

# ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

## МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2017**

**№ 49**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### **Учредитель:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

### **EDITORIAL COUNCIL**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

### **EDITORIAL BOARD**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Igor A. Aleksandrov, Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimato, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

**H-index:** <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

|                                                                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Борисова Я.В., Колесников И.А., Копанев С.А.</b> О малых вариационных формулах .....                                                                                                | 5  |
| <b>Гулиев Г.Ф., Гасымов Ю.С., Тагиев Х.Т., Гусейнова Т.М.</b> Об обратной задаче нахождения правой части волнового уравнения с нелокальным условием .....                              | 16 |
| <b>Мансимов К.Б., Сулейманова В.А.</b> Необходимые условия оптимальности в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса – Дарбу .....                                | 26 |
| <b>Повзун М.А., Пчелинцев Е.А.</b> Оценивание параметров регрессии с зависимыми шумами .....                                                                                           | 43 |
| <b>Рахмелевич И.В.</b> Двумерное неавтономное гиперболическое уравнение второго порядка со степенными нелинейностями .....                                                             | 52 |
| <b>Семёнова А.А., Старченко А.В.</b> Разностная схема для нестационарного уравнения переноса, построенная с использованием локальных весовых интерполяционных кубических сплайнов..... | 61 |

### МЕХАНИКА

|                                                                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Албагачиев А.Ю., Моисеенко А.М., Якобовская И.М., Зернов Е.В.</b> Напряженно-деформированное состояние тонкой квадратной заготовки при ее осадке шероховатыми плитами .....                       | 75  |
| <b>Бессонова М.П., Пономарева М.А., Якутенок В.А.</b> Расчет течения степенной жидкости в одношнековом экструдере .....                                                                              | 81  |
| <b>Миньков Л.Л., Гольдина Н.В.</b> Особенности численного решения задачи о распространении ударной волны по газозвеси с мелкими частицами.....                                                       | 94  |
| <b>Халиманович В.И., Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А.</b> Использование нелинейной теории упругости и метода подобия для оценки деформационных свойств металлотрикотажных сетеполотен ..... | 105 |
| <b>Шваб А.В., Гичёва Н.И.</b> Моделирование свободной и вынужденной конвекции в вихревой камере химического реактора.....                                                                            | 114 |
| <b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> .....                                                                                                                                                                     | 124 |

## CONTENTS

### MATHEMATICS

|                                                                                                                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Borisova Ya.V., Kolesnikov I.A., Kopanov S.A.</b> On small variation formulas.....                                                                                      | 5  |
| <b>Guliyev H.F., Gasimov Y.S., Tagiyev H.T., Huseynova T.M.</b> On the inverse problem of finding the right-hand side of wave equation with nonlocal condition .....       | 16 |
| <b>Mansimov K.B., Suleymanova V.A.</b> Necessary optimality conditions in the one boundary control problem for Qoursat – Darboux systems .....                             | 26 |
| <b>Povzun M.A., Pchelintsev E.A.</b> Estimating parameters in a regression model with dependent noises.....                                                                | 43 |
| <b>Rakhmelevich I.V.</b> Two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation of the second order with power-law nonlinearities.....                                         | 52 |
| <b>Semyonova A.A., Starchenko A.V.</b> The finite-difference scheme for the unsteady convection-diffusion equation based on weighted local cubic spline interpolation..... | 61 |

### MECHANICS

|                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Yakobovskaya I.M., Zernov E.V.</b> A stress-strain state of the thin square workpiece during upsetting by the rough plates.....                                             | 75  |
| <b>Bessonova M.P., Ponomareva M.A., Yakutenok V.A.</b> Calculation of a power-law fluid flow in a single-screw extruder.....                                                                                      | 81  |
| <b>Min'kov L.L., Gol'dina N.V.</b> Peculiarities of a numerical solution of the problem of shock wave propagation over a gas suspension with small particles .....                                                | 94  |
| <b>Khalimanovich V.I., Kudryavin L.A., Belyaev O.F., Zavaruev V.A.</b> Application of the nonline-ar theory of elasticity and similarity method for assessment of the metallic jersey deformation properties..... | 105 |
| <b>Shvab A.V., Gicheva N.I.</b> Modeling of the natural and forced convection in a vortex chamber of the chemical reactor.....                                                                                    | 114 |
| <b>BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS</b> .....                                                                                                                                                                  | 124 |

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

DOI 10.17223/19988621/49/1

**Я.В. Борисова, И.А. Колесников, С.А. Копанев****О МАЛЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛАХ**

Одним из основных методов решения экстремальных задач является вариационный метод, главный инструмент которого есть вариационные формулы. Некоторые вариационные формулы были получены с помощью семейства отображений из единичного круга на области, лежащие в единичном круге. Предложен достаточно общий подход получения так называемых малых вариаций. Получен ряд новых малых вариаций. Также на простом примере проиллюстрирован метод П.П. Куфарева нахождения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца.

**Ключевые слова:** голоморфное однолистное отображение, вариационная формула, параметры в интеграле Кристоффеля – Шварца, метод Куфарева.

Пусть  $S$  есть множество всех голоморфных однолистных в круге  $E = E_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  отображений  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $w = f(z)$ , нормированных условиями  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ .

Какова бы ни была односвязная область  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $0 \in D$ , с конформным радиусом относительно  $w = 0$  равным единице, в классе  $S$  существует единственное отображение  $f$ , такое, что  $f(E) = D$ .

Одним из основных методов решения экстремальных задач в классе  $S$  является метод внутренних вариаций [1, 2]. В свою очередь, понятие вариационной формулы является базовым инструментом метода внутренних вариаций.

Отображение  $f^* : E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $w = f^*(z, \varepsilon)$  принято называть вариационной формулой в классе  $S$  для отображения  $f$ ,  $f \in S$ , если оно удовлетворяет условиям:

1.  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  сужение  $f^*|_{E \times \{\varepsilon\}} \in S$  (Для каждого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  отображение  $f^*(z, \varepsilon)$  как отображение от  $z$  принадлежит классу  $S$ );
2.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f^*(z, \varepsilon) = f(z)$  равномерно внутри  $E_z$ ;
3. Существует правосторонняя производная по  $\varepsilon$  в точке  $\varepsilon = 0$ , равномерная относительно  $z$  внутри  $E_z$ .

Задание отображения  $f^* : E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $w = f^*(z, \varepsilon)$  равносильно заданию семейства отображений  $f_\varepsilon : E \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $w = f_\varepsilon(z) = f^*(z, \varepsilon)$  от параметра  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ .

При работе с вариационной формулой ее, как правило, раскладывают по формуле Тейлора по параметру  $\varepsilon$  в полукрестности точки  $\varepsilon = 0$  с нужной степенью точности.

Классическая теорема Г.М. Голузина [1], обобщающая результат Шиффера, позволяет получать вариационные формулы достаточно общего вида (называемые формулами типа Голузина – Шиффера). П.П. Куфарев [3] предложил другой подход к получению таких вариационных формул. Многие математики занимались и занимаются совершенствованием метода внутренних вариаций и поиском приемов получения новых вариационных формул.

В данной работе предлагается достаточно общий подход к получению так называемых малых вариаций с помощью вспомогательного семейства голоморфных однолистных отображений из круга в круг.

**Теорема 1.** Пусть  $g : E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon)$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  сужение  $g|_{E \times \{\varepsilon\}}$  есть голоморфное однолистное отображение;
- 2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(z, \varepsilon) = z$ , равномерно внутри  $E_z$ ;
- 3)  $g(z, \varepsilon)$  и  $g'_z(z, \varepsilon)$  дифференцируемы по  $\varepsilon$  в нуле справа равномерно внутри  $E_z$ .

Тогда в классе  $S$  для отображения  $f \in S$  имеют место вариационные формулы

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)g'_\varepsilon(z, 0) - f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0, 0) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (1)$$

где  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  равномерно внутри  $E_z$ ;

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0, 0)} + g'_\varepsilon(z, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (2)$$

где  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  равномерно внутри  $E_z$ ;

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P_3(z) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}), \quad (3)$$

где

$$P_3(z) = f'(z)(g'_\varepsilon(z, 0) + z^2 \bar{u} - u + itz) - f(z)(f''(0)(g'_\varepsilon(0, 0) - u) + g''_{z\varepsilon}(0, 0) + it) - g'_\varepsilon(0, 0) + u,$$

$\hat{\varepsilon} = \min\left(\varepsilon_0, \frac{1}{|u|}\right)$ ,  $u, t$  – константы,  $u \in \mathbb{C}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  равномерно внутри  $E_z$ ;

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0, 0)} + g'_\varepsilon(z, 0) - g'_\varepsilon(0, 0) + itz) - f(z)(g''_{z\varepsilon}(0, 0) + it)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}), \quad (4)$$

где  $t$  – константа,  $t \in \mathbb{R}$ , и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  равномерно внутри  $E_z$ .

**Доказательство.** Из условия  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(z, \varepsilon) = z$  равномерно внутри  $E_z$  по теореме Вейерштрасса следует, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g'_z(z, \varepsilon) = 1$  равномерно внутри  $E_z$ . Отсюда следует равенство  $g'_z(0, 0) = 1$ .

Пусть  $g(z, \varepsilon) = z + \varepsilon g'_\varepsilon(z, 0) + o(z, \varepsilon)$ . Тогда  $g'_z(z, \varepsilon) = 1 + \varepsilon g''_{z\varepsilon}(z, 0) + o(z, \varepsilon)$ .

Докажем первую вариационную формулу.

Если  $f \in S$ , то  $\frac{f(g(z, \varepsilon)) - f(g(0, \varepsilon))}{f'(g(0, \varepsilon))g'_z(0, \varepsilon)} = f_1(z, \varepsilon) \in S$ .

Записывая  $f_1(z, \varepsilon)$  относительно  $\varepsilon$  по формуле Тейлора, получаем формулу (1).

Докажем вторую вариационную формулу.

Если  $f \in S$ , то  $\frac{1 - |g(0, \varepsilon)|^2}{g'_z(0, \varepsilon)} f\left(\frac{g(z, \varepsilon) - g(0, \varepsilon)}{1 - \overline{g(0, \varepsilon)}g(z, \varepsilon)}\right) = f_2(z, \varepsilon) \in S$ .

Формула (2) теперь следует из разложения  $f_2(z, \varepsilon)$  относительно  $\varepsilon$  по формуле Тейлора.

Докажем третью и четвертую вариационные формулы.

Отображение  $\eta(z, \varepsilon) = e^{i\varepsilon} \frac{z - i\varepsilon}{1 - z\bar{i}\varepsilon}$  при  $|i\varepsilon| < 1$  переводит единичный круг в единичный круг. Заметив, что отображение  $\psi(z, \varepsilon) = g(\eta(z, \varepsilon), \varepsilon)$  удовлетворяет условиям теоремы, и используя формулу (1), получаем формулу (3), а используя формулу (2), получаем формулу (4).

При дополнительных условиях на отображение  $g: E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon)$  можно получить разложение вариационных формул  $f_k(z, \varepsilon)$ ,  $k = 1, 2$ , по  $\varepsilon$  с нужной степенью точности.

**Теорема 2.** Пусть  $g: E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  сужение  $g|_{E \times \{\varepsilon\}}$  есть голоморфное однолистное отображение;
- 2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(z, \varepsilon) = z$  равномерно внутри  $E_z$ ;
- 3)  $g(z, \varepsilon)$  и  $g'_z(z, \varepsilon)$  дважды дифференцируемы по  $\varepsilon$  в нуле справа равномерно внутри  $E_z$ .

Тогда в классе  $S$  для отображения  $f \in S$  имеют место вариационные формулы:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)g'_\varepsilon(z, 0) - f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0, 0) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2}Q_1(z) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где

$$Q_1(z) = f''(z)g_\varepsilon'^2(z, 0) + f'(z)(g''_{\varepsilon\varepsilon}(z, 0) - 2f''(0)g'_\varepsilon(z, 0)g'_\varepsilon(0, 0) - 2g'_\varepsilon(z, 0)g''_{z\varepsilon}(0, 0)) - \\ - f(z)(f'''(0)g_\varepsilon'^2(0, 0) - 2f''(0)g_\varepsilon'^2(0, 0) + f''(0)g''_{\varepsilon\varepsilon}(0, 0) - 2f''(0)g''_{z\varepsilon}(0, 0)g'_\varepsilon(0, 0) + \\ + g'''_{\varepsilon\varepsilon}(0, 0) - 2g''_{z\varepsilon}(0, 0)) + f''(0)g_\varepsilon'^2(0, 0) + g''_{z\varepsilon}(0, 0)g'_\varepsilon(0, 0) - g''_{\varepsilon\varepsilon}(0, 0)$$

и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} = 0$  равномерно внутри  $E_z$ ;

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) \left( z^2 \overline{g'_\varepsilon(0,0)} + g'_\varepsilon(z,0) - g'_\varepsilon(0,0) \right) - f(z) g''_{z\varepsilon}(0,0) \right) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} Q_2(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где

$$Q_2(z) = f''(z) \left( z^2 \overline{g'_\varepsilon(0,0)} + g'_\varepsilon(z,0) - g'_\varepsilon(0,0) \right)^2 + \\ + f'(z) \left( 2z^3 \overline{g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0)} + z^2 \overline{g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0)} - 2z^2 \overline{g''_{z\varepsilon}(0,0)} \overline{g'_\varepsilon(0,0)} + 4z g'_\varepsilon(z,0) \overline{g'_\varepsilon(0,0)} - \right. \\ \left. - 2z g'_\varepsilon(0,0) \overline{g'_\varepsilon(0,0)} + 2 g''_{z\varepsilon}(0,0) g'_\varepsilon(0,0) - 2 g''_{z\varepsilon}(0,0) g'_\varepsilon(z,0) + g''_{\varepsilon\varepsilon}(z,0) - g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0) \right) + \\ + f(z) \left( 2 g''_{z\varepsilon}{}^2(0,0) - 2 g'_\varepsilon(0,0) \overline{g'_\varepsilon(0,0)} - g'''_{z\varepsilon\varepsilon}(0,0) \right)$$

и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} = 0$  равномерно внутри  $E_z$ .

Заметим, если отображение  $g : E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon)$  удовлетворяет условию  $g(0, \varepsilon) = 0$ , то  $f_1(z, \varepsilon) = f_2(z, \varepsilon)$ .

Выбирая отображение  $w = g(z, \varepsilon)$  в конкретном виде, получим малые вариации, как известные, так и новые.

**1.** Пусть  $g : E_z \times [0, 1) \rightarrow E_\zeta$ ,  $g(z, \varepsilon) = \varepsilon e^{i\beta} + (1 - \varepsilon) e^{i\varepsilon} z$ .

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе  $S$  имеют место вариационные формулы  $\forall f \in S$  следующего вида:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) \left( e^{i\beta} - (1 - i)z \right) - f(z) f''(0) e^{i\beta} + f(z) (1 - i) - e^{i\beta} \right) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q_1(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где

$$Q_1(z) = f''(z) \left( e^{i\beta} - z(1 - i) \right)^2 + f'(z) \left( -2 f''(0) e^{i\beta} \left( e^{i\beta} - z(1 - i) \right) + 2 \left( e^{i\beta} - z(1 - i) \right) - z(1 - 2i) \right) - \\ - f(z) \left( f'''(0) e^{2i\beta} - 2 f''^2(0) e^{2i\beta} + 2 f''(0) e^{i\beta} (1 - i) - 1 + 2i \right) + f''(0) e^{2i\beta} - (1 - i) e^{i\beta};$$

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( z f'(z) \left( e^{-i\beta} z - (1 - i) \right) + f(z) (1 - i) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q_2(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где

$$Q_2(z) = z^2 f''(z) \left( z e^{-i\beta} - (1 - i) \right)^2 + \\ + f'(z) \left( 2z^3 e^{-2i\beta} + z^2 (1 - i) \left( 2e^{i\beta} - 4e^{-i\beta} \right) - z(1 + 2i) \right) - f(z) (1 - 2i);$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) \left( z^2 \bar{u} - z + z(1 + t)i + e^{i\beta} - u \right) - \right. \\ \left. - f(z) \left( f''(0) \left( e^{i\beta} - u \right) - 1 + (1 + t)i \right) - e^{i\beta} + u \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) \left( z^2 e^{i\beta} - z + z(1 + t)i \right) + f(z) (1 - (1 + t)i) \right) + o(z, \varepsilon), \\ \varepsilon \in [0, 1).$$

Отметим частные случаи этой формулы.

**1а.** Пусть  $g : E_z \times [0, 1) \rightarrow E_\zeta$ ,  $g(z, \varepsilon) = \varepsilon e^{i\beta} + (1 - \varepsilon) z$ .

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.



Следовательно, в классе  $S$  имеют место вариационные формулы  $\forall f \in S$  следующего вида:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) (e^{i\beta} - z) - f(z) f''(0) e^{i\beta} + f(z) - e^{i\beta} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q_1(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где 
$$Q_1(z) = f''(z) (e^{i\beta} - z)^2 + f'(z) (-2f''(0) e^{i\beta} (e^{i\beta} - z) + 2(e^{i\beta} - z)) - f(z) (f'''(0) e^{2i\beta} - 2f''^2(0) e^{2i\beta} + 2f''(0) e^{i\beta} - 2) + f''(0) e^{2i\beta} - e^{i\beta};$$

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) (ze^{-i\beta} - 1) + f(z) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q_2(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где

$$Q_2(z) = z^2 f''(z) (ze^{-i\beta} - 1)^2 + f'(z) (2z^3 e^{-2i\beta} + z^2 (2e^{i\beta} - 4e^{-i\beta}) + 2e^{i\beta});$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) (z^2 \bar{u} - z + itz + e^{i\beta} - z) - f(z) (f''(0) (e^{i\beta} - u) - 1 + it) - e^{i\beta} + u \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) (z^2 e^{-i\beta} - z + it) + f(z) (1 - it) \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1).$$

**16.** Пусть  $g: E_z \times [0, 1) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon) = (1 - \varepsilon)e^{i\varepsilon} z$ .

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе  $S$  имеют место вариационные формулы  $\forall f \in S$  следующего вида:

$$f_1(z, \varepsilon) = f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(1 - i)(f(z) - zf'(z)) + \varepsilon^2 \left( \left( \frac{1}{2} - i \right) (f(z) - zf'(z)) - iz^2 f''(z) \right) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) (z^2 \bar{u} - z + (1 + t)iz - u) + f(z) (uf''(0) + 1 - (1 + t)i) + u \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) - \varepsilon(1 - (1 + t)i)(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1).$$

**1в.** Пусть  $g: E_z \times [0, 1) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon) = (1 - \varepsilon)z$ . Тогда вариационные формулы примут вид:

$$f_1(z, \varepsilon) = f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f(z) - zf'(z)) + \varepsilon^2 \left( f(z) - zf'(z) + \frac{1}{2} z^2 f''(z) \right) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) (z^2 u - z + itz - u) + f(z) (uf''(0) + 1 - it) + u \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) - \varepsilon(1 - it)(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon).$$

1г. Пусть  $g : E_z \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon) = e^{i\varepsilon} z$ . Тогда вариационные формулы примут вид:

$$f_1(z, \varepsilon) = f_2(z, \varepsilon) = f(z) + i\varepsilon(zf'(z) - f(z)) - \frac{\varepsilon^2}{2}(z^2 f''(z) - zf'(z) + f(z)) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0);$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \bar{u} + zi(t+1) - u) + f(z)(uf''(0) - i(t+1)) + u) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon i(t+1)(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

2. Пусть  $g : E_z \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$ ,

$$w = g(z, \varepsilon) = \frac{z - \varepsilon e^{i\beta}}{1 - \varepsilon e^{-i\beta} z} = z + \varepsilon(z^2 e^{-i\beta} - e^{i\beta}) + \varepsilon^2(z^3 e^{-2i\beta} - z) + \dots, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе  $S$  имеют место вариационные формулы  $\forall f \in S$  следующего вида:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(e^{-i\beta} z^2 - e^{i\beta}) + f(z)f''(0)e^{i\beta} + e^{i\beta}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q_1(z) + o(z, \varepsilon^2),$$

$$\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

где

$$Q_1(z) = f''(z)(e^{i\beta} - e^{-i\beta} z^2)^2 + 2f'(z)(z - e^{-2i\beta} z^3 - f''(0)(e^{2i\beta} - z^2)) - f(z)(f'''(0)e^{2i\beta} - 2f''^2(0)e^{2i\beta} + 2) + f''(0)e^{i\beta};$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(\bar{v}z^2 + itz - v) + f(z)(vf''(0) - it) + v) + o(z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \text{ где } v = u + e^{i\beta};$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon i(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

3. Пусть  $g : E \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E$ ,  $w = g(z, \varepsilon) = e^{i\beta} \frac{\ln(e^{i\varepsilon} - e^{-i\beta} z) - \ln(1 - e^{-i\beta} z) - i\varepsilon}{\ln(e^{i\varepsilon} - e^{-i\beta} z) - \ln(1 - e^{-i\beta} z)}$ , где

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и однозначная ветвь логарифма выбрана условием  $\ln 1 = 0$ .

Это голоморфное и однолистное отображение из круга в круг  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Образом  $E$  относительно этого отображения есть круг  $E = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$  с выбранным кругом  $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - (1-r)e^{i\beta}| \leq r\}$ , где  $r = \frac{2\varepsilon}{\pi + 2\varepsilon}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Рассматриваемое отображение имеет следующее разложение по  $\varepsilon$ :

$$g(z, \varepsilon) = z - \frac{i}{2}z\varepsilon + \frac{z(e^{-i\beta}z - 2)}{12(1 - e^{-i\beta}z)}\varepsilon^2 + o(z, \varepsilon^2), \quad g'_z(0, \varepsilon) = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^2 + o(z, \varepsilon^2).$$

Теперь по теоремам 1 и 2 получаем в классе  $S$  вариационные формулы  $\forall f \in S$  следующего вида:

$$\begin{aligned}
f_1(z, \varepsilon) &= f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \frac{i}{2} (f(z) - zf'(z)) + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( -\frac{z^2}{4} f''(z) + \frac{z(1-2e^{-i\beta}z)}{6(1-e^{-i\beta}z)} f'(z) - \frac{1}{6} f(z) \right) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0); \\
f_3(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon (f'(z)(z^2\bar{u} - zi(1-t) - u) + f(z)(uf''(0) + i(1-t)) + u) + \\
&+ o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0); \\
f_4(z, \varepsilon) &= f(z) - \varepsilon i(1-t)(f'(z)z - f(z)) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).
\end{aligned}$$

4. Этот пункт начнем с нахождения, используя метод П.П. Куфарева [3] определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца, отображения  $w = w(\chi, l)$  из верхней полуплоскости  $\Pi^+ = \{\chi \in \mathbb{C} : \text{Im } \chi > 0\}$  на верхнюю полуплоскость с прямолинейным разрезом длины  $l$ , выходящим из точки ноль под углом  $(1-\alpha)\pi$ , к положительной части вещественной оси. Пусть  $w(\infty) = \infty$ . Выбрав стандартную параметризацию разреза для отображения из полуплоскости, будем иметь семейство отображений  $w = w(\chi, \tau)$ , удовлетворяющее уравнению Левнера для полуплоскости

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{\chi - \lambda(\tau)} \frac{\partial w}{\partial \chi} = 0, \quad \tau \in [0, T],$$

с начальным условием  $w(\chi, 0) = \chi$ , где  $\lambda(\tau)$  – прообраз конца разреза.

Обозначим через  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  прообразы вершин с углами  $\alpha\pi$ ,  $(1-\alpha)\pi$  соответственно,  $a(\tau) < \lambda(\tau) < b(\tau)$ , при  $0 < \tau \leq T$ . Согласно теореме Кристоффеля – Шварца, отображение  $w = w(\chi, \tau)$  можно представить в виде

$$w(\chi, \tau) = c(\tau) \int_{a(\tau)}^{\chi} (z - \lambda(\tau))(z - a(\tau))^{\alpha-1} (z - b(\tau))^{-\alpha} dz.$$

В книге [4, гл.6, §3] записан результат П.П. Куфарева для отображений из верхней полуплоскости на многоугольник. Тогда в нашем случае параметры  $a(\tau) = a(x^2) = a_1(x)$ ,  $b(\tau) = b(x^2) = b_1(x)$ ,  $\lambda(\tau) = \lambda(x^2) = \lambda_1(x)$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{da_1(x)}{dx} = \frac{2x}{a_1(x) - \lambda_1(x)}, \\ \frac{db_1(x)}{dx} = \frac{2x}{b_1(x) - \lambda_1(x)}, \\ \frac{d\lambda_1(x)}{dx} = (1-\alpha) \frac{da_1(x)}{dx} + \alpha \frac{db_1(x)}{dx}, \end{cases}$$

с начальным условием  $a_1(0) = b_1(0) = \lambda_1(0) = 0$ .

Решая систему методом рядов, находим

$$a_1(x) = -x\sqrt{2\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad b_1(x) = x\sqrt{2\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad \lambda_1(x) = x\sqrt{2}\frac{2\alpha-1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}.$$

Перейдя в подынтегральном выражении к параметру  $x$ , подставив найденные параметры  $a_1, b_1, \lambda_1$  и выполнив замену  $z = \zeta\sqrt{2\frac{\alpha}{1-\alpha}} - x\sqrt{2\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ , будем иметь

$$w(\zeta, x) = c(x) \int_0^{\zeta} (z-x) z^{\alpha-1} \left(z - \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha} dz.$$

Из условия  $w(\infty) = \infty$  следует, что  $c(x) = 1$ . Проинтегрировав, получим

$$w(\zeta, x) = \zeta^{\alpha} \left(\zeta - \frac{x}{\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Из условия  $w(x, x) = l e^{i(1-\alpha)\pi}$  имеем  $x = l \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$ , окончательно получим отображение

$$w(\zeta, l) = \zeta^{\alpha} \left(\zeta - \frac{l}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

из полуплоскости на полуплоскость с разрезом длины  $l$ ; прообразами вершин  $0, l e^{i\pi(1-\alpha)}$ ,  $0$  при этом отображении являются соответственно точки  $0, l \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}, \frac{l}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$ .

Пусть теперь  $g: E_z \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow E_{\xi}$ ,  $\xi = g(z, \varepsilon)$  есть голоморфное и однолистное отображение из единичного круга  $E_z$  на единичный круг  $E_{\xi}$  с разрезом длины  $\varepsilon$ , идущим из точки  $1$  по дуге окружности радиуса  $r$ , составляющей угол  $(1-\alpha)\pi$ ,  $0 < \alpha < 1$ , с верхней половинкой единичной окружности. Пусть отображение  $g$  удовлетворяет условию  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(z, \varepsilon) = z$ .

Отображение  $g$  можно представить композицией  $g(z, \varepsilon) = \xi(w(\zeta(z, \varepsilon)))$ , где

$$\xi(w) = e^{i\theta} \frac{w - s(\varepsilon) e^{-\frac{\theta}{2}}}{w - s(\varepsilon) e^{\frac{\theta}{2}}}, \quad w(\zeta) = \zeta^{\alpha} \left(\zeta - \frac{1}{\alpha} \sin \frac{\varepsilon}{2r}\right)^{1-\alpha}, \quad \zeta(z) = s(0) e^{\frac{i\theta}{2}} \frac{z-1}{z - e^{i\theta}},$$

$$a \quad s(\varepsilon) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} \frac{\sin\left(\alpha\pi - \frac{\varepsilon}{2\pi}\right) - r \sin \frac{\varepsilon}{2r}}{\sqrt{1 + 2r \cos(\alpha\pi) + r^2}}, \quad e^{i\theta} = e^{-i2\alpha\pi} \frac{r + e^{i\alpha\pi}}{r + e^{-i\alpha\pi}}.$$

Отображение  $g$  раскладывается по  $\varepsilon_1$  в ряд  $g(z, \varepsilon_1) = z + \varepsilon_1 (z - e^{i\theta})^2 + o(\varepsilon_1)$ , где  $\varepsilon_1$  пропорционально  $\varepsilon$ . Переобозначив  $\varepsilon_1$  через  $\varepsilon$ , по теореме 1 получаем вариационную формулу

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f'(z) (z - e^{i\theta})^2 - f(z) (f''(0) e^{i2\theta} - 2e^{i\theta}) - e^{i2\theta} \right) + o(\varepsilon, z), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где  $e^{i\theta} = e^{-2i\alpha\pi} \frac{r + e^{i\alpha\pi}}{r + e^{-i\alpha\pi}}$  – точка на единичной окружности, через которую проходит продолжение разреза.

5. Рассуждения в этом пункте повторяют доказательства теорем 1 и 2, так как формально их применить нельзя.

Пусть  $g: E_z \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon)$  есть голоморфное однолиственное отображение из круга  $E_z$  на круг  $E_\zeta$  с выброшенным отрезком

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : \arg \zeta = \beta, 1 - \varepsilon \leq |\zeta| \leq 1\}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1).$$

Это отображение неявно задается уравнением

$$4(1 - \varepsilon)z(e^{-i\beta}g^2(z, \varepsilon) + e^{i\beta}) = (4(z^2 + 1) - 4(z^2 + 1)\varepsilon + (z + 1)^2\varepsilon^2)g(z, \varepsilon),$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} g(z, \varepsilon) = e^{i\beta}z$  равномерно внутри  $E_z$  и имеет следующее разложение по  $\varepsilon$ :

$$g(z, \varepsilon) = e^{i\beta}z + \varepsilon^2 e^{i\beta} \frac{z}{4} \frac{z+1}{z-1} + \varepsilon^3 e^{i\beta} \frac{z}{4} \frac{z+1}{z-1} + o(z, \varepsilon^3),$$

$$g'_z(0, \varepsilon) = e^{i\beta} - \frac{1}{4} e^{i\beta} \varepsilon^2 - \frac{1}{4} e^{i\beta} \varepsilon^3 + o(0, \varepsilon^3).$$

Раскладывая  $\frac{f(g(z, \varepsilon))}{g'_z(0, \varepsilon)}$ , где  $f \in S$ , по степеням  $\varepsilon$  с точностью до  $\varepsilon^3$ , получим

$$e^{i\beta} f(z, \varepsilon) = e^{i\beta} \frac{f(g(z, \varepsilon))}{g'_z(0, \varepsilon)} = f(e^{i\beta}z) + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( f'(e^{i\beta}z) e^{i\beta} z \frac{z+1}{z-1} + f(e^{i\beta}z) \right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^3}{4} \left( f'(e^{i\beta}z) e^{i\beta} z \frac{z+1}{z-1} + f(e^{i\beta}z) \right) + o(z, \varepsilon^3).$$

Переобозначая  $e^{i\beta}z$  через  $z$  и учитывая, что, если  $f(z, \varepsilon) \in S$ , то  $e^{i\beta} f(e^{-i\beta}z, \varepsilon) = f_1(z, \varepsilon) \in S$ , получаем в классе  $S$  для отображения  $f$  следующую вариационную формулу:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon^2 \frac{1}{4} \left( f(z) + zf'(z) \frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1} \right) +$$

$$+ \varepsilon^3 \frac{1}{4} \left( f(z) + zf'(z) \frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1} \right) + o(z, \varepsilon^3), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0).$$

Малая вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left( f(z) + zf'(z) \frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1} \right) + o(z, \varepsilon)$$

известна и может быть получена другим способом, например с помощью семейства голоморфных однолистных отображений из  $E_z$  на единичный круг с выброшенной луночкой малой площади, пропорциональной  $\varepsilon$ .

Приведем для полноты еще две известные малые вариационные формулы.

6. В классе  $S$  имеет [1] место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k \frac{f^2(z)}{f(z) - w_k}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0),$$

где  $A_k \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , для отображения  $f$  с условием, что у  $f(E)$  есть внешние точки  $w_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ .

7. В классе  $S$  имеет [5] место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon (2e^{i\beta} - c_2) f^2(z) + \varepsilon^2 (2c_2^2 - c_3 - 4e^{i\beta} + 3e^{2i\beta}) f^3(z) + o(z, \varepsilon^2),$$

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|c_2| \leq 2$ ,  $c_3 \in \mathbb{C}$ ,  $|c_3| \leq 3$ , для отображения  $f$  с условием, что  $f(\partial E_z)$  есть жорданова кривая.

Последнюю формулу называют малой вариацией Шиффера в бесконечности. Отметим, что константы  $c_2$  и  $c_3$ , вообще говоря, зависят от отображения  $f$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Геометрическая теория функции комплексного переменного*. 2-е изд. / под ред. В.И. Смирнова. М.: Наука. 1966. 630 с.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. 219 с.
3. *Труды П.П. Куфарова: к 100летию со дня рождения* / под общ. ред. И.А. Александрова. Томск: Изд-во НТЛ, 2009. 371 с.
4. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
5. *Schiffer M.* On the coefficient problem for univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. No. 1. P. 95–101.

Статья поступила 12.07.2017 г.

Borisova Ya.V., Kolesnikov I.A., Kopanев S.A. (2017) ON SMALL VARIATION FORMULAS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/49/1

One of the main methods for solving extremal problems is the variational method. Variational formulas are the main tool of the variational method. Some variational formulas, the so-called small variational formulas, were obtained by means of a family of mappings from the unit disk onto domains lying in the unit disk. There is a theorem in the paper that gives a rather general approach to obtaining small variational formulas.

**Theorem.** Let the map  $g: E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$ ,  $\zeta = g(z, \varepsilon)$  satisfy the following conditions:

- 1)  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , the contraction  $g|_{E \times \{\varepsilon\}}$  is a holomorphic univalent mapping;
- 2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(z, \varepsilon) = z$ , locally uniformly in  $E_z$ ;
- 3) there exists a partial right derivative of  $g(z, \varepsilon)$  and  $g'_z(z, \varepsilon)$  with respect to  $\varepsilon$  at the origin, locally uniformly in  $E_z$ .

Then, in the class  $S$  for the mapping  $f \in S$ , the following variational formulas take place:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)g'_\varepsilon(z, 0) - f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0, 0) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) + o(z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (1)$$

where  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  locally uniformly in  $E_z$ ;

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0, 0)} + g'_\varepsilon(z, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0)) + o(z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (2)$$

where  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  locally uniformly in  $E_z$ ;

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P_3(z) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}), \quad (3)$$

where

$$P_3(z) = f'(z)(g'_\varepsilon(z, 0) + z^2 \bar{u} - u + itz) -$$

$$- f(z)(f''(0)(g'_\varepsilon(0, 0) - u) + g''_{z\varepsilon}(0, 0) + it) - g'_\varepsilon(0, 0) + u,$$

$\hat{\varepsilon} = \min\left(\varepsilon_0, \frac{1}{|u|}\right)$ ,  $u, t$  are constants,  $u \in \mathbb{C}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , and  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  locally uniformly in  $E_z$ ;

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0, 0)} + g'_\varepsilon(z, 0) - g'_\varepsilon(0, 0) + itz) - f(z)(g''_{z\varepsilon}(0, 0) + it)) + o(z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}), \quad (4)$$

where  $t$  is a constant,  $t \in \mathbb{R}$ , and  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  locally uniformly in  $E_z$ .

A number of new small variations have been obtained. In addition, the P.P. Kufarev method of finding parameters in the Christoffel–Schwarz integral is illustrated by a simple example.

Keywords: holomorphic univalent mapping, variational formula, parameters in the Christoffel–Schwarz integral, Kufarev method

*BORISOVA Yana Vladimirovna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: borisova\_yana@list.ru

*KOLESNIKOV Ivan Alexandrovich* (Candidate of Physics and Mathematics,

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

*KOPANEV Sergey Anatolievich* (Candidate of Physics and Mathematics,

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: copanev\_d@mail.ru

## REFERENCES

1. Goluzin M.G. (1966) *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of a function of a complex variable]. Moscow: Nauka.
2. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of the geometric theory of analytic functions]. Tomsk, TSU Publ.
3. *Proceedings of P.P. Kufarev: on the 100th anniversary of his birth* (2009). Tomsk: NTL Publ.
4. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.
5. Schiffer M. (1968) On the coefficient problem for univalent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 134 (1). pp. 95–101.

УДК 517.977.5

DOI 10.17223/19988621/49/2

Г.Ф. Гулиев, Ю.С. Гасымов, Х.Т. Тагиев, Т.М. Гусейнова

## ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассматривается задача определения правой части волнового уравнения с нелокальным условием. Эта задача приводит к задаче минимизации некоторого функционала, построенного с помощью дополнительной информации. Для новой задачи выводится необходимое и достаточное условие оптимальности.

**Ключевые слова:** обратная задача, волновое уравнение, нелокальные условия, условие оптимальности.

В последнее время обратные задачи для дифференциальных уравнений интенсивно изучаются. Отметим, что такие задачи возникают в самых разнообразных областях математики, геофизики, сейсмологии, астрономии, экологии и т.д. [1]. В данной работе рассматривается подход к решению одной обратной задачи для волнового уравнения. Поиск неизвестной правой части уравнения сводится к задаче минимизации функционала, построенного с помощью дополнительной информации. В результате получаем градиент функционала и условие оптимальности.

### 1. Постановка задачи

Для цилиндра  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \vartheta(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{S_T} = \int_{\Omega} K(x, y) u(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T. \quad (3)$$

Здесь  $\Omega \in R^n$  – ограниченная область с гладкой границей  $\partial\Omega$ ;  $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$  – боковая поверхность цилиндра  $Q_T$ ;  $\nu$  – внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega$ ;  $\varphi_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1(x) \in L_2(\Omega)$ ;  $K(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega)$  – заданная функции, а  $\vartheta(x, t) \in L_2(Q_T)$  – неизвестная функция. Для того чтобы определить  $\vartheta(x, t)$ , воспользуемся дополнительной информацией

$$u(x, T) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

где  $g(x) \in L_2(\Omega)$  – заданная функция.



Приводим эту задачу к задаче оптимального управления, т.е. на решениях задачи (1) – (3) минимизируем функционал

$$J_0(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(x, T; \vartheta) - g(x))^2 dx, \quad (5)$$

где  $u(x, T; \vartheta)$  является решением задачи (1) – (3), которое соответствует функции  $\vartheta(x, t)$ . Функцию  $\vartheta(x, t)$  назовем управлением. Если мы найдем управление  $\vartheta(x, t)$ , которое доставляет функционалу (5) нулевое значение, тогда дополнительное условие (4) выполняется.

Отметим, что при каждом фиксированном управлении  $\vartheta(x, t) \in L_2(Q_T)$  краевая задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$  [2].

## 2. О разрешимости задачи (1) – (3), (5)

Теперь рассмотрим следующую задачу: при каких условиях

$$\inf_{\vartheta \in L_2(Q_T)} J_0(\vartheta) = 0? \quad (6)$$

Пусть  $\psi_0(x)$  – заданная функция из  $L_2(\Omega)$ , такая, что

$$\int_{\Omega} \psi_0(x) u(x, T; \vartheta) dx = 0, \quad \forall \vartheta \in L_2(Q_T). \quad (7)$$

Мы хотим выяснить, будет ли отсюда следовать  $\psi_0(x) \equiv 0$ ?

Введем функцию  $W(x, t)$  как решение задачи:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta W = \int_{\partial\Omega} K(\xi, x) W(\xi, t) ds, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (8)$$

$$W(x, T) = 0, \quad \frac{\partial W(x, T)}{\partial t} = \psi_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \nu} \right|_{S_T} = 0, \quad (x, t) \in S_T. \quad (10)$$

Как и в работе [2], можно показать, что (8) – (10) имеет единственное обобщенное решение из класса  $W_2^1(Q_T)$  и это решение обладает свойствами

$$W(x, t) \in C([0, T], W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \in C([0, T], L_2(\Omega)).$$

В силу определения обобщенного решения задачи (1) – (3) имеем: при  $t = 0$  выполняется условие  $u(x, 0) = \varphi_0(x)$  и интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla u \nabla \eta \right) dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \eta(x, t) \int_{\Omega} K(x, y) u(y, t) dy ds dt - \\ - \int_{\Omega} \varphi_1(x) \eta(x, 0) dx = \int_0^T \int_{\Omega} \vartheta(x, t) \eta(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (11)$$

для любой функций  $\eta \in W_2^1(Q_T)$ ,  $\eta(x, T) = 0$ , где  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ .

В силу определения обобщенного решения задачи (8) – (10) имеем: при  $t = T$  выполняется условие  $W(x, T) = 0$  и интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla W \nabla \Phi \right) dx dt - \int_0^T \int_{\partial \Omega} \Phi(x, t) \int_{\Omega} K(x, y) W(y, t) dy ds dt - \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial W(x, 0)}{\partial t} \Phi(x, 0) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) \Phi(x, T) dx dt, \end{aligned} \quad (12)$$

для любой функции  $\Phi \in W_2^1(Q_T)$ .

Теперь в (11) за функцию  $\eta$  возьмем  $W$ , а в (12) за функцию  $\Phi$  возьмем  $u$ , из (11) вычтем (12), тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial W(x, 0)}{\partial t} \varphi_0(x) dx - \int_{\Omega} \varphi_1(x) W(x, 0) dx - \\ - \int_0^T \int_{\Omega} \vartheta(x, t) W(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \psi_0(x) u(x, T; \vartheta) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Если учесть условия (7), то получим

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W(x, 0)}{\partial t} \varphi_0(x) dx - \int_{\Omega} \varphi_1(x) W(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \vartheta(x, t) W(x, t) dx dt = 0. \quad (13)$$

Если соотношение (13) записать для произвольных  $\vartheta_1(x, t)$  и  $\vartheta_2(x, t)$ , то из полученных двух равенств следует, что

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)) W(x, t) dx dt = 0, \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in L_2(Q_T).$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что  $W = 0$  в  $Q_T$ . Значит, в силу (8)  $\psi_0(x) \equiv 0$  в  $\Omega$ .

