)$$

Из оценки (7) следует, что функционал (5) определен на  $V$  и принимает конечные значения. Отметим, что функционал (5) нелинеен и исследование его выпуклости весьма сложно.

Задача (1) – (5) тесно связана с коэффициентной обратной задачей, заключающейся в определении функций  $\{u(x, t; v), k(x, t), q(x, t)\}$ , удовлетворяющих условиям (1) – (4) и дополнительному условию

$$\int_0^\ell K(x, t)u(x, t; v) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Функционал (5) является функционалом невязки в  $L_2(0, T)$  соответствующей условию (10). Если в задаче (1) – (5) окажется, что существует управление  $v_*(x, t) = (k_*(x, t), q_*(x, t)) \in V$ , такое, что  $J(v_*) = J_* \equiv \inf \{J(v) : v \in V\} = 0$ , то это управление решает обратную задачу (1) – (4).

Задача (1) – (5) является задачей оптимального управления для параболического уравнения с управлениями в коэффициентах. Такие задачи при других целевых функционалах исследованы в работах [10–12] и др.

## 2. Корректность постановки задачи

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия, принятые в п. 1. Тогда множество оптимальных управлений задачи (1) – (5)  $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_*\}$  не пусто, слабо компактно в  $H$  и любая минимизирующая последовательность  $\{v_n\} = \{(k_n(x, t), q_n(x, t))\} \subset V$  функционала (5) слабо в  $H$  сходится к множеству  $V_*$ .

**Доказательство.** Множество  $V$ , определяемое равенством (4), выпукло, замкнуто и ограничено в рефлексивном банаховом пространстве  $H$ , и поэтому оно слабо компактно в  $H$  [13, с. 49]. Покажем, что функционал (5) слабо в  $H$  непрерывен на множестве  $V$ . Пусть  $v(x, t) = (k(x, t), q(x, t)) \in V$  – некоторый элемент,  $\{v_n(x, t)\} = \{(k_n(x, t), q_n(x, t))\} \subset V$  – произвольная последовательность, такая, что  $v_n \rightarrow v$  слабо в  $H$ , т.е.

$$k_n(x, t) \rightarrow k(x, t) \text{ слабо в } W_2^1(Q_T); \quad (11)$$

$$q_n(x, t) \rightarrow q(x, t) \text{ слабо в } L_2(Q_T). \quad (12)$$

Из (10) и компактности вложения  $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_{r_2}(Q_T)$  [8, с. 75] следует, что

$$k_n(x, t) \rightarrow k(x, t) \text{ сильно в } L_{r_1}(Q_T), \quad (13)$$

где  $r_1 \geq 2$  – произвольное конечное число.

Кроме того, в силу однозначной разрешимости краевой задачи (1) – (3), каждому управлению  $v_n \in V$  соответствует единственное решение  $u_n = u(x, t; v_n)$  из  $W_2^{2,1}(Q_T)$  задачи (1) – (3) и справедлива оценка

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq M_3 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

т.е. последовательность  $\{u_n\}$  равномерно ограничена в пространстве  $W_2^{2,1}(Q_T)$ .

Тогда из (13) и компактности вложения  $W_2^{2,1}(Q_T) \rightarrow L_{r_2}(Q_T)$  [9, с. 33] следует, что из последовательности  $\{u_n\}$  можно извлечь подпоследовательность  $\{u_{n_m}\}$ , такую, что

$$u_{n_m}(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_{r_2}(Q_T), \quad (15)$$

где  $r_2 \geq 2$  – произвольное конечное число,  $u(x, t)$  – некоторый элемент  $W_2^{2,1}(Q_T)$ .

Покажем, что  $u(x, t) = u(x, t; v)$ ,  $(x, t) \in Q_T$ , т.е.  $u(x, t)$  является решением задачи (1) – (3), соответствующим управлению  $v \in V$ . Ясно, что справедливы тождества

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} [-u_{n_m} \eta_t + k_{n_m}(x, t) u_{n_m x} \eta_x + q_{n_m}(x, t) u \eta] dx dt = \\ & = \int_0^\ell \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \iint_{Q_T} f(x, t) \eta dx dt, \quad (16) \\ & \forall \eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T), \quad \eta(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Используя соотношения (13) – (15) и неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{Q_T} k_{n_m}(x, t) u_{n_m x} \eta_x dx dt - \iint_{Q_T} k(x, t) u_x \eta_x dx dt \right| \leq \left| \iint_{Q_T} k(x, t) [u_{n_m x} - u_x] \eta_x dx dt \right| + \\ & + \left| \iint_{Q_T} [k_{n_m}(x, t) - k(x, t)] K_{n_m x} \eta_x dx dt \right| \leq \left| \iint_{Q_T} k(x, t) [u_{n_m x} - u_x] \eta_x dx dt \right| + \\ & \|k_{n_m} - k\|_{L_3(Q_T)} \|u_{n_m}\|_{L_6(Q_T)} \|\eta\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0, \quad (17) \end{aligned}$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Кроме того, используя соотношения (12), (15), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{Q_T} q_{n_m}(x, t) u_{n_m} \eta dx dt - \iint_{Q_T} q(x, t) u \eta dx dt \right| \leq \left| \iint_{Q_T} q_{n_m}(x, t) [u_{n_m} - u] \eta dx dt \right| + \\ & + \left| \iint_{Q_T} [q_{n_m}(x, t) - q(x, t)] u \eta dx dt \right| \leq q_1 \|u_{n_m} - u\|_{L_2(Q_T)} \|\eta\|_{L_2(Q_T)} + \\ & + \left| \iint_{Q_T} [q_{n_m}(x, t) - q(x, t)] u \eta dx dt \right| \rightarrow 0, \quad (18) \end{aligned}$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Тогда, переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$  в равенстве (16) и учитывая соотношения (15), (17), (18), получаем, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет тождеству (6). Отсюда и из включения  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$  следует, что  $u(x, t) = u(x, t; v)$  т.е. функция  $u(x, t)$  является решением задачи (1) – (3), соответствующим управлению  $v \in V$ .

Используя единственность решения задачи (1) – (3), соответствующего управлению  $v \in V$ , нетрудно показать, что соотношение (15) справедливо с функцией  $u(x, t) = u(x, t; v)$  не только для подпоследовательности  $\{u_n\}$ , но и для всей последовательности  $\{u\}$ , т.е.

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= u_n(x, t; v) \rightarrow u(x, t) = u(x, t; v) \\ &\text{слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_r(Q_T). \end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим теперь функционал цели  $J(v)$ , определенный формулой (5). Используя (5), нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} &|J(v_n) - J(v)| = \\ &= \left\| \int_0^\ell K(x, t) u_n(x, t) dx - E(t) \right\|_{L_2(0, T)}^2 - \left\| \int_0^\ell K(x, t) u(x, t) dx - E(t) \right\|_{L_2(0, T)}^2 \leq \\ &\leq \left\| \int_0^\ell K(x, t) [u_n(x, t) - u(x, t)] dx \right\|_{L_2(0, T)} \left[ \left\| \int_0^\ell K(x, t) u_n(x, t) dx - E(t) \right\|_{L_2(0, T)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \int_0^\ell K(x, t) u(x, t) dx - E(t) \right\|_{L_2(0, T)} \right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Используя неравенство Коши – Буняковского и условие  $|K(x, t)| \leq \mu_3$  п.в. на  $Q_T$ , имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^\ell K(x, t) [u_n(x, t) - u(x, t)] dx \right\|_{L_2(0, T)} = \left\{ \int_0^T \left| \int_0^\ell K(x, t) [u_n(x, t) - u(x, t)] dx \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^T \left( \int_0^\ell K^2(x, t) dx \right) \left( \int_0^\ell |u_n(x, t) - u(x, t)|^2 dx \right) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \mu_3 \|u_n - u\|_{L_2(Q_T)}; \\ &\left\| \int_0^\ell K(x, t) u_n(x, t) dx - E(t) \right\|_{L_2(0, T)} = \left\{ \int_0^T \left| \int_0^\ell K(x, t) u_n(x, t) dx - E(t) \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \left\{ \int_0^T \left[ \int_0^\ell K^2(x, t) dx \int_0^\ell u_n^2(x, t) dx + E^2(t) \right] dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} [\mu_3 \|u_n\|_{L_2(Q_T)} + \|E\|_{L_2(0, T)}]; \\ &\left\| \int_0^\ell K(x, t) u(x, t) dx - E(t) \right\|_{L_2(0, T)} \leq \sqrt{2} [\mu_3 \|u\|_{L_2(0, T)} + \|E\|_{L_2(0, T)}]. \end{aligned}$$

Учитывая эти неравенства в (20), получаем оценку

$$|J(v_n) - J(v)| \leq \sqrt{2}\mu_3 \|u_n - u\|_{L_2(Q_T)} \left[ \mu_3 (\|u_n\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{L_2(Q_T)}) + 2\|E\|_{L_2(0,T)} \right].$$

Тогда, используя оценку (14) и соотношение (19) получаем, что  $J(v_n) \rightarrow J(v)$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. целевой функционал (5) непрерывен на  $V$  в слабой топологии пространства  $H$ . Кроме того, множество  $V$  является выпуклым замкнутым ограниченным множеством в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда применяя результат из [13, с. 49] получаем, что задача (1) – (5) корректно поставлена в слабой топологии пространства  $H$ , т.е. справедливы все утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

### 3. Дифференцируемость целевого функционала и необходимое условие оптимальности

Для задачи (1) – (5) введем сопряженное состояние  $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; v)$  как решение задачи

$$\begin{aligned} & \psi_t + (k(x, t)\psi_x)_x - q(x, t)\psi = \\ & = -2K(x, t) \left[ \int_0^\ell K(\xi, t)u(\xi, t; v) d\xi - E(t) \right], (x, t) \in Q_T; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (22)$$

$$\psi_x|_{x=0} = \psi_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (23)$$

Под решением краевой задачи (21) – (23), соответствующим управлению  $v \in V$ , будем понимать функцию  $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; v)$  из  $V_2^{1,0}(Q_T)$ , удовлетворяющую для всех  $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ ,  $\eta(x, 0) = 0$  интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} [\psi\eta_t + k(x, t)\psi_x\eta_x + q(x, t)\psi\eta] dxdt = \\ & = 2 \iint_{Q_T} K(x, t) \left[ \int_0^\ell K(\xi, t)u(\xi, t; v) dx - E(t) \right] \eta dxdt. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя очевидное неравенство  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} K^2(x, t) \left[ \int_0^\ell K(\xi, t)u(\xi, t; v) d\xi - E(t) \right]^2 dxdt \leq \\ & \leq 2 \left\{ \iint_{Q_T} \left[ K^2(x, t) \int_0^\ell K^2(\xi, t) d\xi \int_0^\ell u^2(\xi, t; v) d\xi \right] dxdt + \iint_{Q_T} K^2(x, t) E^2(t) dxdt \right\} \leq \\ & \leq 2\ell^2 \mu_3^4 \|u\|_{L_2(Q_T)}^2 + 2\mu_3^2 \ell \|E\|_{L_2(0,T)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что правая часть уравнения (21) является элементом пространства  $L_2(Q_T)$ . Тогда из результатов работы [8, с. 181-189] следует, что для

каждого заданного  $v \in V$  задача (21) – (23) имеет единственное решение из  $V_2^{1,0}(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\|\Psi\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_4 \left[ \|u\|_{L_2(Q_T)} + \|E\|_{L_2(0,T)} \right].$$

Учитывая здесь оценки (7), получаем

$$\|\Psi\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_5 \left[ \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\phi\|_{L_2(0,\ell)} + \|E\|_{L_2(0,T)} \right] \quad (25)$$

Кроме того, решение задачи (21) – (23) принадлежит также пространству  $W_2^{2,1}(Q_T)$ , удовлетворяет уравнению (21) при почти всех  $(x, t) \in Q_T$  и справедлива оценка [8, с. 203–211]

$$\|\Psi\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq M_6 \left[ \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\phi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|E\|_{L_2(0,T)} \right].$$

Используя эту оценку, теорему вложения [8, с. 78; 9, с. 33] и рассуждая аналогично работе [10] получаем оценку

$$\|\Psi\|_{L_\infty(Q_T)} + \|\Psi_x\|_{L_6(Q_T)} \leq M_7 \left[ \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\phi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|E\|_{L_2(0,T)} \right]. \quad (26)$$

Введем еще одну вспомогательную краевую задачу для определения функции  $\omega = \omega(x, t) = \omega(x, t; v)$  из условий:

$$-\omega_{xx} - \omega_{tt} + \omega = u_x \Psi_x, \quad (x, t) \in Q_T; \quad (27)$$

$$\omega_x|_{x=0} = \omega_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < x < \ell; \quad (28)$$

$$\omega_t|_{t=0} = \omega_t|_{t=T} = 0, \quad 0 < t < T. \quad (29)$$

Под решением краевой задачи (27) – (29), при заданном  $v \in V$ , будем понимать функцию  $\omega = \omega(x, t) = \omega(x, t; v)$  из  $W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} (\omega_x \eta_x + \omega_t \eta_t + \omega \eta) dx dt = \iint_{Q_T} u_x \Psi_x \eta dx dt, \quad (30)$$

при любой функции  $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ .

Из вложений  $u_x \in L_6(Q_T)$ ,  $\Psi_x \in L_6(Q_T)$  следует, что  $u_x \Psi_x \in L_3(Q_T)$ . Тогда из результатов работы [14, с. 200] следует, что краевая задача (27) – (29), при заданном  $v \in V$ , имеет единственное обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\|\omega\|_{W_2^1(Q_T)} \leq M_8 \|u_x \Psi_x\|_{L_{3/2}(Q_T)} \leq M_8 \|u_x\|_{L_6(Q_T)} \|\Psi_x\|_{L_2(Q_T)}.$$

Учитывая здесь оценки (8) и (26), получаем оценку

$$\|\omega\|_{W_2^1(Q_T)} \leq M_9 \left[ \|\phi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} \right] \left[ \|\phi\|_{L_2(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|E\|_{L_2(0,T)} \right]. \quad (31)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функционал (5) непрерывно дифференцируем на  $V$  в норме пространства  $H$  и его градиент в точке  $v \in V$  определяется равенством

$$J'(v) = (\omega(x, t; v), u(x, t; v) \Psi(x, t; v)), \quad (x, t) \in Q_T. \quad (32)$$

**Доказательство.** Пусть  $v \in V$  – некоторое управление,  $\Delta v = (\Delta K, \Delta q) \in H$  – произвольное приращение управления  $v$ , такое, что  $v + \Delta v \in V$ . Пусть  $\Delta u(x, t) = u(x, t; v + \Delta v) - u(x, t; v)$ ,  $u(x, t) = u(x, t; v)$ . Из условий (1) – (3) следует, что  $\Delta u$  является решением краевой задачи

$$\Delta u_t - ((k + \Delta k) \Delta u_x)_x + (q + \Delta q) \Delta u = (\Delta k u_x)_x - \Delta q u, \quad (x, t) \in Q_T; \quad (33)$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (34)$$

$$\Delta u_x|_{x=0} = \Delta u_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (35)$$

Можно показать, что для решения задачи (34) – (35) справедлива оценка [8, с. 181–189]:

$$\|\Delta u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_{10} \left[ \|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} + \|\Delta q u\|_{L_2(Q_T)} \right]. \quad (36)$$

Используя ограниченность вложений

$$W_2^1(Q_T) \rightarrow L_4(Q_T), \quad W_2^{2,1}(Q_T) \rightarrow L_\infty(Q_T)$$

и оценки (8), получаем следующие неравенства:

$$\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} \leq \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} \|u_x\|_{L_4(Q_T)} \leq M_{11} \|\Delta k\|_{W_2^1(Q_T)},$$

$$\|\Delta q u\|_{L_2(Q_T)} \leq \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \|u\|_{L_\infty(Q_T)} \leq M_{12} \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)}.$$

Учитывая эти неравенства в (36), получаем оценку

$$\|\Delta u\|_{W_2^1(Q_T)} \leq M_{11} \|\Delta v\|_H. \quad (37)$$

Приращение функционала (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta J(v) &= J(v + \Delta v) - J(v) = \\ &= 2 \int_0^T \left\{ \int_0^\ell K(\xi, t) u(\xi, t; v) d\xi - E(t) \int_0^\ell K(x, t) \Delta u(x, t) dx \right\} dt + \\ &\quad + \int_0^T \left| \int_0^\ell K(x, t) \Delta K(x, t) dx \right|^2 dt. \end{aligned} \quad (38)$$

С помощью решений краевых задач (21) – (23), (27) – (29) и (33) – (35) преобразуем приращение (38). Для решения краевой задачи (33) – (35) справедливо

$$\iint_{Q_T} [\Delta u_t \psi + (k + \Delta k) \Delta u_x \psi_x + (q + \Delta q) \Delta u \psi] dx dt = - \iint_{Q_T} (\Delta k u_x \psi_x + \Delta q u \psi) dx dt \quad (39)$$

Если в тождестве (24) положим  $\eta = \Delta u$  и полученное равенство вычтем из (39), то получим

$$\begin{aligned} &2 \int_0^T \left\{ \int_0^\ell K(\xi, t) u(\xi, t; v) d\xi - E(t) \int_0^\ell K(x, t) \Delta u(x, t) dx \right\} dt = \\ &= \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k - \Delta u_x \psi_x \Delta k + u \psi \Delta q - \Delta u \psi \Delta q) dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство в (38), имеем

$$\Delta J(v) = \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + u \psi \Delta q) dx dt + R, \quad (40)$$

$$\text{где } R = \int_0^t \left| \int_0^\ell K(x, t) \Delta u(x, t) dx \right|^2 dt - \iint_{Q_T} (\Delta u_x \psi_x \Delta k + \Delta u \psi \Delta q) dx dt. \quad (41)$$

Полагая в тождестве (30)  $\eta = \Delta k$  и учитывая полученное равенство в (40), имеем

$$\Delta J(v) = \iint_{Q_T} (\omega \Delta k + \omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + u \psi \Delta q) dx dt + R. \quad (42)$$

Используя теоремы вложения, можно показать [10], что первое слагаемое в правой части (42) при заданном  $v \in V$  определяет линейный ограниченный функционал от  $\Delta v \in H$ .

Теперь проведем оценку остаточного члена  $R$ , определяемого равенством (41). Используя неравенства Коши – Буняковского и Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} |R| \leq & \int_0^T \left( \int_0^\ell K^2(x, t) dx \right) \left( \int_0^\ell \Delta u^2(x, t) dx \right) dt + \|\Delta u_x\|_{L_2(Q_T)} \|\psi_x\|_{L_4(Q_T)} \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} + \\ & + \|\Delta u\|_{L_2(Q_T)} \|\psi\|_{L_\infty(Q_T)} \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \leq \mu_3^2 \|\Delta u\|_{L_2(Q_T)} + M_{12} \|\Delta u_x\|_{L_2(Q_T)} \|\psi_x\|_{L_4(Q_T)} \|\Delta k\|_{W_2^1(Q_T)} + \\ & + \|\Delta u\|_{L_2(Q_T)} \|\psi\|_{L_\infty(Q_T)} \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \leq M_{13} \|\Delta v\|_H^2. \end{aligned}$$

Учитывая в (42) эту оценку, заключаем, что функционал (1) дифференцируем по Фреше на  $V$  и справедлива формула (32). Непрерывность отображения  $v \rightarrow J'(v)$  доказывается как в работе [10]. Теорема 2 доказана.

