

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2018**

**№ 55**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### **Учредитель:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменшиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

### **EDITORIAL COUNCIL**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

### **EDITORIAL BOARD**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Забарина А.И., Фомина Е.А.</b> О множестве $K_3(G)$ элементов конечных групп, коммутирующих ровно с тремя элементами группы .....	5
<b>Задорожная О.В., Кочетков В.К.</b> Структура интегралов второго дифференциального уравнения Левнера – Куфарева в частном случае .....	12
<b>Крутиков В.Н., Самойленко Н.С.</b> О скорости сходимости субградиентного метода с изменением метрики и его приложения в схемах нейросетевых приближений .....	22
<b>Тимошенко Е.А.</b> Группа Гротендика $K_0$ произвольного csp-кольца .....	38
<b>Уринов А.К., Эргашев Т.Г.</b> Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами .....	45

### МЕХАНИКА

<b>Агафонцев М.В., Ануфриев И.С., Копьев Е.П., Шадрин Е.Ю., Лобода Е.Л., Луценко А.В.</b> Исследование характеристик турбулентного пламени при воздействии малых энергетических возмущений .....	57
<b>Вячкин Е.С., Каледин В.О., Решетникова Е.В., Вячкина Е.А., Гилева А.Е.</b> Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями .....	72
<b>Данилов П.А., Хрусталева А.П., Ворожцов А.Б., Жуков И.А., Промахов В.В., Хмелева М.Г., Пикущак Е.В., Кветинская А.В.</b> Анализ влияния внешних физических воздействий на процессы литья легких сплавов .....	84
<b>Матвиенко О.В.</b> Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе .....	99
<b>Хасанов М.К.</b> Математическая модель инъекции сероводорода в природный пласт, сопровождающейся образованием его газогидрата .....	113
<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> .....	124

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Zabarina A. I., Fomina E. A.</b> On the set $K_3(G)$ of finite groups' elements commuting exactly with three elements .....	5
<b>Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K.</b> The structure of integrals of the second Loewner – Kufarev differential equation in a particular case .....	12
<b>Krutikov V.N., Samoylenko N.S.</b> On the convergence rate of the subgradient method with metric variation and its applications in neural network approximation schemes .....	22
<b>Timoshenko E.A.</b> The Grothendieck group $K_0$ of an arbitrary csp-ring .....	38
<b>Urinov A.K., Ergashev T.G.</b> Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to the finding of fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with singular coefficients.....	45

### MECHANICS

<b>Agafontsev M.V., Anufriev I.S., Kopyev E.P., Shadrin E.Y., Loboda E.L., Lutsenko A.V.</b> Investigation of characteristics of turbulent flame with effect of low energy fluctuations .....	57
<b>Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikova E.V., Vyachkina E.A., Gileva A.E.</b> Mathematical modeling of static deformation of a layered construction with incompressible layers .....	72
<b>Danilov P.A., Khrustalev A.P., Vorozhtsov A.B., Zhukov I.A., Promakhov V.V., Khmeleva M.G., Pikushchak E.V., Kvetinskaya A.V.</b> Analysis of the effect of external physical fields on the casting of light alloys .....	84
<b>Matvienko O.V.</b> Investigation of the stabilized flow of pseudoplastic liquid, described by the Sisko model, in the cylindrical tube .....	99
<b>Khasanov M.K.</b> Mathematical model of hydrogen sulfide injection into a natural reservoir accompanied by its hydrate formation .....	113
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	124

## МАТЕМАТИКА

УДК 512.543

DOI 10.17223/19988621/55/1

MSC 20D99

А.И. Забарина, Е.А. Фомина

**О МНОЖЕСТВЕ  $K_3(G)$  ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП,  
КОММУТИРУЮЩИХ РОВНО С ТРЕМЯ ЭЛЕМЕНТАМИ ГРУППЫ**

Рассмотрены свойства множества  $K_3(G)$ , состоящего из элементов третьего порядка, каждый из которых перестановочен ровно с тремя элементами группы. В частности, из полученных результатов следует, что все инволюции конечной простой неабелевой группы  $G$  с непустым множеством  $K_3(G)$  образуют один класс сопряжённых элементов (этот факт был сформулирован в [3] в качестве упражнения)

**Ключевые слова:** группа, инволюция, центр группы, нормальный делитель.

Как известно, при доказательстве классификационной теоремы конечных простых групп важную роль сыграло исследование свойств централизатора инволюций [1, с. 10]

В [2] изучены некоторые свойства конечных групп, каждая инволюция которых обладает двухэлементным централизатором.

В настоящей работе рассматриваются конечные группы, в которых существуют элементы порядка 3, перестановочные ровно с тремя элементами группы. Множество всех таких элементов группы  $G$  обозначено  $K_3(G)$ .

В частности показано, что в каждой конечной простой неабелевой группе с непустым множеством  $K_3(G)$  все инволюции образуют один класс сопряженных элементов [3].

**1. О мощности множества  $K_3(G)$** 

Пусть  $G$  – произвольная конечная мультипликативная группа,  $|G| = n$ .

Обозначим через  $K_3(G)$  множество  $\{x \in G \mid x \neq e, |C_G(x)| = 3\}$ .

Другими словами, элемент  $x \neq e$  принадлежит  $K_3(G)$  тогда и только тогда, когда он перестановочен ровно с тремя элементами группы  $G$ . Так как централизатор  $C_G(x)$  является подгруппой группы  $G$ , то

$$K_3(G) = \{x \in G \mid C_G(x) = \{e, x, x^2\}\}.$$

Очевидно, что для абелевой группы  $G$  множество  $K_3(G)$  не пусто в точности тогда, когда  $G$  – циклическая группа третьего порядка. Поэтому, в дальнейшем, будем считать, что группа  $G$  неабелева.

Из определения  $K_3(G)$  непосредственно вытекает, что:

А) если  $x \in K_3(G)$ , то порядок этого элемента равен трём:  $o(x) = 3$ ;

В) если  $x \in K_3(G)$ , то  $x^2 \in K_3(G)$ .

Рассмотрим некоторые свойства множества  $K_3(G)$ .

**Предложение 1.** Если  $K_3(G)$  не пусто, то  $|G|$  делится на 3 и не делится на 9.

*Доказательство.* Справедливость утверждения вытекает непосредственно из теоремы Силова [4, с. 99] и свойства коммутативности группы порядка  $p^2$  [5, с. 63]. #

**Предложение 2.** Множество  $K_3(G)$  является инвариантным подмножеством  $G$ , то есть если  $x \in K_3(G)$ , то  $x^g \in K_3(G)$  для каждого  $g \in G$ .

