МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2017 **№ 47**

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конев, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Igor A. Aleksandrov, Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417
Электронный адрес: http://vestnik.tsu.ru/mathematics
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru
H-index: http://elibrary.ru, http://Math-Net.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Губин В.Н. Об одном алгоритме вычисления оптимальных стратегий на бесконечном промежутке времени 5
Жамбаа С., Касаткина Т.В., Бубенчиков А.М. Применение метода П.П. Куфарева к решению задачи о движении грунтовых вод под гидротехническими сооружениями 15
Марвин С.В. Начально-краевая задача для однородной системы уравнений Максвелла в случае магнитодиэлектрического тела с проводящими ферромагнитными включениями 22
Щербаков Н.Р., Щёголева А.А. Касание однополостных гиперболоидов вращения как аксоидов гипоидной передачи 37

МЕХАНИКА

Гоцев Д.В., Перунов Н.С. Математическая модель напряженно-деформируемого состояния упругого цилиндрического тела с пористым наполнителем 43
Дульнев А.И., Неклюдова Е.А. Экспериментально-расчетная оценка взрывосопротивляемости образцов ПКМ при неконтактном подводном взрыве 51
Королев С.А., Липанов А.М., Русяк И.Г. К вопросу о точности решения прямой задачи внешней баллистики 63
Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л., Сеелев И.Н., Шрагер Э.Р. Численное исследование течения и теплообмена воздуха в камере хранения сухого хранилища ОЯТ 75
Турубаев Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата 87

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 99

CONTENTS

MATHEMATICS

Gubin V.N. On an algorithm for calculating optimal strategies on an infinite time interval 5

Jambaa S., Kasatkina T. V., Bubenchikov A.M. Application of Kufarev method to problem of subsoil waters movement under hydraulic engineering constructions 15

Marvin S.V. An initial-boundary value problem for the uniform system of Maxwell's equations in the case of a magnetodielectric body with conductive ferromagnetic inclusions 22

Shcherbakov N.R., Shchegoleva A.A. Tangency of one-sheeted hyperboloids as axoids of the hypoid gearing 37

MECHANICS

Gotsev D. V., Perunov N. S. Mathematical model of the stress-strain state of an elastic cylindrical body with a porous filler 43

Dul'nev A.I., Neklyudova E.A. Experimental and computational assessment of an explosion resistance of the polymeric composite samples at a contactless underwater explosion 51

Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G. On the issue of accuracy of the solution of the direct problem of external ballistics 63

Krainov A.Yu., Min'kov L.L., Seelev I.N., Shrager E.R. Numerical investigation of the air heat-mass transfer in the chamber of dry storage for spent nuclear fuel 75

Turubaev R.R., Shvab A.V. Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine 87

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS 99

МАТЕМАТИКА

УДК 519.873
DOI 10.17223/19988621/47/1

В.Н. Губин

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ[1]

Рассматривается система с дискретным временем, работающая на бесконечном временном интервале, в которой имеется возможность проверки исправности включенных в работу блоков. Для данной системы описаны свойства оптимальных стратегий, полученные в предыдущих статьях автора, а также решена задача об экономичном использовании резерва. В результате построен алгоритм для вычисления оптимальной стратегии и проведено численное моделирование оптимальных стратегий.

Ключевые слова: *среднее время безотказной работы, отказ элемента, система, стратегия резервирования, оптимальная стратегия, критерий резервирования.*

К любому техническому устройству мы вынуждены предъявлять некоторые требования, необходимые для успешного функционирования этого устройства, такие как безотказность, ремонтопригодность, долговечность и другие. Все эти характеристики часто объединяют в одно свойство – надежность устройства.

В роли показателей надежности могут выступать вероятность безотказной работы системы, среднее время ее работы, интенсивность отказов и т.д. Для улучшения показателей надежности системы на практике часто применяют резервирование. Это может быть как резервирование всей системы, так и отдельных ее частей. Задачами оптимального резервирования занимались многие математики как в России, так и за рубежом. Пример задачи оптимального резервирования можно найти в [1]. Модели систем с управляемым резервом впервые рассматривались в работах Герцбаха [2] и А.Л.Райкина [3]. Далее модели динамического резервирования изучались в работах [4–10], в которых показателем надежности системы преимущественно выступает вероятность безотказной работы системы на конечном промежутке. В данной работе в роли показателя надежности системы выбрано среднее время ее безотказной работы.

Постановка задачи

Пусть имеется система, состоящая из конечного числа параллельно включенных (в смысле надежности) идентичных элементов и функционирующая на бесконечном промежутке времени. Контроль за исправностью элементов, включенных в работу, осуществляется лишь в моменты времени $t = \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots$ $(\Delta > 0)$,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 17-11-01049.

когда можно подключить дополнительно исправные блоки из числа резервных или же наоборот перевести часть включенных блоков в резерв. Время на проверку и включение новых элементов из резерва считается пренебрежимо малым и в дальнейшем не учитывается. К моменту начала функционирования системы всего в наличии имеется r исправных элементов. Элементы, не включенные в работу, находятся в холодном резерве, то есть своего ресурса не расходуют. Отказ элемента, включенного в работу, не влияет на исправность остальных элементов.

Введем обозначения:

S_m – система, состоящая из конечного числа параллельно включенных элементов, которая работает исправно, если в работу включено не менее m исправных элементов;

q – вероятность отказа одного элемента на интервале длиной Δ; $p = 1 - q$ – вероятность безотказной работы одного элемента на этом же интервале длиной Δ.

Функцию $K(r)$, принимающую целые значения и такую, что для каждого натурального r выполнено неравенство $m \le K(\mathrm{r}) \le r$, назовём стратегией резервирования системы. Стратегия резервирования показывает, сколько элементов необходимо включить в работу при наличии r исправных.

Функционал T, заданный на множестве пар $(r, K(r))$ и принимающий неотрицательные значения, назовём критерием резервирования. В данной работе ограничимся случаем, когда критерием резервирования служит среднее время работы системы на бесконечном промежутке $[0, +\infty)$.

Стратегию, которая обращает в максимум среднее время безотказной работы системы на бесконечном промежутке, будем называть оптимальной и обозначать $K_0(r)$.

Задача состоит в нахождении такой стратегии, которая максимизирует функционал среднего времени безотказной работы системы на бесконечном промежутке времени и на основе вычисленной стратегии определить соответствующее значение среднего времени исправной работы системы.

Рассмотрим следующее управление резервом: в момент начала работы системы включается в нагруженный режим k ($m \le k \le r$) исправных элементов, а после первой проверки используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени работы системы на бесконечном промежутке. Введем вспомогательные обозначения:

$T(k,r)$ – математическое ожидание времени работы системы, если на первом шаге включено в работу k исправных элементов, а в дальнейшем используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени безотказной работы системы на промежутке $[0, \infty)$;

$T(r)$ – математическое ожидание времени работы системы при стратегии, оптимальной по критерию среднего времени работы системы на бесконечном промежутке, если в начальный момент имеется ровно r исправных элементов.

Тогда по формуле полного математического ожидания [11] получаем

$$T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1 . \qquad (1)$$

Для нахождения оптимальной стратегии будем использовать уравнение (1). Кроме того, чтобы найти оптимальную стратегию с помощью вычислений более экономично, докажем некоторые свойства оптимальных стратегий.

Свойства оптимальных стратегий

Естественно предположить, что функции $T(r)$ и $T(k,r)$ являются возрастающими по переменной r. В работе [12] была выделена область выпуклости функции $T(k,r)$ по переменной k, а именно, была доказана

Теорема 1. При $p \ge \dfrac{m+1}{m+3}$ функция $T(k,r)$ для системы S_m имеет не более двух максимумов при фиксированном r, причем она выпукла вверх по k в области $m \le k \le K_0(r)+1$ и не возрастает при $K_0(r) < k \le r$.

Следствие 1. Для любого $r > 0$, если $T(k,r) \ge T(k-1,r)$, то $k \le K_0(r)$; если же $T(k,r) < T(k-1,r)$, то $k \ge K_0(r)$.

Из теоремы 1 следует, что функция $T(k,r)$ возрастает по k до значения $K_0(r)+1$, а затем убывает.

Теорема 2. Для оптимальных стратегий при любом $r \ge 1$ выполнено $K_0(r+1) \le K_0(r)+1$.

В [13] было доказано следующее свойство оптимальных стратегий.

Теорема 3. Функция $K_0(r)$ возрастает (не строго) с ростом r.

Таким образом, с увеличением резерва на единицу функция $K_0(r)$ может только возрасти, но не более чем на единицу.

Перейдем к задаче об экономном расходе элементов, которая была рассмотрена для случая $m = 1$ в [14]. Эта задача состоит в поиске для системы S_m условий оптимальности включения в работу $(m+1)$ элементов. По определению системы S_m для любого $r \ge m$ имеем $K_0(r) \ge m$. Как было показано в [15], $K_0(m+1) \ge m+1$. Таким образом, возникает задача, с какого момента следует экономно расходовать оставшийся резерв, а именно, при каком количестве имеющихся в наличии исправных элементов оптимальной стратегией при каждой последующей проверке будет включение $(m+1)$ исправных элементов. Следовательно, задача сводится к поиску правой границы промежутка $[m+1,\ r_0]$, на котором $K_0(r) = m+1$, причем $r_0 = r_0(p,m)$.

Так как для всех $r \in [m+1, r_0(p,m)]$ выполнено $K_0(r) = m+1$, то

$$T(r) = T(m+1,r) = \sum_{i=0}^{1} C_{m+1}^{i} p^{m+1-i} q^i\, T(r-i) + 1 = p^{m+1} T(r) + (m+1) p^m q T(r-1) + 1.$$

Отсюда для всех $r \in [m+1, r_0(p,m)]$ получаем рекуррентное соотношение для нахождения $T(r)$:

$$T(r) = \frac{(m+1)p^m q}{1-p^{m+1}}\, T(r-1) + \frac{1}{1-p^{m+1}}.$$

Обозначим

$$a = \frac{(m+1)p^m q}{1-p^{m+1}};\ \ b = \frac{1}{1-p^{m+1}}.$$

Тогда учитывая, что $r > m$,

$$T(r) = a\, T(r-1) + b = a^2\, T(r-2) + ab + b = \ldots =$$

$$= a^{r-m}\, T(m) + b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{r-m+1}) = a^{r-m}\, T(m) + b\left(\frac{1-a^{r-m}}{1-a}\right). \qquad (2)$$

Упрощая выражение для $T(r)$, получим

$$T(r) = a^{r-m}\left[T(m) - \frac{b}{1-a}\right] + \frac{b}{1-a}. \qquad (3)$$

Используя обозначения для a и b и выражение для $T(m) = \frac{p^m}{1-p^m}$, имеем окончательное выражение для $T(r)$ при указанной стратегии:

$$T(r) = -\frac{(1-p^m)^2 + mp^{2m}q}{(1-p^m)(1-p^m(1+mq))}\left(\frac{(m+1)p^m q}{1-p^{m+1}}\right)^{r-m} + \frac{1}{1-p^m(1+mq)}. \qquad (4)$$

Так как необходимо найти ограничения для резерва, в пределах которого оптимальной стратегией является включение в работу $(m+1)$ исправных элементов, то по следствию 1 эта задача сводится к решению относительно r следующего неравенства:

$$T(m+2, r) - T(m+1, r) \le 0.$$

Для этого преобразуем разность, используя известное свойство биномиальных коэффициентов:

$$T(k+1,r) - T(k,r) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-m+1} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m+1} C_k^i p^{k+1-i} q^i T(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \qquad (5)$$

Выделим последнее слагаемое в первой сумме:

$$T(k+1,r) - T(k,r) =$$
$$= -q\sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + \sum_{j=0}^{k-m} C_k^j p^{k-j} q^{j+1} T(r-j-1) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m) =$$
$$= q(\sigma-1)\sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} (q\sigma)^i T(r) + C_k^{k+1-m} p^m (q\sigma)^{k+1-m} T(r) =$$
$$= q(\sigma-1)T(k,r) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m). \qquad (6)$$

Таким образом,

$$T(k+1,r) - T(k,r) = q(\sigma-1)T(k,r) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m) \qquad (7)$$

Положим в (7) $k = m+1$ и учитывая (6), получим

$$qT(m+1, r-1) - qT(m+1, r) + C_{m+1}^2 p^m q^2 T(r-2) \le 0. \qquad (8)$$

Используя представление (4), неравенство (8) примет вид

$$\left(T(m) - \frac{b}{1-a}\right)\left(a - a^2 + C_{m+1}^2 p^m q\right) a^{r-2-m} + \frac{b}{1-a} C_{m+1}^2 p^m q \le 0. \qquad (9)$$

Покажем, что

$$T(m) - \frac{b}{1-a} \le 0. \qquad (10)$$

Имеем

$$T(m)-\frac{b}{1-a}=\frac{p^m}{1-p^m}-\frac{1}{1-p^{m+1}-(m+1)p^m q}=\frac{p^m}{1-p^m}-\frac{1}{1-(mq+1)p^m}$$
$$=\frac{p^m(1-p^m)-(1-p^m)-mp^{2m}q}{(1-p^m)(1-(mq+1)p^m)}=\frac{-(1-p^m)^2-mp^{2m}q}{(1-p^m)(1-(mq+1)p^m)}.$$

Поскольку $1-p^m>0$ и $1-p^m-mp^m q>0$, то имеет место (10). Тогда из неравенства (9), учитывая, что $a<1$, имеем

$$r\le m+2+\frac{\ln C}{\ln A}, \qquad (11)$$

где $C=\dfrac{bC_{m+1}^2 p^m q}{(a-a^2+C_{m+1}^2 p^m q)((a-1)T(m)+b)}$.

Таким образом, из (11) находим $r_0=r_0(p,m)=m+2+\left[\dfrac{\ln C}{\ln A}\right]$, где $[t]$ – целая часть числа t.

Вывод: если во время работы системы S_m всего в наличии осталось r исправных элементов и $r\in\left[m+1, m+2+\left[\dfrac{\ln C}{\ln A}\right]\right]$, то в моменты последующих проверок в работу следует постоянно включать по (m+1) элементов.

Следствие: Если $r>m+2+\left[\dfrac{\ln C}{\ln A}\right]$, то $K_0(r)>m+1$.

Рассмотрим далее несколько примеров расчета значения $r_0=r_0(p,m)$ при различных значениях параметров m и p, которые получены на основе выражения (12).

Таблица 1

m	1	2	3	4	5
[m+1, r_0]	[2, 2.859]	[3, 3.297]	[4, 4.152]	[5, 5.093]	[6, 6.062]

Промежуток оптимальности включения в работу (m+1) элементов при $p=0.5$.

Таблица 2

M	1	2	3	4	5
[m+1, r_0]	[2, 9.205]	[3, 5.499]	[4, 5.266]	[5, 5.761]	[6, 6.506]

Промежуток оптимальности включения в работу (m+1) элементов при $p=0.9$.

Таблица 3

m	1	2	3	4	5
[m+1, r_0]	[2, 17.296]	[3, 8.362]	[4, 6.741]	[5, 6.661]	[6, 7.112]

Промежуток оптимальности включения в работу (m+1) элементов при $p=0.95$.

Из приведенных таблиц можно сделать следующий вывод: в системе S_m стратегию включения в работу (m+1) исправных элементов имеет смысл использовать при малых значениях порога исправной работы системы (m = 1, 2, 3) и значениях p, близких к единице ($p \geq 0.9$).

Алгоритм нахождения оптимальной стратегии на основе изложенных результатов

Так как рассматриваемая система S_m функционирует на бесконечном промежутке и в качестве критерия резервирования выступает среднее время безотказной работы системы на бесконечном промежутке, то на первом этапе алгоритма необходимо вычислить значение среднего времени работы системы, если в начальный момент имеется m исправных элементов.

Обозначаим через A_{lm} событие, состоящее в том, что система из m элементов проработала безотказно l шагов, а на следующем шаге отказала. Тогда выражение для среднего времени безотказной работы системы на бесконечном промежутке времени, если всего в наличии имеется m элементов, имеет вид

$$T(m) = \sum_{l=1}^{\infty} lP(A_{lm}) = \sum_{l=1}^{\infty} lp^{ml}(1-p^m).$$

Отсюда получаем значение среднего времени, если всего в наличии имеется m исправных элементов:

$$T(m) = \frac{p^m}{1-p^m}.$$

Дальнейшие вычисления проводятся с помощью равенства (1). Выделим слагаемое при $i = 0$:

$$T(k,r) = p^k T(r) + \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1. \qquad (13)$$

При подстановке в (13) $k = K_0(r) = k_0$ получим

$$T(r) = \frac{1}{1-p^{k_0}} \left(\sum_{i=1}^{k_0-m} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i) + 1 \right). \qquad (14)$$

Если же теперь в (13) подставить значение $k = k_1 \neq K_0(r)$, то в силу того, что $T(r) = \max\limits_k T(k,r)$, получим неравенство

$$T(r) \geq T(k_1,r) = \frac{1}{1-p^{k_1}} \left(\sum_{i=1}^{k_1-m} C_{k_1}^i p^{k_1-i} q^i T(r-i) + 1 \right).$$

Таким образом, $T(r) = \max\limits_{m \leq k \leq r} \frac{1}{1-p^k} \left(\sum\limits_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1 \right)$.

Полученные соотношения дают возможность, двигаясь от «начала» с минимально возможного значения параметра r, найти значение оптимальной стратегии и максимальное среднее время безотказной работы системы при любом заданном r.

Покажем это. Обозначим $f(k,r) = \frac{1}{1-p^k} \left(\sum\limits_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1 \right)$.

Пусть уже вычислены $K_0(m)$, … , $K_0(r-1)$ и $T(m)$, … , $T(r-1)$. Вычислим теперь $K_0(r)$ и $T(r)$. На основе изложенных свойств функции $K_0(r)$ для этого необходимо вычислить всего два значения функции $f(k,r)$. Вычисляем значения $f(K_0(r-1), r)$ и $f(K_0(r-1)+1, r)$ и сравниваем их:

1) если $f(K_0(r-1), r) \geq f(K_0(r-1)+1, r)$, то $K_0(r) = K_0(r-1)$ и соответственно $T(r) = f(K_0(r-1), r)$;

2) если же $f(K_0(r-1)+1, r) \geq f(K_0(r-1), r)$, то $K_0(r) = K_0(r-1) + 1$ и $T(r) = f(K_0(r-1) + 1, r)$.

Численное моделирование оптимальных стратегий

На основе приведенного алгоритма нахождения оптимальной стратегии были построены графики оптимальных стратегий при различных значениях параметров m и p.

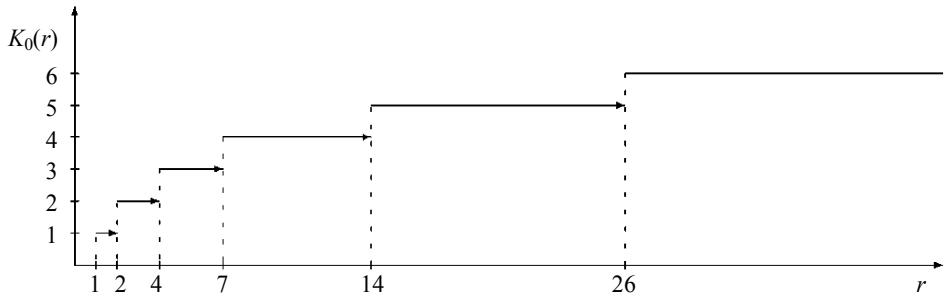


Рис. 1. График оптимальной стратегии при $p = 0.5$, $m = 1$
Fig. 1. Plot of optimal strategy at $p = 0.5$ and $m = 1$

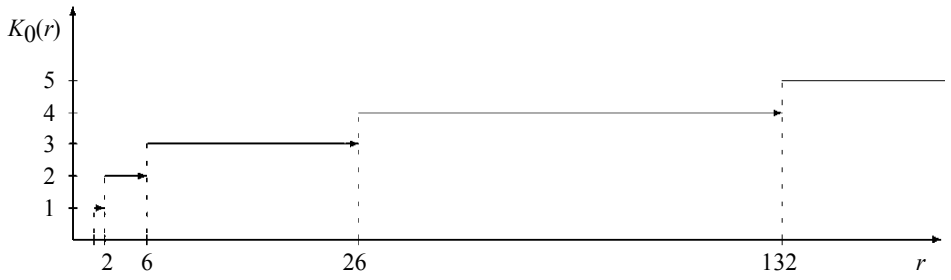


Рис. 2. График оптимальной стратегии при $p = 0.8$, $m = 1$
Fig. 2. Plot of optimal strategy at $p = 0.8$ and $m = 1$

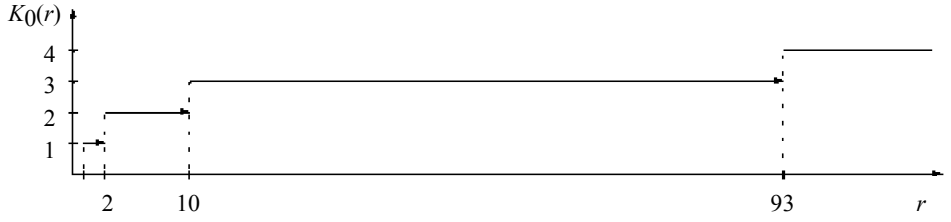


Рис. 3. График оптимальной стратегии при $p = 0.9$, $m = 1$
Fig. 3. Plot of optimal strategy at $p = 0.9$ and $m = 1$

Из приведенных графиков можно сделать вывод о том, что при фиксированном значении параметра m «скачки» функции $K_0(r)$ с увеличением вероятности p происходят реже. Это происходит за счет увеличения длины промежутков K_0-постоянства. Кроме того, приведенные графики наглядно иллюстрируют нестрогое возрастание оптимальной стратегии, причем скачок всегда происходит на единицу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев О.Г.* Об одной задаче оптимального резервирования // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1967. № 1. С. 44–47.
2. *Герцбах И.Б.* Об оптимальном управлении включением резервных элементов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1966. №5. С. 75–80.
3. *Райкин А.Л.* Маневрирование аппаратурной избыточностью в реальных системах // Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению. Одесса, 1965 г. М.: Наука, 1967. Т.5: Технические средства автоматики. С. 94.
4. *Конев В.В.* Об оптимальном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1974. №4. С. 75–83.
5. *Конев В.В.* Об оптимальном программном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1975. №3. С. 109–117.
6. *Конев В.В., Овчинников А.В.* Оптимальное резервирование группы однотипных элементов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1976. №4. С. 75–84.
7. *Пестов Г.Г., Ушакова Л.В.* Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1973. № 5. С. 76–82.
8. *Пестов Г.Г., Ушакова Л.В.* Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1973. № 5. С. 69–72.
9. *Райкин А.Л.* Элементы теории надёжности технических систем. М.: Сов. радио, 1978. 280 с.
10. *Томиленко В.А.* Об одной задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1975. № 4. С. 93–100.
11. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. 5-е изд. М.: Агар, 2000. 256 с.
12. *Губин В.Н., Пестов Г.Г.* Об одном классе резервируемых устройств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 14–23.
13. *Губин В.Н.* О среднем времени безотказной работы резервированной системы // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» (Томск, 25–29 апреля 2016 г.). Томск, 2016. С. 173–180.
14. *Губин В.Н.* Об оптимальном резервировании на бесконечном промежутке // Современные проблемы науки и образования: электрон. журн. 2014. № 4. URL: http://www.science-education.ru/118-14484 (дата обращения: 05.09.2014).
15. *Губин В.Н., Травкина В.В.* Две задачи динамического резервирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 5–12.

Статья поступила 22.02.2017 г.

Gubin V.N. (2017) ON AN ALGORITHM FOR CALCULATING OPTIMAL STRATEGIES ON AN INFINITE TIME INTERVAL *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/47/1

In this paper, a system where the interval between check times is discrete and constant is considered. The probability of failure for one element between check times is equal to p. The redundancy criterion satisfies the following equation:

$$T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1\,, \qquad (1)$$

which is used for finding the function $K_0(r)$.

Then, previous results related to properties of optimal strategies are stated. The main result of the paper is the solution of the problem about saving the reserve consumption. In the case $m = 1$, this problem was solved by the author earlier. To solve this problem in the general case, the inequality

$$T(m+2, r) - T(m+1, r) \le 0 \qquad (2)$$

is used. Since $T(r)$ can be found explicitly from the conditions of the problem, inequality (2) is easy resolved. Therefore, the reserve interval $\left[m+1, m+2+\left[\frac{\ln C}{\ln A}\right]\right]$, where $K_0(r) = m+1$, is obtained. The algorithm for optimal strategy computing consists of the following steps:

1) for $r = m$, we have $K_0(m) = m$ and $T(m) = p^m/(1-p^m)$.

2) then, if we find $K_0(m+1)$, $K_0(m+2)$, … , and $K_0(r-1)$ to define $K_0(r)$, it is sufficient to compare $f(K_0(r-1), r) \ge f(K_0(r-1)+1, r)$, where $f(k,r) = \frac{1}{1-p^k}\left(\sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1\right)$.

Results of the numerical simulation are represented in the final section of the paper.

Keywords: mean time between failures, element failure, system, reliability, redundancy strategy, optimal strategy, redundancy criterion.

GUBIN Vladimir Nikolaevich, (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: vovantus@sibmail.com

REFERENCES

1. Alekseev O.G. (1967) Ob odnoy zadache optimal'nogo rezervirovaniya [On a problem of optimum redundancy]. *Izv. Acad. Nauk SSSR Tekh. Kibernetika.* 1. pp. 44–47.
2. Gertsbakh I.B. (1966) Ob optimal'nom upravlenii vklyucheniem rezervnykh elementov [On optimum control for triggering reserve elements]. *Izv. Acad. Nauk SSSR Tekh. Kibernetika.* 5. pp. 75–80.
3. Raykin A.L. (1967) Manevrirovanie apparaturnoy izbytochnost'yu v real'nykh sistemakh [Maneuvering by equipment duplication in real systems]. *Trudy III vsesoyuzonogo soveshchanya po avtomaticheskomu upravleniyu* [Proceedings of the 3rd All-Union Conference on Automatic Control]. Odessa, 1965. Moscow: Nauka. Vol. 5: Tekhnicheskie sredstva avtomatiki [Engineering Tools of Automatics]. p. 94.
4. Konev V.V. (1974) Ob optimal'nom vklyuchenii rezervnykh elementov [On optimum triggering of reserve elements]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika.* 4. pp. 75–83.
5. Konev V.V. (1975) Ob optimal'nom programmnom vklyuchenii rezervnykh elementov [On optimum program triggering of reserve elements]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 3. pp. 109–117.

6. Konev V.V., Ovchinnikov A.V. (1976) Optimal'noe rezervirovanie gruppy odnotipnykh elementov [Optimum redundancy of a group of homogeneous components]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 4. pp. 75–84.
7. Pestov G.G., Ushakova L.V. (1973) Issledovanie optimal'nykh strategiy v zadache dinamicheskogo rezervirovaniya elementov [Studying optimum strategies in the problem of dynamic redundancy of elements]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 5. pp. 76–82.
8. Pestov G.G., Ushakova L.V. (1973) Issledovanie optimal'nykh strategiy v zadache dinamicheskogo rezervirovaniya [Studying optimum strategies in the problem of dynamic redundancy]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 5. pp. 69–72.
9. Raykin A.L. (1978) *Elementy teorii nadezhnosti tekhnicheskikh system* [Elements of the theory of reliability of technical systems]. Moscow: Sov. Radio.
10. Tomilenko V.A. (1975) Ob odnoy zadache dinamicheskogo rezervirovaniya [On a problem of dynamic redundancy]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 4. pp. 93–100.
11. Chistyakov V.P. (2000) *Kurs teorii veroyatnostey* [A course of the probability theory]. Moscow: Agar.
12. Gubin V.N., Pestov G.G. (2014) Ob odnom klasse rezerviruemykh ustroystv [On a class of reserved devices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(30). pp. 14–23.
13. Gubin V.N. (2016) O srednem vremeni bezotkaznoy raboty rezervirovannoy sistemy [On the average time of failure-free operation of a reserved system]. *All-Russian Youth Scientific Conference "All Facets of Mathematics"* (Tomsk, April 25–29, 2016). Tomsk. pp. 173–180.
14. Gubin V.N. (2014) Ob optimal'nom rezervirovanii na beskonechnom promezhutke [On optimal reservation in an infinite interval]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya – Current Issues of Science and Education.* 4. URL: http://www.science-education.ru/118-14484.
15. Gubin V.N., Travkina V.V. (2013) Dve zadachi dinamicheskogo rezervirovaniya [Two problems of dynamic redundancy]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 5(25). pp. 5–12.

УДК 517.54
DOI 10.17223/19988621/47/2

С. Жамбаа, Т.В. Касаткина, А.М. Бубенчиков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА П.П. КУФАРЕВА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Известно, что верхнюю полуплоскость всегда можно отобразить на произвольные прямолинейные многоугольники с помощью интеграла Шварца – Кристоффеля. Однако вычисление констант, входящих в этот интеграл, представляло до сих пор слишком большие трудности. Применение метода П. П. Куфарева для этой цели сильно упрощает расчет, так как процесс определения этих констант сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье, в плане подтверждения возможностей метода П. П. Куфарева, рассматривается классическая задача о течении грунтовой воды под фундаментом плотины с примерами расчета.

Ключевые слова: *конформное отображение прямолинейных многоугольников, прообразы вершин, линии тока и линии постоянного давления.*

Метод П. П. Куфарева

Отображение верхней полуплоскости на односвязный прямолинейный N-угольник с заданным расположением вершин на границе области Z представляется формулой Щварца – Кристоффеля

$$Z(W) = \int_{-\infty}^{W} \prod_{k=1}^{N} (W - a_k)^{\alpha_k} \, dW \, . \qquad (1)$$

В ней вещественные постоянные a_k – прообразы вершин многоугольника, а показатели степени α_k связаны с углами при вершинах φ_k зависимостью $\varphi_k = \pi(a_k+1)$. Трудность практического применения формулы (1) состоит в том, что прообразы a_k заранее неизвестны и их нужно находить по заданным вершинам Z_k многоугольника. Поэтому формула (1) обычно используется только в тех редких случаях, когда интеграл вида (1) получается в явном виде. Но и в этих случаях вычисление прообразов a_k, чаще всего, оказывается достаточно сложной задачей. В методе П. П. Куфарева проблема прообразов решается совершенно необычным способом, и при этом сводится к гораздо более легкой задаче – к численному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод впервые был предложен в статье П. П. Куфарева [1]. Он позволяет легко, быстро и с высокой точностью вычислять прообразы вершин по заданным вершинам отображаемого многоугольника.

Развитие метода [1] получило в работах [2, 3]. В то же время, уже более пятидесяти лет назад нашли применение численные методы конформных отображений [4, 5]. С развитием вычислительной техники эти методы получили новый импульс [6–10]. В предыдущей статье авторов [10] приводится теория метода П. П. Куфарева и вопросы его численной реализации с современных позиций. Можно сказать, что этот метод с успехом выдержал различные испытания и находится вне

конкуренции по сравнению с другими возможными способами численных конформных отображений [11]. Метод П. П. Куфарева предназначен для вычисления прообразов вершин, и для этого в вычислительной программе достаточно задавать только последовательность отрезков сторон отображаемого многоугольника.

В настоящей статье, с целью еще одной проверки эффективности метода П.П. Куфарева, приводится пример численного решения задачи о течении грунтовых вод.

Математическая постановка задачи и метод ее решения

Опыт показывает, что движение грунтовой воды в однородном грунте достаточно точно следует законам движения идеальной жидкости. Поэтому для решения двумерных задач целесообразно применять метод конформных отображений. Математическая теория фильтрационных течений жидкости в пористой среде описана, например, в книге [11] и более подробно в книгах [12, 13]. В них считается, что выполняется условие несжимаемости жидкости и имеет место закон движения (Дарси) – скорость частиц жидкости пропорциональна градиенту давления P:

$$\boldsymbol{V} = -\chi \cdot \mathrm{grad} P, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0 . \tag{2}$$

Коэффициент пропорциональности χ зависит только от характера грунта и называется коэффициентом фильтрации. Из уравнений (2) следует, что давление в грунте удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 . \tag{3}$$

Граничными условиями для определения давления P служат: 1) на участке, где грунт соприкасается с водой, давление должно быть равно гидростатическому давлению слоя воды над ним; 2) на участке контакта грунта водонепроницаемой границей нормальная производная давления равна нулю. Таким образом, должна решаться задача со смешанными граничными условиями для нахождения поля давления $P(x, y)$ в грунте.

В интересующей нас задаче можно найти простое решение для давления $P(u, v)$ внутри области t, которая представляет собой вертикальную полосу и показана на правой стороне рис. 1:

$$t = u + iv, \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < v < \infty . \tag{4}$$

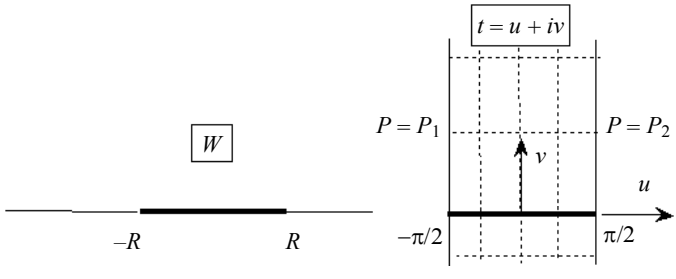


Рис. 1. Каноническая область t и верхняя полуплоскость W
Fig.1. Canonical domain t and upper half plane W

Искомое решение, очевидно, является линейной функцией переменной u:

$$P(u\ ,v) = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{2} \cdot \frac{2u}{\pi}. \tag{5}$$

Действительно, оно удовлетворяет уравнению Лапласа по переменным u и v и принимает заданные значения P_1 и P_2 на вертикальных сторонах полосы t. В этом решении линиям движения частиц жидкости соответствуют горизонтальные линии $v = \text{const}$ в полосе t, а линиями постоянного давления являются вертикальные линии $u = \text{const}$.