Таким образом, в силу теоремы Хана – Банаха [3] получаем, что

$$\inf_{\vartheta \in L_2(Q_T)} J_0(\vartheta) = 0.$$

Если образ  $L_2(Q_T)$  при отображении  $\vartheta \rightarrow u(x, T; \vartheta)$  замкнут в  $L_2(Q_T)$ , то возможно существует такой элемент  $\vartheta_0(x, t) \in L_2(Q_T)$ , что

$$\inf_{\vartheta \in L_2(Q_T)} J_0(\vartheta) = J_0(\vartheta_0) = 0.$$

В задаче (1) – (3), (5) минимизирующий элемент  $\vartheta(x, t) \in L_2(Q_T)$ , вообще говоря, не единственный. Теперь рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_{\alpha}(\vartheta) = J_0(\vartheta) + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\vartheta(x, t) - \omega(x, t))^2 dx dt \quad (14)$$

в выпуклом замкнутом множестве  $U_{ad} \in L_2(Q_T)$  при ограничениях (1) – (3), где  $\omega(x, t) \in L_2(Q_T)$  – заданная функция,  $\alpha > 0$  – заданное число.

Тогда, в силу известных результатов [5], в задаче (1) – (3), (14) существует единственный минимизирующий элемент.

### 3. Вычисление дифференциала функционала (14) и необходимое условие оптимальности

Теперь покажем, что функционал (14) дифференцируем в  $L_2(Q_T)$ . Берем два допустимых управления  $\vartheta, \vartheta + \delta\vartheta \in U_{ad}$ . Соответствующее решение задачи (1) – (3) обозначим через  $u(x, t; \vartheta)$  и  $u(x, t; \vartheta + \delta\vartheta)$ .

Пусть  $\delta u(x, t) = u(x, t; \vartheta + \delta\vartheta) - u(x, t; \vartheta)$ . Ясно что  $\delta u(x, t)$  является обобщенным решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \Delta \delta u = \delta \vartheta(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (15)$$

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \delta u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega; \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial \delta u}{\partial \nu} \right|_{S_T} = \int_{\Omega} K(x, y) \delta u(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T, \quad (17)$$

т.е. для любой функций  $\eta \in W_2^1(Q_T)$ ,  $\eta(x, T) = 0$  выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \delta u \nabla \eta \right) dx dt - \int_0^T \int_{\partial \Omega} \eta(x, t) \int_{\Omega} K(x, y) \delta u(y, t) dy ds dt = \\ = \int_0^T \int_{\Omega} \delta \vartheta(x, t) \eta(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть  $\psi$  – обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$  сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = \int_{\partial \Omega} K(\xi, x) \psi(\xi, t) ds, \quad (x, t) \in Q_T; \quad (19)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = u(x, T; \vartheta) - g(x), \quad x \in \Omega; \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|_{S_T} = 0, \quad (x, t) \in S_T. \quad (21)$$

То есть для любой функции  $\Phi \in W_2^1(Q_T)$  выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \psi \nabla \Phi \right) dx dt - \int_0^T \int_{\partial \Omega} \Phi(x, t) \int_{\Omega} K(x, y) \psi(y, t) dy ds dt - \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} \Phi(x, 0) dx - \int_{\Omega} (u(x, T; \vartheta) - g(x)) \Phi(x, T) dx = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку смешанная задача (19) – (21) является линейной относительно  $\psi(x, t)$ , то эта задача в пространстве  $W_2^1(Q_T)$  имеет единственное решение [2].

Теперь вычислим приращение функционал (14). Ясно, что

$$\begin{aligned} \delta J_{\alpha}(\vartheta) = J_{\alpha}(\vartheta + \delta\vartheta) - J_{\alpha}(\vartheta) = \int_{\Omega} (u(x, T; \vartheta) - g(x)) \delta u(x, T) dx + \\ + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} (\vartheta(x, t) - \omega(x, t)) \delta \vartheta(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\delta u(x, T))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dx dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Если в (18) положить  $\eta(x, t) = \psi(x, t)$ , а в (22)  $\Phi(x, t) = \delta u(x, t)$  и вычесть полученные соотношения, то имеем

$$\int_{\Omega} (u(x, T; \vartheta) - g(x)) \delta u(x, T) dx = \int_0^T \int_{\Omega} \delta \vartheta(x, t) \psi(x, t) dx dt.$$

Тогда, учитывая это равенство в (23), получим

$$\delta J_{\alpha}(\vartheta) = \alpha \int_0^T \int_{\Omega} (\vartheta(x, t) - \omega(x, t)) \delta \vartheta(x, t) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \delta \vartheta(x, t) \psi(x, t) dx dt + R, \quad (24)$$

где 
$$R = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\delta u(x, T))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dx dt.$$

Теперь оценим остаточный член  $R$ , входящий в (24). Покажем, что

$$|R| \leq c \int_0^T \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dx dt. \quad (25)$$

Для этого покажем, что

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq c \|\delta \vartheta\|_{L_2(Q_T)}^2. \quad (26)$$

Здесь и в дальнейшем через  $c$  будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от допустимых управлений.

Применяя метод Галеркина, из (15) – (17) получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \delta u^N(x, t)}{\partial t^2} \frac{\partial \delta u^N(x, t)}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \delta u^N(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \delta u^N(x, t)}{\partial x_i \partial t} dx - \\ & - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \delta u^N(x, t)}{\partial t} \int_{\Omega} K(x, y) \delta u^N(y, t) dy ds = \int_{\Omega} \delta \vartheta \frac{\partial \delta u^N(x, t)}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta u^N(x, t)$  – приближения Галеркина, т.е.  $\delta u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N C_k^N(t) \varphi_k(x)$ ,  $\varphi_k(x)$  – базис в  $W_2^1(\Omega)$ .

Интегрируя по  $t$  от 0 до  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t} \right)^2 + |\nabla \delta u^N|^2 \right) dx = \\ & = 2 \int_0^t \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \delta u^N(x, t)}{\partial t} \int_{\Omega} K(x, y) \delta u^N(y, t) dy ds dt + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \delta \vartheta \frac{\partial \delta u^N(x, t)}{\partial t} dx dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Преобразуем интеграл по боковой поверхности  $S_T$  следующим образом:

$$\int_0^t \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \delta u^N(x, t)}{\partial t} \int_{\Omega} K(x, y) \delta u^N(y, t) dy ds dt = i_1 + i_2 + i_3,$$

где 
$$i_1 = - \int_{\partial \Omega} \int_0^t \delta u^N(x, t) \int_{\Omega} K(x, y) \frac{\partial \delta u^N(y, t)}{\partial t} dy dt ds,$$

$$i_2 = \int_{\partial \Omega} \delta u^N(x, t) \int_{\Omega} K(x, y) \delta u^N(y, t) dy ds,$$

$$i_3 = - \int_{\partial\Omega} \delta u^N(x, 0) \int_{\Omega} K(x, y) \delta u^N(y, 0) dy ds = 0.$$

Пользуясь неравенством  $\int_{\partial\Omega} |W| ds \leq c \int_{\Omega} (|W| + |\nabla W|) dx$  [4] и затем неравенством Коши – Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |i_1| &= \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} \delta u^N(x, t) \int_{\Omega} K(x, y) \frac{\partial \delta u^N(y, t)}{\partial t} dy ds dt \right| \leq \\ &\leq c \int_0^t \int_{\Omega} ((\delta u^N(x, t))^2 + |\nabla \delta u^N(x, t)|^2) dx dt + c \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u^N(y, t)}{\partial t} \right)^2 dy dt; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} |i_2| &= \left| \int_{\partial\Omega} \delta u^N(x, t) \int_{\Omega} K(x, y) \delta u^N(y, t) dy ds \right| \leq \\ &\leq c \left( \int_{\Omega} ((\delta u^N(x, t))^2 + |\nabla \delta u^N(x, t)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} (\delta u^N(x, t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Введем обозначение

$$Z^N(t) \equiv \int_{\Omega} ((\delta u^N)^2 + \left( \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right)^2 + |\nabla \delta u^N|^2) dx.$$

Ясно, что

$$\int_{\Omega} (\delta u^N(x, t))^2 dx \leq 2t \int_0^t y^N(t) dt,$$

где

$$y^N(t) = \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial \delta u^N(x, t)}{\partial t} \right)^2 + |\nabla \delta u^N(x, t)|^2 \right) dx.$$

Из (29) следует

$$|i_2| \leq c(Z^N(t))^{\frac{1}{2}} \left( 2t \int_0^t Z^N(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

При условиях на данные задачи и учитывая (28) и (30), из (27) имеем

$$Z^N(t) \leq c \int_0^t Z^N(t) dt + 2t \int_0^t Z^N(t) dt + c(Z^N(t))^{\frac{1}{2}} \left( 2t \int_0^t Z^N(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + c \int_0^t \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dx dt.$$

Обозначим  $\max_{0 \leq \xi \leq t} Z^N(\xi) = \bar{Z}^N(t)$ , тогда

$$\bar{Z}^N(t) \leq (c + 2t)t\bar{Z}^N + ct\bar{Z}^N(t) + c \int_0^t \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dx dt.$$

Определяя  $t_1$  из условия  $(c + 2t_1)t_1 = \frac{1}{2}$ , получим

$$\bar{Z}^N(t) \leq c \int_0^t \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dx dt.$$

Продолжая этот процесс, за конечное числа шагов получаем неравенство:

$$\int_{\Omega} ((\delta u^N)^2 + \left( \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right)^2 + |\nabla \delta u^N|^2) dx \leq c \|\delta \vartheta\|_{L_2(Q_T)}^2, \forall t \in [0, T],$$

из которого следует

$$\|\delta u^N\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq c \|\delta \vartheta\|_{L_2(Q_T)}^2. \quad (31)$$

В силу (31), из последовательности  $\{\delta u^N\}$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо в  $W_2^1(Q_T)$  к некоторому элементу  $\delta u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ .

Поскольку норма в гильбертовом пространстве слабо полунепрерывна снизу, то отсюда следует, что для предельной функции  $\delta u(x, t)$  справедлива оценка (26) [7].

По теореме вложения  $W_2^1(Q_T) \subset L_2(\Omega)$  [4] получаем, что

$$\|\delta u(x, T)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \|\delta u(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)}^2. \quad (32)$$

Сопоставляя соотношения (26) и (32), имеем

$$\|\delta u(x, T)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \|\delta \vartheta(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2.$$

Отсюда и из выражения  $R$  следует справедливость оценки (25).

Тогда из равенства (24) и из оценки (25) следует, что функционал  $J_{\alpha}(\vartheta)$  дифференцируем в  $L_2(Q_T)$  и его дифференциал и градиент определяются выражениями

$$\langle J'_{\alpha}(\vartheta), \delta \vartheta \rangle_{L_2(Q_T)} = \int_0^T \int_{\Omega} (\alpha(\vartheta - \omega) - \psi(x, t; \vartheta)) \delta \vartheta(x, t) dx dt \quad (33)$$

$$\text{и} \quad J'_{\alpha}(\vartheta) = \alpha(\vartheta - \omega) - \psi(x, t; \vartheta) \quad (34)$$

соответственно.

Можно показать, что отображение  $\vartheta \rightarrow J'_{\alpha}(\vartheta)$  из  $U_{ad} \rightarrow L_2(Q_T)$  является непрерывным.

Из (34) следует

$$J'_{\alpha}(\vartheta + \delta \vartheta) - J'_{\alpha}(\vartheta) = \alpha \delta \vartheta - \delta \psi(x, t). \quad (35)$$

Из выражения (35) имеем:

$$\|J'_{\alpha}(\vartheta + \delta \vartheta) - J'_{\alpha}(\vartheta)\|_{L_2(Q_T)} \leq c \left( \int_0^T \int_{\Omega} ((\delta \vartheta)^2 + (\delta \psi)^2) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Ясно, что  $\delta \psi(x, t) = \psi(x, t; \vartheta + \delta \vartheta) - \psi(x, t; \vartheta)$  является решением задачи:

$$\frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial t^2} - \Delta \delta \psi = \int_{\partial \Omega} K(\xi, x) \delta \psi(\xi, t) ds, \quad (x, t) \in Q_T; \quad (37)$$

$$\delta \psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \delta \psi(x, T)}{\partial t} = \delta u(x, T), \quad x \in \Omega; \quad (38)$$

$$\left. \frac{\partial \delta \psi}{\partial \nu} \right|_{S_T} = 0, \quad (x, t) \in S_T. \quad (39)$$

Как и для задачи (15) – (17), относительно  $\delta\psi(x, t)$  имеем оценку

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq c \|\delta u(x, T)\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (40)$$

По теореме вложения  $W_2^1(Q_T) \subset L_2(\Omega)$  [4] получаем, что

$$\|\delta u(x, T)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \|\delta u(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)}^2. \quad (41)$$

Сопоставляя соотношения (26), (40) и (41), имеем

$$\|J'_\alpha(\vartheta + \delta\vartheta) - J'_\alpha(\vartheta)\|_{L_2(Q_T)} \leq c \|\delta\vartheta\|_{L_2(Q_T)}^2. \quad (42)$$

Из этого неравенства следует, что при  $\|\delta\vartheta\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0$ ,

$$\|J'_\alpha(\vartheta + \delta\vartheta) - J'_\alpha(\vartheta)\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0.$$

Следовательно, отображение  $\vartheta \rightarrow J'_\alpha(\vartheta)$  из  $U_{ad} \rightarrow L_2(Q_T)$  является непрерывным.

**Теорема.** Пусть выполняются вышесказанные условия на данные задачи (1) – (4). Тогда для оптимальности управления  $\vartheta_* = \vartheta_*(x, t) \in U_{ad}$  в задаче (1) – (3), (14) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^T \int_\Omega (\alpha(\vartheta_* - \omega) - \psi(x, t; \vartheta_*))(\vartheta - \vartheta_*) dx dt \geq 0 \quad (43)$$

при всех  $\vartheta \in U_{ad}$ .

**Доказательство.** Согласно доказанным утверждениям, функционал  $J_\alpha(\vartheta)$  непрерывно дифференцируем по Фреше на  $L_2(Q_T)$  и его дифференциал в точке  $\vartheta(x, t) \in U_{ad}$  определяется равенством (33). В силу теоремы [6, с.28] на элементе  $\vartheta_* \in U_{ad}$  необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\langle J'_\alpha(\vartheta), \vartheta - \vartheta_* \rangle \geq 0 \text{ при всех } \vartheta \in U_{ad}.$$

Отсюда и из (34) следует справедливость равенства (43). Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
2. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
5. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. Tagiev H.T. Gradient of the functional in the optimal control problem with non-local conditions for the wave equation // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics NAS of Azerbaijan. V. XXXVII(XLV). 2012. P. 139–148.

Статья поступила 16.03.2017 г.

Guliyev H.F., Gasimov Y.S., Tagiyev H.T., Huseynova T.M.(2017) ON THE INVERSE PROBLEM OF FINDING THE RIGHT-HAND SIDE OF WAVE EQUATION WITH NONLOCAL CONDITION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 16–25

DOI 10.17223/19988621/49/2

Recently, inverse problems for the differential equations have been intensively studied. Such problems arise in the various fields of mathematics, geophysics, seismology, astronomy, ecology, etc. In this paper, we propose an approach to solving the inverse problem for the wave equation. The search for the unknown right-hand side of the equation is reduced to the problem of minimizing the functional constructed using additional information. The gradient of the functional is calculated and the optimality condition is derived.

In the cylinder  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , consider the problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \vartheta(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{S_T} = \int_{\Omega} K(x, y) u(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T, \quad (3)$$

where  $\Omega \in R^n$  is a bounded domain with a smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$  is the lateral surface of  $Q_T$ ,  $\nu$  is an outward normal to  $\partial\Omega$ ,  $\varphi_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $K(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega)$  are given functions, and  $\vartheta(x, t) \in L_2(Q_T)$  is the unknown function. To determine  $\vartheta(x, t)$ , we use the following additional information:

$$u(x, T) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad \text{where } g(x) \in L_2(\Omega) \text{ is a given function.} \quad (4)$$

The problem is reduced to the following problem: minimize the functional

$$J_0(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(x, T; \vartheta) - g(x))^2 dx \quad (5)$$

subject to (1)–(3), where  $u(x, T; \vartheta)$  is a solution of problem (1)–(3) corresponding to  $\vartheta(x, t)$  which is called a control. The solvability of problem (1)–(3), (5) is proved.

Consider the functional

$$J_{\alpha}(\vartheta) = J_0(\vartheta) + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\vartheta(x, t) - \omega(x, t))^2 dx dt. \quad (6)$$

Then, the differential of this functional is calculated and the following theorem is proved:

**Theorem.** Under the considered conditions, for the optimality of the control  $\vartheta_* = \vartheta_*(x, t) \in U_{ad}$  in the problem (1)–(3), (6) it is necessary that the inequality

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\alpha(\vartheta_* - \omega) - \psi(x, t; \vartheta_*))(\vartheta - \vartheta_*) dx dt \geq 0 \quad (7)$$

is fulfilled for all  $\vartheta \in U_{ad}$ .

Keywords: inverse problem, wave equation, nonlocal conditions, optimality condition.

GULIYEV Hamlet Farman (Doctor of Physics and Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: hkuliyev@rambler.ru



*GASIMOV Yusif Soltan* (Doctor of Physics and Mathematics, Azerbaijan University, Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan)  
E-mail: yusif.gasimov@au.edu.az

*TAGIYEV Hikmet Tahir* (Candidate of Physics and Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: hitagiyevev@gmail.com

*GUSEYNOVA Tunzale Maharram* (Candidate of Physics and Mathematics, Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan). E-mail: tunzalemustafayeva@mail.ru

#### REFERENCES

1. *Kabanikhin S.I.* (2009) *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems] Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo.
2. *Kozhanov A.I., Pul'kina L.S.* (2006) On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. *Diff. Equat.* 42. pp. 1233–1246. <https://doi.org/10.1134/S0012266106090023>
3. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* (1981) *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka.
4. *Ladyzhenskaya O.A.* (1973) *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
5. *Lions J.L.* (1968) *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations dérivées partielles*. Paris, Dunod, Gauthier-Villars.
6. *Vasilyev F.P.* (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
7. *Tagiev H.T.* (2012) Gradient of the functional in the optimal control problem with non-local conditions for the wave equation. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics NAS of Azerbaijan*. XXXVII(XLV). pp. 139–148.

УДК 517.977.56

DOI 10.17223/19988621/49/3

**К.Б. Мансимов, В.А. Сулейманова****НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ  
ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
СИСТЕМАМИ ГУРСА – ДАРБУ**

Изучается граничная задача оптимального управления системами Гурса – Дарбу при предположении открытости области управления. Установлен аналог уравнения Эйлера. Выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

**Ключевые слова:** *граничное управление, система Гурса – Дарбу, необходимое условие оптимальности, аналог уравнения Эйлера, аналог условия Габасова-Кирилловой.*

**1. Введение**

Задачи оптимального управления описываемые системами Гурса – Дарбу, и с управляемым граничным условиям начали изучаться еще с работ [1, 2] А.И. Егорова. Отметим работы [3–9], в которых получены ряд необходимых условий оптимальности и доказаны теоремы существования оптимальных граничных управлений.

В предлагаемой работе исследуется одна граничная задача оптимального управления описываемая системой Гурса – Дарбу при предположении открытости области управления. Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

**2. Постановка задачи**

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u) = \varphi(a(t_1)) + G(z(t_1, x_1)) \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1]; \quad (2.2)$$

$$z_{t,x} = B(t, x)z_t + f(t, x, z, z_x), \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} z(t, x_0) &= a(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ z(t_0, x) &= b(x), \quad x \in X = [x_0, x_1]; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$a(t_0) = b(x_0) = a_0,$$

$$\dot{a} = g(t, a, u), \quad t \in T; \quad (2.5)$$

$$a(t_0) = a_0. \quad (2.6)$$

Здесь  $f(t, x, z, z_x)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $z, z_x$  до второго порядка

включительно;  $B(t, x)$  – заданная измеримая и ограниченная  $(n \times n)$  матричная функция;  $b(x)$  – заданная  $n$ -мерная абсолютно непрерывная вектор-функция;  $t_0, t_1, x_0, x_1$  –  $(t_0 < t_1; x_0 < x_1)$  – заданы;  $a_0$  – заданный постоянный вектор;  $g(t, a, u)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(a, u)$  до второго порядка включительно;  $\varphi(a)$  и  $G(z)$  – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции;  $U$  – заданное непустое, ограниченное и открытое множество;  $u(t)$  – измеримая и ограниченная  $r$ -мерная управляющая вектор-функция.

Каждую управляющую функцию  $u(t)$  с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении  $u(t)$  задача Коши (2.5) – (2.6) и задача Гурса (2.3) – (2.4) имеют единственное абсолютно непрерывное решение (в смысле [10 – 13])  $a(t)$  и  $z(t, x)$  соответственно.

Допустимое управление  $u(t)$ , доставляющее минимум функционалу (2.1) при ограничениях (2.2) – (2.6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс  $(u(t), a(t), z(t, x))$  – оптимальным процессом.

### 3. Вариации функционала качества

Считая  $(u(t), a(t), z(t, x))$  фиксированным допустимым процессом, введем обозначения

$$\begin{aligned} M(t, a, u, q) &= q' g(t, a, u), \\ H(t, x, z, z_x, \psi) &= \psi' f(t, x, z, z_x), \\ M_a(t, a(t), u(t), q(t)) &= M_a(t), \\ M_{aa}(t, a(t), u(t), q(t)) &= M_{aa}(t), \\ M_{ua}(t, a(t), u(t), q(t)) &= M_{ua}(t), \\ M_{uu}(t, a(t), u(t), q(t)) &= M_{uu}(t), \\ H_z(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x)) &= H_z(t, x), \\ H_{zz}(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x)) &= H_{zz}(t, x), \\ H_{zz_x}(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x)) &= H_{zz_x}(t, x), \\ g_a(t, a(t), u(t)) &= g_a(t), \\ f_z(t, x, z(t, x), z_x(t, x)) &= f_z(t, x), \\ f_{z_x}(t, x, z(t, x), z_x(t, x)) &= f_{z_x}(t, x), \end{aligned}$$

где  $\psi = \psi(t, x)$  и  $q = q(x)$  – пока неизвестные  $n$ -мерные вектор-функции.

Через  $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{a}(x) = a(x) + \Delta a(x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x))$  обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение критерия качества

$$\Delta I(u) = I(\bar{u}) - I(u) = \varphi(\bar{a}(t_1)) - \varphi(a(t_1)) + G(\bar{z}(t_1, x_1)) - G(z(t_1, x_1)). \quad (3.1)$$

Далее ясно, что приращение  $(\Delta a(t), \Delta z(t, x))$  – состояния  $(a(t), z(t, x))$  есть решение задачи

$$\Delta \dot{a} = g(t, \bar{a}, \bar{u}) - g(t, a, u); \quad (3.2)$$

$$\Delta a(t_0) = 0; \quad (3.3)$$

$$\Delta z_{tx} = B(t, x) \Delta z_t + f(t, x, \bar{z}, \bar{z}_x) - f(t, x, z, z_x); \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x_0) &= \Delta a(t), \quad t \in T, \\ \Delta z(t_0, x) &= 0, \quad x \in X. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Умножая обе части соотношения (3.2) ((3.4)) слева скалярно на  $q(t)$  ( $\psi(t, x)$ ), а затем интегрируя обе части полученного соотношения по  $T$  (по  $D$ ) получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} q'(t) \Delta \dot{a}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} [M(t, \bar{a}(t), \bar{u}(t), q(t)) - M(t, a(t), u(t), q(t))] dt; \quad (3.6) \\ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{z}_x(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x))] dx dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь и в дальнейшем штрих (') – операция транспонирования.

С учетом тождеств (3.6) и (3.7) формула приращения (3.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta I(u) &= \varphi(\bar{a}(t_1)) - \varphi(a(t_1)) + G(\bar{z}(t_1, x_1)) - G(z(t_1, x_1)) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} q'(t) \Delta \dot{a}(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} [M(t, \bar{a}(t), \bar{u}(t), q(t)) - M(t, a(t), u(t), q(t))] dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{z}_x(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x))] dx dt. \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\begin{aligned} I(u) &= \varphi'_a(a(t_1)) \Delta a(t_1) + \frac{1}{2} \Delta a'(t_1) \varphi_{aa}(a(t_1)) \Delta a(t_1) + \\ &+ G'_z(z(t_1, x_1)) \Delta z(t_1, x_1) + \frac{1}{2} \Delta z(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) \Delta z(t_1, x_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_0}^{t_1} q'(t) \Delta \dot{a}(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} [M'_a(t) \Delta a(t) + M'_u(t) \Delta u(t)] dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta a'(t) M_{aa}(t) \Delta a(t) + 2 \Delta u'(t) M_{ua}(t) \Delta a(t) + \Delta u'(t) M_{uu}(t) \Delta u(t)] dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H'_z(t, x) \Delta z(t, x) + H'_{zx}(t, x) \Delta z_x(t, x)] dx dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) + \Delta z'_x(t, x) H_{zx}(t, x) \Delta z(t, x) + \\
 & + \Delta z'_x(t, x) H_{zx}(t, x) \Delta z_x(t, x) + \Delta z'_x(t, x) H_{zxx}(t, x) \Delta z_x(t, x)] dx dt + \\
 & + o_1(\|\Delta a(t_1)\|^2) + o_2(\|\Delta z(t_1, x_1)\|^2) - \int_{t_0}^{t_1} \left( \|\Delta u(t)\| + \|\Delta a(t)\| \right)^2 dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_4(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta z_x(t, x)\|)^2 dx dt, \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

где  $o(\alpha^2)/\alpha^2 \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Ясно, что

$$\Delta a(t) = \int_{t_0}^t \Delta \dot{a}(\tau) d\tau; \tag{3.9}$$

$$\Delta z(t, x) = \Delta a(t) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Delta z_{ts}(\tau, s) ds d\tau; \tag{3.10}$$

$$\Delta z_t(t, x) = \Delta \dot{a}(t) + \int_{x_0}^x \Delta z_{ts}(t, s) ds; \tag{3.11}$$

$$\Delta z_x(t, x) = \int_{t_0}^t \Delta z_{tx}(\tau, x) d\tau. \tag{3.12}$$

Используя формулы (3.9) – (3.12) и применяя формулу Фубини (см., напр., [6, 10]), можно доказать, что

$$\int_{t_0}^{t_1} M'_a(t) \Delta a(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} M'_a(\tau) d\tau \right] \Delta \dot{a}(t) dt; \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta \dot{a}(t) dx dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \int_x^{x_1} \psi'(t, s) B(t, s) ds \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt; \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x) \Delta z(t, x) dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x) \Delta a(t) dx dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x) \left[ \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} \Delta z_{\tau s}(\tau, s) ds d\tau \right] dx dt; \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x) \Delta a(t) dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \int_t^{t_1} H'_z(\tau, x) d\tau \right] \Delta \dot{a}(t) dx dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} H'_z(\tau, s) ds d\tau \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_{z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \int_t^{t_1} H'_{z_x}(\tau, x) d\tau \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt,$$

$$\varphi'_a(a(t_1)) \Delta a(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi'_a(a(t)) \Delta \dot{a}(t) dt,$$

$$\begin{aligned} G'_z(z(t_1, x_1)) \Delta z(t_1, x_1) &= \int_{t_0}^{t_1} G'_z(z(t_1, x_1)) \Delta \dot{a}(t) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} G'_z(z(t_1, x_1)) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

С учетом доказанных тождеств (3.13) – (3.16) формула (3.9) для приращения функционала качества (2.1) представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta I(u) &= - \int_{t_0}^{t_1} \Delta \bar{u}(t) M(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \varphi_a(a(t_1)) + q(t) + G_z(z(t_1, x_1)) - \int_t^{t_1} M_a(\tau) d\tau - \right. \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \int_t^{t_1} H'_z(\tau, x) dx d\tau - \int_{x_0}^{x_1} B'(t, x) \psi(t, x) dx \left. \right] \Delta \dot{a}(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ G_z(z(t_1, x_1)) - \psi(t, x) - \right. \\ &- \int_s^{x_1} B'(t, s) \psi(t, s) ds - \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} H'_z(\tau, s) d\tau ds - \int_t^{t_1} H'_{z_x}(\tau, x) d\tau \left. \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta a'(t_1) \varphi_{aa}(a(t_1)) \Delta a(t_1) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) \Delta z(t_1, x_1) - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta a'(t) M_{aa}(t) \Delta a(t) + 2 \Delta u'(t) M_{ua}(t) \Delta a(t) + \Delta u'(t) M_{uu}(t) \Delta u(t) \right] dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) H_{zz_x}(t, x) \Delta z_x(t, x) + \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z}(t, x) \Delta z(t, x) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x) \Big] dx dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta a'(t) \Delta_{\bar{u}(t)} M_{aa}(t) \Delta a(t) dt + o_1(\|\Delta a(t_1)\|^2) + \\
 & + o_2(\|\Delta z(t_1, x_1)\|^2) + \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta a(t)\| + \|\Delta u(t)\|^2) dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_4(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta z_x(t, x)\|^2) dx dt. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Если предполагать, что  $(\psi(t, x), q(t))$  является решением системы интегральных уравнений

$$\psi(t, x) = -G_z(z(t_1, x_1)) + \int_s^{x_1} B'(t, s) \psi(t, s) ds + \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} H_z(\tau, s) ds d\tau + \int_t^{t_1} H_{z_x}(\tau, x) d\tau; \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
 q(t) = & -\varphi_a(a(t_1)) - G_z(z(t_1, x_1)) + \int_t^{t_1} M_{aa}(\tau) d\tau - \\
 & - \int_{x_0}^{x_1} \int_t^{t_1} H_z(\tau, x) dx d\tau + \int_{x_0}^{x_1} B'(t, x) \psi(t, x) dx, \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

то формула приращения (3.17) примет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta I(u) = & \frac{1}{2} \Delta a'(t_1) \varphi_{aa}(a(t_1)) \Delta a(t_1) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta z(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) \Delta z(t_1, x_1) - \int_{t_0}^{t_1} M'_u(t) \Delta u(t) dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta a'(t) M_{aa}(t) \Delta a(t) + 2 \Delta u'(t) M_{ua}(t) \Delta a(t) + \Delta u'(t) M_{uu}(t) \Delta u(t) \right] dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) H_{zz_x}(t, x) \Delta z_x(t, x) + \right. \\
 & + \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z}(t, x) \Delta z(t, x) + \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x) \Big] dx dt + \\
 & + o_1(\|\Delta a(t_1)\|^2) + o_2(\|\Delta z(t_1, x_1)\|^2) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta a(t)\| + \|\Delta u(t)\|^2) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_4(\|\Delta z(t, x) + \Delta z_x(t, x)\|^2) dt dx. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon$  — достаточно малое по абсолютной величине число, а  $\delta u(t) \in R^r$ ,  $t \in T$  произвольная кусочно-непрерывная и ограниченная  $r$ -мерная вектор-функция (вариация управления).

В силу открытости области управления  $U$  специальное приращение управления  $u(t)$  можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta u(t), \quad t \in T. \quad (3.21)$$

Через  $(\Delta a(t; \varepsilon), \Delta z(t, x; \varepsilon))$  обозначим специальное приращение вектора состояния  $(a(t), z(t, x))$ , отвечающее приращению (3.21) управления  $u(t)$ .

Из оценок, приведенных, например, в работах [1, 2, 11–13] следует, что

$$\|\Delta a(t; \varepsilon)\| \leq L\varepsilon, \quad (3.22)$$

$$\|\Delta z(t, x; \varepsilon)\| \leq L\varepsilon, \quad \|\Delta z_x(t, x; \varepsilon)\| \leq L\varepsilon, \quad (t, x) \in D.$$

Используя эти оценки и (3.21), при помощи (3.2), (3.3) и (3.4), (3.5) аналогично [14] доказывается

**Теорема 3.1.** Для специального приращения  $(\Delta a(t; \varepsilon), \Delta z(t, x; \varepsilon))$  состояния  $(a(t), z(t, x))$  имеют место разложения

$$\begin{aligned} \Delta a(t; \varepsilon) &= \varepsilon \delta a(t) + o(\varepsilon; t), \\ \Delta z(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon \delta z(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\Delta z_x(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta z_x(t, x) + o(\varepsilon; t, x),$$

где  $(\delta a(t), \delta z(t, x))$  (вариация состояния  $(a(t), z(t, x))$ ) является решением уравнения в вариациях

$$\delta \dot{a}(t) = g_a(t) \delta a(t) + g_u(t) \delta u(t); \quad (3.24)$$

$$\delta a(t_0) = 0; \quad (3.25)$$

$$\delta z_{tx}(t, x) = B(t, x) \delta z_t(t, x) + f_z(t, x) \delta z(t, x) + f_{zx}(t, x) \delta z_x(t, x); \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \delta z(t, x_0) &= \delta a(t), \\ \delta z(t_0, x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

С учетом разложений (3.23) из формулы приращения (3.20) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta I_\varepsilon(u) &= I(u + \varepsilon \delta u) - I(u) = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} M'_u(t) \delta u(t) dt + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \delta a'(t_1) \Phi_{aa}(a(t_1)) \delta a(t_1) + \delta z(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) \delta z(t_1, x_1) - \right. \\ &- \int_{t_0}^{t_1} [\delta a'(t) M_{aa}(t) \delta a(t) + 2 \delta u'(t) M_{ua}(t) \delta a(t) + \delta u'(t) M_{uu}(t) \delta u(t)] dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) H_{zx}(t, x) \delta z_x(t, x) + \\ &+ \delta z'_x(t, x) H_{zx}(t, x) \delta z(t, x) + \delta z'_x(t, x) H_{zxx}(t, x) \delta z_x(t, x)] dx dt \Big\} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из разложения (3.28) следует, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала  $I(u)$  имеют соответственно вид



$$\delta^1 I(u; \delta u) = - \int_{t_0}^{t_1} M'_u(t) \delta u(t) dt; \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 I(u; \delta u) = & \delta a'(t_1) \varphi_{aa}(a(t_1)) \delta a(t_1) + \delta z(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) \delta z(t_1, x_1) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [\delta a'(t) M_{aa}(t) \delta a(t) + 2 \delta u'(t) M_{ua}(t) \delta a(t) + \delta u'(t) M_{uu}(t) \delta u(t)] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) H_{zx}(t, x) \delta z_x(t, x) + \\ & + \delta z'_x(t, x) H_{zxz}(t, x) \delta z(t, x) + \delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \delta z_x(t, x)] dx dt. \end{aligned} \quad (3.30)$$

#### 4. Необходимые условия оптимальности

Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} M'_u(t) \delta u(t) dt = 0; \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \delta a'(t_1) \varphi_{aa}(a(t_1)) \delta a(t_1) + \delta z(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) \delta z(t_1, x_1) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [\delta a'(t) M_{aa}(t) \delta a(t) + 2 \delta u'(t) M_{ua}(t) \delta a(t) + \delta u'(t) M_{uu}(t) \delta u(t)] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) H_{zx}(t, x) \delta z_x(t, x) + \\ & + \delta z'_x(t, x) H_{zxz}(t, x) \delta z(t, x) + \delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \delta z_x(t, x)] dx dt \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Соотношения (4.1), (4.2) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядка соответственно.

Из (4.1) по известной схеме (см., напр., [15, 16]) получается аналог уравнения Эйлера [15].

**Теорема 4.1.** Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы для всех  $\theta \in [t_0, t_1]$  выполнялось соотношение

$$M_u(\theta) = 0, \quad (4.3)$$

где  $\theta \in [t_0, t_1]$  – здесь и в дальнейшем произвольная точка Лебега (правильная точка) (см., напр., [16–18]) управления  $u(t)$ .

Необходимое условие оптимальности (4.3) есть аналог уравнения Эйлера и представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка.

**Определение 4.1.** Каждое допустимое управление  $u(t)$ , являющееся решением уравнения Эйлера, назовем классической экстремалью.

Ясно, что оптимальное управление (если оно существует) находится среди классических экстремалей.

Для сужения множества классических экстремалей надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка.

С этой целью будем использовать неявное необходимое условие оптимальности второго порядка (4.2).

Решение задачи (3.24), (3.25) допускает представление (см., напр., [10, 19])

$$\delta a(t) = \int_{t_0}^t F(t, \tau) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

где  $F(t, \tau)$  ( $n \times n$ ) – матричная функция – решение задачи

$$F_\tau(t, \tau) = F(t, \tau) g_u(\tau),$$

$$F(t, t) = E,$$

( $E$  ( $n \times n$ ) – единичная матрица).

Далее решение краевой задачи (3.26), (3.27) допускает представление [20]

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) [\delta \dot{a}(\tau) - f_{z_x}(\tau, x_0) \delta a(\tau)] d\tau,$$

где  $R(t, x; \tau, s)$  есть решение интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} R(t, x; \tau, s) = E + \int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x; \alpha, \beta) f_z(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \\ + \int_{\tau}^t R(t, x; \alpha, s) f_{z_x}(\alpha, s) d\alpha + \int_s^x R(t, x; \tau, \beta) B(\tau, \beta) d\beta. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (4.4), из (4.5) имеем

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) [g_a(\tau) \delta a(\tau) + g_u(\tau) \delta u(\tau) - f_{z_x}(\tau, x_0) \delta u(\tau)] d\tau. \quad (4.5)$$

Полагая

$$L(t, x, \tau) = R(t, x; \tau, x_0) [g_a(\tau) - f_{z_x}(\tau, x_0)],$$

представление (4.5) записывается в виде

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t L(t, x, \tau) \delta a(\tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Далее, с учетом представления (4.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \delta z(t, x) = \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^{\tau} L(t, x, \tau) F(\tau, s) g_u(s) \delta u(s) ds \right] d\tau = \\ = \int_{t_0}^t \left[ \int_{\tau}^t L(t, x, s) F(s, \tau) ds \right] g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$Q(t, x, \tau) = \int_{\tau}^t L(t, x, s) F(s, \tau) ds + R(t, x; \tau, x), \quad (4.8)$$

представление (4.7) записывается в виде

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t Q(t, x, \tau) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что

$$\delta z_x(t, x) = \int_{t_0}^t Q_x(t, x, \tau) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau. \quad (4.10)$$

При помощи представления (4.4) доказывается, что

$$\begin{aligned} & \delta a'(t_1) \Phi_{aa}(a(t_1)) \delta a(t_1) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) g_u'(\tau) F'(t_1, \tau) \Phi_{aa}(a(t_1)) F(\tau, s) g_u(s) \delta u(s) ds d\tau; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u'(t) M_{ua}(t) \delta a(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\delta u'(\tau) M_{ua}(\tau) F(\tau, t) d\tau] g_u(t) \delta u(t) dt; \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \delta a'(t) M_{aa}(t) \delta a(t) dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{t_0}^t F(t, \tau) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau \right) M_{aa}(t) \left( \int_{t_0}^t F(t, s) g_u(s) \delta u(s) ds \right) dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) g_u'(\tau) \left\{ \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} F'(t, \tau) M_{aa}(t) F(t, s) dt \right\} g_u(s) \delta u(s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Далее, используя (4.9), (4.10), получаем, что

$$\begin{aligned} & \delta z(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) \delta z(t_1, x_1) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) g_u'(\tau) Q'(t_1, x_1, \tau) G_{zz}(z(t_1, x_1)) Q(t_1, x, s) g_u(s) \delta u(s) ds d\tau; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{t_0}^{t_1} Q(t, x, \tau) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau \right)' H_{zz}(t, x) \left( \int_{t_0}^{t_1} Q(t, x, s) g_u(s) \delta u(s) ds \right) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(\tau) g_u'(\tau) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q'(t, x, \tau) H_{zz}(t, x) Q(t, x, s) dx dt \right\} g_u(s) \delta u(s) ds d\tau; \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t, x) H_{zz_x}(t, x) \delta z_x(t, x) dx dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{t_0}^{t_1} Q(t, x, \tau) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau \right)' H_{zz_x}(t, x) \left( \int_{t_0}^{t_1} Q_x(t, x, s) g_u(s) \delta u(s) ds \right) dx dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta' u(\tau) g'_u(\tau) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q'(t, x, \tau) H_{zz_x}(t, x) Q_x(t, x, s) dx dt \right\} g_u(s) \delta u(s) ds d\tau; \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta z'_x(t, x) H_{z_x z}(t, x) \delta z(t, x) dx dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{t_0}^{t_1} Q_x(t, x, \tau) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau \right)' H_{z_x z}(t, x) \left( \int_{t_0}^{t_1} Q(t, x, s) g_u(s) \delta u(s) ds \right) dx dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta' u(\tau) g'_u(\tau) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q'_x(t, x, \tau) H_{z_x z}(t, x) Q(t, x, s) dx dt \right\} g_u(s) \delta u(s) ds d\tau; \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \delta z_x(t, x) dx dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{t_0}^{t_1} Q_x(t, x, \tau) g_u(\tau) \delta u(\tau) d\tau \right)' H_{z_x z_x}(t, x) \left( \int_{t_0}^{t_1} Q_x(t, x, s) g_u(s) \delta u(s) ds \right) dx dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta' u(\tau) g'_u(\tau) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q'_x(t, x, \tau) H_{z_x z_x}(t, x) Q_x(t, x, s) dx dt \right\} g_u(s) \delta u(s) ds d\tau. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Пусть  $K(\tau, s)$  ( $n \times n$ ) – матричная функция, определяемая формулой

$$\begin{aligned}
& K(\tau, s) = -F'(t_1, \tau) \Phi_{aa}(a(t_1)) F(t_1, s) + \\
& + Q'(t_1, x_1, \tau) G_{zz}(z(t_1, x_1)) Q(t_1, x_1, s) - \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} F'(t, \tau) M_{aa}(t) F(t, s) dt + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} \left[ Q'(t, x, \tau) H_{zz}(t, x) Q(t, x, s) + Q'(t, x, \tau) H_{zz_x}(t, x) Q_x(t, x, s) + \right. \\
& \left. + Q'_x(t, x, \tau) H_{z_x z}(t, x) Q(t, x, s) + Q'_x(t, x, \tau) H_{z_x z_x}(t, x) Q_x(t, x, s) \right] dx dt. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Матричная функция  $K(\tau, s)$  определяемая формулой (4.19), является аналогом матричных функций, введенных в работах [21, 22], а также используемых для исследования особых управлений и вывода необходимых условий оптимальности для различных классов задач оптимального управления (см., напр., [11]).