Необходимое условие оптимальности в задаче (1) – (5) устанавливает

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для оптимальности управления  $v_* = (k_*, q_*) \in V$  в задаче (1) – (5) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\iint_{Q_T} [\omega_*(k - k_*) + \omega_{*x}(k_x - k_{*x}) + \omega_{*t}(k_t - k_{*t}) + u_* \psi_*(q - q_*)] dx dt \geq 0 \quad (43)$$

для любого  $v = (k, q) \in V$ , где  $u_* = u(x, t; v_*)$ ,  $\psi_* = \psi(x, t; v_*)$ ,  $\omega_* = \omega(x, t; v_*)$  – решения задач (1) – (3), (21) – (23), (27) – (29) соответственно при  $v = v_*$ .

**Доказательство.** Множество  $V$ , определяемое равенством (4), выпукло в  $H$ . Кроме того, согласно теореме 2, функционал (1) непрерывно дифференцируем на  $V$ . Тогда в силу теоремы 5 из [13, с. 28] на элементе  $v_* \in V_*$  необходимо выполнение неравенства  $\langle J'(v_*), v - v_* \rangle \geq 0$  при всех  $v \in V$ . Отсюда и из (32) следует справедливость неравенства (42). Теорема 3 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
2. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1984. 112 с.
3. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР. 1984. Т. 274. № 3. С. 531–533.
4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
5. Karchevsky A.L. Properties the misfit functional for a nonlinear one-dimensional coefficient hyperbolic inverse problem // J. Inverse III-Posed. Probl. 1997. V. 5. No. 2. P. 139–165. DOI: <https://doi.org/10.1515/jip.1997.5.2.139>.

6. Кабанихин С.И., Исаков К.Т. Обоснование метода наискорейшего спуска в интегральной постановке обратной задачи гиперболического уравнения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 567–584.
7. Кабанихин С.И., Даирбаева Г. Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности // Международная конференция «Обратные некорректные задачи математической физики», посвященная 75-летию академика М.М. Лаврентьева, 20–25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия. С. 1–5.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
9. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М., 1987. 368 с.
10. Тагиев Р.К. Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1492–1501.
11. Тагиев Р.К. Оптимальное управление коэффициентами квазилинейного параболического уравнения // Автоматика и телемеханика. 2009. № 11. С. 55–69.
12. Тагиев Р.К. Задача оптимального управления для квазилинейного параболического уравнения с управлениями в коэффициентах и с фазовыми ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 380–392.
13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
14. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973, 576 с.

Статья поступила 07.09.2016 г.

Tagiev R.K., Kasumov R.A. (2017) ON THE OPTIMIZATION FORMULATION OF THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH AN ADDITIONAL INTEGRAL CONDITION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 49–59

DOI 10.17223/19988621/45/4

Let a controlled process be described in  $Q_T = \{(x, t) \in R^2 : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$  by the following initial-boundary value problem for a linear parabolic equation:

$$\begin{aligned} u_t - (k(x, t)u_x)_x + q(x, t)u &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\ell} &= 0, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Here  $\ell, T > 0$  are given numbers  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi(x) \in W_2^1(0, \ell)$  are given functions,  $k(x, t)$ ,  $q(x, t)$  are unknown coefficients,  $v(x, t) = (k(x, t), q(x, t))$  is a control,  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$  is the solution to the boundary value problem corresponding to the control  $u = u(x, t)$ .

Let us introduce a set of admissible controls

$$\begin{aligned} V = \{v(x, t) = (k(x, t), q(x, t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < v \leq k(x, t) \leq \mu, \\ |k_x(x, t)| \leq \mu_1, |k_t(x, t)| \leq \mu_2, 0 \leq q_0 \leq q(x, t) \leq q_1 \text{ п. в. на } Q_T\}, \end{aligned}$$

where  $\mu \geq v > 0$ ,  $\mu_1, \mu_2 > 0$ ,  $q_1 \geq q_0 \geq 0$  are given numbers.

Let us state the following coefficient inverse problem of optimal control type: among all the admissible controls  $v(x, t) = (k(x, t), q(x, t)) \in V$ , find the controls  $v_*(x, t) = (k_*(x, t), q_*(x, t)) \in V$  minimizing the functional

$$J(v) = \int_0^T \int_0^\ell |K(x, t)u(x, t; v) - E(t)|^2 dx dt$$

where  $K(x, t)$ ,  $E(t)$ ,  $f(x, t)$  are known functions,  $v = v(t)$  is a control  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$  is

a generalized solution to the boundary value problem from  $V_2^{1,0}(Q_T)$  corresponding to the control  $v = v(t)$ ,  $V \subseteq L_2(0, T)$  is a given set.

In the present work, the optimization formulation of the coefficient inverse problem for a parabolic equation with an additional integral condition is considered. The questions of correctness of the optimization formulation of the inverse problem are investigated. The differentiability of the objective functional is proved and the formula for its gradient is found. A necessary condition of optimality is found in the form of a variational inequality.

Keywords: optimal control, parabolic equation, integral boundary condition, optimality condition

*TAGIEV Rafiq Kalandar* (Dr. Math. Sciences, prof. Baku State University, Azerbaijan)

E-mail: r.tagiyev@list.ru

*KASUMOV Atakhan Rashid ogliv* (Senior Lecturer, Lankaran State University, Azerbaijan)

E-mail: rasid5757@mail.ru

#### REFERENCES

1. Tikhonov A.N. (1963) O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarsizatsii [On the solution of ill-posed problems and regularization method]. *Dokl. USSR Academy of Sciences*. 151(3). pp. 501–504.
2. Glasko V.B. (1984) *Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow: MSU Publ.
3. Iskenderov A.D. (1984) O variatsionnykh postanovkakh mnogomernykh obratnykh zadach matematicheskoy fiziki [On the variational formulations of multidimensional inverse problems of mathematical physics]. *Dokl. USSR Academy of Sciences*. 274 (3). pp. 531–533.
4. Alifanov O.M., Artyuhin E.A., Rumyantsev S.V. (1988) *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka.
5. Karchevsky A.L. (1997) Properties of the misfit functional for a nonlinear one-dimensional coefficient hyperbolic inverse problem. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 5(2). pp. 139–165. DOI: <https://doi.org/10.1515/jiip.1997.5.2.139>
6. Kabanikhin S.I., Isakov K.T. (2001) Justification of the Steepest Descent Method for the Integral Statement of an Inverse Problem for a Hyperbolic Equation. *Sib. Mat. Zh.* 42(3). pp. 478–494. DOI: 10.1023/A:1010471125870.
7. Kabanikhin S.I., Dairbaeva G. (2007) Obratnaya zadacha nakhozheniya koeffitsienta uravneniya teploprovodnosti [The inverse problem of finding a coefficient of the heat equation]. *Proc. International Conference «Inverse ill-posed problems of mathematical physics» devoted to the 75th anniversary of academician M.M. Lavrentev*, Novosibirsk, Russia. pp. 1–5.
8. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. (1967) *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of the parabolic type]. Moscow: Nauka.
9. Lions J.L. (1985) *Control of Distributed Singular Systems*. Paris: Gauthier-Villars.
10. Tagiyev R.K. (2009) Optimal control of coefficients in parabolic systems. *Diff. equation*. 45(10). pp. 1492–1501. DOI: 10.1134/S0012266109100164.
11. Tagiyev R.K. (2009) Optimal control of coefficients of a quasilinear parabolic equation. *Automation and Remote Control*. 70(11). DOI: 10.1134/S0005117909110058.
12. Tagiyev R.K. (2013) An optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and phase constraints. *Diff. equation*. 49(3). pp. 369–381. DOI: 10.1134/S0012266113030129.
13. Vasilyev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
14. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. (1973) *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of the elliptic type]. Moscow: Nauka.

## МЕХАНИКА

УДК 629.76  
DOI 10.17223/19988621/45/5

**А.В. Азин, С.В. Пономарев, С.В. Рикконен, А.М. Храмцов**

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ПЬЕЗОАКТЮАТОРА<sup>1</sup>

Проведены экспериментальные исследования режимов работы пьезоактюаторов. Получены экспериментальные частотные характеристики колебательных систем с разным типом нагрузки. Исследованы зависимости силы на нагрузке колебательной системы от силы предварительного поджатия пьезоактюатора.

**Ключевые слова:** *пьезоактюатор, космический аппарат, колебательная система, динамическая сила.*

В космической отрасли наиболее остро стоит вопрос уменьшения массогабаритных характеристик систем космического аппарата (КА). Одним из решений является замена электромеханических приводов различных устройств КА на пьезоп приводы, при этом массогабаритные показатели соответствующих устройств уменьшается в разы.

По сравнению с электромеханическими приводами микролинейные пьезоп приводы (МЛП) имеют существенные преимущества. Однако при эксплуатации МЛП необходимо учитывать ряд особенностей, затрагивающие электрофизические и механические свойства пьезоактюатора (ПА) [1,2]. К механическим особенностям относится обязательное требование предварительного поджатия ПА. Сила предварительного поджатия по механической прочности строго регламентируется в зависимости от материала пьезокерамики.

Целью работы являются экспериментальные исследования влияния силы предварительного поджатия на режимы работы ПА в динамическом режиме.

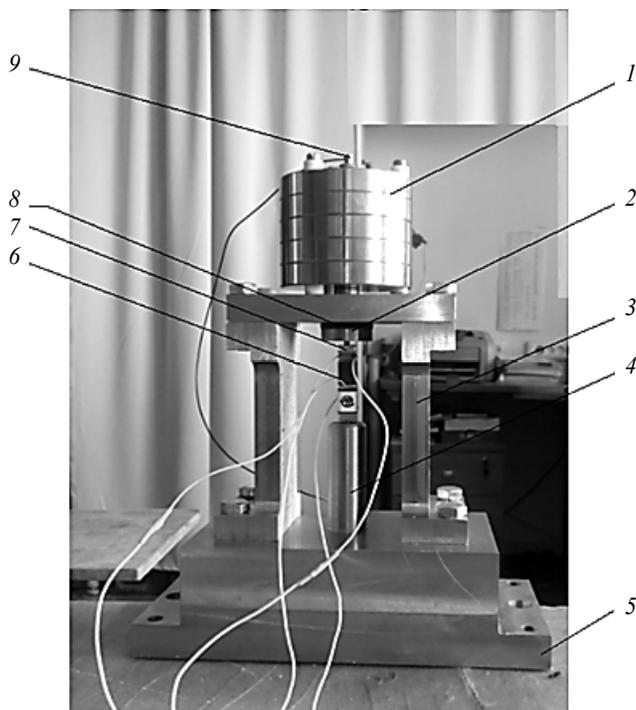
#### **Исследование влияния силы предварительного поджатия на экспериментальном стенде с инерционной нагрузкой**

Проектирование МЛП и испытательного стенда проводилось с ориентацией на следующие параметры: сила  $F_{\text{нат}} - 300$  Н, масса – 250 г, масса нагрузки – 40 кг, перемещение толкателя с шагом  $X_{\text{нат}}$  от 10 нм до 15 мкм. Колебательная система рассчитывалась на трехмерных и одномерных математических моделях.

Испытательный стенд предназначен для исследования динамических режимов работы ПА при инерционной нагрузке (рис. 1). Возмущающая сила КС представ-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, уникальный идентификатор RFMEFI57814X0060.

ляет собой гармонический сигнал. Режимы работы ПА зависят от следующих параметров колебательной системы (КС): типа и мощности ПА; массы пригруза (нагрузки); силы предварительного поджатия ПА; напряжения на ПА; тока ПА; частоты воздействия [3–5].



**Рис. 1.** Испытательный стенд работы ПА на инерционную нагрузку: 1 – инерционная масса нагрузки (пригруз); 2 – толкатель; 3 – опоры; 4 – регулировочный винт предварительного поджатия; 5 – станина; 6 – пьезоактюатор АПМ-2-7; 7 – датчик силы; 8 – упругость; 9 – акселерометр AP 1019

**Fig. 1.** Test stand is an operating PZT stack actuator at the inertial load: 1, inertial mass of the load cantledge; 2, pushrod; 3, support structures; 4, adjusting screw of the preload; 5, frame; 6, АРМ-2-7 PZT stack actuator; 7, force sensor; 8, elasticity; 9, AR 1019 accelerometer

В процессе испытаний ПА снимаются параметры режима работы в виде электрических сигналов: напряжение; ток; сигнал с датчика силы ПА; виброускорение пригруза. В процессе подготовки испытаний определяется сила предварительного поджатия. На рис. 2 показана схема эксперимента.

В результате испытаний ПА получены следующие данные:

- частотные характеристики ускорения пригруза;
- частотные характеристики вибросмещения пригруза;
- частотные характеристики силы на нагрузке.



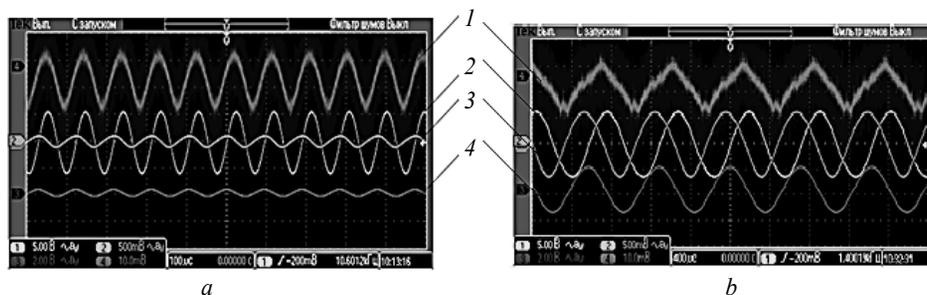
**Рис. 2.** Схема эксперимента по изучению влияния предварительного поджатия ПА при инерционной нагрузке:  $M_H$  – масса пригруза;  $K_{сог}$  – жесткость согласующего элемента конструкции;  $M_{тол}$  – масса толкателя;  $Z_{сог}$  – механический импеданс согласующих элементов;  $U_{дат}$  – сигнал с пьезодатчика силы;  $F_0$  – сила предварительного поджатия;  $F_3$  – эквивалентная сила

**Fig. 2.** Scheme of the experiment for studying the influence of preload PZT stack actuator operating at the inertial load: cantledge mass,  $M_H$ ; rigidity of the matching structural element,  $K_m$ ; pushrod mass,  $M_p$ ; mechanical impedance of the matching elements,  $Z_m$ ; signal from the force piezo sensor,  $U_s$ ; preload force,  $F_0$ ; equivalent force,  $F_e$

На рис. 3 представлены экспериментальные данные, получаемые с осциллографа. В результате анализа полученных частотных характеристик определены рабочие резонансные частоты КС и амплитуды вибросмещения.

Экспериментальные исследования показали, что испытательный стенд спроектирован как КС с чисто инерционной нагрузкой, но режимы работы КС качественно схожи с режимами смешанной нагрузки (рис. 4 и 5). Резонансные частоты КС уменьшаются с увеличением инерционной массы (характерно для инерционной нагрузки), а увеличение амплитуды вибросмещения с увеличением инерци-

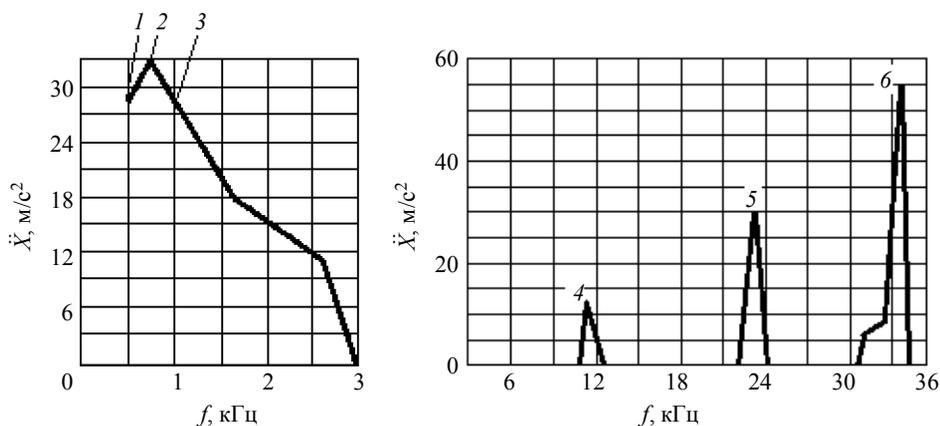
онной нагрузки показывает, что в КС присутствует упругая составляющая – упругость предварительного поджатия, упругость опор стэнда, упругость ПА, что характерно для смешанной нагрузки.



**Рис. 3.** Расположение сигналов с датчиков колебательной системы на экране электронного осциллографа: *a* – частота 10 кГц; *b* – частота 1 кГц; 1 – сигнал ускорения; 2 – ток ПА, 3 – сила ПА, 4 – напряжение на ПА

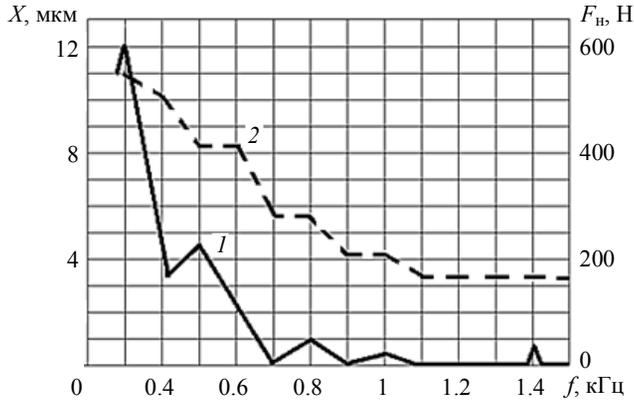
**Fig. 3.** Arrangement of signals distribution from the oscillating system transducers in the screen of an electron oscilloscope at a frequency of (a) 10 and (b) 1 kHz. 1, acceleration signal; 2, PZT stack actuator current; 3, PZT stack actuator force; 4, PZT stack actuator voltage

В КС без предварительного поджатия частотные характеристики имеют несколько резонансов (на рис. 4 резонансы отмечены цифрами), ПА резонирует на разных частотах. Максимальные значения вибросмещения ПА при силе тока  $I = 0.5$  А и весе пригруза  $G_{пр} = 0.5$  кг наблюдаются на рабочем резонансе при частотах  $f \leq 1$  кГц.



**Рис. 4.** Частотная характеристика вибросмещения ПА, работающего на инерционную нагрузку без предварительного поджатия  
**Fig. 4.** Frequency-response characteristics of the vibration displacement of the PZT stack actuator operating at the inertial load without preload

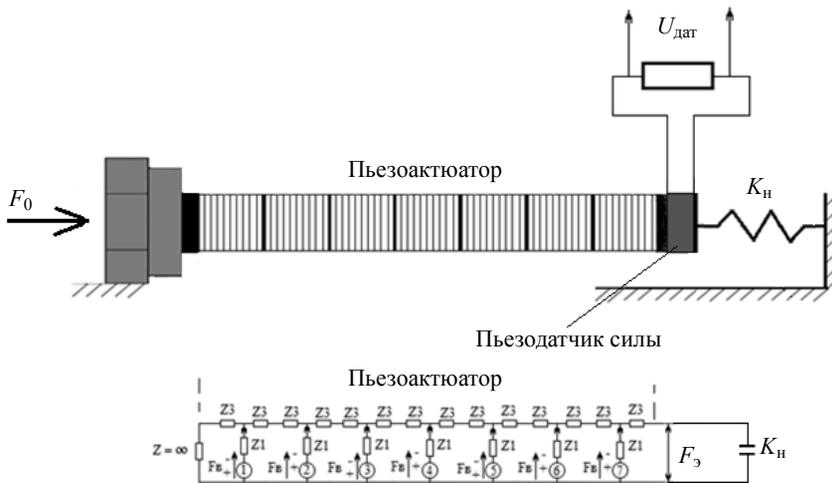
В КС с предварительным поджатием система имеет один явно выраженный рабочий резонанс при частотах  $f \leq 1$  кГц. Резонансы на больших частотах существенно сглажены (рис. 5).