Отображение вертикальной полосы (4) на плоскость с разрезом вдоль вещественной оси от точки R до точки $-R$, проходящим через ∞, осуществляется формулой:

$$W = R\sin(u + iv) = R\ \sin u\ \operatorname{ch} v + i\ R\ \cos u\ \operatorname{sh} v\,. \tag{6}$$

Из нее видно, что линиям тока и линиям постоянного давления соответствуют софокусные эллипсы и гиперболы в плоскости W, с фокусами в точках $W = \pm R$.

Если отождествить область W с физической областью $Z = x+iy$, то формула (6) дает нам решение простейшей задачи о течении грунтовой воды под плотиной, у которой водоупорная граница состоит только из одного отрезка прямой линии: $y = 0, -R < x < R$. Этот результат можно обобщить на случай, когда границей подземного контура плотины является прямолинейный многоугольник произвольного вида.

Если на участке плотины $-R < \operatorname{Re}(W) < R$ расположены прообразы вершин a_k некоторого многоугольника, вычисленные предварительно методом П. П. Куфарева, то интеграл Шварца – Кристоффеля (1) запишется в переменных $t = u+iv$ в виде

$$Z(u,v) = R \int_{-\pi/2}^{u} \prod_{k=1}^{N} (W - a_k)^{\alpha_k} \cos(u+iv)\ d(u+iv)\,. \tag{7}$$

Далее при нахождении линий тока интегрирование в (7) проводится по контуру $v = \text{const}$. Следовательно, решение задачи о построении линий тока грунтовых вод и линий постоянного давления сводится к вычислению матрицы $\mathbf{Z}(u_m, v_s)$ на дискретном множестве ее аргументов и вывода на экран ее строк или столбцов. Из сказанного вытекает, что задача о течении грунтовых вод отличается от задач обтекания многоугольников, которые рассматривались в нашей статье [10] только тем, что применяется другая программа для рисования линий постоянного давления и линий тока. Текст этой программы, написанной в системе MatLab, имеет следующий вид:

```
function Risline2 (DD)
alf=DD(1, :); b=DD(2, :); R=(b(end)-b(1))/2; v=linspace(0.001, 1, 20);
u=linspace(-pi/2,pi/2,3200); [V,U]=ndgrid (v, u);  t=U+1i*V; W=b(1)+R+R*sin(t);
F=1;  for k=1: length(b)  F=F.*(W-b(k)).^alf (k); end; F=F.*W; F=R*F.*cos(t);
vv=-R*cosh(v)'; vv=repmat(vv, 1, length(u)); Z=vv+cumtrapz (u, F, 2); plot(Z',' k');
hold on; M=1: length(u); pp= M(rem(M,100)= =0); pp=[M(2), pp ,M(end)];
Q=Z(:,pp); plot (conj(Q),'k');  hold off ; axis([-42, 30, -15, 12]); end
```
(8)

Входным параметром программы (8) является матрица **DD** вычисленная методом П. П. Куфарева [10].

Матрица **DD** состоит из двух строк, первая из которых содержит показатели α_k степеней интеграла (7), а во второй строке находятся прообразы a_k вершин многоугольника в физической плоскости. Примеры расчета течения грунтовых вод, при различном профиле водоупорных границ плотины, показаны на рис. 2 и рис. 3.

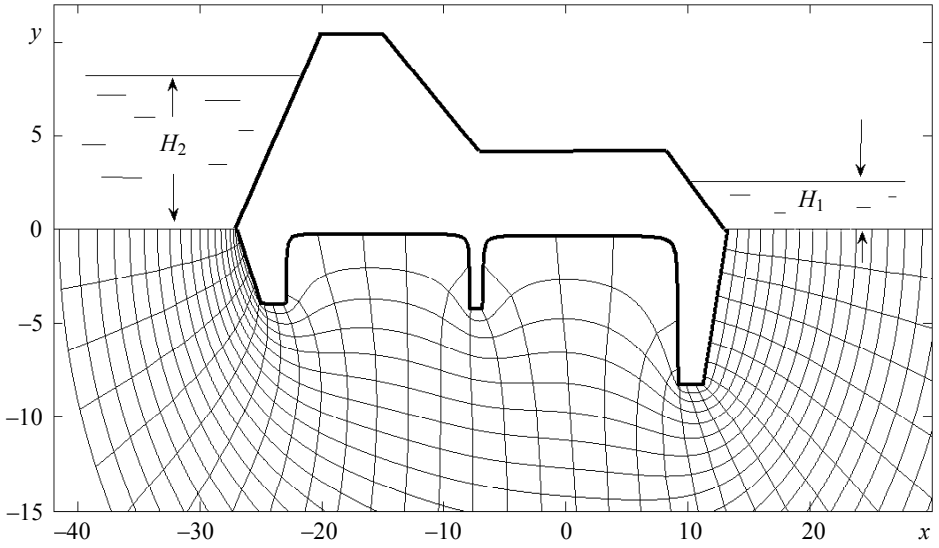


Рис. 2. Линии движения грунтовых вод и линии постоянного давления под плотиной
Fig. 2. Lines of subsoil water movement and constant pressure lines under the dam

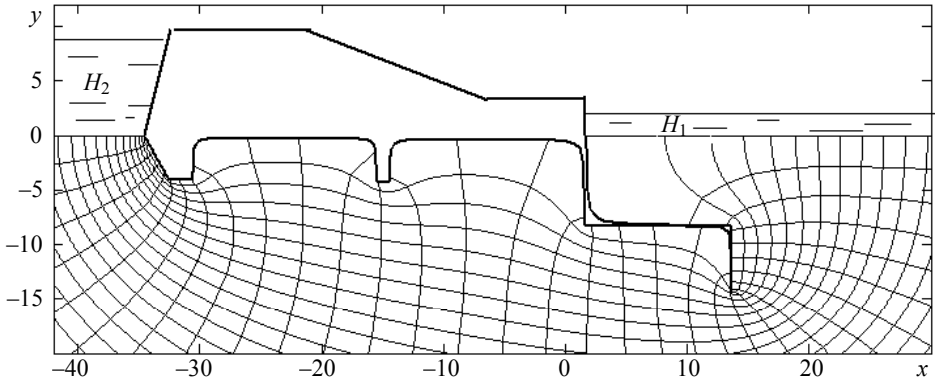


Рис. 3. Линии движения грунтовых вод и линии постоянного давления при другом расположении водоупорных границ
Fig. 3. Lines of subsoil water movement and constant pressure lines at another location of waterproof bounds

Заключение

Определение постоянных в интеграле Кристоффеля – Шварца по методу П.П. Куфарева имеет надежную теоретическую основу, и свойства этого метода подтверждаются вычислениями. Примеры расчетов показывают очень высокую эффективность и точность метода П.П. Куфарева. Число задач, для решения которых можно успешно применять данный метод, очень велико из разных областей гидродинамики и электродинамики. Рассмотренные примеры можно считать модельными и достаточно простыми, но их нельзя решить столь же эффективно никакими другими известными в настоящее время способами. Поэтому метод П.П. Куфарева имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куфарев П.П.* Об одном методе определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца // ДАН СССР. 1947. Т. 57. № 6. С. 535–537.
2. *Колесников И.А.* Определение акцессорных параметров для отображения на счетноугольник // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2(28). С. 18–28.
3. *Копанев С.А., Копанева Л.С.* Формула типа формулы Кристоффеля – Шварца для счетноугольника // Вестник Томского ун-та. 2003. № 280. С. 52–54.
4. *Чистяков Ю.В.* Численный метод определения функции, конформно отображающей круг на многоугольники: дис… канд. физ.-мат. наук. Томск: Томский гос. ун-т им. В.В. Куйбышева, 1953. 82 с.
5. *Байбарин Б.Г.* Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области: дис… канд. физ.-мат. наук. Томск: Томский гос. ун-т им. В.В. Куйбышева, 1966. 97 с.
6. *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля – Шварца // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2016. Т. 158. № 2. С. 202–220.
7. *Насыров С.Р. Низамиева Л.Ю.* Определение акцессорных параметров в смешанной обратной краевой задаче с полигональной известной частью границы // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2011. Т. 11. № 4. С. 34–40.
8. *Gutlyanskii V.Y., Zaidan A.O.* On conformal mapping of polygonal regions // Ukrainian Mathematical Journal. 1993. V. 45. No. 11. P. 1669–1680.
9. *Соболев В.В.* Численный метод конформного отображения полуплоскости в себя с гидродинамической нормировкой // Вестник Томского ун-та. 2003. № 280. С. 81–85.
10. *Жамбаа С., Касаткина Т.В., Бубенчиков А.М.* Об определении констант в интеграле Шварца – Кристоффеля по методу П.П. Куфарева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 5 (43). С. 21–27.
11. *Фильчаков П.Ф.* Приближенные методы конформных отображений. Киев: Наукова думка, 1964. 530 с.
12. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 663 с.
13. *Павловский Н.Н.* Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения. Собр. соч. т. II. М.-Л.: Изд-во АНСССР, 1956. 352 с.

Статья поступила 01.12.2016 г.

Jambaa S., Kasatkina T.V., Bubenchikov A.M. APPLICATION OF KUFAREV METHOD TO PROBLEM OF SUBSOIL WATERS MOVEMENT UNDER HYDRAULIC ENGINEERING CONSTRUCTIONS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 15–21

DOI 10.17223/19988621/47/2

To solve plane filtration problems that are described by the classical Darcy motion law, it is proposed to apply the method of conformal mappings implemented in the form of Kufarev's approach. This approach makes it convenient to find the constants entering into the Schwarz–Christoffel integral as the result of solving a system of ordinary differential equations. The system of differential equations for $b_k = a_k - \lambda$ (here a_k are the prototypes of the polygon vertices, λ is the prototype of the cut vertex) is solved with the use of matrix technologies in the MatLab system. In this case, the solution of the problem of constructing groundwater streamlines and lines of constant pressure is reduced to computing the matrix on a discrete set of its arguments and displaying the rows or columns of this matrix. Using the described solution construction technique, the motion of groundwater under a dam with a specific geometrical shape and depth in the ground at the existing difference between flood levels before and after the dam is considered.

Keywords: conformal mapping of rectilinear polygons, prototypes of polygon vertices, streamlines and lines of constant pressure.

JAMBAA Soninbayar (School of Engineering and Applied Sciences, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: jsoninbayar@yahoo.com.

KASATKINA Tat'yana Vasilyevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: tkasatkina@mail.tsu.ru

BUBENCHIKOV Aleksey Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: alexy121@mail.ru

REFERENCES

1. Kufarev P.P. (1947) Ob odnom metode opredeleniya parametrov v integrale Kristoffelya – Shwarza [A method for determining the parameters of the Schwarz – Christoffel integral]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 57. pp. 535–537.
2. Kolesnikov I.A. (2014) Opredeleniye aktsessornyh parametrov dlya otobrazheniya na schetnougol'nik [Determination of accessory parameters for mapping onto a numerable polygon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogouniversiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 18–28.
3. Kopanev S.A., Kopaneva L.S. (2003) Formula tipa formuly Kristoffelya – Shwarza dlya schetnougol'nika [The Formula type formula Christoffel – Schwarz for numerable polygon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. – Tomsk State University Journal*. 280. pp. 52–54.
4. Chistyakov Yu.V. (1953) *Chislennyy metod opredeleniya funktsii konformno otobrazhayushchey krug na mnogougol'niki* [A numerical method for determining the function that conformally mapping a circle onto polygons]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
5. Baybarin B.G. (1966) *Ob odnom chislennom sposobe opredeleniya parametrov proizvodnoy Shwarza dlya funktsii*, *konformno otobrazhayushchey poluploskost' na krugovye oblasti* [On One Numerical method of determining the parameters of the Schwarz derivative for a function that conformally mapping the half-plane onto a circular area]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
6. Nakipov N.N., Nasyrov S.R. (2016) Parametricheskii metod nakhozhdeniya aktsessornyh parametrov v obobshchennykh integralakh Kristoffelya – Shwarza [A parametric method of

finding accessory parameters for the generalized Schwarz – Christoffel integrals]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*. 158(2). pp. 202–220.

7. Nasyrov S.R., Nizamieva L.Yu. (2011) Opredelenie aktsessornykh parametrov v smeshannoy obratnoy kraevoy zadache s poligonal'noy izvestnoy chast'yu granitsy [Finding of Accessory Parameters for Mixed Inverse Boundary Value Problem with Polygonal Known Part of Boundary]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya – Izvestiya of Saratov University. New Series.* 11(4). pp. 34–40.
8. Gutlyanskii V.Y., Zaidan A.O. (1993) On conformal mapping of polygonal regions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 45(11). pp. 1669–1680.
9. Sobolev V.V. (2003) Chislennyy metod konformnogo otobrazheniya poluploskosti v sebya s gidrodinamicheskoy normirovkoy [The numeric method of the conformal mapping of the half-plane into self with the hydrodynamics normalization]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogouniversiteta – Tomsk State University Journal*. 280. pp. 81–85.
10. Jambaa S., Kasatkina T.V., Bubenchikov A.M. (2016) Ob opredelenii constant v integrale Kristoffelya –Shwarza po metodu P. P. Kufareva [On the determination of constants in the Schwarz-Christoffel integral by P.P. Kufarev's method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 21–27. DOI 10.17223/19988621/433/2
11. Fil'chakov P.F. (1964) *Priblizhennye metody konformnyikh otobrazheniy* [Approximate methods of conformal mappings]. Kiev: Naukova Dumka.
12. Polubarinova-Kochina P.Ya. (1977) *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* [Theory of ground water movement]. Moscow: Nauka.
13. Pavlovsky N.N. (1956) *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod pod gidrotechnicheskimi sooruzheniyami i yeye osnovnyie prilozheniya* [Theory of ground water movement under hydraulic structures and its main applications]. Coll. w. Vol. II. Moscow; Leningrad: Izd-vo Akad. Nauk SSSR.

УДК 537.8:517.968.73
DOI 10.17223/19988621/47/3

С.В. Марвин

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛУЧАЕ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПРОВОДЯЩИМИ ФЕРРОМАГНИТНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассматривается начально-краевая задача электродинамики для магнитодиэлектрического тела, которое содержит инородные проводящие ферромагнитные включения и находится в поле мгновенно выключенного стороннего тока. Для обобщенной постановки задачи выбран определенный функциональный класс, и с помощью теоремы Хилле – Иосиды показано, что у исследуемой начально-краевой задачи в выбранном функциональном классе существует единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий.

Ключевые слова: *начально-краевая задача, уравнения Максвелла, интегро-дифференциальные уравнения, замкнутый оператор, теорема Хилле – Иосиды.*

Начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла, то есть задачи электродинамики, не предполагающие сокращающуюся гармоническую зависимость поля от времени, необходимы для описания нестационарных волновых процессов. Нестационарные электромагнитные поля находят широкое применение в электротехнике, радиотехнике и неразрушающем контроле [1], поэтому начально-краевые задачи электродинамики не только представляют немалый теоретический интерес, но и имеют существенный прикладной смысл. В частности, теоретическую и практическую ценность имеет доказательство общих теорем для таких задач.

Ранее широко исследовались внутренние начально-краевые задачи электродинамики для ограниченных областей; наиболее существенные результаты были получены для областей с границами класса $C^{(2)}$ [2, 3]. Однако для электротехники, радиотехники и неразрушающего электромагнитного контроля интерес представляют не только внутренние задачи для ограниченных или неограниченных областей, но и задачи сопряжения, при постановке которых граничные условия связывают поле внутри области с полем снаружи области.

Начально-краевые задачи сопряжения исследовались, в частности, для ограниченного немагнитного проводящего тела в предположении, что граница тела должна быть поверхностью Ляпунова, электропроводность тела должна быть бесконечно гладкой функцией пространственных координат, а сторонний ток должен включаться достаточно медленно [4, 5]. При таких условиях было доказано существование классического решения начально-краевой задачи электродинамики (то есть решения, непрерывно дифференцируемого в обычном смысле). Однако наиболее общие модели рассеивающих тел должны допускать не только гладкие, но и кусочно-гладкие границы, и нарушения внутренней структуры, в общем случае, не могут быть описаны только гладкими функциями.

Также исследовались начально-краевые задачи в обобщенной постановке применительно к рассеивающим телам, ограниченным кусочно-гладкими поверхностями: для проводящего неферромагнитного и ферромагнитного тела с дефектами [6, 7]; для проводящего неферромагнитного тела с инородными диэлектрическими включениями [8]. В этих задачах нестационарное поле создавалось мгновенно выключенным сторонним током. Был найден функциональный класс, в котором рассмотренные начально-краевые задачи имели единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных.

Не менее актуально исследование начально-краевой задачи сопряжения применительно к магнитодиэлектрику, так как магнитодиэлектрические материалы нередко используются в дросселях и иных стабилизирующих устройствах, в связи с чем подвергаются воздействию нестационарных полей (в частности, при резком прерывании тока). Кроме того, с использованием нестационарных методов неразрушающего электромагнитного контроля (например, с помощью резко выключаемого тока) возможно целенаправленное выявление структурных нарушений магнитодиэлектриков [1].

Постановка задачи

Для построения математической модели взаимодействия нестационарного электромагнитного поля и магнитодиэлектрика, имеющего структурные нарушения, представляется необходимым хотя бы краткое описание, что представляют собой магнитодиэлектрические материалы и какими могут быть недочеты при их изготовлении. Магнитодиэлектрики – это смесь затвердевшей диэлектрической массы и перемешанного с ней ферромагнитного порошка (измельченного ферромагнитного проводника). При качественном изготовлении магнитодиэлектрика перемешивание происходит равномерно и частицы ферромагнитого порошка имеют пренебрежимо малый объем, поэтому всю смесь с высокой степенью точности можно считать однородной и непроводящей (в частности, можно пренебречь тепловыми потерями, связанными с токами проводимости, которые вызывает электрическое поле в частицах ферромагнетика). Однако магнитная проницаемость частиц ферромагнитного порошка настолько высока, что смесь имеет магнитную проницаемость, существенно превосходящую 1.

Нарушения внутренней структуры магнитодиэлектрика могут быть вызваны нетщательным перемешиванием диэлектрической массы и порошка; по этой причине магнитодиэлектрик становится неоднородным по своим диэлектрическим и магнитным свойствам. Кроме того, магнитодиэлектрик может оказаться некачественным из-за недостаточного измельчения ферромагнитного металла; тогда в магнитодиэлектрике появляются большие по размерам проводящие ферромагнитные включения. Области, занятые такими включениями, уже не имеют пренебрежимо малый объем и не допускают описание нулевой электропроводностью.

Множество вещественных чисел будем обозначать, как обычно, $\mathbf{R}$. Предположим, что в трехмерном геометрическом пространстве фиксирована прямоугольная система координат. Будем обозначать как $\boldsymbol{r}$ упорядоченный набор координат точки пространства (x, y, z), соответственно множество всех точек пространства – $\mathbf{R}^3$ (здесь и далее под степенью множества подразумевается соответствующее декартово произведение). Предположим, что магнитодиэлектрическое тело занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$; граница области Ω – кусочно-

гладкая поверхность. Крупные ферромагнитные включения занимают области Ω_1, Ω_2,…, Ω_k с кусочно-гладкими границами. Замыкания этих областей попарно не имеют общих точек и включаются в Ω: $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$; $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Электропроводность σ не зависит от времени, равна 0 в точках пространства, внешних по отношению ко всем областям Ω_i. В каждой из областей Ω_i функция $\sigma(\boldsymbol{r}) > 0$ непрерывна и может быть по непрерывности продолжена на границы Ω_i изнутри, оставаясь при таком продолжении положительной. Диэлектрическая проницаемость ε равна 1 во внутренних точках Ω_i и точках, внешних по отношении к Ω. В области $\Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i \right)$ функция $\varepsilon(\boldsymbol{r}) > 1$, непрерывна и может быть по непрерывности продолжена на границы Ω_i снаружи и на границу Ω изнутри, оставаясь при таких продолжениях больше 1. Магнитная проницаемость μ равна 1 в точках, внешних по отношению к Ω. В областях Ω_i и $\Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i \right)$ функция $\mu(\boldsymbol{r}) > 1$, непрерывна и может быть по непрерывности продолжена на границы Ω_i изнутри и снаружи, а также на границу Ω изнутри, оставаясь при таких продолжениях больше 1.

После выключения стороннего тока электромагнитное поле в магнитодиэлектрике и внешней среде удовлетворяет однородной системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r})} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \dfrac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{E}, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0 \mu(\boldsymbol{r})} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, соответственно; ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная постоянные; t – время.

В точках гладкости границ Ω и Ω_i выполняются условия непрерывности касательных компонент напряженностей:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{\tau,\mathrm{int}} = \boldsymbol{E}_{\tau,\mathrm{ext}}, \\ \boldsymbol{H}_{\tau,\mathrm{int}} = \boldsymbol{H}_{\tau,\mathrm{ext}}, \end{cases} \tag{2}$$

где τ – обозначение касательной составляющей вектора; int – обозначение предела изнутри области; ext – обозначение предела снаружи области.

Электромагнитное поле в момент выключения стороннего тока $t = 0$ определяет начальные условия задачи:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, 0) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, 0) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}). \end{cases} \tag{3}$$

Необходимо определить функциональный класс, в котором будет поставлена начально-краевая задача (1) – (3). Пусть $\mathbf{L}_{\mathrm{loc}}$ – множество векторных полей, локально суммируемых в $\mathbf{R}^3$; $\mathbf{D}$ – множество финитных, бесконечно дифференци-

руемых векторных полей; элемент объема $dx\,dy\,dz$ в трехмерном интеграле будем обозначать кратко dV.

Определение 1. *Поле* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}$ *называется обобщенным ротором поля* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}$, *если для любого поля* $\boldsymbol{q} \in \mathbf{D}$ *выполняется равенство*

$$\int_{\mathbf{R}^3} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{rot}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\,dV = \int_{\mathbf{R}^3} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\,dV\,.$$

Доказан ряд свойств обобщенного ротора [3, 6, 8]. Обобщенный ротор определен однозначно с точностью до замены компонент на эквивалентные функции. Если у компонент векторного поля есть частные обобщенные производные по Соболеву первого порядка, то обобщенный ротор можно вычислить по обычной для ротора формуле. Однако существование обобщенных производных по Соболеву не является необходимым условием существования обобщенного ротора: например, если у функции $\psi(\boldsymbol{r})$ есть обобщенные производные по Соболеву первого порядка, но нет обобщенных производных по Соболеву второго порядка, то у компонент $\mathrm{grad}\psi(\boldsymbol{r})$ нет обобщенных производных по Соболеву, но обобщенный $\mathrm{rotgrad}\psi(\boldsymbol{r})$ определен и равен нулевому вектору.

Пространство квадратично суммируемых в $\mathbf{R}^3$ векторных полей, имеющих квадратично суммируемые в $\mathbf{R}^3$ обобщенные роторы, обозначается как $\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$. Этим пространством наиболее естественно воспользоваться при постановке задачи. Также для постановки задачи и исследования свойств решения потребуются определения непрерывности и дифференцируемости функций одной переменной со значениями в произвольном банаховом пространстве.

Определение 2. *Функция* $\boldsymbol{w}(t)$ *со значениями в банаховом пространстве* $\mathbf{B}$ *называется непрерывной при* $t = a$ *по норме* $\mathbf{B}$, *если* $\lim\limits_{t \to a} \|\boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{w}(a)\| = 0$.

Определение 3. *Функция* $\boldsymbol{w}(t)$ *со значениями в банаховом пространстве* $\mathbf{B}$ *называется дифференцируемой при* $t = a$ *по норме* $\mathbf{B}$, *если существует такой элемент пространства* $\boldsymbol{w}'(a) \in \mathbf{B}$, *что* $\lim\limits_{t \to a} \left\| \dfrac{\boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{w}(a)}{t - a} - \boldsymbol{w}'(a) \right\| = 0$. *В этом случае* $\boldsymbol{w}'(a)$ *называется производной функции* $\boldsymbol{w}(t)$ *в точке* $t = a$.

Многие определения, касающиеся непрерывности и дифференцируемости обычных вещественнозначных функций одной переменной, переносятся на случай непрерывности и дифференцируемости по норме $\mathbf{B}$ [8, 9]. Непрерывность и дифференцируемость $\boldsymbol{w}(t)$ на интервале определяется соответственно как непрерывность и дифференцируемость в каждой точке интервала. Через односторонний предел в определениях 2 и 3 можно определить одностороннюю непрерывность и одностороннюю производную функции и, как следствие, – непрерывность и дифференцируемость функции $\boldsymbol{w}(t)$ на полуинтервале и отрезке. Из определения 3 индуктивным путем выводится понятие дифференцируемости и производной любого конечного порядка, следовательно, можно определить и бесконечно дифференцируемую функцию. Путем комбинированного использования определений 2 и 3 можно определить непрерывную дифференцируемость любого конечного по-

рядка. Как и в случае вещественнозначных функций одной переменной, из дифференцируемости $\boldsymbol{w}(t)$ следует непрерывность $\boldsymbol{w}(t)$.

Будем предполагать, что в начальных условиях (3) $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0 \in \mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$. Также предположим, что в начальный момент времени индукция магнитного поля $\mu\boldsymbol{H}_0$ удовлетворяет условию соленоидальности: $\mathrm{div}\left(\mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\right) \equiv 0$ (производные в дивергенции, в общем случае, следует понимать как производные в классе обобщенных функций-распределений). Как и для ранее рассматривавшихся начально-краевых задач [5–7], можно доказать, что из соленоидальности индукции магнитного поля в начальный момент времени вытекает ее соленоидальность во все последующие моменты времени.

От решения задачи (1) – (3) потребуем, чтобы в любой момент времени $t > 0$ поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ как функции пространственных координат принадлежали $\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$. Кроме того, потребуем, чтобы $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ были дифференцируемы по времени на полуинтервале $t \ge 0$ по норме $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$ ($\mathbf{L_2}$ – обозначение пространства векторных полей, квадратично суммируемых на множестве, указанном в скобках после $\mathbf{L_2}$; норма любого поля $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L_2}$, то есть, среднеквадратичная норма – $\|\boldsymbol{w}\|_2 = \sqrt{\int |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2 \, dV}$, где интеграл берется по множеству, указанному в скобках после $\mathbf{L_2}$). Покажем, что решение в выбранном функциональном классе (то есть удовлетворяющее поставленным условиям) существует, определяется однозначно и зависит от начальных данных непрерывно по среднеквадратичной норме.

Существование и единственность решения

Исследование начально-краевой задачи (1) – (3) сопряжено с исследованием свойств линейного дифференциального оператора, определяющего правую часть системы (1). Этот дифференциальный оператор, который мы обозначим как $\hat{A}$, действует на упорядоченную пару векторных полей $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ по следующей формуле:

$$\hat{A}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r})} \mathrm{rot}\boldsymbol{v} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{u}; -\frac{1}{\mu_0 \mu(\boldsymbol{r})} \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \right). \qquad (4)$$

Из определения обобщенного ротора, свойств кусочной непрерывности функций $\sigma(\boldsymbol{r})$, $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ и $\mu(\boldsymbol{r})$, а также из неравенств $\varepsilon(\boldsymbol{r}) > 1$ и $\mu(\boldsymbol{r}) > 1$ следует, что область значений $\hat{A}$ включается в $\left(\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)\right)^2$.

Обозначим через $\mathbf{H}'$ пространство векторных полей, непрерывно дифференцируемых и квадратично суммируемых в $\mathbf{R}^3$ вместе со своими роторами. Обозначим как $\mathbf{K}$ пространство векторных полей, обладающих следующими свойствами. Эти векторные поля непрерывно дифференцируемы в областях Ω_i, в области

$\Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i \right)$ и в области $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, а также допускают непрерывные продолжения вместе со своими производными первого порядка на границы Ω_i и на границу Ω изнутри и снаружи областей. Кроме того, поля $\mathbf{K}$ удовлетворяют граничным условиям вида (2) на границах Ω_i и Ω, а также квадратично суммируемы вместе со своими роторами в $\mathbf{R}^3$. Ранее был доказан ряд свойств $\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{K}$ [6, 8].

Теорема 1. $\mathbf{H}' \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right) \subset \mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$, *причем* $\mathbf{H}'$ *– плотное подпространство* $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$.

Теорема 2. *Если последовательность* $\boldsymbol{u}_n \in \mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$ *сходится по норме* $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$ *к* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$ *и при этом* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_n$ *сходится по норме* $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$ *к* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$, *то* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$ *и* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

Теорема 3. *Для любого векторного поля* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$ *существует такая последовательность* $\boldsymbol{u}_n \in \boldsymbol{H}'$, *что* $\boldsymbol{u}_n$ *сходится к* $\boldsymbol{u}$ *и* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_n$ *сходится к* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ *по норме* $\boldsymbol{L_2}\left(\mathrm{R}^3\right)$.

Из теоремы 1 вытекает, что область определения оператора $\hat{A}$ – плотная в $\left(\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)\right)^2$. Обозначим как $\hat{A}'$ линейный оператор, действующий подобно оператору $\hat{A}$ по формуле (4), но на меньшем пространстве $\mathbf{K}^2$.

Теорема 4. *Оператор* $\hat{A}$ *является минимальным замкнутым расширением оператора* $\hat{A}'$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $(\boldsymbol{u}_n; \boldsymbol{v}_n) \in \left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ при $n \to +\infty$ сходится по среднеквадратичной норме к паре $(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})$ и при этом $\hat{A}(\boldsymbol{u}_n; \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{f}_n; \boldsymbol{g}_n)$ сходится к некоторой паре $(\boldsymbol{f}; \boldsymbol{g})$. Тогда, в силу кусочной непрерывности и ограниченности $\sigma(\boldsymbol{r})$, $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ и $\mu(\boldsymbol{r})$, последовательность $(\mathrm{rot}\boldsymbol{u}_n; \mathrm{rot}\boldsymbol{v}_n) = (-\mu_0\mu\boldsymbol{g}_n; \varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}_n + \sigma\boldsymbol{u}_n)$ сходится по среднеквадратичной норме к $(-\mu_0\mu\boldsymbol{g}; \varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f} + \sigma\boldsymbol{u})$. Следовательно, по теореме 2, $(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) \in \left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ (то есть, $(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})$ входит в область определения $\hat{A}$), причем $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = -\mu_0\mu\boldsymbol{g}$ и $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f} + \sigma\boldsymbol{u}$. Кроме того,

$$\hat{A}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\boldsymbol{u}; -\frac{1}{\mu_0\mu}\mathrm{rot}\boldsymbol{u} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}(\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f} + \sigma\boldsymbol{u}) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\boldsymbol{u}; -\frac{1}{\mu_0\mu}(-\mu_0\mu\boldsymbol{g}) \right) = (\boldsymbol{f}; \boldsymbol{g}).$$

Следовательно, $\hat{A}$ замкнут.

В силу теорем 1 и 3, для любой пары $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \in \left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ существует такая последовательность $(\boldsymbol{u}_n;\boldsymbol{v}_n) \in \mathbf{K^2}$, что $(\boldsymbol{u}_n;\boldsymbol{v}_n)$ сходится по среднеквадратичной норме к $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ и при этом последовательность $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_n; \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_n)$ сходится по среднеквадратичной норме к $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}; \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})$. Тогда последовательность $\hat{A}'(\boldsymbol{u}_n;\boldsymbol{v}_n) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_n - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\boldsymbol{u}_n; -\frac{1}{\mu_0\mu}\mathrm{rot}\boldsymbol{u}_n\right)$, в силу кусочной непрерывности и ограниченности $\sigma(\boldsymbol{r})$, $1/\varepsilon(\boldsymbol{r})$ и $1/\mu(\boldsymbol{r})$, сходится к $\left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\boldsymbol{u}; -\frac{1}{\mu_0\mu}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\right)$, то есть к $\hat{A}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$. Следовательно, $\hat{A}'$ для замкнутости следует доопределить, как минимум, до оператора $\hat{A}$. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 4 обосновывают выбор функционального пространства для задачи (1) – (3): в определении пространства $\mathbf{K}$ учтены граничные условия (2), а теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве доказаны исключительно для замкнутых операторов [9, 10].

Теорема 5. *Для любой упорядоченной пары* $(\boldsymbol{f};\boldsymbol{g}) \in \left(\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ *и для любого* $p > 0$ *уравнение* $\hat{A}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) - p(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f};\boldsymbol{g})$ *имеет в пространстве* $\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ *единственное решение, причем это решение удовлетворяет неравенству*

$$\sqrt{\varepsilon_0 \left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2 + \mu_0 \left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2} \le \frac{1}{p} \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2^2 + \mu_0 \left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2^2}\ . \tag{5}$$

Доказательство. Рассматриваемое уравнение с параметром $p > 0$ в подробной покомпонентной форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon(\boldsymbol{r})}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} - \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0\varepsilon(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}), \\ -\frac{1}{\mu_0\mu(\boldsymbol{r})}\mathrm{rot}\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}). \end{cases} \tag{6}$$

Умножим первое уравнение системы (6) на $\varepsilon_0\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}$, второе уравнение на $\mu_0\mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}$, затем уравнения сложим и проинтегрируем сумму по $\mathbf{R}^3$:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^3} (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}))\,dV - \varepsilon_0 p \left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2 - \mu_0 p \left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2 - \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Omega_i} \sigma(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2\,dV =$$

$$= \varepsilon_0 \int\limits_{\mathbf{R}^3} \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\,dV + \mu_0 \int\limits_{\mathbf{R}^3} \mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,dV\ . \tag{7}$$

Для $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \in \left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ $\int\limits_{\mathbf{R}^3} (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}))\,dV = 0$ [5, 7]. Тогда, в силу неположительности левой части (7), а также в силу неравенства Коши – Буняковского для сумм и интегралов,

$$\varepsilon_0 p\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0 p\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Omega_i}\sigma(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2\,dV=$$

$$=\left|\varepsilon_0\int\limits_{\mathbf{R}^3}\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\,dV+\mu_0\int\limits_{\mathbf{R}^3}\mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,dV\right|\le$$

$$\le\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2=$$

$$=\sqrt{\varepsilon_0}\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2\cdot\sqrt{\varepsilon_0}\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2+\sqrt{\mu_0}\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2\cdot\sqrt{\mu_0}\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2\le$$

$$\le\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2}\cdot\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2^2}.$$

Следовательно, в силу положительности $\sigma(\boldsymbol{r})$,

$$\varepsilon_0 p\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0 p\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2\le\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2}\cdot\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2^2}\ . \quad (8)$$

Тогда неравенство (5) вытекает из неравенства (8) делением на $p\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2}$. Таким образом, доказано выполнение неравенства (5) для любого решения $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ системы (6). Заметим, что из неравенства (5) вытекает единственность решения системы (6): при $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\equiv\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})\equiv\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ – обозначение нулевого вектора) из неравенства (5) следует, что поля $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ могут быть только нулевыми; а существование не более, чем тривиального, решения однородной системы означает единственность решения системы (6) при любой правой части.

