

УДК 1(091)

О.А. Доманов**АЛЕН БАДЬЮ МЕЖДУ ФОРМАЛИЗМОМ И ИНТУИЦИОНИЗМОМ**

Анализ формалистских и интуиционистских элементов в теории А. Бадью показывает, что она распадается на две независимые части, одна из которых относится к формализму (онтология), а другая – к интуиционизму (теория субъекта). При этом формалистские элементы служат для концептуализации этических ограничений, накладываемых на интуиционистского субъекта Брауэра.

Ключевые слова: *формализм, интуиционизм, онтология, субъект, Бадью.*

Формализм и интуиционизм – два соперничающих ответа на проблему обоснования математики. Их противостояние длится уже более века. Основатель интуиционизма Брауэр не принял формальный метод, под которым он понимал программу Гильберта и Пеано, включая аксиоматический подход к построению теории множеств. То же касается и других интуиционистов, а также таких «полу-интуиционистов», как Пуанкаре, отвергавших как теорию типов Рассела, так и аксиоматику Цермело. Хотя, по оценке М. Даммета, после крушения двух программ обоснования математики (логицизма – в результате открытия парадоксов, формализма – после доказательства известной теоремы Гёделя) остался, по существу, только интуиционизм [1. С. 2], этот факт, по его же словам, не стал немедленно и неизбежно очевидным, и позиции по сей день далеки от примирения. Тем удивительнее переход, совершённый Аленом Бадью на пути между первым [2] и вторым [3] томом «Бытия и события», от аксиоматической теории множеств к интуиционистской логике и алгебре Гейтинга. Какое место занимают эти, казалось бы, несовместимые позиции в онтологии и теории субъекта Бадью?

Первоначальный подход Бадью базируется на двух положениях. Первое утверждает тождество онтологии и математики. Бадью определяет онтологию вслед за Аристотелем как учение о сущем, поскольку оно сущее, или о том, что представляет собой всякое сущее уже потому, что оно – сущее. Математика оказывается именно таким учением. Математические сущности, такие как число или треугольник, являются не объектами-сущими, а способами бытия объектов – математика описывает не столько числа или треугольники, сколько то, что означает быть числом или треугольником.

Второе основное положение онтологии Бадью гласит: «одно или единое не есть» (*l'un n'est pas*) [2. С. 31]. Оно появляется в книге в ходе разрешения древнего вопроса о том, каково сущее само по себе, единое или многое. Решение Бадью состоит в том, чтобы положить: «одно или единое не есть», оно всегда является результатом. Сущее же как таковое (сущее, поскольку оно сущее) изначально множественно. Именно здесь появляется у Бадью аксиоматическая теория множеств в версии Цермело – Френкеля (ZF) [2.

С. 54–59]. Она оказывается наиболее подходящей по нескольким причинам. Во-первых, она имеет только одно отношение – принадлежность, которую Бадью интерпретирует как презентацию: « α принадлежит β » означает « α презентовано в множестве β » (как β). Во-вторых, аксиоматика ZF содержит только один тип переменных, и этим типом является множество. Она, таким образом, не даёт определения элемента, который оказывается лишь производным отношения, в которое вступают множества. Таким неявным способом теория показывает, что одно не есть, что всё, что презентовано, является множеством, а всякое множество есть множество множеств [2. С. 56].

Операцию, результатом которой является единое, Бадью называет счётом или принятием за одно (*compte-pour-un*), а явление сущего прежде счёта – презентацией (*présentation*). Сущее же, или то, что (себя) презентует, не сводится, строго говоря, ни к единице, ни к множеству, предшествуя им обоим. С другой стороны, Бадью также говорит, что то, к чему применяется операция счёта-за-одно, само не является единым, а потому является многим. Многое-без-единого оказывается формой презентации сущего, что, в частности, означает, что единое не презентуется. В этом рассуждении мы встречаем два смысла множественности¹:

1) исходное многое-без-единого, к которому применяется счёт-за-одно, и 2) посчитанное многое, составленное из единиц. Бадью называет первое неконсистентным, а второе – консистентным [2. С. 33]. Согласно Бадью, аксиоматика ZF описывает неконсистентную множественность. Бадью описывает его как «многое без единого» из платоновского «Парменида». Это бесконечно делимое образование, в котором всякое единство, при ближайшем рассмотрении распадается на многое. В другом месте Бадью прямо соотносит его с материей из платоновского «Тимея», чуждой всякой структурирующей идее. Эту множественность почти невозможно мыслить, и только математике, согласно Бадью, принадлежит заслуга создания теории этой множественности, известной как теория множеств.

Существенно при этом, что формальный подход не является для Бадью случайным. Он считает аксиоматическое представление единственно возможным в онтологии:

«Я настаиваю на том, что, имея в виду теорию множеств, аксиоматизация является не приёмом выражения, но внутренней необходимостью. Сущее-многое, если оно предоставляется только естественному языку и интуиции, продуцирует только псевдопрезентацию неразделённых консистентности и неконсистентности, следовательно, сущего и не-сущего, поскольку оно не отстраняется в достаточной степени от предположения о бытии единого. Ибо единое и многое – это не «единство противоположностей», поскольку первое не есть, тогда как второе является сам'ой формой всякой презентации сущего. Аксиоматизация требуется для того, чтобы, предоставленное неявному правилу счёта, многое породилось *без понятия*, то есть *без предположения бытия-одного* [2. С. 54–55].

¹ Бадью использует термины *le multiple* и *la multiplicité* для множества в общем смысле. Я буду переводить их как многое и множественность, оставив слово «множество» для перевода более точного и специфического термина *ensemble*, которым принято обозначать множество в математике (теории множеств).

Ни интуиция, ни конструкция здесь не пригодны, и Бадью прямо противопоставляет свой подход конструктивной математике. Однако, прежде чем мы перейдём к рассмотрению этого противопоставления, рассмотрим теорию субъекта Бадью.

В своей теории субъекта Бадью опирается на метод форсинга или вынуждения (*forcing*), придуманного Полом Коэном [4] для построения моделей теории множеств с заданными свойствами (например, с заданной мощностью определённых множеств). Коэн начинает со стандартной счётной модели ZF. В этой модели существуют подмножества, которые ей не принадлежат. Их присоединение к модели расширяет её, причём оказывается, и в демонстрации этого состоит заслуга Коэна, что надлежащим выбором подмножества возможно добиться нужных свойств расширенной модели¹. Более конкретно, существует прямая связь между принадлежностью тех или иных элементов присоединяемому множеству и истинностью тех или иных формул в расширенной модели. Для того, чтобы это было возможно, присоединяемое множество должно удовлетворять некоторым условиям, одно из которых, в частности, говорит, что оно не может быть выделено (описано) никакой формулой языка теории множеств. Такое множество (оно всегда бесконечно) Коэн называет генерическим. Коль скоро оно не описывается языком, оно для своего формирования требует субъекта-математика, явным образом указывающего, какие элементы ему принадлежат. Бадью заимствует эту структуру, но использует её по-своему. У него субъект осуществляет набор генерического множества, полагаясь на своё понимание, всегда несовершенное, связи элементов с событием – особым неконсистентным множеством, которое само не может принадлежать модели. Относительно этой связи Бадью практически ничего не говорит, кроме того, что субъект решает относительно неё на свой страх и риск. Таким образом, субъект основывается на решении и верности событию. Мы видим, что Бадью использует метод форсинга в некотором смысле обратным образом по отношению к Коэну. Если Коэн набирает генерическое множество, имея в виду требуемые свойства новой модели, то субъект Бадью набирает его, опираясь на свою оценку связи с событием, и лишь затем делает выводы о свойствах новой ситуации, в которой генерическое множество будет реализовано, т.е. станет элементом. Субъект говорит на языке будущей ситуации, в которой генерическое множество уже реализовано, но оценивает каждый раз конкретный элемент, не имея опоры для этого в знании ситуации, в которой находится.