С учетом (4.19) и тождеств (4.11) – (4.18) неравенство (4.2) записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta' u(\tau) g'_u(\tau) K(\tau, s) g_u(s) \delta u(s) ds d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \delta' u(\tau) M_{uu}(\tau) F(\tau, t) d\tau \right] g_u(t) \delta u(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' u(t) M_{uu}(t) \delta u(t) dt \leq 0. \quad (4.20)$$

Сформулируем полученный результат.

**Теорема 4.2.** Для оптимальности классической экстремали  $u(t)$  в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (4.20) выполнялось для всех  $\delta u(t) \in R^r$ ,  $t \in T$ .

Неравенство (4.20) есть необходимое условие оптимальности второго порядка, выраженное непосредственно через параметры задачи (2.1) – (2.6), и носит довольно общий характер. Из него, используя произвольность вариации  $\delta u(t)$  управления  $u(t)$ , можно получить относительно легко проверяемые необходимые условия оптимальности, в частности аналог условия Лежандра – Клебша.

Пусть  $\theta \in [t_0, t_1]$  – произвольная точка Лебега управления  $u(t)$ ,  $v \in R^r$  – произвольный вектор, а  $\mu > 0$  – произвольное достаточно малое число, такое, что  $\theta + \mu < t_1$ .

Вариацию  $\delta u(t)$  управления  $u(t)$  определим по формуле

$$\delta u_\mu(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \mu), \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \mu). \end{cases} \quad (4.21)$$

Принимая во внимания (4.21), в неравенстве (4.20) получим

$$\mu v' M_{uu}(\theta) v + o(\mu) \leq 0.$$

Следовательно

$$v' M_{uu}(\theta) v \leq 0. \quad (4.22)$$

**Теорема 4.3.** (Аналог условия Лежандра – Клебша) Для оптимальности классической экстремали  $u(t)$  в задаче (2.1) – (2.6) необходимо, чтобы неравенство (4.22) выполнялось для всех  $\theta \in [t_0, t_1]$ ,  $v \in R^r$ .

Как видно проверка аналога условия Лежандра – Клебша относительно легче. Но «платой» за это является то, что условие оптимальности (4.22) может вырождаться.

**Определение 4.2.** Классическую экстремаль  $u(t)$  назовем особым в классическом смысле управлением, если

$$v' M_{uu}(\theta) v = 0, \quad (4.23)$$

для всех  $\theta \in [t_0, t_1]$ ,  $v \in R^r$ .

Считая  $u(t)$  особым в классическом смысле управлением, его специальную вариацию определим по формуле

$$\delta u_{\mu}(t) = \sum_{i=1}^m \delta u(t, \mu; \theta_i, l_i, v_i). \quad (4.24)$$

Здесь  $m$  – произвольное натуральное число;  $\theta_i \in [t_0, t_1]$ ,  $i = \overline{1, m}$ , произвольные правильные точки управления  $u(t)$ , удовлетворяющие условию  $t_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m < t_1$ ;  $l_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , – произвольные числа;  $v_i \in R^n$ ,  $i = \overline{1, m}$ , произвольные ограниченные векторы. А  $\delta u(t, \mu; \theta_i, l_i, v_i)$  – аналог игольчатой вариации, определяемый формулой

$$\delta u(t, \mu; \theta_i, l_i, v_i) = \begin{cases} v_i, & t \in [\theta_i, \theta_i + l_i \mu], \\ 0, & t \in [t_0, t_1] \setminus [\theta_i, \theta_i + l_i \mu]. \end{cases} \quad (4.25)$$

Операцию сложения игольчатых вариаций  $\delta u(t, \mu; \theta_i, l_i, v_i)$  следуя [22] определяем следующим образом.

Если  $\theta_1 \neq \theta_2$ , то суммой вариаций  $\delta u(t, \mu; \theta_1, l_1, v_1)$  и  $\delta u(t, \mu; \theta_2, l_2, v_2)$  назовем вариацию вида

$$\delta u_{\mu}(t) = \begin{cases} v_i, & t \in [\theta_i, \theta_i + \mu l_i], \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup_{i=1}^2 [\theta_i, \theta_i + \mu l_i]. \end{cases}$$

Если же  $\theta_1 = \theta_2$ , то суммой вариаций  $\delta u(t, \mu; \theta_1, l_1, v_1)$  и  $\delta u(t, \mu; \theta_2, l_2, v_2)$  назовем вариацию

$$\delta u_{\mu}(t) = \begin{cases} v_1, & t \in [\theta_1, \theta_1 + \mu l_1], \\ v_2, & t \in [\theta_1, \theta_1 + (\mu l_1 + \mu l_2)], \\ 0, & t \in T \setminus [\theta_1, \theta_1 + (\mu l_1 + \mu l_2)]. \end{cases}$$

Понятие суммирования подобным образом распространяется на любое конечное число игольчатых вариаций вида (4.25).

Теперь предположим, что  $u(t)$  – особое в классическом смысле оптимальное управление. Учитывая вид (4.24) игольчатой вариации  $\delta u_{\mu}(t)$  в неравенстве (4.20), а также принимая во внимания (4.23), после некоторых преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \mu^2 \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m l_i v_i' g_u'(\theta_i) K(\theta_i, \theta_j) g_u(\theta_j) v_j + \sum_{i=1}^m l_i v_i' H_{uu}(\theta_i) [l_i g_u(\theta_i) v_i + \right. \\ \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} l_j F(\theta_i, \theta_j) g_u(\theta_j) v_j \right] + o(\mu^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности  $\mu$  следует справедливость утверждения.

**Теорема 4.4** (Многоточечное необходимое условия оптимальности). Для оптимальности особого в классическом смысле управления  $u(t)$  необходимо, чтобы для любого натурального  $m$  неравенство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m l_i v'_i g'_u(\theta_i) K(\theta_i, \theta_j) g_u(\theta_j) v_j + \sum_{i=1}^m l_i v'_i H_{uu}(\theta_i) [l_i g_u(\theta_i) v_i + \\ + 2 \sum_{j=1}^{i-1} l_j F(\theta_i, \theta_j) g_u(\theta_j) v_j] \leq 0 \quad (4.26)$$

выполнялось для всех  $v_i \in R^r$ ,  $l_i \geq 0$ ,  $\theta_i \in [t_0, t_1)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Неравенство (4.26) есть многоточечное необходимое условие оптимальности особых в классическом смысле управлений.

Из теоремы 4.4. при  $m = 1$  следует

**Теорема 4.5.** Для оптимальности классической экстремали  $u(t)$  необходимо, чтобы неравенство

$$v' [g'_u(\theta) K(\theta, \theta) g_u(\theta) + M_{uu}(\theta) g_u(\theta)] v \leq 0 \quad (4.27)$$

выполнялось для всех  $v \in R^r$ ,  $\theta \in [t_0, t_1)$ .

Неравенство (4.27) есть аналог условия Габасова – Кирилловой из [24–26], полученный другим методом для терминальной задачи оптимального управления обыкновенными динамическими системами. Заметим, что необходимое условия оптимальности (4.26) остается в силе также при вырождении необходимого условия оптимальности (4.27).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами // Математический сборник. 1966. Т. 69. № 3. С. 371–421.
2. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1965. Т. 29. № 6. С. 1205–1260.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Оптимальные системы. Статистические методы: сб. М.: Наука, 1967. С. 76–92.
4. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989. 160 с.
5. Васильев О.В. Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Л., 1984. 42 с.
6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука, 1990. 190 с.
8. Погодаев Н.И. О свойствах решений задачи Гурса – Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Сиб. матем. журнал. 2007. № 5. С. 1116–1123.
9. Погодаев Н.И. О решениях системы Гурса – Дарбу с распределенными граничными управлениями: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 2009. 18 с.
10. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 550 с.
11. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.

12. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами описываемых системами Гурса – Дарбу // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1972. № 1. С. 61–72.
13. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса – Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. № 5. С. 845–856.
14. Гасанов К.К. О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. № 3. С. 591–608.
15. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
16. Мордохович Б.Ш. Метод матрических аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
17. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
18. Новоженев М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький: Изд-во ГГУ, 1986. 87 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 256 с.
20. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1973. № 2.
21. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особых управлений в системах Гурса – Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1981. № 2. С. 100–104.
22. Мансимов К.Б. Исследование особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 42 с.
23. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференц. уравнения. 1975. № 10. С. 1765–1773.
24. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
25. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1970. № 4. С. 665–670.
26. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Об оптимальности особых управлений // Дифференц. уравнения. 1969. № 6. С. 1000–1011.

Статья поступила 15.03.2017 г.

Mansimov K. B., Suleymanova V.A. (2017) NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN THE ONE BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR GOURSAT – DARBOUX SYSTEMS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 26–42

DOI 10.17223/19988621/49/3

In this paper, a boundary optimal control problem described by the Goursat–Darboux system is considered under the assumption that the control domain is open.

We consider the problem of minimizing of the functional

$$I(u) = \varphi(a(t_1)) + G(z(t_1, x_1)),$$

under constraints

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$z_{tx} = B(t, x)z_t + f(t, x, z, z_x), \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1],$$

$$z(t, x_0) = a(t), \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$z(t_0, x) = b(x), \quad x \in X = [x_0, x_1],$$

$$a(t_0) = b(x_0) = a_0,$$

$$\dot{a} = g(t, a, u), \quad t \in T,$$

$$a(t_0) = a_0.$$



Here,  $f(t, x, z, z_x)$  is a given  $n$ -dimensional vector-function which is continuous with respect to set of variables, together with partial derivatives with respect to  $z, z_x$  up to second order,  $B(t, x)$  is a given measurable and bounded matrix function,  $b(x)$  is a given  $n$ -dimensional absolute continuous vector-valued function,  $t_0, t_1, x_0, x_1$  ( $t_0 < t_1$ ;  $x_0 < x_1$ ) are given,  $a_0$  is a given constant vector,  $g(t, a, u)$  given  $n$ -dimensional vector-function which is continuous with respect to the set of variables together with partial derivatives with respect to  $(a, u)$  up to second order,  $\varphi(a)$  and  $G(z)$  are given twice continuously differentiable scalar functions,  $U$  is a given non-empty, bounded, and open set, and  $u(t)$  is a measurable and bounded  $r$ -dimensional control vector-function.

The first and second order necessary conditions of optimality are established.

Keywords: boundary control, Goursat–Darboux systems, analogous the Euler equation, analogous the Gabasov – Kirillova optimality condition.

*MANSIMOV Kamil' Bayramali ogly* (Doctor of Physics and Mathematics Baku State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan)  
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

*SULEYMANOVA Vusalya Abdulla gyzy* (Sumgait State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan)

#### REFERENCES

1. Yegorov A.I. (1966) Neobkhodimye usloviya optimalnosti dlya sistem s raspredelennymi parametrami [Necessary optimality conditions for systems with distributed parameters]. *Matematicheskii sbornik*. 69(3). pp. 371–421.
2. Yegorov A.I. (1965) Optimal'nye protsessy v sistemakh s raspredelennymi parametrami i nekotorye zadachi invariantnosti [Optimal processes in systems with distributed parameters and some problems of the theory of invariance]. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math.* 29(6). pp. 1205–1260.
3. Yegorov A.I. (1967) Optimal'noe upravlenie sistemami s raspredelennymi parametrami i nekotorye zadachi invariantnosti [Optimal control of systems with distributed parameters and some problems of invariance theory]. *Optimal Systems. Statistical methods*. Moscow: Nauka, pp. 76–92.
4. Srochko V.A. (1989) *Variatsionnyi printsip maksimuma i metod linearizatsii v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Variational Maximum Principle and Linearization Method in Optimal Control Problems]. Irkutsk. Irkutsk University Publ.
5. Vasilyev O.V. (1984) *Kachestvennye i konstruktivnye metody optimizatsii sistem s raspredelennymi parametrami* [Qualitative and constructive methods for optimizing systems with distributed parameters]. Avtoref. diss. degree of doctor of phys.-math. sciences. Leningrad. 42 p.
6. Vasilyev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
7. Vasilyev O.V., Srochko V.A., Terletskiy V.A. (1990) *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya* [Optimization methods and their applications]. Novosibirsk: Nauka.
8. Pogodaev N.I. (2007) On the properties of solutions to the Goursat–Darboux problem with boundary and distributed controls. *Sib. Math. J.* 48(5). pp. 897–912. <https://doi.org/10.1007/s11202-007-0092-3>.
9. Pogodayev N.I. *O resheniyakh sistemy Gursa–Darbu s raspredelennymi granichnymi upravleniyami* [On solutions of the Goursat–Darboux system with distributed and boundary controls]. Abstract. diss. scientific degree of candidate of physico-mathematical sciences. Irkutsk, 2009. 18 p.

10. Alekseyev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. (1979) *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow: Nauka.
11. Mansimov K.B., Mardanov M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control for Goursat–Darboux systems]. Baku: Elm Publ.
12. Plotnikov V.I., Sumin V.I. (1972) The optimization of objects with distributed parameters, described by Goursat–Darboux systems. *Zh. vychisl. mat. mat. fiz.* 12(1). pp. 61–77. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90066-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90066-3).
13. Plotnikov V.I., Sumin V.I. (1972) Problemy ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa–Darbu [Problems of stability of nonlinear Goursat–Darboux systems]. *Differents.Uravneniya*. 5. pp. 845–856.
14. Gasanov K.K. (1973) *The existence of optimal controls for processes described by a system of hyperbolic equations*. *Zh. vychisl. mat. mat. fiz.* 13(3). pp. 599–608. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(73\)90101-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(73)90101-8).
15. Gabasov R., Kirillova F.M., et al. (2011) *Metody optimizatsii* [Methods of optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
16. Morduhovich B.Sh. (1988) *Metod matrichnykh approksimatsiy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Method of matrix approximations in optimization and control problems]. Moscow: Nauka.
17. Pontryagin L.S. et al. (1969) *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka.
18. Novozhenov M.M., Sumin V.I., Sumin M.I. (1986) *Metody optimal'nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki* [Methods of optimal control of systems of mathematical physics]. Gor'kiy: Izd-vo GGU.
19. Gabasov R., Kirillova F.M. (1973) *Optimizatsiya lineynykh sistem* [Optimization of linear systems]. Minsk: Izd-vo BSU.
20. Akhiyev S.S., Akhmedov K.T. (1973) Ob integral'nom predstavlenii resheniy nekotorykh differentsial'nykh uravneniy [On the integral representation of solutions of some differential equations]. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. Fiz.-tehn. and mat. Sciences*. 2.
21. Mansimov K.B. (1981) Ob odnoy scheme issledovaniya osobykh upravleniy v sistemakh Gursa–Darbu [On a scheme for investigating special controls in Goursat–Darboux systems]. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. Fiz.-tehn. and math. Sciences*. 2. pp. 100–104.
22. Mansimov K.B. (1994) *Issledovaniye osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Investigation of special processes in problems of optimal control]. Avtoref. diss. degree of phys. math. sciences. Baku. 42 p.
23. Gorokhavi S.Ya. (1975) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v zadache s podvizhnym pravom kontsom trayektorii [Necessary optimality conditions for the problem with the right end of the moving path]. *Differential Equations*. 10. p. 1765–1773.
24. Gabasov R., Kirillova F.M. (1973) *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Special optimal controls]. Moscow: Nauka.
25. Gabasov R., Kirillova F.M. (1970) K teorii neobkhodimykh usloviy optimalnosti vysokogo poryadka [To the theory of necessary conditions for high-order optimality]. *Differents. Equations*. 4. p. 665–670.
26. Gabasov R., Kirillova F.M. (1969) Ob optimal'nosti osobykh upravleniy [On the optimality of singular controls]. *Differents. Equations*. 6. pp. 1000–1011.

УДК 519.23  
DOI 10.17223/19988621/49/4

М.А. Повзун, Е.А. Пчелинцев

## ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИИ С ЗАВИСИМЫМИ ШУМАМИ<sup>1</sup>

Рассматривается задача оценивания  $d$ -мерного вектора неизвестных параметров регрессии с нелинейными условно-гауссовскими шумами типа AR/ARCH. В качестве метода оценивания используется модификация процедуры Джеймса – Стейна. Предлагается улучшенная оценка в смысле среднеквадратической точности. Приводятся результаты численного сравнения эмпирических рисков предлагаемой оценки и оценки МНК для модели с шумами AR(1)/ARCH(1).

**Ключевые слова:** *регрессия, улучшенное оценивание, среднеквадратический риск, условно-гауссовский шум, процесс типа AR/ARCH.*

### 1. Введение. Постановка задачи

Основной задачей при описании статистических данных является построение адекватной модели и оценка её коэффициентов [1, 2]. Когда речь идет о нахождении оценки, то классическими являются метод наименьших квадратов (МНК) и метод максимального правдоподобия. Эти методы позволяют построить оценки с хорошими свойствами, такими, как несмещенность, оптимальность и состоятельность, для схемы независимых наблюдений [3]. Применение классических методов к более общим моделям, в которых возмущения являются зависимыми и не-гауссовскими, не всегда приводит к наилучшим оценкам.

В 60-х годах 20 века Джеймс и Стейн предложили подход, позволяющий повысить точность оценки среднего многомерного нормального распределения, если не ограничиваться несмещенными оценками. Была построена процедура сжатия, которая открыла возможности для повышения качества оценивания [4]. Метод Джеймса – Стейна получил развитие для более общих моделей, в том числе с шумами, имеющими неизвестную ковариационную матрицу [5–8]. В [3, 9] были предложены процедуры улучшенного оценивания для регрессии со сферическими симметричными распределениями шумов.

В данной работе рассмотрим задачу улучшенного (в смысле среднеквадратической точности) оценивания  $d$ -мерного вектора регрессии с нелинейным стохастическим условно-гауссовским шумом. Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  наблюдения описываются уравнением

$$Y = \theta + v\xi, \quad (1)$$

где  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$  – вектор неизвестных параметров,  $v$  – известное положительное число,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$  – вектор первых  $d$  значений процесса AR(p)/ARCH(q), который удовлетворяет уравнению

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-11-01049.

$$\xi_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \xi_{t-i} + \sqrt{\alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \xi_{t-j}^2} \varepsilon_t. \quad (2)$$

Предположим, что  $\xi$  имеет условно-гауссовское распределение относительно некоторой  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{G}$  с нулевым средним и условной ковариационной матрицей  $D(\mathcal{G})$ , такой, что

$$\text{tr} D(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(D(\mathcal{G})) \geq \kappa(d) \geq 0,$$

а математическое ожидание максимального собственного значения ограничено сверху, т.е.

$$\mathbf{E} \lambda_{\max}(D(\mathcal{G})) \leq \lambda^*$$

и  $\xi_0$  – некоторая случайная величина с нулевым средним и дисперсией равной  $s^2$ . Сама матрица  $D(\mathcal{G})$  зависит от параметров  $\nu, \beta_i, \alpha_j, s^2$  модели (1), (2), причем коэффициенты  $\alpha_0, \dots, \alpha_q$  неотрицательны. Здесь  $(\varepsilon_t)_{t \geq 0}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием и постоянной дисперсией  $\sigma^2$  [2]. Предполагается, что мешающие параметры шума  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq p}, (\alpha_j)_{1 \leq j \leq q}, s^2$  неизвестны.

Задача заключается в том, чтобы оценить вектор неизвестных параметров  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$  в модели (1) по наблюдениям вектора  $Y$ .

В настоящее время эффективные оценки рассматриваются с позиции минимизации среднеквадратических рисков [10].

Напомним некоторые определения [1].

**Определение 1.** Функция  $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется функцией потерь, если она симметрична, неотрицательна и удовлетворяет условиям:

1. Множество  $\{u \in \mathbb{R}^d : L(u) < c\}$  выпукло при всех  $c > 0$ .
2.  $L(u)$  растет медленнее любой из функций  $e^{\varepsilon|u|}$ ,  $\varepsilon > 0$  при  $|u| \rightarrow \infty$ .

**Определение 2.** Функцией риска для оценки параметра  $\hat{\theta}$  называется функция

$$R(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}_\theta L(\hat{\theta}),$$

где  $\mathbf{E}_\theta$  – обозначает усреднение по распределению  $P_\theta$ .

В качестве меры точности оценки в работе выберем среднеквадратический риск вида

$$R(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}_\theta |\theta - \hat{\theta}|^2, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2.$$

Основная цель – развить метод улучшенного оценивания, предложенный в [10], для моделей типа (1), (2), в которых шум имеет нелинейно зависимые гауссовские компоненты. Такие модели имеют широкое применение в эконометрике при описании эволюции экономических показателей, подверженных влиянию сложных шумов с неизвестными вероятностными характеристиками [2].

## 2. Основной результат

Известно [1], что в классе линейных несмещенных оценок наилучшей в среднеквадратическом смысле является оценка по методу наименьших квадратов

$$\hat{\theta} = Y. \quad (3)$$

На практике, например, при воздействии шумов импульсного типа, такая оценка может иметь низкую точность. В работах [10–14] предлагается модификация этой оценки для дискретных и непрерывных моделей с зависимыми условно-гауссовскими шумами со скачкообразной компонентой. Согласно этому подходу, в данной работе предлагается для оценивания параметра  $\theta$  использовать следующую сжимающую процедуру:

$$\theta^* = \left(1 - \frac{c}{|Y|}\right)Y, \quad (4)$$

где  $c = v^2 \kappa(d) \delta_d$ ,  $\delta_d = \left( \rho + \sqrt{2\lambda^*} v \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\Gamma(d/2)} \right)^{-1}$ ,  $\rho = \sup_{\theta \in \Theta} \{|\theta|\}$ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема.** Существует  $d_0 \geq 2$ , такое, что для всех  $d \geq d_0$  оценка  $\theta^*$  превосходит по среднеквадратической точности оценку МНК (3). Более того, разность рисков

$$\Delta(\theta) = R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) \leq -c^2.$$

**Доказательство.** Рассмотрим среднеквадратический риск оценки  $\theta^*$ :

$$\begin{aligned} R(\theta^*, \theta) &= \mathbf{E}_\theta |\theta^* - \theta|^2 = \mathbf{E}_\theta |\hat{\theta} - \theta + g(Y)Y - \hat{\theta}|^2 = \\ &= \mathbf{E}_\theta |\hat{\theta} - \theta|^2 + \mathbf{E}_\theta \left( (g(Y) - 1)^2 |Y|^2 \right) + 2 \sum_{j=1}^d \mathbf{E}_\theta (g(Y) - 1)(Y_j - \theta)Y_j, \end{aligned}$$

где  $g(x) = c/|x|$ . Вычисляя второе и третье слагаемые, как показано, например, в [10], имеем

$$R(\theta^*, \theta) = R(\hat{\theta}, \theta) + c^2 - \mathbf{E}_\theta W(Y), \quad W(x) = c^2 + 2c \frac{x'D(\mathcal{G})x}{|x|^3} - 2trD(\mathcal{G}) \cdot c \frac{1}{|x|}.$$

Учитывая здесь, что шум  $\xi$  имеет условно-гауссовское распределение  $Law(\xi|\mathcal{G}) = \mathcal{N}_d(0, D(\mathcal{G}))$  и неравенство  $x'Ax \leq \lambda_{\max}(A)\|x\|^2$ , получаем

$$\mathbf{E}_\theta W(Y) \leq -2cv^2 \mathbf{E}_\theta \frac{trD(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(D(\mathcal{G}))}{|Y|}.$$

Рассмотрим разность рисков оценок  $\theta^*$  и  $\hat{\theta}$ :

$$\Delta_\theta = c^2 - cv^2 \mathbf{E}_\theta \frac{trD(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(D(\mathcal{G}))}{|Y|} \leq c^2 - cv^2 \kappa(d) \mathbf{E}_\theta |Y|^{-1}.$$

Оценим теперь математическое ожидание величины  $|Y|^{-1}$ . Используя неравенство треугольника и Йенсена, имеем оценку снизу

$$\mathbf{E}_\theta |Y|^{-1} = \mathbf{E}_\theta \frac{1}{|\theta + v\xi|} \geq \frac{1}{\rho + v\mathbf{E}_\theta |\xi|},$$

где 
$$\mathbf{E}_\theta |\xi| = \int_{\mathbb{R}^d} |x| f_\xi(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det D(\mathcal{G})}} \int_{\mathbb{R}^d} |x| e^{-\frac{x'D^{-1}(\mathcal{G})x}{2}} dx.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменной  $u = D^{-1/2}(\mathcal{G})x$ . Тогда

$$\mathbf{E}_\theta |\xi| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |D^{1/2}(\mathcal{G})u| e^{-\frac{|u|^2}{2}} du \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(D(\mathcal{G}))}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |u| e^{-\frac{|u|^2}{2}} du.$$

Переходя в последнем интеграле к сферическим координатам, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta |\xi| &\leq \sqrt{\lambda_{\max}(D(\mathcal{G}))} \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^{+\infty} r^d e^{-\frac{r^2}{2}} dr \leq \\ &\leq \sqrt{\lambda^*} \frac{2}{(2)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^{+\infty} (2t)^{\frac{d-1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{2\lambda^*} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mathbf{E}_\theta |Y|^{-1} \geq \delta_d$  и

$$\Delta_\theta \leq c^2 - cv^2 \kappa(d) \delta_d.$$

Минимизируя правую часть по  $c$ , находим  $c = v^2 \kappa(d) \delta_d$ . Следовательно,  $\Delta_\theta \leq -c^2$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Теорема утверждает, что предложенная оценка (4) превосходит по среднеквадратической точности оценку МНК. При этом минимальное снижение риска равно  $-c^2$ .

Далее рассмотрим пример модели (1), в которой координаты вектора шумов задаются процессом AR(1)/ARCH(1) вида

$$\xi_t = \beta_1 \xi_{t-1} + \sqrt{\alpha_1 \xi_{t-1}^2} \varepsilon_t. \quad (5)$$

где  $|\beta_1| \leq \tilde{\beta} < 1$ ,  $0 < \tilde{\alpha} \leq |\alpha_1| < 1$  и

$$\mathbf{E} \xi_0 = 0, \mathbf{D} \xi_0 = s^2 \text{ и } \mathbf{E} \varepsilon_t = 0, \mathbf{D} \varepsilon_t = \sigma^2,$$

$s^2 \leq \tilde{s}^2$ ,  $0 < \sigma_*^2 \leq \sigma^2 \leq (\sigma^*)^2$ . При этом предполагается, что  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{s}$ ,  $\sigma_*$  и  $\sigma^*$  – известные положительные величины.

Введем обозначения:

$$a_* = \tilde{\alpha} \sigma_*^2, \quad a^* = \tilde{\beta}^2 + (\sigma^*)^2 \text{ и } d_0 = \left\lceil \frac{a^* (1 + \tilde{\beta})}{a_* (1 - \tilde{\beta})} \right\rceil,$$

где  $[a]$  – целая часть числа  $a$ .

**Следствие.** Пусть в модели (1) шум  $\xi$  описывается уравнением (5). Тогда, для всех  $d > d_0$  разность рисков оценки

$$\theta^* = \left( 1 - \tilde{s}^2 \left( a^* d - a_* \frac{1 + \tilde{\beta}}{1 - \tilde{\beta}} \right) \frac{v^2 \delta_d}{|Y|} \right) Y$$

и оценки МНК (4) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta(\theta) \leq - \left( a^* d - a_* \frac{1 + \tilde{\beta}}{1 - \tilde{\beta}} \right)^2 v^4 \delta_d^2.$$

**Доказательство.** Заметим, что при заданных условиях элементы ковариационной матрицы  $D(\mathcal{G})$  имеют вид  $\langle D(\mathcal{G}) \rangle_{ij} = s^2 \beta_1^{|i-j|} a^{\min\{i,j\}}$  или в развернутом виде

$$D(\mathcal{G}) = s^2 \begin{pmatrix} a & a\beta_1 & \dots & a\beta_1^{d-1} \\ a\beta_1 & a^2 & \dots & a^2\beta_1^{d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a\beta_1^{d-1} & a^2\beta_1^{d-2} & \dots & a^d \end{pmatrix}.$$

След данной матрицы  $trD(\mathcal{G}) = s^2 \sum_{j=1}^d a^j$ . Нужно найти верхнюю оценку для максимального собственного числа матрицы  $D(\mathcal{G})$ . Рассмотрим следующую квадратичную форму:

$$\begin{aligned} z'D(\mathcal{G})z &= s^2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \beta_1^{|i-j|} a^{\min\{i,j\}} z_i z_j = s^2 \left( \sum_{j=1}^d a^j z_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{l=1}^{d-i} a^i \beta_1^l z_i z_{l+i} \right) = \\ &= s^2 \left( \sum_{j=1}^d a^j z_j^2 + 2 \sum_{l=1}^{d-1} \beta_1^l \sum_{i=1}^{d-l} a^i z_i z_{i+l} \right) \leq \tilde{s}^2 a^* \left( 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \beta_1^l \right) \leq \tilde{s}^2 a^* \left( 1 + \frac{2\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \right) = \frac{\tilde{s}^2 a^* (1+\tilde{\beta})}{1-\tilde{\beta}}. \end{aligned}$$

Далее оценим разность

$$trD(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(D(\mathcal{G})) \geq \tilde{s}^2 \left( \sum_{j=1}^d a^j - \frac{a^* (1+\tilde{\beta})}{1-\tilde{\beta}} \right) \geq \tilde{s}^2 \left( a_* d + a_* \frac{1+\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \right) = \kappa(d) > 0.$$

Отсюда следует требуемый результат.

Как видно, существуют модели, которые удовлетворяют заданным условиям. Этим подтверждается целесообразность построения улучшенных оценок.

### 3. Численный анализ эмпирических среднеквадратических рисков

Для численного подтверждения аналитических результатов проведено имитационное моделирование в среде MATLAB. Предполагаем, что  $\theta$  – единичный вектор размерности  $d$ ,  $\xi_t$  – значения процесса AR(1)/ARCH(1), описываемого уравнением (5) с коэффициентами  $\beta_0 = \alpha_0 = 0$ , т.е.

$$\xi_t = \beta_1 \xi_{t-1} + \sqrt{\alpha_1 \xi_{t-1}^2} \varepsilon_t.$$

Остальные параметры модели меняются. Среднеквадратический риск оценки вычислялся по следующей эмпирической формуле:

$$\tilde{R}(\theta, \hat{\theta}) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\theta - \hat{\theta}_k|^2,$$

где  $\hat{\theta}_k$  –  $k$ -я реализация оценки  $\hat{\theta}$ , а  $N = 1000$ . Далее в таблицах приводятся результаты моделирования при изменении параметров шума.

Таблица 1

**Поведение эмпирических среднеквадратических рисков оценок при изменении параметра  $\alpha_1$  при  $\beta_1 = 0.1$ ;  $\sigma^2 = 1$ ;  $s^2 = 1$ ;  $d = 5$ ;  $\nu = 1$**

| $\alpha_1$ | $R(\hat{\theta}, \theta)$ | $R(\theta^*, \theta)$ | $\Delta(\theta)$ | $-c^2$  |
|------------|---------------------------|-----------------------|------------------|---------|
| 0.1        | 0.6514                    | 0.6383                | -0.0131          | -0.0013 |
| 0.2        | 2.3788                    | 2.2696                | -0.1092          | -0.0149 |
| 0.4        | 36.5023                   | 34.4281               | -2.0741          | -0.3936 |
| 0.8        | 502.7098                  | 478.9157              | -23.7941         | -2.9729 |

Таблица 2

**Поведение эмпирических среднеквадратических рисков оценок при изменении параметра  $\beta_1$  при  $\alpha_1 = 0.1$ ;  $\sigma^2 = 1$ ;  $s^2 = 1$ ;  $d = 5$ ;  $\nu = 1$**

| $\beta_1$ | $R(\hat{\theta}, \theta)$ | $R(\theta^*, \theta)$ | $\Delta(\theta)$ | $-c^2$  |
|-----------|---------------------------|-----------------------|------------------|---------|
| 0.1       | 0.6900                    | 0.6800                | -0.0100          | -0.0013 |
| 0.2       | 0.6521                    | 0.6316                | -0.0206          | -0.0042 |
| 0.4       | 1.0896                    | 1.0357                | -0.0540          | -0.0195 |
| 0.8       | 5.4522                    | 5.1229                | -0.3293          | -0.0470 |

Таблица 3

**Поведение эмпирических среднеквадратических рисков оценок при изменении параметра  $s^2$  при  $\beta_1 = 0.1$ ;  $\alpha_1 = 0.1$ ;  $\sigma^2 = 1$ ;  $d = 5$ ;  $\nu = 1$**

| $s^2$ | $R(\hat{\theta}, \theta)$ | $R(\theta^*, \theta)$ | $\Delta(\theta)$ | $-c^2$  |
|-------|---------------------------|-----------------------|------------------|---------|
| 1     | 0.6582                    | 0.6459                | -0.0124          | -0.0013 |
| 2     | 2.4482                    | 2.3790                | -0.0691          | -0.0040 |
| 4     | 10.8724                   | 10.5511               | -0.3213          | -0.0116 |
| 8     | 40.6176                   | 39.4273               | -1.1902          | -0.0315 |
| 16    | 143.0420                  | 139.0146              | -4.0275          | -0.0810 |

Таблица 4

**Поведение эмпирических среднеквадратических рисков оценок при изменении параметра  $\sigma^2$  при  $\beta_1 = 0.1$ ;  $\alpha_1 = 0.1$ ;  $s^2 = 1$ ;  $d = 5$ ;  $\nu = 1$**

| $\sigma^2$ | $R(\hat{\theta}, \theta)$ | $R(\theta^*, \theta)$ | $\Delta(\theta)$ | $-c^2$  |
|------------|---------------------------|-----------------------|------------------|---------|
| 2          | 0.7752                    | 0.7611                | -0.0140          | -0.0013 |
| 4          | 27.7204                   | 27.2507               | -0.4697          | -0.0149 |
| 8          | 5.3665e+04                | 5.3611e+04            | -53.6798         | -0.3936 |
| 16         | 2.3232e+07                | 2.3228e+07            | -3.861e+03       | -2.9729 |



Как видно из табл. 1 – 4, при изменении параметров риск улучшенной оценки меньше, чем риск оценки МНК, что численно подтверждает утверждение теоремы о преимуществе в среднеквадратической точности предложенной оценки (4).

Таблица 5

**Поведение эмпирических среднеквадратических рисков оценок  
при изменении параметра  $d$  при  $\beta_1 = 0.7$ ;  $\alpha_1 = 0.2$ ;  $s^2 = 1$ ;  $\sigma^2 = 1.5$ ;  $\nu = 2$**

| $d$ | $R(\hat{\theta}, \theta)$ | $R(\theta^*, \theta)$ | $\Delta(\theta)$ | $-c^2$  |
|-----|---------------------------|-----------------------|------------------|---------|
| 2   | 7.3268                    | 6.6627                | -0.6641          | -0.0657 |
| 3   | 10.7353                   | 9.4675                | -1.2678          | -0.2025 |
| 4   | 15.7660                   | 13.8821               | -1.8839          | -0.3863 |
| 5   | 20.2577                   | 17.7924               | -2.4653          | -0.6079 |
| 6   | 24.7658                   | 21.8361               | -2.9297          | -0.8609 |
| 10  | 25.5038                   | 21.6807               | -3.8231          | -2.0996 |

Из табл. 5 видно, что при увеличении размерности  $d$  улучшенная оценка точнее и разность рисков  $\Delta(\theta)$  возрастает.

**Замечание.** При малых значениях дисперсий  $\sigma^2$ ,  $s^2$  шум  $\xi$  быстро затухает с ростом размерности  $d$ , а когда дисперсии увеличиваются, процесс выходит из области стационарности. Отсюда вытекает, что сделанные предположения относительно областей изменения этих параметров в (5) являются вполне оправданными.

В заключение отметим, что в случаях, когда шумы оказывают сильное влияние на данные, предлагаемая оценка (4) обеспечивает более высокое качество оценивания по сравнению с классической оценкой МНК (3). Полученные результаты могут использоваться при статистической идентификации моделей, шум которых описывается резко меняющимися (скачкообразными) временными рядами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И.А., Хасьминский П.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с.
3. Fourdrinier D. Statistique inférentielle. Paris: Dunod, 2002. P. 336.
4. James W., Stein C. Estimation with quadratic loss // Proc. Fourth Berkeley Symposium on Mathematics Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley. 1961. V. 1. P. 361–380.
5. Berger J.O., Haff L.R. A class of minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix // Statist. Decisions. 1983. No. 1. P. 105–129.
6. Efron B., Morris C. Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Statist. 1976. No. 4. P. 11–21.
7. Gleser L.J. Minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix // Ann. Statist. 1986. V. 14. No. 4. P. 1625–1633.
8. Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Statist. 1981. V. 9(6). P. 1135–1151.
9. Fourdrinier D., Strawderman W.E., William E. A unified and generalized set of shrinkage bounds on minimax Stein estimates // J. Multivariate Anal. 2008. V. 99. P. 2221–2233.
10. Пчелинцев Е.А. Процедура Джеймса – Стейна для условно-гауссовской регрессии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 4(16). С. 6–17.

11. Конеv В.В., Пчелинцев Е.А. Оценивание параметрической регрессии с импульсными шумами по дискретным наблюдениям // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1(17). С. 20–35.
12. Конеv В.В., Пергаменников С.М., Пчелинцев Е.А. Оценивание параметрической регрессии с импульсными шумами по дискретным наблюдениям // Теория вероятностей и ее применения. 2013. Т. 58. № 3. С. 454–471.
13. Pchelintsev E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2013. V. 1. P. 16–28.
14. Пчелинцев Е.А., Пчелинцев В.А. Минимаксное оценивание гауссовской параметрической регрессии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 5(31). С. 40–47.

Статья поступила 11.07.2017 г.

Povzun M.A., Pchelintsev E.A. (2017) ESTIMATING PARAMETERS IN A REGRESSION MODEL WITH DEPENDENT NOISES *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 43–51

DOI 10.17223/19988621/49/4

Let on the probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  the observations be described by the equation

$$Y = \theta + v\xi, \quad (1)$$

where  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$  is a vector of unknown parameters,  $v$  is a known positive number,  $\xi$  is the vector of first  $d$  values of the AR(p)/ARCH(q) process which satisfies the equation

$$\xi_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \xi_{t-i} + \sqrt{\alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \xi_{t-j}^2} \varepsilon_t. \quad (2)$$

We suppose that the noise  $\xi$  has a conditionally Gaussian distribution with respect to some  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$  with a zero mean and the conditional covariance matrix  $D(\mathcal{G})$  such that

$$\text{tr} D(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(D(\mathcal{G})) \geq \kappa(d) \geq 0$$

and

$$E \lambda_{\max}(D(\mathcal{G})) \leq \lambda^*.$$

Let  $\xi_0$  be a random variable with a zero mean and variance  $s^2$ . The matrix  $D(\mathcal{G})$  may depend on  $v, \beta_i, \alpha_j, s^2$ . The coefficients  $\alpha_0, \dots, \alpha_k$  are assumed to be nonnegative. The noise  $(\varepsilon_t)_{t \geq 0}$  in (2) is a sequence of i.i.d. random variables with a finite mean and constant variance  $\sigma^2$  [13]. The nuisance parameters  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq p}$ ,  $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq q}$ , and  $s^2$  of the noise are unknown.

The problem is to estimate the vector of unknown parameters  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$  in the model (1) by observations  $Y$ .

It is known that, in the class of linear unbiased estimators, the best one is the least-squares estimator (LSE)

$$\hat{\theta} = Y. \quad (3)$$

However, for example, in the case of pulse-type disturbances, such an estimate may have a low accuracy. In [8–12], special modifications of this estimate were developed for discrete and continuous models with dependent conditionally Gaussian noises. Following this approach, this paper proposes the following shrinkage procedure for estimating the parameter  $\theta$ :

$$\theta^* = \left(1 - \frac{c}{|Y|}\right) Y, \quad (4)$$

where  $c = v^2 \kappa(d) \delta_d$ ,  $\delta_d = \left( \rho + \sqrt{2\lambda^*} v \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\Gamma(d/2)} \right)^{-1}$ ,  $\rho = \sup_{\theta \in \Theta} \{|\theta|\}$ .

The main result of this paper is the following theorem.

**Theorem.** There exists an integer  $d_0 \geq 2$  such that for any  $d \geq d_0$  the estimate  $\theta^*$  given by (4) outperforms the LSE (3) in the mean square accuracy. Moreover, the minimal gain in the mean square accuracy satisfies the inequality

$$\Delta(\theta) = R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) \leq -c^2.$$

The results of numerical simulation of the empirical risks of the proposed improved estimate and LSE for the AR(1)/ARCH(1) noise model confirm the statement of the theorem.

Keywords: regression, improved estimation, mean square risk, conditionally Gaussian noise, AR/ARCH process.