*Доказательство.* Воспользуемся известным равенством:

$$\forall_G x \forall_{Gg} C_G(x^g) = (C_G(x))^g.$$

Пусть  $x \in K_3(G)$ ; Тогда  $a \in C_G(x^g) \Leftrightarrow a \in \{e, x, x^2\}^g \Leftrightarrow a \in \{e, x^g, (x^g)^2\}$ . #

**Предложение 3.** Пусть  $K_3(G) \neq \emptyset$ ,  $x \in G$  и  $o(x) = 3$ . Тогда  $x \in K_3(G)$ .

*Доказательство.* Согласно предложению 1,  $\langle x \rangle$  – силовская 3-подгруппа группы  $G$ . Из теоремы Силова следует, что для каждого  $k \in K_3(G)$  подгруппы  $\langle x \rangle$  и  $\langle k \rangle$  сопряжены в  $G$ . Осталось применить предложение 2. #

**Предложение 4.** Пусть  $|G| = n$ ;  $K_3(G) \neq \emptyset$ . Тогда  $|K_3(G)| \in \left\{ \frac{n}{3}; \frac{2n}{3} \right\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $x \in K_3(G)$ . Так как  $|G| = |C_G(x)| \cdot |x^G| = 3 \cdot |x^G| = n$ , то  $|x^G| = \frac{n}{3}$ . Заметим, что  $e \notin K_3(G)$ .

Следовательно, существует не более двух классов сопряжённых друг другу элементов группы  $G$ , каждый из которых (в силу предложения 2) является элементом  $K_3(G)$ . Таким образом, в силу непустоты множества  $K_3(G)$ , получаем,

$$\text{что } |K_3(G)| \in \left\{ \frac{n}{3}; \frac{2n}{3} \right\}. \#$$

**Лемма 5.** Пусть  $a, g \in G$ ,  $o(a) = 3$ ;  $g^{-1}ag = a^2$ . Тогда  $o(g):2$ .

*Доказательство.* Пусть  $o(g) = 2k + 1$ . Так как по условию  $ag = ga^2$ , то

$$(ag)^2 = ga^2 \cdot ag = g^2.$$

Следовательно,

$$o((ag)^2) = o(g^2) = \frac{2k+1}{(2k+1; 2)} = 2k+1.$$

Отсюда,

$$((ag)^2)^{2k+1} = (ag)^{4k+2} = e. \quad (*)$$

С другой стороны,

$$(ag)^{2k+1} = ((ag)^2)^k \cdot ga^2 = (g^2)^k \cdot ga^2 = a^2.$$

Следовательно,

$$(ag)^{4k+2} = a.$$

Получили противоречие с (\*). Значит,  $o(g):2$ . #

**Предложение 6.** 1) Пусть  $o(a) = 3$  и  $g^{-1}ag = a^2$ . Тогда  $|G|:6$ .

2) Если порядок  $G$  нечётен, то либо  $K_3(G)$  пусто, либо  $|K_3(G)| = \frac{2|G|}{3}$ .

*Доказательство.* Справедливость утверждения 1) непосредственно вытекает из леммы 5.

2) Пусть  $|G| = 2m + 1$  и  $K_3(G) \neq \emptyset$ . Тогда  $\forall a \in K_3(G) \forall_{Gg} (a^g \neq a^2)$ , то есть в  $G$  существует ровно 2 класса сопряжённых элементов множества  $K_3(G)$ . Согласно

предложению 4,  $|K_3(G)| = \frac{2|G|}{3}$ . #

Рассмотрим несколько примеров множеств  $K_3(G)$  в различных группах.

1)  $S_n, n \geq 2$ .

Если  $n \geq 6$ , то  $|S_n| \geq 9$ . Согласно предложению 1, для указанных групп  $K_3(S_n) = \emptyset$ .

Пусть  $n = 3$ . Так как в  $S_n$  каждые две подстановки сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое циклическое строение [5, с. 66], то

$$[(123)]^{S_3} = \{(123), (132)\}.$$

Следовательно,  $|C_{S_3}(123)| = \frac{6}{2} = 3$ .

Таким образом,  $K_3(S_3) = \{(123), (132)\}, |K_3(S_3)| = \frac{|S_3|}{3}$ .

Рассмотрим группы  $S_4$  и  $S_5$ . Очевидно, множество  $X$  всех элементов третьего порядка в каждой из них есть множество всех трёхчленных циклов. Для  $n = 4$   $|X| = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3} = 8$ . Каждые два элемента из множества  $X$  сопряжены. Следовательно,

$\forall a \in X |C_{S_4}(a)| = 3$ . Таким образом,  $K_3(S_4) = X, |K_3(S_4)| = \frac{|S_4|}{3}$ . Аналогично, в  $S_5$

$\forall a \in X |C_{S_5}(a)| = 6$ , то есть  $K_3(S_5) = \emptyset$ .

2) Покажем, что  $K_3(A_n) \neq \emptyset \Leftrightarrow n \in \{3, 4, 5\}$

Так как при  $n > 5$   $|A_n| \geq 9$ , то согласно предложению 1, для соответствующих групп  $K_3(A_n) = \emptyset$ .

При  $n = 3$  имеем

$$K_3(A_3) = K_3(S_3), \text{ так как } A_3 - \text{абелева; } |K_3(A_3)| = \frac{2|A_3|}{3}.$$

При  $n = 4$  имеем

$$K_3(S_4) \subset A_4 \text{ и, следовательно, } K_3(A_4) = K_3(S_4); |K_3(A_4)| = \frac{2|A_4|}{3}.$$

Рассмотрим, наконец,  $A_5$ . Пусть  $a = (\alpha\beta\gamma)$  – произвольный трёхчленный цикл. Очевидно,  $C_{A_5}(a) = \{e, a, a^2, c, ac, a^2c\}$ , где  $c$  – двучленный цикл, не пересекающийся с  $a$ . Так как  $c, ac, a^2c$  – нечётные подстановки, то  $C_{A_5}(a) = \{e, a, a^2\}$ . Следовательно,  $K_3(A_5)$  – множество всех трёхчленных циклов, то есть  $|K_3(A_5)| = 20 = \frac{|A_5|}{3}$ .

3) Рассмотрим диэдральную группу  $D_{2n}$ , где

$$D_{2n} = \{(a, \varepsilon) \mid a \in C_n, \varepsilon = \pm 1\}, n \geq 3 \text{ [6, с. 31]}$$

и  $(a_1, \varepsilon_1) \cdot (a_2, \varepsilon_2) = (a_1 a_2^{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 \varepsilon_2)$ .

Пусть  $X = \{(a, \varepsilon) \mid o((a, \varepsilon)) = 3\}$ . Легко видеть, что  $(a, \varepsilon) \in X \Leftrightarrow o(a) = 3$  и  $\varepsilon = 1$ . Однако

$$\forall g \in C_n (g, 1) \cdot (a, 1) = (ga, 1) = (ag, 1) = (a, 1) \cdot (g, 1).$$

Отсюда следует, что в каждой группе  $D_{2n}, n \geq 4$ , множество  $K_3(D_{2n})$  пусто. Заметим, что  $D_6 \cong S_3$ .