Именно эта структура, исключительно важная для Бадью, оказывается, несмотря на то, что она возникает в рамках формальной аксиоматики, наиболее близкой интуиционизму. Рассмотрим эту связь подробнее.

Брауэр рассматривал математику, прежде всего, как деятельность. Она не зависит от языка, который требуется лишь для передачи математических истин и способен лишь исказить их. Поэтому математика немислима без

¹ Здесь и ниже я с необходимостью опускаю многие математические детали, поскольку меня, прежде всего, интересует их значение для теории субъекта. Однако эти детали, безусловно, важны, и интересующиеся могут найти их в указанной работе Коэна, а также Гейтинга, Крипке (см. ниже) и других.

субъекта («идеального математика») и должна пониматься как интеллектуальная деятельность последнего. Брауэр возводит интуиционизм к Канту, называя свою версию нео-интуиционизмом. Его основные интуиции – натуральное число и континуум – сами имеют основание в темпоральности:

Этот нео-интуиционизм рассматривает разделение моментов жизни на качественно различные части, которые могут объединяться только будучи разделены во времени, как фундаментальный феномен человеческого интеллекта, переходя при этом в абстракции от его эмоционального содержания к фундаментальному феномену математического мышления, интуиции чистого дву-единства (*two-oneness*). Эта интуиция дву-единства, основная интуиция математики, порождает не только числа один и два, но также все конечные порядковые числа, в той мере, в какой один из элементов этого дву-единства может быть мыслим как новое дву-единство, продолжая этот процесс неопределённо долго; таким способом это даёт нам наименьшее бесконечное порядковое число ω . Наконец, эта основная интуиция математики, в которой объединяются связанное и отдельное, непрерывное и дискретное, немедленно порождает интуицию линейного континуума, т.е. того «между», которое не исчерпывается наложением новых единиц и которое, таким образом, никогда нельзя мыслить как простое собрание единиц [5. С. 85–86].

Это интуитивное понимание существенно отличается от классического. Хотя интуиционисты, как и формалисты, принимают диагональный аргумент Кантора, они делают из него иные выводы. Например, те и другие согласны, что для любого счётного бесконечного множества действительных чисел можно указать число, ему не принадлежащее, но если формалист заключает отсюда, что мощность множества действительных чисел промежутка от 0 до 1 больше, чем алеф-ноль – мощности счётного множества, то для интуициониста это утверждение вообще не имеет смысла. То же относится и к вопросу о том, имеются ли мощности, промежуточные между мощностями счётного множества и континуума, т.е. знаменитая континуум-проблема, для решения которой Коэн разработал метод форсинга, столь важный для Бадью. В результате существенная часть проблематики, на которую опирается Бадью, вообще не имеет смысла для интуиционизма.

Но, пожалуй, наиболее ясно различие подходов Бадью и Брауэра проявляется в понимании бесконечности. Интуиционизм прямо отвергает актуальность бесконечности, всякая бесконечность в нём потенциальна. Бесконечность здесь определяется как процесс, который в силу закона своего порождения или разворачивания не может быть закончен, поэтому бессмысленно рассматривать его как нечто завершённое. Для Бадью же именно актуальность бесконечности существенна. Именно она является причиной, по которой аксиоматика является наиболее подходящей формой онтологии. Бесконечность не может быть сконструирована или схвачена интуицией, и в этом Бадью согласен с Брауэром. Но для него именно поэтому её познание может быть основано только на решениях, выраженных в аксиомах математики: «нет никакой внематематической концепции бесконечности, только смутный образ чего-то ‘очень большого’» [2. С. 164].

Бесконечность, для Бадью, есть предикат сущего, более того, исключительно сущего, поскольку оно сущее [2. С. 164]. Обсуждая актуальную и потенциальную бесконечность в «Бытии и событии», Бадью различает бесконечность чистого множества и трансцендентного Единого. Последнее есть лишь попытка мыслить бесконечное по модели конечного, т.е. неконсистентное по модели консистентного. Мы имеем здесь экзистенциальный разрыв, который не позволяет нам вывести бесконечное из конечного. И если для Брауэра это означает, что следует отказаться от актуальной бесконечности, то Бадью находит здесь место для решения и аксиоматического полагания, т.е. место субъекта.