POVZUN Mariya Anatolyevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: povzunyasha@gmail.com

PCHELINTSEV Evgeniy Anatolyevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

## REFERENCES

1. Ibragimov I.A., Khasminsky R.Z. (1979) *Asimptoticheskaya teoriya otsenivaniya* [Asymptotic estimation theory]. Moscow: Nauka.
2. Shiryaev A.N. (1998) *Osnovy stokhasticheskoy finansovoy matematiki* [Fundamentals of stochastic financial mathematics]. Vol. 1. Facts. Models. Moscow: PHASIS.
3. Fourdrinier D. (2002) *Statistique inférentielle*. Paris: Dunod.
4. James W., Stein C. (1961) Estimation with quadratic loss. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics Statistics and Probability*. University of California Press, Berkeley. V. 1. pp. 361–380.
5. Berger J.O., Haff L.R. (1983) A class of minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix. *Statist. Decisions*. 1. pp. 105–129.
6. Efron B., Morris C. (1976) Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Statist.* 4. pp. 11–21.
7. Gleser L.J. (1986) Minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix. *Ann. Statist.* 14(4). pp. 1625–1633.
8. Stein C. (1981) Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Statist.* 9(6). pp. 1135–1151.
9. Fourdrinier D., Strawderman W.E., William E. (2008) A unified and generalized set of shrinkage bounds on minimax Stein estimates. *J. Multivariate Anal.* 99. pp. 2221–2233.
10. Pchelintsev E. (2011) Protsedura Dzhaymsa – Steyna dlya uslovno-gaussovskoy regressii [The James–Stein procedure for the conditionally Gaussian regression]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4 (16). pp. 6–17.
11. Konev V.V. (2012) Otsenivanie parametricheskoy regressii s impul'snymi shumami po diskretnym nablyudeniyam [Estimation of parametric regression with pulsed noise from discrete observations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1 (17), pp. 20–35.
12. Konev V.V., Pergamenschikov S.M., Pchelintsev E.A. (2014) Estimation of parametric regression with pulsed noise from discrete observations. *Theory of Probability and its Applications*. 58(3). pp. 442–457.
13. Pchelintsev E. (2013) Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 1. pp. 16–28.
14. Pchelintsev E.A., Pchelintsev V.A. (2014) Minimaksnoe otsenivanie gaussovskoy parametricheskoy regressii [Minimax estimation of the Gaussian parametric regression]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 40–47.

УДК 517.952

DOI 10.17223/19988621/49/5

И.В. Рахмелевич

**ДВУМЕРНОЕ НЕАВТОНОМНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ**

Рассматривается двумерное неавтономное гиперболическое уравнение второго порядка со степенными нелинейностями по первым производным. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях, при которых это уравнение допускает функциональное разделение переменных заданного вида. С помощью метода функционального разделения переменных получен ряд частных решений данного уравнения. Исследована зависимость вида решений от параметров уравнения. Доказана теорема об условиях существования обобщенного автомодельного решения.

**Ключевые слова:** неавтономное уравнение, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность, решение типа бегущей волны, автомодельное решение.

Одним из важнейших направлений современной математической физики является получение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, развитие известных и создание новых методов их нахождения. При этом большое внимание уделяется исследованию уравнений со степенными нелинейностями [1–7]. Большинство известных результатов для этого класса задач уравнений получены для автономных уравнений. В то же время, потребности развития теории, а также практических приложений требуют исследования неавтономных уравнений, прежде всего для изучения неоднородных и нестационарных физических процессов. Целью настоящей работы является исследование неавтономного гиперболического уравнения второго порядка, содержащего степенные функции первых производных. При этом использован метод функционального разделения переменных [1, 2, 8, 9], известный как один из наиболее эффективных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

**1. Постановка задачи.****Теорема о функциональном разделении переменных**

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции  $u(x, y)$  :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(u) f(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\beta_2}. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $\beta_{1,2} \in \mathbf{R}$  – заданные параметры,  $g(u), f(x, y)$  – заданные функции. Частный случай  $f(x, y) \equiv 1$ , когда уравнение (1) является автономным, рассмотрен в [3]. В данной работе будем искать решения уравнения (1) методом функционального разделения переменных [1, 2, 8]. Возможность разделения переменных в уравнении (1) и общий вид решения определяется следующей теоремой.

**Теорема 1.** Для того чтобы уравнение (1) допускало функциональное разделение переменных вида

$$u(x, y) = U(z), \quad z = X(x) + Y(y), \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы функцию  $f(x, y)$  можно было представить как

$$f(x, y) = [X'(x)]^{1-\beta_1} [Y'(y)]^{1-\beta_2} \Phi(z), \quad (3)$$

причем  $X(x), Y(y)$  – произвольно заданные, дважды дифференцируемые функции,  $\Phi(z)$  – произвольная функция; а функция  $U(z)$  должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ):

$$U''(z) - g(U(z)) [U'(z)]^{\beta_\Sigma} \Phi(z) = 0, \quad \beta_\Sigma = \beta_1 + \beta_2. \quad (4)$$

**Доказательство.** 1. *Необходимость.* Пусть уравнение (1) имеет решение вида (2). Подставив это решение в уравнение (1), получаем

$$f(x, y) [X'(x)]^{\beta_1-1} [Y'(y)]^{\beta_2-1} = \Phi(z), \quad (5)$$

где  $\Phi(z)$  определяется выражением

$$\Phi(z) = \frac{U''(z)}{g(U(z)) [U'(z)]^{\beta_\Sigma}}, \quad \beta_\Sigma = \beta_1 + \beta_2. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что функция  $f(x, y)$  должна быть представима в виде (3), а функция  $U(z)$  должна удовлетворять уравнению (4). Необходимость доказана.

2. *Достаточность.* Пусть функцию  $f(x, y)$  можно представить в виде (3) для произвольных дифференцируемых функций  $X(x), Y(y)$ . Подставив функцию (2) в уравнение (1), получаем для функции  $U(z)$  уравнение (4). Достаточность доказана.

## 2. Решения типа бегущей волны

В данном разделе рассмотрим некоторые частные решения уравнения (1) для случая, когда  $X(x) = c_1 x, Y(y) = c_2 y$ . Тогда, согласно теореме 1, уравнение (1) имеет решение вида  $u(x, y) = U(z)$ , если  $f(x, y) = c_1^{1-\beta_1} c_2^{1-\beta_2} \Phi(z)$ , причем в данном случае  $z = c_1 x + c_2 y$ . Пусть также

$$g(u) = g_0 u^\gamma, \quad \Phi(z) = z^\lambda. \quad (7)$$

Для функций вида (7) уравнение (4) сводится к обобщенному уравнению Эмдена – Фаулера. В справочнике [10] приведены общие решения этого уравнения для ряда значений параметров, при которых уравнение разрешимо. В данной работе рассмотрим частные решения, которые существуют при произвольных значениях параметров, кроме специальных случаев, указанных ниже.

1) *Степенное решение:*

$$u(x, y) = U_0 z^\sigma. \quad (8)$$

Подставляя функцию (8) в уравнение (4) и учитывая (7), находим

$$\sigma = \frac{\beta_\Sigma - \lambda - 2}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}, \quad U_0 = \left\{ \frac{(\sigma - 1) \sigma^{1-\beta_\Sigma}}{g_0} \right\}^{\frac{1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}}. \quad (9)$$

Решение вида (8) приведено также в [10, с. 279]. На основании выражений (9) укажем некоторые значения параметров, при которых степенное решение не существует или вырождается в тривиальное.

- а) При  $\beta_\Sigma + \gamma = 1$  решение не существует;
- б) при  $\lambda = -\gamma - 1$  ( $\sigma = 1$ ) возможны две ситуации:
  - если  $\beta_\Sigma + \gamma - 1 > 0$ , то решение вырождается в тривиальное;
  - если  $\beta_\Sigma + \gamma - 1 \leq 0$ , то решение не существует;
- в) при  $\lambda = \beta_\Sigma - 2$  ( $\sigma = 0$ ) также возможны две ситуации:
  - если  $\frac{1 - \beta_\Sigma}{\beta_\Sigma + \gamma - 1} \geq 0$ , то решение вырождается в тривиальное;
  - если  $\frac{1 - \beta_\Sigma}{\beta_\Sigma + \gamma - 1} < 0$ , то решение не существует.

2) Логарифмическое решение:

$$u(x, y) = U_0 \ln |z|. \quad (10)$$

Будем предполагать, что  $\gamma = 0$ , т.е.  $g(u) = g_0$ . Подставляя (10) в уравнение (4), находим, что это решение существует при выполнении условий  $\lambda = \beta_\Sigma - 2$ ,  $\beta_\Sigma \neq 1$ , при этом  $U_0$  определяется выражением

$$U_0 = (-g_0)^{\frac{1}{1 - \beta_\Sigma}}.$$

3) Экспоненциальное решение:

$$u(x, y) = U_0 \exp(\sigma z). \quad (11)$$

Для данного случая предполагаем, что

$$g(u) = g_0 u^\gamma, \quad \Phi(z) = \exp(\lambda z). \quad (12)$$

Подставляя (11) в уравнение (4) и учитывая (12), находим:

- если  $\beta_\Sigma + \gamma - 1 \neq 0, \lambda \neq 0$ , то

$$\sigma = \frac{\lambda}{1 - \beta_\Sigma - \gamma}, \quad U_0 = \left( \frac{\sigma^{2 - \beta_\Sigma}}{g_0} \right)^{\frac{1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}}; \quad (13)$$

- если  $\beta_\Sigma + \gamma - 1 = 0, \lambda = 0$ , то  $U_0, \sigma$  – произвольные, но при этом решение существует только при выполнении условия  $g_0 = \sigma^{2 - \beta_\Sigma}$ ;

- если  $\beta_\Sigma + \gamma - 1 = 0, \lambda \neq 0$ , то решение не существует.

Рассмотрим решения типа бегущей волны при особых значениях параметров. При анализе решений (8), (11) было показано, что указанные решения не существуют в случае, если

$$\beta_\Sigma + \gamma - 1 = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим решение для данного случая, предполагая, что  $\Phi(z)$  – произвольная функция, а  $g(u)$  определяется первой из формул (7). С учетом (14), уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{U''(z)}{U'(z)} = g_0 \left( \frac{U'(z)}{U(z)} \right)^{-\gamma} \Phi(z). \quad (15)$$

Для уравнения (15) можно понизить порядок с помощью замены переменной

$$w(z) = \frac{U'(z)}{U(z)}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в уравнение (15), получаем уравнение первого порядка

$$w'(z) + [w(z)]^2 = g_0 \Phi(z) [w(z)]^{1-\gamma}. \quad (17)$$

Приведем решения уравнения (17) для некоторых значений  $\gamma$ .

а) при  $\gamma = -1$  (17) сводится к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид

$$w(z) = -\frac{1}{z - z_0 + g_0 \int \Phi(z) dz}. \quad (18)$$

Из (16), (18) получаем решение уравнения (4):

$$U(z) = U_0 \exp \left\{ -\int \frac{dz}{z - z_0 + g_0 \Psi(z)} \right\}, \quad (19)$$

где  $\Psi(z) = \int \Phi(z) dz$ ;  $U_0, z_0$  – произвольные постоянные.

б) при  $\gamma = 0$  (17) сводится к уравнению Бернулли

$$w'(z) = g_0 \Phi(z) w(z) - [w(z)]^2. \quad (20)$$

Решая уравнение (20) и учитывая соотношение (16), находим

$$U(z) = U_0 \exp \left\{ \int \frac{\Omega(z) dz}{C + \int \Omega(z) dz} \right\}. \quad (21)$$

Рассмотрим случай  $\lambda = \beta_\Sigma - 2$ , при этом предполагаем, что  $g(u)$  – произвольная функция, а  $\Phi(z)$  определяется второй формулой (7). Тогда уравнение (4) сводится к однородному уравнению

$$z^2 U''(z) - g(U(z)) [z U'(z)]^{\beta_\Sigma} = 0. \quad (22)$$

Выполнив в уравнении (22) замену переменной  $z = \exp(\varsigma)$ , преобразуем его к автономному уравнению:

$$U''(\varsigma) - U'(\varsigma) - g(U(\varsigma)) [U'(\varsigma)]^{\beta_\Sigma} = 0. \quad (23)$$

Пусть  $\beta_\Sigma = 1$ . Тогда решение уравнения (23) в неявном виде определяется формулой

$$\varsigma - \varsigma_0 = \int \frac{dU}{U + G(U) + A}. \quad (24)$$

Возвращаясь к переменной  $z$ , решение (24) можно привести к виду

$$z = z_0 \exp \left( \int \frac{dU}{U + G(U) + A} \right). \quad (25)$$

В формулах (24), (25)  $G(U) = \int g(U) dU$ ;  $\varsigma_0, z_0, A$  – произвольные постоянные.

### 3. Другие частные решения

В данном разделе будем рассматривать решения более общего вида.

**Теорема 2.** Пусть

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad (26)$$

где  $\varphi(x), \psi(y)$  – некоторые заданные функции,  $g(u)$  определяется первой из формул (7). Тогда уравнение (1) имеет решения следующего вида:

1) при  $\beta_\Sigma + \gamma - 1 \neq 0$ :

$$u(x, y) = g_0^\sigma q_1 q_2 \xi(x) \eta(y), \quad (27)$$

где

$$\xi(x) = \begin{cases} [\varphi(x)]^\sigma & \text{при } \beta_1 = 1, \\ \left\{ \int [\varphi(x)]^{1/(1-\beta_1)} dx + C_0 \right\}^{\sigma(1-\beta_1)} & \text{при } \beta_1 \neq 1; \end{cases} \quad (28a)$$

$$\eta(y) = \begin{cases} [\psi(y)]^\sigma & \text{при } \beta_2 = 1, \\ \left\{ \int [\psi(y)]^{1/(1-\beta_2)} dy + D_0 \right\}^{\sigma(1-\beta_2)} & \text{при } \beta_2 \neq 1; \end{cases} \quad (28б)$$

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta_i = 1, \\ \left( \frac{1}{\sigma(1-\beta_i)} \right)^{\sigma(1-\beta_i)} & \text{при } \beta_i \neq 1 \end{cases}, \quad u_0 = \left( \frac{g_0}{\sigma^{2-\beta_\Sigma}} \right)^\sigma, \quad \sigma = \frac{1}{1-\beta_\Sigma-\gamma}, \quad (29)$$

$D_0, C_0$  – произвольные постоянные;

2) при  $\beta_\Sigma + \gamma - 1 = 0$ :

$$u(x, y) = u_0 \xi(x) \eta(y), \quad (30)$$

где

$$\xi(x) = \exp \left\{ \lambda_1^{1/(1-\beta_1)} \int [\varphi(x)]^{1/(1-\beta_1)} dx \right\}, \quad (31a)$$

$$\eta(y) = \exp \left\{ \lambda_2^{1/(1-\beta_2)} \int [\psi(y)]^{1/(1-\beta_2)} dy \right\}. \quad (31б)$$

Выражения (31a), (31б) справедливы при  $\beta_1 \neq 1$ ,  $\beta_2 \neq 1$  соответственно. При  $\beta_1 = 1$   $\xi(x)$  – произвольная функция при условии  $\varphi(x) = \text{const}$ , в противном случае данное решение не существует. Аналогично, при  $\beta_2 = 1$   $\eta(y)$  – произвольная функция при условии  $\psi(y) = \text{const}$ , в противном случае данное решение не существует. В выражениях (30), (31a,б)  $u_0, \lambda_1, \lambda_2$  – произвольные постоянные, причем  $\lambda_1, \lambda_2$  связаны соотношением

$$\lambda_1 \lambda_2 = g_0. \quad (32)$$

**Доказательство.** При условиях теоремы 2 решение уравнения (1) ищем в виде

$$u(x, y) = u_1(x) u_2(y). \quad (33)$$

Подставляя выражение (33) в уравнение (1), с учетом (26) и первой из формул (7), приводим (1) к виду

$$\frac{[u_1'(x)]^{1-\beta_1} [u_1(x)]^{-\gamma-\beta_2}}{\varphi(x)} \cdot \frac{[u_2'(y)]^{1-\beta_2} [u_2(y)]^{-\gamma-\beta_1}}{\psi(y)} = g_0. \quad (34)$$



Левая часть уравнения (34) представлена в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит от  $x$ , а другой от  $y$ . Поэтому, используя известную схему разделения переменных, получаем уравнения для функций  $u_1(x), u_2(y)$ :

$$\frac{[u'_1(x)]^{1-\beta_1} [u_1(x)]^{-\gamma-\beta_2}}{\varphi(x)} = \lambda_1, \quad \frac{[u'_2(y)]^{1-\beta_2} [u_2(y)]^{-\gamma-\beta_1}}{\psi(y)} = \lambda_2, \quad (35)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – некоторые постоянные, связанные соотношением (32). Для дальнейшего анализа уравнения (35) перепишем в виде

$$[u'_1(x)]^{\theta_1} [u_1(x)]^{\delta-\theta_1} = \lambda_1 \varphi(x), \quad [u'_2(y)]^{\theta_2} [u_2(y)]^{\delta-\theta_2} = \lambda_2 \psi(y), \quad (36)$$

где  $\delta = 1 - \beta_\Sigma - \gamma$ ,  $\theta_i = 1 - \beta_i$  ( $i = 1, 2$ ). Рассмотрим возможные частные случаи для первого уравнения (36).

Случай 1.  $\delta \neq 0$ .

а)  $\theta_1 \neq 0$  ( $\beta_1 \neq 1$ ). Решение первого уравнения (36)

$$u_1(x) = \lambda_1^\sigma \left( \frac{1}{\sigma \theta_1} \right)^{\sigma \theta_1} \left\{ \int [\varphi(x)]^{1/\theta_1} dx + C_0 \right\}^{\sigma \theta_1};$$

б)  $\theta_1 = 0$  ( $\beta_1 = 1$ ). Тогда из (36)  $u_1(x) = [\lambda_1 \varphi(x)]^\sigma$  (здесь учтено, что  $\sigma = 1/\delta$ ).

Случай 2.  $\delta = 0$ .

а)  $\theta_1 \neq 0$  ( $\beta_1 \neq 1$ ). Решая первое уравнение (36), находим

$$u_1(x) = u_{10} \exp \left\{ \lambda_1^{1/\theta_1} \int [\varphi(x)]^{1/\theta_1} dx \right\};$$

б)  $\theta_1 = 0$  ( $\beta_1 = 1$ ). Тогда первое уравнение (36) принимает вид  $\lambda_1 \varphi(x) = 1$ . Этому уравнению удовлетворяет произвольная функция  $u_1(x)$ , при условии, что  $\varphi(x) = 1/\lambda_1 = \text{const}$ .

Решение второго уравнения (36) полностью аналогично. Используя полученные выражения для  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  и подставляя их в (26), после элементарных преобразований находим решения (27) – (30). Теорема доказана.

Приведенная ниже теорема определяет условия существования обобщенных автомодельных решений уравнения (1).

**Теорема 3.** Уравнение (1) имеет обобщенное автомодельное решение вида

$$u(x, y) = X_0(x)U(z), \quad z = yX(x), \quad (37)$$

только в том случае, если выполнены условия

$$X_0(x) = a_0 [X(x)]^\lambda, \quad f(x, y) = f_0 [X(x)]^{\lambda(1-\beta_\Sigma) + \beta_1 - \beta_2} [X'(x)]^{1-\beta_1} \Phi(z), \quad (38)$$

где  $a_0, \lambda$  – некоторые постоянные, а  $\Phi(z)$  – некоторая произвольная функция.

При этом функция  $U(z)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$[U'(z)]^{1-\beta_\Sigma} \left( 1 + \lambda + \frac{zU''(z)}{U'(z)} \right) - \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{U(z)}{zU'(z)} \right)^{\beta_1} z^{\beta_1} \Phi(z) = 0. \quad (39)$$

**Доказательство.**

1. Пусть уравнение (1) имеет решение вида (37). Уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \bigg/ \left\{ g(u) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\beta_2} \right\}. \quad (40)$$

Подставим (37) в правую часть (40), тогда после элементарных преобразований это уравнение принимает вид

$$f(x, y) \frac{[X(x)X_0(x)]^{\beta_2} [X'_0(x)]^{1-\beta_1}}{X_0(x)X'(x)} = \frac{[U'(z)]^{1-\beta_\Sigma} \left( 1 + \frac{X'_0(x)X(x)}{X_0(x)X'(x)} + \frac{zU''(z)}{U'(z)} \right)}{\left( \frac{X_0(x)X'(x)}{X'_0(x)X(x)} + \frac{U(z)}{zU'(z)} \right)^{\beta_1} z^{\beta_1}} \quad (41)$$

Из уравнения (41) может быть получено ОДУ относительно функции  $U(z)$  только при выполнении условия

$$\frac{X'_0(x)X(x)}{X_0(x)X'(x)} = \lambda, \quad (42)$$

где  $\lambda$  – некоторая постоянная.

Рассмотрим условие (42) и выполним в нем замену переменных:

$$X_0(x) = \exp(\chi_0(x)), \quad X(x) = \exp(\chi(x)). \quad (43)$$

С учетом (43) условие (42) приводится к виду

$$\chi'_0(x) - \lambda \chi'(x) = 0. \quad (44)$$

Интегрируя уравнение (44) и возвращаясь к функциям  $X_0(x)$ ,  $X(x)$  согласно (43), получаем первое из условий (38). Далее, с учетом (42), уравнение (41) принимает вид

$$f(x, y) \frac{[X(x)X_0(x)]^{\beta_2} [X'_0(x)]^{1-\beta_1}}{X_0(x)X'(x)} = \frac{[U'(z)]^{1-\beta_\Sigma} \left( 1 + \lambda + \frac{zU''(z)}{U'(z)} \right)}{\left( \frac{1}{\lambda} + \frac{U(z)}{zU'(z)} \right)^{\beta_1} z^{\beta_1}}. \quad (45)$$

Правая часть уравнения (45) зависит только от переменной  $z$ , следовательно, и левая часть (45) должна быть функцией только этой переменной. Отсюда находим, что функция  $f(x, y)$  должна удовлетворять условию

$$f(x, y) \frac{[X(x)X_0(x)]^{\beta_2} [X'_0(x)]^{1-\beta_1}}{X_0(x)X'(x)} = \Phi(z), \quad (46)$$

где  $\Phi(z)$  – произвольная функция. Учитывая доказанное выше первое из условий (38) и выражая  $X_0(x)$  через  $X(x)$ , получаем второе условие (38). Кроме того, отсюда получаем уравнение (39) для функции  $U(z)$ . Теорема доказана.

### Заключение

Таким образом, исследованы решения двумерного гиперболического уравнения со степенными нелинейностями по первым производным, которое явно зависит от искомой функции и от независимых переменных. Доказана теорема, определяющая необходимые и достаточные условия функционального разделения переменных в этом уравнении. Получены решения типа бегущей волны и частные решения других типов, приведены условия существования полученных решений, а также получены решения при особых значениях параметров уравнения. Доказана теорема об условиях существования обобщенного автомоделного решения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
3. Рахмелевич И.В. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 12–19.
4. Рахмелевич И.В. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 3(35). С. 18–25. DOI 10.17223/19988621/35/3.
5. Рахмелевич И.В. О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18. № 4. С. 41–49. DOI 10.23671/VNC.2016.4.5992.
6. Рахмелевич И.В. О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиодно-родной функцией от производных // Изв. вузов. Математика. 2016. № 4. С. 57–67.
7. Рахмелевич И.В. О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9. № 1. С. 98–108.
8. Полянин А.Д., Журов А.И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 606–611.
9. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // J. Physics A. 1993. V. 26. P. 1901–1913.
10. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

Rakhmelevich I.V. (2017) TWO-DIMENSIONAL NON-AUTONOMOUS HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH POWER-LAW NONLINEARITIES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 52–60

DOI 10.17223/19988621/49/5

The study of non-autonomous differential equations is of interest for the development of methods of their solutions and applications, including the study of inhomogeneous and non-stationary physical processes. In this paper, we consider the two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation of second order containing a power-law nonlinearity in the first derivatives and arbitrary functions of the dependent and independent variables. To study the solutions of this equation, the method of functional separation of variables is used. The theorem on necessary and sufficient conditions under which this equation admits a functional separation of variables of a specified type is proved. A number of particular solutions of this equation have been obtained. In particular, we present solutions of the traveling wave type with exponential, logarithmic, and exponential functions of independent variables. For the found solutions, we formulate conditions

of their existence and investigate the dependence of solutions on parameters of the equation. We have also obtained particular solutions with functions of the independent variables of a more general form. The theorem on the condition of existence of generalized self-similar solution has been proved. The results obtained in this work can be generalized for non-autonomous nonlinear equations of higher orders and more complex types of nonlinearities.

Keywords: non-autonomous equation, functional separation of variables, power-law nonlinearity, solution of travelling wave type, self-similar solution.

*RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich* (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof., Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)  
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Polyanin A.D., Zaitsev V. F. (2004) *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press.
2. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. (2005) *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods of solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit.
3. Rakhmelevich I.V. (2015) O dvumernykh giperbolicheskikh uravneniyakh so stepennoy nelineynost'yu po proizvodnym. [On two-dimensional hyperbolic equations with power-law nonlinearity in the derivatives]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(33). pp. 12–19.
4. Rakhmelevich I.V. (2015) O nekotorykh novykh resheniyakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynost'yami [On some new solutions of the multi-dimensional first order partial differential equation with power-law nonlinearities]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 18–25. DOI:10.17223/19988621/35/3.
5. Rakhmelevich I.V. (2016) O resheniyakh mnogomernogo differentsialnogo uravneniya so smeshannoy starshey chastnoy proizvodnoy i stepennymi nelineynost'yami [On the solutions of multi-dimensional arbitrary order differential equation with mixed senior partial derivative and power-law non-linearities]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal*. 4. pp. 41–49. DOI 10.23671/VNC.2016.4.5992.
6. Rakhmelevich I.V. (2016) Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives. *Russian Mathematics*. 60(4). pp. 47–55. <https://doi.org/10.3103/S1066369X16040071>.
7. Rakhmelevich I.V. (2017) On multi-dimensional partial differential equations with power nonlinearities in first derivatives. *Ufa Mathematical Journal*. 8(4). pp. 98–108.
8. Polyanin A.D., Zhurov A.I. (2002) The generalized and functional separation of variables in mathematical physics and mechanics. *Doklady Mathematics*. 65(1). pp. 129–134.
9. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. (1993) Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Journal of Physics A*. 26. pp. 1901–1913.
10. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. (2003) *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press.

УДК 519.6

DOI 10.17223/19988621/49/6

А.А. Семёнова, А.В. Старченко

**РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА, ПОСТРОЕННАЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ<sup>1</sup>**

Представлена новая аппроксимация конвективных членов в нестационарном конвективно-диффузионном уравнении переноса примеси, полученная с использованием локальных весовых кубических сплайнов. На основе сравнительного анализа для двух одномерных тестовых случаев нестационарного переноса примеси с известным аналитическим решением показано её преимущество перед широко используемыми при решении подобных задач монотонизированными схемами второго или третьего порядка аппроксимации.

**Ключевые слова:** нестационарное конвективно-диффузионное уравнение, локальные весовые кубические сплайны, монотонизированная аппроксимация конвективных членов высокого порядка.

В настоящее время при изучении разнообразных физических процессов широко используются методы математического моделирования, основная идея которых заключается в представлении свойств изучаемого объекта или явления с помощью математических формул, как правило, выражающих тот или иной физический закон. При исследовании процессов в рамках механики сплошных сред применяются законы сохранения массы, импульса, энергии, которые, в общем случае, имеют вид нестационарных интегральных или дифференциальных уравнений, включающих члены, описывающие перенос массы, импульса или энергии как за счет непосредственно самого движения сплошной среды (конвекция), так и за счет молекулярного или турбулентного обмена (диффузия) [1].

Как правило, получение аналитических решений таких уравнений на современном уровне развития теоретической математики представляет определенную проблему, поэтому активно разрабатываются приближенные численные методы решения, обеспечивающие выполнение условий аппроксимации, устойчивости и сходимости [2]. Особое внимание при решении нестационарного уравнения «конвекции – диффузии» уделяется выбору аппроксимационной схемы для конвективного члена уравнения. С одной стороны, требуется, чтобы порядок аппроксимации схемы был выше первого для обеспечения качественного воспроизведения резких изменений переносимой субстанции во времени и пространстве, с другой – используемая аппроксимация (или разностная схема) должна быть монотонной, т.е. обеспечивающей получение монотонного распределения искомой величины из имеющегося монотонного распределения для предыдущего момента времени.

Современные численные методы решения уравнения переноса берут свое начало в том числе и с известной работы Годунова [3], в которой он предложил численный метод для решения локальной проблемы Римана на границе раздела двух объемов сплошной среды. Им представлена очень важная теорема о монотонно-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-43-700178.

сти: не существует монотонных линейных разностных схем с порядком аппроксимации по пространству выше первого. Монотонность является очень желательным свойством разностной схемы, ее наличие предотвращает образование вычислительных осцилляций в окрестности сильных градиентов решения. Лакс и Вендрофф [4] предложили для решения уравнения переноса схему второго порядка аппроксимации, обеспечивающую хорошее предсказание резко меняющегося поведения приближенного решения, но сильно осциллирующую. Для уменьшения вычислительных осцилляций необходимо в эту схему вводить дополнительные диссипативные члены.

В настоящее время для того, чтобы обойти жесткое ограничение теоремы Годунова, используется построение нелинейных разностных схем для решения уравнения переноса. В качестве одного из способов построения нелинейных схем является применение кусочно-полиномиальной реконструкции приближенного решения по значениям сеточной функции с введением некоторых ограничений (условий), обеспечивающих уменьшение вычислительных осцилляций при переходе на следующий момент времени. Одной из первых работ этого направления была работа Колгана [5], который предложил применять принцип минимальных значений производных, чтобы получить неосциллирующую схему второго порядка типа схемы Годунова. Другой известный подход предложил ван Лир в своей серии статей [6, 7, 9], в которой развивается теория разностных схем высокого порядка аппроксимации на основе полиномиальной реконструкции и контроля за значениями производных этих полиномов с использованием TVD-свойства (свойства невозрастания полной вариации решения при переходе на новый слой по времени) [10, 11].

На основе полиномиальной TVD-реконструкции ван Лиром, в частности, были предложены схемы MLU (Monotonic Linear Upstream) [7, 8], MUSCL (Monotonic Upstream centered Scheme for Conservation Laws) [9], которые используют кусочно-линейную интерполяцию и обеспечивают точность второго порядка в случае гладкого монотонного решения. Подход TVD ввел новые усовершенствования в построении схем высокого порядка точности для уравнения переноса и помог избежать ограничений для линейных разностных схем, предоставляемых теоремой Годунова. Но порядок этих схем ограничивается вторым на участке гладкого монотонного изменения решения (см. например, схему Хартена с ограничителем *minmod* [12] и схему с ограничителем *superbee* [13]).

Для повышения порядка аппроксимации разностных схем для решения уравнения переноса были введены так называемые существенно неосциллирующие схемы ENO (Essentially Non-Oscillatory schemes). Схемы ENO для получения осредненного по ячейке значения решения содержат алгоритм построения нескольких полиномов высокого порядка на различных сеточных шаблонах, выбирающих наиболее гладкий из полиномов. Такой подход был введен в 1986 г. Harten, Osher, Engquist и Chakravarthy [14].

При численной реализации моделей атмосферного пограничного слоя и переноса примеси важную роль играет выбор качественной разностной схемы для аппроксимации конвективного члена уравнения. Целью данного исследования является разработка построенной на локальных весовых сплайнах разностной схемы для аппроксимации конвективных членов уравнения переноса. Полученная аппроксимация используется в явной разностной схеме, которая сравнивается с другими известными аппроксимациями конвективных слагаемых (MLU, MUSCL,

ENO и др.) при численном решении двух одномерных нестационарных тестовых задач о распространении примеси.

### 1. Интерполяционный весовой кубический сплайн

Введем сетку  $\overline{\omega}_h = \left\{ x_i; x_{i+1} = x_i + h_i, i = \overline{0, n-1}; x_0 = a; \sum_{i=0}^{n-1} h_i = b - a \right\}$  на отрезке  $[a, b]$ . На каждом элементарном отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  интерполяционный весовой кубический сплайн есть полином третьей степени  $S_i(x)$ :

$$S_i(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) + a_{i2}(x - x_i)^2 + a_{i3}(x - x_i)^3, \\ x \in [x_i, x_{i+1}],$$

коэффициенты которого надо определить из следующих условий [15]:

$$S_i(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}; \\ S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), i = \overline{1, n-1}; \\ w_{i-1}S''_{i-1}(x_i) = w_i S''_i(x_i), i = \overline{1, n-1}.$$

Здесь  $w_i > 0$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , – весовые коэффициенты.

Построение весового кубического сплайна будет проводиться через наклоны ( $m_i = S'_i(x_i), i = \overline{0, n}$ ), для получения единственного решения поставленной задачи будем использовать дополнительные условия на границах:

$$S'(x_0) = f'_0, S'(x_n) = f'_n.$$

Из приведенных выше условий находим формулу для построения сплайнов через наклоны:

$$S_i(x) = \frac{m_{i+1} + m_i}{h_i^2} (x - x_i)^3 - 2 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^3} (x - x_i)^3 + 3 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^2} (x - x_i)^2 - \\ - \frac{2m_i + m_{i+1}}{h_i} (x - x_i)^2 + m_i (x - x_i) + f_i; \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad i = \overline{0, n-1}.$$

А из условий  $w_{i-1}S''_{i-1}(x_i) = w_i S''_i(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , и дополнительных граничных условий получим систему уравнений для определения значений наклонов  $\{m_i\}$ :

$$\begin{cases} m_0 = f'_0, \\ \frac{w_{i-1}}{h_{i-1}} m_{i-1} + 2 \left( \frac{w_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{w_i}{h_i} \right) m_i + \frac{w_i}{h_i} m_{i+1} = 3 \left( \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}^2} w_{i-1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^2} w_i \right), & i = \overline{1, n-1}, \\ m_n = f'_n. \end{cases}$$

Эта система имеет строгое диагональное преобладание, что обеспечивает существование и единственность весового кубического сплайна. Решение полученной системы может быть найдено методом обычной трехточечной прогонки.

Весовые коэффициенты  $\{w_i\}$  можно задать разными способами. Если интерполируемые данные монотонно возрастают, веса можно найти, воспользовавшись следующей теоремой Б.И. Квасова [15].

**Теорема.** Пусть весовой кубический сплайн  $S(x) \in C^1[a, b]$  с краевыми условиями  $S'(x_0) = f'_0$  и  $S'(x_n) = f'_n$  интерполирует монотонные данные  $\{f_i\}, i = \overline{0, n}$ . Если выполняются неравенства

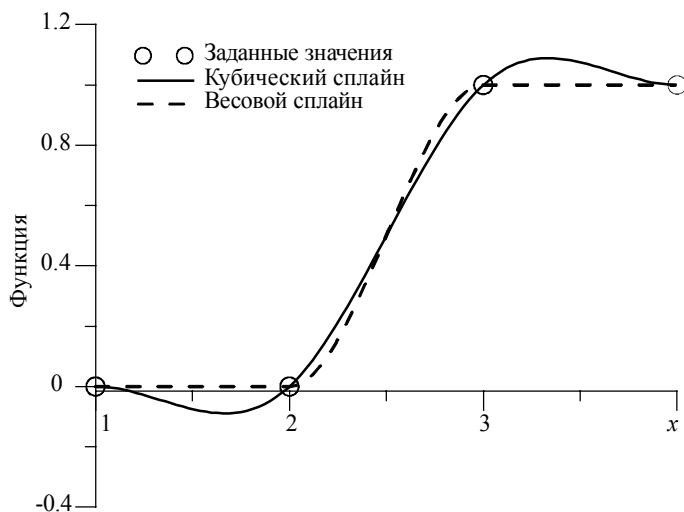
$$0 \leq f'_0 \leq 3f[x_0, x_1], \quad 0 \leq f'_n \leq 3f[x_{n-1}, x_n],$$

$$\frac{w_{i-1}}{w_i} \cdot \frac{h_i}{h_{i-1}} \geq \frac{f[x_i, x_{i+1}]}{f[x_{i-1}, x_i]} - 2, \quad \frac{w_i}{w_{i-1}} \cdot \frac{h_{i-1}}{h_i} \geq \frac{f[x_{i-1}, x_i]}{f[x_i, x_{i+1}]} - 2,$$

то  $S'(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a, b]$ , т.е. сплайн  $S$  монотонен на  $[a, b]$ .

В [16] для монотонно убывающих данных был сформулирован аналог этой теоремы.

Для нахождения весовых коэффициентов можно следовать алгоритму [15]. Пусть весовой коэффициент  $w_{i-1}$  известен. Полагаем  $w_i = w_{i-1}$ . Проверяем неравенства из теоремы. Если какое-то из них нарушается, то выражаем из соответствующего неравенства  $w_i$ , заменяя знак неравенства на знак равенства. Алгоритм начинаем с  $w_0 = 1$  и легко находим все коэффициенты  $\{w_i\}$ , обеспечивающие монотонность весового кубического сплайна для произвольных монотонных данных. Если на некотором шаге  $w_i < \varepsilon, \left(w_i > \frac{1}{\varepsilon}\right)$ , то полагаем  $w_i = \varepsilon, \left(w_i = \frac{1}{\varepsilon}\right)$ , где  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число, позволяющее предотвратить зануление (переполнение).



**Рис. 1.** Интерполяция таблично заданной функции алгебраическими многочленами  
**Fig. 1.** Algebraic polynomials interpolation

Продemonстрируем преимущество весовых кубических сплайн-функций при интерполировании таблично заданных функций. Рассмотрим случай, когда заданы таблично четыре значения функции. Требуется восстановить значение интерполянта для промежуточных значений  $x$  [16]. Для решения этой задачи были



применены два способа: кубический интерполяционный сплайн, построенный через наклоны, и такой же сплайн, но с весами, подобранными по алгоритму, описанному выше. При построении сплайнов на концах выбранного отрезка использовались дополнительные условия равенства нулю производной интерполируемой функции. Заметим, что табличные значения функции выбирались таким образом, чтобы при интерполировании могла возникнуть проблема монотонности построенных интерполяционных многочленов. Данный набор табличных значений интерполируемой функции соответствует профилю аналитического решения задачи «бездиффузионного» переноса примеси, рассмотренной ниже (Тест 1).

Из рис. 1 видно, что интерполяционный кубический сплайн осциллирует на рассматриваемом промежутке между табличными значениями, предсказывая отрицательные значения на отрезке  $[1,0; 2,0]$  и больше единицы на отрезке  $[3,0; 4,0]$ . Лучший результат демонстрирует интерполяционный весовой кубический сплайн. В данном случае осцилляций визуально не наблюдается и сглаживание в области резкого изменения значений интерполируемой функции меньше, чем в предыдущем случае.

## 2. Численный метод решения уравнения переноса

Используем полученный выше результат для весового кубического сплайна при построении разностной схемы со сплайн-аппроксимацией конвективного члена уравнения переноса примеси.

Рассмотрим одномерное нестационарное уравнение конвекции – диффузии с постоянными коэффициентами для концентрации примеси:

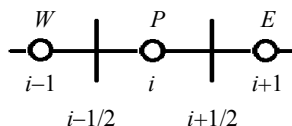
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + S_{\Phi}, \quad u > 0, \quad D \geq 0; \quad 0 < x < X, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Начальное условие:  $t = 0, \Phi(0, x) = \Phi_{00}(x)$ .

Граничные условия:  $x = 0, \Phi(t, 0) = \Phi_0(t); x = X, \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ .

Существование и единственность решения рассматриваемой задачи доказаны в [17].

Для отрезка  $[0, X]$  построим равномерную сетку с непересекающимися конечными объемами:  $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, i = \overline{0, M}$  – положение граней конечного объема (рис. 2);  $x_i, i = \overline{1, M}$  – положение узлов в конечном объеме. Введем сеточную функцию для концентрации примеси  $\Phi_i^k \approx \Phi(t^k, x_i), t^k = \tau k; k = \overline{0, N}; i = \overline{0, M}$ .



**Рис. 2.** Конечный объем для одномерного случая  
**Fig. 2.** Finite volume for the one-dimensional case

Применяя метод конечного объема и явную разностную аппроксимацию по времени первого порядка, получим для уравнения (1) разностную схему следующего вида:

$$\frac{\Phi_i^{k+1} - \Phi_i^k}{\tau} + u \frac{\Phi_{i+1/2}^k - \Phi_{i-1/2}^k}{h} = D \frac{\Phi_{i+1}^k - 2\Phi_i^k + \Phi_{i-1}^k}{h^2} + (S_\Phi)_i^k; \quad i = \overline{1, n-1}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

В итоге каждый член этого уравнения выражается через дискретные значения  $\Phi$  в некоторых соседних узловых точках.

Начальное условие аппроксимируется по формуле:  $\Phi_i^0 = \Phi_{00}(x_i), i = \overline{0, M}$ , а граничные:  $\Phi_0^k = \Phi_0(t^k, 0), \Phi_M^k = \Phi_M(t^k, N), k = \overline{0, N}$ .

Шаг по времени выбирается из условия устойчивости:  $\tau < \min \left( \frac{h}{2|u|}, \frac{h^2}{2D} \right)$ .

Неизвестными в (2) являются значения сеточной функции  $\{\Phi_i^{k+1}\}$  на  $k+1$ -м слое по времени. Однако для их вычисления по явной формуле необходимо первоначально рассчитать значения  $\{\Phi_{i+1/2}^k\}$ , используя выбранный способ их представления через значения  $\{\Phi_i^k\}$ . В данной работе для этого применяется сплайн-интерполяция с использованием весового кубического сплайна, т.е.  $\Phi_{i+1/2}^k = S_i(x_{i+1/2})$ , где  $S_i(x)$  – локальный весовой интерполяционный кубический сплайн, построенный по значениям сеточной функции  $\Phi_{i-1}^k, \Phi_i^k, \Phi_{i+1}^k, \Phi_{i+2}^k$ :

$$S_i(x) = \frac{m_{i+1} + m_i}{h^2} (x - x_i)^3 - 2 \frac{\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k}{h^3} (x - x_i)^3 + 3 \frac{\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k}{h^2} (x - x_i)^2 - \frac{2m_i + m_{i+1}}{h} (x - x_i)^2 + m_i (x - x_i) + \Phi_i^k; \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Наклоны  $m_i$  определяются из решения системы:

$$\begin{cases} m_{i-1} = (3\Phi_{i-1}^k - 4\Phi_i^k + \Phi_{i+1}^k) / 2h; \\ w_{j-1}m_{j-1} + 2(w_{j-1} + w_j)m_j + w_jm_{j+1} = \\ = 3[w_{j-1}(\Phi_j^k - \Phi_{j-1}^k) + w_j(\Phi_{j+1}^k - \Phi_j^k)] / h, \quad j = i, i+1; \\ m_{i+2} = (3\Phi_{i+2}^k - 4\Phi_{i+1}^k + \Phi_i^k) / 2h. \end{cases}$$

Весовые коэффициенты локальных сплайнов на  $0 < x < X$  вычисляются по алгоритму [15].