Теперь докажем существование решения системы (6) в пространстве $\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$. Для этого воспользуемся следующей системой интегродифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=-\mu_0\mathrm{rot}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^3}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mu(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}')dV'+p\int\limits_{\Omega}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')(\mu(\boldsymbol{r}')-1)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')dV'\right)+\\ +\dfrac{\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon_0 p}\varepsilon_0\left(\int\limits_{\mathbf{R}^3}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varepsilon(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}')dV'+\right.\\ \left.+\int\limits_{\Omega}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')(\sigma(\boldsymbol{r}')+p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r}')-1))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')dV'\right),\\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=\mathrm{rot}\left(\varepsilon_0\int\limits_{\mathbf{R}^3}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varepsilon(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}')dV'+\int\limits_{\Omega}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')(\sigma(\boldsymbol{r}')+p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r}')-1))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')dV'\right)+\\ +\dfrac{\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\int\limits_{\mathbf{R}^3}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mu(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}')dV'+\\ +\left(\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0\right)\int\limits_{\Omega}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')(\mu(\boldsymbol{r})-1)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')dV',\end{cases} \quad (9)$$

где $G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\exp\left(-p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\Big/4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$.

Для исследования системы (9) оказываются полезными свойства объемного потенциала $\hat{P}[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\Xi} G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}')dV'$ (в качестве Ξ можно принять любую область; $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}_2(\Xi)$). $\hat{P}[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{r})$ непрерывен и квадратично суммируем во всем пространстве $\mathbf{R}^3$, имеет квадратично суммируемые в $\mathbf{R}^3$ обобщенные производные по Соболеву первого и второго порядка, а также удовлетворяет уравнению Гельмгольца (неоднородному – в области Ξ; однородному – снаружи Ξ) [1]:

$$\left(\mu_0\varepsilon_0 p^2 - \Delta\right)\hat{P}[\boldsymbol{w}] = \begin{cases} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r} \in \Omega, \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{10}$$

где равенство следует понимать как эквивалентность функций.

Из указанных свойств объемного потенциала следует, в частности, что все интегродифференциальные операции в (9) с $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ определены в $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$.

Заметим, что систему (9) достаточно решить в области Ω: снаружи Ω поля $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ получаются непосредственным интегрированием по области Ω. Для решения системы (9) в области Ω произведем следующую подстановку:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \dfrac{p\sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{U}}{\sigma(\boldsymbol{r}) + p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1)}, \\ \boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{\mu_0}(\mu(\boldsymbol{r})-1)}. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что в областях Ω_i $\boldsymbol{u} = p\sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{U}/\sigma(\boldsymbol{r})$. В силу оговоренных при постановке задачи свойств функции $\sigma(\boldsymbol{r})$ функция $1/\sigma(\boldsymbol{r})$ положительна и непрерывна в каждой области Ω_i, причем допускает непрерывные продолжения на границы Ω_i изнутри, оставаясь при таких продолжениях положительной. В области $\Omega \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \bar{\Omega}_i\right)$ $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}/\sqrt{\varepsilon_0}(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1)$. В силу свойств функции $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ функция $1/\sqrt{\varepsilon_0}(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1)$ положительна и непрерывна в области $\Omega \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \bar{\Omega}_i\right)$, причем допускает непрерывные продолжения на границы Ω_i снаружи и на границу Ω изнутри, оставаясь при таких продолжениях положительной. То есть функция $p\sqrt{\varepsilon_0}/(\sigma(\boldsymbol{r}) + p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1))$ непрерывна и положительна в Ω_i, в $\Omega \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \bar{\Omega}_i\right)$ и допускает непрерывные продолжения на границы Ω_i изнутри и снаружи, а также на границу Ω изнутри, оставаясь при таких продолжениях положительной. В силу свойств $\mu(\boldsymbol{r})$, аналогичными свойствами положительности и кусочной непрерывности обладает функция $1/\sqrt{\mu_0}(\mu(\boldsymbol{r})-1)$. Следовательно, замена (11) $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ на $(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})$ является взаимно-однозначным отображением $(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$ на $(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$.

Определим операторы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ следующим образом: $\hat{B}[\boldsymbol{w}] = \mathrm{rot}\hat{P}[\boldsymbol{w}]$, $\hat{C}[\boldsymbol{w}] = \left(p^2\varepsilon_0\mu_0 - \mathrm{graddiv}\right)\hat{P}[\boldsymbol{w}]$, где $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Также примем обозначения

$\boldsymbol{U}_0 = -\mu_0 \hat{B}[\mu \boldsymbol{g}] - \frac{1}{p}\hat{C}[\varepsilon \boldsymbol{f}]$, $\boldsymbol{V}_0 = \varepsilon_0 \hat{B}[\varepsilon \boldsymbol{f}] - \frac{1}{p}\hat{C}[\mu \boldsymbol{g}]$. С учетом введенных обозначений после подстановки (11), умножения первого уравнения на $\sqrt{\varepsilon_0}$ и второго уравнения на $\sqrt{\mu_0}$ система (9) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{p\varepsilon_0}{\sigma(\boldsymbol{r}) + p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1)}\boldsymbol{U} + p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\hat{B}[\boldsymbol{V}] + \hat{C}[\boldsymbol{U}] = \sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{U}_0, \\ \dfrac{1}{(\mu(\boldsymbol{r})-1)}\boldsymbol{V} - p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\hat{B}[\boldsymbol{U}] + \hat{C}[\boldsymbol{V}] = \sqrt{\mu_0}\boldsymbol{V}_0. \end{cases} \tag{12}$$

Левую часть системы (12) можно представить как действие некоторого оператора $\hat{T}$ на упорядоченную пару векторных полей $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})$: левая часть первого уравнения является первой компонентой $\hat{T}\boldsymbol{W}$, левая часть второго уравнения – соответственно второй компонентой $\hat{T}\boldsymbol{W}$. Рассмотрим скалярное произведение $\left(\hat{T}\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}\right)$ в пространстве $(\boldsymbol{L}_2(\Omega))^2$, индуцированное обычным способом из $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, то есть путем покомпонентного скалярного умножения пар векторных полей. При этом для каждой компоненты скалярное произведение определим, как обычно в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$: оно будет равно интегралу от произведения умножаемых функций. Чтобы отличать обозначения скалярного произведения и упорядоченной пары, в скалярном произведении сомножители будем разделять запятой, а не точкой с запятой:

$$\left(\hat{T}\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}\right) = \left(\frac{p\varepsilon_0}{\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon-1)}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\right) + p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left(\hat{B}[\boldsymbol{V}], \boldsymbol{U}\right) + \left(\hat{C}[\boldsymbol{U}], \boldsymbol{U}\right) + \\ + \left(\frac{1}{\mu - 1}\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}\right) - p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left(\hat{B}[\boldsymbol{U}], \boldsymbol{V}\right) + \left(\hat{C}[\boldsymbol{V}], \boldsymbol{V}\right). \tag{13}$$

Для вещественных значений p и вещественных векторных полей $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ оператор $\hat{B}$ симметричен: $\left(\hat{B}[\boldsymbol{V}], \boldsymbol{U}\right) = \left(\hat{B}[\boldsymbol{U}], \boldsymbol{V}\right)$ [1, 7]. Оператор $\hat{C}$ диссипативен: $\left(\hat{C}[\boldsymbol{U}]; \boldsymbol{U}\right) \geq 0$, $\left(\hat{C}[\boldsymbol{V}]; \boldsymbol{V}\right) \geq 0$ [1]. Следовательно, в выражении (13) слагаемые с оператором $\hat{B}$ взаимно уничтожаются, и скалярное произведение $\left(\hat{T}\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}\right)$ допускает следующую оценку снизу:

$$\begin{aligned} \left(\hat{T}\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}\right) &= \left(\frac{p\varepsilon_0}{\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon-1)}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\right) + \left(\hat{C}[\boldsymbol{U}], \boldsymbol{U}\right) + \left(\frac{1}{\mu-1}\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}\right) + \left(\hat{C}[\boldsymbol{V}], \boldsymbol{V}\right) \geq \\ &\geq \left(\frac{p\varepsilon_0}{\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon-1)}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\right) + \left(\frac{1}{\mu-1}\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}\right) \geq \\ &\geq \min\left\{\frac{p\varepsilon_0}{\sigma_{\sup}}, \frac{1}{\varepsilon_{\sup}-1}\right\}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}) + \frac{1}{\mu_{\sup}-1}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}) \geq \\ &\geq \min\left\{\frac{p\varepsilon_0}{\sigma_{\sup}}, \frac{1}{\varepsilon_{\sup}-1}, \frac{1}{\mu_{\sup}-1}\right\}((\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}) + (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})) = \\ &= \min\left\{\frac{p\varepsilon_0}{\sigma_{\sup}}, \frac{1}{\varepsilon_{\sup}-1}, \frac{1}{\mu_{\sup}-1}\right\}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\sigma_{\sup}$ – точная верхняя грань $\sigma(\boldsymbol{r})$ в объединении областей $\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i$; $\varepsilon_{\sup}$ – точная верхняя грань $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ в области $\Omega\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k}\overline{\Omega}_i\right)$, $\mu_{\sup}$ – точная верхняя грань $\mu(\boldsymbol{r})$ на множестве точек $\Omega\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{Fr}(\Omega_i)\right)$, где Fr – обозначение границы множества. Точные верхние грани $\sigma(\boldsymbol{r})$, $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ и $\mu(\boldsymbol{r})$ на указанных множествах, очевидно, являются максимальными значениями этих функций с учетом их возможных непрерывных продолжений на границы множеств.

В силу оценочного неравенства (14), система уравнений (12) имеет единственное решение в пространстве $(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$ [1]. Следовательно, система уравнений (9) имеет единственное решение $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$. Тогда, в силу свойств оператора $\hat{P}$, у системы уравнений (9) существует решение в пространстве $\left(\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ (получающееся из решения в $(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$ прямым интегрированием).

Кроме того, в силу свойств оператора $\hat{P}$ и свойств обобщенного ротора, к правым частям системы (9) можно применить операцию rot в обобщенном смысле определения 1: несмотря на то, что у объемного потенциала гарантировано существование только первых и вторых обобщенных производных по Соболеву, а операция rotgraddiv является дифференциальной операцией третьего порядка, все слагаемые с rotgraddiv тем не менее определены и равны нулевому вектору. Также, в силу свойств оператора $\hat{P}$, обобщенные роторы от правых частей системы (9) квадратично суммируемы в $\mathbf{R}^3$; то есть решение системы (9) $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$.

Найдем результат применения операции rot к первому уравнению системы (9), воспользовавшись соотношением (10) и вторым уравнением (9):

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{u} &= -\mu_0\mathrm{rotrot}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-\mu_0 p\mathrm{rotrot}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]-p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]-p\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]=\\
&=-\mu_0\mathrm{graddiv}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]+\mu_0\Delta\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-\mu_0 p\mathrm{graddiv}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]+\mu_0 p\Delta\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]-\\
&-p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]-p\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]=-\mu_0\mathrm{graddiv}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]+\mu_0^2\varepsilon_0 p^2\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-\\
&-\mu_0\mu\boldsymbol{g}-\mu_0 p\mathrm{graddiv}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]+\mu_0^2\varepsilon_0 p^3\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]-\mu_0 p(\mu-1)\boldsymbol{v}-p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]-\\
&-p\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]=-p\mu_0\left(\frac{\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]+\right.\\
&\left.+\left(\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0\right)\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]+\mathrm{rot}\left(\varepsilon_0\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]+\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]\right)\right)-\\
&-\mu_0\mu\boldsymbol{g}-\mu_0 p(\mu-1)\boldsymbol{v}=-p\mu_0\boldsymbol{v}-\mu_0\mu\boldsymbol{g}-p\mu_0\mu\boldsymbol{v}+p\mu_0\boldsymbol{v}=-\mu_0\mu\boldsymbol{g}-p\mu_0\mu\boldsymbol{v}.
\end{aligned}$$

Следовательно, решение системы (9) удовлетворяет второму уравнению системы (6). Теперь, воспользовавшись (10) и первым уравнением (9), найдем результат применения операции rot ко второму уравнению системы (9):

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \varepsilon_0 \mathrm{rotrot}\hat{P}[\varepsilon \boldsymbol{f}] + \mathrm{rotrot}\hat{P}[(\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon - 1))\boldsymbol{u}] - p\varepsilon_0\mu_0 \mathrm{rot}\hat{P}[\mu \boldsymbol{g}] - p^2\varepsilon_0\mu_0 \mathrm{rot}\hat{P}[(\mu - 1)\boldsymbol{v}] =$$

$$= \varepsilon_0 \mathrm{graddiv}\hat{P}[\varepsilon \boldsymbol{f}] - \varepsilon_0 \Delta\hat{P}[\varepsilon \boldsymbol{f}] + \mathrm{graddiv}\hat{P}[(\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon - 1))\boldsymbol{u}] - \Delta\hat{P}[(\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon - 1))\boldsymbol{u}] -$$

$$- p\varepsilon_0\mu_0 \mathrm{rot}\hat{P}[\mu \boldsymbol{g}] - p^2\varepsilon_0\mu_0 \mathrm{rot}\hat{P}[(\mu - 1)\boldsymbol{v}] = \varepsilon_0 \mathrm{graddiv}\hat{P}[\varepsilon \boldsymbol{f}] - \mu_0\varepsilon_0^2 p^2 \hat{P}[\varepsilon \boldsymbol{f}] + \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{f} +$$

$$+ \mathrm{graddiv}\hat{P}[(\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon - 1))\boldsymbol{u}] - \mu_0\varepsilon_0 p^2 \hat{P}[(\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon - 1))\boldsymbol{u}] + (\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon - 1))\boldsymbol{u} -$$

$$= p\varepsilon_0\mu_0 \mathrm{rot}\hat{P}[\mu \boldsymbol{g}] - p^2\varepsilon_0\mu_0 \mathrm{rot}\hat{P}[(\mu - 1)\boldsymbol{v}] = p\varepsilon_0 \left(\frac{\mathrm{graddiv} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p} \hat{P}[\varepsilon \boldsymbol{f}] + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{graddiv} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p\varepsilon_0} \hat{P}[(\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon - 1))\boldsymbol{u}] - \mu_0 \,\mathrm{rot}\left(\hat{P}[\mu \boldsymbol{g}] + p\hat{P}[(\mu - 1)\boldsymbol{v}] \right) \right) +$$

$$+ \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{f} + (\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon - 1))\boldsymbol{u} = p\varepsilon_0 \boldsymbol{u} + \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{f} + \sigma \boldsymbol{u} + p\varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{u} - p\varepsilon_0 \boldsymbol{u} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{f} + \sigma \boldsymbol{u} + p\varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{u}.$$

То есть решение системы (9) удовлетворяет первому уравнению системы (6). Следовательно, решение системы (9) является решением системы (6), что означает существование решения у системы (6) в пространстве $\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ при любом $p > 0$ и любых правых частях $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3)$. Теорема доказана.

Обозначим как $\hat{I}$ тождественный оператор. Из доказанной теоремы непосредственно следует, что $\left(\hat{A} - p\hat{I}\right)^{-1}$ определен на всем пространстве $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$.

Заметим, что в силу неравенств $1 < \varepsilon \le \varepsilon_{\sup}$ и $1 < \mu \le \mu_{\sup}$, для норм справедливы следующие оценки:

$$\|\boldsymbol{u}\|_2 \le \left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2 \le \sqrt{\varepsilon_{\sup}}\,\|\boldsymbol{u}\|_2 ,$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 \le \left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2 \le \sqrt{\mu_{\sup}}\,\|\boldsymbol{v}\|_2 .$$

То есть выражения $\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2$ и $\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2$ определяют нормы, эквивалентные обычной среднеквадратичной норме в пространстве $\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3)$. Следовательно, выражение $\sqrt{\varepsilon_0 \left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2 + \mu_0 \left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2}$ определяет одну из эквивалентных среднеквадратичных норм пары $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ в пространстве $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$. И относительно этой нормы, в силу неравенства (5), $\left\|\left(\hat{A} - p \cdot \hat{I}\right)^{-1}\right\| \le 1/p$.

Таким образом, доказаны следующие свойства оператора $\hat{A}$: оператор $\hat{A}$ замкнут и имеет плотную в $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$ область определения; для любого $p > 0$ оператор $\left(\hat{A} - p\hat{I}\right)^{-1}$ определен на всем пространстве $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$, и относительно одной из эквивалентных среднеквадратичных норм значение $\left\|\left(\hat{A} - p\hat{I}\right)^{-1}\right\|$ ограничено сверху величиной $1/p$. Следовательно, по теореме Хилле – Иосиды [9, 10], начально-краевая задача (1) – (3) в рассматриваемой постановке имеет единственное решение, зависящее от начальных данных непрерывно по норме $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$.

Заключение

Полученные результаты, касающиеся существования и единственности решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла, допускают известное обобщение и на неоднородную систему уравнений электродинамики [7, 8, 10]. При всех доказанных свойствах оператора $\hat{A}$ начально-краевая задача для неоднородной системы уравнений Максвелла имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий, если, в частности, плотность стороннего тока в начальный момент времени, как функция пространственных координат, входит в область определения оператора $\hat{A}$ (например, является тождественно нулевой векторной функцией) и, кроме того, представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую функцию времени на полуинтервале $t \geq 0$. Заметим, что математические модели не скачкообразного, а непрерывного включения стороннего тока этим условиям, как правило, удовлетворяют.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дякин В.В., Сандовский В.А.* Задачи электродинамики в неразрушающем контроле. Екатеринбург: Институт физики металлов, 2008. 390 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. *Калинин А.В.* Математические задачи физической диагностики. Корректность задач электромагнитной теории в стационарном и квазистационарном приближении. Нижний Новгород: ННГУ, 2007. 121 с.
4. *Дякин В.В., Марвин С.В.* Начально-краевая задача и интегродифференциальные уравнения электродинамики для неоднородного проводящего тела // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 2. С. 288–296.
5. *Марвин С.В., Дякин В.В.* Нестационарная краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца // Электричество. 2008. № 12. С. 30–36.
6. *Марвин С.В.* Существование и единственность решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла в случае неферромагнитного дефектного металлического тела // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 1. С. 105–117.
7. *Марвин С.В.* Начально-краевая задача электромагнитного контроля дефектного ферромагнитного проводника остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока // Дефектоскопия. 2016. № 11. С. 27–38.
8. *Марвин С.В.* Начально-краевая задача структуроскопии неферромагнитного металлического тела с инородными диэлектрическими включениями остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока // Дефектоскопия. 2016. № 2. С. 42–54.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 394 с.
10. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

Статья поступила 07.04.2017 г.

Marvin S.V. (2017) AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE UNIFORM SYSTEM OF MAXWELL'S EQUATIONS IN THE CASE OF A MAGNETODIELECTRIC BODY WITH CONDUCTIVE FERROMAGNETIC INCLUSIONS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics* (47) pp. 22–36

DOI 10.17223/19988621/47/3

The uniform system of electrodynamics equations solved for strength derivatives with respect to time is considered as applied to the case of a heterogeneous magnetodielectric with foreign metallic ferromagnetic inclusions. It is assumed that the magnetodielectric and ferromagnetic inclusions have a piecewise smooth boundaries, and the closed domains occupied by the ferromagnetics do not intersect and are included in the domain occupied by the magnetodielectric. The electromagnetic characteristics of individual media satisfy the natural requirements of continuity. Under these assumptions, the differential operator $\hat{A}$ defining the right part of the system of Maxwell's equations, is explored. For the operator $\hat{A}$ we selected the most natural definition domain: the space of ordered pairs of vector fields square summable together with their generalized curls. It is shown that such a choice of the definition domain of operator $\hat{A}$ takes into account the boundary conditions of continuity of tangent components of the intensities. It is proved that the operator $\hat{A}$ is closed and has an important spectral property: operator $\left(\hat{A} - p\hat{I}\right)^{-1}$ ($\hat{I}$ is the identity operator) is defined on the space of ordered pairs of square summable vector fields and his norm is smaller or equal to $1/p$. Based on the Hille–Yosida theorem, we conclude that the studied initial-boundary value problem has a unique solution if differentiability with respect to time is meant as differentiability with respect to the mean-square norm.

Keywords: initial-boundary value problem, Maxwell's equations, integro-differential equations, closed operator, Hille–Yosida theorem

MARVIN Sergey Vladimirovich (Candidate of physics and mathematics, doctoral student; associate professor of department of information technologies and automation; Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin; Yekaterinburg, Russian Federation)

E-mail: s.v.marvin@yandex.ru

REFERENCES

1. Dakin V.V., Sandovskiy V.A. (2008) *Zadachi elektrodinamiki v nerazrushaiuschem kontrole* [Electrodynamics problems in nondestructive testing]. Yekaterinburg: Institute of Metal Physics.
2. Duvaut R., Lions J.-L. (1976) *Inequalities in mechanics and physics.* New York: Springer-Verlag.
3. Kalinin A.V. (2007) *Matematicheskie zadachi fizicheskoy diagnostiki. Korrektnost' zadach v statzionarnom i kvazistatzionarnom priblizhenii* [Mathematical problems of physical diagnostics. Correctness of problems of the electromagnetic theory in the stationary and quasi-stationary approximation]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University.
4. Dyakin V.V., Marvin S.V. (2008) Initial-boundary value problem and integrodifferincial equations electrodynamics for an inhomogeneous conductive body. *Computational mathematics and mathematical physics*, 48 (2). pp. 275–283. DOI: 10.1134/S0965542508020103.
5. Marvin S.V., Dyakin V.V (2008) Nestatsionarnaya kraevaya zadacha electrodinamiki dlya nemagnitnogo provodyaschego obraztsa [Initial-boundary value problem for a nonmagnetic conductive body]. *Elektrichestvo – Electricity*, 12. pp. 30–36.
6. Marvin S.V. (2016) Suschestovanie i edinstvennost' resheniya nachal'no-kraevoy zadachi dlya odnorodnoy sistemy uravneniy Maksvella v sluchae neferromagnitnogo defektnogo metallicheskogo tela [Existence and uniqueness of the solution of initial-boundary problem for

the uniform system of Maxwell's equations in the case of a nonferromagnetic defective metallic body]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 1. pp. 105–117.

7. Marvin S.V. (2016) Initial-boundary value problem of electromagnetic testing of a flawed ferromagnetic conductor by the residual field of an instantaneously cut-off current. *Russian journal of nondestructive testing*, 52 (11). pp. 638–646. DOI: 10.1134/S106183091611005X.
8. Marvin S.V. (2016) An initial-boundary value problem of structurescopy of a nonferromagnetic metal solid with foreign dielectric inclusions using the residual field of an instantaneously cut-off extraneous current. *Russian journal of nondestructive testing*, 52 (2). pp. 85–94. DOI: 10.1134/S1061830916020054.
9. Reed M., Simon B. (1975) *Methods of Modern Mathematical Physics. 2. Fourier Analysis, Self-Adjointness*. New York; London: Academic press.
10. Kreyn S.G. (1967) *Lineinye differentsial'nie uravneniya v banahovom prostranstve* [Linear differential equations in the Banach space]. Moscow: Nauka.

УДК 514.8, 621.8
DOI 10.17223/19988621/47/4

Н.Р. Щербаков, А.А. Щёголева

КАСАНИЕ ОДНОПОЛОСТНЫХ ГИПЕРБОЛОИДОВ ВРАЩЕНИЯ КАК АКСОИДОВ ГИПОИДНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Однополостные гиперболоиды вращения являются базовыми поверхностями так называемой гипоидной передачи. Такие механизмы предназначены для передачи вращения между скрещивающимися валами и характеризуются повышенной нагрузочной способностью, плавностью хода и бесшумностью работы. Получены условия касания таких гиперболоидов по прямолинейной образующей; доказано, что при заданных величинах смещения осей гиперболоидов и передаточного отношения параметры базовых поверхностей определяются однозначно.

Ключевые слова: *однополостный гиперболоид вращения, смещение осей, передаточное отношение.*

Линейчатые поверхности, фигурирующие в названии статьи, лежат в основе так называемых гипоидных передач, занимающих важное место в большом многообразии зубчатых передаточных механизмов. Главная особенность гипоидной передачи – скрещивающиеся оси вращения входной и выходной деталей (традиционные названия этих деталей – «шестерня» и «колесо» соответственно). Такое расположение осей позволяет обеспечить плавность хода, бесшумность работы и повышенную нагрузочную способность механизма. Базовыми поверхностями (*аксоидами*) гипоидной передачи являются однополостные гиперболоиды вращения. Вследствие сложности изготовления, раньше на практике гиперболоиды заменялись конусами. В последние годы, с появлением компьютерных технологий и современных станков с программным управлением, стало возможным проектирование и изготовление гипоидных передач, зубья которых нарезаются на заготовках в форме гиперболоидов. Геометрические аспекты моделирования гипоидной передачи – нахождение условий, когда возможно качение гиперболоидов с касанием по прямолинейной образующей при вращении их вокруг своих осей с соответствующим отношением скоростей. Эти условия на параметры гиперболоидов

$$1)\ \frac{x^2+y^2}{a_1^2}-\frac{z^2}{c_1^2}=1,\ \ 2)\ \frac{x^2+y^2}{a_2^2}-\frac{z^2}{c_2^2}=1,$$

$(a_1 \neq a_2, c_1 \neq c_2)$ известны и приведены, например, в [1, 2, 3], а в [4] показано, что для выполнения *комплексного* движения одного аксоида по другому (качение и смещение одного аксоида по другому вдоль общей прямолинейной образующей) должно выполняться условие

$$a_1{}^2 + c_1{}^2 = a_2{}^2 + c_2{}^2.$$

В данной работе рассмотрен случай чистого качения гиперболоидов с $a_1 \neq a_2$ и перпендикулярными осями и доказано, что такое качение возможно только при $c_1 = c_2$ (этот факт приведен в [5, с. 209, 286, 287] без строго доказательства). Эту

ситуацию нельзя получить как частный случай комплексного движения, поскольку, как видно из приведенного выше условия этого движения, при $c_1 = c_2$ получаем $a_1 = a_2$.

Рассмотрим случай, когда аксоидами гипоидной передачи являются однополостные гиперболоиды вращения с взаимно перпендикулярными скрещивающимися осями. Пусть ось аксоида колеса направлена по оси *OZ*, а ось аксоида шестерни параллельна оси *OX*. Для того чтобы аксоиды касались по прямолинейной образующей, необходимо, очевидно, чтобы эти поверхности имели по крайней мере одну общую точку. Этого можно добиться, сместив аксоид шестерни в направлении оси *OY* на величину

$$Sm = a_1 + a_2, \tag{1}$$

где a_1 и a_2 – радиусы горловых линий аксоидов шестерни и колеса соответственно. Тогда обе горловые линии, расположенные в перпендикулярных плоскостях, проходят через точку $A(0, -a_2, 0)$ – рис 1.

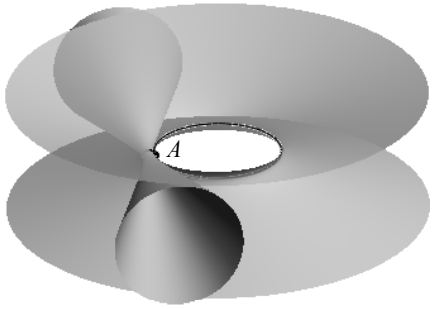


Рис. 1. Расположение аксоидов гипоидной передачи со смещением аксоида шестерни на величину *Sm*. Обе горловые линии проходят через точку *A*
Fig. 1. Arrangement of axoids of the hypoid gear with a displacement of the gear-wheel axoid by the quantity *Sm*. Both the striction lines pass through the point *A*

Уравнение аксоида шестерни запишем в виде

$$\frac{(y + Sm)^2 + z^2}{a_1^2} - \frac{x^2}{c_1^2} = 1, \tag{2}$$

а уравнение аксоида колеса – как

$$\frac{x^2 + y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{c_2^2} = 1. \tag{3}$$

Рассмотрим условия касания гиперболоидов (2) и (3) по прямолинейной образующей. Поскольку точка *A* принадлежит обеим горловым линиям этих поверхностей, нужно потребовать, чтобы направляющий вектор прямолинейной образующей гиперболоида (2), проходящей через точку *A*, был коллинеарен направляющему вектору прямолинейной образующей гиперболоида (3), проходящей через эту же точку.

Как известно из курса аналитической геометрии [6, с. 85], направляющие вектора двух прямолинейных образующих гиперболоида вида (3), проходящих через

точку (x_0, y_0, 0) горловой окружности $x^2 + y^2 = a^2$ имеют вид $\{\mp y_0, \pm x_0, c_2\}$. Отсюда получаем векторы двух прямолинейных образующих гиперболоида (3), проходящих через точку его горловой линии $A(0, -a_2, 0)$:

$$\{\pm a_2, 0, c_2\}. \tag{4}$$

Для гиперболоида (2), с учетом того, что его ось перпендикулярна оси гиперболоида (3), получаем векторы двух прямолинейных образующих, проходящих через точку его горловой линии $A'(0, -a_1, 0)$:

$$\{\pm c_1, 0, a_1\}. \tag{5}$$

Здесь, естественно, не учтен параллельный сдвиг аксоида шестерни на величину Sm, как не влияющий на координаты определяемых векторов. После этого сдвига точка A' совпадет с точкой A.

Условия коллинеарности 4 пар векторов из (4), (5)

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} \pm a_2 & 0 & c_2 \\ \pm c_1 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = 1$$

приводят к единственному соотношению между параметрами гиперболоидов, когда эта коллинеарность возможна:

$$a_1 a_2 = c_1 c_2. \tag{6}$$

Таким образом, при выполнении условия (6), прямолинейная образующая гиперболоида шестерни (2) с направляющим вектором $\boldsymbol{l}_1(c_1, 0, a_1)$ совпадает с прямолинейной образующей гиперболоида колеса (3) с направляющим вектором $\boldsymbol{l}_2(a_2, 0, c_2)$ (конечно, если обе эти образующие взяты в общей точке A горловых линий гиперболоидов). Однако этого условия (6) недостаточно, чтобы гиперболоиды касались друг друга в точках этой общей прямолинейной образующей, т.е. имели в этих точках общие касательные плоскости. Последнее будет иметь место (как указано в [5, с. 287]), только если $c_1 = c_2$. Докажем это (в [5] доказательство не приводится).

Обозначим через γ_k угол между общей прямолинейной образующей гиперболоидов и осью вращения шестерни (параллельна оси OX), а через Γ_k – угол между этой образующей и осью вращения колеса (ось OZ). Передаточное отношение i гипоидной передачи равно отношению синусов этих углов [1, с. 70]:

$$i = \frac{\sin\gamma_k}{\sin\Gamma_k}. \tag{7}$$

Так как оси аксоидов перпендикулярны, а вектор общей прямолинейной образующей лежит в плоскости, параллельной этим осям, то $\gamma_k + \Gamma_k = \frac{\pi}{2}$, то есть $\sin\Gamma_k = \cos\gamma_k$. Учитывая координаты вектора общей прямолинейной образующей – $\boldsymbol{l}_1(c_1, 0, a_1)$, находим

$$\cos\gamma_k = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + a_1^2}}, \quad \sin\gamma_k = \frac{a_1}{\sqrt{c_1^2 + a_1^2}}.$$

В итоге из (7) получаем

$$i = \frac{a_1}{c_1}. \tag{8}$$

С другой стороны, передаточное отношение i равно отношению радиусов окружностей сечения гиперболоидов шестерни (до сдвига) и колеса сферой некоторого радиуса R с центром в начале координат (основная теорема теории зацеплений). Обозначим эти радиусы r_1 (для шестерни) и r_2 (для колеса) и выразим эти величины через параметры гиперболоидов и радиус сферы. Уравнения окружности сечения для колеса имеют вид

$$x^2 + y^2 = r_2^2,$$
$$z = \sqrt{R^2 - r_2^2}.$$

Подставляя правые части этих уравнений в (3), получаем

$$\frac{r_2^2}{a_2^2} - \frac{R^2 - r_2^2}{c_2^2} = 1,$$

откуда

$$r_2^2 = \left(R^2 + c_2^2\right)\frac{a_2^2}{c_2^2 + a_2^2}. \qquad (9)$$

Аналогично, для радиуса окружности сечения гиперболоида шестерни (до сдвига) сферой радиуса R получаем

$$r_1^2 = \left(R^2 + c_1^2\right)\frac{a_1^2}{c_1^2 + a_1^2}. \qquad (10)$$

Теперь поделим (10) на (9), заменим в левой части $\frac{r_1}{r_2}$ на i, а правую часть преобразуем с учетом (6). В результате получим

$$i^2 = \frac{\left(R^2 + c_1^2\right)}{\left(R^2 + c_2^2\right)}\frac{a_1^2}{c_1^2}. \qquad (11)$$

Отсюда в силу (8) следует, что $c_1 = c_2$. На рис. 2 изображены гиперболоиды шестерни и колеса, ограниченные сферой радиуса R и касающиеся по прямолинейной образующей.

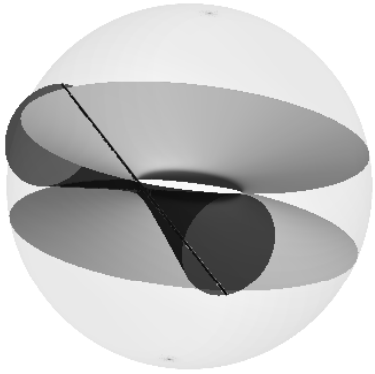


Рис. 2. Касание аксоидов гипоидной передачи по прямолинейной образующей
Fig. 2. Tangency of axoids of the hypoid gear along a rectilinear generator

Обозначим

$$c_1 = c_2 = c, \tag{12}$$

тогда соотношение (6) принимает вид

$$a_1 a_2 = c^2, \tag{13}$$

а соотношение (11), с учетом (12) и (13), примет следующий вид:

$$i^2 = \frac{a_1}{a_2}. \tag{14}$$

Теперь из (1), (14) и (13) можно выразить a_1, a_2 и c через i и Sm:

$$a_1 = \frac{i^2 Sm}{i^2 + 1},\ a_2 = \frac{Sm}{i^2 + 1},\ c = \frac{i\, Sm}{i^2 + 1}.$$

Таким образом, доказана

Теорема. Параметры a_1, a_2, c однополостных гиперболоидов вращения, являющихся аксоидами гипоидной передачи, полностью определяются величинами i (передаточное отношение) и Sm (расстояние между перпендикулярными осями).

