

УДК 1.17

В.А. Ладов, И.А. Эннс

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА, ПАРАДОКС РАССЕЛА
И ТЕОРИЯ ТИПОВ¹**

Рассматривается определение числа у Г. Фреге. Подход Г. Фреге сравнивается со взглядами И. Канта. Демонстрируется оригинальность и приоритет фрегевского подхода. Рассматриваются недостатки определения числа у Г. Фреге, выявленные Б. Расселом. Дается критическая оценка исследований Б. Рассела.

Ключевые слова: число, класс, множество, парадокс, теория типов, аксиома бесконечности.

Математика в «Критике чистого разума» И. Канта

«Все математические суждения имеют синтетический характер» [1. С. 14] – это, с точки зрения Канта, означает, что математическое знание невозможно получить только путем аналитической работы рассудка. Математика требует выхода за пределы понятий рассудка к созерцанию. Известный пример Канта состоит в следующем: «На первый взгляд может показаться, что положение $7 + 5 = 12$ есть чисто аналитическое суждение, вытекающее согласно закону противоречия из понятия суммы семи и пяти. Однако, присматриваясь ближе, мы находим, что понятие суммы семи и пяти содержит в себе только признак соединения этих двух чисел в одно, причем вовсе не указывается, каково то число, которое охватывает слагаемые. Понятие двенадцати вовсе еще не мыслится вследствие того, что я только мыслю о соединении семи и пяти; и сколько бы я ни анализировал свое понятие такой возможной суммы, я бы не встретил в нем числа 12. Для этого необходимо выйти за пределы этих понятий, взяв на помощь наглядное представление, например, свои пять пальцев... При этом я беру сначала число семь и затем, привлекая на помощь к понятию пяти наглядное представление пальцев своей руки, я присоединяю постепенно к числу семь с помощью этого образа единицы, взятые для составления числа пять, и таким образом вижу, как возникает двенадцать» [1. С. 40]. Конечно, Кант не имеет здесь в виду то, что образование понятия числа зависит от конкретного эмпирического опыта пересчета пальцев руки, палочек, яблок и т.д. Если бы это было так, то математическое знание состояло бы из апостериорных синтетических суждений и имело бы случайный характер. Кант убежден, что «... настоящие математические положения всегда суть априорные, а не эмпирические суждения, потому что они обладают необходимостью, которая не может быть заимствована из опыта» [1. С. 39]. Понятие числа возникает на основании обращения к чистой форме

¹ Статья подготовлена при поддержке РФФИ (проекты № 10-06-00039-а, № 12-06-00078-а), РГНФ (проект №11-03-00039-а), а также в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований (тематический план НИР Национального исследовательского Томского государственного университета) № 6.4832.2011.

чувственного созерцания – времени. Фиксация временных синтезов в рамках чистой формы чувственного созерцания обеспечивает, во-первых, априорный характер математического знания, поскольку не зависит от конкретных эмпирических примеров, и, во-вторых, гарантирует необходимость этого знания, поскольку любой конкретный опыт пересчета предметов, данных в созерцании посредством органов чувств, будет соответствовать тем закономерностям, которые характерны для самой формы чувственного созерцания.

Аналитическое определение числа у Г. Фреге

Несмотря на то, что Кант сохраняет за математикой статус априорного и необходимого знания, указание на созерцание как на источник математического познания, во-первых, резко разделяет математику и логику, которые в данном случае трактуются как знания, имеющие различную природу, и, во-вторых, ставит математическое знание в зависимость от априорных синтетических суждений, эпистемологический статус которых представляется отнюдь не бесспорным в современной философии.

Одна из важных заслуг Г. Фреге в философии математики состоит в том, что он попытался дать чисто аналитическое определение числа, устраняя из математики обращение к эпистемологическим процедурам, связанным с созерцанием, и демонстрируя тем самым общую природу математического и логического знания, выраженного в аналитических суждениях.

В общем виде определение числа у Фреге возникает на основании идеи взаимно однозначного соотнесения между предметами, составляющими объемы понятий: «... мы свели взаимно однозначное соотнесение к чисто логическим обстоятельствам и теперь можем дать следующее определение: Выражение ‘Понятие F равночисленно понятию G ’ равнозначно выражению ‘Существует отношение ϕ , которое взаимно однозначно соотносит предметы, подпадающие под понятие F , с предметами, подпадающими под понятие G ’» [2. С. 208].