Приведенный выше алгоритм построения сплайна позволяет монотонно приближать исходные монотонные данные, однако если же данные не были монотонными – возникает проблема, для решения которой к интерполированному значению дополнительно применяется ограничитель, аналогичный ограничителю схемы MUSCL [18].

В конечном итоге сплайн-аппроксимация реализовывалась в разностной схеме в следующем виде ( $\varepsilon$  – достаточно малое положительное число):

$$\Phi_{i+1/2}^k = \begin{cases} \Phi_i^k + 0,5 \max[0, \min(2\Theta, \Psi, 2)](\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k), & u > 0, \\ \Phi_{i+1}^k - 0,5 \max[0, \min(2\hat{\Theta}, \hat{\Psi}, 2)](\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k), & u \leq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\Theta = \frac{\Phi_i^k - \Phi_{i-1}^k}{\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k + \varepsilon \cdot \text{sign}(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k)}, \quad \Psi = \frac{S_i(x_{i+1/2}) - \Phi_i^n}{0.5 \cdot (\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k) + \varepsilon \cdot \text{sign}(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k)},$$

$$\hat{\Theta} = \frac{\Phi_{i+2}^k - \Phi_{i+1}^k}{\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k + \varepsilon \cdot \text{sign}(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k)}, \quad \hat{\Psi} = \frac{\Phi_{i+1}^k - S_i(x_{i+1/2})}{0.5 \cdot (\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k) + \varepsilon \cdot \text{sign}(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k)}.$$

### 3. Численные эксперименты

Для проведения численного эксперимента рассматривались две задачи переноса примеси с известным аналитическим решением [17, 19]. Кроме построенной в предыдущем разделе разностной схемы были реализованы другие подходы аппроксимации конвективного члена уравнения переноса: противопотоковая схема Upwind, схемы MLU [7, 8], MUSCL [9, 18], ENO-схема третьего порядка точности с ограничителем Годунова [20], схема с ограничителем superbee [13] и схема Хартена [12].

Противопотоковая схема аппроксимирует сеточную функцию с самым низким порядком среди всех рассматриваемых в данной работе схем и действует по правилу

$$\Phi_{i+1/2}^k = \begin{cases} \Phi_i^k, & u > 0, \\ \Phi_{i+1}^k, & u \leq 0. \end{cases}$$

MLU-схема записывается следующим образом:

$$\Phi_{i+1/2}^k = \begin{cases} \Phi_i^k + 0,5h \cdot P_{i+1/2}^k, & u > 0, \\ \Phi_{i+1}^k - 0,5h \cdot P_{i+1/2}^k, & u \leq 0, \end{cases}$$

где  $P_{i+1/2}^k = \min \text{mod}[(\Phi_{i+1}^k - \Phi_{i-1}^k)/2h; 2 \min \text{mod}[(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k)/h; (\Phi_i^k - \Phi_{i-1}^k)/h]]$ .

MUSCL-схема применяется в виде:

$$\Phi_{i+1/2}^k = \begin{cases} \Phi_i^n + 0,5 \max[0, \min(2\Theta, (2 + \Theta)/3, 2)](\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k), & u > 0, \\ \Phi_{i+1}^k - 0,5 \max[0, \min(2\hat{\Theta}, (2 + \hat{\Theta})/3, 2)](\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k), & u \leq 0, \end{cases}$$

где  $\Theta, \hat{\Theta}$  имеют такой же вид, как в формуле (3).

Построение ENO-схемы подробно описано в [20]. Из [21] были взяты формулы для построения схем с использованием ограничителя Хартена [12]:

$$\Phi_{i+1/2}^k = \begin{cases} \Phi_i^k + 0,5(1 - K_h) \min \text{mod}(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k, \Phi_i^k - \Phi_{i-1}^k), & u > 0, \\ \Phi_{i+1}^k - 0,5(1 + K_h) \min \text{mod}(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k, \Phi_i^k - \Phi_{i-1}^k), & u \leq 0 \end{cases}$$

и ограничителя superbee [13]:

$$\Phi_{i+1/2}^k = \begin{cases} \Phi_i^k + 0,5(1 - K_h) \max \text{mod} \left[ \min \text{mod} \left( 2(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k), \Phi_i^k - \Phi_{i-1}^k \right), \right. \\ \left. \min \text{mod} \left( \Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k, 2(\Phi_i^k - \Phi_{i-1}^k) \right) \right], & u > 0, \\ \Phi_{i+1}^k - 0,5(1 + K_h) \max \text{mod} \left[ \min \text{mod} \left( 2(\Phi_{i+2}^k - \Phi_{i+1}^k), \Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k \right), \right. \\ \left. \min \text{mod} \left( \Phi_{i+2}^k - \Phi_{i+1}^k, 2(\Phi_{i+1}^k - \Phi_i^k) \right) \right], & u \leq 0. \end{cases}$$

Здесь  $K_h = u\tau/h$ .

**Тест 1.** Решение уравнения переноса в случае «отсутствия» диффузии ( $D = 0$ ) и  $S_\Phi = 0$ .

Начальное условие для задачи 1 ( $X = 2$ ):

$$\Phi_{00}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0.25, 0.75], \\ 0, & x \notin [0.25, 0.75]. \end{cases}$$

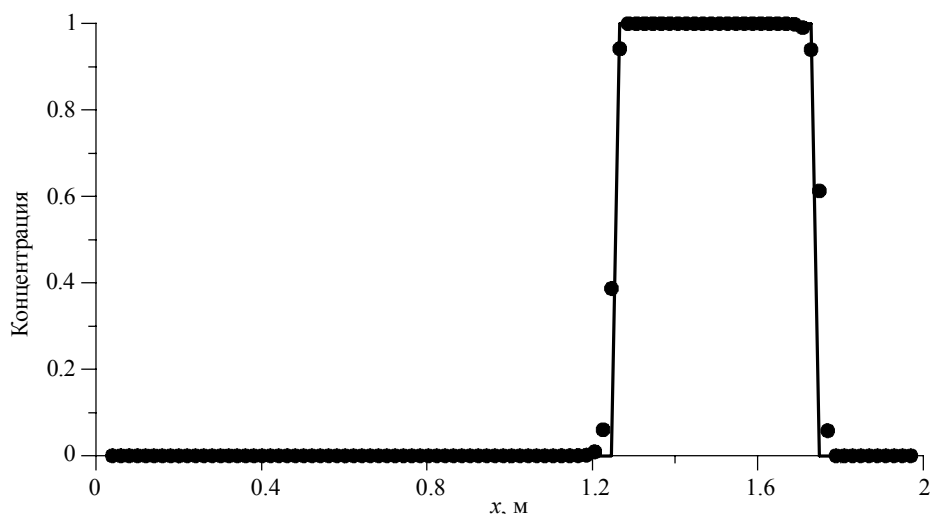
Граничное:  $\Phi_0(t) = 0$ .

Аналитическое решение задачи 1 имеет вид [11]

$$\Phi_{\text{exact}}(t, x) = \Phi_{00}(x - ut).$$

Расчеты производились при следующих условиях:

$$u = 1, \quad M = 100, \quad M = 200, \quad \tau u / h = 0.2, \quad D = 0.$$



**Рис. 3.** Рассчитанные (кружки) по сплайновой схеме значения концентрации примеси при  $t = T = 1c$

**Fig. 3.** Calculated values (circles) of the impurity concentration calculated at  $t = T = 1c$  by the spline scheme

Из рис. 3 видно, что численное решение достаточно хорошо соответствует точному, однако в областях резкого изменения решения наблюдается некоторое «размытие» профиля  $\{\Phi_i^N\}$ .

Данная задача решалась и с использованием перечисленных выше методов аппроксимации конвективного члена уравнения переноса. Для сравнения степени согласования расчетов с точным решением рассматривались нормы погрешности:

$$H_1 = \max_{i=0, \dots, M} |\Phi_i^N - \Phi(T, x_i)|, \quad H_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0, \dots, M} |\Phi_i^N - \Phi(T, x_i)|^2}{M}},$$

значения которых для рассматриваемой задачи представлены в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение норм погрешности различных методов аппроксимации конвективных членов нестационарного уравнения переноса для первой тестовой задачи

|   | Метод         | $M = 100$ |         | $M = 200$ |         |
|---|---------------|-----------|---------|-----------|---------|
|   |               | $H_1$     | $H_2$   | $H_1$     | $H_2$   |
| 1 | Upwind        | 0,48747   | 0,17209 | 0,49108   | 0,14451 |
| 2 | MLU           | 0,32540   | 0,05414 | 0,32540   | 0,03828 |
| 3 | MUSCL         | 0,32989   | 0,05468 | 0,32898   | 0,03867 |
| 4 | ENO3          | 0,31528   | 0,06294 | 0,31794   | 0,04479 |
| 5 | Сплайн        | 0,26939   | 0,04202 | 0,26939   | 0,02971 |
| 6 | Схема Хартена | 0,43604   | 0,11087 | 0,44342   | 0,08867 |
| 7 | Superbee      | 0,37625   | 0,06941 | 0,38222   | 0,05024 |

На основании полученных данных можно сделать вывод, что для рассматриваемой тестовой задачи применение весовой сплайн-функции для аппроксимации конвективных членов имеет преимущество перед остальными схемами. Худший результат показывает противопотоковая схема. Эти результаты также согласуются с теоретическими данными о порядке аппроксимации этих схем. Сходимость схемы проверялась удвоением количества узлов. Нормы погрешности методов  $H_2$  при этом уменьшились.

**Тест 2.** Распространение примеси от мгновенного точечного источника.

Рассмотрим следующую нестационарную задачу, моделирующую распространение примеси от мгновенного источника, расположенного внутри области [17]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sigma \Phi = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + Q \delta(x - x_0) \delta(t - t_0), & 0 < x < X, \quad 0 < t \leq T, \\ t = 0: \quad \Phi(0, x) = 0, \\ \Phi(t, 0) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, X) = 0. \end{cases}$$

Здесь  $\delta(z)$  – дельта-функция.

Точное решение данной задачи имеет вид [17]

$$\Phi_{\text{exact}}(t, x) = \begin{cases} \frac{Q}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \exp\left(-\sigma(t-t_0) - \frac{[(x-x_0)-u(t-t_0)]^2}{4D(t-t_0)}\right), & t \in (t_0, T], \\ 0, & t \in [0, t_0]. \end{cases}$$

Здесь  $t_0$  – момент времени, в который произошел выброс примеси,  $x_0$  – координата источника,  $\sigma$  – интенсивность осаждения примеси;  $Q$  – мощность мгновенного точечного источника. Значения констант модели выбирались следующими:  $u = 1$ ,  $D = 0.01$ ,  $\sigma = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $X = 100$ ,  $T = 100$ ,  $t_0 = 0.5T$ ,  $x_0 = 15$ . Расчеты проводились при  $M = 100, M = 200, u\tau/h = 0.2$ . Результаты вычислений представлены на рис. 4.

Также было проведено сравнение данного решения с решениями полученными методами, описанными выше. Из рис. 4 и табл. 2 видно, что на более подробной сетке наилучший результат дают схемы MLU и MUSCL. Незначительно им уступает сплайновая схема, но сплайновая схема в данном тестовом примере точнее показывает максимальное значение концентрации, что, безусловно, является преимуществом для воспроизведения пиковых значений концентраций загрязнителей атмосферного воздуха.

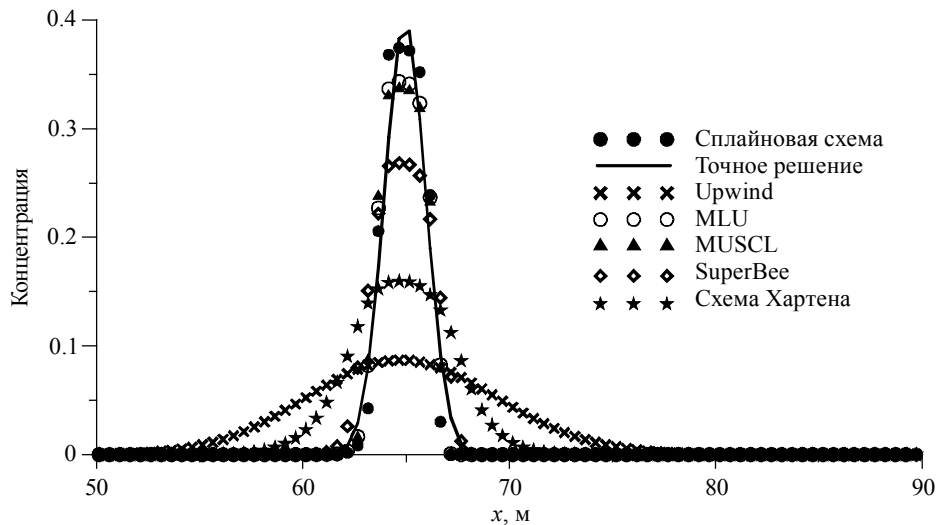


Рис. 4. Рассчитанные значения концентрации примеси при  $t = T$  для  $M = 200$   
Fig. 4. Calculated values of the impurity concentration at  $t = T$  for  $M = 200$

Таблица 2

Сравнение норм погрешности различных методов аппроксимации конвективных членов в задаче о мгновенном точечном источнике

|   | Метод         | $M = 100$ |         | $M = 200$ |         |
|---|---------------|-----------|---------|-----------|---------|
|   |               | $H_1$     | $H_2$   | $H_1$     | $H_2$   |
| 1 | Upwind        | 0.30272   | 0.04501 | 0.30349   | 0.04164 |
| 2 | MLU           | 0.16869   | 0.02616 | 0.05377   | 0.00795 |
| 3 | MUSCL         | 0.17177   | 0.02616 | 0.06590   | 0.00841 |
| 4 | ENO3          | 0.17091   | 0.02623 | 0.14772   | 0.02143 |
| 5 | Сплайн        | 0.15203   | 0.02370 | 0.07608   | 0.00956 |
| 6 | Схема Хартена | 0.25983   | 0.03921 | 0.23127   | 0.03113 |
| 7 | Superbee      | 0.20095   | 0.03104 | 0.12319   | 0.01534 |

Таким образом, можно говорить о том, что использование формосохраняющей сплайновой интерполяции является перспективным направлением при конструировании монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации.

### Заключение

Наиболее популярными методами решения задач конвективно-диффузионного переноса остаются разностные схемы, поскольку в общем случае получить аналитическое решение дифференциальной задачи затруднительно. Построение схем высокого порядка точности является актуальной задачей, поскольку такие схемы дают решение с удовлетворительной погрешностью даже на грубых сетках.

В данной работе для решения нестационарного уравнения «конвекции-диффузии» использовались явные разностные схемы, метод конечного объема и различные способы для аппроксимации конвективного слагаемого уравнения. В частности, рассмотрен вопрос о построении разностных схем высокого порядка точности на основе локальных интерполяционных весовых кубических сплайнов для уравнения «конвекции – диффузии».

Полученная разностная сплайновая схема была применена для решения двух тестовых задач: «бездиффузионного» распространения примеси и распространения примеси от мгновенного точечного источника. Для сравнения использовались разностные схемы с различным способом аппроксимации конвективного члена уравнения: противопотоковая схема, схема Хартена, схема с ограничителем superbee, MLU, MUSCL и схема ENO, которая позволяет получать аппроксимацию по пространству до 6-го порядка. Результаты расчетов, выполненные для различной плотности узлов сетки, показали сеточную сходимость приближенного решения. Для первой тестовой задачи сплайновая схема продемонстрировала преимущество перед остальными схемами по близости приближенного решения к точному. Для второй тестовой задачи, характеризующейся более гладкими пространственными профилями решения, на грубой сетке лучшее качество согласования с точным решением дала сплайновая схема. На более подробной сетке наилучший результат дают схемы MLU и MUSCL. Незначительно им уступает сплайновая схема, но сплайновая схема в данном тестовом примере точнее показывает пиковое значение концентрации, что, безусловно, является преимуществом для воспроизведения пиковых значений концентраций загрязнителей атмосферного воздуха.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.:Физматлит, 2001. 320 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
4. Lax P.D., Wendroff B. Systems of conservation laws // Communications in Pure and Applied Mathematics. 1960. V. 13. P. 217–237.
5. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
6. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest for monotonicity // Lecture Notes in Physics. 1973. V. 18. P. 163–168.
7. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // J. Comp. Phys. 1974. V. 14. P. 361–370.
8. Noll B. Evaluation of a bounded high-resolution scheme for combustor flow computations // AIAA Journal. 1992. V. 30. No. 1. P. 64–68.
9. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136.

10. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. 2nd edition. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999. 645 p.
11. Лебедев А.С., Черный С.Г. Практикум по численному решению уравнений в частных производных. Новосибирск: НГУ, 2000. 136 с.
12. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
13. Roe P.L. Characteristic-based schemes for the Euler equations // Ann. Rev. Fluid Mech. 1986. V. 18. P. 337–365.
14. Harten A., Engquist B., Osher S., and Chakravarthy S.R. Some results on uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes // J. Appl. Num. Math. 1986. V. 2. P. 347–377.
15. Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.
16. Карпова А.А. Приближение таблично заданных функций с помощью аппроксимационных и интерполяционных весовых сплайнов // Научная конференция студентов механико-математического факультета ТГУ, 24–30 апреля 2014 г.: сб. материалов. Томск, 2014. С. 38–39.
17. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.: ил.
18. Čada M., Torrilhon M. Compact third-order limiter functions for finite volume methods // J. Computational Physics. 2009. V. 228. No. 11. P. 4118–4145.
19. Starchenko A.V., Danilkin E.A., Semenova A.A., and Bart A.A. Parallel algorithms for a 3D photochemical model of pollutant transport in the atmosphere // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 687. P. 158–171.
20. Chi-Wang Shu. Essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // Preprint of Division of Applied Mathematics. Brown University. 1996. 92 p.
21. Ривин Г.С., Воронина П.В. Перенос аэрозоля в атмосфере: выбор конечно-разностной схемы // Оптика атмосферы и океана. 1997. № 6. С. 623–633.

Статья поступила 05.07.2017 г.

Semyonova A.A., Starchenko A.V. (2017) THE FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR THE UNSTEADY CONVECTION-DIFFUSION EQUATION BASED ON WEIGHTED LOCAL CUBIC SPLINE INTERPOLATION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 61–74

DOI 10.17223/19988621/49/6

Keywords: unsteady convection–diffusion equation, weighted local cubic splines, monotonized high order approximation for convective terms.

In this paper, special attention is paid to the choice of an approximating scheme for the convective terms of the unsteady convection–diffusion equation. The purpose of this study is to develop a difference scheme for the convection–diffusion equation with weighted local cubic spline approximation for the convective terms.

Figure 1 shows the advantage of weighted cubic spline functions over other methods for interpolating functions that are set by the table of their values for the case when four values of the interpolated function are given. From Fig. 1 it is clear that the interpolating local cubic spline oscillates but shows a smaller deviation from the original monotonic distribution. The best result is obtained with the weighted local cubic spline.

The resulting finite difference spline scheme was used to solve two unsteady problems with the known analytical solution: the "diffusionless" propagation of an impurity and the propagation of an impurity from an instantaneous point source. The following finite difference schemes with different approximations for the convective terms of the equation were compared: the upwind scheme, the Harten scheme, the superbee limiter scheme, MLU, MUSCL, and the 3rd order approximating ENO scheme.



The results of the calculations (Fig. 3 and Fig. 4) performed for various density of grid nodes (Table 1 and Table 2) show the convergence of the approximate solution to the exact solution. For the first test problem, the spline scheme is at the advantage of the proximity of the calculated solution to the exact one over the other schemes. For the second test problem, which is characterized by smoother spatial solution profiles, on a coarse grid spline scheme gives solution which is in the best agreement with the exact solution. On a more detailed grid, the best results are given by the MLU and MUSCL schemes. The spline proposed is slightly inferior to them, but in this test example the spline scheme predicts the current maximum concentration more accurately, which is certainly an advantage for the representation of peak concentrations of air pollutants.

SEMYONOVA Anastasiya Alexandrovna (Post graduate student,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: semyonova.a@math.tsu.ru

STARCHENKO Alexander Vasil'evich (Doctor of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: starch@math.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Samarskiy A.A., Mihaylov A.P. (2001) *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling]. Moscow: Fizmatlit.
2. Samarskiy A.A. (1977) *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of finite difference schemes]. Moscow: Nauka.
3. Godunov S.K. (1959) A Difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sbornik*. 47(89). 3. pp. 271–306.
4. Lax P.D., Wendroff B. (1960) Systems of conservation laws. *Communications in Pure and Applied Mathematics*. 13. pp. 217–237. DOI: 10.1002/cpa.3160130205.
5. Kolgan V.P. (1972) Primenenie printsipa minimal'nykh znacheniy proizvodnoy k postroeniyu konechnoraznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki [Application of the principle of minimum derivatives to the construction of difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics]. *Uch. Zap. TsaGI*. 3(6). pp. 68–77.
6. van Leer B. (1973) Towards the ultimate conservative difference scheme. I. The quest for monotonicity. *Lecture Notes in Physics*. 18. pp. 163–168. DOI: 10.1007/BFb0118673.
7. van Leer B. (1974) Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comp. Phys*. 14. pp. 361–370. DOI: 10.1016/0021-9991(74)90019-9.
8. Noll B. (1992) Evaluation of a bounded high-resolution scheme for combustor flow computations. *AIAA Journal*. 30(1). pp. 64–68. DOI: 10.2514/3.10883.
9. van Leer B. (1979) Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method. *J. Comp. Physics*. 32. pp. 101–136. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90145-1.
10. Toro E.F. (1999) *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-662-03915-1.
11. Lebedev A.S., Chernyj S.G. (2000) *Praktikum po chislenному resheniyu uravnenij v chastnykh proizvodnykh* [Practice on the numerical solution of partial differential equations]. Novosibirsk: NSU publ.
12. Harten A. (1983) High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys*. 49. pp. 357–393. DOI: 10.1016/0021-9991(83)90136-5.
13. Roe P.L. (1986) Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Ann. Rev. Fluid Mech*. 18. pp. 337–365. DOI: 10.1146/annurev.fl.18.010186.002005.
14. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S. R. (1986) Some results on uniformly high-order accurate essentially Non-oscillatory schemes. *J. Appl. Num. Math*. 2. pp. 347–377. DOI: 10.1016/0168-9274(86)90039-5.

15. Kvasov B. I. (2000) *Methods of shape-preserving spline approximation*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
16. Karpova A.A. (2014) Priblizhenie tablichno zadannykh funktsiy s pomoshh'yu approksimatsionnykh i interpolatsionnykh vesovykh splajnov [Approximation of tabulated functions by means of approximation and interpolation weighted splines]. *Scientific Conference of Students of the Mechanics and Mathematics Department*, 24–30 april 2014. Tomsk. pp. 38–39.
17. Marchuk G.I. (1982) *Mathematical models in environmental problems*. Amsterdam: Elsevier.
18. Čada M., Torrilhon M. (2009) Compact third-order limiter functions for finite volume methods. *J. Computational Physics*. 228. pp. 4118–4145. DOI: 10.1016/j.jcp.2009. 02.020.
19. Starchenko A.V., Danilkin E.A., Semenova A.A., Bart A.A. (2016) Parallel algorithms for a 3D photochemical model of pollutant transport in the atmosphere. *Communications in Computer and Information Science*. 687. pp.158–171. DOI: 10.1007/978-3-319-55669-7\_13.
20. Chi-Wang Shu (1996) *Essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*. Preprint of Division of Applied Mathematics. Brown University.
21. Rivin G.S., Voronina P.V. (1997) Aerosol transfer in the atmosphere: selection of a finite difference scheme. *Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(6). pp. 386–392.

## МЕХАНИКА

УДК 621.735.043

DOI 10.17223/19988621/49/7

А.Ю. Албагачиев, А.М. Моисеенко, И.М. Якововская, Е.В. Зернов

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
ТОНКОЙ КВАДРАТНОЙ ЗАГОТОВКИ ПРИ ЕЕ ОСАДКЕ  
ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Получены зависимости и разработан метод определения параметров напряженного состояния при осадке жесткопластической тонкой квадратной заготовки с использованием метода минимизации полной энергии деформаций.

**Ключевые слова:** осадка, внутренняя энергия, интенсивность скоростей деформаций, предел текучести.

Представленная работа, в которой параметры напряженного и деформированного состояния определены с помощью уравнений равновесия и физических уравнений, является продолжением статей [1, 4]. В целях упрощения решения были приняты допущения, обоснованность которых нужно проверить. В частности при определении напряжений по формулам Леви – Мизеса интенсивность относительных скоростей полагалась приближённо постоянной равной  $V/h$ , в то время как она переменна. При нахождении силы трения на торцевых поверхностях принималось, что она равна  $\tau_{cp}$  – средне-интегральному значению касательных напряжений на этих поверхностях, тогда как в общепринятой постановке сила трения вычисляется по закону Амонтона – Кулона. С этой целью задача определения параметров напряженного и деформированного состояния была решена с помощью принципа минимума полной энергии, свободного от вышеуказанных допущений. Согласно этому принципу, для тонкой квадратной заготовки  $\left(\frac{h}{a} < \frac{1}{4}\right)$

полная энергия деформации [3]

$$\Pi = \sigma_T \left( \iiint_{\omega} \zeta_i d\omega + \mu \iint_s \sqrt{V_r^2 + V_\phi^2} ds \right), \quad (1)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести;  $\omega$ ,  $s$  – объем и площадь торца заготовки;  $\zeta_i$  – интенсивность скоростей деформаций,

$$\zeta_i = \sqrt{2/3} \sqrt{(\zeta_r - \zeta_\phi)^2 + (\zeta_r - \zeta_z)^2 + (\zeta_\phi - \zeta_z)^2 + 3/2 \zeta_{r\phi}^2};$$

$\mu$  – коэффициент внешнего трения;  $V_r, V_\phi, V_z$  – компоненты скорости точки.

На рис. 1 представлена схема заготовки при ее осадке, где  $2a$ ,  $2h$  – сторона и толщина заготовки,  $O$  – центр заготовки,  $V$  – скорость осадки.

Так как пластинка имеет 5 осей симметрии и нагрузка симметрична относительно осей, то рассматривается только 1/8 часть пластинки при  $\phi \in [0, \pi/4]$ .

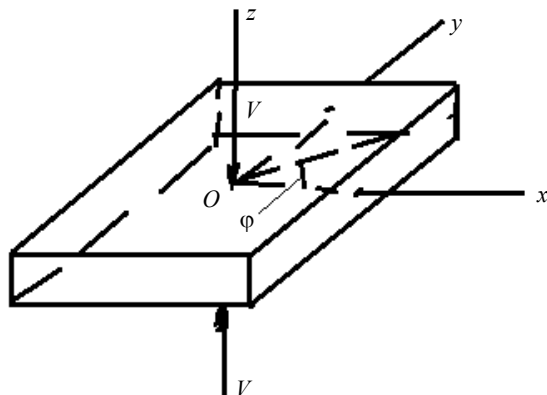


Рис. 1. Схема заготовки при ее осадке  
Fig. 1. Diagram of the workpiece during upsetting

Для минимизации полной энергии согласно методу Ритца подбираем выражения для скоростей так, чтобы выполнялись граничные условия и условие несжимаемости. Тогда  $V_z = -Vz/h$ ,  $V_\varphi = cVr^2 \sin(4\varphi)$ , а  $V_r$  находится из условия несжимаемости:

$$\zeta_z + \zeta_r + \zeta_\varphi = 0, \quad (2)$$

где  $\zeta_z, \zeta_r, \zeta_\varphi$  – компоненты скорости деформации.

$$\zeta_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{V}{h}; \quad \zeta_\varphi = \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}; \quad \zeta_r = \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (3)$$

Подставляя эти выражения в (2), получим

$$V_r = \frac{Vr}{2h} + \frac{4}{3} cVr^2 \cos 4\varphi$$

Тогда скорость сдвига

$$\eta_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} = -\frac{19}{3} crV \sin 4\varphi,$$

где  $c$  – коэффициент, зависящий от размеров заготовки и  $\mu$ . Подставляя выражения скоростей и скоростей деформаций в (1), получим

$$\begin{aligned} \Pi = \sigma_T V \left[ \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a/\cos\varphi} r \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{9}{2h^2} + \frac{384}{9} c^2 r^2 - \frac{23}{6} c^2 r^2 \sin^2 4\varphi \right)} dr \int_0^h dz + \right. \\ \left. + \mu \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a/\cos\varphi} r \sqrt{\frac{r^2}{4h^2} + \frac{4}{3} c \frac{r^3}{h} \cos 4\varphi + \frac{16}{9} c^2 r^4 - \frac{7}{9} c^2 r^4 \sin^2 4\varphi} dr \right]. \end{aligned}$$

Линеаризуя выражения под знаком интеграла, применяя биномиальное разложение и беря два его первых члена, а затем, интегрируя, получим

$$\Pi = \sigma_T V \left[ a^2 0.867 + c^2 (2.266h^2 a^4 + 0.913\mu a^5 h) - 0.0972c\mu a^4 + 0.195 \frac{\mu a^3}{h} \right].$$

Тогда из выражения  $\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0$

получим 
$$c = \frac{0.048\mu}{2.266h^2 + 0.913\mu ah} \quad (4)$$

### Обсуждение результатов

Для проверки точности полученных выражений для скоростей и скоростей деформаций были взяты заготовки из технического пластилина размерами  $23 \times 23 \times 5$  мм. Осадка производилась плитами из стали 12X18H10T, шероховатостью 90 мкм, при  $T = 21-22$  °С. Перед осадкой торцевые поверхности заготовки смазывались тальком. В выражение для коэффициента  $c$  входит коэффициент внешнего трения  $\mu$ , который нам неизвестен. Чтобы его определить, строили кривые  $r(V)|_{\varphi=0}$  для различных значений  $c$ , используя формулу для  $V_r$ , и сравнивали с такой же кривой, полученной экспериментально. Из семейства кривых  $r(V)|_{\varphi=0}$  выбиралась кривая, наиболее близкая к экспериментальной, таким образом коэффициент  $c$ , а значит и  $\mu$ , были определены. Для заготовки указанных размеров  $c = 6.62 \cdot 10^{-4}$  1/мм<sup>2</sup>,  $\mu = 0.3$ . На рис. 2 при указанных выше  $c$  и  $\mu$  приведены опытная и теоретическая кривые перемещения точки ( $\varphi = 0$ ,  $r = a$ ), т.е. кривые  $r(V)|_{\varphi=0}$ . Теперь, зная значение коэффициента  $c$ , можно по формулам (3) определить поле скоростей и скоростей деформаций, которые нам потребуются для определения напряжений, определяемых из уравнений связи Леви – Мизеса [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_r, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_\varphi, \\ \sigma_z &= \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_z, \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \eta_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Первые три уравнения определяют нормальные напряжения через скорости деформаций (которые известны) с точностью до  $\sigma_0$  – среднего напряжения.

Определим неизвестное  $\sigma_0$  в точках  $(\varphi, \frac{a}{\cos \varphi})$  границы (свободной поверхности). Так как на границе нормальное напряжение  $\sigma_n = 0$ , то для определения  $\sigma_0$  на границе имеем условие

$$\sigma_n = (\sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_r) \cos \varphi + (\sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_\varphi) \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Поле деформаций, а значит, скорости деформаций, определены на границе, т.е. в выражении (6) неизвестной является только величина  $\sigma_0$ , в предположении, что  $\sigma_i = \sigma_T = 1$  (в единицах  $\sigma_T$ ). Определив  $\sigma_0$  и, следовательно,  $\sigma_r$ , исходя из

формул (5) на границе, находим  $\sigma_r$  в точках внутри области. В уравнении равновесия

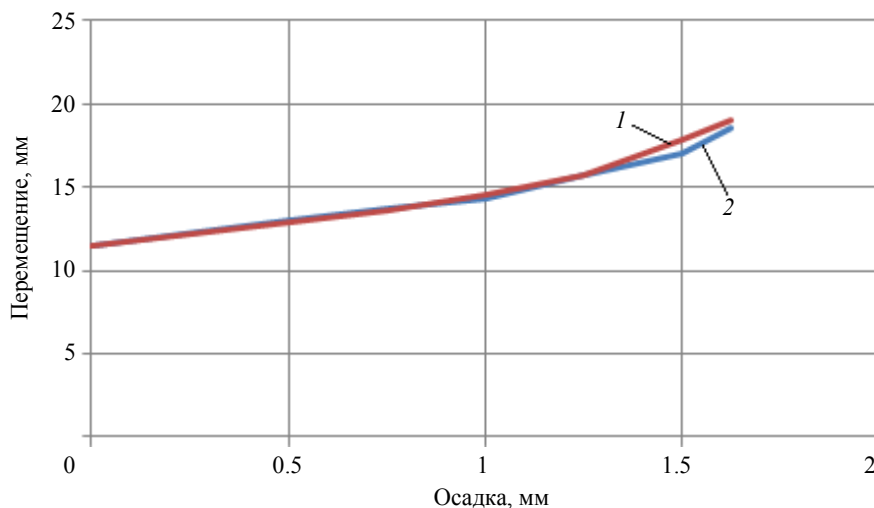
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0$$

последние два слагаемых – известные величины в каждой точке  $(r, \varphi)$  на луче

$(0 \leq \varphi \leq \pi/4)$ . Следовательно, величину  $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$  определим из этого уравнения. Итак,

в точке  $(r, a/\cos \varphi)$  на границе известны величины  $\sigma_r, \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$ . Задаваясь определенным шагом и двигаясь с этим шагом от граничной точки по лучу  $\varphi = \text{const}$ , будем

получать искомые значения  $\sigma_r$ , и  $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$  в каждой точке луча, а  $\sigma_\varphi$  может быть получено через  $\sigma_r$  вычитанием из первого уравнения второго в выражениях (5).



**Рис. 2.** Теоретическая (1) и экспериментальная (2) кривые зависимости радиального перемещения точки ( $\varphi = 0, r = a$ ) от величины осадки

**Fig. 2.** Theoretical (1) and experimental (2) dependency diagrams of the radial displacement of the point ( $\varphi = 0, r = a$ ) upon the upsetting value

Таким образом, зная значение коэффициента  $c$  по формуле (4), можно определить поле скоростей и скоростей деформаций, которые потребуются для определения напряжений из уравнений связи Леви – Мизеса.

### Заключение

Полученные зависимости для скоростей и скоростей деформаций хорошо согласуются с экспериментальными данными, позволяют определять конфигурацию заготовки в зависимости от величины осадки, а также определять напряжения и коэффициент внешнего трения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Албагачиев А.Ю., Якововская И.М., Зернов Е.В. Напряженное и деформированное состояние при осадке жесткопластической заготовки квадратного сечения // Вестник МГУПИ. 2012. № 40. С. 9.
2. Воронцов А.Л. Технологические задачи теории пластичности. Т. 3. М.: Машиностроение, 2006. 475 с.
3. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
4. Албагачиев А.Ю., Зернов Е.В., Моисеенко А.М. Напряженное и деформированное состояние прямоугольной пластины, осаживаемой шероховатыми пластинами // Ресурсосберегающие технологии при хранении и переработке сельскохозяйственной продукции. XI Международный научно-практический семинар. Орел, 2012. С. 15–23.

Статья поступила: 11.08.2017 г.

Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Yakobovskaya I.M., Zernov E.V. (2017) A STRESS-STRAIN STATE OF THE THIN SQUARE WORKPIECE DURING UPSETTING BY THE ROUGH PLATES *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 75–80  
DOI 10.17223/19988621/49/7

In this paper, a stress-strain state of the thin square rigid-plastic plate upsetting by the rough plates has been investigated using the energy minimization method. It is known that the total strain energy  $\Pi$  is expressed in terms of the strain rate, which according to the Ritz method must be chosen so that the boundary conditions and incompressibility conditions are both satisfied. The obtained dependences for the strain rates contain the  $c$  coefficient depending on the plate dimensions and external friction coefficient. The value of the  $c$  is obtained from the condition of zero partial derivative of  $\Pi$  with respect to  $c$ . Having determined the  $c$ , it is possible to obtain the strain rate field, i.e. the solution of the problem of strain state of the plate. The strain state as detailed in the paper is determined using the Levy-Mises equations, which integrate the stress with the strain rates. The authors of the paper have previously considered a similar problem and it has been solved using the equilibrium equations and physical equations of the plastic flow. The results in the form of strain state parameters of the workpieces made of different materials have been experimentally obtained. In both cases, there is a good agreement with the theoretical dependences for the strain rates. The obtained dependences for velocities and strain rates, which are in a good agreement with the experimental data, allow determining both the workpiece configuration depending on the upsetting value, the voltage and the external friction coefficient.

Keywords: upsetting, internal energy, intensity of the strain rates, yield stress.

*ALBAGACHIEV Ali Yusupovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Technological University, Moscow, Russian Federation).

*MOISEENKO Anatoliy Mikhailovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Orel State Agrarian University named after N.V. Parahin, Orel, Russian Federation).  
E-mail: puare54@yandex.ru

*YAKOBOVSKAYA Inga Mikhailovna* (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow Technological University, Moscow, Russian Federation).

*ZERNOV Evgeniy Vladimirovich* (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow Technological University, Moscow, Russian Federation).  
E-mail: zernov1935@mail.ru

## REFERENCES

1. Albagachiev A.Yu., Jakobovskaya I.M., Zernov V.E. (2012) Napryazhennoe i deformirovanoe sostoyanie pri osadke zhestkoplachesticheskoy zagotovki kvadratnogo secheniya [Stress and strain state of the rigid-plastic workpiece of square cross-section during upsetting]. *Vestnik MGUPI – Bulletin of Moscow Technological University*. 40. p. 9.
2. Vorontsov A.L. (2006) *Tekhnologicheskie zadachi teorii plastichnosti* [Technological problems of plasticity theory]. Part 2. Moscow: Mashinostroenie.
3. Johnson W., Mellor P. (1979) *Teoriya plastichnosti dlya inzhenerov* [The theory of plasticity for engineers]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Albagachiev A.Yu., Zernov E.V., Moiseenko A.M. (2012) Napryazhennoe i deformirovanoe sostoyanie pryamougol'noy plastiny, osazhivaemoy sherokhovatyimi plastinami [Stress and strain state of rectangular plate upsetting by the rough plates]. *Resursosberegayushchie tekhnologii pri khranении i pererabotke sel'skokhozyaystvennoy produktsii. XI Mezhdunarodnyy nauchno-prakticheskiy seminar – Energy-saving technologies for the storage and processing of the agricultural products. XI International scientific-practical seminar*. Orel. pp. 15–23.



УДК 532.516.5

DOI 10.17223/19988621/49/8

**М.П. Бессонова, М.А. Пономарева, В.А. Якутенок****РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ  
В ОДНОШНЕКОВОМ ЭКСТРУДЕРЕ<sup>1</sup>**

Создана математическая модель процесса экструзии, учитывающая наличие циркуляционного течения в шнековом канале. Для описания сложного реологического поведения экструдруемого материала используется степенная модель. При расчете температуры учитывается тепловыделение за счет вязкой диссипации. Проведены расчеты параметров течения для различных значений показателя нелинейности.

**Ключевые слова:** одношнековый экструдер, неньютоновская жидкость, неизотермическое течение, математическая модель, циркуляционное течение.

При формировании изделий из высоковязких полимерных композиций одним из важнейших элементов технологической оснастки является экструдер, с помощью которого осуществляется транспорт перерабатываемой массы в пресс-форму. Кроме этого, экструдер выполняет роль шнекового смесителя. Экструзионной переработке полимеров посвящена обширная литература. Наиболее полными можно считать работы [1–4]. Помимо этого постоянно появляются исследования более частного характера [5–8]. Внимательный анализ состояния исследований показывает, что в настоящее время нет устоявшейся методики расчета процесса экструзии. Используются либо подходы со значительными, иногда неоправданными упрощениями, либо исследования носят общетеоретический характер и используют трудно воспроизводимые методы. В настоящей работе используется подход, основанный на применении многократно проверенных физических предположений о характере сложного движения экструдруемого материала и в то же время учитывающий максимальное количество факторов, определяющих процесс. Такой подход представляется наиболее перспективным для создания модели процесса экструзии, адекватно описывающей поля давлений, напряжений, вязкости и температур и позволяющей создать эффективные прикладные программы, работоспособные в максимально широком диапазоне определяющих параметров.

**Математическая постановка задачи**

Рассматривается течение полимерной среды в канале шнека экструдера. Предполагается, что корпус материального цилиндра выполнен с гладкими стенками. При математической формулировке задачи считается применимым приближение ползущего течения, что основывается на малости характерных чисел Рейнольдса для данного типа течений [1]. Полимерную среду будем считать неньютоновской жидкостью, подчиняющуюся степенному реологическому закону. Учтем, что наряду с продольным течением реализуется циркуляционное поперечное движение

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №9.9625.2017/БЧ.

экструдированной массы. Будем рассматривать обращенное движение: шнек считается неподвижным, а движется корпус экструдера. Данное предположение часто используется при моделировании течения в экструдере [4].

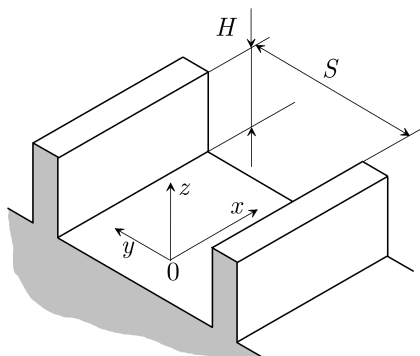


Рис. 1. Область решения  
Fig. 1. Solution region

Систему координат расположим как на рис. 1. Здесь:  $S$  – ширина канала шнека;  $H$  – его глубина;  $x$  – координата, направленная вдоль канала,  $y$  – поперек канала;  $z$  – по высоте канала. Все остальные обозначения (для составляющих скорости, давления, напряжений и т.д.) являются общепринятыми.