Из соотношения (14) получаем

Следствие. Отношение радиусов горловых окружностей аксоидов гипоидной передачи равно квадрату передаточного отношения.

Это утверждение доказано другим способом в [1, с. 71].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вильдгабер Э.* Основы зацепления конических и гипоидных передач М.: Машгиз, 1946, 173 с.
2. *Радзевич С.П.* Векторное представление зубчатых пар. Часть 1 // Теория механизмов и машин. 2008. Т. 6. № 2. С. 74–81. URL: http://tmm.spbstu.ru/12/radzevich_12.pdf
3. *Nosko P., Shyshov V., Ratov D., Fill P., Lysenko A.* Helical gear train load capacity criterion // Teka. 2010. V. 14. No. 1. P. 182–190.
4. *Rachkovskaya, G.S., Kharabayev, Yu.N.* Geometric modeling and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of complex movingone axoid along another (one-sheet hyperboloid of revolution as fixed and moving axoids) // Proceedings of the 17th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision 2009, Plzen, Czech Republic, 2009. P. 31–34. URL: http://wscg.zcu.cz/DL/wscg_DL.htm (доступ свободный).
5. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. С. 285.
6. *Делоне Б.Н., Райков Д.А.* Аналитическая геометрия. Т. 2. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 516 с.

Статья поступила 25.02.2017 г.

Shcherbakov N.R., Shchegoleva A.A. (2017) TANGENCY OF ONE-SHEETED HYPERBOLOIDS AS AXOIDS OF THE HYPOID GEARING. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 37–42

DOI 10.17223/19988621/47/4

One-sheeted hyperboloids of revolution are basic surfaces (axoids) of the input and output details of hypoid gears occupying a prominent place in the large variety of gear trains. The main feature of the hypoid gear is the skew axes of rotation. Such arrangement of the axes allows one to provide the smoothness of movement, quietness of the operation, and higher load capacity of the mechanism. In this work, geometrical aspects of modeling the hypoid gear with perpendicular axes are considered, namely, (i) for parameters of the hyperboloids, the condition providing the existence of a common rectilinear generator passing through a common point of their striction

lines has been found; (ii) using this condition, an original proof of the following well-known fact has been obtained: rolling of hyperboloids with tangency along a rectilinear generator when they rotate about their axis with the corresponding ratio of velocities is possible only if the imaginary axes of the rotating hyperbolas forming the hyperboloids are equal; (iii) it has been proved that, at given displacements of the axes and gearing ratio, parameters of the hyperboloids are determined uniquely.

Keywords: one-sheeted hyperboloids of revolution, displacement of axes, gearing ratio.

SHCHERBAKOV Nikolay Romanovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: nrs@math.tsu.ru

SHCHEGOLEVA Anastasija Andreevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: nschegoleva@sibmail.com

REFERENCES

1. Wildhaber E. (1948) *Osnovy zatsepleniya konicheskikh i gipoidnykh peredach* [Foundations of conical and hypoid gearing]. Moscow: Mashgiz.
2. Radzevich S.P. (2008) Vektornoe predstavlenie zubchatych par. Chast 1 [Vector representation of gear pairs]. *Teoriya mekhanizmov i mashin*. V. 6. No. 2. pp. 74–81. http://tmm.spbstu.ru/12/radzevich_12.pdf
3. Nosko P., Shyshov V., Ratov D., Fill P., Lysenko A. (2010) Helical gear train load capacity criterion. *Teka*. 14(1). pp. 182–190.
4. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. (2009) Geometric modeling and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of complex movingone axoid along another (one-sheet hyperboloid of revolution as fixed and moving axoids). *Proceedings of the 17-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision 2009, Plzen, Czech Republic, 2009*. pp. 31–34. URL: http://wscg.zcu.cz/DL/wscg_DL.htm
5. Hilbert D., Cohn-Vossen S. (1938) *Anschauliche Geometrie*. Berlin: Verlag von Julius Springer.
6. Delone B., Raykov D. (1949) *Analyticheskaya geometriya* [Analytical geometry]. V. II. Moscow; Leningrad: GOSTEKhIZDAT

МЕХАНИКА

УДК 539.374
DOI 10.17223/19988621/47/5

Д.В. Гоцев, Н.С. Перунов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПОРИСТЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Построена математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние двухслойного неоднородного цилиндрического тела, находящегося под действием равномерно сжимающих нагрузок с учетом пористой структуры внутреннего слоя. Построение модели проводилось в рамках плоской деформации. Определена зависимость внешних сжимающих нагрузок, при которых начальная пористость материала достигает во всем слое своего нулевого значения; выведены аналитические выражения для нахождения напряженно-деформированных состояний в каждом слое. В качестве условий совместности на границе раздела слоев выбирались условия непрерывности радиальной компоненты напряжений и перемещений.

Ключевые слова: *пористые материалы, неоднородное цилиндрическое тело при сжатии, напряженно-деформированное состояние.*

При добыче полезных ископаемых должно быть пройдено большое количество вертикальных и горизонтальных шахтных стволов, которые являются долговременными и дорогостоящими инженерными сооружениями, жизненно важными для функционирования шахты в целом. Состояние горных выработок в зависимости от их назначения должно удовлетворять различным требованиям, основным из которых является обеспечение безопасных условий для работающих людей. В связи с этим возникают требования по проведению укрепительных работ горных выработок и подземных сооружений, то есть создание крепежных конструкций – крепей. Крепи могут быть монолитными или многослойными. Разрушение крепи подземной конструкции может произойти в результате следующих двух ситуаций: 1) достижение напряженно-деформированным состоянием (далее НДС) критических значений, соответствующих разрушению материалов конструкции; 2) достижение напряженно-деформированным состоянием критических значений, соответствующих потере устойчивости (отказу) крепи.

Решение первой задачи основано на сравнении найденного (в аналитическом или численном виде) НДС с предельными характеристиками, соответствующими разрушению материала конструкции. Во втором случае начальным этапом решения задачи устойчивости является нахождение в аналитическом виде основного НДС конструкции. В связи с этим получение аналитических соотношений, описывающих докритическое НДС в аналитической форме, является актуальной задачей.

В настоящей работе решается задача определения НДС двухслойного цилиндрического тела, находящегося под действием сжимающих нагрузок интенсивностями q_b и q_a, равномерно распределенных по внешнему и внутреннему контурам тела соответственно (рис. 1). Материал внешнего слоя будем моделировать упругим сжимаемым телом с параметрами Ламе λ_1, μ_1. Деформирование материала внутреннего слоя, имеющего пористую структуру, разделим на два этапа [1, 2]. Первый этап – деформирование среды при наличии несжатых пор, второй – деформирование сжатого скелета. На первом этапе в качестве модели материала принимается модель упругого сжимаемого тела с параметрами Ламе λ_2, μ_2, на втором – модель упругой несжимаемой среды с модулем сдвига $\mu=\mu_2+\mu_3$. Согласно работе [3], в качестве условия полного сжатия пор в некоторой точке среды выбирается условие равенства объемной деформации в этой точке величине ε_0 – начального раствора пор. Обозначим радиус внешней границы b, внутренней границы a, радиус границы контакта слоев – c.

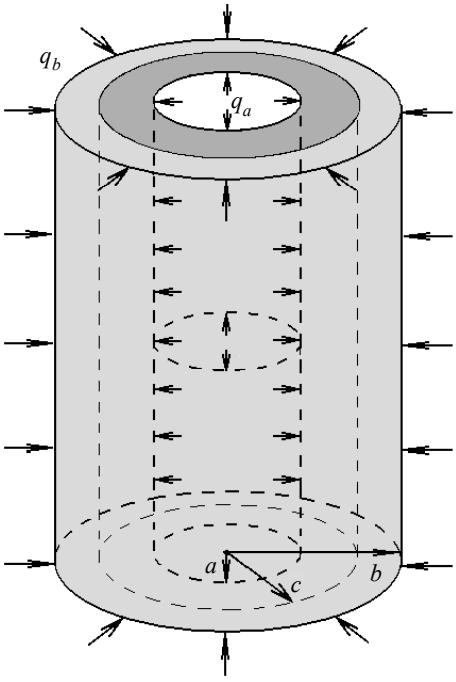


Рис. 1. Постановка задачи
Fig. 1. Formulation of the problem

На первом этапе деформирования НДС в рамках плоской деформации $(\varepsilon_z = 0)$ в цилиндрической системе координат (r, θ, z) будем использовать следующие соотношения геометрически линейной теории.

Уравнение равновесия:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0\,. \qquad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr},\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \tag{2}$$

Закон Гука для внешнего слоя :

$$\sigma_r^{(1)} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r^{(1)} + \lambda_1\varepsilon_\theta^{(1)},\ \sigma_\theta^{(1)} = \lambda_1\varepsilon_r^{(1)} + (\lambda_1+\mu_1)\varepsilon_\theta^{(1)}, \sigma_z^{(1)} = \lambda_1(\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_\theta^{(1)}). \tag{3}$$

Связь между напряжениями и деформациями для внутреннего слоя :

$$\sigma_r^{(2)} = (\lambda_2+2\mu_2)\varepsilon_r^{(2)} + \lambda_2\varepsilon_\theta^{(2)},\ \sigma_\theta^{(2)} = \lambda_2\varepsilon_r^{(2)} + (\lambda_2+\mu_2)\varepsilon_\theta^{(2)}, \sigma_z^{(2)} = \lambda_2(\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)}). \tag{4}$$

Условие наличия несхлопнутых пор для внутреннего слоя:

$$-\left(\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)}\right) < \varepsilon_0. \tag{5}$$

Граничные условия на внешнем и внутреннем контурах запишем соответственно в виде

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=b} = -q_b,\ \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=a} = -q_a. \tag{6}$$

Здесь в (1) – (6) и далее $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ – главные компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно, u – радиальная составляющая вектора перемещений, индекс (1) вверху компонент напряжений, деформаций и перемещений обозначает их принадлежность к внешнему слою, индекс (2) – к внутреннему слою, отсутствие верхних индексов у указанных величин обозначает их принадлежность как к внутреннему, так и к внешнему слоям сферического тела.

Из решения системы (1) – (6) получим следующие НДС:

- для внутреннего слоя

$$u^{(2)} = C_3 r + \frac{C_4}{r},\ \varepsilon_r^{(2)} = C_3 - \frac{C_4}{r^2},\ \varepsilon_\theta^{(2)} = C_3 + \frac{C_4}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(2)} = 2C_3(\lambda_2+\mu_2) - 2\mu_2\frac{C_4}{r^2},\ \sigma_\theta^{(2)} = 2(\lambda_2+\mu_2)C_3 + 2\mu_2\frac{C_4}{r^2}, \sigma_z^{(2)} = 2\lambda_2 C_3; \tag{7}$$

- для внешнего слоя

$$u^{(1)} = C_1 r + \frac{C_2}{r},\ \varepsilon_r^{(1)} = C_1 - \frac{C_2}{r^2},\ \varepsilon_\theta^{(1)} = C_1 + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(1)} = 2C_1(\lambda_1+\mu_1) - 2\mu_1\frac{C_2}{r^2},\ \sigma_\theta^{(1)} = 2C_1(\lambda_1+\mu_1) + \mu_1\frac{C_2}{r^2}, \sigma_z^{(2)} = 2\lambda_1 C_1, \tag{8}$$

где константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 находятся из следующей системы граничных условий и условий совместности:

$$\begin{cases} \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=a} = -q_a, \\ \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=b} = -q_b, \\ \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=c} = \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=c}, \\ u^{(1)}\Big|_{r=c} = u^{(2)}\Big|_{r=c}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\lambda_2+\mu_2)C_3 - 2\mu_2\dfrac{C_4}{a^2} = -q_a, \\ 2(\lambda_1+\mu_1)C_1 - 2\mu_1\dfrac{C_2}{b^2} = -q_b, \\ 2(\lambda_1+\mu_1)C_1 - 2\mu_1\dfrac{C_2}{c^2} = 2(\lambda_2+\mu_2)C_3 - 2\mu_2\dfrac{C_4}{c^2}, \\ C_1 c + \dfrac{C_2}{c} = C_3 c + \dfrac{C_4}{c}. \end{cases} \tag{9}$$

Решая систему (9), получим

$$C_4 = \frac{1}{(BA-P)}\left(\frac{b^2c^2(-q_b+q_a)}{2\mu_1\left(c^2-b^2\right)}A + \frac{q_b c}{2(\lambda_1+\mu_1)} + \frac{-q_a c}{2(\lambda_2+\mu_2)}\right),$$

$$C_2 = \frac{b^2c^2(q_b-q_a)}{2\mu_1\left(c^2-b^2\right)} + BC_4,$$

$$C_3 = \frac{1}{2(\lambda_2+\mu_2)}\left(-q_a + 2\mu_2\frac{C_4}{a^2}\right),\ C_1 = \frac{1}{2(\lambda_1+\mu_1)}\left(-q_b + 2\mu_1\frac{C_2}{b^2}\right), \qquad (10)$$

$$A = \frac{\mu_1 c}{b^2(\lambda_1+\mu_1)} + \frac{1}{c},\ B = \frac{\mu_2 b^2\left(c^2-a^2\right)}{\mu_1 a^2\left(c^2-b^2\right)},\ P = \frac{c\mu_2}{a^2(\lambda_2+\mu_2)} - \frac{1}{c}.$$

Объемная деформация на этом этапе для внутреннего слоя согласно (7) определится в форме

$$\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)} = 2C_3.$$

Тогда условие наличия в теле не полностью сжатых пор запишется в виде

$$-\frac{1}{(\lambda_2+\mu_2)}\left(-q_a + 2\mu_2\frac{C_4}{a^2}\right) < \varepsilon_0. \qquad (11)$$

Следовательно, схлопывание пор произойдет одновременно во всем внутреннем слое, когда внешняя и внутренняя нагрузки будут удовлетворять условию

$$-\frac{1}{(\lambda_2+\mu_2)}\left(-q_a + 2\mu_2\frac{C_4}{a^2}\right) \geq \varepsilon_0. \qquad (12)$$

На втором этапе деформирования, то есть при выполнении условия (12), НДС будем моделировать соотношениями (1), (2), присоединяя к ним граничные условия (6), реологические соотношения (3) для внешнего слоя, и соотношения

$$s_r = 2\mu\varepsilon_r^{(2)} - 2\mu_3\varepsilon_r^{(0)} + \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0,\ s_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta^{(2)} - 2\mu_3\varepsilon_\theta^{(0)} + \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0,\ s_z = \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0 \qquad (13)$$

для внутреннего.

Здесь в (13) и далее $\mu = \mu_2 + \mu_3$, s – девиатор тенхора напряжений, $\varepsilon_r^{(0)}$, $\varepsilon_\theta^{(0)}$ деформации внутреннего слоя на момент полного сжатия пор, которые определяются из соотношений (7), (10), (11) при переходе в (11) к равенству.

Из решения системы (1) – (3), (6), (13) при условии (12) получим следующие НДС:

- для внешнего слоя

$$u^{(1)} = D_3 r + \frac{D_4}{r},\ \varepsilon_r^{(1)} = D_3 - \frac{D_4}{r^2},\ \varepsilon_\theta^{(1)} = D_3 + \frac{D_4}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(1)} = 2D_3(\lambda_1+\mu_1) - 2\mu_1\frac{D_4}{r^2},\ \sigma_\theta^{(1)} = 2D_3(\lambda_1+\mu_1) + 2\mu_1\frac{D_4}{r^2},\ \sigma_z^{(1)} = 2\lambda_1 D_3; \qquad (14)$$

- для внутреннего слоя

$$u^{(2)} = D_1 r + \frac{D_2}{r} - \frac{\mu_3 C_4^0}{2r\mu}(1 + 4\ln r),$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = D_1 - \frac{D_2}{r^2} + \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{2r^2\mu}(4\ln r - 3),\ \varepsilon_\theta^{(2)} = D_1 + \frac{D_2}{r^2} - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{2r^2\mu}(1 + 4\ln r),$$

$$\sigma_r^{(2)} = \lambda_2\varepsilon_0 + 2\mu\left(D_1 - \frac{D_2}{r^2}\right) - 2\mu_3 C_3^{(0)} + \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{r^2}(4\ln r - 1),$$

$$\sigma_\theta^n = \lambda_2\varepsilon_0 + 2\mu\left(D_1 + \frac{D_2}{r^2}\right) - 2\mu_3 C_3^{(0)} - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{r^2}(4\ln r - 1),$$

$$\sigma_z^{(2)} = \lambda_1\left(2D_1 - \frac{2\mu_3 C_4^{(0)}}{r^2\mu}\right), \qquad (15)$$

где константы $C_3^{(0)}$, $C_4^{(0)}$ определяются соотношениями (10), в которых среда рассмотрена на момент полного сжатия пор и имеют вид

$$C_3^{(0)} = -\frac{\varepsilon_0}{2},\ C_4^{(0)} = \frac{a^2(q_a - \varepsilon_0(\lambda_2 + \mu_2))}{2\mu_2}; \qquad (16)$$

константы интегрирования D_1, D_2, D_3, D_4 находятся из следующей системы граничных условий и условий совместности:

$$\begin{cases} \sigma_r^{(2)}\big|_{r=a} = -q_a, \\ \sigma_r^{(1)}\big|_{r=b} = -q_b, \\ \sigma_r^{(1)}\big|_{r=c} = \sigma_r^{(2)}\big|_{r=c}, \\ u^{(1)}\big|_{r=c} = u^{(2)}\big|_{r=c}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2\varepsilon_0 + 2\mu\left(D_1 - \dfrac{D_2}{a^2}\right) - 2\mu_3 C_3^{(0)} + \dfrac{\mu_3 C_4^{(0)}}{a^2}(4\ln a - 1) = -q_a, \\ 2D_3(\lambda_1 + \mu_1) - 2\mu_1\dfrac{D_4}{b^2} = -q_b, \\ \lambda_2\varepsilon_0 + 2\mu\left(D_1 - \dfrac{D_2}{c^2}\right) - 2\mu_3 C_3^{(0)} + \dfrac{\mu_3 C_4^{(0)}}{c^2}(4\ln c - 1) = \\ \qquad = 2D_3(\lambda_1 + \mu_1) - 2\mu_1\dfrac{D_4}{c^2}, \\ D_1 c + \dfrac{D_2}{c} - \dfrac{\mu_3 C_4^{(0)}}{2c\mu}(1 + 4\ln c) = D_3 c + \dfrac{D_4}{c}, \end{cases}$$

разрешив которую получим константы интегрирования:

$$D_4 = \frac{1}{M}\left(\frac{-q_b c}{2(\lambda_1 + \mu_1)} - Q - c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)TK\right),$$

$$D_2 = K\left(2\mu_1 D_4\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + T\right),$$

$$D_1 = \frac{1}{2(\mu_2 + \mu_3)}\left(-q_a - \frac{\mu_3 C_4}{a^2}(4\ln a - 1) + 2\mu_3 C_3 - \lambda_2\varepsilon_0\right) + \frac{D_2}{a^2}, \qquad (17)$$

$$D_3 = \frac{1}{2(\lambda_1 + \mu_1)}\left(-q_b + 2\mu_1\frac{D_4}{b^2}\right),$$

где $K = \dfrac{a^2c^2}{2\mu\left(c^2-a^2\right)}$, $T = q_a - q_b + \mu_3 C_4\left(\dfrac{1}{a^2}(4\ln a - 1) - \dfrac{1}{c^2}(4\ln c - 1)\right)$,

$$Q = \frac{c}{2\mu}\left(-q_a - \mu_3 C_4\left(\frac{1}{a^2}(4\ln a - 1) - \frac{1}{c^2}(1 + 4\ln c)\right) + 2\mu_3 C_3 - \lambda_2\varepsilon_0\right),$$

$$M = 2\mu_1 cK\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{\mu_1 c}{b^2\left(\lambda_1 + \mu_1\right)} - \frac{1}{c}.$$

Таким образом, НДС двухслойного цилиндрического тела на этапе упругого деформирования пористого материала внутреннего слоя, то есть при реализации условия (11), определяется соотношениями (7), (8), (10), а на этапе упругого деформирования сжатого скелета внутреннего слоя (при выполнении условия (12))– формулами (15) – (17).

Полученные в данной работе аналитические соотношения, описывающие НДС двухслойного цилиндрического тела при действии сжимающих нагрузок, могут быть использованы в качестве основного докритического состояния при решении задач устойчивости многослойных крепей цилиндрических шахтных стволов горных выработок, находящихся под действием всестороннего равномерного сжатия в случае упругой работы материалов.

При проведение численного эксперимента все соотношения приводились к безразмерному виду, при этом величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к величине μ_1, а имеющие размерность длины – к радиусу *b*.

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2 и 3.

На рис. 2 кривые *1* соответствуют $\mu_3 = 1.5$, кривые *2* – $\mu_3 = 2$, кривые *3* – $\mu_3 = 3$.

На рис. 3 кривые *1* соответствуют $\lambda_2 = 2$, кривые *2* – $\lambda_2 = 4$, кривые *3* – $\lambda_2 = 6$.

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими $q_a = 0.01$, $q_b = 0.02$, $a = 0.5$, $c = 0.6$, $b = 1$, $\varepsilon_0 = 0.02$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$.

Таким образом, в работе построена математическая модель для описания напряженно-деформированного состояния двухслойного цилиндрического тела с учетом пористой структуры внутреннего слоя при упругой работе материалов. В рамках предложенного подхода к деформированию пористых сред получены аналитические соотношения, описывающие НДС двухслойного цилиндрического тела, находящегося под действием всестороннего равномерного сжатия, на этапах упругого сжатия пор и упругого деформирования тела с полностью сжатой матрицей. При этом из анализа решений следует, что как при увеличении величины μ_3, характеризующего изменения модуля сдвига пористого слоя после полного схлопывания пор, так и с ростом λ_2 – параметра Ламе – характеризующего пористый слой на первом этапе деформирования, радиальные сжимающие напряжения увеличиваются.

Выведена зависимость между внешней и внутренней нагрузками, необходимыми для полного сжатия пор во всей области внутреннего слоя.

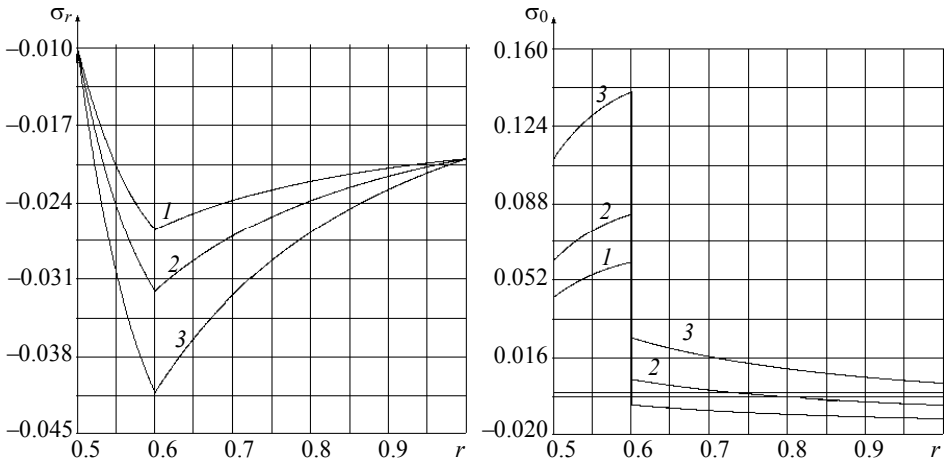


Рис. 2. Зависимость напряжений от координаты при деформировании сжатого скелета
Fig. 2. Addiction stresses from the coordinate during the deformation of the compressed skeleton

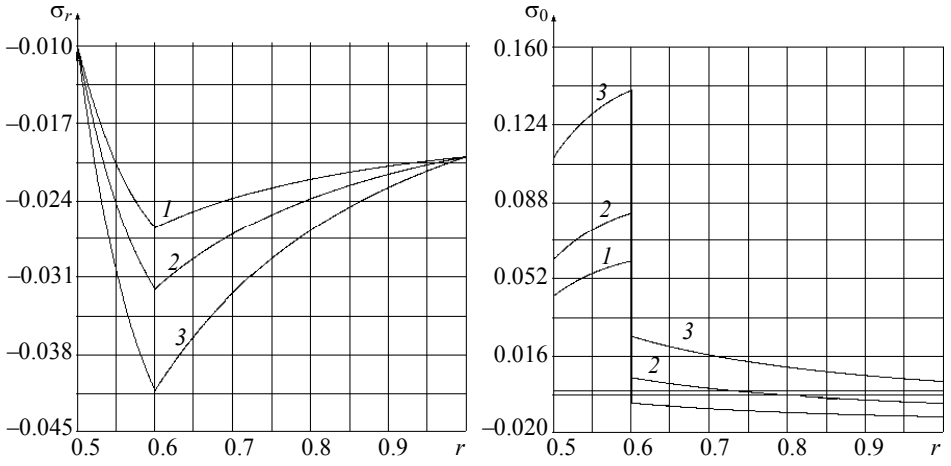


Рис. 3. Зависимость напряжений от координаты при деформировании сжатого скелета
Fig. 3. Addiction stresses from the coordinate during the deformation of the compressed skeleton

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садовская О.В., Садовский В.М.* Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
2. *Гоцев Д.В., Спорыхин А.Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. 299 с.
3. *Гоцев Д.В., Бунтов А.Е., Перунов Н.С.* Математическое моделирование напряженно-деформированных состояний пористых цилиндрических и сферических тел при сжатии с учетом неупругого поведения сжатого скелета // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы» / Чувашский гос. пед. ун-т, 2015. С. 91–99.

Статья поступила 04.11.2016 г.

Gotsev D.V., Perunov N.S.(2017) MATHEMATICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC CYLINDRICAL BODY WITH A POROUS FILLER. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 43–50

DOI 10.17223/19988621/47/5

The mathematical model of intense deformed state of two-layer cylindrical body under uniform compressive loads considering the porous structure of inner layer was defined. Building a mathematical model describing the stress field and displacement field for a cylindrical body was carried out considering a plane strain. Deformation of the porous environment caused by evenly distributed squeezing pressure is divided into two stages: deformation of the porous environment and deformation of the squeezed matrix.In the first stage the material model was assumed compressible elastic body model, the second – the model of elastic incompressible medium. As a full compression condition at a certain point of the medium at this point was assumed equality volumetric strain a given value – the initial pore size, characterizing the pore volume of the sample in the non-deformed state. Squeezing pressure, under which the initial porosity of material in the whole layer reaches zero value, is defined. At the first and second stage of the deformation process, the analytical expressions of fields of tension, strain and displacements in the inner and external layer are defined. As the compatibility conditions at the interface between layers selected terms the continuity of the radial component of the stress and displacements. Consider the nature of influence of the elastic constants of the material both internal and external layer on the distribution of the stress field.

Keywords: Keywords: porous materials, heterogeneous cylindrical body under compressive load, the intense deformed state.

GOTSEV Dmitry Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: rbgotsev@mail.ru

PERUNOV Nikolay Sergeyevich (Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: perunovnikolays@gmail.com

REFERENCES

1. Sadovskaya O.V. (2008) *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh mekhaniki sypuchikh sred* [Mathematical modeling in problems of mechanics of loose environments]. M.: FIZMATLIT.
2. Gotsev D.V. (2010) *Metod vozmucheniy v zadachah ustoichivosti podkreplennih gornih vira-batok* [Metod of indignations in problems of stability of the supported excavations]. Voronezh: Voronezh State University.
3. Gotsev D.V. (2015) Mathematicheskoe modelirovanie naprigenno-deformirovannih sostoiniy poristih chilindricheskix i sperichеskix tel pri sgatii s uchetom neuprugogo povedenia sgatogo skeletal [Mathematical modeling of stress-strain states porous cylindrical and spherical bodies in compression considering inelastic behavior of compressed skeleton]. *Proceedings of All-Russian Scientific School-Conference «Mechanics Limit State and Related Issues».* Chuvash State Pedagogical University. pp. 91–99.

УДК ???????
DOI 10.17223/19988621/47/6

А.И. Дульнев, Е.А. Неклюдова

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-РАСЧЕТНАЯ ОЦЕНКА ВЗРЫВОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ ОБРАЗЦОВ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НЕКОНТАКТНОМ ПОДВОДНОМ ВЗРЫВЕ

Рассматривается взрывосопротивляемость образцов из полимерного композиционного материала на основе стеклоткани. Приводятся результаты испытаний, характеризующие различную степень повреждения образцов при неконтактном подводном взрыве. Для более детального анализа напряженно-деформированного состояния образцов используется конечно-элементное моделирование условий испытаний.

Материалы в составе корпусных конструкции кораблей в ходе эксплуатации могут подвергаться различным видам нагрузок, одним из которых являются высокоинтенсивные динамические нагрузки, обусловленные взрывным воздействием. В последнее время для изготовления корпусных конструкций кораблей все большее применение находят полимерные композиционные материалы (ПКМ). Сопротивляемость этих материалов воздействию нагрузок в существенной мере зависит от применяемого армирующего материала и связующего, от способа армирования, технологии изготовления и др. Наиболее широко в настоящее время сопротивляемость ПКМ рассматривается применительно к условиям статического и квазистатического нагружения и в значительно меньшей степени – к условиям взрывного воздействия. Однако для выбора перспективных ПКМ для корпусных конструкций кораблей такие исследования представляют интерес.

В настоящей работе рассматривается сопротивляемость ПКМ при воздействии неконтактного подводного взрыва. Взрывосопротивляемость ПКМ исследовалась, в частности, в работах [1–6], при этом значительное внимание уделялось получению экспериментальных данных. В работе [1] испытания проводились в открытом водоеме, где образцы подвергались воздействию зарядов взрывчатого вещества (ВВ) различной массы. В [3, 5] для имитации подводного взрыва использовалась коническая ударная труба, в которой микрозарядом ВВ генерируется плоская подводная ударная волна. В [4, 6] для этой цели использовалась цилиндрическая труба, где ударная волна создается при помощи удара о воду тяжелого поршня. Наряду с проведением испытаний в [2–6] разрабатывались аналитические методы и компьютерные модели воздействия подводной ударной волны на ПКМ, что позволяло верифицировать результаты расчетов и получить дополнительную информацию о параметрах деформирования образцов.

Основными целями данной работы являлись:

– получение экспериментальных данных по взрывосопротивляемости образцов ПКМ из стеклопластика в условиях неконтактного подводного взрыва;

– применение методов компьютерного моделирования для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) образцов применительно к условиям испытаний.

Материал и образцы для испытаний

Испытывались образцы ПКМ на основе квадраксиальной стеклоткани 64009 (армирование 0°/+45°/90°/–45°), производитель фирма Ahlstrom (Финляндия) и винилэфирного связующего DION FR 9300, производитель фирма Reichhold (Швеция), изготовленные методом инфузии. Было изготовлено и испытано 4 группы образцов. В каждой группе образцы имели примерно одинаковые характеристики. Между группами они различались толщиной и соответственно поверхностной массой. Основные характеристики образцов представлены в табл. 1. Образцы представляли собой круглые пластины. Радиус пластин – 300–400 мм. Каждая пластина имела 18 отверстий для болтового закрепления. Радиус установки болтов – 250 мм.

Таблица 1

Основные характеристики образцов

№ группы образцов	Количество образцов	Толщина, δ, мм	Плотность, ρ, кг/м^3	Поверхностная масса, m, кг/м^2	Число слоев
1	6	7.91–8.75	1740–1860	14.71–15.23	10
2	5	7.36–7.40	1960–1990	14.49–14.69	10
3	5	5.18–5.20	1970–2000	10.20–10.40	7
4	5	3.66–3.75	1990	7.28–7.46	5

Постановка эксперимента

Испытания проводились во взрывной камере ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Схема взрывной камеры представлена на рис. 1, *а*.

Испытания образцов проводились по схеме «вода – воздух», т.е. с противоположной взрыву стороны располагалось пространство, заполненное воздухом. Во всех опытах заряд располагался напротив центра образца на фиксированном расстоянии (300 мм), варьировалась масса заряда Q (от 8 до 90 г). Использовался заряд ВВ цилиндрической формы, тротиловый эквивалент заряда по удельной энергии взрыва равнялся ~ 1. В соответствии с зависимостями [7] расчетные параметры ударной волны, действующей на образец в опытах, составляли: максимальное давление на фронте $p_m = 35–85$ МПа, постоянная экспоненциального затухания $\theta = (2.0–3.1)\cdot 10^{-2}$ мс.

Для проведения опыта собирался макет в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1, *б*. Образец фиксировался между матричным основанием (тюбингом) и прижимной металлической планкой. Диаметр рабочего поля образца, закрепленного на матричном основании, составлял 400 мм. Собранный макет подвешивался вертикально во взрывной камере, которая заполнялась водой так, чтобы кромка воды возвышалась над верхней кромкой макета не менее чем на 1.0 м.

В процессе испытаний производилась запись деформаций на тыльной (противоположной взрыву) поверхности образца и давления взрыва в свободной воде. Тензорезисторы для записи деформаций в радиальном и кольцевом направлении устанавливались в центре образца и в разных точках окружности $r = 125$ мм.

В результате испытаний для каждой группы образцов определялась масса заряда ВВ, соответствующая различному объему разрушений. Объем разрушений образцов оценивался по трем характерным признакам: 1 – разрушение связующего (визуально данный признак фиксировался как изменение цвета – побеление – участка образца в средней части после опыта); 2 – разрыв отдельных волокон; 3 – сквозное разрушение (образование пробоины).