**Рис. 5.** Экспериментальная частотная характеристика вибросмещения нагрузки (кр. 1) и силы на нагрузку (кр. 2) при работе ПА при силе тока  $I = 0.5$  А, весе пригруза  $G_{пр} = 3$  кг и предварительном поджатии  $F_0 = 240$  Н  
**Fig. 5.** Experimental frequency-response characteristics of the vibration displacement of the (1) load and (2) force on the load, while operating PZT stack actuator at the current strength  $I = 0.5$  A, cantledge weight  $G_c = 3$  kg, and preload  $F_0 = 240$  N

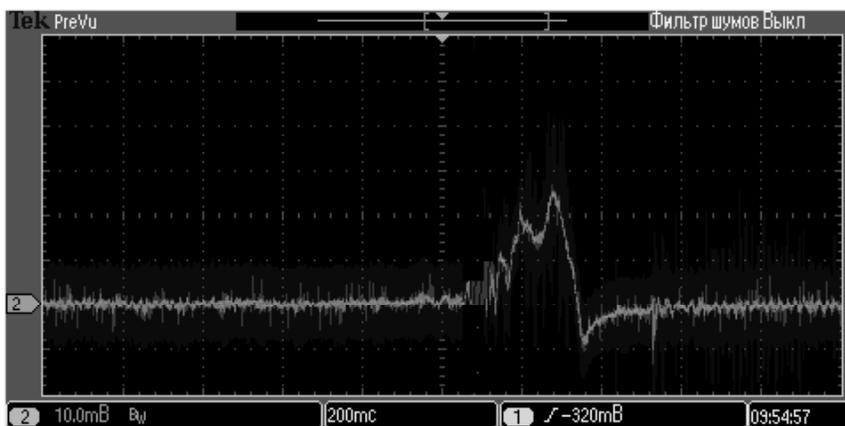
### Исследование влияния силы предварительного поджатия на экспериментальном стенде с упругой нагрузкой

ПА с пьезодатчиком силы через упругий элемент с известной жесткостью зажат в трубицу с возможностью регулирования предварительного поджатия системы. На рис. 6 представлена схема проведения эксперимента.



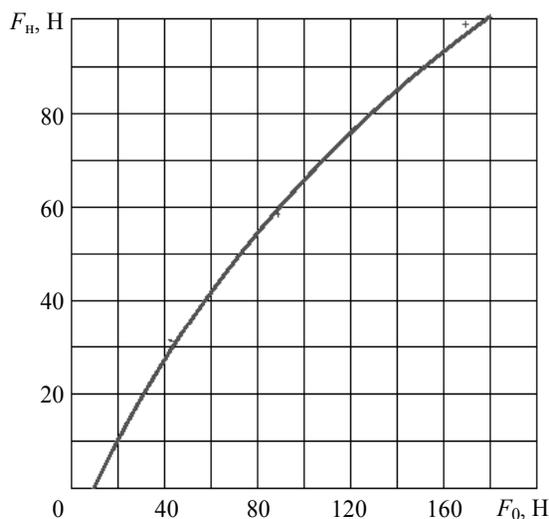
**Рис. 6.** Схема эксперимента по изучению влияния предварительного поджатия в режиме упругой нагрузки:  $K_n$  – жесткость упругого элемента;  $F_0$  – сила предварительного поджатия;  $U_{дат}$  – сигнал с пьезодатчика силы;  $F_э$  – эквивалентная сила  
**Fig. 6.** Scheme of the experiment for studying the influence of preload in the mode of an elastic load: rigidity of the elastic element,  $K_n$ ; preload force,  $F_0$ ; signal from the force piezo sensor,  $U_s$ ; equivalent force,  $F_e$

Жесткость упругого элемента определялась экспериментально и при статическом сжатии равна  $K_n = 3 \cdot 10^6$  Н/м. Сила предварительного поджатия определялась экспериментально по сигналу с пьезодатчика силы (рис. 7).



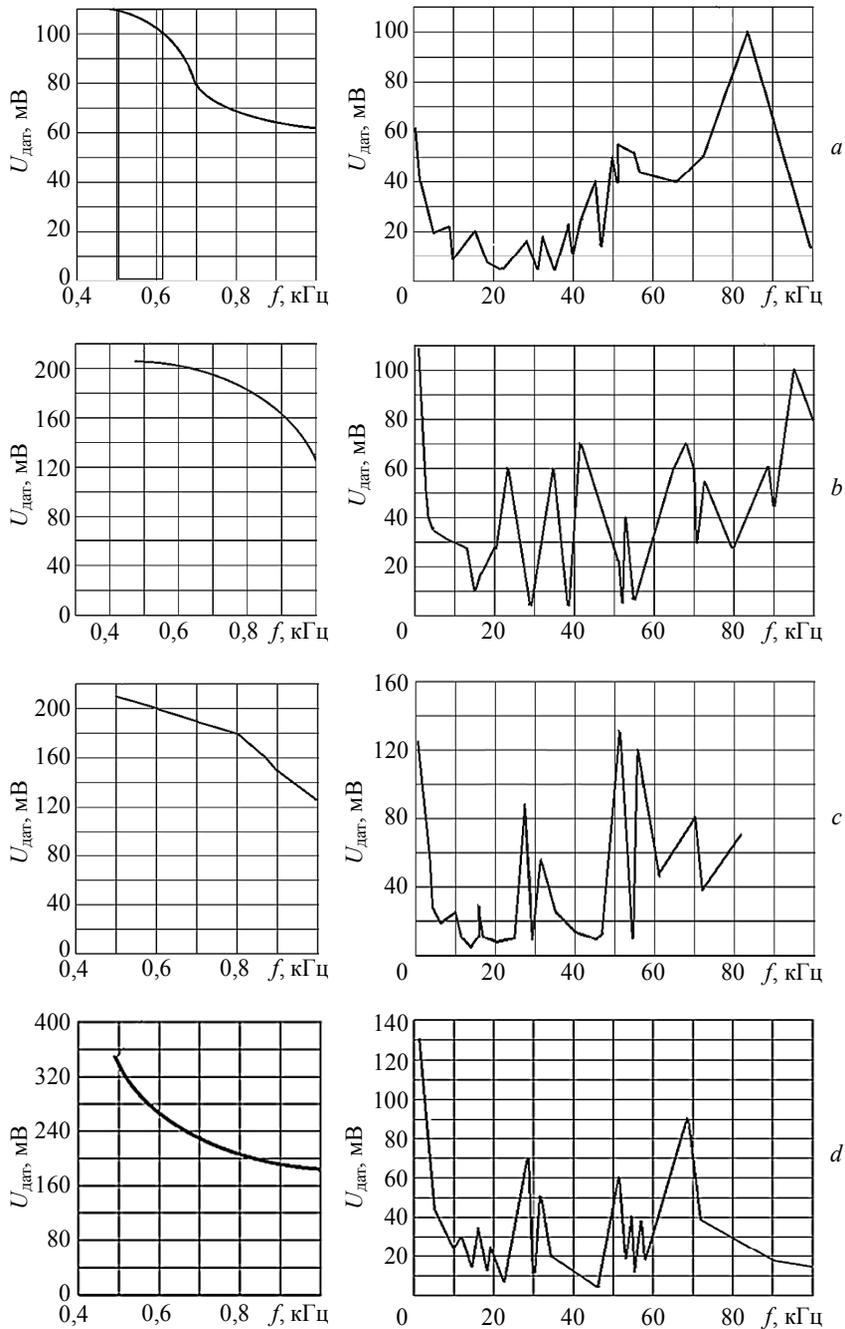
**Рис. 7.** Осциллограмма процесса предварительного поджатия на величину 42.8 Н  
**Fig. 7.** Waveform of the preload process at the value of 42.8 N

Проведен ряд экспериментов, в которых варьировалась величина силы поджатия ПА. Эти исследования определяли влияние силы поджатия на динамические характеристики ПА (рис. 8 и 9). На рис. 9 представлены результаты экспериментов для 4 случаев: величина силы поджатия равна 42.8, 85.7, 102.9 и 171.5 Н.



**Рис. 8.** Зависимость силы на нагрузке при резонансной частоте колебательной системы от силы предварительного поджатия

**Fig. 8.** Force on the load at the resonant frequency of the oscillating system as a function of the preload force



**Рис. 9.** Частотные характеристики ПА при разных величинах предварительного поджатия в условиях упругой нагрузки: *a* – 42.8 Н, *b* – 85.7 Н, *c* – 102.9 Н, *d* – 171.5 Н

**Fig. 9.** Frequency-response characteristics of the PZT stack actuator at different pre-load values in the case of elastic load: (*a*) 42.8, (*b*) 85.7, (*c*) 102.9, and (*d*) 171.5 Н

С увеличением силы предварительного поджатия частотные характеристики существенно изменяются. При малых силах предварительного поджатия частотная характеристика имеет несколько резонансов, с увеличением силы поджатия на частотной характеристике формируются 2–3 резонанса. Рабочая частота находится на частотах  $f \leq 1$  кГц и при увеличении силы предварительного поджатия величина силы на нагрузке растет.

### Заключение

Полученные экспериментальные данные показали, что частотные характеристики вибросмещения, полученные по трехмерным математическим моделям являются наиболее точными и имеют несовпадение с экспериментом в 5–8 %, в то время как расчетные данные по одномерным математическим моделям имеют несовпадение с экспериментом в 10–20 %.

Результаты исследования подтвердили расчетные данные [3, 5], что для принятых значений нагрузки резонансные частоты КС находятся в области низких частот (до 1 кГц) и с увеличением предварительного поджатия увеличивается динамическое усилие на нагрузке, особенно на низких частотах.

По частотным характеристикам видно, что количество пиков характеристики динамических усилий соответствует количеству контуров электрической схемы замещения. С увеличением предварительного поджатия частотные характеристики динамических усилий изменяются, значения динамических усилий промежуточных резонансов уменьшаются, формируются 2–3 основных резонанса. Предварительное поджатие «заниволивает» ПА, сглаживает неточности его производства и сборки, заставляет работать как «единое целое».

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Park S.* Single vibration mode standing wave tubular piezoelectric ultrasonic motor. Theses and dissertations. Toronto, 2011. 136 p.
2. *Wang Z., Li T., Cao Y.* Active shape adjustment of cable net structures with PZT actuators // *Aerospace Science and Technology*. 2013. P. 160–168.
3. *Пономарев С.В., Рикконен С.В., Азин А.В.* Анализ работы пьезопривода по частотным характеристикам механоакустической колебательной системы // *Изв. вузов. Физика*. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 196–202.
4. *Ponomarev S.V., Rikkonen S., Azin A., Karavatskiy A., Maritskiy N., Ponomarev S.A.* The applicability of acoustic emission method to modeling the endurance of metallic construction elements // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 71. 2015. DOI: 10.1088/1757-899X/71/1/012056.
5. *Пономарев С.В., Рикконен С.В., Азин А.В.* Моделирование колебательных процессов пьезоэлектрического преобразователя // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2015. № 2(34). С. 86–95.

Статья поступила 07.11.2016 г.

Azin A.V., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V., Khramtsov A.M. (2017) EXPERIMENTAL RESEARCH ON THE OPERATING CONDITIONS OF PZT STACK ACTUATOR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 60–68

DOI 10.17223/19988621/45/5

In the space industry, the problem of reducing mass-dimensional parameters of a spacecraft (SC) system is especially urgent. One of the current solutions is the replacement of electromechanical driving systems in different SC units by piezo drives, which enable a decrease in mass-dimensional parameters by several fold.

The basic element of a piezo drive is a PZT stack actuator whose construction and operating conditions determine the efficiency and service life of the oscillating system.

This work is aimed at experimental investigating the influence of the preload force of the PZT stack actuator on frequency-response characteristics and energy parameters of the oscillating system. The experimental studies were carried out on test stands which allow one to implement physical modeling of oscillating systems with different types of loads. It is shown experimentally that an increase in the preload force significantly changes the frequency characteristics. With an increase in the preload, frequency characteristics of dynamic forces change, dynamic forces of intermediate resonances decrease, and one main resonance is formed.

The results of the study have confirmed the calculation data: for the taken values of the load, the resonant frequency of oscillating systems falls in the low-frequency region (up to 1 kHz); with an increase in the preload, the dynamic force on the load increases, especially at low frequencies.

Keywords: PZT stack actuator, spacecraft, oscillating system, dynamic force.

*PONOMAREV Sergey Vasil'evich* (Doctor of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

*RIKKONEN Sergey Vladimirovich* (Candidate of Technical Science,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: rikk2@yandex.ru

*AZIN Anton Vladimirovich* (Candidate of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

*KHRAMTSOV Alexey Mikhaylovich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: khramtsov.home@gmail.com

#### REFERENCES

1. Park S. (2011) *Single vibration mode standing wave tubular piezoelectric ultrasonic motor*. 136 p.
2. Wang Z., Li T., Cao Y. (2013) Active shape adjustment of cable net structures with PZT actuators. *Aerospace Science and Technology*. pp. 160–168.
3. Ponomarev S.V., Rikkonen S.V., Azin A.V. (2014) Analiz raboty p'ezoprivoda po chastotnym kharakteristikam mekhanoakusticheskoy kolebatel'noy sistemy [Analysis of the operating PZT stack actuator based on the frequency-response characteristics of mechanical-acoustical oscillating system]. *Izv. vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(8/2). pp. 196–202.
4. Ponomarev S.V., Rikkonen S., Azin A., Karavatskiy A., Maritskiy N., Ponomarev S.A. (2015) The applicability of acoustic emission method to modeling the endurance of metallic construction elements. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 71. DOI: 10.1088/1757-899X/71/1/012056.
5. Ponomarev S.V., Rikkonen S.V., Azin A.V. (2015) Modelirovanie kolebatel'nykh protsessov p'ezoelektricheskogo preobrazovatelya [Simulation of oscillatory processes of the piezoelectric transducer]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 86–95.

УДК 532.5: 536: 537  
DOI 10.17223/19988621/45/6

**Б.В. Бошенятов**

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПУЗЫРЬКОВЫХ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕД ПОВЫШЕННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ<sup>1</sup>

Получена аналитическая зависимость для расчета теплопроводности несжимаемой пузырьковой среды с учетом взаимного влияния пузырьков друг на друга. Сравнение с теоретическими и экспериментальными результатами других авторов показало, что формула Максвелла, которая не учитывает взаимодействия пузырьков, дает погрешность менее 5 % в диапазоне объемных концентраций от нуля до 0.52. Учет взаимодействия пузырьков практически не улучшает результат формулы Максвелла.

**Ключевые слова:** *пузырьковые газожидкостные среды, гидродинамическое взаимодействие, теплопроводность, электропроводность, диэлектрическая и магнитная проницаемости.*

Пузырьковые газожидкостные среды широко распространены в природе и технологических процессах атомной энергетики, а также нефтяной, химической, фармацевтической и других отраслях промышленности. В ряде случаев такую среду можно рассматривать как гомогенную, приписывая ей эффективные значения физических величин, усредненных по объемам много большим, чем масштаб структурных неоднородностей среды [1, 2]. Для дисперсных сред малой концентрации, когда взаимодействием дисперсных частиц можно пренебречь, эта проблема была решена в классических работах Максвелла, и Эйнштейна [3, 4]. Для более концентрированных сред необходимо учитывать взаимное влияние дисперсных частиц друг на друга. Для этой цели использовались различные теоретические методы и подходы [5–13]. Наиболее полный обзор исследований проблемы теплопроводности гетерогенных дисперсных сред, имеющих статистически однородную изотропную структуру, содержится в работе [9]. В более широком смысле аналитические и численные методы анализа физических свойств гетерогенных материалов изложены в монографии [10], список используемой литературы которой насчитывает более 1200 наименований. Однако проблему нельзя считать окончательно решенной, в частности, до сих пор отсутствует полное понимание степени влияния различных физических факторов, в том числе взаимодействия дисперсных частиц, на конечный результат при повышенных концентрациях дисперсной фазы.

Отметим, что теплопроводность среды, а также электропроводность, диффузия, статические диэлектрическая и магнитная проницаемости описываются одинаковыми уравнениями и граничными условиями. Поэтому, решив задачу для теплопроводности среды, мы получаем решение для любой другой из перечисленных выше задач путем простой замены буквенных обозначений. Кроме того, это обстоятельство позволяет нам использовать для решения задачи о теплопровод-

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

ности теоретический и экспериментальный материал, накопленный при решении других аналогичных задач.

В работе получена теоретическая зависимость (в аналитическом виде) эффективного коэффициента теплопроводности несжимаемой двухкомпонентной монодисперсной среды от объемной концентрации сферических дисперсных частиц при произвольном соотношении коэффициентов теплопроводности компонент, с учетом взаимного влияния дисперсных частиц друг на друга.

В первом разделе дается краткое изложение существующих теоретических моделей описания процессов переноса в дисперсных средах, в том числе при повышенных концентрациях дисперсных частиц. Во втором – изложен новый подход описания явлений переноса, основанный на использовании метода электрогидродинамической аналогии и решения задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке, полученного в работе [12]. Третий раздел посвящен исследованию адекватности рассмотренных теоретических моделей экспериментальным данным для частного случая, когда теплопроводность (электропроводность) дисперсных частиц много меньше теплопроводности дисперсионной жидкости, что соответствует несжимаемой пузырьковой среде.

### 1. Математические модели описания явлений переноса в дисперсных средах

Джеймс Максвелл был одним из первых, кто обратил внимание на проблему описания гетерогенных дисперсных сред при помощи эффективных физических параметров. В работе [3] он исследовал разреженную суспензию из сферических частиц, имеющих электропроводность  $\sigma_2$ , диспергированных в жидкости с электропроводностью  $\sigma_1$ . Далее, для любых физических величин нижний индекс 1 будет относиться к дисперсионной жидкости, а индекс 2 к дисперсным частицам или пузырькам. Опираясь на полученное им точное решение для одиночной сферы, помещенной в однородное электрическое поле, он предложил знаменитую формулу для эффективной электропроводности такой среды в виде

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = \frac{1 + 2\beta c}{1 - \beta c}, \quad (1)$$

где  $c$  – объемная концентрация дисперсных частиц (или пузырьков),  $\sigma^*$  – эффективный коэффициент электропроводности суспензии,  $\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}$ ,  $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ .

Однако многие авторы, например [6,9], считают, что формула (1), в силу предположений, сделанных при ее выводе, неприменима для сред с повышенной концентрацией дисперсных частиц и справедлива лишь при  $c \ll 1$ , т.е. в приближении  $O(c^2)$ :

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = 2\beta c + O(c^2). \quad (2)$$

Лорд Релей, чтобы проверить пригодность формулы (1) для расчетов при больших концентрациях, методом отражений рассмотрел частный случай, полагая, что дисперсные частицы (сферы) расположены в узлах периодической прямоугольной решетки. Основной вывод Релея состоял в том, что формула Максвелла (1) справедлива не только при малых, но и при средних объемных концентрациях дисперсных частиц до значений  $c \approx 0.3$ .

Примечательно, что между диэлектрической проницаемостью неполярных газов или жидкостей и поляризуемостью молекул существует определенное соотношение, называемое формулой Клаузиуса – Моссотти [14]. Эту формулу легко получить на основе понятия «локального поля Лоренца». В отличие от макроскопического поля в диэлектрике  $E$ , которое характеризуется средней напряженностью электрического поля в объеме, превышающем размеры молекулы, но достаточно малом, так что напряженность в пределах этого объема почти не изменяется, локальное поле  $E_L$  – это поле, действующее на одну молекулу (или частицу, способную поляризоваться). Лоренц вычислил [15], что для неполярных изотропных диэлектриков

$$E_L = \frac{\varepsilon + 2}{3} E, \quad (4)$$

где  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0}$  – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика ( $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума). В вакууме  $\varepsilon = 1$ , и из формулы (4) следует, что  $E_L = E$ . Поляризацию молекулы (или частицы) определяет именно это локальное поле. Тогда поляризация единицы объема диэлектрика будет равна

$$P = n\chi_m \frac{\varepsilon + 2}{3} E \quad (5)$$

Здесь  $n$  – число молекул в единице объема,  $\chi_m$  – поляризуемость молекулы.