Стоит подчеркнуть, что в данном определении равночисленности не содержится круга, ибо взаимно однозначную соотнесенность предметов, входящих в объемы понятий, можно фиксировать без их пересчета, для которого мы уже должны были бы использовать числа: «Если официант хочет быть уверен, что он положил на стол ножей столько же, сколько тарелок, ему нет надобности считать каждый из них; если только он справа от каждой тарелки рядом положил нож, тогда каждый нож на столе находится рядом справа от тарелки. Тарелки и ножи взаимно однозначно соотнесены друг с другом...» [2. С. 205].

На основе определения равночисленности объемов понятий можно ввести общее определение числа. Число есть то, что соответствует совокупности предметов, подпадающих под каждое из понятий, объемы которых находятся во взаимно однозначном соотнесении.

Используя данное общее определение, можно задавать определения конкретных чисел. Например, предметы, составляющие объемы таких понятий, как ‘спутник Юпитера’, ‘сторона света’, ‘угол квадрата’, ‘конечность собаки’, могут быть взаимно однозначно соотнесены. Тогда то, что соответствует совокупности предметов, подпадающих под каждое из понятий ‘спутник

Юпитера', 'сторона света', 'угол квадрата', 'конечность собаки', есть число, и имя этого числа – 'четыре'.

Тем не менее последнее определение имеет изъян. Оно основывается на эмпирических данных, устанавливающих объемы соотносимых понятий, и потому не может считаться аналитическим. Определение конкретных чисел должно быть выстроено на таком фундаменте, который бы не имел никакого отношения к опыту.

Руководствуясь вышеизложенными соображениями, Фреге вводит определение 0, которое оказывается строго аналитическим: «0 – это число, соответствующее понятию 'не равное себе'» [2. С. 210]. Под понятие 'не равное себе', в соответствии с его содержанием, должны подпадать не равные себе предметы. Однако поскольку суждение ' $a \neq a$ ', исходя из логического закона недопущения противоречия, является аналитически ложным, постольку необходимо истинно то, что не существует не равных себе предметов. Следовательно, под понятие 'не равное себе' не подпадает ни один предмет. В таком случае то, что соответствует совокупности предметов, подпадающих под понятие 'не равное себе', есть число, и имя этого числа – 'ноль'. Такое определение не использует ссылку ни на эмпирическое, ни на чистое созерцание, оно основывается исключительно на логическом законе недопущения противоречия: «Все, что со стороны логики и для строгости доказательства можно требовать от понятия, это его точные границы, чтобы для каждого предмета было определено, подпадает он под него или нет. Этому требованию всецело удовлетворяют понятия, содержащие противоречия, типа 'не равное себе'; ибо для каждого предмета известно, что он под такое понятие не подпадает» [2. С. 210].

Фрегевское определение числа 1 также является важным, поскольку оно позволило установить универсальный способ аналитического определения чисел, который затем был использован и в иных, отличных от фрегевской, концепций в философии математики. «1 – это число, соответствующее понятию 'равное 0'» [2. С. 213]. Единственным предметом, который подпадает под понятие 'равное 0', является само число 0, которое было определено ранее: «Таким образом, у нас есть понятие 'равное 0' и некий предмет 0, под него подпадающий» [2. С. 213].

На основании двух фрегевских идей, а именно аналитического определения нуля через понятие 'не равное себе' и использования в определении нового числа уже определенных ранее чисел, был построен, например, натуральный ряд Дж. фон Неймана [3. С. 22]. Отличие интерпретации чисел фон Неймана от Фреге состояло только в том, что у Фреге определение числа задавалось интенсионально, т.е. объем понятия формировался через свойства, составляющие содержание понятия, тогда как у фон Неймана имеет место теоретико-множественное определение, где конкретные числа представляют собой соответствия совокупностям предметов, объединенных в множество экстенсионально. Именно поэтому в отношении нуля у фон Неймана речь идет не об объеме понятия 'не равное себе', а о пустом множестве, но при этом сама идея Фреге определить 0 как то, что соответствует отсутствию предметов, сохраняется. Натуральный ряд фон Неймана выглядит следующим образом:

- 0 $\emptyset$
- 1 $\{\emptyset\}$
- 2 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- 3 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- 4 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
-

Парадокс Рассела

В 1902 г. Б. Рассел написал Г. Фреге письмо, в котором указывал на логические затруднения, возникающие при отсутствии каких-либо ограничений на образование множеств (классов): «Вы утверждаете, что функция может быть неопределяемым элементом. Я тоже так считал, но теперь этот взгляд кажется мне сомнительным из-за следующего противоречия: Пусть w будет предикатом ‘быть предикатом, не приложимым к самому себе’. Приложим ли w к самому себе? Из любого ответа вытекает противоречие. Стало быть, мы должны заключить, что w не является предикатом. Также не существует класса (как целого) тех классов, которые, как целое, не являются членами самих себя. Отсюда я заключаю, что при определённых обстоятельствах определяемое множество не образует целого» [4. Р. 130–131].