4) Пусть  $G$  – конечная нильпотентная группа,  $|G| = 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ,  $k > 1$ . Тогда согласно теореме Бернсайда – Виланда [4, с. 155],

$$G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k,$$

где  $H_i$  – соответствующие силовские подгруппы.

а) Если  $\alpha_1 > 1$ , то согласно предложению 1,  $K_3(G) = \emptyset$ .

б) Пусть  $\alpha_1 = 1$ ,  $x \in G$ ,  $o(x) = 3$ . Так как в каждой нильпотентной группе любая нетривиальная нормальная подгруппа имеет нетривиальное пересечение с центром [4, с. 148], то  $H_1 \subset Z(G)$ . Так как  $Z(G) \cap H_2 \neq \{e\}$ , то  $H_1 \neq Z(G)$ . Следовательно,  $x \notin K_3(G)$ .

Таким образом, в каждой конечной нильпотентной группе  $G$ , отличной от циклической группы третьего порядка множество  $K_3(G)$  является пустым.

5) Приведём пример семейства разрешимых групп, в каждой из которых множество  $K_3(G)$  не пусто.

Пусть  $q$  – простое число,  $q \equiv 1 \pmod{3}$ . Рассмотрим группу  $\langle \mathbf{Z}_q^*, \cdot \rangle$ . Так как  $|\mathbf{Z}_q^*| = q - 1$ , то существует элемент  $r' \in \mathbf{Z}_q^*$ , такой, что  $o(r') = 3$ . Следовательно, существует элемент  $r \in \mathbf{N}$ , такой, что

$$r^3 \equiv 1 \pmod{q} \wedge r \not\equiv 1 \pmod{q} \quad (1)$$

Пусть  $G = \{a^u b^v \mid u \in \{0, 1, 2\}, v \in \overline{0, q-1}\}$ . Воспользуемся следующей бинарной алгебраической операцией на  $G$  [5, с. 61]:

$$a^{u_1} b^{v_1} a^{u_2} b^{v_2} = a^{u_1+u_2} b^{(v_1 r^{u_2} + v_2)}. \quad (2)$$

Непосредственно проверяется, что  $\langle G, \cdot \rangle$  – неабелева группа порядка  $3q$ ; в которой

$$e = a^0 b^0, \quad (a^u b^v)^{-1} = a^{3-u} b^{-(r^{3-u} v)}$$

Покажем, что в построенной группе  $|K_3(G)| = \frac{2 \cdot 3q}{3} = 2q$ . Согласно предложению 6, достаточно убедиться, что  $a \in K_3(G)$ . Пусть

$$a \cdot a^u b^v = a^u b^v \cdot a.$$

Отсюда

$$a^{u+1} b^v = a^{u+1} b^{vr},$$

то есть

$$v(r-1) \dot{=} q.$$

Так как  $r \not\equiv 1 \pmod{q}$ , то  $v = 0$ .

Следовательно,  $C_G(a) = \{e, a, a^2\}$ , то есть  $a \in K_3(G)$ .

Таким образом,  $G$  – разрешимая группа, не являющаяся нильпотентной. Так, например, пусть  $q = 7$ . Тогда  $r = 2$ ,  $|G| = 21$ .

$$G = \{a^u b^v \mid u \in \{0, 1, 2\}, v \in \overline{0; 6}\}.$$

$$a^{u_1} b^{v_1} \cdot a^{u_2} b^{v_2} = a^{u_1+u_2} b^{(v_1 \cdot 2^{u_2} + v_2)}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$K_3(G) = \{ab^i \mid i \in \overline{0; 6}\} \cup \{a^2 b^i \mid i \in \overline{0; 6}\}.$$

## 2. О сопряжённости инволюций в конечных простых группах с непустым множеством $K_3(G)$

Обратимся теперь к простым группам. Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 7.** Пусть  $G$  – конечная простая группа,  $|G| = n$ ,  $K_3(G) \neq \emptyset$ . Тогда все инволюции  $G$  образуют один класс сопряжённых элементов.

Постановка задачи взята в [3, с. 81].

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение, доказанное в [3, с. 80]:

Пусть  $G$  – конечная простая группа и  $A$  – подгруппа нечётного порядка, такая, что:

$$1) \forall g \in G \setminus N_G(A) (A \cap A^g = \{e\});$$

2)  $N_G(A) = (A \rtimes \langle i^* \rangle) \times B$ , где  $(|A|, |B|) = 1$ ,  $i^*$  – инволюция, инвертирующая каждый элемент из  $A$  (говорят, что элемент  $x$  группы  $G$  *инвертирует* элемент  $y$ , если  $x^{-1}yx = y^{-1}$ ).

Тогда каждая инволюция  $i \in G$  сопряжена с некоторой инволюцией из множества  $i^*B$ .

Приведём также формулировку теоремы Бернсайда [5, с. 227].

**Теорема 8** (Бернсайда). Если силовская подгруппа  $P$  конечной группы  $G$  содержится в центре своего нормализатора, то группа  $G$  обладает таким нормальным делителем  $H$ , что в качестве представителей смежных классов по  $H$  можно выбрать элементы группы  $P$ .

Обратимся к доказательству теоремы 7.

**Доказательство** (теоремы 7). Пусть  $k \in K_3(G)$  и  $A = \langle k \rangle$ . Убедимся, что  $A$  удовлетворяет 1) и 2), причём подгруппа  $B$  из равенства 2) оказывается единичной.

а) Так как  $o(k) = 3$ , то

$$\forall g \in G (g \notin N_G(A) \Rightarrow g^{-1}Ag \cap A = \{e\}),$$

то есть условие 1) выполнено.

b1) Пусть  $H = N_G(A)$ . Докажем, что  $H \neq A$ .

Действительно, согласно предложению 1, группа  $A$  является силовской подгруппой группы  $G$ . Если  $H = A$ , то  $A$  содержится в центре своего нормализатора.

Согласно теореме 8, группа  $G$  обладает нормальным делителем порядка  $\frac{n}{3}$ , что

противоречит свойству простоты группы  $G$ .

b2) Покажем, что  $|H| \vdots 2$  и каждая инволюция из  $H$  инвертирует все элементы из  $A$ .

Пусть  $g \in H \setminus A$ . Тогда, согласно определению  $K_3(G)$ ,

$$gkg^{-1} = k^{-1}, \quad g^{-1}k^2g = (k^2)^{-1}. \quad (3)$$

Согласно лемме 5,  $|H| \vdots 2$ . Кроме того, согласно (3) каждая инволюция  $i$  из  $H$  инвертирует все элементы  $A$ . Пусть  $i^*$  – одна из них.

b3) Пусть  $L = A \cdot \langle i^* \rangle$ . Покажем, что  $L = A \rtimes \langle i^* \rangle$ .