Предполагается, что боковые стенки не оказывают влияния на течение ( $S/H \geq 3$  [9]) и нет утечек через гребни шнека. По направлениям  $x$  и  $y$  действуют градиенты  $dp/dx$  и  $dp/dy$ . Тогда:  $v_z = 0$ ,  $v_y = v_y(z)$ ,  $v_x = v_x(z)$ ,  $p = p(x, y)$ .

Уравнения движения при этих предположениях приобретают форму

$$\frac{d\tau_{xz}}{dz} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{d\tau_{yz}}{dz} = \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (1)$$

Уравнение неразрывности вырождается, так как

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Второй инвариант тензора скоростей деформаций запишется в виде

$$\frac{I_2}{2} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2. \quad (2)$$

Выражение для вязкости запишется следующим образом:

$$\eta = B \left( \frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} = B \left( \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

С учетом вида компонент тензора напряжений

$$\tau_{xz} = \eta \frac{dv_x}{dz}, \quad \tau_{yz} = \eta \frac{dv_y}{dz}$$

и уравнений (1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left\{ B \left[ \left( \frac{dv_y}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv_x}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv_x}{dz} \right\} &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{d}{dz} \left\{ B \left[ \left( \frac{dv_y}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv_x}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv_y}{dz} \right\} &= \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Введем обозначения  $\frac{\partial p}{\partial x} = A_1$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = A_2$ . В результате интегрирования первого уравнения системы (1) имеем

$$\int_{z_1}^z d\tau_{xz} = \int_{z_1}^z A_1 dz,$$

$$\tau_{xz}(z) = \{\tau_{xz}(z_1) - A_1 z_1\} + A_1 z.$$

В соответствии с [1], постоянную  $\tau_{xz}(z_1) - A_1 z_1$  выберем равной

$$\tau_{xz}(z_1) - A_1 z_1 \equiv -A_1 C_1 H, \text{ где } C_1 \equiv \text{const},$$

т.е.  $\tau_{xz}(z_1) = A_1(z_1 - C_1 H)$ .

Преобразовав соответствующим образом второе уравнение (1), получим систему

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(z) &= A_1(z - C_1 H), \\ \tau_{yz}(z) &= A_2(z - C_2 H). \end{aligned} \quad (3)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{z}{H} \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad v_1 = \frac{v_x}{V_B}, \quad v_2 = \frac{v_y}{V_B}, \quad a = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\partial p / \partial y}{\partial p / \partial x},$$

тогда

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= B \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv_x}{dz} = A_1(z - C_1 H), \\ \frac{BV_B^{n-1} V_B}{H^{n-1} H} \left[ \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv_1}{d\xi} &= A_1 H(\xi - C_1), \\ \frac{BV_B^n}{A_1 H^{n+1}} \left[ \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv_1}{d\xi} &= \xi - C_1. \end{aligned}$$

Здесь  $V_B$  – скорость корпуса в обратном движении.

Следуя [1], введем обозначение  $\alpha = \frac{V_B}{H} \left( \frac{B}{HA_1} \right)^{\frac{1}{n}}$ ,  $\alpha^n = \frac{BV_B^n}{H^{n+1} A_1}$ , тогда

$$\alpha^n \left[ \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv_1}{d\xi} = \xi - C_1. \quad (4)$$

Для второго уравнения (3) соответственно будем иметь

$$\alpha^n \frac{A_1}{A_2} \left[ \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv_2}{d\xi} = \xi - C_2,$$

$$\frac{\alpha^n}{a} \left[ \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv_2}{d\xi} = \xi - C_2. \quad (5)$$

Из (4) и (5) можно получить соотношения для  $\frac{dv_1}{d\xi}$  и  $\frac{dv_2}{d\xi}$ . Для этого поделим (4) на (5):

$$a \frac{\left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)}{\left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)} = \frac{\xi - C_1}{\xi - C_2}, \quad \frac{dv_1}{d\xi} = \frac{1}{a} \frac{\xi - C_1}{\xi - C_2} \frac{dv_2}{d\xi}.$$

Подставим полученное выражение в (5)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^n}{a} \left[ \frac{1}{a^2} \frac{(\xi - C_1)^2}{(\xi - C_2)^2} + 1 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^n &= \xi - C_2, \\ \frac{dv_2}{d\xi} &= \left\{ (\xi - C_2) \frac{a}{\alpha^n} \left[ \frac{(\xi - C_1)^2 + a^2 (\xi - C_2)^2}{a^2 (\xi - C_2)^2} \right]^{\frac{1-n}{2}} \right\}^{\frac{1}{n}} = \\ &= \left\{ \frac{(\xi - C_2)}{(\xi - C_2)^{1-n}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{a}{a^{1-n}} \left[ (\xi - C_1)^2 + a^2 (\xi - C_2)^2 \right]^{\frac{1-n}{2}} \right\}^{\frac{1}{n}} = \\ &= (\xi - C_2) a \frac{1}{\alpha} \left[ (\xi - C_1)^2 + a^2 (\xi - C_2)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}}. \end{aligned}$$

Пусть  $\psi = \left[ (\xi - C_1)^2 + a^2 (\xi - C_2)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}}$ , тогда

$$\frac{dv_2}{d\xi} = \frac{a}{\alpha} \psi (\xi - C_2). \quad (6)$$

Аналогично, имеем

$$\frac{dv_2}{d\xi} = a \frac{\xi - C_2}{\xi - C_1} \frac{dv_1}{d\xi}.$$

Подставляя данное выражение в (4), получим

$$\begin{aligned} \alpha^n \left[ \frac{a^2 (\xi - C_2)^2}{(\xi - C_1)^2} + 1 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^n &= \xi - C_1, \\ \frac{dv_1}{d\xi} &= \left\{ \frac{(\xi - C_1)}{\alpha^n} \left[ \frac{a^2 (\xi - C_2)^2 + (\xi - C_1)^2}{(\xi - C_1)^2} \right]^{\frac{1-n}{2}} \right\}^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{dv_1}{d\xi} = \frac{1}{\alpha} \psi(\xi - C_1). \quad (7)$$

Граничные условия задачи заключаются в следующем: на нижней границе ( $\xi = 0$ )  $v_x = 0$ ,  $v_y = 0$ ; на верхней границе ( $\xi = 1$ )  $v_1 = \cos \phi$ ,  $v_2 = \sin \phi$ . Используя (6), (7) и граничные условия на нижней границе, получим

$$\begin{aligned} v_1(\xi) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\xi \psi(\xi - C_1) d\xi, \\ v_2(\xi) &= \frac{a}{\alpha} \int_0^\xi \psi(\xi - C_2) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь учтено, что  $\alpha = \frac{V_B}{H} \left( \frac{B}{HA_1} \right)^{\frac{1}{n}}$  и  $a = \frac{A_2}{A_1}$  от  $\xi$ , т.е. от  $z$  не зависят, так как  $p = p(x, y)$ .

Обозначим расход на единицу ширины канала  $Q_1$ , следовательно, в безразмерном виде  $q_1 = \frac{Q_1}{V_B H} = \int_0^1 v_1 d\xi$ . Тогда, используя (8),

$$q_1 = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \left[ \int_0^\xi \psi(\xi - C_1) d\xi \right] d\xi.$$

Последнюю формулу можно упростить с помощью следующего соотношения:

$$\int_0^1 \left[ \int_0^x f(y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_x^1 f(y) dx \right] dy = \int_0^1 f(y)(1-y) dy,$$

тогда

$$q_1 = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \psi(\xi - C_1)(1-\xi) d\xi.$$

Аналогично для безразмерного расхода в поперечном (оси  $y$ ) направлении  $q_2$  будем иметь

$$q_2 = \frac{a}{\alpha} \int_0^1 \psi(\xi - C_2)(1-\xi) d\xi.$$

Выпишем полученную систему уравнений

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^1 \psi(\xi - C_1)(1-\xi) d\xi = q_1, \quad (9)$$

$$\frac{a}{\alpha} \int_0^1 \psi(\xi - C_2)(1-\xi) d\xi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^1 \psi(\xi - C_1) d\xi = 0, \quad (11)$$

$$\frac{a}{\alpha} \int_0^1 \psi(\xi - C_2) d\xi = 0, \quad (12)$$

$$\psi = \left[ (\xi - C_1)^2 + a^2 (\xi - C_2)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}}.$$

Здесь:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{H}{V_B} \left( \frac{H}{B} A_1 \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{A_2 H}{A_1 V_B} \left( \frac{H}{B} A_1 \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{H}{V_B} \left( \frac{H}{B} \frac{A_2^n}{A_1^n} A_1 \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{H}{V_B} \left( \frac{H}{B} \frac{A_2^n}{A_1^{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Зная неизвестные  $a$ ,  $\alpha$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , можно найти  $A_1$ ,  $A_2$ .

### Метод решения

Для решения системы нелинейных уравнений (9) – (12) используется метод Ньютона. Перепишем систему, введя новые, более удобные для последующего решения, обозначения неизвестных. Пусть  $y_1 = 1/\alpha$ ,  $y_2 = a/\alpha$ , тогда  $a = y_2/y_1$ ,  $y_3 = C_1$ ,  $y_4 = C_2$  и система примет вид:

$$\begin{cases} y_1 \int_0^1 \psi(\xi - y_3)(1 - \xi) d\xi - q_1 = 0, \\ y_2 \int_0^1 \psi(\xi - y_4)(1 - \xi) d\xi = 0, \\ y_1 \int_0^1 \psi(\xi - y_3) d\xi = 0, \\ y_2 \int_0^1 \psi(\xi - y_4) d\xi = 0, \end{cases}$$

$$\psi = \left[ (\xi - y_3)^2 + \frac{y_2^2}{y_1^2} (\xi - y_4)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}}.$$

В общем виде систему уравнений можно представить в форме

$$f_i(y_j) = 0, \quad (f_i(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0), \quad i, j = 1 \div 4.$$

Приращения (дифференциалы) функций  $f_i$  записываются в виде

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j,$$

например:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} dy_3 + \frac{\partial f_1}{\partial y_4} dy_4.$$

В конечно-разностном виде имеем

$$f_i^{(k+1)} - f_i^{(k)} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)^{(k)} (y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}).$$

Так как должно быть  $f_i^{(k+1)} = 0$ ,  $y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)} = \Delta y_j^{(k+1)}$ , то

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)^{(k)} \Delta y_j^{(k+1)} = -f_i^{(k)} (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, y_4^{(k)}).$$

В результате решения полученной системы будет найдено значение  $\Delta y_j^{(k+1)}$ , а следовательно, и  $y_j^{(k+1)} = y_j^{(k)} + \Delta y_j^{(k+1)}$  и т.д., пока  $|f_i^{(k)}| > \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – малое положительное число). Вычисление производных осуществляется по формулам

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)^{(k)} \approx \frac{f_i^{(k+1)} - f_i^{(k)}}{y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}}.$$

Таким образом, алгоритм метода решения состоит из следующих действий:

I. Задаются начальные значения:  $k = 0$ ,  $y_i^k$  (т.е.  $y_1^k, y_2^k, y_3^k, y_4^k$ ).

II. Вычисляется матрица Якоби

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, i, j = \overline{1, 4}$$

следующим образом:

1. Вычисляется  $f_i^{(k)} = f_i^{(k)} (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, y_4^{(k)})$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

1а. Если условие  $\max |f_i^{(k)}| < \xi$  выполняется, то решение найдено, иначе происходит переход к следующему пункту.

2. Вычисляется

$$f_{ij}^{(k)} = \begin{cases} f_{i1}^{(k)} (y_1^{(k)} + h, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, y_4^{(k)}), \\ f_{i2}^{(k)} (y_1^{(k)}, y_2^{(k)} + h, y_3^{(k)}, y_4^{(k)}), \\ f_{i3}^{(k)} (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)} + h, y_4^{(k)}), \\ f_{i4}^{(k)} (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, y_4^{(k)} + h), \end{cases} i, j = \overline{1, 4},$$

где  $h$  – малое положительное число ( $h = 0.001$ ).

3. Вычисляется матрица Якоби

$$a_{ij}^{(k)} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)^{(k)} \approx \frac{f_{ij}^{(k)} - f_i^{(k)}}{h}, i, j = \overline{1, 4}.$$

III. Решается система

$$a_{ij}^{(k)} \Delta y_j^{(k)} = -f_i^{(k)}$$

и находится  $\Delta y_j^{(k)}$ .

IV. Вычисляется  $y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} + \Delta y_i^{(k)}$ .

V. Переходим к пункту I.

В результате решения системы уравнений получаются значения следующих величин:  $y_1 = 1/\alpha$ ,  $y_2 = a/\alpha$ ,  $y_3 = C_1$ ,  $y_4 = C_2$ .

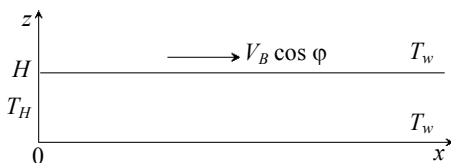
Изложенная теория учитывает наличие циркуляционного течения в канале шнека экструдера и неньютоновские свойства перемещаемой среды. В литературе подходы такого типа характеризуются как «сложный сдвиг», в отличие от «простого сдвига», не учитывающего наличие течения поперек канала.

### Вычисление температуры расплава вдоль канала экструдера

Предположения относительно гидродинамики прежние (сложный сдвиг):

$$v_z = 0, \quad v_y = v_y(z), \quad v_x = v_x(z), \quad p = p(x, y).$$

Область решения для вычисления температуры и граничные условия показаны на рис. 2.



**Рис. 2.** Область решения для расчета температуры  
**Fig. 2.** Solution region for the temperature calculation

В предположении пренебрежимо малой теплопроводности в направлении  $x$  ( $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$ ) и того, что  $T = T(x, z)$  (т.е. по  $y$  происходит выравнивание температуры за счет циркуляции), уравнение переноса тепла с учетом вязкой диссипации можно записать в виде:

$$\rho c v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \Phi, \quad (13)$$

$$\Phi = \eta \frac{I_2}{2}, \quad \frac{I_2}{2} = \left( \frac{dv_x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv_y}{dz} \right)^2.$$

Эффективная вязкость 
$$\eta = B \left( \frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}},$$

тогда

$$\Phi = \eta \frac{I_2}{2} = B \left( \frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{I_2}{2} \right) = B \left( \frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}} = B \left[ \left( \frac{dv_x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv_y}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}}. \quad (14)$$

Функция  $\Phi$  представляет собой количество тепла, выделяемого в потоке за счет вязкой диссипации. Условие на входе в канал шнека экструдера для уравнения (13):

$$x = 0, \quad T(0, z) = T_H, \quad 1 \leq z \leq H.$$



Граничные условия на стенках канала имеют вид

$$T(x, 0) = T_w, \quad T(x, H) = T_w.$$

Выберем в качестве безразмерных переменных величины

$$v_1 = \frac{v_x}{V_B}, \eta = \frac{x}{L}, \xi = \frac{z}{H}, v_2 = \frac{v_y}{V_B}.$$

Уравнение (13) в безразмерных переменных с учетом (14) примет вид

$$\frac{\rho c V_B}{L} v_1 \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\lambda}{H^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + B \frac{V_B^{n+1}}{H^{n+1}} \left[ \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}}.$$

В результате умножения полученного уравнения на  $H^2/\lambda$  будем иметь

$$\frac{\rho c V_B H^2}{\lambda L} v_1 \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + B \frac{V_B^{n+1}}{\lambda H^{n+1}} \left[ \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}}. \quad (15)$$

Введем следующие обозначения. Пусть  $Gr = \rho c V_B H^2 / \lambda L$  – число Гретца,  $Br = B V_B^{n+1} / \lambda H^{n+1} \Delta T$  – число Бринкмана ( $\Delta T = T_w - T_H$ ), тогда  $Br_T = B V_B^{n+1} / \lambda H^{n+1}$  (°C), т.е.  $Br_T = Br \Delta T$ . С учетом введенных обозначений, уравнение (15) примет вид

$$Gr v_1 \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + Br_T \left[ \left( \frac{dv_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dv_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}},$$

и пусть для сокращения записи  $\Phi = Br_T \left[ (dv_1/d\xi)^2 + (dv_2/d\xi)^2 \right]^{(n+1)/2}$ . Тогда приходим к уравнению

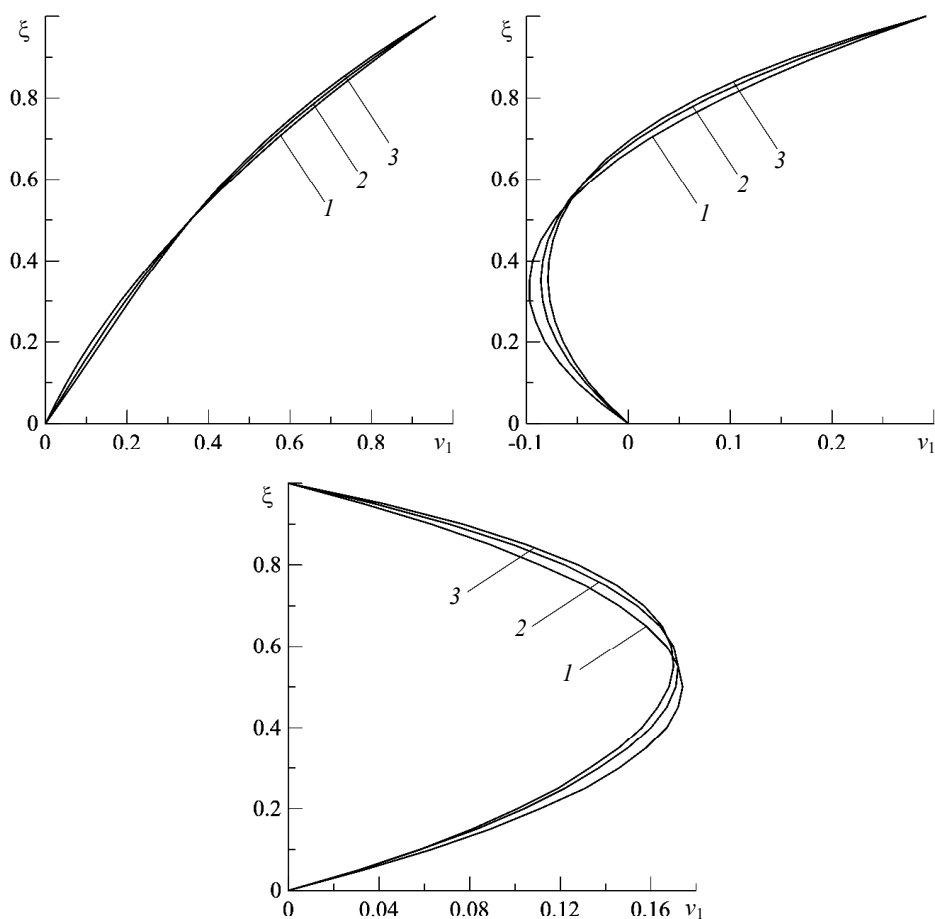
$$Gr v_1 \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \Phi. \quad (16)$$

Для решения уравнения теплопроводности (16) применяется маршевый метод, использующий алгоритм прогонки.

### Результаты

Для расчета течения степенной жидкости в одношнековом экструдере были выбраны следующие геометрические, реологические и теплофизические параметры: длина экструдера  $L = 250$  мм, ширина канала шнека  $S = 30$  мм, глубина канала шнека  $H = 10$  мм, угол наклона нарезки  $\phi = 17^\circ$ , число заходов  $i = 1$ , коэффициент консистенции  $B = 1 \cdot 10^4$  Па·с, коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0.1$  Вт/(м·К), коэффициент теплоемкости  $c = 800$  Дж/(кг·К), плотность материала  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Начальная температура поступающего в экструдер материала  $T_H = 20^\circ\text{C}$ . Температура стенок  $T_w = 100^\circ\text{C}$ . Скорость поверхности корпуса экструдера в обратном движении принималась равной  $V_B = 0.07$  м/с. Производительность экструдера 30 кг/ч.

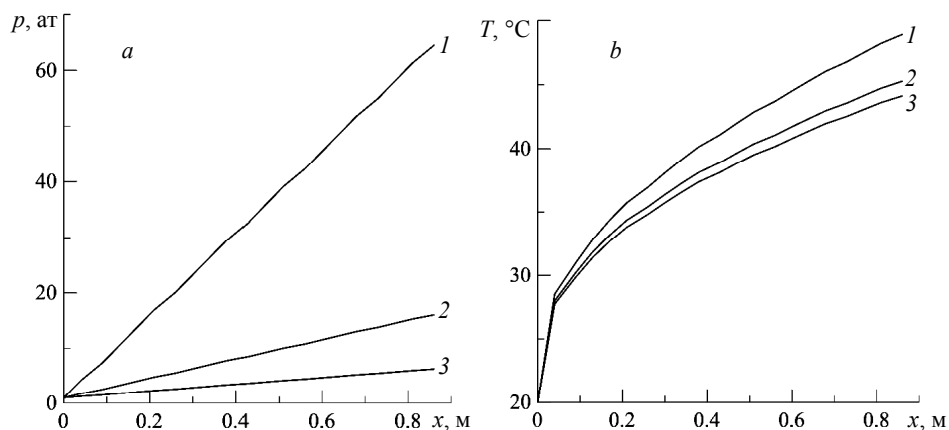
На рис. 3 показаны профили продольной, поперечной и осевой составляющих скорости при различных значениях показателя нелинейности  $n$ . При выбранной геометрии канала шнека профиль продольной составляющей скорости  $v_l$  (рис. 3, а) не имеет участка отрицательных значений и близок в данном случае к линейному. Наличие циркуляционного течения поперек канала шнека приводит к тому, что частицы расплава движутся по винтовым траекториям от входа в экструдер к его выходу. Этот факт следует из рис. 3, с. Во-первых видно, что транспортировка расплава осуществляется по всей глубине канала шнека в одном направлении: от входа к выходу. Во-вторых, нарастание нелинейности реологических характеристик расплава приводит к смещению профиля скорости к поверхности корпуса.



**Рис. 3.** Профили продольной  $v_l$  (а), поперечной  $v_2$  (б) и осевой  $v_l$  (с) составляющих скорости для различных значений показателя нелинейности  $n$ : 1 – 1.0, 2 – 0.6, 3 – 0.4

**Fig. 3.** Profiles of the (a) longitudinal  $v_l$ , (b) transverse  $v_2$ , and (c) axial  $v_l$  velocity components at different power-law indices:  $n = (1) 1$ , (2) 0.6, and (3) 0.4

Распределение давления и средней температуры вдоль канала шнека экструдера при различных показателях нелинейности в степенном реологическом законе представлены на рис. 4. Рост аномалии вязкости приводит к уменьшению градиентов давления и температуры и их абсолютных значений.



**Рис. 4.** Изменение давления (а) и средней температуры (б) по длине канала шнека экструдера для различных значений показателя нелинейности,  $n$ : 1 – 1.0, 2 – 0.6, 3 – 0.4

**Fig. 4.** Variation in (a) pressure and (b) average temperature along the screw extruder channel at different power-law indices:  $n = (1) 1$ , (2) 0.6, and (3) 0.4

### Заключение

Разработана физико-математическая модель неизотермического течения реологически сложной среды в канале шнекового экструдера с учетом наличия циркуляционного движения. При этом используется геометрическая модель двух движущихся пластин и рассматривается обращенное движение: шнек считается неподвижным, а корпус вращающимся. В результате, в предположении заданного расхода, получены четыре нелинейных уравнения, описывающих течение. Для их решения предложено использовать метод Ньютона, для которого разработан алгоритм численной реализации. Уравнение теплопроводности, позволяющее рассчитывать изменение температуры вдоль канала шнека, используется с учетом тепловыделения за счет вязкого трения. Приводится пример расчета течения степенной жидкости для различных значений показателя нелинейности.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Янков В. И., Боярченко В. И., Первадчук В.П. Переработка волокнообразующих полимеров. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2005. Т. 2. 998 с.
2. Торнер Р.В., Акутин М.С. Оборудование заводов по переработке пластмасс. М.: Химия, 1986. 400 с.
3. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1984. 632 с.
4. Раувендааль К. Экструзия полимеров / пер. с англ. под ред. А.Я. Малкина. СПб.: Профессия, 2008. 768 с.
5. Субботин Е.В., Щербинин А.Г., Труфанова Н.М. Численное исследование процессов течения полимеров в условиях фазового перехода в винтовых каналах экструдеров при производстве пластмассовой изоляции // Известия ТПУ. 2012. Т. 320. № 4. С. 171–177.

6. Sobhani H., Ghoreishy M. H. R., Razavi-Nouri M., Anderson P. D., Meijer H. H. E. Modelling of polymer fluid flow and residence time distribution in twin screw extruder using fictitious domain method // *Plastics, Rubber and Composites*. 2011. V. 40. Iss. 8. P. 387–396.
7. Althaus T. O., Windhab E. J. Extrusion of highly unsaturated wet powders: Stress fields in extruder barrels // *Powder Technology*. 2011. V. 211. Iss. 1. P. 10–18.
8. Baron R., Vauchel P., Kaas R., Arhaliass A., Legrand J. Dynamical modelling of a reactive extrusion process: Focus on residence time distribution in a fully intermeshing co-rotating twin-screw extruder and application to an alginate extraction process // *Chemical Engineering Science*. 2010. V. 65. Iss. 10. P. 3313–3321.
9. Пономарева М.А., Филина М.П., Якутенок В.А. Циркуляционное течение высоковязкой неньютоновской жидкости в канале одношнекового экструдера // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016. № 2 (40). С. 97–107.

Статья поступила 01.09.2017 г.

Bessonova M.P., Ponomareva M.A., Yakutenok V.A. (2017) CALCULATION OF A POWER-LAW FLUID FLOW IN A SINGLE-SCREW EXTRUDER. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 81–93

DOI 10.17223/19988621/49/8

This paper is devoted to the creation of a physical and mathematical model of the fluid with a complex rheological behavior flowing in a **single-screw** extruder channel taking into account the presence of a circulation flow. The **power-law** model is used to describe the rheological behavior of the extruding polymer. The reversed motion is considered: the screw is assumed to be fixed and the extruder cylinder is movable. Providing a predetermined flow rate, four nonlinear equations describing the flow are obtained. The system of equations is solved by **Newton's** method. The calculation procedure for the polymer melt temperature along the extruder channel is presented. The heat conduction equation is written in a **two-dimensional** form taking into account the heat generation due to the viscous dissipation of energy and it is solved by marching method. The power-law fluid flow characteristics are calculated at different nonlinearity degree.

Keywords: **single-screw** extruder, **non-Newtonian** fluid, **non-isothermal** flow, mathematical model, circulation flow.

*BESSONOVA Mariya Petrovna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: [bessonova.mp@mail.ru](mailto:bessonova.mp@mail.ru)

*PONOMAREVA Mariya Andreevna* (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: [pma@ftf.tsu.ru](mailto:pma@ftf.tsu.ru)

*YAKUTENOK Vladimir Al'bertovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: [yva@ftf.tsu.ru](mailto:yva@ftf.tsu.ru)

## REFERENCES

1. Yankov V.I., Boyarchenko V.I., Pervadchuk V.P. (2005) *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov* [Fiber-forming polymer processing]. Moscow, Izhevsk: R&C Dynamics.
2. Torner R.V., Akutin M.S. (1986) *Oborudovanie zavodov po pererabotke plastmass* [Equipment for plastic processing plants]. Moscow: Khimiya.
3. Tadmor Z., Gogos C.G. (1979) *Principles of Polymer Processing*. New York: John Wiley & Sons.
4. Rauwendaal C. (1986) *Polymer Extrusion*. Munich: Hanser Publishers.
5. Subbotin E.V., Shcherbinin A.G., Trufanova N.M. (2012) Chislennoe issledovanie protsessov techeniya polimerov v usloviyakh fazovogo perekhoda v vintovykh kanalakh ekstruderov pri

- proizvodstve plastmassovoy izolyatsii [Numerical study of a polymer flow in the phase transition conditions in extruder screw channels in the plastic insulation production]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 320(4). pp. 171–177.
6. Sobhani H., Ghoreishy M.H.R., Razavi-Nouri M., Anderson P.D., Meijer H.H.E. (2011) Modelling of polymer fluid flow and residence time distribution in twin screw extruder using fictitious domain method. *Plastics, Rubber and Composites*. 40(8). pp. 387–396. DOI: 10.1179/1743289810Y.0000000032.
  7. Althaus T.O., Windhab E.J. (2011) Extrusion of highly unsaturated wet powders: Stress fields in extruder barrels. *Powder Technology*. 211(1). pp. 10–18. DOI: 10.1016/j.powtec.2011.03.002.
  8. Baron R., Vauchel P., Kaas R., Arhaliass A., Legrand J. (2010) Dynamical modelling of a reactive extrusion process: Focus on residence time distribution in a fully intermeshing co-rotating twin-screw extruder and application to an alginate extraction process. *Chemical Engineering Science*. 65(10). pp. 3313–3321. DOI: 10.1016/j.ces.2010.02.019.
  9. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. (2016) Circulatory high-viscosity non-Newtonian fluid flow in a single-screw extruder channel. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 97–107. DOI: 10.17223/19988621/40/10.

УДК: 533.6.011.72; 519.63  
DOI 10.17223/19988621/49/9

Л.Л. Миньков, Н.В. Гольдина

## ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПО ГАЗОВЗВЕСИ С МЕЛКИМИ ЧАСТИЦАМИ<sup>1</sup>

На основе подхода взаимопроникающих континуумов исследуется численное решение задачи о распространении ударной волны в газовзвеси, содержащей инертные частицы, объемная доля которых пренебрежимо мала. Показаны преимущества неявной по правым частям разностной схемы над явной разностной схемой. Получена зависимость максимально возможного шага разностной сетки от размера частиц для достижения устойчивого решения по явной схеме. Показана структура ударной волны и контактного разрыва, распространяющихся по газовзвеси с частицами размером 1, 10 и 100 мкм. Получена зависимость ширины ударной волны от размера частиц.

**Ключевые слова:** ударная волна, газовзвесь, ширина фронта ударной волны, разностная схема.

Интерес к задачам о распространении ударной волны, детонационной волны, волны горения по газовзвеси не снижается последние 50 лет, что связано, прежде всего, с проблемами пожаровзрывобезопасности в шахтах и на предприятиях по производству сыпучих продуктов. Так, в работах [1–4] решалась задача о распространении детонационной волны в газодисперсной среде с реагирующими частицами. Исследование эволюции фронта пламени по гибридной газовзвеси проводилось в работе [5]. Влияние скоростного отставания частиц от газа на скорость пламени показано в работе [6]. В работах [7, 8] анализировалось взаимодействие ударной волны с водяным заслоном и перенос облака порошкового ингибитора за ударной волной. Задачу о подавлении детонационной волны в слое инертных частиц решали авторы работ [9–11].

Для моделирования динамики газодисперсной среды используют либо подход взаимопроникающих континуумов [12], либо подход Лагранжа для описания эволюции частиц и подход Эйлера для описания течения газа с учетом силового и теплового взаимодействия с частицами [1, 13]. Известно, что с уменьшением времени динамической и тепловой релаксации частиц система уравнений, описывающая течение газодисперсной среды, становится жесткой по правым частям уравнений количества движения и энергии. С другой стороны, такое течение, близкое к равновесному, можно описывать как течение газа с эффективным показателем адиабаты [12, 14]. Но такой подход неприменим при исследовании прохождения ударной волны по газовзвеси с полидисперсными частицами, размер которых изменяется в широком диапазоне.

Целью данной работы является описание особенностей численного решения задачи о распространении ударной волны в газовзвеси с инертными частицами,

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-79-20011).

размеры которых могут изменяться в широком диапазоне, на основе подхода взаимопроникающих континуумов с использованием предлагаемой разностной схемы.

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу о распространении ударной волны и контактного разрыва, образовавшихся в результате вскрытия мембраны в ударной трубе, в полубесконечную среду, заполненную инертными частицами. Предположим, что течение газодисперсной среды является одномерным и имеют место следующие допущения: 1) газ идеальный, химически не реагирующий; 2) давление создается газом; 3) объемная доля частиц пренебрежимо мала; 4) частицы представляют собой сферы одного радиуса и не сталкиваются между собой; 5) фазовые переходы между газом и частицами отсутствуют.

Если ввести масштабы плотности –  $\rho_*$ , скорости –  $u_*$ , длины –  $x_*$ , а масштабы времени, давления и температуры определить как:  $t_* = x_*/u_*$ ,  $P_* = \rho_* u_*^2$ ,  $T_* = u_*^2/C_b$ , то безразмерная система уравнений, описывающая течение газодисперсной среды в рамках вышеупомянутых допущений (с учетом скоростного и температурного отставания частиц от газа), принимает вид [12]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \cdot u \\ \rho \cdot E \\ \rho_s \\ \rho_s \cdot u_s \\ \rho_s \cdot E_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \cdot u \\ p + \rho \cdot u^2 \\ (\rho \cdot E + p)u \\ \rho_s \cdot u_s \\ \rho_s \cdot u_s^2 \\ \rho_s \cdot u_s \cdot E_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_s \cdot t_* \phi_f \cdot (u_s - u) \\ \rho_s \cdot t_* \phi_q \cdot (T_s - T) + \rho_s \cdot u_s \cdot t_* \phi_f \cdot (u_s - u) \\ 0 \\ \rho_s \cdot t_* \phi_f \cdot (u - u_s) \\ \rho_s \cdot t_* \phi_q \cdot (T - T_s) + \rho_s \cdot u_s \cdot t_* \phi_f \cdot (u - u_s) \end{bmatrix},$$

$E$  – полная энергия газа,  $E = \frac{C_v}{C_b} T + \frac{u^2}{2}$ ;  $E_s$  – полная энергия частиц,  $E_s = T_s + \frac{u_s^2}{2}$ ;

$\phi_f$  – обратное время динамической релаксации частицы,  $\phi_f = \frac{18\mu f_d}{d^2 \rho_{ss}}$ ;  $\phi_q$  – об-

ратное время тепловой релаксации частицы,  $\phi_q = \frac{Nu \lambda \phi_f}{3\mu f_d C_b}$ ;  $d$  – размер частиц,  $\mu$  –

коэффициент динамической вязкости газа;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности газа;  $C_v$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;  $C_b$  – удельная теплоемкость частиц;  $u$  – скорость,  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $T$  – температура; параметры с индексом  $s$  относятся к дисперсной фазе;  $f_d$  – функция взаимодействия, которая учитывает влияние эффектов сжимаемости и инерционности на силу сопротивления частицы [12, 14]

$$f_d = \left(1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}\right) \left(1 + \exp\left(-\frac{0.427}{\text{M}^{4.63}} - \frac{3.0}{\text{Re}^{0.88}}\right)\right).$$

Зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса и числа Прандтля принимается в виде

$$Nu = 2 + 0.459 Re^{0.55} Pr^{0.33},$$

где  $Pr = \mu C_p / \lambda$ ,  $Re = \rho_* u_* \rho d |u - u_s| / \mu$ ,  $M = |u - u_s| \sqrt{\rho / k p}$ ,  $k = C_p / C_v$ .

Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния идеального газа

$$p = \rho T (k - 1) C_v / C_b.$$

Решение системы уравнений (1), помимо исходных данных и начальных условий, будет зависеть от двух параметров, представляющих собой отношение характерного времени газодинамического процесса к характерному времени динамической релаксации частицы  $t_* \Phi_f$  и отношение характерного времени газодинамического процесса к характерному времени тепловой релаксации частицы  $t_* \Phi_q$ . Если  $t_* \Phi_f \gg 1$  и  $t_* \Phi_q \gg 1$ , то скоростное и температурное отставание частиц от газа будет пренебрежимо мало, т.е.  $u_s \approx u$  и  $T_s \approx T$  (равновесное течение). В этом случае течение газодисперсной среды можно описывать системой уравнений Эйлера для чистого газа с эффективным показателем адиабаты [13, 15]:

$$k_{эфф} = \frac{(1-z)C_p + zC_b}{(1-z)C_v + zC_b},$$

где  $z$  – массовая доля частиц.

Если  $t_* \Phi_f \ll 1$  и  $t_* \Phi_q \ll 1$ , то течение является «замороженным», поскольку взаимодействие газа и частиц отсутствует [12].

Для частиц угля и алюминия размером 1 мкм время релаксации частиц имеет порядок  $10^{-5}$  с, а для частиц размером 100 мкм – порядка 0.1 с. Поэтому при распространении детонационных волн с характерными временами  $10^{-3}$  с и меньше в газодисперсной среде с мелкими частицами необходимо учитывать скоростное и температурное отставания, тогда как при распространении волн горения и ударных волн слабой интенсивности в такой среде можно воспользоваться допущением о равновесности течения.

### Метод решения

Решение системы уравнений (1) получим численно с использованием метода конечных объемов по разностной схеме первого порядка аппроксимации по времени и пространству, причем потоковые величины  $\mathbf{F}$  на гранях ячеек для газа найдем по методу Ван Лира [15], а для частиц – по методу Крайко [16]. Вектор правых частей  $\mathbf{G}$  можно аппроксимировать с нижнего временного слоя  $\mathbf{G}^n$ , и тогда разностная схема будет являться явной по правым частям:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) + \tau G_i^n, \quad (2)$$

где параметрам в центрах ячеек присвоены целые индексы  $i$ , а параметрам на гранях ячеек – полуцелые индексы  $i+1/2$  и  $i-1/2$ .



В этом случае помимо ограничения на шаг по времени, связанный с распространением ударной волны по ячейке разностной сетки,  $\tau_g < h/\max(|D_L|, |D_R|)$ , будет иметь место ограничение, связанное со временем динамической и тепловой релаксации частиц,  $\tau_r < 1/\max(t_*\phi_f, t_*\phi_q)$ , причем для мелких частиц может оказаться  $\tau_r \ll \tau_g$ .

Для того чтобы разрешить особенность по правым частям разностной схемы (2) для мелких частиц, значения параметров вектора  $\mathbf{G}$  вычислим с верхнего временного слоя, при этом обратные времена релаксации  $\phi_f$  и  $\phi_q$ , входящие в вектор  $\mathbf{G}$ , – с нижнего временного слоя, т.е.