С другой стороны, между поляризацией диэлектрика и средним полем существует соотношение

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E. \quad (6)$$

Исключив  $P$  и  $E$  из соотношений (5) и (6), получим известную формулу Клаузиуса – Моссотти для диэлектрической проницаемости неполярных газов или жидкостей:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi n \chi_m. \quad (7)$$

Заменяя в выражении (7)  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0}$  на  $\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_1}$  и учитывая, что коэффициент поляризуемости сферы, имеющей радиус  $a$ , равен  $\chi = \varepsilon_1 \beta a^3$ ,  $c = \frac{4}{3} \pi a^3 n$ , а  $E_1 = \frac{E}{\varepsilon_1}$ , получим формулу Клаузиуса – Моссотти применительно к дисперсным средам

$$\beta^* = \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_1}{\varepsilon^* + 2\varepsilon_1} = \beta c, \quad (8)$$

которая, в контексте электропроводности, в точности совпадает с формулой Максвелла (1).

В разделе 2.2 будет показано, что формула Максвелла (1) строго обоснована и применима для дисперсных сред с повышенной концентрацией, но является приближенной, поскольку, как и формула (2), не учитывает взаимного влияния электрических полей дисперсных частиц друг на друга. Но в отличие от формулы (2)

формула (1) учитывает влияние на эффективную электропроводность среды геометрического фактора, связанного с уменьшением относительного объема дисперсионной жидкости. Ясно, что значение геометрического фактора возрастает с повышением объемных концентраций дисперсных частиц. Количественные оценки относительного влияния на конечный результат геометрического фактора и взаимодействия физических полей дисперсных частиц при увеличении их объемной концентрации будут даны в разделе 3.

Проблема учета взаимодействия физических полей дисперсных частиц математически оказалась настолько сложной, что прошло около 60 лет, прежде чем появились первые теоретические работы по оценке второго коэффициента  $k_2$  в вириальном разложении для электро- и теплопроводности суспензии сферических частиц:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = k_1 c + k_2 c^2 + O(c^3) \quad (8)$$

Это работы Кирквуда (Kirkwood, 1936) и Явона (Yvon, 1937) [7], Хашина и Штрикмана (Hashin and Shtrikman, 1962) и др. [6]. В 1973 г., через сто лет после публикации Максвелла, в работе [6] Джеффри (Jeffrey D.J.), используя полученное им, точное решение для двух взаимодействующих сфер и метод Бэтчелора для решения проблемы расходящихся интегралов, вычислил коэффициент  $k_2$  в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $\beta$  для дисперсных сред с изотропной статистически однородной структурой.

Значительный вклад в решение проблемы взаимодействия дисперсных частиц в гетерогенных средах внес известный физик-теоретик У. Фельдерхоф [7, 8, 11], который ввел понятие эффективного коэффициента поляризуемости и записал формулу Клаузиуса – Моссогги в виде

$$\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_1}{\varepsilon^* + 2\varepsilon_1} = \frac{4}{3\varepsilon_1} \pi n \chi^*, \quad \text{где } \chi^* = \chi \left[ 1 - \frac{4\pi}{3\varepsilon_1} (\lambda + \mu) n \chi \right]^{-1}. \quad (9)$$

Фельдерхоф разработал метод приближенного расчета коэффициентов  $\lambda$  и  $\mu$  с учетом мультипольных многочастичных взаимодействий, представив эти коэффициенты в виде кластерных разложений:

$$\lambda = \sum_{s=2}^{\infty} \lambda_s, \quad \mu = \sum_{s=2}^{\infty} \mu_s.$$

В работе [11] дана таблица численного расчета этих коэффициентов для двух- ( $s = 2$ ) и трехчастичных ( $s = 3$ ) взаимодействий сферических дисперсных частиц.

## 2. Новый подход описания явлений переноса в дисперсных средах с повышенной концентрацией частиц

### 2.1. Эффективный коэффициент теплопроводности дисперсной среды и формула для его определения

Стационарный процесс переноса тепла (и электрического заряда) в однородной и изотропной среде внутри  $i$ -й компоненты дисперсной среды, подчиняется закону Фурье (и Ома):

$$q_i = -\lambda_i \nabla T_i. \quad (10)$$

В уравнении (10)  $i = 1, 2$  (для двухкомпонентной среды);  $q_i$  – вектор теплового потока;  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности, а  $T_i$  – температура внутри  $i$ -й компоненты дисперсной среды. Если среда представляет собой мелкодисперсную смесь, то можно рассматривать векторные поля  $\langle q \rangle$  и  $\langle \nabla T \rangle$ , усредненные по объемам  $\Omega$ , большим по сравнению с масштабами структурных неоднородностей, но достаточно малыми относительно масштабов исследуемой задачи. По отношению к таким средним полям дисперсная среда является однородной и изотропной и может характеризоваться эффективным значением коэффициента теплопроводности  $\lambda^*$  [6,16], тогда

$$\langle q \rangle = -\lambda^* \langle \nabla T \rangle, \langle q \rangle = \frac{1}{\Omega} \int q_i d\Omega, \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \nabla T_i d\Omega. \quad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) следует

$$\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle (1 - c) + \langle \nabla T_2 \rangle c \quad (12)$$

и формула для определения  $\lambda^*$ :

$$\frac{\lambda^*}{\lambda_1} \langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T \rangle + \langle \nabla T_2 \rangle (\alpha - 1) c, \quad (13)$$

где  $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ . Таким образом, в рамках феноменологического подхода имеем два уравнения (12), (13) и три неизвестных:  $\lambda^*$ ,  $\langle \nabla T_1 \rangle$  и  $\langle \nabla T_2 \rangle$ . Чтобы замкнуть систему уравнений, необходимо решать задачу на более детальном, структурном уровне.

Отметим, что линейный характер закона Фурье свидетельствует о том, что, в этом приближении процесс переноса тепла носит локальный характер, т.е. тепловой поток в заданной точке пространства определяется локальным значением градиента температуры в той же точке. Для дисперсной среды это означает, что вначале необходимо найти зависимость  $\langle \nabla T_2 \rangle$  от локального поля  $\langle \nabla T_1 \rangle$ , после чего, используя формулы (12) и (13), определить эффективный коэффициент теплопроводности дисперсной среды.

## 2.2. Обоснование формулы Максвелла при повышенных концентрациях дисперсных частиц (без учета взаимодействия частиц)

Если не учитывать влияние физических полей соседних частиц на величину локального поля  $\langle \nabla T_1 \rangle$  вблизи пробной частицы, то зависимость  $\langle \nabla T_2 \rangle$  от  $\langle \nabla T_1 \rangle$  можно определить из точного решения задачи о теплопроводности (или диэлектрической проницаемости [16]) для одиночной сферы [3, 6]:

$$\langle \nabla T_2 \rangle = \frac{3}{\alpha + 2} \langle \nabla T_1 \rangle. \quad (14)$$

Используя формулы (12), (13) и точное решение (14), получим формулу для расчета эффективной теплопроводности суспензии, совпадающую с формулой Максвелла (1).

Таким образом, формула Максвелла (1) математически обоснована для любых концентраций дисперсных сферических частиц, но является приближенной, так как получена на основе точного решения для одиночной сферы и поэтому не учи-

тывает эффектов взаимного влияния физических полей дисперсных частиц друг на друга. При  $c \ll 1$  из уравнения (12) имеем  $\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle$  и соответственно получим первое приближение  $O(c^2)$  формулы (1), т.е. формулу (2).

Для теоретической оценки погрешности формулы (1) необходимо иметь более точное решение с учетом взаимодействия частиц.

### 2.3. Вывод формулы для расчета эффективной теплопроводности суспензии с учетом взаимодействия частиц

Аналитическую зависимость для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды с учетом взаимодействия частиц получим, используя метод физической аналогии и решение задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке [12, 13].

Метод физической аналогии основан на том, что потенциальные течения идеальной жидкости, как и поле температур, описываются уравнением Лапласа и одинаковым условием на бесконечности (при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ ), но условие на границе сред отличается. Вместо  $T_1 = T_2$  и  $\lambda_1 \frac{dT_1}{dn} = \lambda_2 \frac{dT_2}{dn}$  (при идеальном тепловом

контакте) в гидродинамике имеем  $\frac{d\varphi_1}{dn} = \frac{d\varphi_2}{dn}$ , где  $\varphi$  – потенциал скорости,  $n$  –

нормаль к поверхности раздела сред. Таким образом, в гидродинамической задаче параметр  $\rho$  (плотность), эквивалентный параметру  $\lambda$  в задаче о теплопроводности, отсутствует и в уравнении Лапласа и в граничных условиях, а содержится в уравнении движения. Поэтому условия соответствия для физической аналогии находим из сравнения точного решения (14) и соответствующего решения гидродинамической задачи о движении одиночной сферы в однородном внешнем поле скорости [17]  $\langle \nabla \varphi_2 \rangle = \frac{3}{1+2\gamma} \langle \nabla \varphi_1 \rangle$ :

$$\langle \nabla \varphi_2 \rangle \rightarrow \langle \nabla T_2 \rangle, \langle \nabla \varphi_2 \rangle \rightarrow \langle \nabla T_2 \rangle, \gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\alpha + 1}{2}. \quad (15)$$

Гидродинамическая задача о взаимодействии фаз  $\frac{\langle \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_1 \rangle} = f(\gamma, c)$  решалась в два

этапа. Вначале, было дано детальное описание движения  $N$  идентичных сферических частиц, произвольно расположенных в дисперсионной жидкости, при внезапном ускорении плоской бесконечной стенки от нулевой до заданной скорости  $U^{(0)} = \langle \nabla \varphi \rangle$ . При этом учитывались двухчастичные взаимодействия, включающие полный набор мультипольных разложений.

Затем, путем усреднения по ансамблю, находилась средняя скорость частиц, расположенных вдали от стенки  $v_2 = \langle \nabla \varphi_2 \rangle$ . Задача решена в аналитическом виде с учетом членов разложений искомых функций по малому параметру до степени  $(a/L)^{14}$ , где  $a$  – радиус дисперсной частицы,  $L$  – расстояние между центрами частиц. Упрощающие предположения: дисперсные частицы – жесткие сферы, которые распределены в пространстве статистически равномерно, количество частиц

неизменно. Используя полученное в работе [12] решение, легко найти

$$\langle \nabla \varphi_2 \rangle = \langle \nabla \varphi_1 \rangle \frac{3}{1+2\gamma} [1+k(\gamma)c], \quad (16)$$

$$k(\gamma) = -\frac{7}{72} \frac{1-\gamma}{1+2\gamma} + \frac{1415}{5632} \left( \frac{1-\gamma}{1+2\gamma} \right)^2 - \frac{5}{2112} \left( \frac{1-\gamma}{1+2\gamma} \right)^3.$$

Подставляя в решение гидродинамической задачи (16) формулы соответствия физической аналогии (15), получим решение задачи о соотношении градиентов температурных полей внутри отдельных компонент дисперсной среды:

$$\langle \nabla T_2 \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle \frac{3}{\alpha+2} [1+k(\beta)], \quad (17)$$

$$k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3.$$

Используя (12), (13) и решение задачи о взаимодействии фаз (17), получим искомую аналитическую зависимость для эффективной теплопроводности дисперсной среды:

$$\lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda_1} = 1 + 3\beta c(1+kc) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{3kc}{\alpha-1} \right) \beta c \right]^{-1}. \quad (18)$$

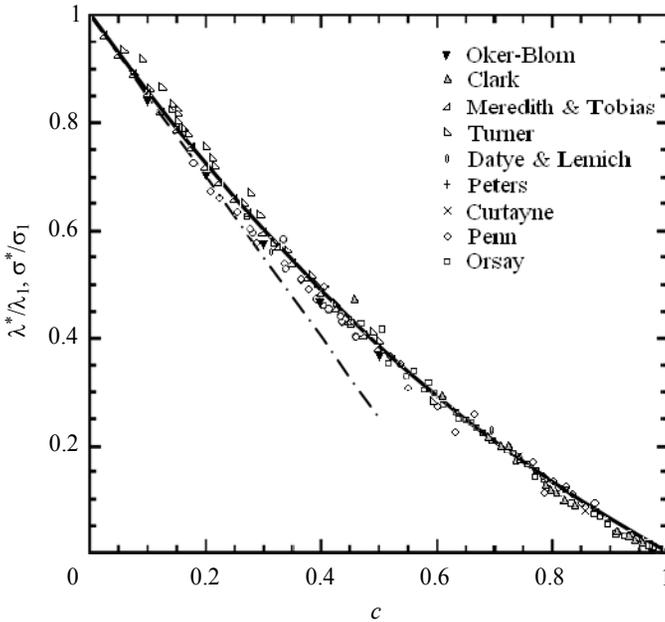
При  $kc \ll 1$ , как и следовало ожидать, формула (18) совпадает с формулой (1). При  $\lambda_1 = \lambda_2$  ( $\alpha = 1$ ) имеем  $\lambda^* = \lambda_1$ .

Если теплопроводность дисперсных частиц много меньше теплопроводности дисперсионной жидкости  $\lambda_1 \gg \lambda_2$ , что соответствует несжимаемой пузырьковой газожидкостной среде, то  $\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha+2} = -0.5$  и из второй формулы (17) следует  $k(\beta) = -0.0086$ .

### 3. Сравнение с теоретическими и экспериментальными данными других авторов для случая нетеплопроводных дисперсных частиц (пузырьков)

На рис. 1 дано сравнение аналитической зависимости (18) при  $k(\beta) = -0.0086$  ( $\lambda_1 \gg \lambda_2$ ) с соответствующими экспериментальными данными по измерению эффективной электропроводности газожидкостных дисперсных сред в диапазоне объемных концентраций газа от нуля до единицы (от пузырьков до пен), приведенными в работе [18]. Видно, что отклонение теоретической зависимости (18) от экспериментальных данных наблюдается лишь при концентрациях газа больше приблизительно 0.65, т.е. при концентрациях, близких к предельной для сферических дисперсных частиц с хаотической упаковкой. Штрихпунктирной линией на рис.1 показан расчет по формуле (2), линейное приближение формулы Максвелла (1). В работе [18] многочисленные эксперименты различных авторов обобщены в виде эмпирической формулы

$$\sigma_{\text{exp}} = \frac{\sigma_{\text{exp}}^*}{\sigma_1} = \frac{2p(1+12p)}{6+29p-9p^2}, \quad p = 1-c. \quad (19)$$



**Рис. 1.** Сравнение расчетных по формуле (18) значений эффективной теплопроводности (сплошная линия) с экспериментами (маркеры) различных авторов [18] для пузырьковых газожидкостных сред. Штрихпунктирная линия – расчет по формуле (2)

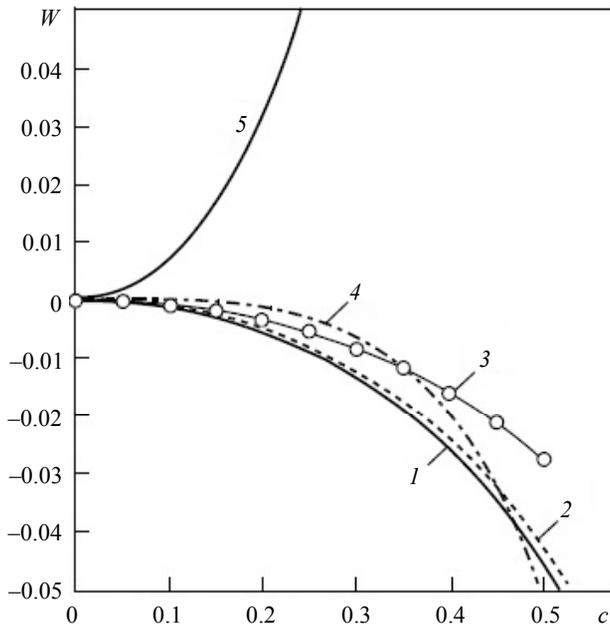
**Fig. 1.** Comparison of the effective thermal conductivity values (solid line) calculated by formula (18) with experiments (markers) of different authors [18] for bubble gas-liquid media. The dash-dot line indicates the calculation by formula (2)

На рис. 2 дано более точное сравнение в виде относительного отклонения теоретических данных различных авторов от обобщенной экспериментальной зависимости (19):

$$W(c) = \frac{\sigma - \sigma_{\text{exp}}}{\sigma_{\text{exp}}} = \frac{\lambda - \lambda_{\text{exp}}}{\lambda_{\text{exp}}}$$

Из рис. 2 видно, что полученная аналитическая зависимость (18) с погрешностью менее 0.5 % совпадает с формулой Максвелла (1) в диапазоне объемных концентраций от нуля до 0.52. Численные расчеты Фельдерхофа (точки на графике), выполненные с учетом парных и тройных взаимодействий пузырьков [11], а также формула Джеффри, полученная в виде вириального разложения с точностью до  $O(c^3)$ , отличаются от зависимости (1) в том же диапазоне концентраций не более чем на 1.5 %.

Таким образом, для практических расчетов теплопроводности пузырьковых сред следует использовать формулу (2), которая не учитывает взаимодействия пузырьков. Из рис. 1. видно, что она дает отклонение от экспериментальной зависимости менее 5 % во всем диапазоне концентраций пузырьков, в то время как разброс экспериментальных данных составляет до 10 %. Линейная зависимость (2) имеет погрешность менее 5 % лишь в диапазоне объемных концентраций от нуля до 0.22.



**Рис. 2.** Зависимость относительной погрешности различных теоретических методов вычисления коэффициента теплопроводности пузырьковой газожидкостной смеси от объемной концентрации пузырьков: кр. 1 – предложенная автором аналитическая зависимость (18), кр. 2 – эвристическая формула Максвелла (1), кр. 3 – численные расчеты Фельдерхофа [11], кр. 4 – формула Джеффри [6] в виде вириального разложения  $O(c^3)$ , кр. 5 – линейная аппроксимация формулы (1) при  $c \ll 1$

**Fig. 2.** Relative error of different theoretical methods for calculating the thermal conductivity coefficient of the bubble gas-liquid mixture as a function of volume concentration of bubbles: 1, an analytical dependence (18) proposed by the author, 2, the heuristic Maxwell's equation (1), 3, the numerical results of Felderhof [11], 4, Jeffrey's formula [6] in the form of a virial expansion  $O(c^3)$ , 5, a linear approximation of the formula (1) at  $c \ll 1$

В заключение отметим, что поскольку электростатика и магнитостатика описываются полностью идентичными с теплопроводностью уравнениями и граничными условиями, то формулы (1) и (18) применимы, при соответствующей замене буквенных обозначений, и для расчета электрической и магнитной проницаемости дисперсных сред.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бошнятов Б.В. О перспективах применения микропузырьковых газожидкостных сред в технологических процессах // Изв. вузов. Физика. 2005. № 11. Приложение. С. 49–54.
2. Бошнятов Б.В. Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования. Издательский дом: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 170 с.
3. Maxwell J.C. Electricity and magnetism (1<sup>st</sup> ed.). Clarendon Press, 1873.
4. Einstein A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen // Ann. Phys. 1906. V. 19. P. 289–306.