Существенно при этом, что для него эта бесконечность реально существует (в отличие от воображаемой бесконечности трансцендентного Единого) и требует от человека перестать понимать себя в парадигме конечности и смертности и «опознать себя как во всех отношениях пронизанного и окружённого вездесущностью бесконечности» [2. С. 168]. Хотя субъект не может знать наверняка, актуализируема ли истина, именно ставка на неё основывает субъекта как такового.

Здесь, однако, следует различать индивидуального и родового (генерического) субъекта. Хотя процесс истины бесконечен, индивидуальный субъект является лишь его конечной частью. Хотя генерическое множество бесконечно, индивидуальный субъект принимает лишь конечное число решений о принадлежности ему тех или иных элементов. Может поэтому оказаться, что у этого субъекта есть что-то общее с потенциальной бесконечностью математического процесса у Брауэра. Это, действительно, так, и чтобы это понять, рассмотрим ещё два интуиционистских понятия – последовательности выбора и потока.

Вероятно, более всего интуиционизм Брауэра приближается к теории субъекта Бадью в понятии свободно выбираемой последовательности или последовательности свободных выборов¹. Последовательность выборов является конструктивным объектом, служащим для концептуализации бесконечности, коль скоро отрицается актуальная бесконечность. Она представляет собой последовательность объектов, конструируемую на каждом шаге выбором следующего объекта. Последовательности выборов могут быть законосообразными, т.е. подчиняющимися какому-то закону, или свободными, т.е. продолжающимися произвольно, без какого-либо закона. Последние даже не обязаны быть определёнными прежде своего разворачивания: на некоторой произвольной стадии мы можем вмешаться и изменить закон этого разворачивания, если он вообще был. Не существует способа предсказать поведение свободной последовательности.

Важно заметить, что свободные последовательности, не имеющие закона, конструктивны в интуиционистском смысле, хотя и не могут быть описаны каким-либо алгоритмом, законом, языком. Для своего конструирования они существенным образом требуют субъекта, его произвольного выбора. Бадью

¹ Free-choice sequence. Ю. А. Гастев переводит этот термин как «свободно становящаяся последовательность». По поводу перевода см. его комментарий [6. С. 297]. Сам Брауэр использовал термин *Wahlfolge* – буквально: последовательность выборов, выбираемая. Она может включать в себя элемент произвола (*Willkür*).

в его критике конструктивизма в [2] не учитывает такого рода последовательности, что делает его оценку интуиционизма ограниченной.

Последовательности выборов могут составлять структуру, называемую потоком (spread). Интуитивно он представляет собой дерево, исходящее из одного корня, и определяется двумя законами – законом потока и дополнительным законом. Первый определяет допустимые для потока начальные сегменты последовательностей и должен удовлетворять трём условиям: 1) пустой сегмент допустим, 2) последовательности, чьи начальные сегменты недопустимы, также недопустимы, 3) каждый допустимый начальный сегмент допускает бесконечное расширение по крайней мере по одному пути потока. Дополнительный закон сопоставляет допустимым последовательностям произвольные математические объекты. Можно считать, что первый закон определяет структуру дерева, а второй — математические объекты, навешанные на каждый узел этого дерева. Брауэровские последовательности представляют собой бесконечные пути в потоке. В частности, континуум определяется Брауэром как состоящий из вещественных чисел, каждое из которых представляет собой последовательность в потоке. Поэтому мы никогда не можем говорить о континууме как о законченном множестве; это становящееся множество, которое всегда может быть расширено.