Так как  $L = A \cdot \langle i^* \rangle = \langle i^* \rangle \cdot A$ , то  $L < H$ . Так как  $A \triangleleft L$ ,  $A \cap \langle i^* \rangle = \{e\}$ , то  $L = A \rtimes \langle i^* \rangle$ ,  $|L| = 6$ .

Следовательно, из некоммутативности этой группы получаем  $L \cong S_3$ . Согласно теореме Гёльдера [7, с. 82],  $L$  – совершенная группа.

б4) Убедимся, что  $H = L \times C_H(L)$ .

Согласно свойству совершенных групп [7, с. 268], достаточно показать, что  $L \triangleleft H$ .

Заметим, что множество всех инволюций группы  $H$  есть  $\{i^*, i^*k, i^*k^2\}$ . Действительно, согласно (3) все указанные элементы являются инволюциями группы  $H$ .

Пусть  $i \in H$ ,  $o(i) = 2$ . Тогда из (3)

$$iki = i^*ki^*,$$

то есть

$$(i^*i)k = k(i^*i),$$

отсюда  $i^*i \in A$ , то есть  $i \in \{i^*, i^*k, i^*k^2\}$ .

Учитывая, наконец, тот факт, что  $A \triangleleft H$ , получаем

$$\forall_H h \forall_L l (h^{-1}lh = h^{-1}a(i^*)^m h = a_1 i_1),$$

где  $a_1 \in A$ ,  $i_1 \in L$ . Таким образом,  $L \triangleleft H$ .

б5) Покажем, что  $C_H(L) = \{e\}$ .

Пусть  $x \in C_H(L)$ . Тогда  $xk = kx$  и  $xi^* = i^*x$ . Следовательно,  $x = e$ . Таким образом,

$$N_G(A) = (A \rtimes \langle i^* \rangle) \times B, \text{ где } |B| = 1.$$

Тем самым равенство 2) доказано и, следовательно, каждая инволюция  $i$  из  $G$  сопряжена с инволюцией  $i^*$ . #

Так как  $K_3(A_5) \neq \emptyset$ , то все инволюции  $A_5$  образуют один класс сопряжённых элементов.

Порядки всех спорадических простых групп, за исключением группы Янко  $J_1$ , делятся на  $3^2$  [1, с. 145]. Обратимся к  $J_1$ . Согласно её строению [1, с. 93], в ней существует инволюция  $i$ , перестановочная с некоторым элементом  $c$ , таким что  $o(c) = 3$ . Следовательно, в  $J_1$  существует элемент порядка 6, то есть  $K_3(J_1) = \emptyset$ . Таким образом, в каждой спорадической группе  $G$  множество  $K_3(G)$  пусто.

Авторы благодарят за помощь в написании работы доктора физ.-мат. наук В. А. Белоногова, одного из авторов книг [3, 6].

Авторы искренне благодарны рецензенту за тщательно проделанную работу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горнштейн Д. Конечные простые группы : введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
2. Забарина А.И., Гусельникова У.А., Фомина Е.А. О коммутирующих элементах группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 27–32. DOI 10.17223/19988621/38/3.
3. Белоногов В.А., Фомин А.Н. Матричные представления в теории конечных групп. М.: Наука, 1976. 126 с.
4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
5. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.
6. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 240 с.
7. Курош А.Г. Теория групп. М.: Физматлит, 1967. 808 с.

Статья поступила 06.03.2018 г.

Zabarina A. I., Fomina E. A. (2018) ON THE SET  $K_3(G)$  OF FINITE GROUPS' ELEMENTS COMMUTING EXACTLY WITH THREE ELEMENTS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 5–11

DOI 10.17223/19988621/55/1

Keywords: group, involution, center of a group, normal subgroup.

Let  $G$  be an arbitrary finite multiplicative group,  $|G| = n$ . We define the set  $K_3(G)$  as follows:

$$K_3(G) = \{x \in G \mid |C_G(x)| = 3\} = \{x \in G \mid C_G(x) = \{e, x, x^2\}\}.$$

It follows from the definition of  $K_3(G)$  that

A) if  $x \in K_3(G)$ , then the order of  $x$  is 3 ( $o(x) = 3$ );

B) if  $x \in K_3(G)$ , then  $x^2 \in K_3(G)$ .

The following properties of the set  $K_3(G)$  have been proved.

**Proposition 1.** If  $K_3(G) \neq \emptyset$ , then  $|G| \vdots 3$  and  $|G| \nmid 9$ .

**Proposition 2.** If  $x \in K_3(G)$ , then  $x^g \in K_3(G)$  for each  $g \in G$ .

**Proposition 3.** Let  $K_3(G) \neq \emptyset$ ,  $x \in G$  and  $o(x) = 3$ . Then  $x \in K_3(G)$ .

**Proposition 4.** Let  $|G| = n$ ;  $K_3(G) \neq \emptyset$ . Then  $|K_3(G)| \in \left\{ \frac{n}{3}, \frac{2n}{3} \right\}$ .

**Lemma 5.** Let  $a, g \in G$ ,  $o(a) = 3$ ;  $g^{-1}ag = a^2$ . Then  $o(g) \vdots 2$ .

**Proposition 6.** 1) Let  $o(a) = 3$  and  $g^{-1}ag = a^2$ . Then  $|G| \vdots 6$ .

2) If  $|G| = 2k + 1$ , then  $K_3(G) = \emptyset$  or  $|K_3(G)| = \frac{2|G|}{3}$ .

**Theorem 7.** Let  $G$  be a finite simple group,  $|G| = n$ ,  $K_3(G) \neq \emptyset$ . Then all involutions of the group  $G$  form a class of conjugate elements.

AMS Mathematical Subject Classification: 20D99

ZABARINA Anna Ivanovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aizabarina@gmail.com

FOMINA Elena Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ef254@mail.ru

#### REFERENCES

1. Gorenstein D. (1982) *Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification*. New York: Springer Science & Business Media. 333 p.
2. Zabarina A.I., Gusel'nikova U.A., Fomina E.A. (2015) O kommutiruyushchikh elementakh gruppy [On commuting elements of a group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp. 27–32. DOI: 10.17223/19988621/38/3.
3. Belonogov V.A., Fomin A.N. (1976) *Matrichnye predstavleniya v teorii konechnykh grupp* [Matrix representations in the theory of finite groups]. Moscow: Nauka. 126 p.
4. Kargapolov M.I., Merzlyakov Y.I. (1982) *Osnovy teorii grupp* [Foundations of the group theory]. Moscow: Nauka. 288 p.
5. Hall M. (1959) *The Theory of Groups*. New York: The Macmillan Company. 434 p.
6. Belonogov V.A. (2000) *Zadachnik po teorii grupp* [Problem book on the group theory]. Moscow: Nauka. 240 p.
7. Kurosh A.G. (1960) *The Theory of Groups*. New York: Chelsea Publishing Company. 272 p.