5. *Lord Rayleigh*. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the volume properties of a medium // *Phil. Mag.* 1892. V. 34. P. 481–502.
6. *Jeffrey D.J.* Conduction through a random suspension of spheres // *Proc. Roy. Soc. London.* 1973. V. A335. P. 355–367.
7. *Felderhof B.V., Ford G.W., Cohen E.G.D.* Two-particle cluster integral in the expansion of the dielectric constant // *J. Stat. Phys.* 1982. V. 28. P. 649–672.
8. *Cichoki B., Felderhof B.U.* // *Journal of Statistical Physics.* 1988. V. 53. No. 1/2. P. 499–521.
9. *Markov K.Z.* On the Heat Propagation Problem for Random Dispersions of Spheres // *Mathematica Balkanica New Series.* 1989. V. 3. Fasc. 3–4. P. 399–417
10. *Buryachenko V.A.* *Micromechanics of Heterogeneous Materials.* New York: Springer Science + Business Media. LLC, 2007. 686 p.
11. *Felderhof B.U.* Virtual mass and drag in two-phase flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 225. P. 177–196.
12. *Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // *Докл. РАН.* 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
13. *Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В.* Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика жидкости и газа.* 2011. Вып. 4(3). С. 740–741.
14. *Clausius R.* *Die mechanische Behandlung der Elektrizität.* Vieweg, Braunschweig, 1879.
15. *Lorenz L.* Über die Refraktionskonstante // *Ann. Phys. Chem.* 1880. V. 11. P. 70ff.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* *Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика.* Т. 8. М.: Наука, 1982. 620 с.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* *Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т.: Т. 6. Гидродинамика.* М.: Наука, 1986. 736 с.
18. *Feitosa K., Marze S., Saint-Jalmes A., Durian D.J.* // *J. Physics: Condensed Matter.* 2005. V. 17. P. 6301–6305.

Статья поступила 07.11.2016 г.

Boshenyatov B.V. (2017) THERMAL CONDUCTIVITY OF THE BUBBLE GAS-LIQUID MEDIA WITH A HIGH CONCENTRATION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 1(45). pp. 69–79

DOI 10.17223/19988621/45/6

It is known that Maxwell's equation (the Clausius-Mossotti formula) is widely used for calculating the electrical and thermal conductivity, dielectric constant, and other effective transport coefficients of disperse media. This formula does not take into account the interaction of particles with each other; therefore, it is believed to be valid only for a low volume concentration of the dispersed particles. The analytical dependence for calculating the thermal conductivity of an incompressible bubble medium, with taking into account the mutual influence of the bubbles, has been obtained theoretically by the author. A comparison of the results with the calculations and experimental data of other authors has shown that Maxwell's formula, which leaves out of account the interaction of bubbles, leads to an error of less than 5% in the range of bubble concentration (by volume) from 0 to 0.55. The allowance for interaction of the bubbles almost does not improve the results of Maxwell's formula. This fact testifies that the main contribution to a change in the thermal conductivity with an increase in concentration of bubbles in the bubble medium is made by a purely geometric factor.

Keywords: bubble gas-liquid medium, hydrodynamic interaction, thermal conductivity, electrical conductivity, permittivity and magnetic permeability.

*BOSHENYATOV Boris Vladimirovich* (Doctor of Technical Sciences, Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation)  
E-mail: bosbosh@mail.ru

## REFERENCES

1. Boshenyatov B.V. (2005) O perspektivakh primeneniya mikropuzyr'kovykh gazozhidkostnykh sred v tekhnologicheskikh protsessakh [On the prospects of applying microbubble gas-liquid media in technological processes]. *Izvestiya Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 48(11 appendix). pp. 49–54.
2. Boshenyatov B.V. (2016) *Mikropuzyr'kovye gazozhidkostnye sredy i perspektivy ikh ispol'zovaniya* [Microbubble gas-liquid media and their prospects of applying]. LAP LAMBERT Academic Publishing. 170 p.
3. Maxwell J.C. (1873) *Electricity and magnetism* (1st ed.). Clarendon Press.
4. Einstein A. (1906) Eine neue bestimmung der molekuldimensionen. *Annalen der Physik*. 19. pp. 289–306. DOI: 10.1002/andp.19063240204.
5. Lord Rayleigh (1892) On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the volume properties of a medium. *Philosophical Magazine*. 34. pp. 481–502. DOI: 10.1080/14786449208620364.
6. Jeffrey D.J. (1973) Conduction through a random suspension of spheres. *Proc. Roy. Soc. London*. A335. pp. 355–367. DOI: 10.1098/rspa.1973.0130.
7. Felderhof B.V., Ford G.W., Cohen E.G.D. (1982) Two-particle cluster integral in the expansion of the dielectric constant. *J. Stat. Phys.* 28. pp. 649–672.
8. Cichoki B., Felderhof B.U. (1988) *Journal of Statistical Physics*. 53. No. 1/2. pp. 499–521.
9. Markov K.Z. (1989) On the heat propagation problem for random dispersions of spheres. *Mathematica Balkanica New Series*. 3. Fasc. 3–4. pp. 399–417.
10. Buryachenko V.A. (2007) *Micromechanics of heterogeneous materials*. New York: Springer Science+Business Media, LLC. 686 p.
11. Felderhof B.U. (1991) Virtual mass and drag in two-phase flow. *J. Fluid Mech.* 225. pp. 177–196. DOI: 10.1017/S002211209100201X.
12. Guskov O.B., Boshenyatov B.V. (2011) Gidrodinamicheskoe vzaimodeystvie sfericheskikh chastits v potoke nevyazkoy zhidkosti [Hydrodynamic interaction of spherical particles in an inviscid-fluid flow]. *Doklady Physics*. 56(6). pp. 352–354.
13. Guskov O.B., Boshenyatov B.V. (2011) Vzaimodeystvie faz i prisoedinennaya massa dispersnykh chastits v potentsial'nykh potokakh zhidkosti [Interaction of phases and virtual mass of dispersed particles in potential flows of fluid] *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika zhidkost i igaza – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(3). pp. 740–741.
14. Clausius R. (1879) *Die mechanische Behandlung der Elektrizität*. Vieweg, Braunschweig.
15. Lorenz L. (1880) Über die Refraktionsconstante. *Ann. Phys. Chem.* 11. pp. 70.
16. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1960) *Electrodynamics of continuous media*. 8. Pergamon Press.
17. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1959) *Fluid Mechanics*. 6. Pergamon Press. 551 p.
18. Feitosa K., Marze S., Saint-Jalmes A., Durian D.J. (2005) Electrical conductivity of dispersions: from dry foams to dilute suspensions. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 17(41). pp. 6301–6305.

УДК 531.351

DOI 10.17223/19988621/45/7

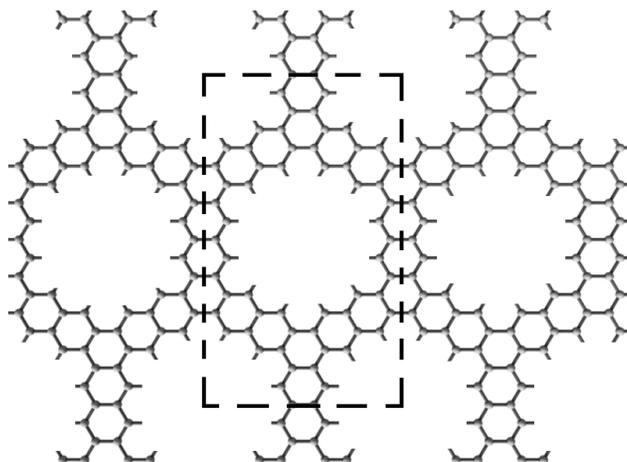
А.М. Бубенчиков, М.А. Бубенчиков, Е.А. Тарасов,  
О.В. Усенко, А.С. Челнокова

### РАЗДЕЛЕНИЕ МЕТАНО-ГЕЛИЕВОЙ СМЕСИ С ПОМОЩЬЮ ПОРИСТОГО ГРАФЕНА<sup>1</sup>

Выполнено математическое моделирование движения молекул гелия и метана через разряженные графеновые листы. Для определения проницаемости графеновой структуры использован метод эквивалентного однородного слоя. Энергия воздействия слоя определена на основе потенциала Пёшля – Теллера. Показано, что за счет поглощения потенциальными ямами максимумов энергии воздействия у двух последовательно расположенных графеновых листов происходит более чем двукратное увеличение проницаемости по гелию.

**Ключевые слова:** молекулярная динамика, потенциал Пёшля – Теллера, метод эквивалентного однородного слоя, проницаемость двойного слоя.

Сплошной графен является непроницаемым и не годится для разделения газовых смесей, поэтому для этой цели можно использовать листы пористого графена. Подходящими для сепарации газов порами являются выемки, содержащие два последовательных углеродных кольца. На рис. 1 показана структура пористого графенового листа с такими выемками. Пунктирной линией выделен элементарный фрагмент сепарирующей мембраны. В настоящей работе эту мембрану мы предлагаем использовать для разделения бинарной смеси He/CH<sub>4</sub>.



**Рис. 1.** Разреженная графеновая пластина. Выемка имеет 12 удаленных атомов углерода  
**Fig. 1.** A sparse graphene sheet. The recess has 12 remote carbon atoms

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-38-50284.

### О потенциале взаимодействия

#### Потенциал Морзе

Известен трехпараметрический потенциал межмолекулярного взаимодействия Морзе, который имеет следующий вид [1]:

$$U(r) = \varepsilon(\exp(-2\alpha(r - r_m)) - 2\exp(-\alpha(r - r_m))), \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – глубина потенциальной ямы,  $r_m = \sqrt[6]{2}\sigma$  – расстояние от центра пробной молекулы до точки минимума энергии взаимодействия,  $\alpha = 10 \text{ нм}^{-1}$ . Потенциал хорошо описывает взаимодействие молекул в окрестности точки  $r = r_m$ , что подтверждается решением уравнения Шредингера с этим потенциалом, дающим правильный спектр колебаний в объемных кристаллах, и в частности в алмазных частях. Имеются также работы, подтверждающие его успешное применение к графеновым структурам [2], т.е. к поверхностным кристаллам. Естественно, что надежные данные этот потенциал дает по уровням возбуждения энергии в кристаллических зернах металлов. Считается, что при  $r \rightarrow 0$  потенциал взаимодействия  $U(r) \rightarrow \infty$ , в этом смысле потенциал Морзе определяет неверный характер близких отталкивающих взаимодействий, поскольку он конечен при  $r = 0$ . В то же время это свойство делает его интегрируемым, что позволяет найти интегральное воздействие от поверхности графеновой структуры.

#### Потенциал Пёшля – Теллера

Этот потенциал является усовершенствованием потенциала Морзе, поскольку наряду с тем, что он хорошо описывает окрестность положения равновесия, он лучше, чем (1) описывает дальние взаимодействия молекул, что является важным при исследованиях прохождения молекул через нанопористые структуры. Потенциал Пёшля – Теллера записывается следующим образом [1]:

$$U(r) = \varepsilon \left[ \frac{\text{sh}^4\left(\frac{\alpha r_m}{2}\right) - \text{ch}^4\left(\frac{\alpha r_m}{2}\right)}{\text{sh}^2\left(\frac{\alpha r}{2}\right) - \text{ch}^2\left(\frac{\alpha r}{2}\right)} \right], \quad (2)$$

где  $\varepsilon$ ,  $r_m$  и  $\alpha$  имеют тот же смысл и те же значения, что и в потенциале Морзе.

При  $r \rightarrow 0$  этот потенциал имеет характер стремления к бесконечности, как  $r^{-2}$ . Такой характер считается верным и при этом потенциал является интегрируемым по объему, но дает рассеянные значения при интегрировании по поверхности, будучи примененным к поверхностным кристаллам.

Чтобы избежать этой неопределенности, мы модифицировали потенциал Пёшля – Теллера, ослабив особенность в нуле до бесконечности, пропорциональной  $r^{-1}$ . Модифицированный потенциал выглядит следующим образом:

$$U(r) = \frac{\varepsilon}{r} \text{th} \left\{ r \left[ \frac{\text{sh}^4\left(\frac{\alpha r_m}{2}\right) - \text{ch}^4\left(\frac{\alpha r_m}{2}\right)}{\text{sh}^2\left(\frac{\alpha r}{2}\right) - \text{ch}^2\left(\frac{\alpha r}{2}\right)} \right] \right\}. \quad (3)$$

Поскольку в реальности расстояние между центрами взаимодействующих молекул ( $r$ ) из-за конечности размеров молекул не может быть равным нулю, то гиперболический тангенс в записи (3) «исправляет» потенциал Пёшля – Теллера лишь в области несуществующих взаимодействий. При этом, однако, он позволя-

ет получать определенные значения интегрального воздействия способом сплошного интегрирования по поверхности кристалла.

Интегральное воздействие, определяемое потенциалом (3), находится следующим образом:

$$U_G(z) = q \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(r) dx' dy'. \quad (3')$$

Здесь  $U_G(z)$  – воздействие от бесконечного листа графена на пробную молекулу,  $z$  – расстояние до поверхности по нормали,  $q$  – количество атомов углерода на одном квадратном нанометре,  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ ,  $x, y, z$  – координаты центра пробной молекулы,  $x', y'$  – переменные интегрирования.

### О вероятности прохождения молекул через однородный слой

Пусть  $z$  будет декартовой координатой, направленной перпендикулярно плоскому однородному слою, а сам слой, являющийся разреженным графеновым листом, находится правее точки наблюдателя. Тогда молекулы, двигающиеся в отрицательном направлении оси  $Oz$ , никогда не достигнут слоя. В то же время молекулы, двигающиеся в положительном направлении, имеют ненулевую вероятность достичь энергетического барьера и пройти через него насквозь, если при этом их скорость будет выше предельной скорости прохождения слоя. Вероятность прохождения слоя будем определять на базе функции распределения Максвелла как долю молекул, прошедших энергетический барьер, из числа падающих на поверхность барьера частиц. Тогда для слоя с нулевой энергией, т.е. абсолютно проницаемого слоя, можем записать

$$a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(u^2 + v^2 + w^2)\right] dudvdw = 1. \quad (4)$$

Здесь  $m$  – масса молекулы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура в газовой среде,  $a$  – нормирующий множитель, который находится из условия, что все молекулы, падающие на абсолютно прозрачную пленку, в конце концов проходят через нее. Единица в правой части последнего выражения означает, что 100 % молекул прошли через слой.

Подынтегральная функция в (4) есть максвелловская функция распределения молекул по компонентом скоростей, а само это распределение учитывает все молекулы, падающие под различными углами к поверхности слоя.

Учтем также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (5)$$

кроме того, в силу четности подынтегральной функции

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (6)$$

После подстановки (5), (6) в (4) найдем, что

$$a = 2 \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \right)^3. \quad (7)$$

Если слой имеет ненулевую потенциальную энергию взаимодействия с пробной молекулой, то доля прошедших через него молекул будет определяться лишь предельной величиной нормальной скорости молекулы, и эту долю можно найти по следующей формуле:

$$D = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{w_{\text{нр}}}^{\infty} \exp(-\alpha w^2) dw, \quad (8)$$

где  $\alpha = \frac{m}{2kT}$ .

Это распределение учитывает и все наклонные падения молекул. Если при наклонном падении  $w > w_{\text{нр}}$ , то молекула все равно пройдет через слой, как и при нормальном по отношению к поверхности падении. В процессе нахождения  $w_{\text{нр}}$  мы проводим около десятка баллистических испытаний по величине нормальной по отношению к поверхности скорости молекулы. Поэтому соотношение (8) с найденным значением  $w_{\text{нр}}$  учитывает всю статистику ударяющихся о стенку молекул и по величинам их скоростей, и по углам наклона траекторий этих молекул к поверхности плоского слоя.

### Траектории молекул при движении через однородный слой

Систему ортогональных декартовых координат выберем таким образом, что плоскость  $xOy$  будет определять один из фрагментов двойного слоя. Тогда ось  $Oz$  будет направлена перпендикулярно слою. Спроецировав векторное уравнение движения пробной молекулы на оси выбранной системы координат, получим

$$m \frac{du}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad (9)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad (10)$$

$$m \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (11)$$

Однородность слоя означает неизменность  $U$  при продвижении по любому из направлений в плоскости  $xOy$ , что, в свою очередь, эквивалентно условиям  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ . Поэтому уравнения (9) и (10) интегрируются точно:

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad (12)$$

где  $u_0, v_0$  – постоянные значения скоростей, которые имела молекула при подходе к слою. В случае однородного слоя оставшееся уравнение (11) можно записать следующим образом:

$$m \frac{dw}{dt} = -\frac{dU}{dz} = -U'(z). \quad (13)$$

Для получения закона движения молекулы через однородный слой  $z = z(t)$  это уравнение необходимо дополнить следующим кинематическим соотношением:

$$\frac{dz}{dt} = w. \quad (14)$$

Получившуюся систему двух дифференциальных уравнений первого порядка удобно интегрировать технологиями типа Рунге – Кутты. В плоскости  $xOy$  движение будет инерциальным, а координаты точки будут определяться линейными уравнениями:

$$x = x_0 + u_0 t, \quad y = y_0 + v_0 t. \quad (15)$$

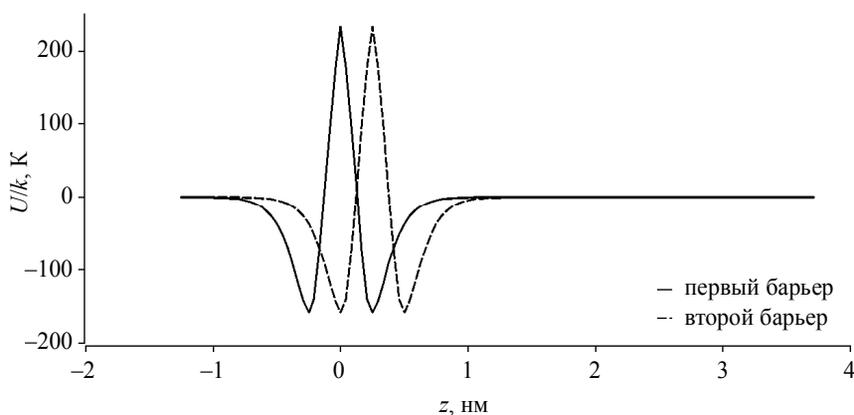
Здесь  $x_0, y_0$  определяют начальное положение по отношению к рассматриваемой плоскости.

Таким образом, при взаимодействии молекул с плоским однородным слоем все косые удары молекул заканчиваются либо регулярным отражением, либо прохождением, при котором угол входа молекулы в слой равен углу выхода. При этом предельная скорость прохождения может быть найдена из анализа лишь поперечного движения.

### Обсуждение результатов

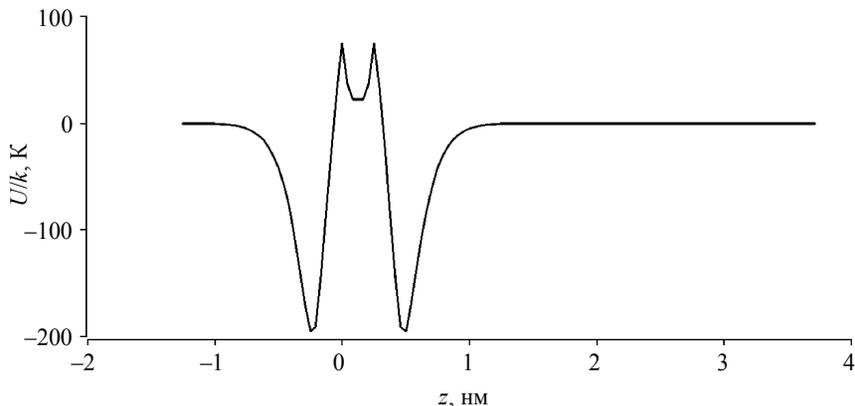
Для гелия расчеты проводились со следующими параметрами для одиночного барьера  $q = 14 \text{ нм}^{-2}$ ,  $\alpha = 10 \text{ с}^2\text{м}^{-2}$ . Данные вычисления показывают, что величина предельной скорости равна 950 м/с. При этом доля прошедших атомов гелия составляет 22 % от числа падающих на слой атомов. Двойной графеновый барьер, рассчитанный также по Пёшлю – Теллеру при  $q = 14 \text{ нм}^{-2}$ ,  $\alpha = 10 \text{ с}^2\text{м}^{-2}$  показал предельную скорость 500 м/с. Это соответствует доли прошедших атомов гелия 52 %. Расчеты также демонстрируют, что для метана двойной барьер является непроницаемым.