Как эти разработки связаны с онтологией и теорией субъекта Бадью? Чтобы это понять, нам следует обратиться к исследованиям по формализации интуиционистской логики, в частности к работам А. Гейтинга и С. Крипке. Гейтинг предлагает формализацию этой логики, а Крипке разрабатывает для неё модель. Рассмотрим общую идею этой модели, опуская детали, которые можно найти в работе [7].

Модель представляет собой множество с определённым на нём первым элементом и отношением частичного порядка. Всё вместе это интерпретируется как дерево временных точек или «доказательных ситуаций» (evidential situations) [7. С. 97]. Это возможные миры, с каждым из которых ассоциировано по два множества предложений, считающихся имеющими значения истинности T и F . При этом последние должны пониматься интуиционистски: T означает наличие достаточной информации для доказательства соответствующего предложения A , а F – её отсутствие. В первом случае мы говорим, что A подтверждено (verified), во втором – что оно не подтверждено. Другими словами, F не следует путать с интуиционистской ложностью, для которой требуется, чтобы было подтверждено отрицание A . Она означает лишь отсутствие подтверждения A .

Корень определённого таким образом дерева обозначает «доказательную ситуацию» настоящего времени, само же дерево описывает возможные пути, которые мы можем пройти в поиске доказательств тех или иных положений (сходная интерпретация интуиционистской логики, так называемое исчисление задач, предложена А.Н. Колмогоровым). Крипке показывает, что эти пути описываются интуиционистской логикой. В частности, здесь не работает закон исключённого третьего: помимо истинности и ложности, имеется также ситуация «ещё не доказанности», когда мы не имеем достаточно информации, чтобы утверждать то или другое. Чтобы утверждать

отрицание A , нам недостаточно знать, что A не подтверждено, нужно знать, что оно не может быть подтверждено ни в какое время, следующее за данным вдоль по дереву «доказательных ситуаций».

Построенная таким способом модель позволяет Крипке продемонстрировать два важных для нас обстоятельства. Прежде всего, он показывает, что она может быть переформулирована в терминах последовательностей выбора, тем самым устанавливая связь с интуиционизмом. А также, что для нас важнее, он интерпретирует данную модель в терминах форсинга [7. С. 118–120]. Оказывается, что коэновская процедура построения генерического множества и вынуждения истинности формул расширенной теории подчиняется не классической, а интуиционистской логике. Она может быть представлена в терминах свободных, т.е. не подчиняющихся никакому закону, последовательностей выборов. Таким образом, субъекты Брауэра и Бадью оказываются сходными по своей структуре. Тот и другой говорит о творящем субъекте, не подчинённом никакому закону и продвигающемся вперёд на свой страх и риск. Есть, однако, и существенная разница.

В обоих случаях речь идёт о субъекте конечном, но ориентирующемся на бесконечность. Однако, как мы видели, понимание бесконечности у Брауэра и Бадью существенно различаются. Это приводит к различию в теории субъекта. З. Фрезер формулирует его следующим образом: «существенное различие между интуиционистской последовательностью и процедурой истины Бадью [состоит в том, что] среда субъекта у Бадью не является его собственным творением» [8. С. 124]. Если брауэровская последовательность свободна и произвольна, то процедура истины у Бадью детерминируется событием – существующим, но не являющимся в ситуации множеством (или являющимся лишь в форме субъекта, благодаря ему и посредством него). Это делает возможной ту смесь формализма и интуиционизма, которую мы находим в теории субъекта Бадью и с которой Брауэр вряд ли бы согласился, поскольку не рассматривал исчисление Гейтинга как исчерпывающую формализацию интуиционизма. Последнее для Брауэра вообще невозможно, поскольку невозможно формализовать творческий процесс развития математики. В этом смысле можно, вероятно, сказать, что субъект Бадью представляет собой формализуемую часть субъекта Брауэра, причём верность событию связана с условием, благодаря которому формализация становится возможной.