Рис. 1. Взрывная камера и макет для испытаний в сборе: *а* – взрывная камера: *1* – макет для испытаний, *2* – заряд ВВ; *b* – схема макета для испытаний в сборе
Fig. 1. Explosion chamber and dummy assembly: (*a*) explosion chamber: *1*, dummy; *2*, explosive charge; (*b*) dummy assembly

В соответствии с указанными признаками устанавливались три уровня взрывосопротивляемости образцов. В качестве меры взрывного воздействия для обобщения результатов испытаний образцов с различной поверхностной массой использовалась величина $\beta = \frac{m_{\text{ВВ}}}{m}$ – относительная масса заряда ВВ, где $m_{\text{ВВ}}$ – масса заряда ВВ на единицу рабочей площади образца, кг/м^2; m – поверхностная масса образца, кг/м^2. Таким образом, относительная масса заряда, при которой реализуется начало того или иного типа разрушений, является показателем удельной взрывосопротивляемости образцов.

Результаты испытаний

На рис. 2 приведены фотографии, демонстрирующие характерные признаки разрушения образцов, а в табл. 2 – полученные на основе анализа экспериментальных данных величины β для различных уровней взрывосопротивляемости образцов.

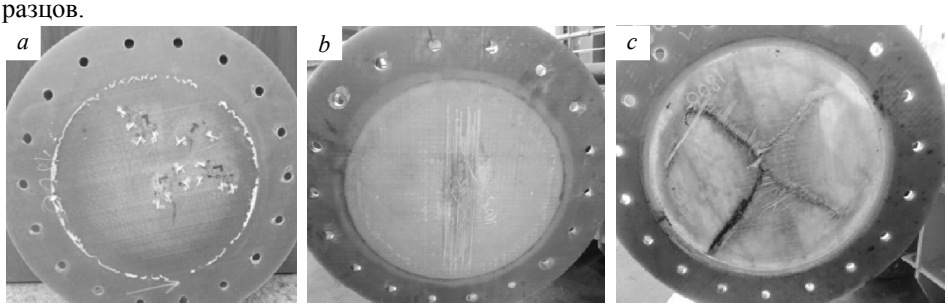


Рис. 2. Характерные виды разрушения образцов: *a* – разрушение связующего, вид на тыльную поверхность (Q = 8 г, β = 0.44 %, δ = 7.32 мм, m = 14.49 кг/м^2); *b* – разрыв волокон трех слоев с тыльной стороны (Q = 70 г, β = 3.83 %, δ = 7.40 мм, m = 14.50 кг/м^2); *c* – пробоина, вид на лицевую поверхность (Q = 55 г, β = 4.20 %, δ = 5.20 мм, m = 10.40 кг/м^2)
Fig. 2. Typical damage patterns of the samples: (*a*) binder failure at Q = 8 g, β = 0.44 %, δ = 7.32 mm, m = 14.49 kg/m^2 (a rear side view); (*b*) disruption of the fibers of three layers at Q = 70 g, β = 3.83 %, δ = 7.40 mm, m = 14.50 kg/m^2 (a rear side view); (*c*) shot hole at Q = 55 g, δ = 4.20 %, δ = 5.20 mm, m = 10.40 kg/m^2 (a front side view)

Таблица 2

Взрывосопротивляемость испытанных групп образцов

№ группы образцов	Поверхностная масса, кг/м^2	Относительная масса заряда β для различных уровней взрывосопротивляемости, %		
		β_1	β_2	β_3
1	14.71–15.23	≈0.52	≈3.13	≈4.38
2	14.49–14.69	≤0.44	≈3.27	>3.83
3	10.20–10.40	≤0.62	≈3.50	≈3.85
4	7.28–7.46	≤0.87	≈3.77	–

По мере увеличения мощности взрывного воздействия (массы заряда ВВ) сначала происходит разрушение связующего в центре и в районе опоры образца, которое постепенно распространяется на все рабочее поле. Затем формируется разрыв отдельных волокон в средней части, начиная с тыльного слоя образца. Разрывы волокон на данном этапе носят, как правило, хаотический характер. Заключительным этапом разрушения является образование пробоины в виде двух пересекающихся магистральных трещин-разрывов, направленных под углом примерно ± 45° к основе армирующего материала. Удельная взрывосопротивляемость образцов всех групп, характеризующая образование пробоины, примерно одинаковая; различие составляет менее 15 %, что практически находится в рамках погрешности результатов испытаний. При этом можно отметить, что при уменьшении толщины взрывосопротивляемость по признаку разрыва волокон несколько увеличивается, что, по-видимому, обусловлено более низким уровнем изгибных деформаций. Энергоемкость образцов в значительной мере определяется процес-

сом разрушения связующего до начала разрыва волокон. Так, если в целом от начала разрушения до образования пробоины удельная взрывосопротивляемость образцов увеличивается более чем в 5 раз, то на этапе формирования пробоины от начала разрыва волокон это увеличение составляет только 10–40 %.

На рис. 3 представлены характерные результаты записей деформаций образцов разных групп при различном уровне воздействия β: 0.44 % ($Q = 8$ г, $\delta = 7.32$ мм); 1.04 % ($Q = 20$ г, $\delta = 8.75$ мм); 1.64 % ($Q = 15$ г, $\delta = 3.66$ мм); 3.27 % ($Q = 60$ г, $\delta = 7.36$ мм). Для каждого опыта на рисунке приведено показания 2–3 тензометров, расположенных в разных точках по окружности $r = 125$ мм. В связи с результатами измерений деформаций можно отметить следующее. Время переходного процесса деформирования образцов составляет 2–4 мс. При увеличении частоты (толщины образцов) и уровня воздействия время переходного процесса уменьшается.

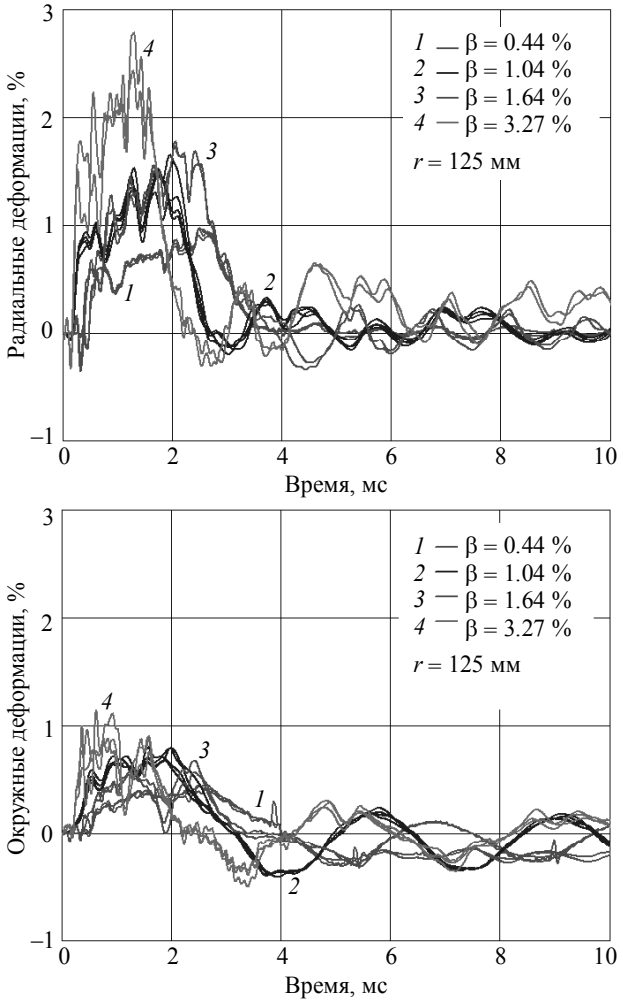


Рис. 3. Зависимости величины деформаций от времени для различного уровня взрывного воздействия β
Fig. 3. Strain as a function of time at various explosion load levels β

Последнее связано с увеличением влияния цепных радиальных деформаций. Максимальная величина радиальных деформаций в точках измерения примерно в 2–2.5 раза больше величины окружных деформаций. При взрывном воздействии, соответствующем началу разрыва волокон ($\beta = 3.27$ %), максимальная величина радиальных деформаций достигает 2.8 %. При этом в центре образца, где реализуются наибольшие деформации, эта величина еще больше и превосходит предельное относительное удлинение рассматриваемого материала, которое составляет 2.6–2.8 %.

На рис. 4 представлены типичные примеры записи давления во взрывной камере при испытаниях. Анализ записей давления показал отсутствие влияния волн, отраженных от стенок камеры, на параметры динамического нагружения образца.

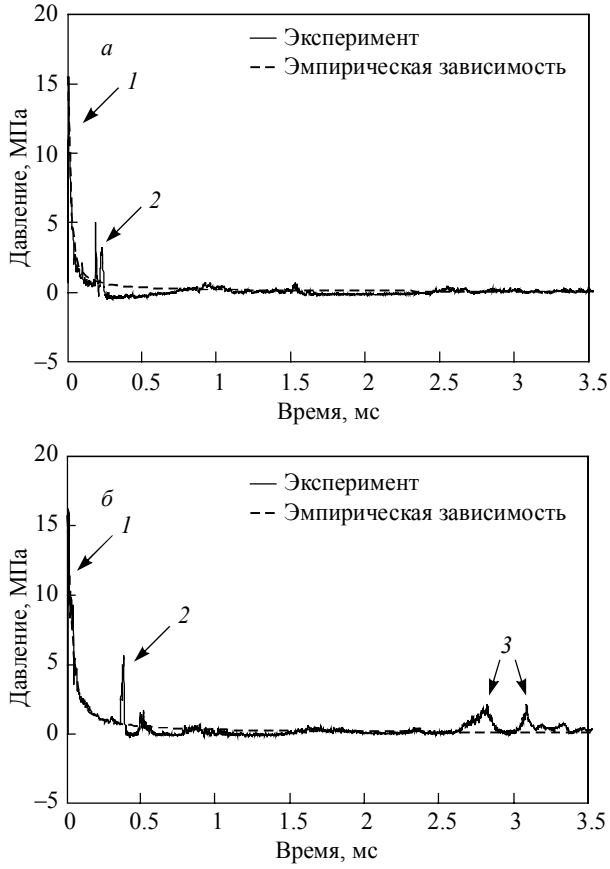


Рис. 4. Экспериментальное и расчетное давление взрыва: *a* – $Q = 8$ г, расстояние до датчика $r = 0.62$ м; *b* – $Q = 45$ г, расстояние до датчика $r = 1.04$ м (*1* – фронт ударной волны, *2* – отраженная от образца волна, *3* – отраженная от стенок камеры волна)

Fig. 4. Experimental and analytical pressure of explosion (r is the distance to the gauge): (*a*) $Q = 8$ g, $r = 0.62$ m; (*b*) $Q = 45$ g, $r = 1.04$ m (*1*, shockwave front; *2*, the wave reflected from the sample; *3*, the wave reflected from the chamber walls

Экспериментальная кривая давления сопоставлялась с расчетными параметрами взрыва в безграничной жидкости для заряда тротила. Расчет выполнялся в соответствии с эмпирическими зависимостями [7, 8]. Как видно из сопоставления экспериментальных и расчетных данных? в опытах имела место полная детонация заряда, а параметры взрыва хорошо соответствовали эмпирическим зависимостям для зарядов тротила. Последнее позволило далее при компьютерном моделировании условий испытаний принимать для используемых в опытах зарядов ВВ уравнение состояния продуктов взрыва в форме Джонса – Уилкинса – Ли (JWL) с эмпирическими параметрами для тротила [9].

Компьютерное моделирование испытаний

Целью компьютерного моделирования была разработка вычислительных конечно-элементных (КЭ) моделей для прогнозирования деформирования ПКМ при воздействии подводного взрыва, а также применение этих моделей для более детального анализа НДС образцов при испытаниях. Необходимость привлечения компьютерных моделей для анализа НДС обусловлена, в том числе, ограниченными возможностями получения экспериментальной информации о процессе деформирования образца при испытаниях. В частности, в условиях близкого взрыва практически отсутствует возможность регистрации деформаций на лицевой поверхности образца, а в центре образца – даже на тыльной поверхности.

Учитывая сложность процессов при близком неконтактном подводном взрыве, моделирование условий испытаний осуществлялось с применением двух программ КЭ моделирования: LS-DYNA и AUTODYN. В обоих случаях принималась трехмерная постановка задачи. В силу симметрии рассматривалась четверть расчетной области в виде сегмента жидкости (воды) радиусом 660–900 мм и высотой 810–1050 мм с вырезом в верхней части по контуру, размеры которого равнялись габаритным размерам тюбинга (рис. 5). Внутри выреза располагался образец, над которым формировалась область воздуха, соответствующая свободному объему в тюбинге за образцом. Расчетный диаметр образца принимался равным диаметру установки болтового крепления 500 мм.

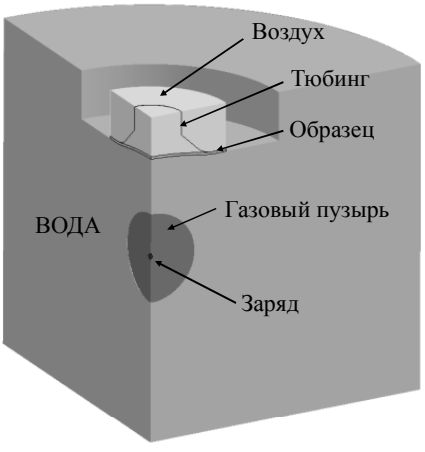


Рис. 5. Расчетная область при моделировании испытаний
Fig. 5. Computational domain in the test simulation

При моделировании в LS-DYNA и AUTODYN использовались одинаковые граничные условия и одинаковые типы КЭ. По границе области воздуха задавалось условие непротекания, по контуру, имитирующему тюбинг – абсолютно жесткая граница и условие непротекания, по внешней границе области воды – условие свободного протекания жидкости.

В качестве граничного условия для образца принималось отсутствие перемещений в направлении, перпендикулярном его плоскости, по кольцу шириной 50 мм, что обеспечивало при расчетах такое же рабочее поле образца, как и при испытаниях. Для моделирования всех объектов – образец, вода, воздух, ВВ использовались КЭ типа SOLID, при этом для воды, воздуха и ВВ использовалась эйлерова сетка, а для образца – лагранжева. Параметры сеток (размеры, соотношение сторон, сгущение) выбирались таким образом, чтобы они мало влияли на результаты расчета. В частности, характерный размер эйлеровой сетки для воды и воздуха в районе образца составлял примерно 4–5 мм, размер лагранжевой сетки в плоскости образца – 3.4 мм, количество элементов по толщине образца – 6.

Для воды использовалось уравнение состояние полиномиального вида. Полагалось, что давление в жидкости не может принимать отрицательных значений. Такое предположение является наиболее простым способом учета кавитационных явлений в жидкости при взрывных процессах. Воздух моделировался уравнением состояния идеального газа. Для моделирования продуктов взрыва использовалось уравнение состояния в форме JWL. Значения коэффициентов и параметры Чепмена – Жуге принимались как для тротила [9].

Стеклопластик моделировался в виде линейного изотропного материала. Для корректного сопоставления с результатами испытаний характеристики стеклопластика (E, ρ, δ) при расчетах принимались такими же, как у образца в том или ином рассматриваемом опыте. Верификация компьютерных моделей производилась по экспериментальным записям деформаций в 9 опытах. Масса заряда в опытах составляла $Q = 8$, 10, 15, 45 и 60 г. На рис. 6 в качестве примера приведено сопоставление расчетных зависимостей радиальных и окружных деформаций от времени с аналогичными зависимостями, полученными экспериментально, для образца из группы 1 ($\delta = 8.75$ мм) при взрыве заряда $Q = 10$ г.

В целом получено хорошее соответствие между результатами расчетов и экспериментальными данными. Некоторое различие между ними, а также в сходимости решений с использованием LS-DYNA и AUTODYN, может быть связано со следующими обстоятельствами: разная точность расчета параметров взрыва при использовании LS-DYNA и AUTODYN, погрешность в моделировании граничных условий для образца, погрешность определения фактической толщины образца, неполное соответствие координат точки расчета деформаций и месторасположения тензометров.

Разработанные компьютерные модели использовались для более детального анализа НДС образцов при испытаниях. В частности, оценивались цепные и изгибные деформации (рис. 7) в центре и на опоре образца при воздействии зарядов различной массы.

Анализ результатов расчета показал, что даже для образцов, имеющих относительно большую толщину (группа 1, $\delta = 7.91$–8.75 мм), в центре реализуется высокий уровень цепных деформаций. Так, при взрыве заряда массой 60 г (примерно соответствует началу разрыва отдельных волокон) их уровень составляет около 2 %. На опоре же преобладают изгибные деформации, уровень которых значительно, в 5–7 раз, превосходит уровень цепных деформаций в этом районе.

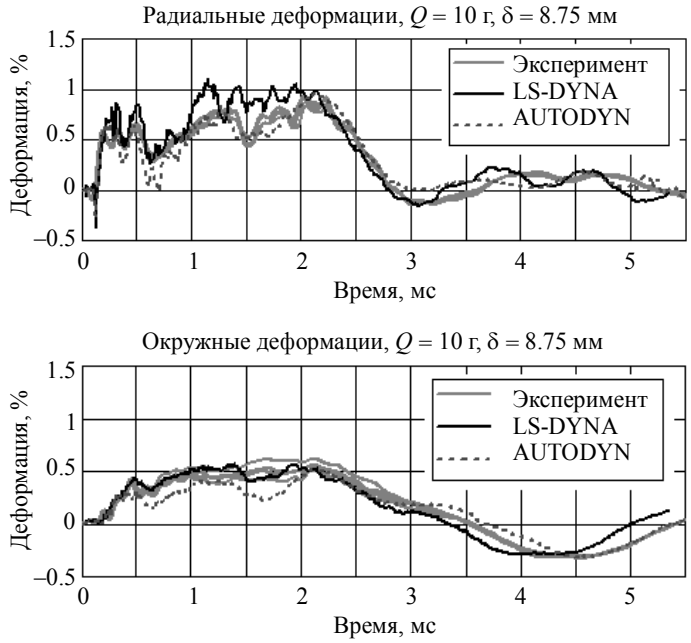


Рис. 6. Сопоставление результатов расчета деформаций с экспериментом
Fig. 6. Comparison of the calculated strain with experimental results

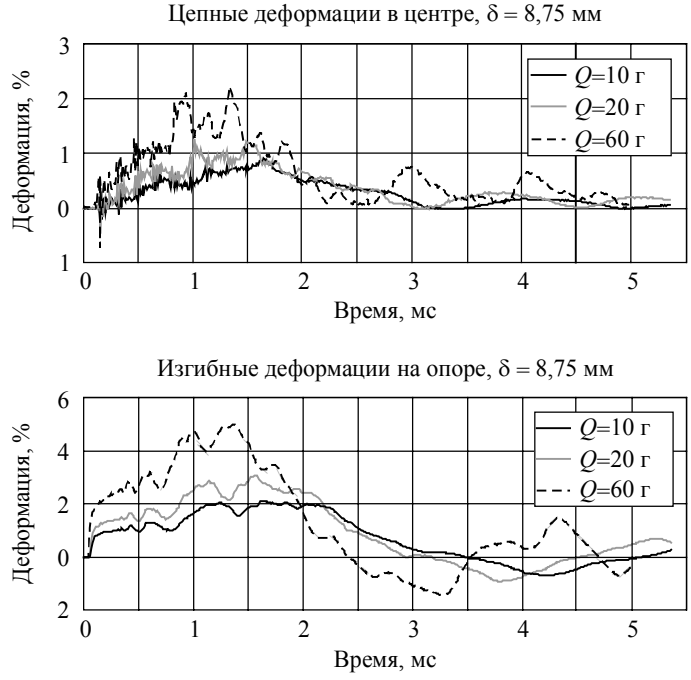


Рис. 7. Расчетные зависимости цепных и изгибных деформаций
Fig. 7. Analytical dependences of both chain and bending strains

В соответствие с результатами испытаний разрушение образца (разрыв волокон) начинается из центра, несмотря на то, что на опоре реализуется более высокий уровень радиальных (изгибных+цепных) деформаций. С другой стороны, если сравнивать уровень интенсивности деформаций (деформации по Мизесу), то в центре образца интенсивность деформаций примерно в 1.5–2 раза больше, чем на опоре (рис. 8). К началу разрыва волокон интенсивность деформаций в центре достигает 5 %. В связи с этим можно предполагать, что для ПКМ из стеклопластика, изготовленных методом инфузии, структура армирования которых обеспечивает квазиизотропность материала в плоскости армирования, в качестве оценки их взрывосопротивляемости (по критерию начала разрыва волокон) может быть использована величина интенсивности деформаций.



Рис. 8. Расчетные зависимости интенсивности деформаций
Fig. 8. Analytical dependences of strain intensity

Заключение

Представлены результаты экспериментальных и расчетных исследований взрывосопротивляемости образцов ПКМ из стеклопластика, изготовленных из квадраксиальной стеклоткани и винилэфирного связующего методом инфузии, при воздействии подводного взрыва. Испытания образцов проводились во взрывной камере ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Степень разрушения материала образцов оценивалась по трем характерным признакам: разрушение связующего, разрыв отдельных волокон, образование сквозного разрушения (пробоины). В качестве меры взрывного воздействия, соответствующего той или иной степени разрушения, принята относительная масса заряда ВВ (масса заряда на единицу рабочей площади образца, отнесенная к поверхностной массе образца). Экспериментально показано, что для рассмотренных образцов наиболее энергоемким процессом является разрушение связующего до начала разрыва во-

локон. Разработаны и верифицированы, применительно к условиям испытаний, компьютерные модели, которые позволили более детально проанализировать НДС образцов при испытаниях. На основе компьютерного моделирования, в частности, показано, что в качестве оценки взрывосопротивляемости рассмотренных образцов по критерию начала разрыва волокон может быть использована величина интенсивности деформаций. Представленный опыт моделирования воздействия подводного взрыва может быть использован для анализа НДС и процесса разрушения образцов и конструкций, изготовленных из различных ПКМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mouritz A.P.* The effect of underwater explosion shock loading on the fatigue behaviour of GRP laminates // Composites. 1995. V. 26 (1). P. 3–9.
2. *Batra R.C., Hassan N.M.* Response of fiber reinforced composites to underwater explosive loads // Composites: Part B. 2007. V. 38. P. 448–468.
3. *LeBlanc J., Shukla A.* Dynamic response and damage evolution in composite materials subjected to underwater explosive loading: An experimental and computational study // Composite Structures. 2010. V. 92(10). P. 2421–2430.
4. *Avachat S., Zhou M.* Effect of facesheet thickness on dynamic response of composite sandwich plates to underwater impulsive loading // 18th International Conference on Composite Materials (ICCM18). 2011
5. *LeBlanc J., Shukla A.* Dynamic response of curved composite panels to underwater explosive loading: experimental and computational comparisons // Composite Structures. 2011. V. 93. P. 3072–3081.
6. *Schiffer A., Tagarielli V.L.* The dynamic response of composite plates to underwater blast: theoretical and numerical modelling // Int. J. Impact Eng. 2014. V. 70. P. 1–13.
7. *Коул Р.* Подводные взрывы. М.: ИЛ, 1950.
8. *Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С.* Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967.
9. *Физика* взрыва / под ред. Л.П. Орленко. 3-е изд., перераб.: в 2 т. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Статья поступила 28.02.2017 г.

Dul'nev A.I., Neklyudova E.A. (2017) EXPERIMENTAL AND COMPUTATIONAL ASSESSMENT OF AN EXPLOSION RESISTANCE OF THE POLYMERIC COMPOSITE SAMPLES AT A CONTACTLESS UNDERWATER EXPLOSION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 51–62

DOI 10.17223/19988621/47/6

This paper provides the underwater explosion test results for the glass-reinforced plastic (GRP) samples implemented in an explosion chamber of Krylov Science Research Centre. The test data allowed investigating the characteristics of both damage accumulation and failure of the materials considered. The extent of the damage inflicted on the material of the samples has been assessed on three parameters: binder failure, disruption of the fibers, and a shot hole formation. Experiments proved that for the samples manufactured by the infusion method, the most energy-consuming process was the failure of the binder prior to the disruption of the fibers. The computer models have been developed using two FEM-based programs (LS-DYNA and AUTODYN) followed by verification. These models allowed making a detailed assessment of the stress-strain state of the samples in the tests. It has been shown that explosion resistance of the GRP samples according to initiation of the fiber disruption can be assessed by the value of a strain intensity of the sample. The simulation results of underwater explosion effects can be used for analysis of both the stress-strain state and the failure of the constructions made of polymeric composites.

Keywords: polymeric composite, explosion resistance, underwater explosion.

NEKLYUDOVA Ekaterina Alekseevna (Engineer, Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russian Federation)
E-mail: nekludik@mail.ru

DUL'NEV Andrey Ivanovich (Doctor of Technical Science, head of laboratory in Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russian Federation)

REFERENCES

1. Mouritz A.P. (1995) The effect of underwater explosion shock loading on the fatigue behaviour of GRP laminates. *Composites*. 26 1). pp. 3–9.
2. Batra R.C., Hassan N.M. (2007) Response of fiber reinforced composites to underwater explosive loads. *Composites: Part B*. 38. pp. 448–468.
3. LeBlanc J., Shukla A. (2010) Dynamic response and damage evolution in composite materials subjected to underwater explosive loading: An experimental and computational study. *Composite Structures*. 92(10). pp. 2421–2430.
4. Avachat S., Zhou M. (2011) Effect of facesheet thickness on dynamic response of composite sandwich plates to underwater impulsive loading. *18th International Conference on Composite Materials (ICCM18)*.
5. LeBlanc J., Shukla A. (2011) Dynamic response of curved composite panels to underwater explosive loading: experimental and computational comparisons. *Composite Structures*. 93. pp. 3072–3081.
6. Schiffer A., Tagarielli V.L. (2014) The dynamic response of composite plates to underwater blast: theoretical and numerical modelling. Int. *J. Impact Eng*. 70. pp. 1–13.
7. Cole R. (1950) *Podvodnye vzryvy* [Underwater explosions]. Moscow: Inostrannaya Literatura.
8. Zamyshlyaev B., Yakovlev Yu. (1967) *Dinamicheskie nagruzki pri podvodnom vzryve* [Dynamic loads during the underwater explosion]. Leningrad: Sudostroenie.
9. *Fizika vzryva* [Explosion physics] (2002). Edited by L. Orlenko. Vol. 1. Moscow: Fizmatlit.

УДК 531.554
DOI 10.17223/19988621/47/7

С.А. Королев, А.М. Липанов, И.Г. Русяк

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

Статья посвящена исследованию возможности повышения точности решения прямой задачи внешней баллистики за счет решения более полной системы уравнений движения метаемого тела (снаряда) и расчета аэродинамических коэффициентов сил и моментов на основе моделирования гидродинамики его обтекания.

Ключевые слова: *внешняя баллистика, траектория, аэродинамические коэффициенты, уравнения Навье – Стокса, модель турбулентности, численный метод, точность решения задачи.*

Точность решения прямой задачи внешней баллистики зависит от полноты факторов, учитываемых при моделировании [1–3]. В частности, от учета вращения и колебаний относительно центра масс, точности определения аэродинамических коэффициентов метаемых тел, точности задания метеоусловий, точности используемых численных методов и др. В статье представлена математическая модель внешней баллистики снаряда и методика расчета траектории на основе решения более полной системы уравнений движения, учитывающей вращение и колебания относительно центра масс и использующей аэродинамические коэффициенты сил и моментов, рассчитанные на основе моделирования гидродинамики обтекания снаряда.

Методика решения траекторной задачи

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат $Ox_cy_cz_c$, связанной с точкой расположения орудия и ориентированной по направлению стрельбы (рис. 1).

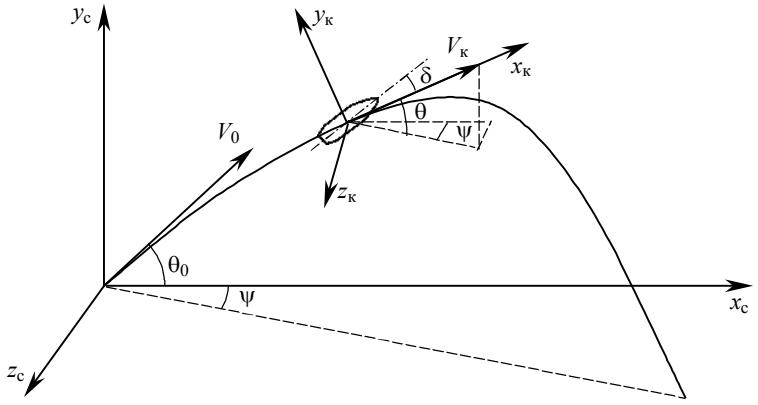


Рис. 1. Ориентация стартовой ($Ox_cy_cz_c$) и траекторной ($Ox_кy_кz_к$) систем координат
Fig. 1. Orientation of the launch ($Ox_cy_cz_c$) and flight path ($Ox_кy_кz_к$) coordinate systems

Координаты центра масс снаряда определяются уравнениями [1]:

$$\frac{dx_{\text{с}}}{dt} = V_{\text{к}} \cos\theta \cos\psi ,$$

$$\frac{dy_{\text{с}}}{dt} = V_{\text{к}} \sin\theta , \qquad (1)$$

$$\frac{dz_{\text{с}}}{dt} = -V_{\text{к}} \cos\theta \sin\psi ,$$

где $x_{\text{с}}$ – дальность; $y_{\text{с}}$ – высота полета; $z_{\text{с}}$ – боковое отклонение; θ – угол наклона траектории; ψ – угол направления; $V_{\text{к}}$ – скорость центра масс снаряда.

Параметры движения снаряда определяются в траекторной системе координат $Ox_{\text{к}}y_{\text{к}}z_{\text{к}}$, связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости (рис. 1):

$$\frac{dV_{\text{к}}}{dt} = -g\sin\theta - \frac{C_{x_{\text{к}}} q S_M}{m} ; \qquad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{V_{\text{к}}} - \frac{C_{y_{\text{к}}} q S_M}{m V_{\text{к}}} + \frac{d\theta_g}{dt} ; \qquad (3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{C_{z_{\text{к}}} q S_M}{m V_{\text{к}} \cos\theta} + \frac{d\psi_g}{dt} . \qquad (4)$$

Здесь g – ускорение силы тяжести; $C_{x_{\text{к}}}, C_{y_{\text{к}}}, C_{z_{\text{к}}}$ – коэффициенты составляющих аэродинамической силы по осям траекторной системы координат; $q = \frac{\rho M^2 a^2}{2}$ – скоростной напор воздуха; M – число Маха; a – скорость звука в воздухе; $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь миделевого сечения снаряда; d – калибр снаряда; m – масса снаряда; θ_g, ψ_g – поправки, связанные с учетом геофизических параметров Земли [4].

Для вращающегося снаряда аксиальная скорость определяется из уравнения:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{m_x q S_M l}{I_x} , \qquad (5)$$

где m_x – коэффициент аэродинамического аксиального демпфирующего момента (момента трения); l – длина снаряда; I_x – аксиальный момент инерции снаряда.

В процессе движения по траектории под действием различных возмущающих факторов снаряд совершает колебания относительно центра масс. Положение оси симметрии снаряда относительно вектора скорости, определяется пространственным углом нутации δ. Горизонтальная δ_1 и вертикальная δ_2 составляющие угла нутации снаряда определяются из системы дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \frac{\omega_1 - \dot{\psi}\cos(\theta + \delta_2) - \dot{\theta}\delta_1\delta_2}{\cos\delta_2} ,$$

$$\frac{d\delta_2}{dt} = \omega_2 - \dot{\psi}\sin\theta\delta_1 - \dot{\theta}\cos\delta_1 , \qquad (6)$$

Для определения горизонтальной ω_1 и вертикальной ω_2 составляющих экваториальной угловой скорости снаряда решается система уравнений:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{m_1 q S_M l - I_x \omega_x \omega_2}{I_z},$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{m_2 q S_M l + I_x \omega_x \omega_1}{I_z}, \qquad (7)$$

где m_1, m_2 – коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющих аэродинамического момента; I_z – экваториальный центральный момент инерции снаряда.

Коэффициенты составляющих аэродинамической силы в уравнениях (2) – (4) определяются выражениями

$$C_{x_к} = C_x^a(M, \alpha),$$

$$C_{y_к} = -C_y^a(M, \alpha_2) + C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha_1), \qquad (8)$$

$$C_{z_к} = -C_y^a(M, \alpha_1) - C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha_2),$$

где $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ – пространственный угол атаки; α_1, α_2 – горизонтальная и вертикальная составляющие угла атаки; $\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{Ma}$ – безразмерная аксиальная угловая скорость; $C_x^a(M, \alpha)$, $C_y^a(M, \alpha)$, $C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha)$ – аппроксимационные зависимости коэффициентов силы сопротивления в системе координат, связанной с осью симметрии снаряда, где ось x направлена вдоль оси симметрии, ось y – лежит в плоскости сопротивления, образуемой осью симметрии и вектором скорости, при этом ось z образует правую тройку векторов.

Коэффициент аэродинамического аксиального демпфирующего момента в уравнении (5) и коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющих аэродинамического момента, используемые в системе уравнений (7), рассчитываются следующим образом:

$$m_x = m_x^a(M, \bar{\omega}_x),$$

$$m_1 = m_z^a(M, \alpha_1) + m_y^a(M, \alpha_2, \bar{\omega}_x), \qquad (9)$$

$$m_2 = m_z^a(M, \alpha_2) - m_y^a(M, \alpha_1, \bar{\omega}_x),$$

где $m_x^a(M, \bar{\omega}_x)$, $m_y^a(M, \alpha, \bar{\omega}_x)$, $m_z^a(M, \alpha)$ – аппроксимационные зависимости коэффициентов составляющих момента аэродинамической силы в системе координат, связанной с осью симметрии снаряда.

Составляющие пространственного угла атаки α_1, α_2 связаны с составляющими угла нутации δ_1, δ_2 соотношениями

$$\alpha_1 = \delta_1 - \varepsilon_{w_1},$$

$$\alpha_2 = \delta_2 - \varepsilon_{w_2},$$

где ε_{w_1}, ε_{w_2} – составляющие угла сноса ветром.

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) – (7) применяется метод Рунге – Кутты – Вернера 6-го порядка точности с контролем погрешности интегрирования [5].