На рис. 2 последовательно изображены барьеры каждого из графеновых слоев в отдельности. Причем второй графеновый лист находится на расстоянии 0,25 нм от начала координат. Эта позиция определяет равновесное положение листов друг относительно друга. Величины энергии, представленные на этом рисунке, отвечают степени разрежения, показанной на рис. 1. Видно, что в таком положении координаты максимумов энергии совпадают с точкой минимума потенциального взаимодействия от смежного листа.



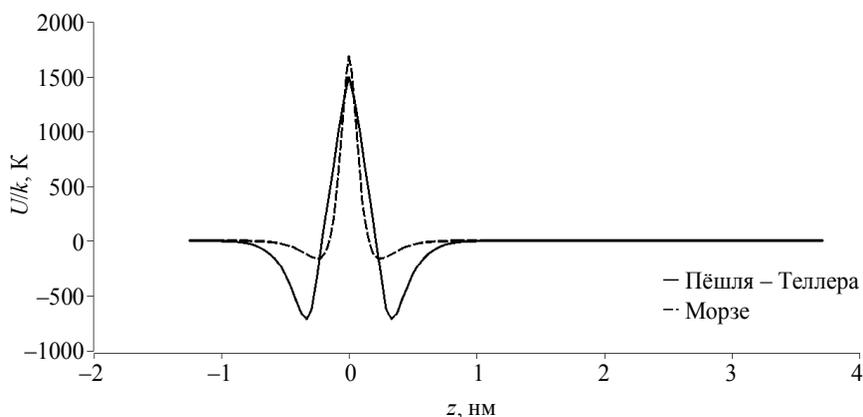
**Рис. 2.** Два барьера для гелия  
**Fig. 2.** Two barriers for helium

На рис. 3 показано суммарное воздействие от двух последовательно расположенных разряженных листов. Видно, что произошло поглощение максимумов ямами и общий уровень положительной энергии барьера снизился немногим более чем в два раза от значений около 200 единиц до значений менее 100 единиц.



**Рис. 3.** Двойной графеновый барьер для гелия  
**Fig. 3.** Double graphene barrier for helium

Принято считать, что потенциал Пёшля – Теллера лучше описывает дальние взаимодействия, по крайней мере если речь идет о сопоставлении с потенциалом Морзе. На дальние взаимодействия – это силы притяжения молекул, которые на энергетическом портрете слоя определяют потенциальные ямы (как суммарное притягивающее воздействие от графеновой структуры). Как видим из рис. 4, потенциал Пёшля – Теллера дает существенно более глубокие ямы в сравнении с потенциалом Морзе. Это, в свою очередь, делает эффект поглощения потенциальными ямами максимумов энергетического барьера в двойном графеновом слое



**Рис. 4.** Графеновый барьер для метана (сплошная линия – потенциал Пёшля – Теллера, пунктир – потенциал Морзе)  
**Fig. 4.** Graphene barrier for methane (the solid line indicates the Pöschl–Teller potential; the dashed line, the Morse potential)

более выраженным и обеспечивает лучшее прохождение атомов гелия при полном запрете в отношении молекул метана. Проводя около десятка пусков атомов гелия с различными значениями поперечной скорости, мы находим  $w_{пр}$  – значение нормальной по отношению к поверхности слоя скорости. Ниже этой скорости атомная частица не проходит однородный слой, а выше уже проходит. Далее по формуле (8) определяется проницаемость слоя.

### Заключение

Несмотря на существенную неоднородность исходной нанопористой структуры проницаемость разряженных графеновых листов найдена разработанным авторами методом эквивалентного однородного слоя. Проведенные расчеты подтверждают полученный ранее на базе квантово-механических моделей результат повышения проницаемости в составных мембранах в сравнении со случаем монослоя для систем произвольного вида и, в частности, для графеновых структур, обрванных разреженными графеновыми листами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Каплан И.Г. Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий. М.: Наука, 1982. 312 с.
2. Галашев А.Е., Полухин В.А. Компьютерное изучение физических свойств медной пленки на поверхности нагретого графена // Физика твердого тела. 2013. Т. 55. № 8. С. 1620–1625.
3. Oluwajobi A., Chen X. The effect of interatomic potentials on the molecular dynamics simulation of nanometric machining // Int. J. Automation & Computing. 2011. V. 8. No 3. P. 326–332. Doi 10.1007/s11633-011-0588-y
4. Bubenchikov M. A., Bubenchikov A. M., Usenko O. V., Ukolov A. V. About a permeability of graphene pores // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2015. V. 87. P. 012111-1–012111-4. DOI: 10.1088/1757-899X/87/1/012111.

Статья поступила 25.12.16 г.

Bubenchikov A.M, Bubenchikov M.A., Tarasov E.A., Usenko O.V., Chelnokova A.S. (2017) SEPARATION OF METHANE-HELIUM MIXTURE BY POROUS GRAPHITE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 80–87

DOI 10.17223/19988621/45/7

In this paper, the permeability of a double layer formed by parallel-laid sheets of sparse graphene is studied theoretically. The performed analysis is based on the Pöschl–Teller intermolecular interaction potential which better describes both the vicinity of the equilibrium position and the distant interactions. The mathematical pores are created by the removal of two consecutive carbon cycles out of the hexagonal structure (twelve atoms of carbon are removed). The pores are uniformly distributed over the graphene sheet and separated from each other by rectilinear hexagonal tapes. The resulting sparse graphene has an average density equal to fourteen atoms per one square nanometer of the sheet area. Despite the essential heterogeneity of the obtained 2D graphene structure, the equivalent uniform layer method developed by the authors is proposed for calculating the permeability of the sparse graphene sheets. This method is based on the Maxwell velocity distribution of the molecules. It allows one to take into account all possible slant-directed blows of molecules on an ultrathin layer. Using this method, the permeability of both monocarbonic layer and, then, double graphene layer were investigated. It is revealed that the permeability of a two-layered membrane increases more than twice in comparison with a one-layer case when the sparse graphene sheets naturally approach each other.

Keywords: molecular dynamics, a Pöschl–Teller potential, the method of equivalent uniform layer, permeability of a double layer.

*BUBENCHIKOV Aleksey Mikhailovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aleksy121@mail.ru

*BUBENCHIKOV Mikhail Alexeevich* (Candidate of Physics and Mathematics, GazpromTransgazTomsk, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

*TARASOV Egor Alexandrovich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: diomedTS@mail.ru

*USENKO Olesya Vadimovna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: usenko.olesya@yandex.ru

*CHELNOKOVA Anna Sergeevna* (Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation) E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

#### REFERENCES

1. Kaplan I.G. (1982) *Vvedenie v teoriyu mezhmolekulyarnykh vzaimodeystviy* [Introduction to the theory of intermolecular interactions]. Moscow: Nauka. 312 p.
2. Galashev A.E., Polukhin V.A. (2013) Komp'yuternoe izuchenie fizicheskikh svoystv mednoy plenki na poverkhnosti nagretogo grafena [Computer study of the physical properties of a copper film on a heated graphene surface]. *Fizika tverdogo tela – Physics of the Solid State*. 55(8). pp. 1733–1738. DOI: 10.1134/S1063783413080118.
3. Oluwajobi A., Chen X. (2011) The effect of interatomic potentials on the molecular dynamics simulation of nanometric machining. *Int. J. Automation & Computing*. 8(3). pp. 326–332. DOI: 10.1007/s11633-011-0588-y.
4. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Ukolov A.V. (2015) About a permeability of graphene pores. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 87. pp. 012111-1–012111-4. DOI: 10.1088/1757-899X/87/1/012111.

УДК 532.529

DOI 10.17223/19988621/45/8

**Н.Н. Дьяченко, Л.И. Дьяченко, В.С. Гурова, С.А. Синеекая****ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ДРОБЛЕНИЯ ЧАСТИЦ КОНДЕНСАТА НА ДВУХФАЗНЫЕ ПОТЕРИ ИМПУЛЬСА В СОПЛАХ РДТТ**

Исследуется влияние аэродинамического дробления жидких частиц оксида алюминия на изменение спектра частиц и энергетические характеристики потока в соплах. Представлены результаты расчётов двухфазных потерь импульса при задании критерия дробления в виде постоянного значения и в виде функциональной зависимости.

**Ключевые слова:** *двухфазное течение, коагуляция и дробление частиц, распределение частиц по размерам.*

Продукты сгорания металлизированного топлива представляют смесь газа и частиц конденсата. Течение является неравновесным, что обуславливает двухфазные потери импульса в сопловом блоке двигателя. Взаимодействие жидких частиц конденсата с газом сопровождается их коагуляцией и дроблением. Дробление частиц газом (аэродинамическое дробление) характеризуется критическим числом Вебера ( $We_{кр}$ ). Наиболее полную библиографию работ, посвящённых двухфазному течению в соплах РДТТ, можно найти в обзоре [1] и монографиях [2, 3]. В инженерных расчётах течения продуктов сгорания алюминизированных смесевых твёрдых топлив критическое число Вебера задаётся равным 17 ( $We_{кр}=17$ ) и предполагается неизменным вдоль тракта сопла [4]. Процесс дробления сложный и зависит как от параметров газового потока, так и от параметров ансамбля жидких частиц, которые меняются вдоль сопла, поэтому критическое число Вебера должно иметь многофункциональную зависимость.

В работе [3] приведена эмпирическая функциональная зависимость, определяющая критическое число Вебера применительно к течению жидких частиц оксида алюминия в соплах РДТТ. Представляет интерес проанализировать влияние функциональной зависимости  $We_{кр}^*$  на основные интегральные характеристики в сопле по сравнению с постоянным значением  $We_{кр}=17$ .

Данная работа посвящена численному исследованию влияния аэродинамического дробления жидких частиц оксида алюминия на характеристики двухфазного течения в сопле РДТТ и сравнительному анализу использования критерия дробления в виде постоянной величины и в виде функциональной зависимости. Учитывая возможности современных порошковых технологий, в исследование включены двухфазные потоки, содержащие высокодисперсные (вплоть до наноразмерных) ансамбли частиц конденсата.

**Постановка задачи**

При описании двухфазного течения предполагается, что течение стационарное, газ идеальный, объём частиц пренебрежимо мал, система теплоизолирована, вязкость учитывается только в процессах взаимодействия частиц с газом, исполь-

зуется непрерывная модель коагуляции частиц и феноменологическая многожидкостная модель среды. При численном расчете непрерывная функция распределения  $f(r)$  заменяется ступенчатой (счетной)  $n(r)$ , весь спектр частиц делится на  $N$  фракций, внутри фракции частицы имеют одинаковый размер, номер фракции определяется индексами  $i, j$ . Произведение  $m_i n_i = \rho_i$  – массовая концентрация частиц  $i$ -й фракции (здесь  $m_i$  – масса одной частицы,  $n_i$  – число частиц). Система квазиодномерных уравнений, описывающих стационарное двухфазное полидисперсное течение с учетом коагуляции и дробления в рамках монодисперсной модели осколков, записывается в виде

$$F \rho U = const ; \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx} F \rho U^2 + F \frac{d}{dx} P = F \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi_{Ri} (U_i - U) ; \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx} F \rho U H_0 = F \sum_{i=1}^N \rho_i [\varphi_{ai} c_p (T_i - T) + \varphi_{Ri} U_i (U_i - U)] ; \tag{3}$$

$$P = \rho R T ; \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx} F \rho_i U_i = F (n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \mathcal{E}_{ij} \Phi_{ij} \rho_j - \rho_i \sum_{j=i}^N K_{ij} \mathcal{E}_{ij} \Phi_{ij} n_j) ; \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx} F n_i U_i = -F n_i \sum_{j=1}^N K_{ij} \mathcal{E}_{ij} \Phi_{ij} n_j ; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F \rho_i U_i^2 = & F [\rho_i \varphi_{Ri} (U - U_i) + K_{ij} \mathcal{E}_{ij} \rho_j (U_j - (1 - \Phi_{ij}) U_i) - \\ & - n_i \sum_{j=1}^i \rho_j \sum_{j=1}^N K_{ij} \mathcal{E}_{ij} n_j (U_i - (1 - \Phi_{ij}) U_i)] ; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F \rho_i U_i T_i = & F [\rho_i \varphi_{ai} \frac{c_p}{c_v} (T - T_i) + \frac{n_i}{c_v} \sum_{j=1}^i K_{ij} \mathcal{E}_{ij} \rho_j E_{ij} + \frac{\rho_i}{c_v} \sum_{j=1}^N K_{ij} \mathcal{E}_{ij} n_j (1 - \Phi_{ij}) E_{ij} + \\ & + T_i (n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \mathcal{E}_{ij} \Phi_{ij} \rho_j - \rho_i \sum_{j=1}^N K_{ij} \mathcal{E}_{ij} \Phi_{ij} n_j)] ; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx} F n_i M_i^2 = F \left[ n_i \varphi_i M_i^2 + n_i \left( 0.0578 \sum_{j=1}^i K_{ij} \mathcal{E}_{ij} n_j M_{omij}^2 - M_i^2 \sum_{j=1}^N K_{ij} \mathcal{E}_{ij} \Phi_{ij} n_j \right) \right] . \tag{9}$$

В системе уравнений  $F = F(x)$  – сечение сопла;  $\rho, U, P, T$  – плотность, скорость, давление, температура газа;  $H_0$  – энтальпия торможения;  $c_p$  – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении;  $c_v$  – удельная теплоемкость вещества;  $R$  – газовая постоянная;  $\varphi_{Ri}, \varphi_{ai}, \varphi_{Mi}$  – функции динамического, теплового и вращательного взаимодействия газа с частицами;  $\rho_i, U_i, T_i$  – плотность, скорость, температура частиц;  $\rho_v$  – плотность вещества частицы;  $K_{ij}$  – константа коагуляции;  $\Phi_{ij}$  – коэффициент эффективности столкновений;  $\mathcal{E}_{ij}$  – коэффициент захвата;  $E_{ij}$  – энергия взаимодействующих частиц;  $M_i$  – момент относительного движения;  $M_{отij}$  – максимальный момент относительного движения. Постановка задачи, система урав-

нений и соответствующие коэффициенты, константы заимствованы из работ [2, 5].

Система уравнений (1) – (9) решалась на основе обратной задачи. Для численного интегрирования системы уравнений газа использовался стационарный аналог нецентральной конечно-разностной схемы Мак-Кормака, второго порядка точности. Интегрирование системы уравнений фракции частиц осуществлялось с помощью неявной разностной схемы, имеющей также второй порядок точности. На входном сечении использовалось условие скоростного и температурного равновесия между газовой фазой и частицами. Течение рассчитывалось в квазиодномерной постановке для модельного радиусно-профилированного сопла [6]. Радиус скругления в горловине сопла равен радиусу критического сечения сопла  $r_*$ , угол поджата в дозвуковой области  $\alpha_1 = 45^\circ$ , углы поджата в сверхзвуковой области  $\alpha_2 = 24^\circ$  и  $\alpha_3 = 7^\circ$  соответственно.

Расчеты проводились при следующих значениях исходных параметров:

$$P_k = 7 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$T_k = 3200 \text{ К};$$

$$\mu = 0.89 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$R = 300 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Расширение сопла  $Y_a = 6$ ; радиус критического сечения сопла  $r_* = 0.1 \text{ м}$ ; весовая доля конденсата  $Z = 0.3$ ; число фракций  $N = 15$ .

Непрерывная функция распределения частиц по размерам на входе в сопло задавалась в виде

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r \ln(\sigma)}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\ln(r) - \ln(r_0)}{\sqrt{2\pi \ln(\sigma)}} \right]^2 \right\}.$$

Здесь  $r_0$  – средний размер частиц,  $\sigma = 1.5$  – дисперсия.

Экспериментальных данных о формировании спектра частиц оксида при горении наноразмерных частиц алюминия в открытой литературе нет, поэтому считалось, что функция  $f(r)$  аналогична случаю горения грубодисперсных порошков, но с меньшим значением  $r_0$ .

В данной работе для сравнительного анализа критическое число Вебера задавалось равным 17 и в виде функциональной зависимости [3]:

$$We_{кр}^* = 13.5 - 0.44A - (9.5 - 0.44A) \exp(0.005A - 0.25)G, \quad (10)$$

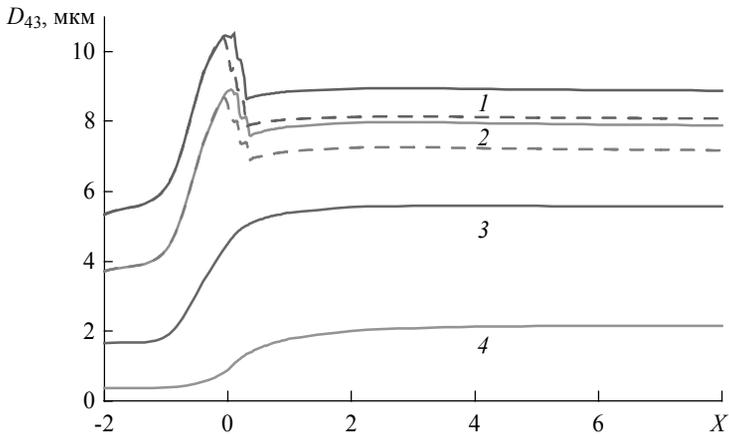
где  $A = \ln(Lp)$ ,  $Lp$  – число Лапласа,  $G = \frac{d We}{dt}$  – темп нарастания воздействия на частицу. Формула (10) справедлива в диапазонах:  $G = 3, \dots, 97$ ;  $Lp = 5, \dots, 3.5 \cdot 10^5$ . Время задержки начала дробления в расчётах не учитывалось.

### Результаты расчётов

В таблице представлены числовые значения среднемассового размера частиц ( $D_{43}$ , мкм) на срезе сопла и двухфазные потери импульса (ДФП, %) в зависимости от среднего радиуса частиц на входе в сопло. Расчёты проведены при задании критического числа Вебера равного 17 ( $We_{кр} = 17$ ) и при задании числа Вебера в виде функциональной зависимости ( $We_{кр} = We_{кр}^*$ ).