**О.В. Задорожная, В.К. Кочетков**

**СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛОВ ВТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ**

В геометрической теории функций комплексного переменного наряду с различными общими проблемами рассматриваются многие частные, являющиеся предметом исследования в настоящее время. Авторы исследуют специальные дифференциальные уравнения, результаты сформулированы в виде теорем, утверждений, лемм, в которых отмечены структурные составляющие интегралов рассматриваемых дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** *геометрическая теория функций комплексного переменного, дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева.*

**1. Классы функций. Формула И.Е. Базилевича. Леммы**

**1.1. Классы функций**

Введем следующие классы функций:

$C$  – множество функций  $p(z), p(0) \neq 0$ , регулярных в  $E = \{z : |z| < 1\}$  и отображающих единичный круг  $E$  на область, расположенную в правой полуплоскости, то есть удовлетворяющих условию  $\text{Re}[p(z)] > 0$  в  $E$ ;

$P$  – множество функций  $p(z) \in C$  и удовлетворяющих условию  $p(0) = 1$ ;

$C(T)$  – множество функций  $p(z, t)$ , регулярных в  $E$ , непрерывных в  $T = \{t : 0 \leq t < +\infty\}$  и принадлежащих классу  $C$  при каждом фиксированном  $t \in T$ ;

$S$  – множество функций  $f(z), f(0) = 0, f'(0) = 1$ , регулярных и однолистных в  $E$ ;

$S^*$  – множество функций  $f(z)$  класса  $S$ , отображающих круг  $E$  на звездообразную область, являющихся решением дифференциального уравнения

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = p(z) \in P$$

и представимых в  $E$  в виде

$$f(z) = ze^{\int_0^z (p(z)-1) \frac{dz}{z}};$$

$S^0$  – множество функций  $\varphi(z) \in S$ , отображающих круг  $E$  на выпуклую область, являющихся решением дифференциального уравнения

$$1 + \frac{z\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = p(z) \in P$$

и представимых в  $E$  в виде

$$\varphi(z) = \int_0^z e^{\int_0^z (p(z)-1) \frac{dz}{z}} dz.$$

Заметим, что функции  $f(z) \in S^*$  и функции  $\varphi(z) \in S^0$  связаны равенством  $f(z) = z\varphi'(z)$ .

В теории однолистных функций хорошо известно первое

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t)p(f,t) \tag{1.1}$$

и второе

$$\frac{z \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}}{\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}} = p(z,t) \tag{1.2}$$

дифференциальные уравнения Левнера – Куфарева, где

$$p(s,t) \in C(T), s \in E, t \in T,$$

обобщающие соответствующее уравнение Левнера [1 – 4].

### 1.2. Формула И.Е. Базилевича

При рассмотрении первого дифференциального уравнения Левнера – Куфарева (1.1) в частном случае И.Е. Базилевич вывел формулу, которую оформим в виде теоремы.

**Теорема 1:** Пусть функции  $p_1(z), p_2(z) \in C$ .

Тогда функция

$$f(z) = (\alpha b(z)) \frac{1}{p_2(0)}, \tag{1.3}$$

где

$$\alpha = \frac{p_2(0)}{p_1(0)}, \quad b(z) = \int_0^z p_1(z) z^{p_2(0)-1} v(z) dz, \tag{1.4}$$

$$v(z) = e^{\int_0^z (p_2(z)-p_2(0)) \frac{dz}{z}}, \tag{1.5}$$

регулярна и однолистка в  $E$ , если под  $f(z)$  понимать ту ветвь многозначной функции, которая имеет разложение

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$$

Функция  $f(z)$  в (1.3), при обозначениях (1.4), (1.5), включает известные функции: звездообразные, выпуклые, спиралеобразные, почти-выпуклые, класс функций с ограниченным вращением. Напомним, что данную формулу И.Е. Базилевич получил в результате применения первой формулы Левнера – Куфарева (1.1) [1 – 4].

## 1.3. Леммы

Сформулируем и докажем следующую лемму:

**Лемма 1.** Пусть функции  $p_1(z), p_2(z) \in C$ .

Тогда имеют место эквивалентные соотношения

$$a_1(z) + ta_2(z) \neq 0, \quad t + \frac{a_1(z)}{a_2(z)} \neq 0, \quad t \frac{a_2(z)}{a_1(z)} + 1 \neq 0 \quad (1.6)$$

в  $E$  при любом  $t \geq 0$ , где

$$a_2(z) = z^{p_2(0)}v(z). \quad (1.7)$$

Функция  $v(z)$  имеет вид (1.5), а  $a_1(z)$  определяется по формуле

$$a_1(z) = \int p_1(z)z^{-1}a_2(z)dz = \int p_1(z)z^{p_2(0)-1}v(z)dz = b(z). \quad (1.8)$$

**Доказательство.** В отличие от И.Е. Базилевича к функции И.Е. Базилевича (1.3) можно прийти при применении второго уравнения Левнера – Куфарева. Действительно, относительно функции

$$F(z, t) = (a_1(z) + ta_2(z))_{p_2(0)}^{-1} \quad (1.9)$$

составим отношение вида

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = \frac{za'_1(z)}{a_2(z)} + t \frac{za'_2(z)}{a_2(z)} \quad (1.10)$$

или 
$$\frac{zF'_z}{F'_t} = p_1(z) + tp_2(z), \quad p_1(z), p_2(z) \in C, \quad (1.11)$$

где 
$$p_1(z) = \frac{za'_1(z)}{a_2(z)}, \quad (1.12)$$

$$p_2(z) = \frac{za'_2(z)}{a_2(z)}. \quad (1.13)$$

Из (1.12), (1.13) находим  $a_2(z)$  вида (1.7) и  $a_1(z)$  в виде (1.8) при обозначениях (1.5), (1.7). Дифференциальное уравнение (1.10) или (1.11) является дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева второго типа вида (1.2).

Функция

$$\phi(z, t) = \frac{F(z, t)}{F'_z(0, t)} \in S$$

при каждом  $a_2(z)$ , при этом  $\phi(z, \infty) \in S^*$ , а  $\phi(z, 0)$  является функцией И.Е. Базилевича (1.3) – (1.5). Из регулярности и однолиственности в  $E$  при каждом  $a_2(z)$  функций  $\phi(z, t)$  и  $F(z, t)$ ,  $t \in [0, +\infty)$  в (1.9), с учетом (1.10) – (1.13), (1.5) – (1.8) следуют неравенства (1.6). Лемма 1 доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Неравенства (1.6) можно установить другими способами без рассмотрения второго дифференциального уравнения (1.2) в виде (1.11).