Так был сформулирован парадокс, который в дальнейшем в логической литературе называли парадоксом множества всех непредикативных множеств, или парадоксом класса всех стандартных классов. Существуют два вида классов: стандартные и нестандартные. Стандартным называется класс, который не включает себя самого в качестве собственного элемента. Например, класс всех яблок является стандартным. Он включает в себя конкретные объекты материального мира – яблоки, но не включает в качестве собственного элемента себя самого, поскольку класс всех яблок сам яблоком уже не является. Таких классов подавляющее большинство: класс всех людей, класс всех деревьев, класс всех столов и т.д. Поэтому они и именуются стандартными. Однако существуют и специфические, нестандартные классы. Нестандартным называется класс, который включает себя самого в качестве собственного элемента. Например, класс всех предметов, не являющихся яблоками, является нестандартным. Он включает в себя все предметы, не являющиеся яблоками, а именно, людей, деревья, столы и т.д. Но при этом и сам класс предметов, не являющихся яблоками, также может быть рассмотрен как предмет, не являющийся яблоком. Поэтому данный класс включает себя самого в качестве собственного элемента.

Б. Рассел считает проблематичным образование класса всех стандартных классов. Класс всех классов, не являющихся членами самих себя, оказывается противоречив в том смысле, что в отношении него мы с одинаковой претензией на истинность можем сформулировать два противоречащих друг другу суждения. Истинным является как суждение ‘Класс всех стандартных классов есть стандартный класс’, так и противоречащее ему ‘Класс всех стандартных классов есть нестандартный класс’. Если мы допустим, что класс всех стандартных классов стандартен, то он должен стать членом самого себя, ведь это класс, включающий в себя все возможные стандартные классы. Но в таком случае мы приходим к выводу, что этот класс является нестан-

дартным. Если мы допустим, что класс всех стандартных классов является нестандартным, то мы должны рассмотреть его в качестве члена себя самого. Но членами данного класса являются только стандартные классы, и поэтому мы приходим к выводу, что данный класс тоже является стандартным.

С подачи Рассела в более популярной формулировке данная проблема часто фиксируется в парадоксе под названием 'Брадобрей'. Брадобрей – деревенский цирюльник, в чьи обязанности входит брить только тех жителей деревни, которые не могут бриться сами. Встает вопрос, может ли брадобрей брить себя самого? Если мы предполагаем, что может, то он попадает в класс тех людей, которые не могут бриться сами, и поэтому мы приходим к выводу, что данное действие в отношении себя он осуществить не в состоянии. Если мы предполагаем, что не может, то он становится членом той группы людей, в отношении которых он осуществляет свою деятельность, и поэтому мы приходим к выводу, что он может себя побрить.

Теория типов, переопределение числового ряда и аксиома бесконечности

Рассел видел причину открытого им самим парадокса в смешении индивидов и классов. В том случае, если элементом класса становится сам этот класс, мышление оказывается под угрозой парадоксов. Для устранения этой угрозы Рассел и сформулировал теорию типов. Данная теория указывала на необходимость дифференциации классов по типам и запрещала смешение классов разных типов между собой: «Общность классов в мире не может быть классом в том же самом смысле, в котором последние являются классами. Так мы должны различать иерархию классов. Мы будем начинать с классов, которые всецело составлены из индивидов, это будет первым типом классов. Затем мы перейдем к классам, членами которых являются классы первого типа: это будет второй тип. Затем мы перейдем к классам, членами которых являются классы второго типа; это будет третий тип и т.д. Для класса одного типа никогда невозможно быть или не быть идентичным с классом другого типа» [5. С. 90].