В некотором смысле субъект Бадью более ограничен в своей свободе, и в этом отношении Бадью ближе к Хайдеггеру, тогда как Брауэр – скорее, к Канту. Даже если брауэровский субъект следует закону, это закон, который он, подобно кантовскому моральному субъекту, принимает на себя сам. Ситуация, правда, осложняется тем, что у Бадью налагаемый на субъекта закон не может быть сформулирован. Субъект, скорее, принимает обет верности тому, что само не может появиться в ситуации; по этой причине одним из парадигмальных примеров субъекта истины для него является апостол Павел [9]. Зависимость субъекта Бадью от события не сводится к зависимости от закона, будь то навязанного или свободно принятого, поскольку генерическая процедура принципиально не подчиняется никакому закону. Но в любом случае, «идеальный математик» Брауэра творит

математику как среду своей деятельности, тогда как субъект истины Бадью верен свершившемуся событию и разворачивает его следствия.

Наконец, заметим, что связь теории субъекта Бадью с интуиционизмом позволяет нам понять, что бесконечность процедуры истины имеет характер не счётного множества, а брауэровского континуума. В этом смысле истину невозможно мыслить как завершённую, пусть и в бесконечном времени (даже Бог не в состоянии обладать всей истиной). С другой стороны, брауэровский никогда не завершаемый универсум есть то, что делает процедуру истины возможной.

Подведём итог. Бадью строит онтологию как формалист, опираясь на аксиоматику Цермело – Френкеля, и затем вводит событие и субъекта как то, что выходит за пределы онтологии. Последнее, однако, как показывают поздние формализации Гейтинга и Крипке, следует интуиционистской логике. В результате, в «Логиках миров» [3] Бадью уже явно опирается на алгебру Гейтинга и топологическую интерпретацию. Этого, как кажется, достаточно для построения теории субъекта. Мы видим в результате, что первый том «Бытия и события» распадается на две существенно независимые теории, одну из которых можно отнести к формализму (онтология), другую же – к интуиционизму (теория субъекта). При этом, как показывает пример Брауэра, возможно построение подобной теории субъекта без отсылок к аксиоматической теории множеств. Однако нельзя сказать, что первая из этих теорий Бадью не оказывает влияния на вторую. На аксиоматическую теорию множеств и её истолкование опирается онтология Бадью и, прежде всего, идея «многого без единого». От последнего же зависит идея события как множества, выходящего за пределы онтологии, но специфическим образом детерминирующего субъекта (это этическая детерминация верности и долга, а не естественной причинности; другими словами, речь здесь идёт, скорее, о причине желания в смысле Лакана). Событие, таким образом, не освобождает, как можно было бы подумать, субъекта от сущего-поскольку-оно-сущее, а, напротив, налагает на него дополнительные, этические ограничения. Бадью демонстрирует, что эти ограничения не только не относятся к онтологии, но и не могут мыслиться по модели онтологической детерминации. Но, несмотря на это, описание такой детерминации возможно, и это, в конце концов, определяет ту смесь формализма и интуиционизма, которую мы находим в «Бытии и событии».

Литература

1. Dummett M. Elements of Intuitionism. Oxford: Clarendon Press, 1977.
2. Badiou A. L'être et l'événement. P.: Seuil, 1988.
3. Badiou A. L'être et l'événement: T. 2, Logiques des mondes. P.: Seuil, 2006.
4. Коэн П. Теория множеств и континуум-гипотеза. М., 1969.
5. Brouwer L. Intuitionism and Formalism // Bulletin of the American Mathematical Society. 1913. Vol. 20. №2. P. 81–96.
6. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966. 556 с.
7. Kripke S. Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I // Formal Systems and Recursive Functions (Proceedings of the Eighth Logic Colloquium at Oxford, July, 1963) / Ed. by J.N. Crossley, M.A.E. Dummett. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1963. P. 92–129.
8. Fraser Z. The Law of the Subject: Alain Badiou, Luitzen Brouwer and the Kripkean Analyses of Forcing and the Heyting Calculus // Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy. 2006. Vol. 2. P. 94–133.
9. Бадью А. Апостол Павел. Обоснование универсализма / Пер. с фр. О. Головой. М.: Московский философский фонд; СПб.: Университетская книга, 1999.