**Следствие леммы 1.** Пусть  $p_1(z), p_2(z) \in C$ . Тогда в  $E$

$$A(z) = \frac{a_1(z)}{a_2(z)} = \frac{\int_0^z p_1(z) z^{p_2(0)-1} v(z) dz}{z^{p_2(0)} v(z)} \neq 0.$$

Пусть  $k_1(z), k_2(z), k(z) = k_1(z) \cdot k_2(z)$  регулярные в  $E$  функции и таковы, что

$$A(z) = k(z) = k_1(z) \cdot k_2(z).$$

Очевидно, что существует множество пар  $h_1(z), h_2(z), h(z) = h_1(z) \cdot h_2(z)$ , таковых, что выполняется соотношение

$$k(z) = k_1(z) \cdot k_2(z) = h(z) = h_1(z) \cdot h_2(z) = A(z).$$

В дальнейшем считаем, что  $k_1(z), k_2(z) \in C$  и таковы, что выполняется вышеуказанное соотношение. В этом случае при фиксированном  $k_1(z)$  имеем

$$k_2(z) = \frac{A(z)}{k_1(z)}.$$

**Лемма 2.** Пусть  $k_1(z), k_2(z) \in C$ ,  $k(z) = k_1(z) \cdot k_2(z)$ . Тогда функции

$$e_1(z, t) = \frac{k_1(z)t + k_2(z)}{t + k(z)}; \tag{1.14}$$

$$e_2(z, t) = \frac{k_1(z)t^2 + k_2(z)t + k_1(z) + k_2(z)}{t + k(z)} \tag{1.15}$$

принадлежат классу  $C(t)$  в  $E$  при всех  $t \geq 0$ .

**Доказательство.** Умножив числитель и знаменатель в правой части (1.14), (1.15) на  $t + \bar{k}$ , непосредственно убедимся, что  $\text{Re}[e_i(z, t)] > 0$  в  $E$  при любых  $t \geq 0$ ,  $i=1, 2$ . Например, в случае  $e_1(z, t)$  в (1.14) имеем

$$e_1(z, t) = \frac{k_1 t^2 + t(k_2 + |k_1|^2 \cdot k_2) + k_1 |k_2|^2}{|t + k(z)|^2}.$$

Откуда следует, что  $\text{Re}[e_1(z, t)] > 0$  в  $E$  при каждом  $t \geq 0$ , что означает, по определению, что  $e_1(z, t) \in C(T)$ . Лемма 2 доказана.

**З а м е ч а н и е 2.** Из (1.10) – (1.13) можно видеть, что в случае линейных правых частей (1.10), (1.11) установить соответствие между ними не представляет проблемы. Однако при рассмотрении в следующем параграфе нелинейных правых частей задача построения правой части с положительной вещественной частью в общем случае представляет трудность. Применение вышеизложенных лемм способствует облегчению проблем.

2. Уравнение вида  $\frac{zF'_z}{F'_t} = \frac{b_2(z)t^2 + b_1(z)t + b_0(z)}{d_1(z)t + d_0(z)}$  в пространстве  $\mathbb{C}$ .

Второе дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = p_2(z)t + \frac{p_1(z)t + p_0(z)}{t + \frac{p_1(z)}{p_0(z)}}, z \in E, t \in T = [0, \infty),$$

с основной нелинейной составляющей вида  $g(z, t) = e^{ct} \cdot (at + b)$

**Теорема 2.** Пусть

1)  $p_0 = p_0(z)$ ,  $p_1 = p_1(z)$ ,  $p_2 = p_2(z)$  принадлежат классу  $C$ ;

2) функция  $c=c(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{zc'(z)}{c(z)} = p_2(z) \in C \quad (2.1)$$

и представима в  $E$  в виде

$$c(z) = z^{p_2(0)} \cdot e^{\int_0^z (p_2(z) - p_2(0)) \frac{dz}{z}}, z \in E; \quad (2.2)$$

3) функция  $a(z)$  представима в  $E$  в виде

$$a(z) = c(z) \cdot e^{\int_0^z c(z) \cdot p_1(z) \frac{dz}{z}}; \quad (2.3)$$

4) функция  $b(z)$  представима в  $E$  в виде

$$b(z) = \int_0^z c(z) \cdot a(z) \cdot p_0(z) \frac{dz}{z}; \quad (2.4)$$

5) функции  $p_0(z)$ ,  $p_1(z)$ ,  $p_2(z)$  удовлетворяют соотношению

$$z \left( \frac{p_1}{p_0} \right)' + \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{za'}{a} - \frac{1}{c} \left( \frac{za'}{a} - \frac{zc'}{c} \right) = c \cdot p_0. \quad (2.5)$$

Тогда функция

$$F(z, t) = (g(z, t))^{2p_2(0)} = (e^{ct} \cdot (at + b))^{2p_2(0)} = c_1(t)z + c_2(t)z^2 + \dots \quad (2.6)$$

удовлетворяет уравнению Левнера – Куфарева вида

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = p_2(z)t + \frac{p_1(z)t + p_0(z)}{t + \frac{p_1(z)}{p_0(z)}}, z \in E, t \in T = [0, \infty). \quad (2.7)$$

**Доказательство.** Применительно к функции  $F(z, t)$  в (2.6) составим отношение

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = \frac{z(g(z, t))'_z}{(g(z, t))'_t} = \frac{zac't^2 + t(zbc' + za') + zb'}{act + bc + a}. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.1) является уравнением с разделяющимися переменными, решением которого является функция  $c(z)$  вида (2.2). Делением числителя на знаменатель

в правой части (2.8), используя (2.1) и полагая

$$\frac{bc+a}{ac} = \frac{p_1}{p_0}, \tag{2.9}$$

$$\frac{zbc' + za' - p_2(bc+a)}{ac} = p_1, \tag{2.10}$$

$$\frac{zb'}{ac} = p_0, \tag{2.11}$$

перепишем выражение в (8) в виде (2.7).

Так как функция  $p(z,t)$  в правой части (2.7) принадлежит классу  $C(t)$ ,  $z \in E, t \in T = [0, \infty)$ , то дифференциальное уравнение (2.7) является вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Из (2.9) следует

$$bc+a = \frac{p_1}{p_0} ac,$$

откуда 
$$b = \frac{p_1}{p_2} a - \frac{a}{c}. \tag{2.12}$$

Дифференцируя выражение (2.12), получим

$$b' = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)' a + \frac{p_1}{p_2} a' - \frac{a'}{c} + \frac{ac'}{c^2}. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.9) и (2.12) в (2.10), получим дифференциальное уравнение относительно  $a=a(z)$ , интегрируя которое, получим (2.3).

Из (2.11) имеем

$$b' = ac \frac{p_0}{z}. \tag{2.14}$$

Выражения в (2.13) и (2.14) совместимы при выполнении соотношения (2.5).

При выполнении равенства (2.5), из (2.14) имеем

$$b(z) = \int_0^z a(z)c(z) \frac{p_0(z)}{z} dz.$$

Последнее выражение совпадает с (2.4). Теорема 2 доказана.