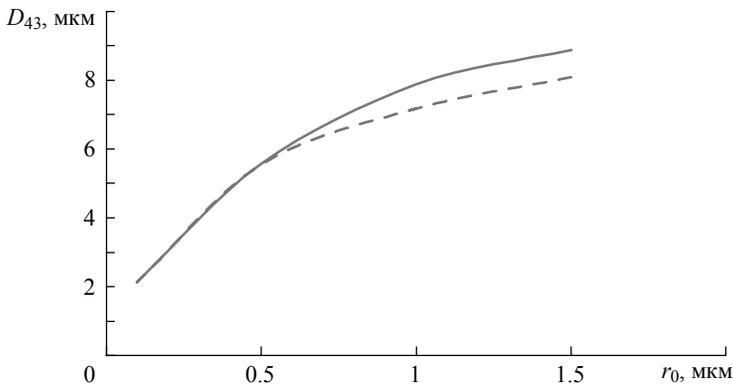
$We_{кр}=17$	$r_0$ , мкм	1,5	1,0	0,5	0,1
	$D_{43cp}$ , мкм	8,877	7,883	5,570	2,139
	ДФП, %	3,7807	3,2764	2,0323	0,4090
$We_{кр}=We_{кр}^*$	$r_0$ , мкм	1,5	1,0	0,5	0,1
	$D_{43cp}$ , мкм	8,085	7,174	5,549	2,139
	ДФП, %	3,7429	3,2473	2,0319	0,4090

На рис. 1 – 3 результаты расчётов представлены в графическом виде. Сплошные линии графиков соответствуют расчётам при  $We_{кр}=17$ , пунктирные – при  $We_{кр}=f$ .



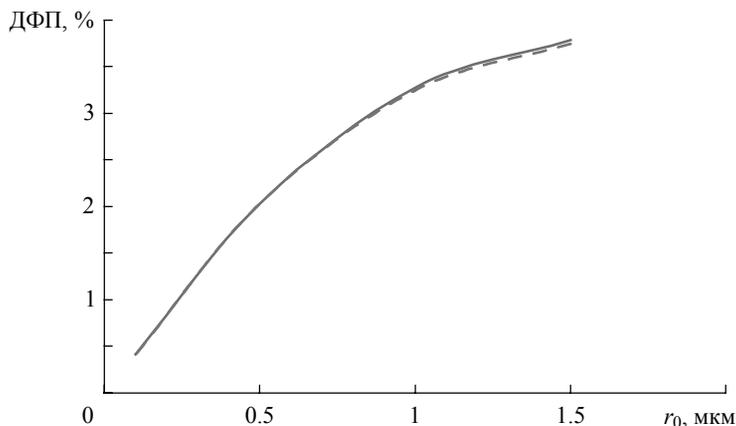
**Рис. 1.** Изменение среднемассового размера частиц вдоль сопла (кр. 1 –  $r_0=1.5$  мкм; кр. 2 –  $r_0=1$  мкм; кр. 3 –  $r_0=0.5$  мкм; кр. 4 –  $r_0=0.1$  мкм)

**Fig. 1.** Variation in the mass-averaged size of particles along the nozzle ( $r_0 = (1) 1.5, (2) 1, (3) 0.5, \text{ and } (4) 0.1 \mu\text{m}$ )



**Рис. 2.** Изменение среднемассового размера частиц на срезе сопла от среднего радиуса частиц на входе в сопло

**Fig. 2.** Variation in the mass-averaged size of particles at the nozzle exit with the mean radius of particles at the nozzle inlet



**Рис. 3.** Зависимость двухфазных потерь импульса от среднего радиуса частиц на входе в сопло  
**Fig. 3.** Two-phase impulse losses as a function of mean radius of particles at the nozzle inlet

Для грубодисперсных ансамблей частиц ( $r_0 = 0.5-1.5$  мкм) спектр частиц формируется за счёт процессов коагуляции и дробления. Максимальное проявление этих процессов в районе минимального сечения сопла, где максимальный градиент разности скоростей газа и частиц.

Для высокодисперсных ансамблей частиц ( $r_0 = 0.1-0.5$  мкм) спектр частиц формируется только за счёт процесса коагуляции.

### Заключение

Для мелкодисперсных ансамблей частиц оксида алюминия ( $r_0 = 1,5-0,5$  мкм) использование функциональной зависимости для числа Вебера сопровождается понижением среднемассового размера частиц ( $D_{43}$ ) на срезе сопла на  $\sim 9\%$  и, как следствие, понижением двухфазных потерь на  $0,11\%$ . Высокодисперсные ансамбли ( $r_0 < 0,5$  мкм) аэродинамического дробления не испытывают. Для инженерных расчётов течения двухфазных продуктов сгорания металлизированного твёрдого топлива в соплах РДТТ при использовании порошка алюминия достаточно задавать значение критического числа Вебера равное 17, при научных исследованиях и больших значениях весовой доли конденсата, видимо, необходимо использовать число Вебера в виде функциональной зависимости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техн. Комплексные и специальные разделы механики. М.: Изд. ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 3–80.
2. Васенин И.М. Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
3. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
4. Тишин А.П. Особенности течения двухфазных продуктов в сопле // Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. М.: ВИНТИ АН СССР, 1971. Т. 1. С. 190–220.

5. Глазунов А.А., Дьяченко Н.Н., Дьяченко Л.И. Численное исследование течения ультрадисперсных частиц оксида алюминия в сопле ракетного двигателя твёрдого топлива // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 1. С. 81–88.
6. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Газовая динамика сопел. М.: Наука, 1990. 366 с.

Статья поступила 14.11.2016 г.

Dyachenko N.N., Dyachenko L.I., Gurova V.S., Sineokaya S.A. (2017) NUMERICAL INVESTIGATION OF THE EFFECT OF AERODYNAMIC FRAGMENTATION OF CONDENSATE PARTICLES ON THE TWO-PHASE IMPULSE LOSSES IN A SOLID-FUEL ROCKET ENGINE NOZZLE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(44). pp. 88–94

DOI 10.17223/19988621/45/8

The work is devoted to numerical investigation of the effect of aerodynamic fragmentation of aluminum oxide liquid particles on the characteristics of two-phase flow in a nozzle of solid-propellant rocket engine and to comparative analysis of the application of the fragmentation criterion in the form of a constant value or a functional dependency.

Combustion products of a metallized fuel form a mixture of gas and condensate particles. The flow is non-equilibrium, which induces two-phase impulse losses in the engine nozzle. The interaction of liquid condensate particles with a gas is accompanied by their fragmentation and coagulation. The interaction of the particles is described based on the continuous approach to variation in the size distribution function. The aerodynamic fragmentation of particles is characterized by a critical Weber number which is equal to 17 in the engineering calculations. The fragmentation is a complex process which depends both on parameters of the gas flow and parameters of the ensemble of liquid particles which change along the nozzle. Therefore, the critical Weber number must be multifunctional dependent.

An empirical functional dependence determining the critical Weber number is shown. The results of calculations of two-phase impulse losses with the fragmentation criterion in the form of a constant value or a functional dependence are presented.

Keywords: two-phase flow, coagulation and fragmentation of the particles, size distribution of the particles.

*DYACHENKO Nikolay Nikolaevich* (Doctor of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: prof.dyachenko@gmail.com

*DYACHENKO Lyudmila Ivanovna* (Candidate of Physics and Mathematics,  
Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University,  
Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: prof.dyachenko@gmail.com

*GUROVA Valeriya Sergeevna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: valery0995@mail.ru

*SINEOKAYA Sofiya Aleksandrovna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: sophia1994@mail.ru

#### REFERENCES

1. Shrayber A.A. (1988) Mnogofaznye polidispersnye techeniya s peremennym fraktsionnym sostavom diskretnykh vklyucheniy [Multiphase polydisperse flows with variable fractional composition of discrete inclusions]. *Itogi nauki i tekhniki. Kompleksnye i spetsial'nye razdely mekhaniki – Surveys in Science and Technology. Complex and Special Sections of Mechanics*. Moscow: VINITI. 3. pp. 3–80.

2. Vasenin I.M. et al. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Tomsk State University. 262 p.
3. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie. 320 p.
4. Tishin A.P. (1971) Osobennosti techeniy dvukhfaznykh produktov v sope [Singularities of the flow of two-phase products in the nozzle]. *Termodinamicheskiye i teplofizicheskiye svoystva produktov sgoraniya – Thermodynamic and Thermophysical Properties of the Combustion Products*. Moscow: VINITI ANSSSR. 1. pp. 190–220.
5. Glazunov A.A. et al. (2013) Chislennoe issledovanie techeniya ultradispersnykh chastits oksida alyuminiya v sope raketnogo dvigatelya tverdogo topliva [Numerical investigation of the flow of ultrafine aluminum oxide particles in the nozzle of a solid-propellant rocket engine]. *Teplofizika i aeromekhanika*. 20(1). pp. 81–88.
6. Pirumov U.G., Roslyakov G.S. (1990) *Gazovaya dinamika sopol* [Gas dynamics of nozzles]. Moscow: Nauka. 366 p.

УДК 536.46+536.24  
DOI 10.17223/19988621/45/9

**В.А. Порязов, А.Ю. Крайнов**

## ГОРЕНИЕ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА С ДОБАВЛЕНИЕМ ПОРОШКА АЛЮМИНИЯ ПРИ ПЕРЕГРУЗКАХ<sup>1</sup>

Представлена физико-математическая модель горения металлизированного твердого топлива при перегрузках, направленных по нормали к поверхности горения. Модель учитывает тепловой эффект разложения конденсированной фазы, конвекцию, диффузию, экзотермическую химическую реакцию в газовой фазе, нагрев и горение частиц алюминия в потоке газа, движение продуктов сгорания, скоростное отставание частиц от газа, влияние поля ускорений на движение частиц алюминия. Учитывается влияние размера и массовой доли в составе топлива вылетающих с поверхности горения частиц металла на скорость горения. Исследовано влияние размера вылетающих с поверхности горения частиц алюминия на линейную скорость горения при перегрузке.

**Ключевые слова:** *твердое топливо, скорость горения, перегрузки, частицы алюминия, газовая фаза.*

Впервые в отечественной научной литературе проблематика влияния положительных и отрицательных перегрузок на скорость горения конденсированных высокоэнергетических систем сформулирована в начале 60-х годов XX века. Исследователями было показано, что перегрузка, направленная по нормали к поверхности горения металлизированного твердого топлива, может увеличивать скорость горения.

Авторами [1] изучены закономерности горения поливинилнитрата под действием массовых сил в двух направлениях. В работе [2] предполагается, что скорость горения составов при перегрузках увеличивается за счет удержания у поверхности горения инерционными силами каких-либо конденсированных частиц. На основе экспериментальных данных предложена модель горения алюминизированных твердых топлив при перегрузках, теоретически показаны максимальное и минимальное увеличение скорости горения. Как показано в работе [3], перегрузки не влияют на скорость горения безметалльных составов, а отклик скорости горения металлизированных составов на рост перегрузки тем выше, чем крупнее частицы металла в его составе. Авторами [4] экспериментально и теоретически изучено горение алюминизированных составов. Измерены скорость горения, масса и состав образованного шлака. Предложена модель горения алюминизированных составов при перегрузках. Теоретически предсказаны максимальное и минимальное увеличение скорости горения и продолжительности переходного режима в зависимости от величины перегрузок и характеристик составов. В [5] представлено исследование влияния перегрузки на горение баллистических составов на основе нитроклечатки, нитроглицерина и диэтиленгликольдинитрата без добавления

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-03-02578 А.

порошков металла и с добавлением 15 % по массе частиц алюминия диаметром 4 мкм при перегрузках до 800g или добавками катализаторов. Показано, что под действием перегрузок, направленных по нормали к поверхности горения порохов с добавками катализаторов, происходит уменьшение эффективности их действия, вплоть до полного выключения катализатора. Отмечено, что поле перегрузок может существенно изменять закон горения таких составов. Авторами [6] изучено влияние перегрузок до 1000g на скорость горения СТГ на основе ПХА, содержащих до 80 % по массе порошка алюминия АСД-1. Показано, что перегрузка не влияет на величину скорости горения безметалльных составов. С ростом ускорений, направленных к поверхности топлива, скорость горения всех исследованных металлизированных составов повышалась. Показано, что увеличение массовой доли алюминия от 10 до 45 % приводит к уменьшению относительной величины роста скорости горения при перегрузках. Увеличение давления приводит к уменьшению относительной скорости горения для составов, содержащих более 45% по массе алюминия. Из теоретического анализа экспериментальных данных получено соотношение для оценки увеличения скорости горения. При экспериментальном исследовании горения баллиститных порохов с добавлением окислов металлов [7] при перегрузках, превышающих 400g, обнаружено образование в порохе неразгорающих каналов, направленных в глубь заряда, предложен механизм описания данного явления.

В данной работе представлена математическая модель горения твердого топлива с добавлением порошка алюминия в поле перегрузок. В модели учитывается экзотермическая химическая реакция в газовой фазе, конвекция и диффузия реагента, нагрев, зажигание и горение частиц алюминия в потоке газа, движение продуктов сгорания, отставание скорости движения частиц от газа, влияние перегрузки на движение частиц алюминия. Горение частиц алюминия описывается на основе экспериментальных данных [8], а воспламенение частицы алюминия происходит при достижении ею определенной температуры. Математическая модель горения твердого топлива с добавлением порошка алюминия в поле ускорений строилась на основе моделей [9, 10].

Рассматриваемая математическая модель состоит из уравнений сохранения энергии газа и частиц алюминия, уравнений сохранения массы газа, массы частиц и числа частиц алюминия, уравнения выгорания реагента в газовой фазе, уравнения движения частиц в потоке газа и уравнения состояния газа. Система уравнений, записанная в системе координат, связанной с поверхностью горения, имеет вид

$$c_2 \rho_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial t} + u \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + Y \rho_2 k_0 Q_2 \exp \left( \frac{-E_2}{R_y T_2} \right) + 4\pi \alpha r_k^2 n (T_3 - T_2); \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial t} + u \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - Y k_0 \exp \left( \frac{-E_2}{R_y T_2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u)}{\partial x} = -G; \quad (3)$$

$$c_3 \rho_3 \left( \frac{\partial T_3}{\partial t} + w \frac{\partial T_3}{\partial x} \right) = -4\pi \alpha r_k^2 n (T_3 - T_2) + G Q_{Al} \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_3 w)}{\partial x} = G; \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = -\tau_{fr} - a; \quad (6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nw)}{\partial x} = 0; \quad (7)$$

$$P = \rho_2 R T_2 = const. \quad (8)$$

В этой системе, (1) и (4) – уравнения энергии для газовой фазы и частиц, (2) – уравнение для глубины выгорания, (3) – уравнение сохранения массы газовой фазы, (5) – уравнение сохранения массы частиц, (6) – уравнение движения частиц, (7) – уравнение для числа частиц, (8) – уравнение состояния идеального газа.

Принятые обозначения:  $c$  – удельная теплоемкость;  $D$  – коэффициент диффузии;  $E_2$  – энергия активации реакции в газовой фазе;  $G$  – скорость изменения массы частиц при их горении;  $k_0$  – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса;  $n$  – число частиц в единице объема;  $P$  – давление;  $Q_2$  – тепловой эффект реакции в газовой фазе;  $Q_{Al}$  – теплота сгорания алюминия;  $r_k$  – размер частицы;  $R$  – газовая постоянная;  $R_y$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – температура;  $t$  – время;  $u$  – скорость газа;  $w$  – скорость частиц;  $x$  – координата;  $Y$  – концентрация горючего в газовой фазе;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\rho_2$  – плотность газа;  $\rho_2$  – приведенная плотность частиц (масса частиц в единице объема);  $\rho_k$  – плотность частицы в потоке продуктов сгорания;  $\mu_{Al}$ ,  $\mu_O$  – молярные массы молекул алюминия и кислорода;  $\tau_{fr}$  – сила взаимодействия частиц с газом;  $a$  – величина перегрузки, направленной по нормали к поверхности горения. Индексы: 1 – параметры топлива; 2 – параметры газовой фазы; 3 – параметры конденсированной фазы продуктов горения. Расчеты проводились при теплотехнических характеристиках, соответствующих пороху Н:

$$c_1 = 1465 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad c_2 = 1466.5 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad c_3 = 760 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad Q_1 = 556800 \text{ Дж}/\text{кг}, \quad Q_2 = 2435300 \text{ Дж}/\text{кг},$$

$$Q_{Al} = 36510000 \text{ Дж}/\text{кг}, \quad \rho_1 = 1600 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad \rho_{Al} = \rho_k = 2600 \text{ кг}/\text{м}^3,$$

$$\eta = 0.00005 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad E_1 = 79733 \text{ Дж}/\text{моль}, \quad E_2 = 186107 \text{ Дж}/\text{моль},$$

$$R_y = 8.31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \quad R = 264.36 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad K_v = 8.46 \text{ м}/\text{с},$$

$$k_0 = 0.98 \cdot 10^{10} \text{ 1}/\text{с}, \quad k_{Al} = 2.22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1.5}/\text{с}, \quad T_{1,0} = 293 \text{ К}, \quad \mu_{Al} = 0.027 \text{ кг}/\text{моль},$$

$$\mu_O = 0.016 \text{ кг}/\text{моль}, \quad D_2 = Le \cdot \lambda_2 / (c_2 \rho_2), \quad Le = 1.$$

Координата  $x = 0$  соответствует поверхности горения. Согласно модели Беляева – Зельдовича, когда разложение пороха до газовой фазы рассматривается как брутто-реакция с тепловым эффектом  $Q_1$  и энергией активации  $E_1$ , линейная скорость горения,  $V_k$ , определяется температурой поверхности конденсированной фазы [11]:

$$V_k = K_v \exp\left(\frac{-E_1}{2R_y T_S}\right), \quad (9)$$

где  $K_v$  – эмпирическая константа;  $T_S$  – температура поверхности горения;  $E_1$  – энергия активации реакции в конденсированной фазе.

На границе  $x = 0$  граничные условия выражают законы сохранения массы и энергии:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_{Al})\rho_1 V_k &= \rho_2 u|_{x=0}, \quad \alpha_{Al}\rho_1 V_k = \rho_3 w|_{x=0}, \\ \rho_1 V_k Y &= D_2 \rho_2 \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_{x=0} + \rho_2 u Y|_{x=0}, \\ \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \rho_1 V_k (c_2 T_2|_{x=0} - Q_1 - c_1 T_{1,0}), \quad T_3|_{x=0} = T_2|_{x=0}, \\ \rho_2|_{x=0} &= \frac{P}{RT_2|_{x=0}}, \quad n|_{x=0} = \frac{\rho_3|_{x=0}}{(4/3)\pi r_{Al,0}^3 \rho_k}, \quad P = const. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $r_{Al,0}$  – радиус частицы алюминия, выходящей с поверхности горения пороха  $N$  в газовый поток,  $T_{1,0}$  – начальная температура пороха,  $T_2|_{x=0} \equiv T_S$ .

На границе  $x = \infty$  ставятся следующие граничные условия:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0. \quad (11)$$

Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} T_2(x, 0) &= T_{ign}, \quad T_3(x, 0) = T_{ign}, \\ Y(x, 0) &= 0, \quad \rho_2(x, 0) = \frac{P}{RT_2(x, 0)}, \\ \rho_3(x, 0) &= 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad n(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Сила взаимодействия частиц алюминия с газом вычисляется по формуле

$$\tau_{tr} = \frac{F_{tr}}{\frac{4}{3}\pi r_k^3 \rho_k}, \quad F_{tr} = C_R S_m \frac{\rho_2 (w - u) |u - w|}{2}, \quad (13)$$

где  $S_m$  – площадь миделева сечения;  $F_{tr}$  – сила сопротивления сферы при обтекании;  $C_R$  – коэффициент сопротивления.

Коэффициент сопротивления определяется как в [10] по эмпирической формуле:

$$C_R = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,682}), \quad Re = \frac{2r_k \rho_2 |u - w|}{\eta},$$

где  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости.

Коэффициент теплоотдачи определяется по формуле [12]

$$\alpha = \frac{Nu \lambda_2}{2r_k}, \quad Nu = 2 + \sqrt{Nu_l^2 + Nu_t^2}, \quad (14)$$

где  $Nu_l = 0,664 Re^{0,5}$ ,  $Nu_t = 0,037 Re^{0,8}$ ,  $Nu$  – число Нуссельта.