Методика расчета аэродинамических коэффициентов метаемых тел

Для расчета аэродинамических сил и моментов, действующих на снаряд, применен подход, основанный на численном моделирования обтекания снаряда потоком воздуха. При этом решались уравнения Навье – Стокса, осредненных по Фавру (FANS), с использованием полуэмпирической модели турбулентности [6]. Такой подход не требует значительных вычислительных ресурсов, что позволяет рассчитать аэродинамические характеристики обтекания исследуемых тел в широком диапазоне параметров.

Система уравнений Навье – Стокса нестационарного вязкого теплопроводного течения, осредненных по Фавру, имеет вид [7]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{f}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} e = -\nabla p \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{q},$$

где ρ – плотность газа; $\boldsymbol{v}$ – вектор скорости; t – время; p – давление; $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений; $\boldsymbol{f}$ – вектор внешних сил, например силы тяжести; $e = \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho}$ – полная энергия; γ – показатель адиабаты; $\boldsymbol{q}$ – вектор теплового потока.

Рассматривается идеальный газ, для которого справедливо уравнение состояния Менделеева – Клапейрона:

$$p = \rho R T,$$

где R – удельная газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Для турбулентного течения сжимаемого газа компоненты тензора вязких напряжений находятся с помощью выражения

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij},$$

где $\mu = \mu_m + \mu_t$ – эффективная вязкость, определяемая как сумма молекулярной и турбулентной составляющих; u_i – компоненты вектора скорости по координатным направлениям x_i, осредненные по Фавру; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases}$ – единичный тензор.

В качестве модели турбулентности выбрана ($k - \varepsilon$)-модель, которая с учетом слагаемых, связанных с влиянием эффекта сжимаемости, имеет вид [8]

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu_m + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \mu_t S^2 - Y_M - \rho \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_j \varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\mu_m+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}\mu_t S^2-C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}, \qquad (11)$$

где, согласно [9], примем $C_\mu = 0.09$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_{2\varepsilon} = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

Источниковый член в уравнениях (11), учитывающий сжимаемость, определяется по модели Саркара [10]:

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2,$$

где $M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}}$ – турбулентное число Маха; $a = \sqrt{\gamma RT}$ – скорость звука.

Выше через S^2 обозначена сумма

$$S^2 = 2s_{11}^2 + 2s_{22}^2 + 2s_{33}^2 + (s_{12}+s_{21})^2 + (s_{13}+s_{31})^2 + (s_{23}+s_{32})^2,$$

где $s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ – компоненты тензора скоростей деформации.

Для определения турбулентной составляющей динамической вязкости используется выражение

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Описанный выше подход решения задачи обтекания снаряда реализован с помощью модуля расчета динамики жидкостей и газов Fluent программного пакета ANSYS 15.0.

Исследование аэродинамических характеристик снарядов проводилось в следующем диапазоне изменения параметров: числа Маха $M = 0.5$–5.0; углы атаки $\alpha = 0$–$20°$; скорости вращения снаряда $\omega_x = 500$–2000 рад/с. По результатам численного эксперимента для исследуемого метаемого тела с помощью метода наименьших квадратов строились аппроксимационные зависимости для коэффициентов аэродинамической силы и моментов, используемые в выражениях (8), (9).

Аппроксимационные зависимости для коэффициентов аэродинамической силы, с учетом анализа значимости коэффициентов уравнений регрессии имеют вид [3]

$$C_x^{\text{a}}(M,\alpha) = a_{x0} + a_{x1}M + a_{x2}M^2 + a_{x3}M^3 + a_{x4}\alpha^2,$$

$$C_y^{\text{a}}(M,\alpha) = a_{y0} + a_{y1}\alpha + a_{y2}\alpha^3 + a_{y3}M\alpha + a_{y4}M^2\alpha, \qquad (12)$$

$$C_z^{\text{a}}(\bar{\omega}_x,\alpha) = a_{z0} + a_{z1}\alpha + a_{z2}\alpha^2 + a_{z3}\bar{\omega}_x\alpha + a_{z4}\bar{\omega}_x\alpha^2.$$

Соответствующие аппроксимационные зависимости для коэффициентов момента записываются как

$$m_x^{\text{a}}(M,\bar{\omega}_x) = \left(b_{x0} + b_{x1}M + b_{x2}M^2\right)\bar{\omega}_x,$$

$$m_y^{\text{a}}(M,\alpha,\bar{\omega}_x) = \left(b_{y0} + b_{y1}M + b_{y2}M^2\right)\left(\alpha + b_{y3}\alpha^2\right)\bar{\omega}_x, \qquad (13)$$

$$m_z^{\text{a}}(M,\alpha) = \left(b_{z0} + b_{z1}M + b_{z2}M^2\right)\alpha.$$

Здесь a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}, b_{xi}, b_{yi}, b_{zi} – коэффициенты уравнений регрессии. Погрешность аппроксимации расчетных данных не превышает 1 %.

Исследование точности решения траекторной задачи

В методике, описанной в [4], используются законы сопротивления воздуха 1943 и 1958 гг., полученные на основе обработки экспериментальных данных для эталонных форм снарядов. Закон сопротивления воздуха 1943 г. справедлив для снарядов, стабилизируемых вращением, а закон сопротивления 1958 г. – для оперенных снарядов. При этом решается система уравнений движения центра масс снаряда. Боковое отклонение в результате действия гироскопических и аэродинамических сил для снаряда задается эмпирической деривационной функцией.

Исследование влияния учитываемых факторов на решение траекторной задачи рассматривалось для трех типов снарядов: осколочно-фугасный вращающийся снаряд калибра 152 мм ($i_{x43} = 1.0$) (ОФ 152 мм); осколочно-фугасный оперенный снаряд калибра 125 мм ($i_{x58} = 1.0$) (ОФ 125 мм); бронебойно-подкалиберный оперенный снаряд калибра 125 мм ($i_{x58} = 1.7$) (БП 125 мм), где i_{x43} , i_{x58} – эмпирические коэффициенты формы, используемые для корректировки законов сопротивления воздуха 1943 г. и 1958 г. соответственно, применительно к данному типу снаряда.

На рис. 2 представлены зависимости коэффициента лобового сопротивления C_x от числа Маха для рассматриваемых снарядов, а также зависимости, построенные по законам сопротивления 1943 г. и 1958 г. Как видно из рис. 2, *а*, расчетная зависимость для осколочно-фугасного снаряда калибра 152 мм качественно согласуется с законом сопротивления 1943 г., при этом в рабочем диапазоне на участке $0.5 < M < 3.0$ отличие достигает 12–15 %, но для сверхзвукового участка $M > 3.0$ наблюдается существенное отличие данных зависимостей. Для оперенных снарядов калибра 125 мм (см. рис. 2, *б, в*) наблюдается качественное и количественное соответствие расчетных кривых коэффициента C_x с законом сопротивления 1958 г. При этом в рабочем диапазоне для осколочно-фугасного снаряда $0.5 < M < 3.0$ расхождение кривых составляет 5–10 %, в рабочем диапазоне для бронебойно-подкалиберного снаряда $3.0 < M < 5.0$ расхождение кривых 7–10 %.

При расчете траектории движения снарядов рассматривались следующие подходы к решению задачи. В первом случае решалась система уравнений движения центра масс снаряда с использованием лобового аэродинамического сопротивления по законам 1943 г. или 1958 г. и деривационной функции для расчета бокового отклонения в случае вращающегося снаряда. Во втором случае решалась полная система уравнений движения снаряда с учетом колебаний относительно центра масс, при этом использовались зависимости для полного набора аэродинамических коэффициентов (12) – (13), полученные на основе моделирования обтекания снаряда.

Для осколочно-фугасного снаряда калибра 152 мм проводились траекторные расчеты для диапазона начальных скоростей $V_0 = 680$–945 м/с и углов стрельбы $\theta_0 = 5$–$52°$. Результаты расчета параметров траектории (X – дальность, Z – боковое отклонение) с использованием различных подходов к решению задачи представлены в табл. 1.

На рис. 3 представлены результаты расчета траекторий снаряда ОФ 152 мм для угла стрельбы $\theta_0 = 25°$ и начальных скоростей $V_0 = 680$ и 945 м/с.

Анализ полученных результатов показывает, что для скорости $V_0 = 680$ м/с отклонение по дальности достигает 800 м, а для $V_0 = 945$ м/с максимальное отклонение составляет лишь 250 м. Этот результат объясняется более полной компенсацией отклонений за счет пересечения зависимостей для коэффициента C_x

(см. рис. 2, *a*) при больших числах Маха. Расчеты показывают, что колебания рассматриваемого снаряда, вызванные начальными возмущениями, затухают. Учет колебаний снаряда относительно центра масс позволяет уточнить результаты расчета. Так, при начальном возмущении $\delta = 0.5°$, влияние колебаний снаряда составляет 70–100 м. Отличие бокового отклонения, рассчитанного с помощью рассматриваемых подходов к решению задачи, в зависимости от параметров выстрела, может составляет 200 – 250 м (см. табл. 1).

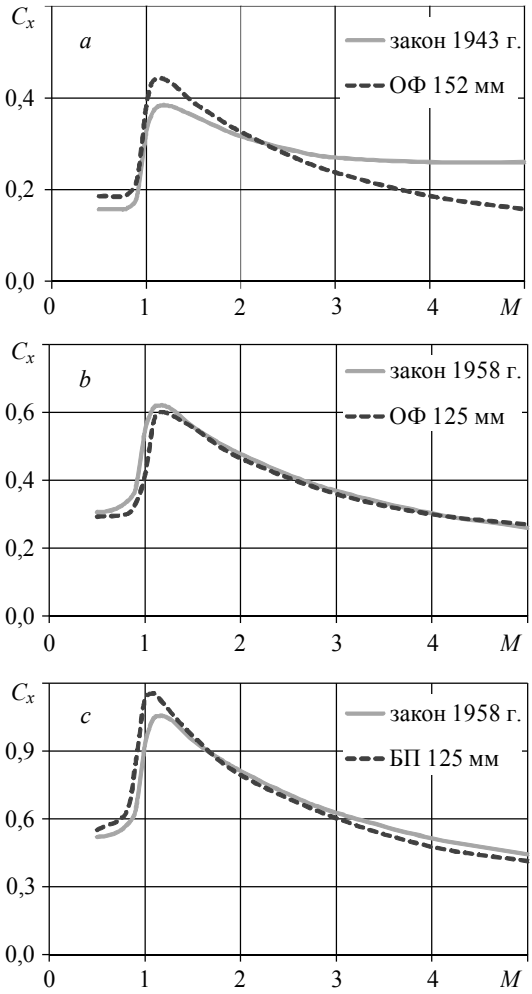


Рис. 2. Зависимости коэффициента лобового сопротивления C_x от числа Маха: *a* – для осколочно-фугасного вращающегося снаряда ($i_{x43} = 1.0$); *b* – для осколочно-фугасного оперенного снаряда ($i_{x58} = 1.0$); *c* – для бронебойно-подкалиберного снаряда ($i_{x58} = 1.7$)

Fig. 2. Drag coefficient C_x as a function of the Mach number: in the case of (*a*) high explosive rotating projectile ($i_{x43} = 1.0$), (*b*) high explosive feathered projectile ($i_{x58} = 1.0$), and (*c*) armor-piercing subcaliber projectile ($i_{x58} = 1.7$)

Таблица 1

Результаты расчета параметров траектории снаряда ОФ 152 мм

Начальные условия	θ_0, град	5	25	52
	V_0, м/с	680–945		
Уравнения движения центра масс снаряда. Закон сопротивления 1943 г.	X, м	5860–9575	14895–21330	17720–26265
	Z, м	17.2–35.5	247–435	849–1426
Полная система уравнений движения. Расчетная модель сопротивления	X, м	5795–9720	14375–21200	16925–26010
	Z, м	18.7–45.5	208–417	598–1219

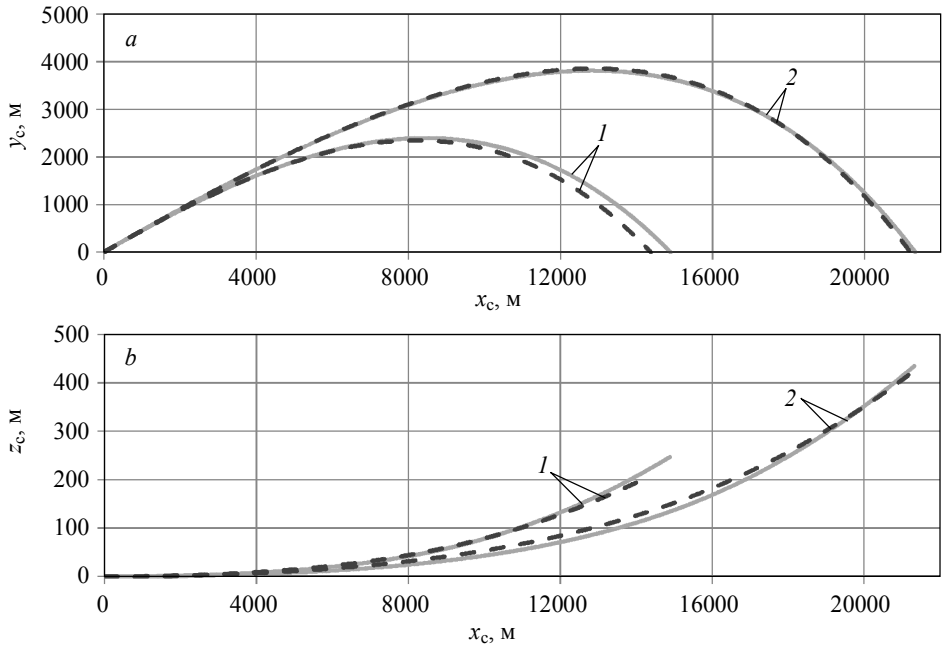


Рис. 3. Проекции траекторий снаряда ОФ 152 мм на плоскости Ox_cy_c (*a*) и Ox_cz_c (*b*): *1* – начальная скорость $V_0 = 680$ м/с; *2* – начальная скорость $V_0 = 945$ м/с; сплошная линия – закон сопротивления 1943 года; штриховая – расчетная модель сопротивления

Fig. 3. Projections of the projectile OF 152 mm trajectory on the plane Ox_cy_c (*a*) and Ox_cz_c (*b*): *1*, initial velocity $V_0 = 680$ m/s; *2*, initial velocity $V_0 = 945$ m/s; solid line indicates resistance law of 1943; dashed line, computational resistance model

Для осколочно-фугасного оперенного снаряда калибра 125 мм проводились траекторные расчеты для диапазона начальных скоростей $V_0 = 600$–870 м/с и углов стрельбы $\theta_0 = 5$–$25°$. Результаты расчета параметров траектории с использованием различных подходов к решению задачи представлены в табл. 2.

На рис. 4 представлены результаты расчета траектории снаряда ОФ 125 мм для угла стрельбы $\theta_0 = 15°$ и начальных скоростей $V_0 = 600$ и 870 м/с.

В данном случае различие результатов для всего диапазона параметров по дальности не превосходит 125 м. По боковому отклонению максимальное различие результатов составляет 6 м. Лучшее соответствие результатов, полученных с использованием различных подходов к решению задачи, объясняется более близ-

ким расположением соответствующих зависимостей для коэффициента C_x (см. рис. 2, *b*). При начальном возмущении $\delta = 0.5°$ влияние колебаний снаряда составляет 20 – 25 м.

Таблица 2

Результаты расчета параметров траектории снаряда ОФ 125 мм

Начальные условия	θ_0, град	5	15	25
	V_0, м/с	600–870		
Уравнения движения центра масс снаряда. Закон сопротивления 1958 г.	X, м	3910–6470	7365–10655	9380–13040
	Z, м	1.60–2.86	5.78–8.09	9.43–12.17
Полная система уравнений движения. Расчетная модель сопротивления.	X, м	3875–6380	7415–10620	9505–13075
	Z, м	0.81–1.28	2.31–4.40	3.07–6.94

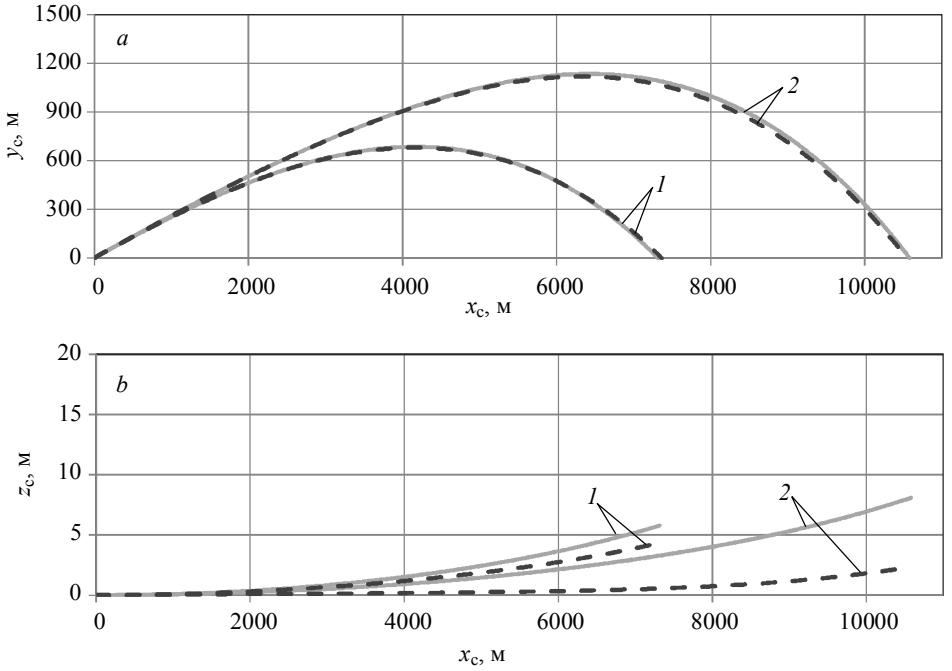


Рис. 4. Проекции траекторий снаряда ОФ 125 мм на плоскость Ox_cy_c (*a*) и Ox_cz_c (*b*): *1* – начальная скорость $V_0 = 600$ м/с; *2* – начальная скорость $V_0 = 870$ м/с; сплошная линия – закон сопротивления 1958 года; штриховая – расчетная модель сопротивления

Fig. 4. Projections of the projectile OF 125 mm trajectory on the plane Ox_cy_c (*a*) and Ox_cz_c (*b*): *1*, initial velocity $V_0 = 600$ m/s; *2*, initial velocity $V_0 = 870$ m/s; solid line indicates resistance law of 1958; dashed line, computational resistance model

Для бронебойно-подкалиберного снаряда калибра 125 мм проводились траекторные расчеты при начальной скорости $V_0 = 1700$ м/с на дальность стрельбы $X = 1000$–5000 м. Результаты расчета параметров траектории (Y – высота, Z – боковое отклонение) с использованием различных подходов к решению задачи представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты расчета параметров траектории снаряда БП 125 мм

Начальные условия	X, м	1000	3000	5000
	θ_0, град	0.2	0.35	0.6
Уравнения движения центра масс снаряда. Закон сопротивления 1958 г.	Y, м	3.82	3.98	3.90
	Z, м	0.05	0.44	1.34
Полная система уравнений движения. Расчетная модель сопротивления.	Y, м	3.82	3.59	3.42
	Z, м	0.04	0.40	1.25

Сравнение результатов расчета, полученных с использованием различных подходов к решению задачи без учета начальных возмущений по высоте и боковой координате отличается не более чем на 0.5 м (см. табл. 3). Однако при наличии начальных возмущений отклонения как по высоте, так и по направлению увеличиваются. Так, при начальном возмущении $\delta = 0.2°$, отличие по высоте и боковому отклонению составляет 1.0–2.5 м, в зависимости от дальности стрельбы. На рис. 5 дано сравнение расчетных траекторий при стрельбе на дальность 5000 м. Анализ результатов расчета траектории бронебойно-подкалиберного снаряда показывает, что влияние начальных возмущений на отклонения по высоте и боковой координате в конечной точке траектории могут быть существенными, что необходимо учитывать при стрельбе по целям прямой наводкой.

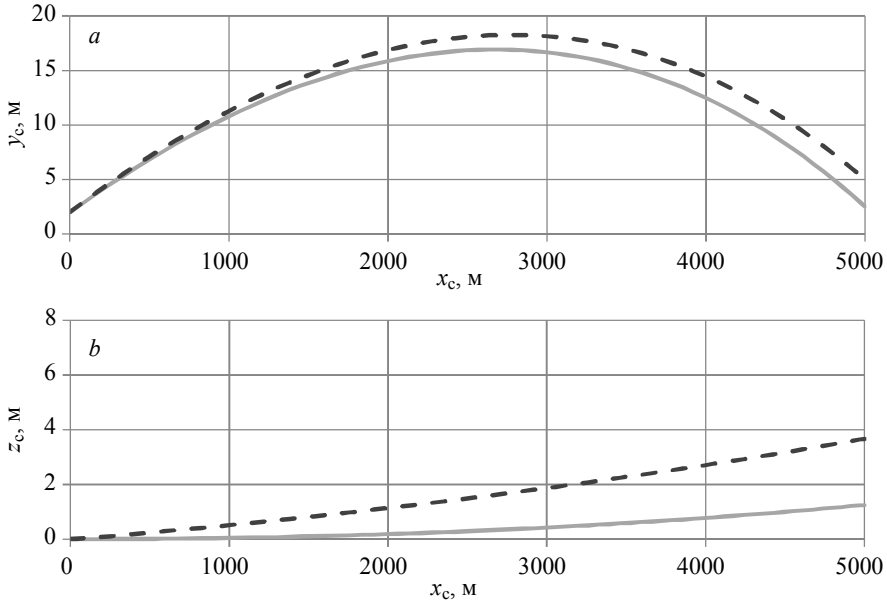


Рис. 5. Проекции траекторий снаряда БП 125 мм на плоскость Ox_cy_c (*a*) и Ox_cz_c (*b*): сплошная линия – без учета начальных возмущений; штриховая – с учетом начальных возмущений ($\delta = 0.2°$)

Fig. 5. Projections of the projectile BP 125 mm trajectory on the plane Ox_cy_c (*a*) and Ox_cz_c (*b*): solid line indicates the case without initial fluctuations; dashed line, the case with initial fluctuations ($\delta = 0.2°$)

Заключение

Методика аэродинамического расчета, предложенная в работе, позволяет получить полный набор коэффициентов аэродинамической силы и момента метаемого тела, тем самым замкнуть систему уравнений движения без использования эмпирических соотношений. Разработанная методика решения траекторной задачи является более полной, позволяет рассчитывать новые параметры и, в принципе, дает более точные результаты для широкого диапазона параметров стрельбы. Данная методика может быть использована для уточнения траекторных расчетов снарядов, используемых в артиллерии, а также при проектировании новых боеприпасов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н.* Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.
2. *Русяк И.Г., Карпов А.И., Королев С.А., Карсканов С.А.* Расчет траектории движения снаряда в атмосфере с учетом гидродинамики его обтекания // Вопросы оборонной техники. Серия 14. 2015. Вып. 2. С. 130–141.
3. *Ivan Rusyak, Vadim Sufiyanov, Stanislav Korolev, Mikhail Ermolaev*. Software complex for simulation of internal and external ballistics of artillery shot // International Conference on Military Technologies 2015 (ICMT 2015), Brno, May 19 – 21, 2015: University of Defence, Brno, 2015. P. 9–17. DOI: 10.1109/MILTECHS.2015.7153682.
4. ГОСТ В 24288-80. Снаряды неуправляемые артиллерийские, реактивные, активно-реактивные. Метод расчета траектории полета. М.: Издательство стандартов, 1980. 55 с.
5. *Hairer E., Norsett S.P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations. Vol. 1. Berlin: Springer–Verlag, 1991. 528 p.
6. *Королев С.А., Карсканов С.А.* Математическое моделирование обтекания тела вращения сверхзвуковым потоком газа // Вестник Удмуртского университета. Серия «Математика. Механика. Компьютерные науки». 2014. №3. С. 123–133.
7. *Липанов А.М.* Теоретическая гидромеханика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
8. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. California, 1994. 460 p.
9. *Launder B.E., Spalding D.B.* The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3. P. 269–289.
10. *Sarkar S., Hussaini M.Y.* Computation of the sound generated by isotropic turbulence. NASA Contract Report 93-74. NASA Langley Research Center, Hampton, VA, 1993.

Статья поступила 17.03.2017 г.

Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G.(2017) ON THE ISSUE OF ACCURACY OF THE SOLUTION OF THE DIRECT PROBLEM OF EXTERNAL BALLISTICS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 63–74

DOI 10.17223/19988621/47/7

The paper is devoted to the possibility to increase the accuracy of the solution of the direct problem of external ballistics by means of solving a more comprehensive system of projectile motion equations and calculating the coefficients of aerodynamic forces and moments based on the hydrodynamic simulation of the flow around the projectile.

The mathematical modl of external ballistics presented in this article takes into account rotation of the projectile and oscillation of the latter in relation to the center of mass. Simulation of the flow around the projectile has been performed by solving the Favre averaged Navier–Stokes equations (FANS), using the $k-\varepsilon$ turbulence model including compressibility. The numerical method has been implemented with the application of the ANSYS Fluent computational fluid dynamics module.

Calculation of aerodynamic characteristics of the projectiles has been carried out in a wide range of parameters: Mach number, M = 0.5–5.0; angle of attack, α = 0–20°; and rotation speed, ω_x = 500–2000 rad/s. Based on numerical simulation results, the approximate dependences for coefficients of aerodynamic force and moment have been obtained using the least square method.

The effect of the considered factors on the solution of trajectory problem has been investigated for three types of projectiles: the high explosive rotating projectile, the high explosive feathered projectile, and the armor-piercing subcaliber feathered projectile

Keywords: external ballistics, trajectory, aerodynamic coefficients, Navier-Stokes equations, turbulence model, numerical method, accuracy of the solution.

KOROLEV Stanislav Anatol'evich (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation)
E-mail: stkj@mail.ru

LIPANOV Aleksey Matveevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences, Moscow, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation)
E-mail: AML35@yandex.ru

RUSYAK Ivan Grigor'evich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation)
E-mail: primat@istu.ru

REFERENCES

1. Dmitrievskiy A.A., Lysenko L.N. (2005) *Vneshnyaya ballistika* [External Ballistics]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Rusyak I.G., Karpov I.A., Korolev S.A., Karskanov S.A. (2015) Raschet traektorii dvizheniya snaryada v atmosfere s uchetom gidrodinamiki ego obtekaniya [Calculation of the trajectory of a projectile in the atmosphere taking into account the hydrodynamics of the external flow]. *Voprosy oboronnoy tekhniki – Questions of defense engineering*. *Series 14*. 2. pp. 130–141.
3. Rusyak I., Sufiyanov V., Korolev S., Ermolaev M. (2015) Software complex for simulation of internal and external ballistics of artillery shot. *International Conference on Military Technologies 2015 (ICMT 2015)*. University of Defense, Brno. pp. 9–17. DOI: 10.1109/MILTECHS.2015.7153682.
4. GOST B 24288-80 (1980) *Snaryady neupravlyaemye artilleriyskie, reaktivnye, aktivno-reaktivnye. Metod rascheta traektorii poleta* [Unguided artillery projectiles, reactive, active-reactive. The method of calculating the flight trajectory]. Moscow: Publishing of standards.
5. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. (1991) *Solving Ordinary Differential Equations*. *Vol. 1*. Berlin: Springer-Verlag.
6. Korolev S.A., Karskanov S.A. (2014) Mathematical simulation of supersonic airflow around the rotary body. *Vestnik UdSU. Series "Mathematics. Mechanics. Computer sciences"*. 3. pp. 123–133.
7. Lipanov A.M. (2011) *Teoreticheskaya gidromekhanika n'yutonovskikh sred* [Theoretical Hydromechanics of Newtonian Media]. Moscow: Nauka.
8. Wilcox D.C. (1994) *Turbulence Modeling for CFD*. California.
9. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3. pp. 269–289.
10. Sarkar S., Hussaini M.Y. (1993) Computation of the sound generated by isotropic turbulence. *NASA Contract Report 93-74*. VA, Hampton: NASA Langley Research Center.

УДК: 621.039.54, 66.021, 519.63
DOI 10.17223/19988621/47/8

А.Ю. Крайнов, Л.Л. Миньков, И.Н. Сеелев, Э.Р. Шрагер

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ВОЗДУХА В КАМЕРЕ ХРАНЕНИЯ СУХОГО ХРАНИЛИЩА ОЯТ[1]

На основе квазидвумерной модели течения идеального газа с учетом сил вязкого трения, сил Архимеда и тепловыделения из гнезд хранения проведено численное исследование влияния воздействия ветровой нагрузки на тепловой режим в камере хранения сухого хранилища отработанного ядерного топлива. Показано, что поле течения в камере хранения является устойчивым по отношению к ветровой нагрузке до 20 м/с, которая оказывает благоприятное влияние на тепловой режим камеры хранения рассматриваемой конструкции.

Ключевые слова: *тепло-массообменные процессы, ветровая нагрузка, сухое хранилище, отработанное ядерное топливо, численное моделирование.*

Для хранения отработанного ядерного топлива (ОЯТ) используются сухие хранилища ОЯТ. В основу способа сухого хранения ОЯТ положен пассивный способ отвода тепла от ОЯТ с помощью воздуха [1–4]. ОЯТ размещаются в специальных пеналах, которые загружаются в гнезда хранения, размещенные в железобетонных камерах. Основной проблемой при хранении ОЯТ в сухом хранилище является надежная и устойчивая естественно-конвективная циркуляция воздуха во всех каналах хранилища независимо от состояния во внешней окружающей атмосфере.

Каждая камера имеет вытяжные шахты по обеим сторонам, слева и справа, а также входные опускные шахты для подачи в подкамерное пространство атмосферного воздуха (рис. 1). Охлаждение гнезд реализуется свободно-конвективным течением воздуха вдоль поверхности гнезд хранения. Течение воздуха в камерах хранения сухого хранилища реализуется в результате организованного естественного воздухообмена, при этом движущими силами такого воздухообмена являются гравитационные силы и ветровое давление. Температурный режим элементов хранилища (гнезд хранения, пеналов, ампул с ОЯТ и бетона строительных конструкций здания) зависит от расхода воздуха относительно гнезд, расположенных в камерах хранения ОЯТ. В отличие от принудительной вентиляции система охлаждения пеналов с ОЯТ в гнездах хранения сухого хранилища является пассивной, что повышает ее надежность и дает экономический выигрыш при эксплуатации.

В атмосфере, помимо сезонных, суточных изменений, наблюдаются существенно нестационарные явления локального по времени и пространству характера: ураганы, смерчи, порывы ветра и другие атмосферные явления, которые могут повлиять на аэродинамические процессы естественной конвекции в камерах сухого хранилища. Для определения влияния существенно нестационарных процессов в атмосфере на устойчивость естественно-конвективного охлаждения во внутрен-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-48-700732 р_а.

них полостях сухого хранилища необходимо провести расчетно-теоретические исследования и анализ аэродинамических процессов в камере хранения и каналах вокруг гнезд хранения, определить времена установления стационарного естественно-конвективного течения, времена перестройки течения в полостях хранилища и оценить влияние этих изменений на температуру гнезд хранения отработанного ядерного топлива.

Целью данной работы является разработка математической модели и проведение расчетно-теоретического анализа влияния внешней ветровой нагрузки на величину и распределение потоков охлаждающего воздуха в полостях и вытяжных шахтах сухого хранилища.

Для моделирования неизотермического течения газа можно использовать математические модели различных уровней. В общем случае физико-математическая модель течения вязкого теплопроводного сжимаемого газа в поле сил тяжести формулируется на основе уравнений Навье – Стокса с учетом вязкой диссипации механической энергии [5–8]. Поскольку решение задачи в полной постановке требует больших вычислительных затрат, то необходимо прибегать к тем или иным упрощениям. Общую постановку задачи можно упростить за счет уменьшения количества пространственных переменных в случае направленного течения газа. Для течений со скоростями, меньшими числа Маха равного 0.3, используется гипотеза о несжимаемости среды [5, 6]. Для учета зависимости плотности среды от температуры рассматривается приближение Буссинеска [9, 10]. В случае больших изменений температуры среды и больших характерных размеров области, где происходит течение воздуха, используются модели нетеплопроводного сжимаемого невязкого газа [11–15].

Построение математической модели

Рассматривается свободно-конвективное течение воздуха в камере хранения сухого хранилища, рис. 1. В камере хранения расположены гнезда хранения *5*, содержащие пеналы с ОЯТ, являющиеся источником тепла. Воздух нагревается от стенок гнезд хранения и под действием сил плавучести поднимается вверх, движется в свободном пространстве между гнездами хранения, разделенными перегородками *6*, и выходит через вытяжные шахты *3* и *4*. Свежий воздух затекает в подкамерное пространство *7* через входные каналы *1* и *2* и далее течет через закладные трубы в камеру хранения. Учитывается сопротивление трения при обтекании воздухом гнезд хранения.

Камера хранения имеет ширину 22 и высоту 9 м. Гнезда хранения представляют собой трубы диаметром 0.7 и высотой 9 м, которые начинаются на высоте 3 м и заканчиваются на высоте 12 м, расположены в камере хранения в два ряда. Перегородки между гнездами хранения начинаются на высоте 3 м от нижней части гнезд хранения, и заканчиваются на высоте 11 м. Входные каналы с жалюзийными решетками находятся на высоте 10 м, имеют ширину 1 м. Выходы вытяжных шахт находятся на высоте 30 м и имеют ширину 0.6 м. Высота всего здания сухого хранилища – 30 м, ширина – 30 м.

Глубина камеры хранения (проходное сечение для воздуха) $H(x, y)$ в направлении, перпендикулярном поперечному сечению, много меньше ее высоты и ширины. Вне расположения гнезд хранения $H(x, y) = 1$ м. В области расположения

гнезд хранения $H(x,y)$ задавалась как средняя величина проходного сечения и вычислялась по формуле

$$H(x,y)=\frac{\left(V_{\text{кам}}-V_{\text{гнд}}\right)}{S_{\text{кам}}\,N},$$

где $V_{\text{кам}}$ – объем камеры хранения с учетом объема гнезд хранения в одной камере хранения; $V_{\text{гн}}$ – суммарный объем всех гнезд хранения, расположенных в одной камере хранения; $S_{\text{кам}}$ – площадь вертикального сечения камеры хранения в части, где расположены гнезда хранения, в направлении вдоль расположения гнезд хранения; N – количество рядов гнезд хранения в камере. Величина $H(x,y)$, вычисленная по приведенной формуле, составляет 0.615 м на один метр глубины камеры хранения.