**З а м е ч а н и е.** При каждом фиксированном  $t \in [0, \infty)$  функция  $F(z,t)$  в (2.6) будет являться функцией переменной  $z \in E$ . В ситуации (2.6) ветвь степени определяется фиксированием коэффициента  $c_1(z)$  при  $z$  в разложении функции в ряд Тейлора.

3. Уравнение вида  $\frac{zF'_z}{F'_t} = \frac{b_2(z)t^2 + b_1(z)t + b_0(z)}{d_1(z)t + d_0(z)}$  в пространстве  $\mathbb{C}$ .

Второе дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = p_2(z)t + \frac{p_1(z)t + p_0(z)}{t + \frac{p_1(z)}{p_2(z)}}, z \in E, t \in T = [0, \infty), \text{ с основной}$$

нелинейной составляющей вида  $g(z, t) = a_2(z)t^2 + a_1(z)t + a_0(z)$

**Теорема 3.** Пусть

1)  $p_2(z), p_1(z) \in C$ ;

2)  $v(z) = e^{\int \frac{p_2(z) - p_2(0)}{z} dz}$ ;

3)  $k(z) = \int_0^z p_1(z) \cdot z^{p_2(0)-1} v(z) dz$ ;

4)  $a_2(z) = z^{2p_2(0)} \cdot v^2(z)$ ;

5)  $p_0(z) = \frac{k(z)}{z^{p_2(z)} v(z) p_1(z)} \in C$ .

Тогда функция

$$F(z, t) = \left\{ a_2(z)t^2 + a_1(z)t + a_0(z) \right\}^{\frac{1}{2p_2(0)}} = c_1(t)z + c_2(t)z^2 + \dots,$$

где

$$a_1(z) = z^{p_2(0)} \cdot v(z) 2k(z),$$

$$a_0(z) = 2 \int_0^z p_0(z) \cdot z^{2p_2(0)-1} v^2(z) dz$$

регулярна и однолистка в  $E$  при каждом  $t, t \geq 0$ .

С учетом результатов, полученных во втором параграфе, и выражения  $g(z, t) = a_2(z)t^2 + a_1(z)t + a_0(z)$  имеем

$$\frac{zF'_z}{F'_t} = \frac{z(g(z, t))'_z}{(g(z, t))'_t} p(z, t) = \frac{\frac{za'_2(z)}{2a_2(z)} t^2 + \frac{za'_1(z)}{2a_2(z)} t + \frac{za'_0(z)}{2a_2(z)}}{t + \frac{a_1(z)}{2a_2(z)}}. \quad (3.1)$$

Полагая

$$\frac{za'_2(z)}{2a_2(z)} = p_2(z) \in C, \quad a_2(z) = z^{2p_2(0)} \cdot v^2(z), \quad (3.2)$$

с последующим делением в (3.1) числителя на знаменатель, получим

$$p(z, t) = p_2(z)t + \frac{\frac{za'_1(z) - p_2(z)a_1(z)}{2a_2(z)} t + \frac{za'_0(z)}{2a_2(z)}}{t + \frac{a_1(z)}{2a_2(z)}}. \quad (3.3)$$

Обозначив

$$\frac{za_1'(z) - p_2(z)a_1(z)}{2a_2(z)} = p_1(z) \in C, \quad (3.4)$$

имеем 
$$za_1'(z) - p_2(z)a_1(z) = p_1(z) \cdot 2a_2(z). \quad (3.5)$$

Интегрирование относительно  $a_1(z)$  уравнения (3.5) дает

$$a_1(z) = z^{p_2(0)} \cdot v(z) \cdot \left( c + 2 \int_0^z p_1(z) \cdot z^{p_2(0)-1} v(z) dz \right). \quad (3.6)$$

Из (3.5), (3.2) имеем

$$\frac{a_1(z)}{2a_2(z)} = \frac{\int p_1(z) \cdot z^{p_2(0)-1} \cdot v(z) dz}{z^{p_2(0)-1} \cdot v(z)} = A(z). \quad (3.6')$$

Пусть

$$p_0(z) = \frac{A(z)}{p_1(z)} \in C. \quad (3.7)$$

В случае соотношения (3.7) имеет место равенство

$$A(z) = p_1(z) \cdot p_0(z). \quad (3.8)$$

С учетом (3.1) – (3.8) выражение в (3.3) переписывается в виде

$$p(z, t) = p_2(z)t + \frac{p_1(z)t + p_0(z)}{t + p_1(z) \cdot p_0(z)}. \quad (3.9)$$

Выражение в (3.9) несколько отличается от соответствующего выражения в теореме 1. Функции  $p(z, t)$  в (3.9) и

$$e(z, t) = \frac{p_1(z)t + p_0(z)}{t + p_1(z) \cdot p_0(z)} \quad (3.10)$$

в (3.10) принадлежат классу  $C(T)$ , и, следовательно, соответствующее дифференциальное уравнение является вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Положим

$$\frac{za_0'(z)}{2a_2'(z)} = p_0(z) \in C, \quad (3.11)$$

где  $p_0(z)$  определяется соотношением (3.7) при условии (3.6).

Рассмотрением (3.11) указываем выражение  $a_0(z)$ :

$$a_0(z) = 2 \int p_0(z) \cdot z^{2p_2(0)-1} \cdot v^2(z) dz. \quad (3.12)$$

Заметим, что функция

$$e(z, t) = \frac{p_1(z)t + a_0 p_0(z) + a_1 p_1(z)}{t + p_1(z) \cdot p_0(z)} \quad (3.13)$$

также будет принадлежать классу  $C(T)$ .

Поэтому вместо (3.11) мы можем полагать

$$\frac{za'_0(z)}{2a_2(z)} = a_0p_0(z) + a_1p_1(z), a_0 \geq 0, a_1 \geq 0, \quad (3.14)$$

где  $a_0, a_1$  удовлетворяют условию  $a_0 + a_1 \neq 0$ .

В ситуации (3.14) выражение в (3.12) переписывается в виде

$$a_0(z) = 2 \int (a_0p_0(z) + a_1p_1(z))z^{2p_2(0)-1} \cdot v^2(z) dz.$$

Объединяя вышеизложенное, получим результат, указанный в формулировке теоремы 3.