Поскольку в определении числа у Фреге Рассел усматривает недопустимое, с его точки зрения, смешение элементов, относящихся к разным типам, постольку производные от Фреге построения числового ряда представляются ему неудовлетворительными. Смешение, на которое указывает Рассел, в самом деле нетрудно обнаружить в числовом ряде фон Неймана, приведенном выше. Например, двойка здесь определяется как множество, элементами которого являются множества, относящиеся к разным типам: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

У самого Фреге подобного рода смешение не столь очевидно, и все же его тоже можно обнаружить в определении единицы. Фреге определяет 1 как то, что соответствует понятию 'равное 0'. Однако сам 0 определялся через понятие 'не равно себе'. Мы могли бы развернуть фрегевское определение единицы следующим образом: 1 есть число, которое соответствует совокупности предметов, подпадающих под понятие «равное 'не равно себе'». Единственным предметом, который составляет объем этого понятия, оказывается понятие 'не равно себе'. В данном случае предметом, подпадающим под понятие, оказывается не индивидный объект, который бы удовлетворял свойствам, зафиксированным в понятии, а само понятие. Этот факт действи-

тельно представляет собой пример смещения элементов различных логических типов. Если снова обратиться к фон Нейману, то мы и здесь обнаруживаем подобное положение дел в отношении определения единицы: $\{\emptyset\}$. В данном случае элементом множества является не индивид, а тоже множество, что с точки зрения теории типов является логически некорректным.

Неслучайно, что переопределение числового ряда у Рассела начинается именно с единицы: «Он сохраняет общий фрегеанский подход к числу с точки зрения классов, находящихся во взаимно однозначном соответствии. Сохраняет он и определение нуля как класса неравных самим себе объектов. Модификация определения начинается с числа один» [6. С. 60]. Число 1 соответствует совокупности объектов каждого из тех классов, которые взаимно однозначно соотнесены с классом, содержащим один объект. Число 2 соответствует совокупности объектов каждого из тех классов, которые взаимно однозначно соотнесены с классом, состоящим из объекта, использованного при определении числа 1, плюс новый объект. Число 3 соответствует совокупности объектов каждого из тех классов, которые взаимно однозначно соотнесены с классом, состоящим из объектов, использованных при определении числа 2, плюс новый объект. «Определение, построенное таким способом, избегает парадокса, поскольку соблюдает требование теории типов. Объекты, используемые при определении чисел, принадлежат одному и тому же типу» [6. С. 60].

Вместе с тем, преодолев одну трудность, Рассел столкнулся с иной: «Определение каждого последующего числа в последовательности натуральных чисел требует нового объекта. Но поскольку натуральный ряд бесконечен, постольку должно предусматриваться и бесконечное количество объектов» [6. С. 61]. Таким образом, расселовское определение числового ряда потребовало введения дополнительного онтологического постулата, выраженного в аксиоме бесконечности, которая представляет собой «... допущение о том, что любому заданному числу n соответствует некоторый класс объектов, имеющих n членов» [6. С. 61].

Критическая оценка расселовской диагностики парадоксов

До сих пор исследование, представленное в данной статье, имело нейтральный характер. Оно нацеливалось не на апологию или опровержение той или иной позиции, а только на их экспликацию. Теперь же нам бы хотелось представить собственные критические соображения в рамках обсуждаемых проблем.

Думается, что есть повод усомниться в правильности расселовской диагностики причин парадоксов. Рассел считал, что причина парадокса, сформулированного им в письме к Фреге, состоит в смешении индивидов и классов. Парадокс, по Расселу, возникает из-за того, что осуществляется попытка поместить класс, состоящий из индивидов, в себя же самого в качестве еще одного индивида. Именно подобного рода действия и запретила расселовская теория типов.

Однако то, что подлинная причина парадокса Рассела состоит не в факте смешения индивидов и классов, несложно продемонстрировать на примере класса всех нестандартных классов. Класс всех нестандартных классов также

предполагает смешение индивидов и классов, и тем не менее он не является парадоксальным в том смысле, в каком Рассел считает парадоксальным класс всех стандартных классов. В самом деле, пусть класс всех нестандартных классов является нестандартным. В таком случае у нас нет оснований заключать, что мы тут же должны признать его стандартным. Класс всех нестандартных классов содержит в качестве элементов все возможные нестандартные классы. Если класс всех нестандартных классов мы признаем нестандартным, то он становится своим собственным элементом без каких-либо противоречий. Классу всех нестандартных классов не могут быть приписаны одновременно два противоречивых свойства (быть стандартным и быть нестандартным), как это имело место в случае класса всех стандартных классов.