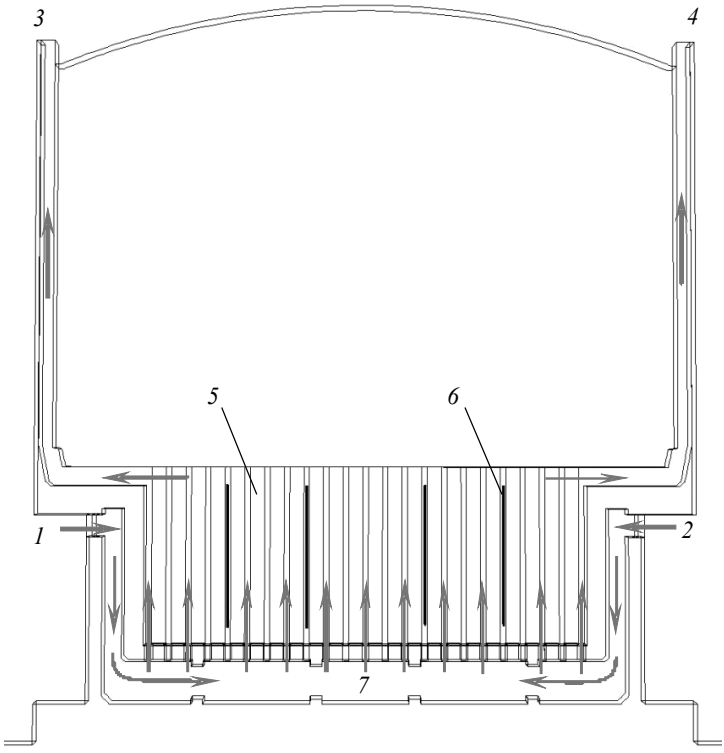


Рис. 1. Поперечное сечение камеры хранения здания сухого хранилища. *1*, *2* – левый и правый входные каналы; *3*, *4* – левая и правая вытяжные шахты, *5* – камера хранения с гнездами хранения; *6* – перегородки; *7* – подкамерное пространство. Стрелками обозначены направления движения потока воздуха

Fig. 1. Transverse cross section of a storage chamber in a dry storage for spent nuclear fuel. *1, 2*, left and right input ducts, respectively; *3, 4*, left and right exhaust shafts, respectively; *5*, storage chamber with the storage nests; *6*, partitions; *7*, under-chamber space. The arrows indicate the airflow direction

Проведем осреднение параметров состояния воздуха в направлении, перпендикулярном сечению камеры хранения. После осреднения система уравнения газовой динамики в квазидвумерном приближении принимает вид

$$\frac{\partial \rho H(x,y)}{\partial t}+\frac{\partial \rho u H(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial \rho v H(x,y)}{\partial y}=0\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u H}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u^2+p\right)H}{\partial x}+\frac{\partial \rho u v H}{\partial y}=p\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}-F_x\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho v H}{\partial t}+\frac{\partial \rho u v H}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho v^2+p\right)H}{\partial y}=p\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}-F_y-g\rho H(x,y)\,; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho E H}{\partial t}+\frac{\partial\left(u\rho E+pu\right)H}{\partial x}+\frac{\partial\left(v\rho E+pv\right)H}{\partial y}=Q\cdot\eta(x,y)H(x,y)-g\rho v H(x,y)\,; \tag{4}$$

$$p=\rho RT\,; \tag{5}$$

$$E=e+\left(u^2+v^2\right)\!/2\,,\ e=\frac{p}{\rho\left(k-1\right)}\,,$$

где x, y – координаты; t – время; ρ – плотность газа; u, v – компоненты вектора скорости вдоль координат x, y соответственно; p – давление; T – температура; E – полная энергия газа; e – внутренняя энергия газа; g – ускорение силы тяжести; k – показатель адиабаты воздуха; R – газовая постоянная; Q – приход тепла с поверхностей гнезд хранения в единицу времени в единицу объема воздуха в камере хранения в области расположения пеналов хранения; F_x, F_y – компоненты силы трения газа о стенки камеры и гнезд хранения; функция $\eta(x,y)$ равна единице в местах расположения гнезд хранения и нулю – в противном случае.

F_x, F_y определяются в соответствии с зависимостями силы сопротивления потоку при продольном и поперечном обтекании труб, взятыми из [16] и имеют вид

$$F_x=c_x\frac{\rho u\sqrt{u^2+v^2}}{2}\,,\ c_x=1.2\ \text{ при }\ 10^4\le \mathrm{Re}\le 5\cdot 10^5\,,\ \mathrm{Re}=\frac{\rho u D}{\mu}\,,$$

$$F_y=c_y\frac{\rho v\sqrt{u^2+v^2}}{2}\,,\ c_y=0.0032+\frac{0.221}{\mathrm{Re}^{0.237}}\,,$$

где c_x, c_y – коэффициенты сопротивления в выражениях для F_x, F_y; Re – число Рейнольдса; μ – коэффициент динамической вязкости воздуха; D – диаметр гнезда хранения.

Начальные условия для системы уравнений (1) – (5):

$$u(x,y,0)=0\,,\ v(x,y,0)=0\,,\ T(x,y,0)=T_0\,,\ p(x,y,0)=p_0-\rho g y\,, \tag{6}$$

где T_0 – температура окружающей атмосферы; p_0 – величина давления у поверхности земли.

Граничные условия:

На стенках камеры хранения задаются условия непротекания

$$\boldsymbol{V}_{\Sigma,\perp}=0\,, \tag{7}$$

где $V_{\Sigma,\perp}$ – проекция вектора скорости на нормаль к поверхности стенок полости камеры хранения и гнезд хранения.

На границах, удаленных от стен здания на заданное расстояние, задаются параметры атмосферы: полное давление и температура:

$$p_\Sigma = p_n\,,\; T_\Sigma = T_0\,, \tag{8}$$

где p_n – значение полного давления в потоке атмосферного воздуха.

Ветровая нагрузка моделировалась заданием избыточного давления в атмосфере с левой стороны здания (рис. 1) на границе расчетной области в граничном условии (8) и уменьшением давления с правой стороны здания на границе расчетной области:

$$p_{x=0} = p_{n,l} = p_0 - \rho g y + \Delta p_l\,,$$

$$p_{x=L} = p_{n,r} = p_0 - \rho g y - \Delta p_r\,,$$

где Δp_l, Δp_r – повышение атмосферного давления перед левой стенкой здания за счет скоростного напора и понижение давления справа от здания, на подветренной стороне. Величины Δp_l, Δp_r являются переменными по высоте и брались из результатов вспомогательных расчетов обтекания здания при скорости ветра 20 м/с.

Система уравнений (1) – (8) описывает течение воздуха в полости, имеющей характерные размеры в направлениях *x* и *y* много большие, чем в перпендикулярном сечению камеры хранения направлении. При этом параметры состояния газа в направлении, перпендикулярном сечению камеры хранения, имеют средние значения. Сила сопротивления и приход тепла с поверхности гнезд хранения учитывается в среднем по поперечному сечению гнезда хранения. Влияние атмосферы учитывается через параметры течения воздуха в окрестности здания и над крышей.

Методика расчетов и их результаты

Система уравнений (1) – (8) решалась численно методом С.К. Годунова [17] на ортогональной разностной сетке, построенной в области, соответствующей форме полостей камеры хранения (рис. 1), окрестности здания справа и слева и над крышей здания. Расчетная область разбивается на $N \times M$ расчетных ячеек. На границе ячеек решается задача о распаде произвольного разрыва в параметрах газа и определяются потоки массы, импульса и энергии на границе между ячейками. На стенках решается задача о распаде произвольного разрыва в параметрах газа с учетом условия непротекания. Величина шага по времени определяется из условия устойчивости разностной схемы [17]. Алгоритм решения задачи состоит в следующей последовательности вычислений: 1) задаются все необходимые исходные данные для расчета; 2) проводится расчет потоков массы, импульса и энергии на всех границах ячеек; 3) проводится расчет параметров состояния газа на n+1 временном слое; 4) проводится переход на вычисление параметров на следующем временном слое, начиная с п. 2. Численное решение системы уравнений (1)–(8) проводится до установления стационарного течения в камере хранения и окружающем пространстве. В процессе расчетов контролируется выполнение закона сохранения массы: вычисляются потоки массы воздуха, втекающего в каме-

ру хранения через входы *1* и *2* (см. рис. 1) и вытекающего через выходы *3* и *4*. При установлении стационарного течения в камере хранения отличие потоков массы воздуха втекающего и вытекающего составляет 0.5 %. Также контролировалось выполнение закона сохранения полной энергии. В стационарных условиях масса протекающего в полостях камеры хранения газа за счет теплового потока Q в объеме вокруг гнезд хранения получает в единицу времени количество тепла QV, где V есть величина свободного объема камеры хранения вокруг гнезд хранения. В стационарных условиях это количество полученной энергии выходит через выходные каналы *3* и *4* с массой газа, при этом полная энергия этой массы газа увеличивается на величину QV. Отличие расчетных значений этих величин составило 0.8 %. Также были проведены расчеты параметров течения при уменьшении величины шага по пространству. Расчеты проводились на сетке 160×200 и на сетке 320×400 по направлениям x и y до установления стационарного течения. Отличие результатов расчетов (полей температуры и модуля скорости) при двух значениях шагов разностной сетки по пространству составило не более 0.5 %. Все дальнейшие расчеты проводились на сетке 320×400.

Для проведения расчетов параметров течения воздуха в полостях камеры хранения были приняты следующие исходные данные: атмосферное давление у подножия здания $p_0 = 101320.0$ Па, ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2, показатель адиабаты для воздуха $k = 1.4$, удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 1015$ Дж/(кг·К) и при постоянном объеме $c_v = 725$ Дж/(кг·К), динамическая вязкость воздуха $\mu = 1 \cdot 10^{-5}$ Па·с, начальная температура воздуха $T_0 = 293$ К. В расчетах принимается максимальная загрузка камеры хранения. Все гнезда хранения заполнены пеналами хранения, в каждом гнезде выделяется 3.4 кВт тепла, тогда в единицу объема камеры хранения в единицу времени приходит количество тепла 619.22 Вт/м^3.

На рис. 2 – 5 представлены результаты расчета варианта, когда после мгновенной 100 % загрузки камеры хранения устанавливается стационарное состояние и затем возникает шквал ветра. После установления стационарного состояния в момент времени 200 с на здание начинает действовать шквал ветра в течение 400 с. Предполагалось, что скорость ветра составляет 20 м/с. На рис. 2 представлены изменения массовых расходов воздуха во времени через входные каналы и на выходе из вытяжных шахт, приведенные к четырехрядной камере хранения. При воздействии ветра появляется дисбаланс в величинах массового прихода воздуха через входные каналы: через левый канал *1* (с наветренной стороны) приход воздуха увеличивается, а через правый *2* – уменьшается. На выходе из вытяжных шахт массовые расходы также отличаются друг от друга: через левую вытяжную шахту *3* расход воздуха становится на 20 % больше, чем через правую *4*. На рис. 3 представлен график изменения во времени отклонения максимальной температуры воздуха в полостях камеры хранения от установившейся в стационарном режиме без ветра. Пунктирной линией обозначена установившаяся максимальная температура воздуха в камере хранения без ветра. Из рисунков 2 и 3 видно, что установление стационарного течения из неподвижного состояния воздуха происходит за время 200 с. При этом максимальная температура воздуха в полостях камеры хранения не превышает 52.8 °С. Максимум температуры воздуха находится в верхней части полости камеры хранения. Температура на выходе из вытяжных шахт составляет 47.4 °С.

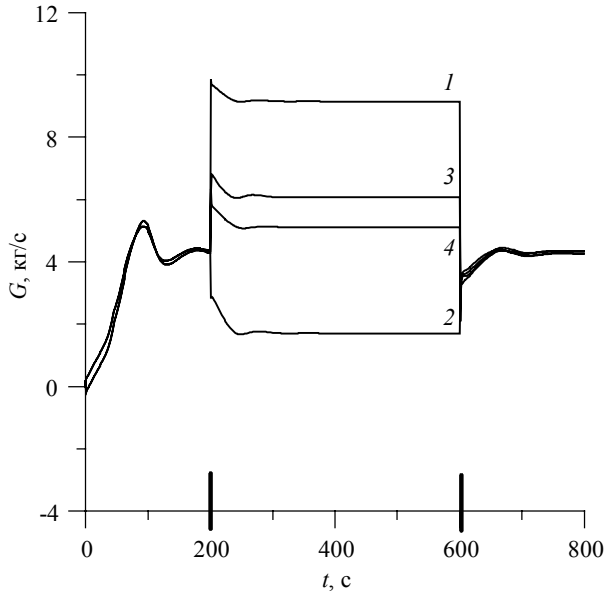


Рис. 2. Секундные массовые расходы воздуха во входных каналах здания слева (*1*), справа (*2*) и на выходе из вытяжных шахт слева (*3*) и справа (*4*)
Fig. 2. Second air mass flow rates through the left (*1*) and right (*2*) input ducts of the storage and through the left (*3*) and right (*4*) outputs of exhaust shafts

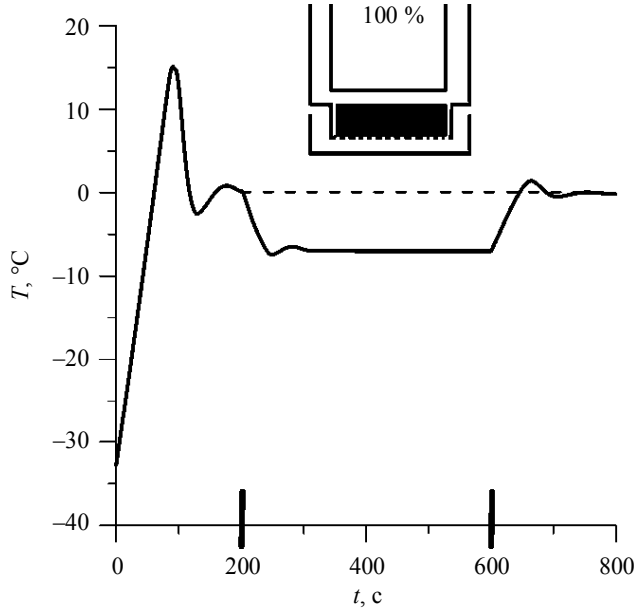


Рис. 3. Изменение во времени отклонения максимальной температуры воздуха в полостях камеры хранения от установившейся в стационарном режиме
Fig. 3. Time variation in the deviation of air maximum temperature in the cavities of the storage chamber with respect to the temperature in the steady state regime

После начала воздействия на здание шквала ветра установление нового стационарного распределения параметров воздуха в камере хранения происходит за время 150 с. Соответствующие стационарному состоянию при наличии ветровой нагрузки поля скорости и температуры представлены на рис. 4 и 5. Максимальная температура воздуха в полостях камеры хранения понижается на 8 °С. При воздействии ветровой нагрузки на здание распределения температуры и модуля скорости (рис. 4 и 5) становятся слабо несимметричными относительно центральной продольной вертикальной плоскости симметрии камеры хранения, тогда как в подкамерном пространстве и над крышей здания не симметрия картины течения воздуха и температуры более ярко выражена.

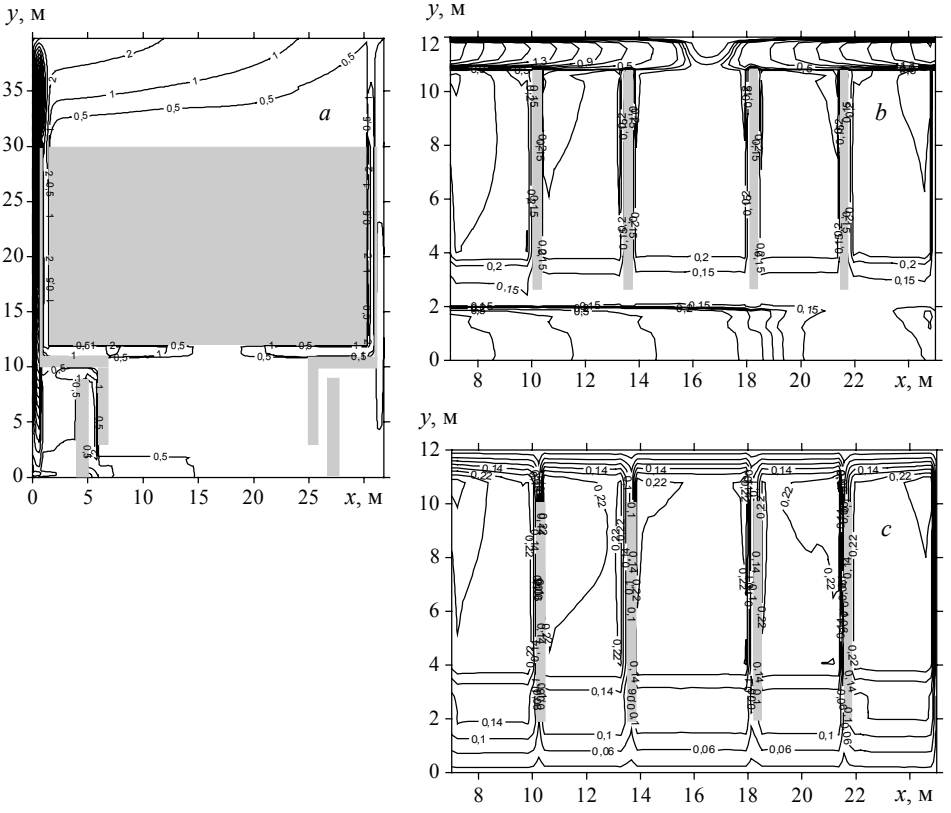


Рис. 4. Установившиеся поля скоростей воздуха: *a* – модуль скорости в здании сухого хранилища; *b* – модуль скорости в камере хранения; *c* – вертикальная составляющая скорости воздуха в камере хранения. Поля построены на момент времени 600 с

Fig. 4. Steady fields of air velocity: (*a*) velocity vector modulus in the dry storage; (*b*) velocity vector modulus in the storage chamber; (*c*) vertical component of the air velocity in the storage chamber; the velocity fields correspond to the time of 600 s

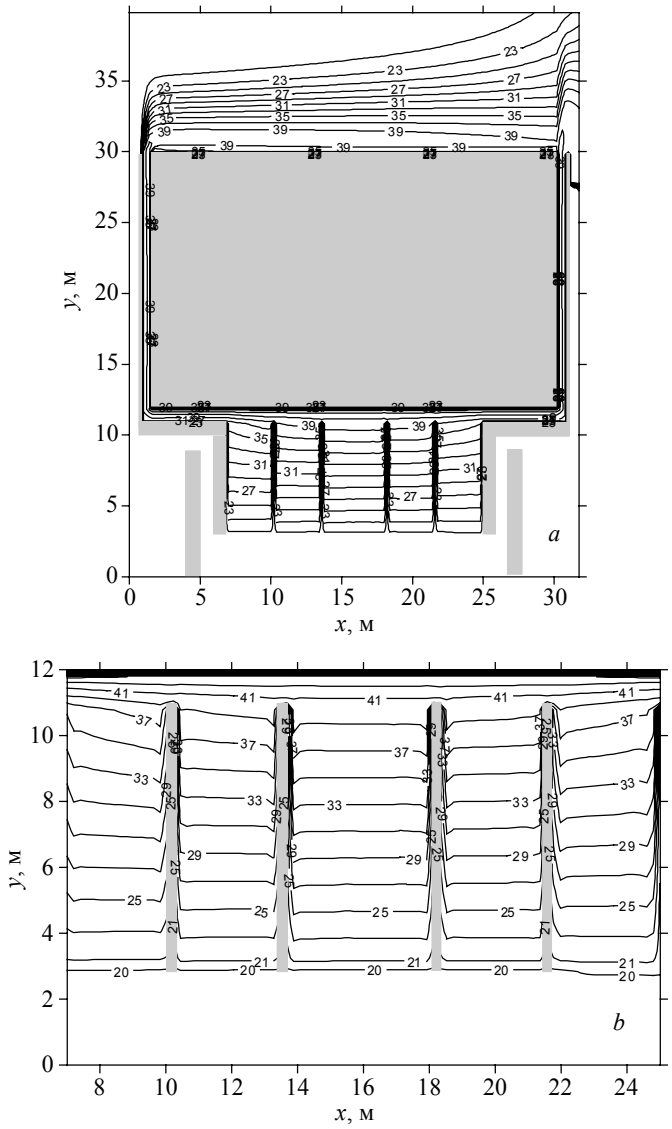


Рис. 5. Установившиеся поля температур воздуха: *a* – здание сухого хранилища; *b* – камера хранения. Поля построены на момент времени 600 с
Fig. 5. Steady air temperature fields: *a,* dry storage; *b*, storage chamber. The temperature fields correspond to the time of 600 s

В момент времени 600 с ветер прекращается. За время 150 с в камере хранения устанавливается стационарное состояние, абсолютно идентичное состоянию до воздействия шквала ветра. При воздействии шквала ветра происходит перестройка течения и теплообмена в камере хранения на новое стационарное состояние за время 150 с. При прекращении ветра восстановление стационарного состояния происходит также за 150 с. Это время примерно соответствует времени полного двойного воздухообмена камеры хранения.

Выводы

Разработана физико-математическая модель естественно-конвективного течения воздуха в камере хранения сухого хранилища ОЯТ на основе квазидвумерного приближения. Установлено, что стационарное естественно-конвективное течение в камере хранения формируется за время 150–200 с, что соответствует времени двойного воздухообмена камеры хранения. Наличие ветра благоприятно сказывается на температурном режиме функционирования камеры хранения, который является устойчивым при внезапных ветровых нагрузках до 20 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радченко М.В., Зубков А.А., Кректунов О.П., Науменко Н.А., Кассиров С.В.* Экспериментально-расчетное исследование течения и теплообмена воздуха на моделях хранилища ХОТ-2. – СПб.: Инженерный Центр Ядерных Контейнеров, 2011.
2. *Alyokhina S.* Investigation of thermal processes at dry storage of spent nuclear fuel // The International Conference on Management of Spent Fuel from Nuclear Power Reactors, IAEA Vienna, 31 May – 4 June 2010, Vienna, Austria, 2010.
3. *Калинкин В.И., Шафрова Н.П., Крицкий В.Г., Волухова Т.Г.* Решение научных проблем, связанных с температурным режимом хранения ОЯТ [Электронный ресурс]. URL: http://www.atomic-energy.ru/presentations/18846.
4. *Graves F.C., Geronimo M.R., Graves G.A.* Centralized Dry Storage of Nuclear Fuel [Электронный ресурс]: The Battle Group. – 2012. URL: http://www.brattle.com/news-and-knowledge/publications/archive/2012.
5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 732 с.
7. *Липанов А.М.* Теоретическая гидродинамика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
8. *Липанов А.М., Васенин И.М., Шрагер Э.Р., Крайнов А.Ю.* Метод прямого численного моделирования турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в криволинейных каналах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 59–69.
9. *Ши Д.* Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988.
10. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергоиздат, 1981. 416 с.
11. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2002. 608 с.
12. *Пейре Р., Тейлор Т.Д.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 352 с.
13. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиория УРСС, 2003. 784 с.
14. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
15. *Белоцерковский О.М., Андрущенко В.А., Шевелев Ю.Д.* Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере. М.: Янус-К, 2000. 455 с.
16. *Справочник* по теплообменникам. В двух томах. Т. 1. М.: Энергоатомиздат, 1987. 561 с.
17. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

Статья поступила 16.03.2017 г.

Krainov A.Yu., Min'kov L.L., Seelev I.N., Shrager E.R. (2017) NUMERICAL INVESTIGATION OF THE AIR HEAT-MASS TRANSFER IN THE CHAMBER OF DRY STORAGE FOR SPENT NUCLEAR FUEL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 75–86

DOI 10.17223/19988621/47/8

The numerical investigation of the wind load effect on the thermal regime in a dry storage for spent nuclear fuel has been carried out in this paper. The equations of gas dynamics written in the quasi-2D approximation have been solved to determine the flow fields in the storage chamber. Solution of the Euler equations, which govern the motion of a compressible fluid, has been implemented using the first order Godunov's method. The heat exchange between the air and storage casks is taken into account via the right-hand side of the energy equation. The flow field in the storage chamber has been shown to be stable with respect to the wind load of 20 m/s. The wind load has a positive effect on the thermal regime of the storage chamber of considered design. The time for establishing the flow field in the storage chamber after exposure to the wind load completed is equal to 150 s.

Keywords: heat-mass transfer processes, wind load, dry storage, spent nuclear fuel, numerical simulation.

KRAINOV Aleksey Yur'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

MIN'KOV Leonid Leonidovich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

SEELEV Igor Nikolaevich (Candidat of Technical Science, AO «GCC», Jeleznogorsk, Russian Federation)
E-mail: sher@ftf.tsu.ru

SHRAGER Ernst Rafailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: sher@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Radchenko M.V., Zubkov A.A., Krektunov O.P., Naumenko N.A., Kassirov S.V. (2011) *Eksperimental'no-raschetnoe issledovanie techeniya i teploobmena vozdukha na modelyakh khranilishcha KhOT–2* [Experimental and theoretical investigation of the air flow and heat exchange based on the SSF–2 storage models]. St. Petersburg: Inzhenernyy Tsentr Yadernykh Konteynerov – Engineering Center of Nuclear Containers.
2. Alyokhina S. (2010) Investigation of thermal processes at dry storage of spent nuclear fuel. *The International Conference on Management of Spent Fuel from Nuclear Power Reactors, IAEA Vienna, Austria*.
3. Kalinkin V.I., Shafrova N.P., Kritskiy V.G., Voltukhova T.G. *Reshenie nauchnykh problem, svyazannykh s temperaturnym rezhimom khraneniya OYaT* [Solution of scientific problems related to the temperature regime of spent nuclear fuel storage] [Electronic resource]. Access mode: http://www.atomic-energy.ru/presentations/18846.
4. Graves F.C., Geronimo M.R., Graves G.A. (2012) *Centralized Dry Storage of Nuclear Fuel* [Electronic resource]. The Battle Group. Access mode: http://www.brattle.com/news-and-knowledge/publications/archive/2012.
5. Loitsyansky L.G. (1966) *Mechanics of fluid and gas*. London: Pergamon Press.
6. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1987) *Fluid Mechanics*. London: Pergamon Press.

7. Lipanov A.M. (2011) *Teoreticheskaya gidrodinamika n'yutonovskikh sred* [Theoretical Hydromechanics of Newtonian fluids]. Moscow: Nauka.
8. Lipanov A.M., Vasenin I.M., Shrager E.R., Krainov A.Y. (2013) A method of direct numerical simulation of turbulent flows of viscous heat-conducting gas in curved channels. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(25). pp. 59–69.
9. Shih T.M. (1984) *Numerical Heat Transfer*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
10. Isachenko V.P, Sukomel A.S., Osipova V.A. (2000) *Heat Transfer*. University Press of the Pacific.
11. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. (2002*) Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems]. Moscow: Fizmatlit.
12. Peyret R., Taylor Th.D. (1983) *Computational Methods for Fluid Flow*. New-York: Springer-Verlag.
13. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. (2003) *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow: Editorial URSS.
14. Nigmatulin R.I. (1991) *Dynamics of Multiphase Media*. Vol. 1. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
15. Belotserkovskiy O.M., Andruschcenko V.A., Shevelev Yu.D. (2000) *Dinamika prostranstvennykh vikhrevykh techeniy v neodnorodnoy atmosphere* [Dynamics of spatial vortex flows in an inhomogeneous atmosphere]. Moscow: Yanus-K.
16. *Spravochnik po teploobmennikam: v dvukh tomakh* [Handbook of Heat Exchangers]. Vol. 1. (1987). Moscow: Energoatomizdat.
17. Godunov S.K. (1976) *Numerical Solution of Multidimensional Problems in Gasdynamics*. Moscow: Nauka.

УДК 532.517.4
DOI 10.17223/19988621/47/9

Р.Р. Турубаев, А.В. Шваб

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ КОМБИНИРОВАННОГО ПНЕВМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА

Представлено численное моделирование аэродинамики закрученного течения в вихревой камере. Особенностью такой камеры является наличие вращающихся лопаток, расположенных в верхней выходной для несущей среды части аппарата. Дополнительно исследуется динамика несущей среды в этой же камере с расположенным в средней части аппарата вращающимся диском для увеличения окружной скорости несущей среды. Численные исследования показали возможность получения равномерного по высоте профиля радиальной скорости на входе в ротор, что является необходимым условием для эффективной работы сепаратора. Достоверность результатов численных исследований устанавливается тестовыми исследованиями, сравнением с известной аналитической зависимостью, а также сравнением полученных решений в переменных «скорость – давление» и «функция тока – вихрь».

Ключевые слова: *вихревая камера, скорость, численное моделирование, давление, аэродинамика, вихрь, закрученное течение, функция тока, угловая точка.*

В наши дни потребность в получении тонкодисперсных порошков с заданным гранулометрическим составом значительно возросла. Порошковые материалы наиболее широко используются в активно развивающейся аддитивной технологии, в порошковой металлургии, химической, атомной и других отраслях промышленности. Одним из наиболее эффективных и экологически безопасных способов получения тонкодисперсных порошков с заданными размерами частиц являются пневматические методы переработки сыпучей среды. К такому способу получения тонкодисперсных порошков относится разработанный в Томском университете комбинированный пневматический аппарат, который сдержит два совмещенных процесса – измельчение и сепарацию. Экспериментальные исследования показывают, что определяющим фактором, влияющим на процесс сепарации в таком аппарате, является аэродинамика закрученного потока несущей среды. Таким образом, настоящая работа посвящена численному моделированию поля скорости газовой среды в сепарационной зоне комбинированного центробежного аппарата, а также исследованию влияния режимных и геометрических параметров на аэродинамику закрученного течения, что позволит использовать разработанную математическую модель при оптимизации технологии получения порошков заданного фракционного состава.

Физико-математическая постановка задачи

Сепарационная камера комбинированного пневматического аппарата (рис. 1) представляет собой цилиндрическую область, в нижней части которой располагается труба с подводящим газом и твердыми частицами. В верхней части камеры находится ротор, состоящий из вращающих с постоянной угловой скоростью лопаток. В средней части сепарационной камеры может располагаться вращающийся диск для увеличения окружной составляющей вектора скорости двухфазного потока.

Несущая среда поступает в вихревую камеру через сечение А–А' (рис. 1) и под действием перепада давления обтекает вращающийся диск и вместе с мелкой фракцией проходит через систему вращающихся лопаток и соответственно выходит через сечение Б–Б'. Часть крупной фракции отсеивается на начальном этапе, где крупные частицы, в отличие от мелких, сталкиваются с диском и падают вниз, для дальнейшего измельчения. Остальная доля крупной фракции отсеивается системой вращающихся лопаток Б–В–В'–Б', в силу того, что центробежная сила значительно превышает силу аэродинамического сопротивления частиц [1]. Также рассматривался вариант геометрии с отсутствием центрального дискового элемента.

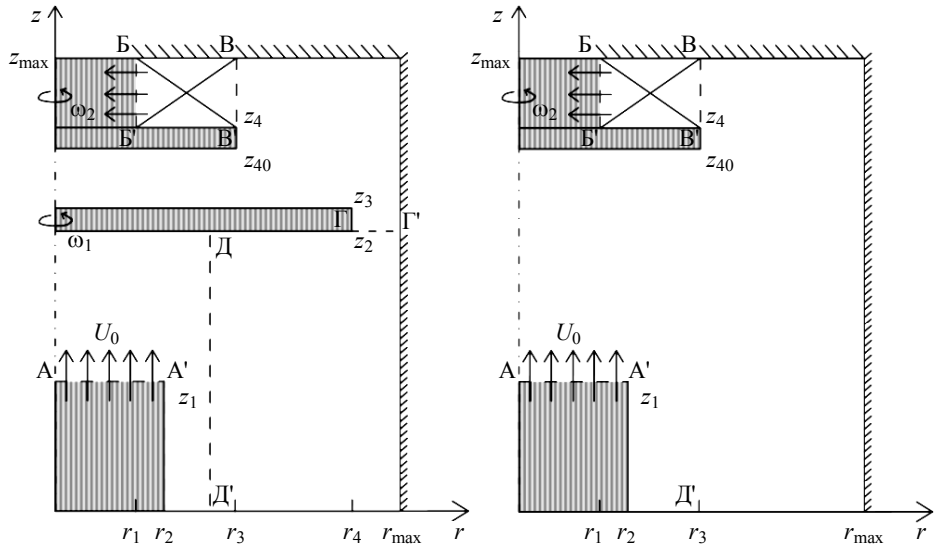


Рис. 1. Схема расчетной области
Fig. 1. Scheme of the computational domain

В силу большого количества лопаток в окружном направлении можно считать, что в зазорах между вращающимися лопатками для газовой фазы имеет место постоянство угловой скорости вращения. Это обстоятельство позволяет считать, что в камере осуществляется осесимметричное течение относительно оси вращения, т.е. отсутствуют изменения скорости относительно окружной координаты, что позволяет рассматривать закрученное течение вязкого газа в осесимметричной постановке задачи.

Движение закрученного потока описывается уравнениями Навье – Стокса и уравнением неразрывности, в силу того что область цилиндрическая, удобнее все-

го их рассматривать в цилиндрической системе координат. В безразмерной форме и с учетом осевой симметрии эти уравнения примут следующий вид:

$$\frac{\partial u_r}{\partial \tau}+\frac{\partial (u_r u_r)}{\partial r}+\frac{\partial (u_r u_z)}{\partial z}+\frac{u_r^2-u_\varphi^2}{r}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \tau}+\frac{\partial (u_\varphi u_r)}{\partial r}+\frac{\partial (u_\varphi u_z)}{\partial z}+\frac{2u_\varphi u_r}{r}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r^2}\right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau}+\frac{\partial (u_z u_r)}{\partial r}+\frac{\partial (u_z u_z)}{\partial z}+\frac{u_z u_r}{r}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{u_r}{r}=0, \quad (4)$$

где u_r, u_φ, u_z – составляющие вектора скорости, $\mathrm{Re}=u_0 r_2/\nu$ – число Рейнольдса, ν – кинематическая вязкость, u_0 – скорость потока во входном сечении, r_2 – радиус входного сечения. В силу небольших скоростей плотность газа считается постоянной.