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h}(\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}) + \tau \mathbf{G}_i^{n+1,n}. \quad (3)$$

Введем обозначение:  $[f]_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$ , тогда разностная схема (3) примет вид

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n - \frac{\tau}{h}[\rho u]_i, \quad \rho_{s,i}^{n+1} = \rho_{s,i}^n - \frac{\tau}{h}[\rho_s u_s]_i, \\ (\rho u)_i^{n+1} &= \left( A + \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} A_s \right) / \left( 1 + \frac{\rho_{s,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} \right), \\ (\rho_s u_s)_i^{n+1} &= \left( \frac{\rho_{s,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} A + A_s + \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} A_s \left( \frac{\rho_{s,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} - 1 \right) \right) / \left( 1 + \frac{\rho_{s,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} \right), \\ T_i^{n+1} &= \left( B + \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} B_s \right) / \left( \rho_i^{n+1} \left( \frac{C_v}{C_b} + \frac{\rho_{s,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} \right) \right), \\ T_{s,i}^{n+1} &= \left( \frac{\rho_{s,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} B + \left( \frac{C_v}{C_b} \frac{1}{1 + \tau t_* \phi_f} + \frac{\rho_{s,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} \right) B_s \right) / \left( \rho_{s,i}^{n+1} \left( \frac{C_v}{C_b} + \frac{\rho_{s,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \frac{\tau t_* \phi_f}{1 + \tau t_* \phi_f} \right) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= (\rho u)_i^n - \frac{\tau}{h}[\rho u^2 + p]_i, \quad A_s = (\rho_s u_s)_i^n - \frac{\tau}{h}[\rho_s u_s^2]_i, \\ B &= (\rho E)_i^n - \frac{\tau}{h}[(\rho E + p)u]_i - \frac{1}{2}(\rho u^2)_i^{n+1} + \tau t_* \phi_f (\rho_s u_s)_i^{n+1} (u_s - u)_i^{n+1}, \\ B_s &= (\rho_s E_s)_i^n - \frac{\tau}{h}[\rho_s E_s u_s]_i - \frac{1}{2}(\rho_s u_s^2)_i^{n+1} + \tau t_* \phi_f (\rho_s u_s)_i^{n+1} (u - u_s)_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Как видно, при стремлении  $t_*\phi_f$  и  $t_*\phi_q$  к бесконечности выражения для скорости и температуры частиц и газа переходят в выражения для равновесного течения:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_{s,i}^{n+1} = (A + A_s) / (\rho_i^{n+1} + \rho_{s,i}^{n+1}), \\ T_i^{n+1} &= T_{s,i}^{n+1} = (B + B_s) / \left( \rho_i^{n+1} \frac{C_v}{C_b} + \rho_{s,i}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

### Результаты численного моделирования

Решим задачу о распаде произвольного разрыва, находящегося в момент времени  $t = 0$  в точке  $x = 0$ , при следующих условиях:

$$x < 0, p = 10^5 \text{ Па}, \rho = 1 \text{ кг/м}^3, u = 0, \rho_S = 0;$$

$$x > 0, p = 10^4 \text{ Па}, \rho = 0.125 \text{ кг/м}^3, u = 0, \rho_S = \rho_{S0}, u_S = 0, T_S = T.$$

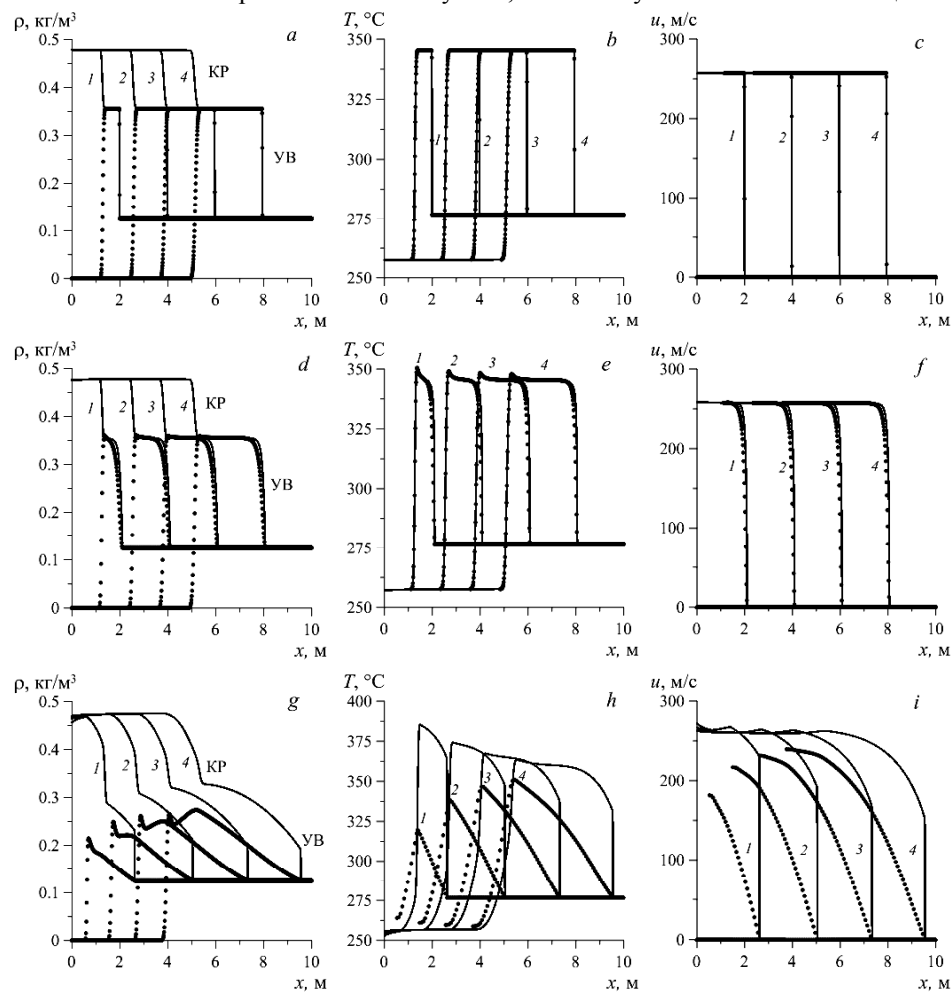
Известно, что при распаде такого разрыва в газе без частиц образуются три волны: центрированная волна разрежения, распространяющаяся влево, контактный разрыв и ударная волна, распространяющиеся вправо [17]. Расчеты проведем при следующих значениях параметров:

$$x_* = 1 \text{ м}, p_* = 10^5 \text{ Па}, \rho_* = 1 \text{ кг/м}^3, h = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \mu = 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \lambda = 0.026 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)},$$

$$k = 1.4, C_b = 1000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, C_v = 723 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \rho_{SS} = 2000 \text{ кг/м}^3.$$

Расчеты проведем по разностной схеме 3. На рис. 1 показана эволюция контактного разрыва и ударной волны, проходящих по газодисперсной среде с массовым содержанием частиц  $z = 0.5$ . Профили плотностей, температур и скоростей соответствуют моментам времени 0.005, 0.01, 0.015 и 0.02 с. Ударная волна, проходя через газодисперсную среду, вовлекает в движение частицы, при этом плотность частиц за ударной волной повышается. Происходит формирование облака частиц повышенной концентрации, левая граница которого определяется движущимся вслед за ударной волной контактным разрывом. Температура и скорость частиц размером 1 мкм успевают подстроиться под температуру и скорость газа (см. рис. 1, *a-c*), что объясняется малыми временами релаксации частиц. Течение газодисперсной среды происходит в равновесном режиме. Увеличение размера частиц до 10 мкм (см. рис. 1, *d-f*) ведет к тому, что профиль ударной волны начинает сглаживаться и в окрестности ударной волной происходит небольшое скоростное и температурное отставание частиц от газа, которое исчезает вблизи контактного разрыва, у которого частицы успевают следовать за газом. При прохождении волн по газодисперсной среде, содержащей частицы размером 100 мкм, картина течения существенно меняется (см. рис. 1, *h-i*). В силу релаксационных процессов ударная волна и контактный разрыв трансформируются таким образом, что у них появляется четко выраженный передний фронт, где соответствующие параметры меняются скачком, и задний фронт, на котором параметры меняются непрерывно, без скачка. Облако частиц растягивается, при этом передний край облака соответствует переднему фронту ударной волны, а задний – началу контактного разрыва. Максимальное значение плотности частиц 100 мкм (концентрация) падает по сравнению с частицами 1 и 10 мкм. В силу того, что частицы не успевают за газом, координата максимальной концентрации частиц в облаке находится далеко за фронтом ударной волны, ближе к переднему фронту контактного разрыва. По мере продвижения фронта ударной волны и контактного разрыва по газодисперсной среде с частицами 100 мкм, скоростное и температурное отставание частиц от газа несколько уменьшается. Следует отметить, что профиль температуры частиц на контактном разрыве повторяет профиль температуры газа с небольшим отставанием, тогда как на фронте ударной волны температурное и скоростное отставание значительно сильнее (см. рис. 1 *h*), при этом местоположение максимального значения температуры частиц находится на переднем фронте контактного разрыва. Интересным фактом является то, что при условии одинаковой плотности частиц в газодисперсной среде скорость прохождения ударной

волны и контактного разрыва по среде с частицами 100 мкм выше, чем по среде с частицами 10 или 1 мкм (см. рис. 1, *a, d, g*). Такое увеличение скорости ударной волны объясняется следующим фактом. Суммарная площадь поперечного сечения всех частиц в единице объема газозвеси определяется выражением  $S = \pi n d^2 / 4$ , где  $n$  – число частиц в единице объема газозвеси, которое связано с объемной долей частиц  $\alpha$  соотношением  $n = 6\alpha / (\pi d^3)$ . Отсюда следует, что  $S \sim d^{-1}$ . Поэтому, при сохранении объемной доли частиц (или распределенной плотности частиц) увеличение размера частиц ведет к тому, что их суммарная площадь поперечного сечения уменьшается и, следовательно, совокупность крупных частиц будет оказывать меньшее сопротивление потоку газа, чем совокупность мелких частиц.

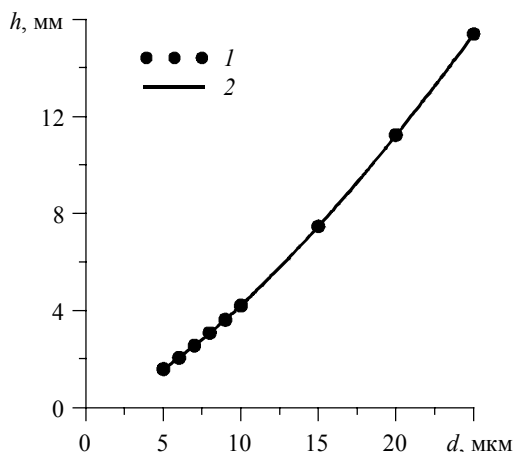


**Рис. 1.** Распространение контактного разрыва и ударной волны по газодисперсной среде. Сплошные линии – газ, точки – частицы,  $\rho_{s0} = 0.125 \text{ кг/м}^3$ , 1 –  $t = 0.5 \cdot 10^{-2}$ , 2 –  $t = 10^{-2}$ , 3 –  $t = 1.5 \cdot 10^{-2}$  и 4 –  $t = 2 \cdot 10^{-2}$  с; *a, b, c* –  $d = 1$ ; *d, e, f* –  $d = 10$  и *g, h, i* –  $d = 100 \text{ мкм}$

**Fig. 1.** Propagation of the contact discontinuity and shock wave through the gas-dispersed medium. The solid lines indicate the gas; the dots, the particles;  $\rho_{s0} = 0.125 \text{ kg/m}^3$ ;  $t = (1) 0.5 \cdot 10^{-2}$ , (2)  $10^{-2}$ , (3)  $1.5 \cdot 10^{-2}$ , and (4)  $2 \cdot 10^{-2}$  s; *d* = (*a, b, c*) 1, (*d, e, f*) 10, and (*g, h, i*) 100  $\mu\text{m}$

Как, видно разностная схема (3) позволяет получить устойчивое решение для частиц в широком диапазоне их размеров.

Для сравнения возможностей разностных схем (2) и (3) была проведена серия расчетов, в которых размер частиц изменялся от 5 до 25 мкм. Путем варьирования размера разностных ячеек в разностной схеме (2) определялся их предельный размер, когда решение оставалось еще устойчивым. Расчеты показали, что для мелких частиц численное решение получается неустойчивым, если размер разностных ячеек брать больше, чем предельный. На рис. 2 показана зависимость предельного размера разностной ячейки  $h$  от размера частиц. Область, находящаяся выше кривой соответствует неустойчивому численному решению, а ниже – устойчивому. Полученные в ходе численных экспериментов данные (точки, рис. 2) аппроксимируются зависимостью  $h = 0.162 \cdot d^{1.416}$  (сплошная кривая), где размер ячеек  $h$  выражен в миллиметрах, а размер частиц  $d$  в микронах. Из этой зависимости следует, что при стремлении диаметра частиц к нулю размер разностной ячейки также стремится к нулю. Например, для получения устойчивого численного решения задачи для частиц размером 1 мкм по разностной схеме (2) следует использовать разностную сетку с размером ячеек меньше 0.16 мм. Расчеты же, проведенные по предлагаемой схеме (3), позволяют получить устойчивое решение на разностной сетке с размером ячеек в 10 раз больше.



**Рис. 2.** Зависимость предельного размера ячейки от диаметра частиц для явной схемы (2): 1 – численный эксперимент; 2 – аппроксимация  
**Fig. 2.** Dependence of the limiting cell size on the particle diameter for the explicit scheme (2): 1, numerical experiment; 2, approximation

Известно, что при прохождении ударной волны по газозвеси ее толщина изменяется. В работе [12] приводится следующее оценочное выражение для толщины ударной волны, справедливое для относительных чисел Рейнольдса больше 50:

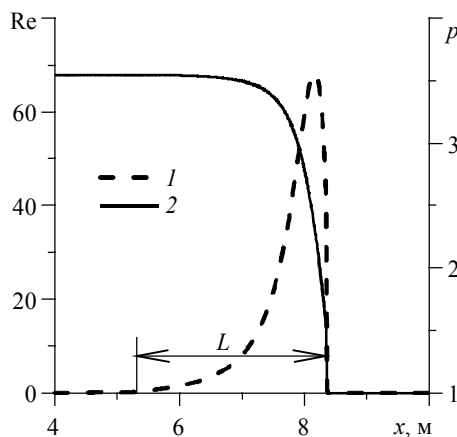
$$L = \frac{4d}{3} \frac{\rho_{ss}}{\rho_1} \frac{p_e(k+1) + (k-1)}{p_e - 1}, \quad (4)$$

где  $p_e$  – отношение равновесного давления за ударной волной к давлению перед ударной волной, для данной задачи равное 3.54,  $\rho_1$  – плотность газа перед ударной волной.

Как видно из зависимости (4), для ударных волн большой интенсивности ( $p_e > 1$ ) толщина ударной волны прямо пропорциональна размеру частиц. Для волн малой интенсивности ( $p_e \approx 1$ ) толщина ударной волны пропорциональна квадрату размера частиц [12].

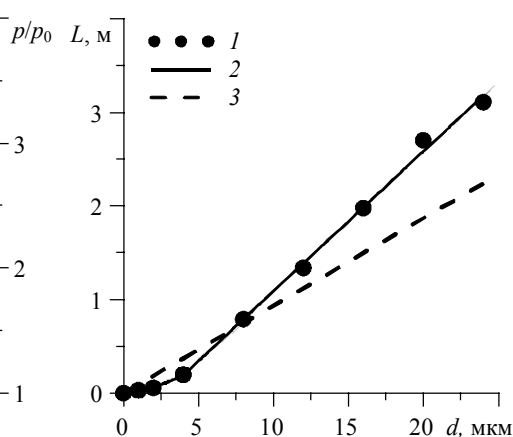
Толщину ударной волны, распространяющейся в газозвеси, можно определить по скоростному отставанию частиц от газа. Перед ударной волной газ и частицы покоятся, скоростное отставание равно нулю. После ударной волны газозвесь приходит в движение, причем частицы в силу своей инерционности отстают от газа. На некотором расстоянии за ударной волной скорость частиц и газа выравнивается и течение газозвеси становится равновесным. Аналогично ведет себя и число Рейнольдса, показанное на рис. 3 для частиц 25 мкм (штриховая кривая) на момент времени  $t = 0.02$  с. Толщина ударной волны  $L$  соответствует расстоянию между крайними точками, в которых число  $Re$  равно нулю. Как видно из рис. 3, именно на этом участке профиль ударной волны становится гладким (сплошная кривая). Здесь  $p_0$  – давление перед ударной волной.

На рис. 4 показана зависимость толщины ударной волны от размера частиц на момент времени  $t = 0.02$  с, полученная в результате численных экспериментов по разностной схеме (3). Видно, что эта зависимость (изображена кружочками) для малоразмерных частиц ( $< 5$  мкм) является квадратичной, а для крупных частиц ( $> 5$  мкм) является линейной, что качественно находится в соответствии с аналитической оценкой (4) (штриховая линия). Расхождение в наклонах численной и аналитической зависимости  $L(d)$  можно объяснить тем, что оценка (4) получена в предположении постоянства скоростного отставания частиц от газа в ударной волне [12], тогда как в действительности оно изменяется.



**Рис. 3.** Измерение толщины ударной волны: 1 – число Рейнольдса для частицы; 2 – давление

**Fig. 3.** Measurement of the shock wave thickness: 1, the Reynolds number for the particle; 2, pressure



**Рис. 4.** Зависимость толщины ударной волны от диаметра частиц: 1 – численное моделирование; 2 – аппроксимация; 3 – оценка по Нигматулину [12].

**Fig. 4.** Dependence of the shock wave thickness on the particle diameter: 1, numerical modeling; 2, approximation; 3, Nigmatulin's estimate [12]

### Выводы

На примере численного решения задачи о распространении ударной волны в газодисперсной среде показано, что разностная схема (3), реализующая правые части, учитывающие функции динамического и теплового взаимодействия газа и частиц на верхнем временном слое, имеет более широкий диапазон устойчивости по размеру частиц, чем разностная схема (2), реализующая правые части на нижнем временном слое.

Использование явной по правым частям разностной схемы (2) ограничивает сверху размер разностной ячейки для заданного диаметра частиц, при котором можно получать устойчивое решение задачи о распространении ударной волны по газозвеси.

Было показано, что разностная схема (3) позволяет корректно рассчитать толщину ударной волны, распространяющейся по газозвеси.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Papalexandris M.V.* Numerical simulation of detonations in mixtures of gases and solid particles // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 507. P. 95–142.
2. *Benkiewicz K., Hayashi A.K.* Two-dimensional numerical simulations of multi-headed detonations in oxygen-aluminum mixtures using an adaptive mesh refinement // *Shock Waves.* 2003. V. 13. P. 385–402.
3. *Кратова Ю.В., Хмель Т.А., Федоров А.В.* Осесимметричная расширяющаяся гетерогенная детонация в газозвесах частиц алюминия // *Физика горения и взрыва.* 2016. Т. 52. № 1. С. 84–95.
4. *Хмель Т.А., Федоров А.В.* Моделирование распространения ударных и детонационных волн в запыленных средах при учете межчастичных столкновений // *Физика горения и взрыва.* 2014. Т. 50. № 5. С. 53–62.
5. *Дементьев А.А., Моисеева К.М., Крайнов А.Ю., Палеев Д.Ю.* Сопоставление результатов моделирования распространения пламени в гибридной газозвеси с экспериментальными данными // *Инженерно-физический журнал.* 2016. Т. 89. № 6. С. 1538–1546.
6. *Дементьев А.А., Крайнов А.Ю.* Исследование влияния относительного движения взвеси инертных частиц на скорость фронта горения газовой смеси // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2013. № 2 (22). С. 60–66.
7. *Васенин И.М., Костеренко В.Н., Крайнов А.Ю., Лукашов О.Ю., Палеев Д.Ю., Шрагер Э.Р.* Расчет переноса облака порошкового ингибитора в штольне в потоке за ударной волной // *Пожарная безопасность.* 2015. № 4. С. 101–108.
8. *Палеев Д.Ю., Лукашов О.Ю., Васенин И.М., Шрагер Э.Р., Крайнов А.Ю., Костеренко В.Н.* Взаимодействие ударной волны взрыва метана с водяным заслоном // *Наукоемкие технологии разработки и использования минеральных ресурсов.* 2017. № 3. С. 381–384.
9. *Фомин П.А., Чен Дж.-Р.* Влияние химически инертных частиц на параметры и подавление детонации в газах // *Физика горения и взрыва.* 2009. Т. 45. № 3. С. 77–88.
10. *Фёдоров А.В., Тропин Д.А.* Моделирование прохождения детонационной волны через облако частиц в двухскоростной и двухтемпературной постановке // *Физика горения и взрыва.* 2013. Т. 49. № 2. С. 61–70.
11. *Тропин Д.А., Фёдоров А.В.* Физико-математическое моделирование подавления детонации инертными частицами в смесях метан – кислород и метан – водород – кислород // *Физика горения и взрыва.* 2014. Т. 50. №5. С. 48–52.
12. *Нугматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
13. *Shotorban B., Jacobs G. B., Ortiz O., Truong Q.* An Eulerian model for particles nonisothermally carried by a compressible fluid // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 2013. V. 65. P. 845–854.
14. *Стернин Л.Е., Маслов Б.П., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М.* Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 171 с.

15. van Leer B. Flux-vector splitting for the euler equation // Lecture Notes in Physics. 1982. V. 170. P. 507–512.
16. Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной собственного давления // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. № 3. С. 500–510.
17. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Computational Physics. 1978. V. 27. N 1. P. 1–31.

Статья поступила 15.08.2017 г.

Min'kov L.L., Gol'dina N.V. PECULIARITIES OF A NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF SHOCK WAVE PROPAGATION OVER A GAS SUSPENSION WITH SMALL PARTICLES *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 94–104

DOI 10.17223/19988621/49/9

Based on the interpenetrating continua approach, the numerical solution of the problem of shock wave propagation in a gas suspension containing inert particles of negligible volume fraction is studied. The solution of the governing equations was obtained numerically using the finite volume method with the difference scheme of the first order of accuracy in time and space. The flux values on the faces of the difference cells for the gas are found by van Leer's method; for the particles, by Kraiko's method. The implicit and explicit implementations for the right-hand side of the governing equations taking into account the interaction of gas and particles are considered in the difference scheme. The dependence of the maximum possible size of the difference grid on the diameter of the particles is obtained to achieve a stable solution using the explicit difference scheme. It is shown that the implicit difference scheme applied for the right-hand sides of equations makes it possible to obtain a stable solution on the fixed difference grid in a wide range of particle sizes. The relaxation processes are shown to significantly affect the shock wave structure and the contact discontinuity propagating along the gas suspension with large particles. The dependence of the shock wave width on the particle size is obtained, which is in a good agreement with the analytical estimates.

Keywords: shock wave, gas suspension, width of the shock wave front, difference scheme.

MIN'KOV Leonid Leonidovich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

GOL'DINA Nadezhda Viktorovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: alche0809@mail.ru

#### REFERENCES

1. Papalexandris M.V. (2004) Numerical simulation of detonations in mixtures of gases and solid particles. *J. Fluid Mech.* 507. pp. 95–142. DOI: 10.1017/S0022112004008894.
2. Benkiewicz K., Hayashi A.K. (2003) Two-dimensional numerical simulations of multi-headed detonations in oxygen-aluminum mixtures using an adaptive mesh refinement. *Shock Waves*. 13. pp. 385–402. DOI: 10.1007/s00193-002-0169-7.
3. Kratova Yu.V., Khmel' T.A., Fedorov A.V. (2016) Axisymmetric expanding heterogeneous detonation in gas suspensions of aluminum particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 52(1). pp. 74–84. DOI: 10.15372/FGV20160110.
4. Khmel' T.A., Fedorov A.V. (2014) Modeling of propagation of shock and detonation waves in dusty media with allowance for particle collisions. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 50(5). pp. 547–555. DOI: 10.1134/S0010508214050104.
5. Dement'ev A.A., Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Paleev D.Yu. (2016) Comparison of the results of modeling the flame propagation in a hybrid gas suspension with experimental data.

- Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(6). pp. 1514–1521. DOI: 10.1007/s10891-016-1521-6.
6. Dement'ev A.A., Krainov A.Yu. (2013) Studying the influence of relative motion of suspended inert particles on the rate of the gas mixture combustion front. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(22). pp. 60–66.
  7. Vasenin I.M., Kosterenko V.N., Krainov A.Yu., Lukashov O.Yu., Paleev D.Yu., Shrager E.R. (2015) Raschyot perenosa oblaka poroshkovogo ingibitora v shtol'ne za udarnoy volnoy [Calculation of the powder inhibitor cloud transport in a mine tunnel behind the shock wave]. *Pozharnaya bezopasnost'*. 4. pp. 101–108.
  8. Paleev D.Yu., Lukashov O.Yu., Vasenin I.M., Shrager E.R., Krainov A.Yu., Kosterenko V.N. (2017) Vzaimodeystvie udarnoy volny vzryva metana s oblakom poroshkovogo ingibitora [Interaction of the methane explosion shock wave with a powder inhibitor cloud]. *Naukovomkie tekhnologii razrabotki i ispl'zovaniya mineral'nykh resursov*. 3. pp. 381–384.
  9. Fomin P.A., Chen J.-R. (2009) Effect of chemically inert particles on parameters and suppression of detonation in gases. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 45(3). pp. 303–313. DOI: 10.1007/s10573-009-0040-6.
  10. Fedorov A.V., Tropin D.A. (2013) Modeling of detonation wave propagation through a cloud of particles in a two-velocity two-temperature formulation. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 49(2). pp. 178–187. DOI: 10.1134/S0010508213020081.
  11. Tropin D.A., Fedorov A.V. (2014) Physicomathematical modeling of detonation suppression by inert particles in methane-oxygen and methane-hydrogen-oxygen mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 50(5). pp. 542–546. DOI: 10.1134/S0010508214050098.
  12. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Part 1. Moscow: Nauka.
  13. Shotorban B., Jacobs G.B., Ortiz O., Truong Q. (2013) An Eulerian model for particles nonisothermally carried by a compressible fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 65. pp. 845–854. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.06.030.
  14. Sternin L.E., Maslov B.P., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. (1980) *Dvukhfaznye mono- i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami* [Two-phase mono- and polydisperse flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
  15. van Leer B. (1982) Flux-vector splitting for the Euler equation. *Lecture Notes in Physics*. 170. pp. 507–512. DOI: 10.1007/3-540-11948-5\_66.
  16. Krayko A.N. (1979) On discontinuity surfaces in a medium devoid of "proper" pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(3). pp. 539–549. DOI: 10.1016/0021-8928(79)90102-3.
  17. Sod G.A. (1978) A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*. 27(1). pp. 1–31. DOI: 10.1016/0021-9991(78)90023-2.



УДК 677.025.6:537.311.4  
DOI 10.17223/19988621/49/10

В.И. Халиманович, Л.А. Кудрявин, О.Ф. Беляев, В.А. Заваруев

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МЕТОДА ПОДОБИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ МЕТАЛЛОТРИКОТАЖНЫХ СЕТЕПОЛОТЕН

С использованием нелинейной теории упругости и метода подобия получена формула, связывающая удельную нагрузку в исходном образце с удельной нагрузкой в образце с такой же, но уменьшенной структурой и такой же относительной деформацией, изготовленным из микропроволоки с другим диаметром и из другого материала.

**Ключевые слова:** *металлический трикотаж, отражающая поверхность, коэффициент отражения электромагнитных волн, метод подобия, нелинейная теория упругости.*

Металлотрикотажные сетеполотна (металлотрикотаж – трикотаж из микропроволок) в настоящее время широко используются в качестве отражающей поверхности (ОП) трансформируемых космических антенн [1]. Для создания высокого коэффициента отражения электромагнитных волн размер ячеек в сетеполотне должен быть в 15–20 раз меньше длины волны. С увеличением частоты электромагнитной волны уменьшается длина волны и соответственно необходимо использовать сетеполотна со все меньшим размером ячеек.

Естественно ожидать, что с уменьшением размера ячеек при том же диаметре микропроволоки и том же ее материале должны увеличиваться жесткость сетеполотна и усилия, необходимые для его растяжения. Уменьшить усилия можно, уменьшая жесткость полотна, которая зависит от диаметра и материала проводников. Однако как количественно влияет на жесткость сетеполотна изменение этих параметров, неясно. Знание таких количественных зависимостей в виде формулы значительно облегчило бы подбор материала микропроволоки и ее диаметра для создания ОП с заданными свойствами. Получить эти зависимости можно было бы, используя для расчета деформации сетеполотен нелинейную теорию упругости, как это было нами сделано для некоторых сравнительно несложных структур [2–6], но для более сложных структур применить эту теорию тоже пока не удастся. Кроме того, имеется еще один недостаток использования этой теории – она не позволяет получить напрямую формулу зависимости деформационных свойств металлотрикотажа от вышеуказанных параметров и их сочетания. Для получения указанных зависимостей необходимо провести очень большое количество расчетов при всевозможных сочетаниях этих параметров, а затем обобщить результаты. Этот процесс трудоемок и потому малоэффективен.

В настоящей работе предлагается более простой метод.

Коэффициент отражения (по мощности) электромагнитной волны с длиной волны  $\lambda$  от тканевой сетчатой структуры с размером стороны ячейки  $a$  и диаметром проводника  $d$  определяется по формуле [7]

$$R = 1 / \left( 1 + \chi^2 \right), \text{ где } \chi = \frac{2a}{\lambda} \ln \frac{a}{\pi d}. \quad (1)$$

Эта формула показывает, что коэффициент отражения в структурах типа ткани зависит от отношения длины стороны ячейки к длине волны и от отношения длины стороны ячейки к диаметру проводника. В металлотрикотаже в отличие от тканевой структуры имеется набор ячеек с разными длинами сторон ячеек, поэтому данная формула не годится для расчета коэффициента отражения электромагнитных волн от него, однако и для металлотрикотажного коэффициент отражения, очевидно, должен зависеть от указанных отношений.

Пусть для длины волны  $\lambda$  электромагнитных волн подобрана структура металлотрикотажного, обладающая нужным коэффициентом отражения. Известны материал микропроволоки, ее диаметр, удельное усилие и относительное удлинение металлотрикотажного при раскрытии ОП. Теперь необходимо уменьшить в  $n$  раз длину волны. Чтобы коэффициент отражения при том же относительном удлинении остался примерно прежним, вся структура сетеполотна, в том числе диаметр микропроволоки, должны быть также уменьшены в  $n$  раз, например в 3 раза, оставаясь подобной предыдущей. Если диаметр проводника уменьшим более чем в  $n$  раз, например более чем в 3 раза, например в 4, то в соответствии с формулой (1) коэффициент отражения уменьшится, при уменьшении его менее чем в  $n$  раз, например в 2 раза, коэффициент отражения увеличится.

Используя нелинейную теорию упругости и вышеупомянутый метод подобия, получили формулу, связывающую удельную нагрузку в исходном образце с удельной нагрузкой в образце с такой же, но уменьшенной структурой, с другим диаметром микропроволоки, изготовленной, к тому же, из другого металла.

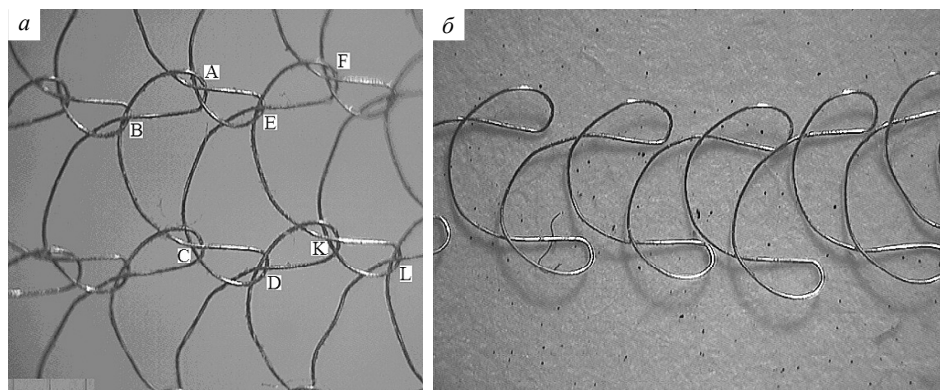
К сожалению, получить точное подобие исходной структуры при уменьшении ее размеров, диаметра микропроволоки и ее материала, как правило, не удастся из-за изменения деформации микропроволоки при взаимодействии с вязальными органами трикотажных машин (иглы, платины, ушковины) [8].

Перейдем теперь к более подробному изложению метода.

В трикотаже, а также и во многих других текстильных материалах, можно выделить сравнительно простой повторяющийся элемент, относительная деформация которого соответствует относительной деформации всего образца. Например, на рис. 1, *а* показана микрофотография металлического трикотажа, повторяющимся элементом в котором является элемент ABCD. Его аналогами будут элементы DCEF, FEKL и т.д. Деформация повторяющегося элемента и будет определять деформацию трикотажа.

Как показал анализ микрофотографий металлического трикотажа, многие элементы петель нерастянутого трикотажа можно аппроксимировать сочетанием частей окружностей различного радиуса и отрезками прямых линий. Такая форма элементов петли может быть получена как вследствие упругой, так и вследствие пластической деформации при изготовлении трикотажа. Чтобы выяснить, в каком состоянии находятся элементы петли металлического трикотажа после его изготовления, мы препарировали структуры металлического трикотажа (выделяли один из столбиков). В качестве примера такого препарирования на рис. 1, *б* приведена микрофотография микропроволоки, выделенной (препарированной) из сетеполотна, микрофотография которого при том же увеличении показана на рис. 1, *а*. Сравнение микрофотографий 1, *а* и 1, *б* показывает, что форма и размер петель мало меняются при освобождении микропроволоки от взаимодействия с другими микропроводами в структуре трикотажа. Это указывает на то, что микропроволока в металлическом трикотаже пластически деформирована. То же самое имеет место и в других металлических сетеполотнах. Поэтому в дальней-

шем при расчетах мы полагали, что элементы петли в нерастянутом металлическом трикотаже пластически деформированы и форма этой петли соответствует ее форме в нерастянутом трикотаже.



**Рис. 1.** Трико, закрытое одноребеночное (сталь Ø50 мкм):

*a* – взаимодействие элементов петельной структуры;

*б* – выделенный петельный столбик

**Fig. 1.** One-bar closed jersey (steel of Ø50 µm):

(*a*) interaction of the eyelet elements and (*b*) separated wale

Анализ микрофотографий двумерно деформированного металлического трикотажа также показал, что точки приложения сил к повторяющимся элементам при симметричной двумерной нагрузке (удельная нагрузка по горизонтали и вертикали одинакова) практически не перемещаются вдоль элементов петель. Следовательно, можно полагать, что силы при такой нагрузке приложены к одним и тем же точкам рассматриваемого элемента. Рассчитав относительную деформацию повторяющегося элемента, получим относительную деформацию всего образца. Поскольку микропроволока при деформации образца практически не растягивается, деформация полотна осуществляется, в основном, за счет изгиба микропроволоки.

Рассмотрим один из повторяющихся элементов в нерастянутом образце. Разделим его на несколько участков так, чтобы рассматриваемый участок имел во всех точках одну и ту же кривизну и чтобы при деформации образца сосредоточенные силы  $f_0$  и  $f_1$  и внешние изгибающие моменты  $M_0$ ,  $M_1$  при деформации образца были приложены только по концам 0 и 1 (рис. 2) рассматриваемого участка (они взяты с учетом действия отрезанных частей микропроволоки на участок 0–1), т.е. на участке отсутствуют распределенные силы.

В силу этого из условия равновесия участка имеем  $f_0 + f_1 = 0$  или  $f_0 = -f_1$ , т.е. силы  $f_0$  и  $f_1$  равны по величине и противоположны по направлению, абсолютную величину этой силы обозначим через  $f$ . Также равны по величине и противоположны по направлению моменты сил  $M_0$  и  $M_1$ . Нетрудно показать, что на концы остальных участков повторяющегося элемента должны действовать такие же силы и моменты, которые действуют на концы рассматриваемого участка повторяющегося элемента, т.е. они одинаковы для всех участков, на которые разбит повторяющийся элемент.

Введем угол  $\delta$ , отсчитываемый против часовой стрелки от направления силы  $f_0$  к оси  $X$ . Он для всех участков один и тот же и зависит от отношения величины удельных нагрузок, растягивающих образец по вертикали и по горизонтали. Начальную кривизну микропроволоки будем считать переменной по длине  $s$  повторяющегося элемента, но постоянной в пределах одного участка ( $s$  – это расстояние по микропроволоке от начальной точки повторяющегося элемента до рассматриваемой точки  $C$ ).

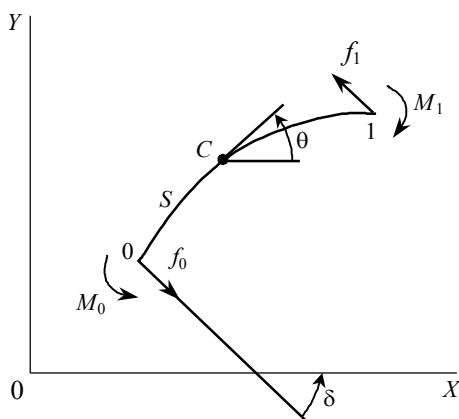


Рис. 2. Схематическое изображение одного из участков повторяющегося элемента

Fig. 2. Schematic illustration of one of the repeating element regions

Будем считать структуру плоской, тогда для каждого участка можно записать следующее так называемое основное уравнение нелинейной теории упругости [9]:

$$d^2\theta/ds^2 - d^2\theta_0/ds^2 = -(f/H)\sin(\theta+\delta). \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  и  $\theta_0$  – углы наклона касательной к упругой линии в произвольной точке  $C$  к оси  $OX$  в деформированном и недеформированном состояниях рассматриваемого участка нити,  $f$  – величина силы, действующей на концы выделенного участка,  $H$  – жесткость микропроволоки при изгибе.

Производные  $d\theta/ds$  и  $d\theta_0/ds$  определяют кривизну микропроволоки (величину, обратную радиусу кривизны) в данной точке в деформированном и в исходном состояниях. Производные  $d^2\theta/ds^2 = d(d\theta/ds)/ds$  и  $d^2\theta_0/ds^2 = d(d\theta_0/ds)/ds$  показывают, как быстро меняется первая производная (кривизна микропроволоки) по мере увеличения  $s$ .

Так как в каждом рассматриваемом участке кривизна постоянна, то постоянна и величина  $d\theta_0/ds$ , вследствие чего производная  $d(d\theta_0/ds)/ds = 0$  и уравнение (2) принимает вид

$$d^2\theta/ds^2 = -(f/H)\sin(\theta+\delta). \quad (3)$$

Пронумеруем все участки в повторяющемся элементе и перейдем от  $s$  к безразмерной переменной  $\tau$ . Выберем ее так, чтобы на каждом участке она менялась бы в пределах от 0 до 1. В связи с этим для первого участка примем  $\tau = s/l_1$  (в этом случае в начале участка  $s = 0$  и  $\tau = 0$ , в конце участка  $s = l_1$ , а  $\tau = 1$ ), для второго –  $\tau = (s-l_1)/l_2$  (в начале участка  $s = l_1$ ,  $\tau = 0$ , в конце участка  $s = l_1+l_2$ ,  $\tau = 1$ ), для третьего –  $\tau = (s - l_1 - l_2)/l_3$  (в начале участка  $s = l_1 + l_2$ ,  $\tau = 0$ , в конце участка

$s = l_1 + l_2 + l_3$ ,  $\tau = 1$ ) и т.д. Здесь  $s$  – текущие значения величины  $s$  для каждого участка,  $l_1, l_2, l_3, \dots$  – длина каждого участка.

После небольших преобразований уравнение (3) для произвольного  $i$ -го участка повторяющегося элемента преобразуется к виду

$$d^2\theta_i/d\tau_i^2 = -A_i \sin(\theta_i + \delta), \quad (4)$$

где  $A_i = f l_i^2/H$ ,  $i$  – номер участка,  $l_i$  – его длина.

Далее записываются краевые условия для начала и конца каждого участка, на которые разбит повторяющийся элемент, и условие их стыковки (оно является краевым условием для конца предыдущего участка и начала последующего). Условия стыковки также зависят только от безразмерных величин  $\tau_i$ ,  $R_i/l_i$  и т.д. Здесь  $R_i$ ,  $l_i$  – кривизна и длина  $i$ -го участка.

Величина  $s$  определяет, на каком расстоянии от начала повторяющегося элемента находится рассматриваемая точка, а величина  $\tau_i$  – на какой доле длины  $i$ -го участка находится эта точка.

После решения записанных уравнений программа рассчитывает зависимость угла  $\theta$  от безразмерного параметра  $\tau$ . Если в исходной и в уменьшенной структурах величины  $A_i$  и  $\delta$  одинаковы, точки контактов не перемещаются и отношение удельных сил, растягивающих образцы по вертикали и горизонтали, одно и то же, то зависимости  $\theta$  от  $\tau$  для них будут полностью совпадать. В этом случае, как нетрудно показать, относительное удлинение для этих структур будет одинаково.

Пусть имеем два одинаковых квадратных образца с размером сторон  $L = 1$  м, первый с исходной структурой, а второй – со структурой, уменьшенной в  $n$  раз. Начнем первый образец растягивать в двух взаимно-перпендикулярных направлениях силой  $F_{1в}$  по вертикали и силой  $F_{1г}$  по горизонтали, другой – силой  $F_{2в}$  по вертикали и силой  $F_{2г}$  по горизонтали. При этом должно выполняться соотношение:  $F_{1в}/F_{1г} = F_{2в}/F_{2г}$ , иначе углы  $\delta$  в этих двух образцах будут различаться. Поскольку стороны образца равны 1 м, эти все силы являются удельными растягивающими силами. В дальнейшем мы при сравнении двух образцов не будем уточнять направление сил, будем их просто обозначать  $F_1$  или  $F_2$ , просто эти две силы должны быть либо обе направлены по вертикали, либо обе – по горизонтали.

Можно показать, что при растяжении образцов два любых аналогичных участка в них будут иметь одно и то же относительное удлинение, если для них выполняется условие

$$A_{1i} = A_{2i} \text{ или } f_1 l_{1i}^2/H_1 = f_2 l_{2i}^2/H_2. \quad (5)$$

В уравнении (5) подстрочные индексы 1 и 2 означают номера образцов, а  $i$  – номер аналогичных участков в этих образцах.

Такое же относительное удлинение будут иметь повторяющиеся элементы в этих образцах и сами эти образцы.

Число повторяющихся элементов, на которые распределена сила  $F_1$  в первом образце, обозначим  $N_1$ , во втором образце –  $N_2$ , причем величина  $N_2$  должна быть равна  $N_1 n$ , так как размеры элементов во втором образце в  $n$  раз меньше, чем в первом. Из-за этого же следует, что  $l_{2i} = l_{1i}/n$ . Отсюда  $f_1 = F_1/N_1$ ,  $f_2 = F_2/N_2 = F_2/(N_1 n)$ .

Подставляем полученные выражения в формулу (5) и после сокращения одинаковых множителей получим

$$F_2 = F_1 n^3 H_2/H_1.$$

Жесткость  $H$  микропроволоки на изгиб определяется формулой

$$H = kE\pi d^4/64.$$

Здесь  $E$  – модуль упругости,  $d$  – диаметр микропроволоки,  $k$  – число сложенных микропроволоки.

Подставляя  $H$  в верхнюю формулу, окончательно получаем

$$F_2 = \frac{k_2}{k_1} \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 n^3 F_1. \quad (6)$$

При  $k = 1$  под  $d$  здесь понимается обычный диаметр микропроволоки, а при  $k \neq 1$  так называемый эффективный диаметр  $d_{\text{эфф}}$ , который при  $k = 2$  рассчитывается по формуле [7]

$$d_{\text{эфф}} = 2\sqrt{dl \left[ 1 - 0,5 \left( \frac{d}{2l} \right)^{1,5} \right]}. \quad (7)$$

Здесь  $2l$  – расстояние между центрами проводников.

Погрешность этой формулы составляет 4 % при  $l \approx 1,1 r_o$  и меньше или равна 2 % при  $l > 1,5 r_o$ .

Формулу (6) можно применять как в случае симметричной, так и в случае несимметричной нагрузки, если при этом точки приложения сил при деформации не перемещаются по микропроволоке. Однако, даже если точка приложения сил по нити немного перемещается, эту формулу можно использовать для ориентировочных оценок.

Эта формула получена на основе анализа программы, разработанной нами для расчета деформации трикотажа при его двумерном нагружении. При разработке программы предполагалось, что при растяжении металлтрикотажа пластическая его деформация отсутствует или мала, хотя при вязании образца она присутствует. Программа была использована для расчета относительной деформации кулирного трикотажа и односторонних трико открытое, трико закрытое [2–6]. Наблюдалось хорошее совпадение экспериментальных результатов и результатов, полученных расчетным путем по программе [2–6]. Это позволяет полагать, что если при растяжении образца дополнительная пластическая деформация микропроволок и появляется, но она мала и не играет существенной роли.

Формулу (6) удобно применять, например, в следующих двух случаях.

1. Нужно определить удельное растягивающее усилие в образце со структурой, уменьшенной в  $n$  раз, при той же относительной деформации и том же коэффициенте отражения, что и в исходном образце.