Если мы посмотрим на приведенные выше парадоксы, такие как парадокс образования предиката ‘быть предикатом, неприменимым к самому себе’, парадокс класса всех стандартных классов, парадокс ‘Брадобрей’, то мы увидим, что все они имеют одну общую черту. В каждом из этих случаев осуществляется попытка замкнуть на себя самого, обратиться по отношению к себе самому некоторое свойство, имеющее какую-либо негативную характеристику. Так, ставятся вопросы о том, применим ли к себе самому предикат ‘быть предикатом, неприменимым к самому себе’, содержит ли себя самого класс всех классов, не содержащих самих себя в качестве собственных элементов, может ли брадобрей побрить себя самого при том условии, что он должен брить только тех, кто не может бриться самостоятельно. По сути, основанием возникновения парадоксов во всех этих случаях является то, что можно было бы назвать ‘негативной автореферентностью’. Как только мы задаем вопрос о том, применимо ли к суждению, в котором задается негативное свойство по отношению к некоторым объектам, само это негативное свойство, возникает парадокс.

Г. фон Вригт называет вышеописанное явление ‘существенной отрицательностью’ [7. С. 477]. Отрицательный характер определенных понятий становится существенным в том случае, если их использование в рассуждении приводит к парадоксам. Фон Вригт видит в этом общее основание нескольких хорошо известных парадоксов: «Можно сказать, что антиномии Греллинга, Рассела и Лжеца устанавливают или демонстрируют ‘существенную отрицательность’ некоторых понятий» [7. С. 477].

Все это не означает, что смешение индивидов и классов не играет никакой роли в образовании парадокса Рассела. Действительно, парадокс возникает в ситуации данного смешения, и, если это смешение устранить, парадокс исчезнет. Однако указанное смешение вряд ли можно назвать подлинной причиной данного парадокса. Можно было бы сказать, что смешение индивидов и классов является необходимой, но не достаточной причиной возникновения парадокса Рассела. Данное смешение – это только своего рода питательная среда, в которой возникает парадокс. Достаточная же причина возникновения парадокса Рассела состоит в том, что обсуждаемое смешение происходит именно в той ситуации, в которой классу, смешивающемуся с индивидами, приписывается отрицательное свойство.

Выводы

Если сказанное в предыдущем параграфе верно, то можно поставить под сомнение и необходимость столь радикальных мер по устранению парадоксов, которые предлагала теория типов. Если смешение индивидов и классов может приводить, а может и не приводить к парадоксам, то не будет ли более продуктивным точнее установить причину возникновения противоречий и запретить только какие-то частные случаи обсуждаемого смешения, нежели устанавливать на него полный запрет?

Положительный ответ на поставленный вопрос может повлечь, в свою очередь, пересмотр расселовской оценки фрегевского определения числа и производных от него способов построения числового ряда. Действительно ли, например, числовой ряд фон Неймана, который допускает смешение индивидов и классов, содержит в себе угрозу возникновения парадоксов? По крайней мере, в определениях конкретных чисел, которые были представлены выше, у фон Неймана невозможно заметить ничего противоречивого. На это можно возразить, что угрозу противоречия несут не определения конкретных чисел, а сам способ, с помощью которого эти определения задаются. Но в таком случае мы должны повторить снова, что этот способ определения числового ряда, предполагающий смешение элементов, относящихся к различным типам, требует более тщательного анализа, ибо не является необходимым то, что его использование приведет к противоречию. Подобного рода исследования нам представляются актуальными для философии математики потому, что оправдание фрегевского и производных от него определений чисел может позволить оставить арифметику в сфере чисто аналитических истин, без каких-либо внешних онтологических допущений, таких как аксиома бесконечности, которую предполагает расселовское определение числового ряда.

Литература

1. Кант И. Критика чистого разума. СПб.: Тайм-аут, 1993.
2. Фреге Г. Основоположения арифметики // Фреге Г. Логико-философские труды. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. С. 125–238.
3. Целищев В.В. Философия математики. Новосибирск: Наука, 2002. Ч. 1.
4. Frege G. Philosophical and Mathematical Correspondence. Oxford: Basil Blackwell, 1980.
5. Рассел Б. Философия логического атомизма. Томск: Водолей, 1999.
6. Суровцев В.А. Автономия логики: Источники, генезис и система философии раннего Витгенштейна. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001.
7. Вригт Г.Х. фон. Гетерологический парадокс // Вригт Г.Х. фон. Логико-философские исследования: Избранные труды. М.: Прогресс, 1986. С. 449–482.