Методы численного решения

Полученная система уравнений решается методом физического расщепления полей скорости и давления. После расщепления уравнений (1) – (4) задача разбивается на 2 этапа:

$$\frac{\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{u}^n}{\Delta\tau}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^*=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\boldsymbol{u}^*-\nabla p^n; \quad (5)$$

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^*}{\Delta\tau}=-\nabla(\delta p). \quad (6)$$

Умножая на градиент последнее уравнение и учитывая, что на (n+1)-м слое выполняется уравнение неразрывности, в результате получаем уравнение Пуассона для поправки к давлению:

$$\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}}{\Delta\tau}=\nabla^2(\delta p).$$

Исследуемая задача является стационарной, поэтому уравнение Пуассона можно представить в виде нестационарного уравнения:

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial\tau_1}=\nabla^2(\delta p)-\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}}{\Delta\tau}. \quad (7)$$

После того как стали известны поправка к давлению и значение вектора скорости на промежуточном слое, рассчитываются скорость и давление на (n+1)-м слое:

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}^*-\Delta\tau\cdot\nabla(\delta p); \quad (8)$$

$$p^{n+1}=p^n+\delta p. \quad (9)$$

Для получения единственного решения ставятся следующие граничные условия. На всех границах для поправки к давлению используется условие Неймана

[4]. На входе безразмерная осевая компонента скорости принимается равной единице**,** для радиальной составляющей вектора скорости ставится условие Неймана и окружная компонента скорости равна нулю. На оси выполняются условия симметрии. На выходе для всех искомых величин задается условие установления решения. На стенках выполняются условия прилипания, в результате чего образуются следующие критерии:

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1 r_2}{u_0};\ \Omega_2 = \frac{\omega_2 r_2}{u_0}.$$

Здесь ω_1, ω_2 – угловые скорости диска и стенки соответственно. Эти критерии являются обратными числами Россби.

Для дальнейшего решения используется обобщенный неявный метод переменных направлений [2, 3]. Суть метода состоит в расщеплении шага по времени с целью построения многомерной неявной схемы, в которой требуется обращение только к трехдиагональной матрице. Он обладает вторым порядком точности по времени. Для наглядности, продемонстрируем описанный метод на примере уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\triangle\theta^*}{\triangle t} - \frac{a}{2}\frac{\partial^2 \triangle\theta^*}{\partial x^2} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)^n + a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)^n,$$

$$\frac{\triangle\theta^{**}}{\triangle t} - \frac{a}{2}\frac{\partial^2 \triangle\theta^{**}}{\partial y^2} = \frac{\triangle\theta^*}{\triangle t},$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \triangle\theta^{**}.$$

Конвективные и диффузионные члены аппроксимировались с помощью экспоненциальной схемы, которая снимает ограничение на сеточное число Рейнольдса и имеет второй порядок точности относительно пространственных координат [4]. Решение задачи проводится на разнесенной сетке (рис. 2).

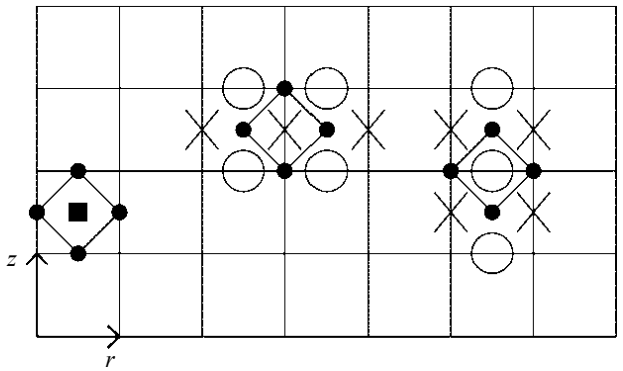


Рис. 2. Расчетная сетка и контрольные объемы для u_φ, p (слева), u_r (посередине) и u_z (справа), где × – u_r, ○ – u_z и ■ – u_φ, p
Fig. 2. Computational mesh and control volumes for u_φ and p (on the left), u_r (in the middle), and u_z (on the right) where ×, ○, and ■ indicate u_r, u_z, and u_φ, p, respectively

Для верификации полученного решения, система (1) – (4) также решалась в переменных «вихрь – функция тока». Вихрь и составляющие вектора скорости вводятся следующим образом:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}; \tag{10}$$

$$u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}; \tag{11}$$

$$\omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}. \tag{12}$$

Подставив (10) и (11) в (12), получим уравнение Пуассона для определения функции тока ψ:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \omega r + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{13}$$

Введем итерационный параметр τ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = -\omega r - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Перекрестным дифференцированием и последующим вычитанием уравнений (1) и (3), получим уравнение переноса вихря:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial u_r \omega}{\partial r} + \frac{\partial u_z \omega}{\partial z} + \frac{2u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right).$$

Разностный аналог граничных условий для вихря на стенке принимает вид формулы Тома [5]:

$$\omega_n = \frac{2(\psi_{n-1} - \psi_n)}{r \triangle n^2} + O(\triangle r),$$

где n – нормаль к поверхности стенки.

Так же как и в предыдущем случае, для получения единственного решения ставятся следующие граничные условия. На входе вихрь задается равным нулю, значение функции тока определяется посредством интегрирования из (11). На оси симметрии ставятся условия симметрии. На выходе ставится условия Неймана для всех переменных.

На первом этапе работы для расчета вихря в угловой точке использовался способ Ричардсона. Суть его заключается в том, что значения вихря в угловых точках зависят от направления расчета. Следовательно, в каждой угловой точке вихрю будет присвоено два различных значения, которые рассчитываются по формуле Тома. Однако, как показали результаты (рис. 3), вблизи угловой точки существует различие в решениях, полученных двумя различными способами.

В связи с чем, были проанализированы несколько схем расчета вихря в угловых точках [2]. Сравнение этих методов приведено на рис. 4, откуда видно, что результаты, полученные при использовании способа Кавагути, лучше согласуются с результатами, полученными в естественных переменных. По этой причине, именно этот способ взят за основу для дальнейших расчетов.

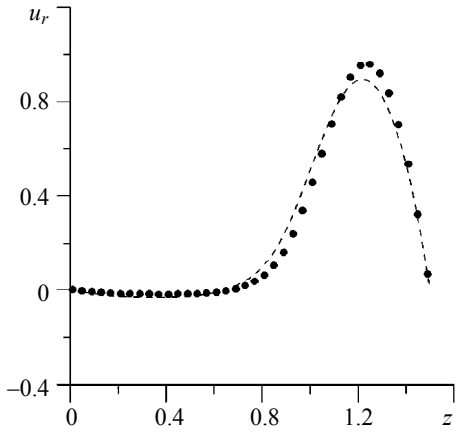


Рис. 3. Сравнение двух методов решения в сечении Д-Д' (- - «вихрь – функция тока», ● «скорость – давление»)
Fig. 3. Comparison of two solution methods in the Д–Д' section (- - and ● indicate the cases with «vortex – stream function» and «velocity – pressure», respectively)

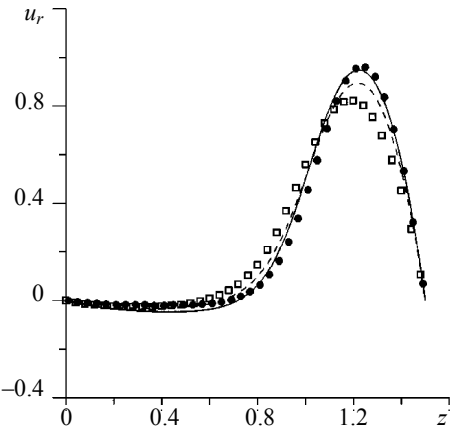


Рис. 4. Сравнение схем расчета вихря в угловой точке в сечении Д-Д' (- - способ Ричардсона, □ стенка, наклоненная под углом 45°, — способ Кавагути, ● «скорость – давление»)
Fig. 4. Comparison of the computational schemes of the vortex at the corner point in the Д–Д' section (- -, □, —, and ● indicate the Richardson method, the case with a wall inclined at an angle of 45°, Kawaguchi method, and the «velocity – pressure» case, respectively)

На рис. 5 – 8 показано влияние геометрических параметров на распределение функции тока и окружной составляющей. В частности, на рис. 5 видно, что поток прижимается к верхней стенке камеры, что, безусловно, препятствует более продуктивной работе сепаратора. Посредством простого изменения геометрии, например показанного на рис. 7, можно добиться равномерного распределения изолиний функции тока при тех же режимных параметрах. Также можно отметить, что картина изолиний угловой скорости стала более симметрична (рис. 8), чем была до изменения (рис. 6).

На рис. 9 и рис. 10 присутствуют циркуляционные зоны. Но если в первом случае, при вращающемся диске, они не препятствуют равномерности распределения функции тока, то во втором случае, когда диск не вращается, а стенка под выходным сечением закручивается, они существенно поджимают изолинии. Вследствие этого можно заключить, что изменяя режимные параметры, также достаточно просто можно добиться более равномерного распределения.

На рис. 11 и рис. 12 видно, что при отсутствии диска, за счет изменения режимных параметров, так же как и в предыдущих случаях, можно добиться равномерного распределения функции тока (рис. 12). Либо можно получить такую картину течения, при которой в выходной области будет образовываться завихренная область, препятствующая равномерному распределению поля вектора скорости на выходе из рабочей области (рис. 11).

На рис. 13–14 можно заметить, что в случае, когда скорость вращения диска меньше скорости вращения ротора, картина течения в непосредственной близости с системой вращающихся лопаток изменяется существенно.

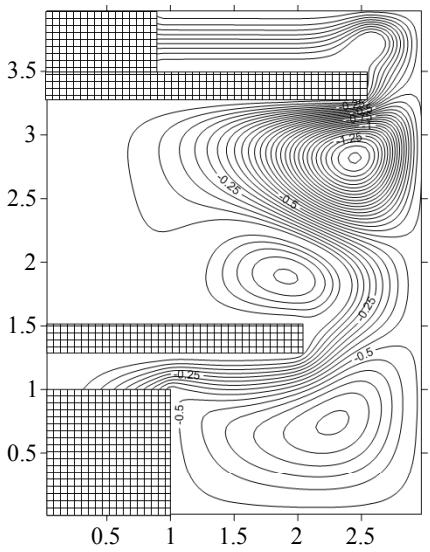


Рис. 5. Распределение функции тока в рассматриваемой области.
Re = 10, $\Omega_1 = 3$, $\Omega_2 = 5$
Fig. 5. Stream function distribution in the region considered at Re = 10, $\Omega_1 = 3$, and $\Omega_2 = 5$

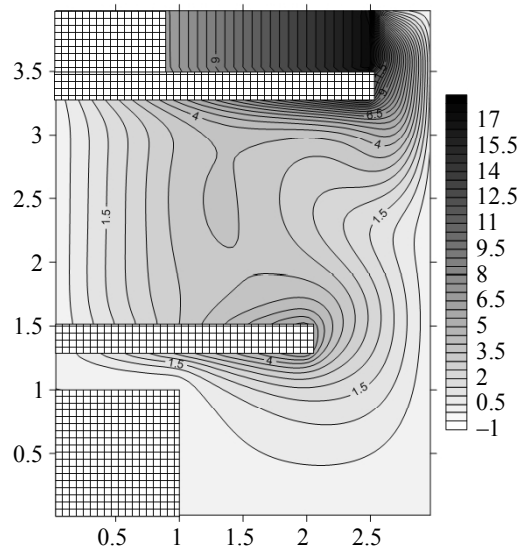


Рис. 6. Изолинии угловой скорости в рассматриваемой области.
Re = 10, $\Omega_1 = 3$, $\Omega_2 = 5$
Fig. 6. Isolines of the angular velocity in the region considered at Re = 10, $\Omega_1 = 3$, and $\Omega_2 = 5$

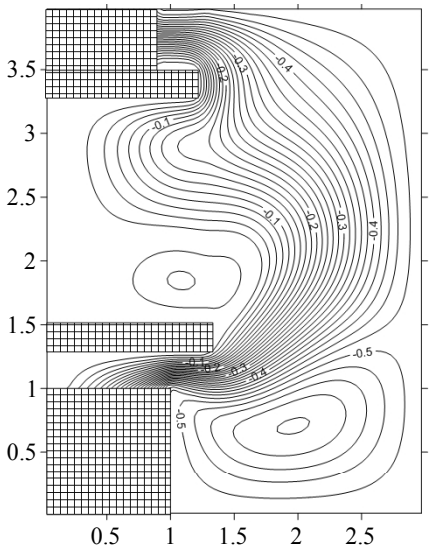


Рис. 7. Распределение функции тока в рассматриваемой области.
Re = 10, $\Omega_1 = 3$, $\Omega_2 = 5$
Fig. 7. Stream function distribution in the region considered at Re = 10, $\Omega_1 = 3$, and $\Omega_2 = 5$

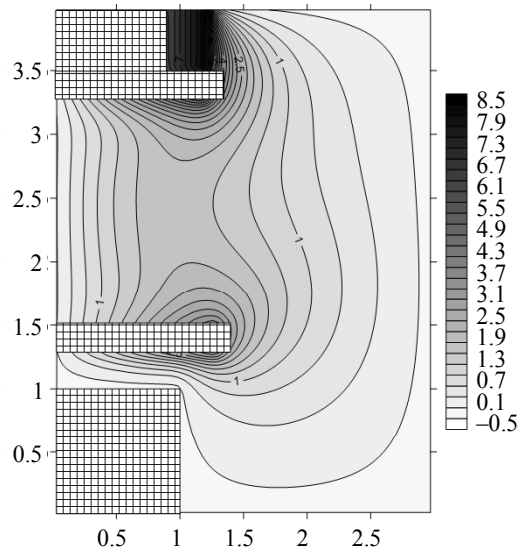


Рис. 8. Изолинии угловой скорости в рассматриваемой области.
Re = 10, $\Omega_1 = 3$, $\Omega_2 = 5$
Fig. 8. Isolines of the angular velocity in region considered at Re = 10, $\Omega_1 = 3$, and $\Omega_2 = 5$

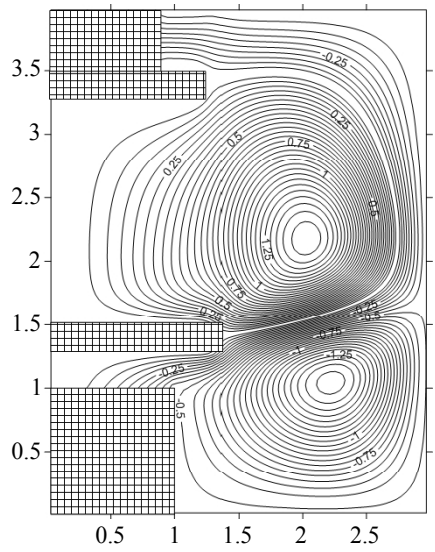


Рис. 9. Распределение функции тока в рассматриваемой области.
Re = 10, $\Omega_1 = 10$, $\Omega_2 = 0$
Fig. 9. Stream function distribution in the region considered at Re = 10, $\Omega_1 = 10$, and $\Omega_2 = 0$

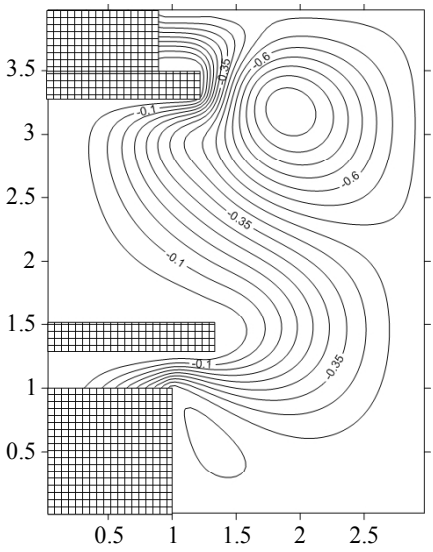


Рис. 10. Распределение функции тока в рассматриваемой области.
Re = 10, $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 10$
Fig. 10. Stream function distribution in the region considered at Re = 10, $\Omega_1 = 0$, and $\Omega_2 = 10$

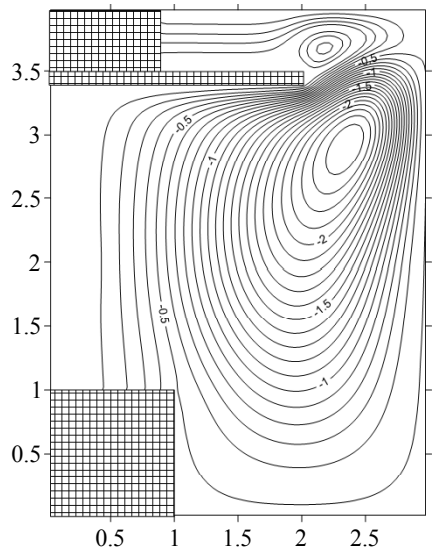


Рис. 11. Распределение функции тока в рассматриваемой области.
Re = 10, $\Omega_2 = 10$, $\Omega_3 = 5$
Fig. 11. Stream function distribution in the region considered at Re = 10, $\Omega_2 = 10$, and $\Omega_3 = 5$

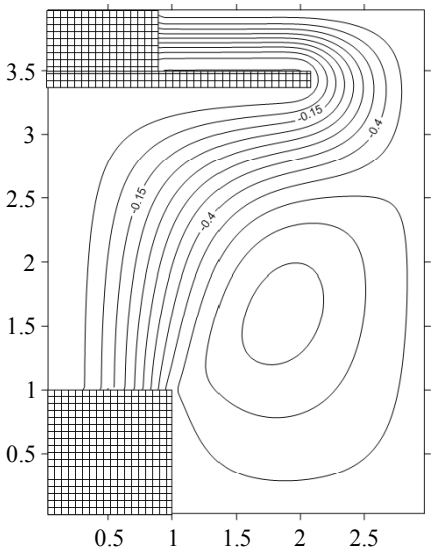


Рис. 12. Распределение функции тока в рассматриваемой области.
Re = 10, $\Omega_2 = 1$, $\Omega_3 = 1$
Fig. 12. Stream function distribution in the region considered at Re = 10, $\Omega_2 = 1$, and $\Omega_3 = 1$

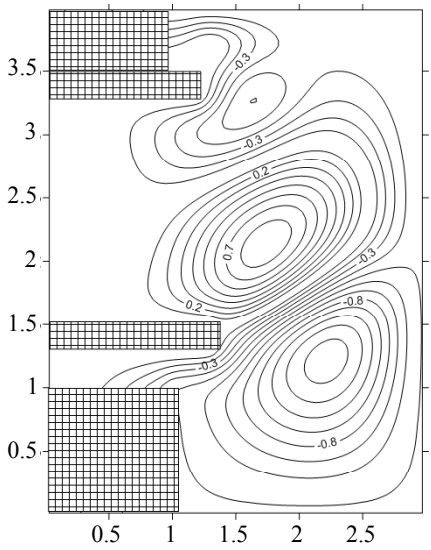


Рис. 13. Распределение функции тока в рассматриваемой области. $Re = 10$, $\Omega_1 = 8$, $\Omega_2 = 10$
Fig. 13. Stream function distribution in the region considered at $Re = 10$, $\Omega_1 = 8$, and $\Omega_2 = 10$

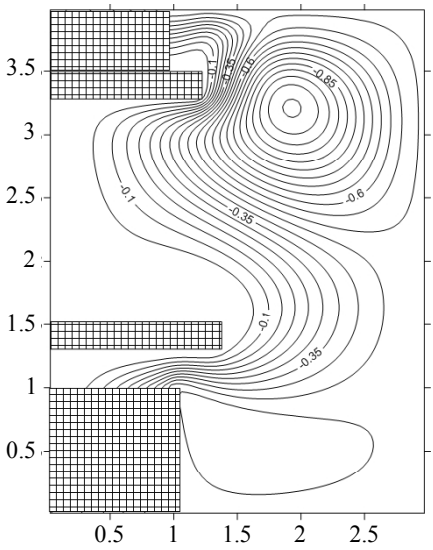


Рис. 14. Распределение функции тока в рассматриваемой области. $Re = 10$, $\Omega_1 = 2$, $\Omega_2 = 10$
Fig. 14. Stream function distribution in the region considered at $Re = 10$, $\Omega_1 = 2$, and $\Omega_2 = 10$

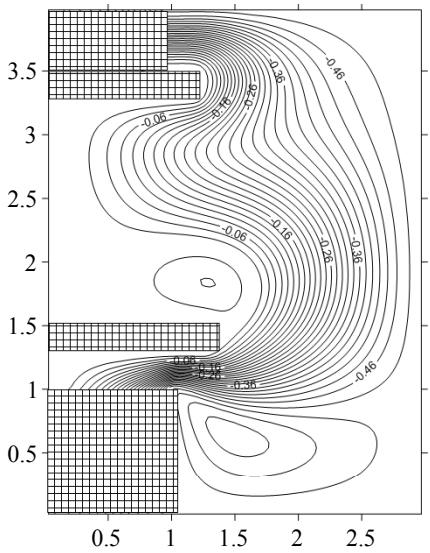


Рис. 15. Распределение функции тока в рассматриваемой области. $Re = 10$, $\Omega_1 = 2$, $\Omega_2 = 4$
Fig. 15. Stream function distribution in the region considered at $Re = 10$, $\Omega_1 = 2$, and $\Omega_2 = 4$

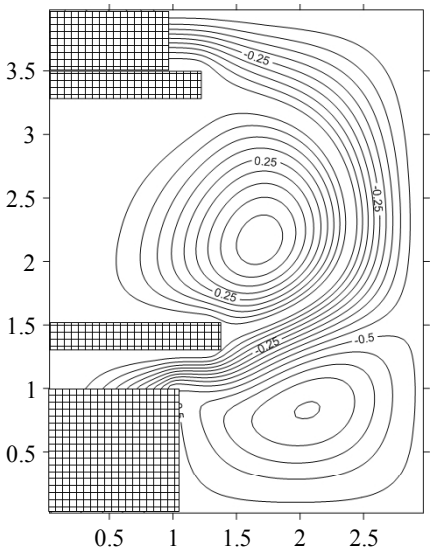


Рис. 16. Распределение функции тока в рассматриваемой области. $Re = 10$, $\Omega_1 = 4$, $\Omega_2 = 2$
Fig. 16. Stream function distribution in the region considered at $Re = 10$, $\Omega_1 = 4$, and $\Omega_2 = 2$

В противоположном случае, распределение изолиний у выходной области меняется незначительно. Например, как видно из рис. 13, при значениях закрутки диска $\Omega_1 = 8$ и ротора $\Omega_2 = 10$ образуются множественные циркуляционные зоны. Тем не менее в обоих случаях можно подобрать величины закрутки таким образом, чтобы на выходе имелось равномерное распределение профиля радиальной скорости. Один из вариантов такого подбора представлен на рис. 15 и рис. 16.

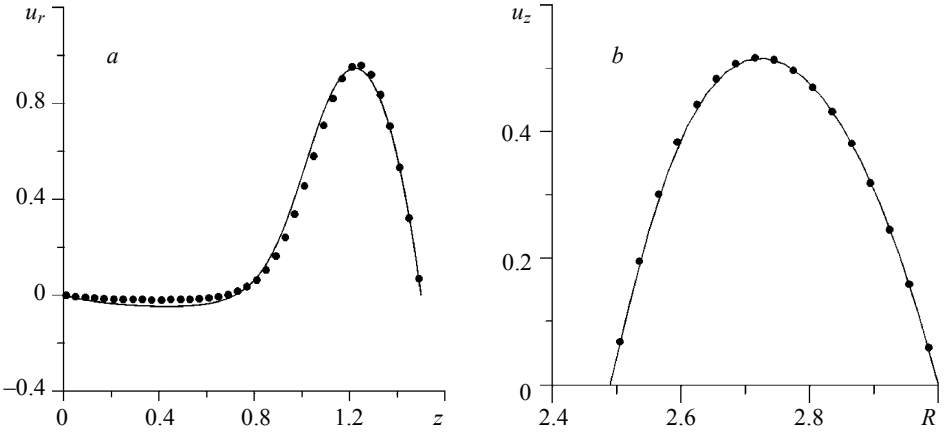


Рис. 17. Сравнения двух методов решения в сечениях Д–Д' (*a*) и Г-Г' (*b*) (— «вихрь – функция тока», ● «скорость – давление»)
Fig. 17. Comparison of two solution methods in the Д–Д' (*a*) and Г-Г' (*b*) sections (— and ● indicate the cases with «vortex – stream function» and «velocity – pressure», respectively)

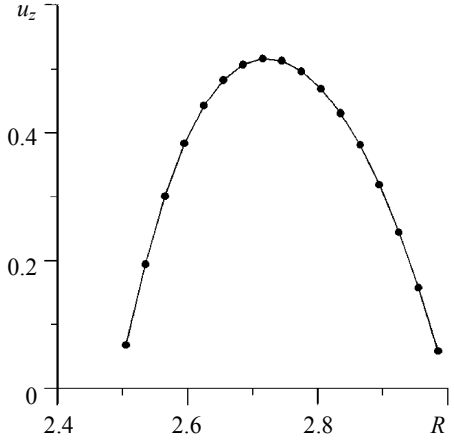


Рис. 18. Сравнение с известной аналитической формулой (— аналитическое решение, ● расчетные данные)
Fig. 18. Comparison with the known analytic formula (— and ● indicate the theoretical solution and computational data, respectively)

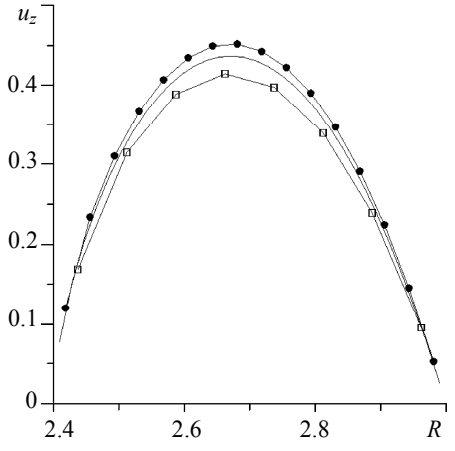


Рис. 19. Тестовое исследование на сеточную сходимость. (□ 41×51 ; ● 81×101 ; — 161×201)
Fig. 19. Test study for a grid convergence (□, ●, and — indicate the grid sizes 41×51, 81×101, and 161×201, respectively)

Достоверность полученных результатов определялась сравнением решений, полученных при помощи двух различных способов («функция тока – вихрь» и «скорость – давление») в разных сечениях (рис. 17) сравнением полученного численного решения с известной аналитической формулой (14) (рис. 18), а также тестовыми исследованиями на сеточную сходимость (рис. 19):

$$u_z = 2u_{\text{ср}} \frac{(r_{\text{к}}^2 - r^2)\ln\frac{r_4}{r_{\text{к}}} - (r_{\text{к}}^2 - r_4^2)\ln\frac{r}{r_{\text{к}}}}{r_k^2 - r_4^2 + (r_{\text{к}}^2 + r_4^2)\ln\frac{r_4}{r_{\text{к}}}}. \qquad (14)$$

Выводы

Разработана математическая модель для численного расчета аэродинамики закрученного потока в циркуляционном аппарате. Получены распределения полей вектора скорости и давления. Исходя из численных расчетов, вихрь в угловой точке рекомендуется рассчитывать при помощи метода Кавагути. Из анализа результатов можно заключить, что более равномерного профиля скорости в области ротора можно достичь путем сокращения длины лопаток ротора (рис. 8). В случаях, когда угловая скорость вращения ротора больше угловой скорости вращения диска, картина течения вблизи выходной области существенно изменяется. В противоположном случае, она практически остается неизменной. Однако равномерного профиля радиальной составляющей вектора скорости можно достичь как в первом, так и во втором случае и, основываясь на тех же численных результатах, можно заключить, что, как правило, это достигается при относительно небольшой разности скоростей вращения ротора и диска. Полученная математическая модель может быть использована как для модификации существующих пневматических аппаратов, так и для создания новых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Патент* РФ № 2522674 Способ газовой центробежной классификации и измельчения порошков / Зятиков П.Н., Росляк А.Т., Шваб А.В., Демиденко А.А., Романдин В.И., Брендаков В.Н. Опубл., Б.И. № 20, 20.07.14.\
2. *Роуч П.* Вычислительная гидромеханика. М.: Мир, 1977. 618 с.
3. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: пер. с англ. С.В. Сенина, Е.Ю. Шальмана; под ред. Г.Л. Подвидза. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.
4. *Патанкар С.В.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. под ред. В. Д. Виленского. М. : Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
5. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: пер. с англ. С.В. Сенина, Е.Ю. Шальмана; под ред. Г.Л. Подвидза. М.: Мир, 1990. Т. 2. 726 с.
6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа: учебник для вузов по специальности «Механика». М.: Наука, 1987. 840 с.

Статья поступила 21.10.2016 г.

Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) NUMERICAL STUDY OF SWIRLED FLOW AERODYNAMICS IN THE VORTEX CHAMBER OF THE COMBINED PNEUMATIC MACHINE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98

DOI 10.17223/19988621/47/9

This paper presents a numerical simulation of the aerodynamics of a swirled flow in a vortex chamber. A particular feature of this vortex chamber is the presence of rotating blades located at the top of the outlet part for the carrying agent. In addition, the dynamics of the carrying agent in the abovementioned vortex chamber with a rotating disk located in the middle part and designed to increase the circumferential velocity of the carrying agent has been investigated. The numerical investigation showed that it was possible to get a uniform profile along the height of the radial velocity at the rotor inlet. This fact is a necessary condition for the effective operation of the separator. The reliability of numerical simulation results has been confirmed by both the test study, the comparison with the well-known analytical dependence, and the comparison of the results obtained using «velocity–pressure» and «vortex-stream function» variables.

Keywords: vortex chamber, velocity, numerical simulation, pressure, aerodynamics, vortex, swirled flow, stream function, corner point.

TURUBAEV Roman Rinatovich (Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: roma_94_ktl@mail.ru

SHVAB Aleksandr Veniaminovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: avshvab@inbox.ru

REFERENCES

1. Zyatikov P.N., Roslyak A.T., Shvab A.V., Demidenko A.A., Romandin V.I., Brendakov V.N. *Sposob gazovoy tsentrobezhnoy klassifikatsii i izmel'cheniya poroshkov* [Gas Centrifugal Classification and Grinding of the Powders]. Patent of RU 2522674, 2014.
2. Rouch P. (1977) *Vychislitel'naya gidromekhanika* [Computational Fluid Dynamics]. Moscow: Mir.
3. Anderson D., Tannehill J., Pletcher R. (1990) *Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen* [Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer]. Vol. 1. Moscow: Mir.
4. Patankar S.V. (1948) *Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical Techniques for Solving Heat Transfer and Fluid Dynamics Problems]. Moscow: Energoatomizdat.
5. Anderson D., Tannehill J., Pletcher R. (1990) *Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen. Tom 2.* [Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer]. Vol. 2. Moscow: Mir.
6. Loytsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza : uchebnik dlya vuzov po spetsial'nosti "Mekhanika"* [Fluid and gas mechanics: tutorial for high schools specialty "Mechanics"]. Moscow: Nauka.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета.

ГОЦЕВ Дмитрий Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: rbgotsev@mail.ru

ГУБИН Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета, старший преподаватель кафедры математического анализа Томского государственного университета. E-mail: vovantus@sibmail.com

ДУЛЬНЕВ Андрей Иванович – доктор технических наук, начальник лаборатории ФГУП «Крыловский государственный научный центр»

ЖАМБАА Сонинбаяр – аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета, преподаватель кафедры прикладной математики Монгольского национального университета. E-mail: json-inbayar@yahoo.com

КАСАТКИНА Татьяна Васильевна – кандидат физико-математических наук, заведующая отделом аспирантуры и докторантуры Томского государственного университета. E-mail: tkasatkina@mail.tsu.ru

КОРОЛЕВ Станислав Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическое обеспечение информационных систем» Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. E-mail: stkj@mail.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

ЛИПАНОВ Алексей Матвеевич – доктор технических наук, профессор, академик Российской академии наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук, заведующий кафедрой «Механика и моделирование» Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. E-mail: AML35@yandex.ru

МАРВИН Сергей Владимирович – кандидат физико-математических наук, докторант; доцент департамента информационных технологий и автоматики Института радиоэлектроники и информационных технологий – РтФ, Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н.Ельцина. E-mail: s.v.marvin@yandex.ru

МИНЬКОВ Леонид Леонидович– доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

НЕКЛЮДОВА Екатерина Алексеевна – инженер, ФГУП «Крыловский государственный научный центр», E-mail: nekludik@mail.ru

ПЕРУНОВ Николай Сергеевич – магистрант 2 курса, Воронежский государственный университет. E-mail: perunovnikolays@gmail.com

РУСЯК Иван Григорьевич – доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии ракетных и артиллерийских наук, заведующий кафедрой «Математическое обеспечение информационных систем» Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. E-mail: primat@istu.ru

СЕЕЛЕВ Игорь Николаевич – кандидат технических наук, главный инженер Изотопно-химического завода АО «Горно-химический комбинат. E-mail: igor_seelev@mail.ru

ТУРУБАЕВ Роман Ринатович – студент Томского государственного университета. E-mail: roma_94_ktl@mail.ru

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики Томского государственного университета. E-mail: avshvab@inbox.ru

ШРАГЕР Эрнст Рафаилович – доктор физико-математических наук, декан физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sher@ftf.tsu.ru.

ЩЁГОЛЕВА Анастасия Андреевна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: nschegoleva@sibmail.com

ЩЕРБАКОВ Николай Романович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии Томского государственного университета. E-mail: nrs@math.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 17.05.2017. Выпуск в свет 28.06.2017.
Формат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 8.06. Уч.-изд. л. 9.03. Тираж 250 экз. Заказ № 16. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 2488.
http://publish.tsu.ru E-mail: rio.tsu@mail.ru