Для неизменности коэффициента отражения эффективный диаметр микропроволоки должен быть уменьшен в  $n$  раз. Формула (6) при этом принимает вид

$$F_2 = \frac{k_2}{k_1} \frac{E_2}{E_1} \frac{1}{n} F_1. \quad (8)$$

Пусть исходный образец изготовлен из стальной микропроволоки диаметром 50 мкм и к нему для создания заданного относительного удлинения прикладывается удельная нагрузка  $F_1$ . Уменьшим размеры элементов структуры, в том числе диаметр микропроволоки, в  $n$  раз, например в 2 раза. Какую удельную нагрузку нужно приложить ко второму образцу для создания в нем такого же относительного удлинения, если в нем использована стальная, вольфрамовая микропроволока при  $k_1 = k_2 = 1$ ? Для стали  $E_2 = E_1$ , для вольфрама  $E_2 = 2E_1$ . В результате, со-

гласно формуле (8), получаем для стали  $F_2 = F_1/2$ , для вольфрама  $F_2 = F_1$ . В обоих случаях диаметр микропроволоки  $d_2$  должен быть равен 25 мкм. При меньшем  $d_2$  коэффициент отражения будет меньше коэффициента отражения от первого образца, при большем  $d_2$  – наоборот.

2. Теперь во втором образце нужно при том же  $n$ , при той же относительной деформации и при любом коэффициенте отражения получить удельное растягивающее усилие, например, в 3 раза меньшее, чем в первом ( $F_2 = F_1/3$ ) при  $k_1 = k_2 = 1$ . Какой диаметр проводника должен быть взят при использовании стальной, вольфрамовой микропроволок?

Из формулы (6) получаем

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{F_2}{F_1} \frac{E_1}{E_2} \frac{1}{n^3}} d_1.$$

Для стальной микропроволоки

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{1}{1} \frac{1}{2^3}} d_1 = \frac{d_1}{\sqrt[4]{24}} \approx 22 \text{ мкм} < 25 \text{ мкм},$$

для вольфрамовой микропроволоки

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2^3}} d_1 = \frac{d_1}{2\sqrt[4]{3}} \approx 19 \text{ мкм} < 25 \text{ мкм}.$$

В обоих случаях коэффициент отражения должен быть меньше, чем коэффициент отражения от первого образца, особенно во втором случае. Для него произведем оценку коэффициента отражения, используя формулы (1).

Для этого введем понятие эффективного размера стороны ячейки ( $a_{\text{эфф}}$ ). Под  $a_{\text{эфф}}$  будем понимать размер стороны ячейки в тканой металлической сетке, при котором эта сетка имеет такой же коэффициент отражения, как у нашего исходного образца. Пусть исходный образец, изготовленный из микропроволоки диаметром 50 мкм, при длине волны 3 см имеет коэффициент отражения 90 %. Согласно формуле (1), это соответствует  $a_{\text{эфф}} = 2$  мм. Уменьшим все элементы структуры образца, а следовательно, и эффективный размер стороны ячейки в 2 раза, и длину волны также уменьшим в 2 раза. При диаметре проводника 25 мкм коэффициент отражения согласно формуле (1) остается равным 90 %, а при диаметре проводника 19 мкм становится равным 88 %, т.е. хоть и уменьшился, но не существенно. В случае стальной микропроволоки он уменьшится еще слабее.

Отсюда вывод – изменение диаметра проводника мало влияет в данных условиях на коэффициент отражения и формулу (6) можно использовать при подборе параметров микропроволок для получения металлотрикотажа с заданным удельным усилием растяжения, не учитывая в первом приближении изменения коэффициента отражения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Кудрявин Л.А., Подшивалов С.Ф., Халиманович В.И. Трикотажные металлические сетеполотна для отражающей поверхности трансформируемых наземных и космических антенн // Технический текстиль. 2007. № 16. С. 59–64.
2. Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Котович О.С. Применение нелинейной теории упругости к расчету двумерной деформации трикотажа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2010. № 8. С. 69–72.
3. Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Котович О.С. Расчет двумерной деформации трикотажа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2011. № 1. С. 80–83.

4. Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Котович О.С. Расчет деформации трико одностороннее открытое // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2011. № 2. С. 57–60.
5. Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Котович О.С. Расчет деформации трико одностороннее закрытое // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2011. № 3. С. 75–78.
6. Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Заваруев Н.В. Расчет деформации кулирного трикотажа при симметричной двумерной нагрузке с помощью нелинейной теории упругости // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2013. № 5. С. 74–77.
7. Конторович М.И., Астрахан М.И., Акимов В.П. и др. Электродинамика сетчатых структур / под ред. М.И. Конторовича. М.: Радио и связь, 1987. 136 с.
8. Шалов И.И., Далидович А.С., Кудрявин А.А. Технология трикотажного производства. М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. 296 с.
9. Попов Е.П. Теория и расчет упругих стержней. М.: Наука, 1986. С. 294.

Статья поступила: 29.05.2017 г.

Khalimanovich V.I., Kudryavin L.A., Belyaev O.F., Zavaruev V.A. (2017) APPLICATION OF THE NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY AND SIMILARITY METHOD FOR ASSESSMENT OF THE METALLIC JERSEY DEFORMATION PROPERTIES *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 105–113

DOI 10.17223/19988621/49/10

Earlier, a two-dimensional deformation of the square knitwear samples made of the microwires have been experimentally investigated under condition of the equal forces acting in the two mutually perpendicular directions. It has been found that the contact points between the structural elements in these samples stay almost immovable along the microwire. We have developed a computer program for calculating the two-dimensional deformation of such samples. It is based on the nonlinear theory of elasticity taking into account the current observation. The theoretical calculations obtained for several structures have been shown to be in a good agreement with experimental data. The program code has been analyzed in order to determine the influence of structure parameters on the deformation properties of the samples. It has been shown that if the two structures are similar, the samples are of the same size, but the size of the elements in the second structure is  $n_1$  times smaller and the microwire rigidity on the bend is  $n_2$  times larger than that in the first one. Therefore, to obtain the same sizes of the sample after deformation, the force acting on the second sample should be  $n_1^3 n_2$  times greater than that acting on the first sample.

It has been found that the simultaneous decrease in dimensions of the structure elements and in the wavelength by an equal number of times does not lead to the significant changes in reflection coefficient.

Keywords: metallic jersey, reflective surface, reflection coefficient of electromagnetic waves, similarity method, nonlinear theory of elasticity.

*KHALIMANOVICH Vladimir Ivanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, JSC "Information Satellite Systems" named after Academician M.F. Reshetnev, Zheleznogorsk, Russian Federation)

*KUDRYAVIN Lev Aleksadrovich* (Doctor of Technical Science, Professor, Russian State University named after A.N. Kosygin, Moscow, Russian Federation)

*BELYAEV Oleg Fedorovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Russian State University named after A.N. Kosygin, Moscow, Russian Federation).

E-mail:vlzavaruev@yandex.ru

*ZAVARUEV Vladimir Andreevich* (Doctor of Technical Science, Professor, Russian State University named after A.N. Kosygin, Moscow, Russian Federation)

E-mail:vlzavaruev@yandex.ru



## REFERENCES

1. Belyaev O.F., Zavaruev V.A., Kudryavin L.A., Podshivalov S.F., Khalimanovich V.I. (2007) Trikotazhnye metal-licheskie setepolotna dlya otrazhayushchey poverkhnosti transformiruemyykh nazemnykh i kosmicheskikh antenn [Metal jersey for reflecting surface of the ground and space transformable antennas]. *Tekhnicheskij tekstil' – Technical Textile*. 16. pp. 59–64.
2. Kudryavin L.A., Belyaev O.F., Zavaruev V.A., Kotovich O.S. (2010) Primenenie nelineynoy teorii uprugosti k raschetu dvumernoy deformatsii trikotazha [Application of the nonlinear theory of elasticity to the calculation of two-dimensional deformation of jersey]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti – Textile Industrial Technology*. 8. pp. 69–72.
3. Kudryavin L.A., Belyaev O.F., Zavaruev V.A., Kotovich O.S. (2011) Raschet dvumernoy deformatsii trikotazha [Calculation of two-dimensional deformation of jersey]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti – Textile Industrial Technology*. 1. pp. 80–83.
4. Kudryavin L.A., Belyaev O.F., Zavaruev V.A., Kotovich O.S. (2011) Raschet deformatsii triko odnogrebenochnoe otkrytoe [Calculation of the deformation of one-bar open jersey]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti – Textile Industrial Technology*. 2. pp. 57–60.
5. Kudryavin L.A., Belyaev O.F., Zavaruev V.A., Kotovich O.S. (2011) Raschet deformatsii triko odnogrebenochnoe zakrytoe [Calculation of the deformation of one-bar closed jersey]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti – Textile Industrial Technology*. 3. pp. 75–78.
6. Kudryavin L.A., Belyaev O.F., Zavaruev V.A., Zavaruev N.V. (2013) Raschet deformatsii kulirnogo trikotazha pri simmetrichnoy dvumernoy nagruzke s pomoshch'yu nelineynoy teorii uprugosti [Calculation of the deformation of metal jersey under two-dimensional symmetric loading with the use of nonlinear theory of elasticity]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti – Textile Industrial Technology*. 5. pp. 74–77.
7. Kontorovich M.I., Astrakhan M.I., Akimov V.P., et al. (1987) *Elektrodinamika setchatykh struktur* [Electrodynamics of knitted structures]. Moscow: Radio i svyaz'.
8. Shalov I.I., Dalidovich A.S., Kudryavin A.A. (1984) *Tekhnologiya trikotazhnogo proizvodstva* [Textile manufacturing technology]. Moscow: Legkaya i pishchevaya promyshlennost'.
9. Popov E.P. (1986) *Teoriya i raschet uprugikh sterzhney* [Theory and calculation of elastic rods]. Moscow: Nauka.

УДК 532.5.032; 536.22  
DOI 10.17223/19988621/49/11

А.В. Шваб, Н.И. Гичёва

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Исследуется влияние естественной конвекции на характер течения и теплообмен в вихревой камере химического реактора. С использованием двух подходов реализовано численное моделирование течения, получены поля линий тока, скоростей и температуры с учётом и без учёта свободной конвекции. Достоверность расчётов проверена сопоставлением результатов различных методов и сравнением с аналитическими результатами.

**Ключевые слова:** гидродинамика, теплообмен, вихревая камера, свободная конвекция, химический реактор.

Развитие промышленности требует повышения качества материалов. Это обуславливает интерес науки к тугоплавким металлам, имеющим очень высокую износостойкость. Одним из самых востребованных в различных областях промышленности тугоплавких металлов является вольфрам. Однако получение вольфрама и придание изделиям из него нужной формы весьма затруднительно. Поэтому существует необходимость разработки новых способов выделения чистого вольфрама из его соединений. Перспективным является метод получения вольфрама путем осаждения из парогазовой фазы с помощью восстановления его фторидов или хлоридов. Процесс осаждения вольфрама из смеси гексафторида вольфрама и водорода протекает по реакции



которая начинает идти при температурах порядка 300 °С и позволяет получать осадки любой толщины.

В данной работе приведен численный расчёт процессов гидродинамики и теплопереноса с учётом естественной конвекции в химическом реакторе, имеющем цилиндрическую форму (рис. 1, а). Впуск газов, имеющих температуру  $T_0$ , в реактор осуществляется через цилиндрическую трубу в центре со скоростью  $U_0$ , а выпуск – через кольцевой канал. Верхняя и нижняя стенки сосуда приведены во вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$ . Нижняя стенка имеет температуру  $T_1$ .

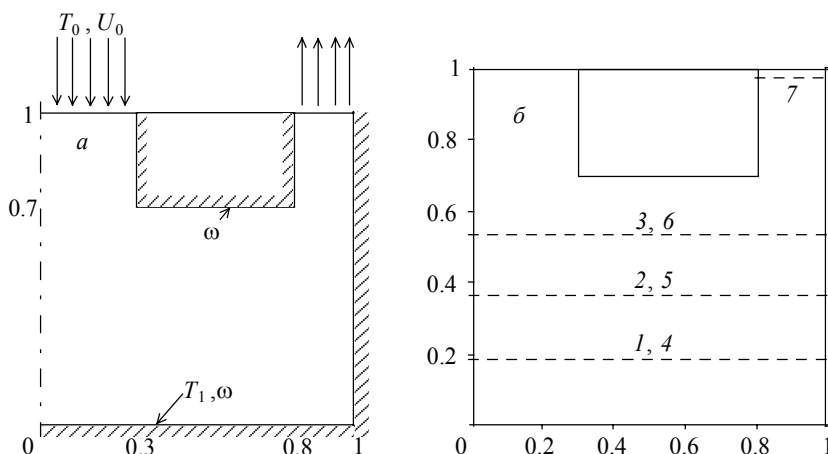
Течение и теплоперенос газа в вихревой камере могут быть описаны системой уравнений, включающей уравнения Навье – Стокса, уравнение неразрывности, и уравнение переноса температуры. В безразмерной форме в цилиндрической системе координат для осесимметричного случая система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial(u_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{u_\varphi^2}{r} - \frac{u_r^2}{r}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial(u_r u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - \frac{u_r u_z}{r} + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta; \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} &= -\frac{2u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u_r \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \theta)}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - \frac{u_r \theta}{r}.$$

В качестве масштабов обезразмеривания для получения системы (2) взяты радиус вихревой камеры, входная линейная скорость, а также максимальный перепад температур. Характер гидродинамических и тепловых процессов в данной модели зависит от значений критериев Рейнольдса  $\text{Re} = \rho U R / \mu$ , Прандтля  $\text{Pr} = c_p \mu / \lambda$  и Грасгофа  $\text{Gr} = g \beta (T_1 - T_0) \rho R^3 / \mu^2$ .



**Рис. 1.** Вихревая камера химического реактора:  
расчётная область и граничные условия

**Fig. 1.** Vortex chamber of the chemical reactor:  
computational domain and boundary conditions

Численное моделирование процессов в вихревой камере проводится двумя способами: в переменных «вихрь – функция тока» и в физических переменных «скорость – давление».

Для решения в переменных «вихрь – функция тока» система (2) тождественно преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u_r \Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \Omega)}{\partial z} = \frac{2u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{\partial \theta}{\partial r};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - r \Omega;$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} = -\frac{2u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right);$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u_r \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \theta)}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - \frac{u_r \theta}{r}.$$

Рассматриваемая задача стационарна, однако её решение проводится эволюционным методом до установления по времени. Поэтому уравнения приводятся в нестационарном виде. Время в уравнениях фиктивно и, по сути, заменяет значение итерационного параметра. Для решения системы (3) с вышеприведёнными граничными условиями используется неявная обобщённая схема переменных направлений в  $\Delta$ -форме [1]. Она абсолютно устойчива и имеет второй порядок точности по времени. Данный двумерный метод основан на введении промежуточного временного слоя с целью построения многомерной неявной схемы, в которой требуется обращение только трёхдиагональной матрицы. Рассмотрим применение обобщённой схемы переменных направлений на примере уравнения для переноса тепла. Представим значение температуры на новом временном слое как суперпозицию старого значения и малого изменения  $\Delta\theta$ :

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta\theta. \quad (4)$$

Уравнение переноса для  $\Delta\theta$  запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_r \Delta\theta)}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_z \Delta\theta)}{\partial z} - \frac{1}{2 \text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{2 \text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial z^2} = \\ = \frac{\rho u_r \theta}{r} + \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta^n}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Проведём всё возмущение вначале в направлении  $r$ , а затем – в направлении  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta^*}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_r \Delta\theta^*)}{\partial r} - \frac{1}{2 \text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta\theta^*}{\partial r^2} = \\ = - \frac{\partial(u_r \theta^n)}{\partial r} - \frac{\partial(u_z \theta^n)}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta^n}{\partial r} \right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\Delta\theta^{**}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_z \Delta\theta^{**})}{\partial z} - \frac{1}{2 \text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta\theta^{**}}{\partial z^2} = \frac{\Delta\theta^*}{\Delta t}. \quad (7)$$

Таким образом, получаем

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta\theta^{**}. \quad (8)$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом прогонки.

Метод расщепления [2] применяется к уравнениям, записанным в физических переменных (2). В нём вместо уравнения неразрывности решается уравнение Пуассона для давления. Это делается для того, чтобы выделить влияние давления в одно уравнение. Уравнения для скорости представляются в следующем виде:

$$\frac{\tilde{v}^{n+1} - \tilde{v}^n}{\Delta t} + K - D = -\nabla p^n - \nabla(\delta p). \quad (9)$$

Здесь  $K$  и  $D$  – слагаемые, определяющие соответственно конвекцию и диффузию,  $\delta p$  – разность между значениями давления на  $n$ -м и  $(n+1)$ -м временных слоях. Прибавим и отнимем в числителе промежуточное сеточное значение скорости  $\tilde{\tilde{v}}$ :

$$\frac{\tilde{v}^{n+1} - \tilde{v}^n + \tilde{\tilde{v}} - \tilde{\tilde{v}}}{\Delta t} + K - D = -\nabla p^n - \nabla(\delta p). \quad (10)$$

Разделим слагаемые в выражении (10) на два уравнения, содержащие соответст-

венно значения на  $n$ -м слое и промежуточные значения. Будем иметь:

$$\frac{\tilde{\bar{v}} - \bar{v}^n}{\Delta t} + \tilde{K} - \tilde{D} = -\nabla p^n; \quad (11)$$

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \tilde{\bar{v}}}{\Delta t} = -\nabla(\delta p). \quad (12)$$

Из уравнения (11) можно найти промежуточное сеточное значение скорости.

Поддействуем оператором градиент на выражение (12):

$$\frac{\nabla \bar{v}^{n+1} - \nabla \tilde{\bar{v}}^n}{\Delta t} = -\nabla^2(\delta p). \quad (13)$$

В силу выполнения уравнения неразрывности выражение сведётся к виду

$$\nabla^2(\delta p) = \frac{\nabla \tilde{\bar{v}}}{\Delta t}. \quad (14)$$

Получаем уравнение Пуассона для поправки к давлению. Метод его решения аналогичен используемому для уравнений переноса. Для поправки к давлению  $\delta p$  при численном решении на всех границах задаются граничные условия второго рода (Неймана). Исходя из представленных рассуждений, выражения для значений скорости и давления на новом временном слое будут определяться уравнениями

$$\nabla p^{n+1} = \nabla p^n + \nabla(\delta p); \quad (15)$$

$$\nabla \bar{v}^{n+1} = \tilde{\bar{v}} - \Delta t \cdot \nabla(\delta p). \quad (16)$$

Для аппроксимации конвективных и диффузионных слагаемых применяется экспоненциальная схема [2]. Решение реализуется на разнесённых сетках [3].

Для единственности решения задаются следующие граничные условия.

На входе:

$$\psi(r) = \frac{r^2}{2}, \quad \Omega = 0, \quad u_r = 0, \quad u_z = -1, \quad u_\varphi = 0, \quad \theta = 0;$$

на оси симметрии:

$$\psi = 0, \quad \Omega = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0;$$

на нижней стенке камеры:

$$\psi = 0, \quad \Omega = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{r\Delta n^2}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\varphi = R\omega \cdot r, \quad \theta = 1,$$

где  $R\omega = R \cdot \omega / U$  – обратное число Россби. На правой стенке:

$$\psi = 0, \quad \Omega = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{r\Delta n^2}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0;$$

на верхней стенке камеры:

$$\psi = \frac{r_1^2}{2}, \quad \Omega = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{r\Delta n^2}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\varphi = R\omega \cdot r, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

на внешней стенке входного и внутренней стенке выходного каналов:

$$\psi = \frac{r_1^2}{2}, \quad \Omega = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{r\Delta n^2}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

на выходе для всех функций:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Достоверность результатов была проверена тремя способами: сравнением результатов разных методов решений, сопоставлением с аналитическими результатами и исследованием на сеточную сходимость.

Ниже сопоставлены графики распределений характеристик потока в различных сечениях, полученные двумя методами решения (рис. 2). Цифры, обозначающие кривые, соответствуют сечениям, в которых построены распределения (см. рис. 1, б). Сплошной линией обозначены результаты расчётов в переменных «скорость – давление», точками – распределения полученные вычислениями в переменных «вихрь – функция тока». Рис. 2, а содержит сечения аксиальной составляющей скорости, 2, б – окружной составляющей, 2, в – температуры. Параметры потока, при которых проводилось данное сопоставление, следующие:  $Re = 3$ ,  $Pr = 1$ ,  $R\omega = 0.5$ ,  $Gr = 0$ . Рисунок 2 демонстрирует хорошее совпадение результатов, полученных различными методами.

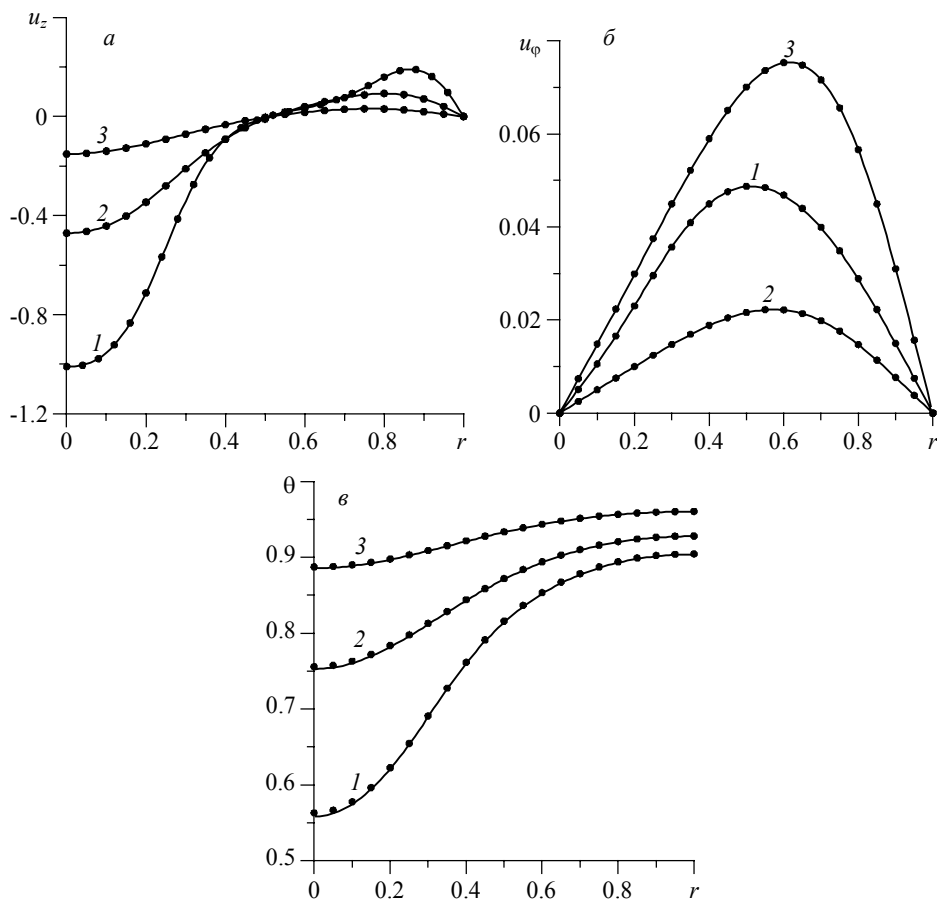


Рис. 2. Сопоставление результатов расчётов, полученных разными методами

Fig. 2. Comparison of the calculation results obtained by different methods

На выходе из реактора при малых числах Рейнольдса можно провести тестовое исследование на сравнение результатов с аналитической зависимостью для установившегося течения жидкости в кольцевом канале [4]. Течение описывается формулой

$$U_z = 2U_m \frac{(1-r^2) \ln r_1 - (1-r_1^2) \ln r}{(1+r_1^2) \ln r_1 + (1-r_1^2)}, \quad (17)$$

где  $U_m$  – среднее значение скорости. В данной задаче кольцевой канал имеет место на выходе из вихревой камеры (сечение 7 на рис. 1, б). Сравнение графиков распределения  $u_z$  дано на рис. 3, а. Сплошной линией обозначено распределение, полученное с использованием разработанной модели, точками – точные значения. Совпадение графиков также говорит о правильности расчётов: полученные результаты совпадают с аналитической зависимостью.

Ещё одним способом проверки достоверности модели является решение классической задачи о течении вблизи бесконечного вращающегося диска [5]. Рассматривается течение вблизи плоского диска, равномерно вращающегося с угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска. Жидкость вдали от диска принимается покоящейся. Вследствие трения слой жидкости, непосредственно прилегающий к диску, увлекается последним и под действием центробежной силы отбрасывается наружу от диска. Взамен отброшенной жидкости к диску притекает в осевом направлении новая жидкость, которая также увлекается диском и опять отбрасывается наружу. С использованием ранее описанных методов были получены распределения скоростей вблизи диска. На рис. 3, б представлено сравнение численных результатов разработанной модели (сплошные линии) с аналитическим решением данной задачи, полученным В. Г. Кохрэном (обозначено точками). График демонстрирует хорошее совпадение решений, что также указывает на достоверность разработанной модели.

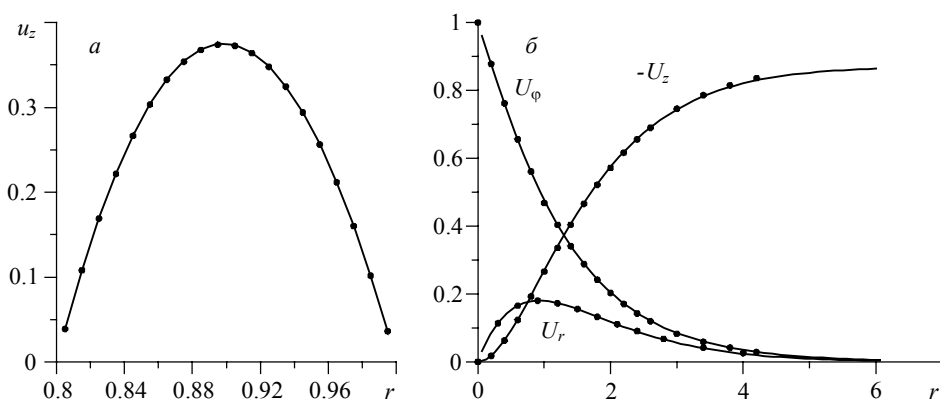
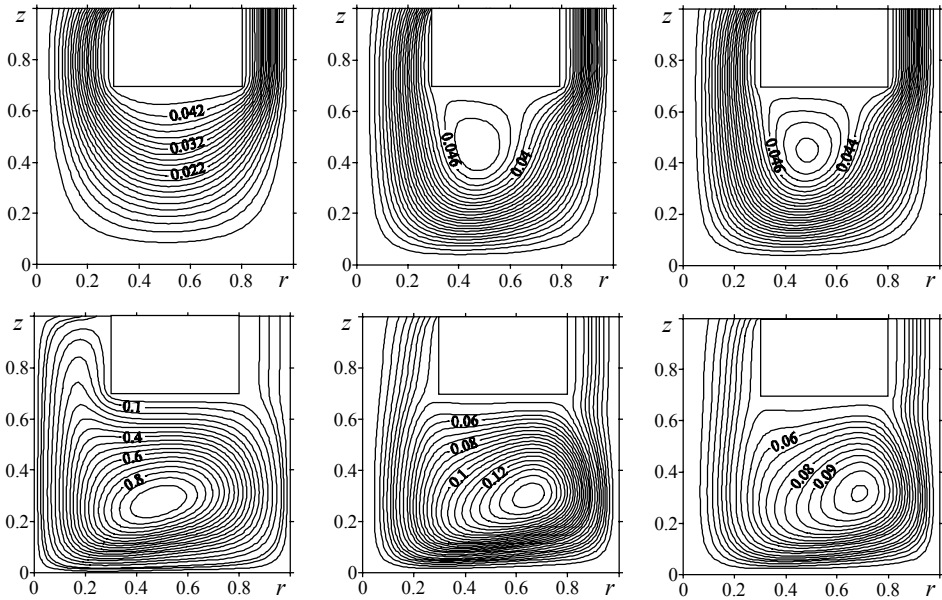


Рис. 3. Сравнение расчётов с аналитическими результатами  
Fig. 3. Comparison of the calculation results with analytical solutions

Далее представлены результаты численного решения. На рис. 4 изображены линии тока в вихревой камере при различных значениях критерия Рейнольдса при отсутствии (верхний ряд,  $Gr = 0$ ) и при наличии (нижний ряд,  $Gr = 10^5$ ) свободной конвекции. Параметры потока для всех графиков:  $Pr = 1$ ,  $R\omega = 0.5$ ,  $Re = 3, 20, 100$

(соответственно по столбцам). Графики показывают, что свободная конвекция существенно влияет на гидродинамику закрученного течения, — изменяется положение циркуляционной зоны линий тока газа, усиливается вихревое движение.



**Рис. 4.** Влияние числа Рейнольдса на распределение линий тока при отсутствии и при наличии свободной конвекции

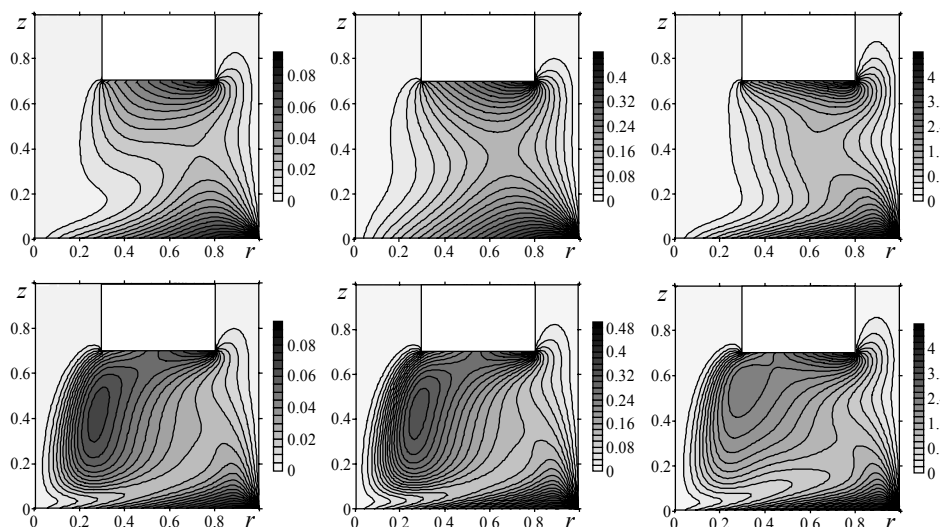
**Fig. 4.** Effect of the Reynolds number on the distribution of streamlines in the absence and presence of free convection

Рис. 5 показывает изолинии окружной составляющей скорости  $u_\phi$  при различных значениях параметра закрутки и в зависимости от наличия естественной конвекции. Верхний ряд на рис. 5 иллюстрирует поля скорости, полученные вычислениями без учёта свободной конвекции ( $Gr = 0$ ), нижний ряд — с её учётом ( $Gr = 10^5$ ). Критериальные параметры потока, использованные при визуализации:  $Re = 50$ ,  $Pr = 1$ ,  $R\omega = 0.1, 0.5, 5$ . При учёте свободной конвекции поле окружной скорости значительно изменяется, область больших значений окружной составляющей скорости перемещается в направлении к оси симметрии.

На следующем рисунке (рис. 6) представлено температурное поле в камере реактора при различных величинах критерия Прандтля и в зависимости от наличия естественной конвекции. Верхний ряд графиков иллюстрирует распределение температуры в камере без учёта свободной конвекции ( $Gr = 0$ ), нижний — с её учётом ( $Gr = 10^5$ ). Параметры потока:  $Re = 50$ ,  $R\omega = 0.5$ ,  $Pr = 0.2, 1, Pr = 20$ . Рисунок 6 позволяет судить о том, что при наличии свободной конвекции температура в большей части вихревой камеры возрастает, что свидетельствует об интенсификации теплоотдачи на нижней стенке вихревой камеры.

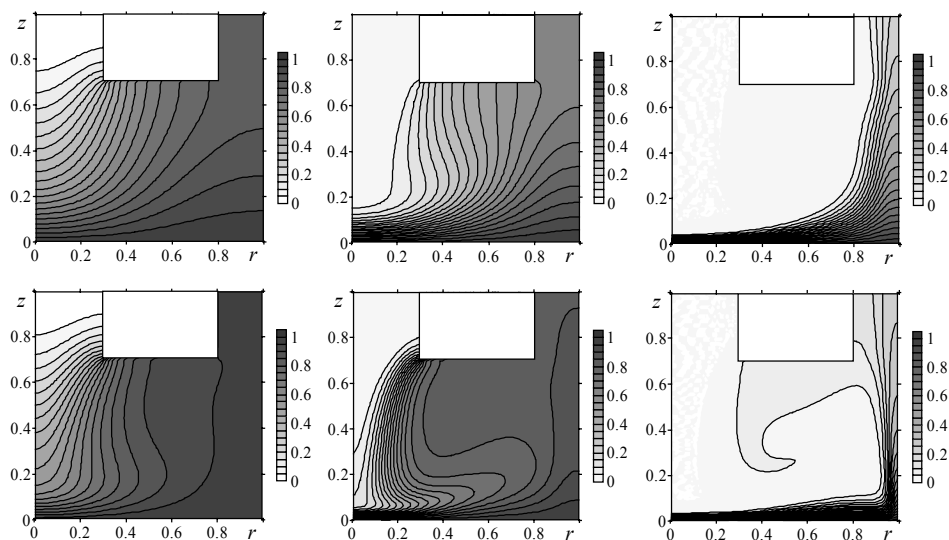
Графики на рис. 7 являются изотермами в сечениях в вихревой камере, полученными без учёта свободной конвекции (кривые 1, 2, 3), и с её учётом (кривые 4, 5, 6). Номера кривых соответствуют номерам сечений, в которых они построены, приведённых на рис. 1, б.





**Рис. 5.** Влияние числа Россби на распределение изолиний окружной составляющей скорости при отсутствии и при наличии свободной конвекции

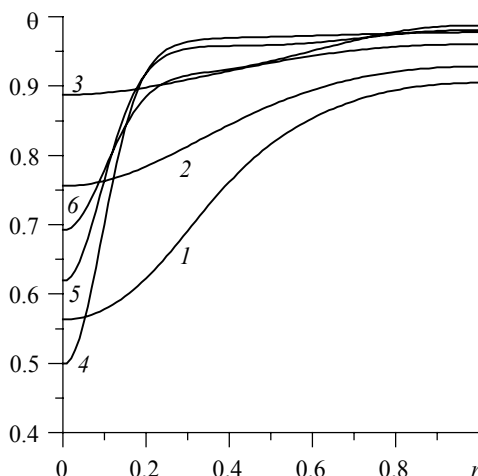
**Fig. 5.** Effect of the Rossby number on the distribution of peripheral velocity isolines in the absence and presence of free convection



**Рис. 6.** Влияние числа Прандтля на распределение температуры при отсутствии и при наличии свободной конвекции

**Fig. 6.** Effect of the Prandtl number on the temperature distribution in the absence and presence of free convection

Изотермы иллюстрируют более быстрое и равномерное прогревание в большей части вихревой камеры при наличии естественной конвекции, а также свидетельствуют о необходимости её учёта при расчёте подобных химических реакторов.



**Рис. 7.** Влияние свободной конвекции на изотермы в указанных сечениях в вихревой камере  
**Fig. 7.** Effect of free convection on the isotherms in the sections indicated in the vortex chamber

Исследования, проведённые на основе разработанной модели течения в вихревой камере химического реактора, показывают необходимость учёта свободной конвекции в задачах расчёта аппаратов такого рода. Расчёты показали, что наличие естественной конвекции существенно влияет на гидродинамику потока и интенсифицирует теплообмен в вихревой камере.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М.: Мир, 1977. 618 с.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. под ред. Виленского. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
3. Chung T.J. Computational fluid dynamics. Cambridge University Press, 2002. 1012 p.
4. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: пер. с нем. М.: Наука, 1974. 712 с.

Статья поступила 17.05.2017 г.

Shvab A.V., Gicheva N.I. (2017) MODELING OF THE NATURAL AND FORCED CONVECTION IN A VORTEX CHAMBER OF THE CHEMICAL REACTOR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 114–123

DOI 10.17223/19988621/49/11

The subject of this research is a chemical reactor for producing tungsten. A physical and mathematical model of fluid flow and heat transfer in the chemical reactor under forced and free convection has been described and developed by two methods. The numerical simulation was carried out using “vortex–stream function” and “velocity–pressure” variables. The velocity and temperature distribution in reactor were obtained. The parametric studies of the effect of the Reynolds, Prandtl, and Rossby criteria on the flow characteristics were also performed. The graphs presented show that the natural convection has a significant impact on the flow hydrodynamics and intensifies the heat transfer.

The reliability of the calculations was verified by comparing the results obtained by the methods mentioned above. Furthermore, the created model was applied for numerical solving of a classical test problem of velocity distribution in an annular channel and that of the rotating infinite disk in a stationary liquid. The research results are in a good agreement with the analytical solutions.

Keywords: hydrodynamics, heat transfer, rotating flow, vortex chamber, natural convection, chemical reactor.

*SHVAB Alexander Veniaminovich* (Doctor of Physics and Mathematics,  
National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail avshvab@inbox.ru

*GICHEVA Natal'ya Ivanovna* (National Research Tomsk State University,  
Tomsk, Russian Federation)  
E-mail tashka-zenit@mail.ru

#### REFERENCES

1. Roache P.J. (1976) *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa: Albuquerque.
2. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere.
3. Chung T.J. (2002) *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
4. Petukhov B.S. (1967) *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat transfer and resistance in a laminar flow in pipes]. Moscow: Energiya.
5. Schlichting H. (1951) *Grenzschicht-Theorie* [Boundary layer theory]. Karlsruhe: G. Braun.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АЛБАГАЧИЕВ Али Юсупович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технология машиностроения, Московский технологический университет. E-mail: albagachiev@yandex.ru

**БЕЛЯЕВ Олег Федорович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры физики РГУ им. А.Н. Косыгина. E-mail: vlzavaguev@yandex.ru

**БЕССОНОВА Мария Петровна** – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: bessonova.mp@mail.ru

**БОРИСОВА Яна Владимировна** – магистрантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: borisova\_yana@list.ru

**ГАСЫМОВ Юсиф Солтан** – доктор физико-математических наук, Университет Азербайджан, Баку, Азербайджан. E-mail: yusif.gasimov@au.edu.az

**ГИЧЁВА Наталья Ивановна** – магистрантка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: tashka-zenit@mail.ru

**ГОЛЬДИНА Надежда Викторовна** – магистрантка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: alche0809@mail.ru

**ГУЛИЕВ Гамлет Фарман** – доктор физико-математических наук, Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан. E-mail: hkuliyev@rambler.ru

**ГУСЕЙНОВА Тунзале Магеррам** – кандидат физико-математических наук, Азербайджанский государственный педагогический университет, Баку, Азербайджан. E-mail: tunzalemustafayeva@mail.ru

**ЗАВАРУЕВ Владимир Андреевич** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ПХОТИ РГУ им. А.Н. Косыгина. E-mail: vlzavaguev@yandex.ru

**ЗЕРНОВ Евгений Владимирович** – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Московский технологический университет. E-mail: zernov1935@mail.ru

**КОЛЕСНИКОВ Иван Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

**КОПАНЕВ Сергей Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: copanev\_d@mail.ru

**КУДРЯВИН Лев Александрович** – доктор техн. наук, профессор, профессор кафедры ПХОТИ РГУ им. А.Н. Косыгина

**МАНСИМОВ Камил Байрамали оглы** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана. E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

**МИНЬКОВ Леонид Леонидович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

**МОИСЕЕНКО Анатолий Михайлович** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий и математики, Орловский государственный аграрный университет. E-mail: puare54@yandex.ru

**ПОВЗУН Мария Анатольевна** – магистрантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: povzunyaasha@gmail.com

**ПОНОМАРЕВА Мария Андреевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pma@ftf.tsu.ru

**ПЧЕЛИНЦЕВ Евгений Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: [evgen-pch@yandex.ru](mailto:evgen-pch@yandex.ru)

**РАХМЕЛЕВИЧ Игорь Владимирович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Института экономики и предпринимательства Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. E-mail: [igor-kitpd@yandex.ru](mailto:igor-kitpd@yandex.ru)

**РАХМЕЛЕВИЧ Игорь Владимирович** – кандидат технических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Института экономики и предпринимательства Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. E-mail: [igor-kitpd@yandex.ru](mailto:igor-kitpd@yandex.ru)

**СЕМЁНОВА Анастасия Александровна** – аспирантка кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: [semyonova.a@math.tsu.ru](mailto:semyonova.a@math.tsu.ru)

**СТАРЧЕНКО Александр Васильевич** – доктор физико-математических наук, профессор, декан механико-математического факультета Томского государственного университета, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования. E-mail: [starch@math.tsu.ru](mailto:starch@math.tsu.ru)

**СУЛЕЙМАНОВА Вусаля Абдулла гызы** – ассистент кафедры общей математики Сумгаитского государственного университета, аспирантка Института систем управления НАН Азербайджана. E-mail: [kmansimov@mail.ru](mailto:kmansimov@mail.ru)

**ТАГИЕВ Хикмет Тахир** – кандидат физико-математических наук, Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан. E-mail: [hitagiyevev@gmail.com](mailto:hitagiyevev@gmail.com)

**ХАЛИМАНОВИЧ Владимир Иванович** – кандидат физико-математических наук, профессор, директор Отраслевого центра крупногабаритных трансформируемых механических систем, АО «Информационные спутниковые системы» им. акад. Решетнева.

**ШВАБ Александр Вениаминович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: [avshvab@inbox.ru](mailto:avshvab@inbox.ru)

**ЯКОВОВСКАЯ Инга Михайловна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Московский технологический университет. E-mail: [lira@imamod.ru](mailto:lira@imamod.ru)

**ЯКУТЕНОК Владимир Альбертович** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: [yva@ftf.tsu.ru](mailto:yva@ftf.tsu.ru)

Оригинал-макет подготовлен  
**ООО «Издательство научно-технической литературы»**  
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*  
Верстка *Д.В. Фортеса*

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.  
Подписано к печати 17.10.2017. Выпуск в свет 04.11.2017.  
Формат 70 × 100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 10.16. Уч.-изд. л. 11.38. Тираж 250 экз. Заказ № 36. Цена свободная.

---

Отпечатано на оборудовании  
**Издательского Дома Томского государственного университета,**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 277.  
<http://publish.tsu.ru> E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)