Выражение для скорости изменения массы частиц при их горении определяется как в [10]:

$$G = \frac{3\mu_O}{2\mu_{Al}} n \rho_k 4\pi r_{Al}^{1,5} k_{Al} a_{ox}^{0,9}, \quad k_{Al} = 2,22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1,5}/\text{с}, \quad (15)$$

где  $a_{ox}$  – коэффициент избытка окислителя.

Размер оставшейся части алюминия в частице,  $r_{Al}$ , определяется из числа частиц в единице объема  $n$  и приведенной плотности частиц  $\rho_3$  по формуле

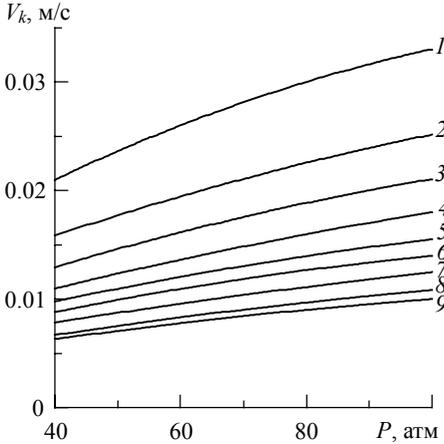
$$r_{Al} = \left[ \left( \left( 1 + \frac{3\mu_O}{2\mu_{Al}} \right) r_{Al,0}^3 - \frac{\rho_3}{(4/3)\pi n \rho_k} \right) \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} \right]^{1/3}. \quad (16)$$

Система уравнений (1) – (8) с граничными и начальными условиями (10) – (12) и выражениями (9), (13) – (16) решалась численно. Уравнения (1) и (2) – по неявной разностной схеме методом прогонки. Уравнения (3) – (7) – по явной разностной схеме с использованием аппроксимации конвективных слагаемых разностями против потока. Для устойчивости численного решения использовалось условие устойчивости вида  $\Delta t < \Delta x / \max[u_i]$ , где  $\Delta t$  – величина шага по времени,  $\Delta x$  – величина шага по пространству,  $u_i$  – величина скорости в точках разностной сетки.

Система уравнений (1) – (10) решалась в соответствии со следующим алгоритмом вычисления значений неизвестных на  $n+1$ -м временном слое (счет шага по времени). По формуле (9) вычисляется скорость  $V_k$ . По уравнению (2), записанному в разностной форме, вычисляется выгорание горючего газовой фазы на  $n+1$ -ом временном слое. По уравнению (1) вычисляется температура горючего газовой фазы на  $n+1$ -ом временном слое. По уравнению (8) – плотность газа при заданном давлении над поверхностью горения, а по уравнению (3) – скорость газа, по уравнению (4) – температура частиц, по уравнению (6) – скорость движения частиц, по уравнению (7) – количество частиц в единице объема, по уравнению (5) – плотность частиц. С использованием разностной аппроксимации граничных условий (10) определяется температура поверхности пороха на новом временном слое и линейная скорость горения пороха. Счет шага по времени повторяется необходимое количество раз. Расчеты проводятся до установления стационарного распределения параметров газодисперсной среды над поверхностью горения пороха.

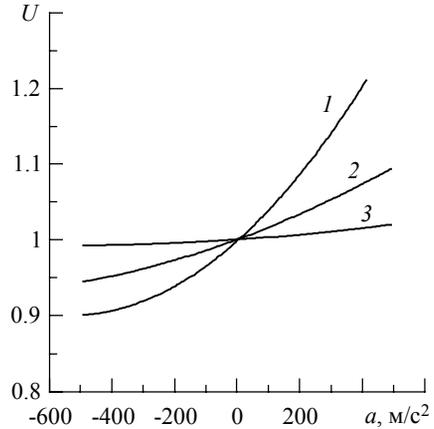
На рис. 1 представлена зависимость скорости горения пороха  $H$  от давления при массовой концентрации алюминия 9 % и различных значениях  $r_{Al,0}$  в отсутствие перегрузки. Вид зависимости соответствует качественной зависимости, предсказанной А.Ф. Беляевым [13].

В рамках построенной модели проведено исследование влияния перегрузок в диапазоне от  $-50g$  до  $50g$ , направленной по нормали к поверхности горения, на величину скорости горения пороха  $H$  с добавлением частиц алюминия радиусом от 1 до 30 мкм в диапазоне давлений 20 – 100 атм. Массовая концентрация алюминия в составе топлива задавалась равной 9 %. Результаты расчета зависимости скорости горения от перегрузки, направленной по нормали к поверхности горения представлены на рис. 2. Скорости горения представлены в виде зависимости безразмерной величины  $U$  от величины перегрузки  $a$ , где  $U = V_k / V_{k,0}$ ,  $V_k$  – скорость горения при заданной величине перегрузки, а  $V_{k,0}$  – скорость горения без перегрузки, рассчитанные для каждого значения величины давления и дисперсности частиц алюминия. Фактически, рис. 2 отражает прирост скорости в процентах с ростом перегрузки для каждого состава при заданном давлении над поверхностью горения.



**Рис. 1.** Зависимость скорости горения пороха Н от давления в отсутствие перегрузок ( $a = 0$ ). Массовая концентрация алюминия 9%;  $r_{Al,0}$ , мкм: кр. 1 – 1, кр. 2 – 2, кр. 3 – 3, кр. 4 – 5, кр. 5 – 7, кр. 6 – 10, кр. 7 – 15, кр. 8 – 30, кр. 9 – 45

**Fig. 1.** The rate of powder combustion N as a function of pressure in the absence of acceleration loading ( $a=0$ ). Aluminum mass concentration is 9%.  $r_{Al,0} = (1) 1, (2) 2, (3) 3, (4) 5, (5) 7, (6) 10, (7) 15, (8) 30, \text{ and } (9) 45 \mu\text{m}$



**Рис. 2.** Зависимость скорости горения пороха Н от перегрузки при различных значениях размера частиц алюминия  $r_{Al,0}$ , мкм: кр. 1 – 15, кр. 2 – 10, кр. 3 – 5;  $P = 40$  атм

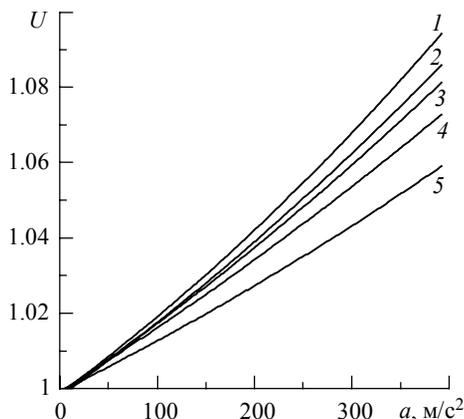
**Fig. 2.** The rate of powder combustion N as a function of the acceleration loading at different aluminum particle sizes:  $r_{Al,0} = (1) 15, (2) 10, \text{ and } (3) 5 \mu\text{m}$ .  $P = 40 \text{ atm}$

Практический интерес представляет информация о росте скорости горения под действием перегрузки, направленной по нормали к поверхности горения, и влияние на этот эффект давления над поверхностью горения и массовой доли порошка алюминия в составе топлива.

Для каждого состава величина скорости горения изменяется тем сильнее, чем выше величина перегрузки. Видно (рис. 2), что чем больше размер частиц алюминия, вылетающих с поверхности горящего топлива, тем больше относительное изменение скорости горения от перегрузки.

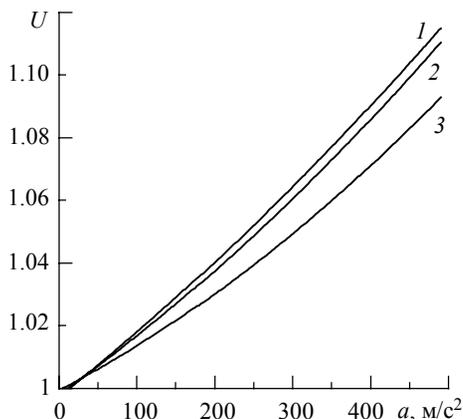
Увеличение давления над поверхностью горения приводит к более существенному росту скорости горения при заданной величине перегрузки (рис. 3). Таким образом, отклик относительной скорости горения к росту перегрузки тем выше, чем выше давление над поверхностью горения. Увеличение массовой доли алюминия до 20% в составе топлива приводит к увеличению скорости горения для одинаковых значений величины перегрузки (рис. 4).

В результате проведенного исследования показано, что скорость горения составов твердого топлива при перегрузках, направленных по нормали к поверхности горения, увеличивается за счет удержания у поверхности горения инерционными силами частиц алюминия. С ростом величины перегрузки частицы алюминия, выходящие в газовый поток с поверхности пороха, достигают температуры начала их горения на меньшем расстоянии от поверхности горения, в связи с этим увеличивается температура газа вблизи поверхности пороха, что приводит к увеличению кондуктивного теплового потока к ней и, как следствие, к увеличению температуры поверхности пороха и линейной скорости его горения.



**Рис. 3.** Зависимость скорости горения пороха Н от перегрузки при различных давлениях  $P$ , атм: кр. 1 – 100, кр. 2 – 80, кр. 3 – 60, кр. 4 – 40, кр. 5 – 20;  $r_{\text{Al},0} = 10$  мкм

**Fig. 3.** The rate of N powder combustion as a function of acceleration loading at different pressure values:  $P = (1)$  100,  $(2)$  80,  $(3)$  60,  $(4)$  40, and  $(5)$  20 atm;  $r_{\text{Al},0} = 10$   $\mu\text{m}$



**Рис. 4.** Зависимость скорости горения пороха Н от перегрузки при различных значениях массовой доли частиц алюминия в составе топлива,  $r_{\text{Al},0} = 10$  мкм,  $P = 80$  атм. Массовая доля алюминия в составе топлива: кр. 1 – 20 %, кр. 2 – 7 %, кр. 3 – 3 %

**Fig. 4.** The rate of powder combustion N as a function of acceleration loading for different aluminum mass fractions in the propellant.  $r_{\text{Al},0} = 10$   $\mu\text{m}$ ,  $P = 80$  atm. Aluminum mass fraction in the propellant is  $(1)$  20%,  $(2)$  7%, and  $(3)$  3%

Полученные результаты зависимости скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия в поле ускорений качественно согласуются с зависимостями, описанными в научной литературе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максимов Э.И., Максимов Ю.М., Мержанов А.Г. Исследование горения конденсированных веществ в поле массовых сил // Физика горения и взрыва. 1967. Т. 3. № 3. С. 323–327.
2. Орджоникидзе С.К., Марголин Д.А., Похил П.Ф., Уралов А.С. Горение алюминизированных конденсированных систем при перегрузках // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7. № 4. С. 536–544.
3. Максимов Ю.М., Максимов Э.И., Вилюнов В.Н. Влияние перегрузок на горение модельных смесевых металлизированных составов // Физика горения и взрыва. 1974. Т. 10. № 2. С. 169–177.
4. Марголин А.Д., Крупкин В.Г. Влияние конденсированных добавок на скорость горения пороха в поле ускорений // Физика горения и взрыва. 1975. Т. 11. № 5. С. 702–709.
5. Марголин А.Д., Крушин В.Г., Хубаев В.Г. и др. Закономерности горения баллиститных составов при перегрузках // Физика горения и взрыва. 1978. Т. 14. № 6. С. 29–36.
6. Марголин А.Д., Крупкин В.Г. Влияние перегрузок на скорость горения составов, содержащих до 80% алюминия // Физика горения и взрыва. 1978. Т. 14. № 3. С. 42–49.
7. Архипов В.А., Барсуков В.Д., Березиков А.П., Третьяков Н.С. Особенности горения конденсированных систем с катализаторами в условиях перегрузки // Хим. физика и мезоскопия. 2006. Т. 8. № 1. С. 43–51.
8. Беляев А.Ф., Фролов Ю.В., Коротков А.И. О горении и воспламенении частиц мелкодисперсного алюминия // Физика горения и взрыва. 1968. Т. 4. № 3. С. 323–329.

9. Poryazov V.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. Simulating the combustion of n powder with added finely divided aluminum // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. V. 88. No. 1. P. 94–103. DOI: 10.1007/s10891-015-1171-0.
10. Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Математическое моделирование горения замороженной суспензии нанодисперсного алюминия // *Физика горения и взрыва*. 2016. Т. 52. № 2. С. 60–66.
11. Зельдович Я.Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1942. Т. 12. С. 498–524. (В книге: Зельдович Я.Б. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика. М.: Наука. 1984. 374 с.).
12. *Справочник по теплообменникам*: в 2 т. Т. 1. М.: Энергоатомиздат, 1987.
13. Беляев А.Ф. Горение, детонация и работа взрыва конденсированных систем. М.: Наука, 1968.

Статья поступила 21.11.2016 г.

Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2017) COMBUSTION OF THE SOLID PROPELLANT WITH ADDITION OF ALUMINUM POWDER UNDER AN ACCELERATION LOAD. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 95–103

DOI 10.17223/19988621/45/9

The paper presents a physical-mathematical model for the metallized solid propellant combustion under an acceleration load directed normally to the burning surface. The model takes into account the thermal effect of decomposition of the condensed phase, convection, diffusion, the exothermic chemical reaction in a gas phase, heating and combustion of Al particles in the gas flow, the flow of combustion products, the velocity lag of the particles in relation to the gas, and the acceleration field effect on the motion of Al particles. The effect of the size and mass fraction of Al particles emitted from the burning surface on the combustion rate is also taken into consideration. The impact of the size of Al particles emitted from the burning surface, on the linear burning rate has been investigated under an acceleration load. The research results showed that the combustion rate increased with increasing acceleration load. It was also revealed that the larger the size of aluminum particles emitted from the burning surface, the higher the response of the combustion rate to the acceleration load. The results showed that increasing mass fraction of aluminum in the propellant composition led to an increase in the response of the relative combustion rate. It was also found that the relative combustion rate sensitivity increased with an increase in pressure above the burning surface. The results obtained are in a qualitative agreement with those described in the scientific literature.

Keywords: solid propellant, combustion rate, acceleration loading, aluminum particles, gas phase.

*KRAINOV* *Aleksey Yurevich* (Doctor of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

*PORYAZOV* *Vasily Andreevich* (Candidate of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: poryazov@mail.ru

#### REFERENCES

1. Maksimov E.I., Maksimov Yu.M., Merganov A.G. (1967) Combustion of condensed substances in a mass force field. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 3(3). pp. 201–203. DOI: 10.1007/BF00791860.
2. Ordzhonikidze S.K., Margolin A.D., Pokhil P.F., Uralov A.S. (1971) Combustion of aluminized condensed systems under acceleration loading. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 7(4). pp. 458–464. DOI: 10.1007/BF00740676.

3. Maksimov Yu.M., Maksimov E.I., Vilyunov V.N. (1974) Effect of overcharges on the combustion of model mixed metallized compositions. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 10(2). pp. 146–153. DOI: 10.1007/BF01464168.
4. Margolin A.D., Krupkin V.G. (1975) Influence of condensed admixtures on the powder combustion rate in an acceleration field. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 11(5). pp. 600–605. DOI: 10.1007/BF00751082.
5. Margolin A.D., Krupkin V.G., Khubaev V.G. et al. (1978) Laws governing the combustion of ballistic compositions with overloads. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 14(6). pp. 716–722. DOI: 10.1007/BF00786099.
6. Margolin A.D., Krupkin V.G. (1975) Effect of overloads on the combustion rate of compositions containing up to 80% aluminum. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 11(5). pp. 600–605. DOI: 10.1007/BF00740493.
7. Arkhipov V.A., Barsukov V.D., Berezikov A.P., Tretyakov N.S. (2006) Osobennosti goreniya kondensirovannykh sistem s katalizatorami v usloviyakh peregruzki [Features of the condensed system combustion with catalysts under overload conditions]. *Khimicheskaya Fizika i Mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopics*. 8(1). pp. 43–51.
8. Belyaev A.F., Frolov Yu.V., Korotkov A.I. (1968) Combustion and ignition of particles of finely dispersed aluminum. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 4(3). pp. 182–185. DOI: 10.1007/BF00750857.
9. Poryazov V.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2015) Simulating the combustion of n powder with added finely divided aluminum. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 88(1). pp. 94–103. DOI: 10.1007/s10891-015-1171-0.
10. Krainov A.Yu., Poryazov V.A. (2016) Mathematical modeling of combustion of a frozen suspension of nanosized aluminum. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 52(2). pp. 177–183. DOI: 10.1134/S0010508216020076.
11. Zel'dovich Ya.B. (1942) K teorii goreniya porokhov i vzryvchatykh veshchestv [On the theory of combustion of gunpowder and explosives]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki*. 12. pp. 498–524.
12. *Spravochnik po teploobmennikam* (1987) [Handbook of the heat exchangers]. V. 1. Moscow: Energoatomizdat.
13. Belyaev A.F. (1968) *Gorenie, detonatsiya i rabota vzryva kondensirovannykh sistem* [Burning, detonation, and explosion work of condensed systems]. Moscow: Nauka.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АЗИН Антон Владимирович** – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

**БОШЕНЯТОВ Борис Владимирович** – доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН). E-mail: bosbosh@mail.ru

**БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: alexy121@mail.ru

**БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий специалист отдела инновационного развития и интеллектуальной собственности производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск». E-mail: michael121@mail.ru

**БУХТЯК Михаил Степанович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

**ГУРОВА Валерия Сергеевна** – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: valery0995@mail.ru

**ДЬЯЧЕНКО Людмила Ивановна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com

**ДЬЯЧЕНКО Николай Николаевич** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com

**ЗАБАРИНА Анна Ивановна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Томского государственного педагогического университета. E-mail: aizabarina@gmail.com

**ИВАНОВ Дмитрий Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественнонаучных и математических дисциплин Московской государственной академии водного транспорта. E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

**КАСУМОВ Рашид Атахан** – старший преподаватель кафедры физики, математики и информатики факультета естественных наук Ленкоранского государственного университета, г. Ленкорань, Азербайджанская Республика. E-mail: rasid5757@mail.ru

**КРАЙНОВ Алексей Юрьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

**ПЕСТОВ Герман Гаврилович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа Томского государственного университета.

**ПОНОМАРЕВ Сергей Васильевич** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией Томского государственного университета. E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

**ПОРЯЗОВ Василий Андреевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: poryazov@mail.ru

**РИККОНЕН Сергей Владимирович** – кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: rikk2@yandex.ru

**СИНЕОКАЯ София Александровна** – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sophia1994@mail.ru

---

**ТАГИЕВ Рафиг Каландар оглы** – доктор математических наук, профессор, заведующий кафедрой оптимизации и управления Бакинского государственного университета, г. Баку, Азербайджанская Республика. E-mail: r.tagiyev@list.ru

**ТАРАСОВ Егор Александрович** – ассистент кафедры теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: diomedis@mail.ru

**УСЕНКО Олеся Вадимовна** – младший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: usenko.olesya@yandex.ru

**ФОМИНА Елена Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета. E-mail: ef254@mail.ru

**ХРАМЦОВ Алексей Михайлович** – аспирант, ведущий инженер Томского государственного университета. E-mail: khramtsov.home@gmail.com

**ЧЕЛНОКОВА Анна Сергеевна** – магистрант Бурятского государственного университета. E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен  
**ООО «Издательство научно-технической литературы»**  
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*  
Верстка *Д.В. Фортеса*

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.  
Подписано к печати 14.02.2016. Выпуск в свет 20.02.2017.  
Формат 70 × 100<sup>1/16</sup>. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 8.55. Уч.-изд. л. 9.57. Тираж 250 экз. Заказ № 3. Цена свободная.

---

Отпечатано на оборудовании  
**Издательского Дома Томского государственного университета,**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № ???.  
<http://publish.tsu.ru> E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)