Функции  $F(z, t)$ ,  $\varphi(z, t) = \frac{F(z, t)}{F'_z(0, t)}$ ,  $\varphi(z, 0)$ ,  $\varphi(z, \infty)$  удовлетворяют всем условиям,

являющиеся достаточными для утверждений теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

К числу различных важных направлений исследований относятся обратные задачи. Понятия «обратная функция», «обратная задача» связаны с понятиями взаимнооднозначного, биективного, однолистного отображений, однолистной функции, рассмотренных в [1–5]. Со времен Ж. Лиувилля, доказавшего неразрешимость в квадратурах дифференциальных уравнений некоторых типов, актуальной остается задача указаний случаев интегрируемости дифференциальных уравнений. В данной статье, таким образом, мы указали структуру интеграла и условия, при которых функция определенного вида является решением дифференциального уравнения Левнера – Куфарева.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск.: Томский государственный университет, 2001. 220 с.
2. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
3. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев А.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. 1975. Т. 30. Вып. 4(184). С. 3–60.
4. Базилевич И.Е. Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера – Куфарева // Матем. сб. 1955. Т. 37. № 3. С. 471–476.
5. Кочетков В.К., Задорожная О.В. Некоторые вопросы аналитической теории дифференциальных уравнений и геометрической теории функций комплексного переменного. Элиста: Издательство Калм. ун-та, 2014. 160 с.

Статья поступила 24.04.2018 г.

Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2018) THE STRUCTURE OF INTEGRALS OF THE SECOND LOEWNER–KUFAREV DIFFERENTIAL EQUATION IN A PARTICULAR CASE *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 12–21

DOI 10.17223/19988621/55/2

Keywords: geometric theory of functions of a complex variable, Loewner–Kufarev differential equation.

In the geometric theory of functions of a complex variable, the first and the second Loewner–Kufarev differential equations are well known. Considering the first one of them, I. E. Bazilevich pointed out the class of univalent functions in a unit circle, now known as I. E. Bazilevich's class.

This paper shows that I. E. Bazilevich's formula can be derived by considering the second Loewner–Kufarev equation with a linear right-hand side. We have also studied a differential equation with a nonlinear right-hand side, rational in a particular case. The problem point in the latter case is to specify a parametric family of regular functions with a positive real part in the unit circle at each fixed value of the parameter. The two lemmas proved in the paper simplify the problem of constructing a right-hand side with a positive real part when considering nonlinear right-hand sides.

AMS Mathematical Subject Classification: 35C15

ZADOROZHNYAYA Olga Vladimirovna (Candidate of pedagogics, Kalmyk State University, Elista, Russian Federation). E-mail: ovz\_70@mail.ru

KOCHETKOV Vladimir Konstantinovich (Candidate of Physics and Mathematics, Kalmyk State University, Elista, Russian Federation). E-mail: kvk1106@mail.ru

#### REFERENCES

1. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of the geometric theory of analytical functions]. Tomsk: Tomsk State University Publ. 220 p.
2. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskiye prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [*Parametric continuations in the theory of univalent functions*]. Moscow: Nauka. 344 p.
3. Avkhadiev F.G. et al. (1975) The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht. *Russian Mathematical Surveys*. 30 (4). pp. 1–63.
4. Bazilevich I.E. (1955). Ob odnom sluchae integriruемости v kvadraturakh uravneniya Levnera – Kufareva [On one case of integrability in quadratures of the Loewner–Kufarev equation]. *Math. USSR Sb.*37(3). pp. 471–476.
5. Kochetkov V.K., Zadorozhnaya O.V. (2014) *Nekotorye voprosy analiticheskoy teorii differentsial'nykh uravneniy i geometricheskoy teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Some problems of the analytical theory of differential equations and geometric theory of functions of a complex variable]. Elista: KalmSU. 160 p.

**В.Н. Крутиков, Н.С. Самойленко****О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СУБГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА  
С ИЗМЕНЕНИЕМ МЕТРИКИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ  
В СХЕМАХ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ**

Исследуется релаксационный субградиентный метод с двухгранговой коррекцией матриц метрики. Доказано, что на сильновыпуклых функциях, в случае существования линейного преобразования координат, уменьшающего степень обусловленности задачи, метод имеет линейную скорость сходимости, соответствующую этой степени обусловленности. Экспериментально установлено, что скорости сходимости квазиньютоновского и изучаемого методов на гладких функциях практически эквивалентны. Вычислительные возможности метода используются для построения эффективных алгоритмов обучения нейронных сетей.

**Ключевые слова:** *метод, субградиент, минимизация, скорость сходимости, нейронные сети, регуляризация.*

В задачах обучения по прецедентам (см., например, [1]) при небольших по размеру обучающих выборках и неизвестном виде математической модели возникает необходимость поиска соответствующего описания в виде искусственной нейронной сети (ИНС) [1–4]. При этом структура модели должна быть достаточно сложной для качественного описания данных и достаточно простой для обеспечения хороших обобщающих свойств [1]. Подобные проблемы возникают в различных практических приложениях аппарата ИНС [5–7]. Для устранения избыточного описания нейросети используют различные способы регуляризации [1, 8–12]. В задачах обучения ИНС при небольших обучающих выборках [1–4, 6, 7, 13] используют, как правило, сети с небольшим числом слоев, а в качестве методов обучения применяют методы сопряженных градиентов (МСГ) [13], квазиньютоновские (КНМ) [14, 15] и Левенберга – Марквардта (ЛМ) [16]. Учитывая неприменимость этих методов для решения негладких задач, слабую устойчивость методов ЛМ [13] и МСГ в условиях плохой обусловленности и росте размерности задачи представляется актуальным исследование методов обучения ИНС, имеющих высокую скорость сходимости как на гладких, так и негладких овражных функциях, в том числе и невыпуклых.

К числу методов, обладающих возможностями минимизации негладких и, в том числе, невыпуклых функций, относятся релаксационные субградиентные методы (РСМ). Свойствами скорости сходимости, близкими свойствам метода сопряженных градиентов, обладают РСМ, предложенные в работах [17–22]. Существенного повышения эффективности РСМ удалось достичь в результате создания методов негладкой оптимизации с изменением метрики пространства [17, 23, 24]. В данной работе теоретически и экспериментально рассмотрен релаксационный субградиентный метод с двухгранговой коррекцией матриц метрики (СМДМ) [23], который при исключении операции сжатия пространства эквивалентен алгоритму Н.З. Шора [17]. В статье установлено, что на сильновыпуклых функци-

ях с липшицевым градиентом [14] метод сходится линейно. В силу инвариантных свойств алгоритма, полученная оценка справедлива и в системе координат с наилучшими для оценки скорости сходимости пропорциями констант сильной выпуклости и Липшица. Проведенный вычислительный эксперимент подтверждает близость свойств методов СМДМ и КНМ на квадратичных функциях и эффективность метода при минимизации негладких функций с высокой степенью вытянутости поверхностей уровня.

Использование ИНС при небольших по размеру обучающих выборках наталкивается на проблемы выбора хорошего начального приближения и быстро наступающего переобучения в случае излишнего числа нейронов. Предложен новый эффективный способ выбора начального приближения ИНС. Использование регуляризации позволило исключить эффекты переобучения и эффективно удалять малозначимые нейроны и связи внутри нейронов. Возможности эффективного решения подобных задач обеспечены методом СМДМ. В статье приведены примеры решения задач обучения ИНС.

## 2. О скорости сходимости субградиентного метода с изменением метрики

Рассматривается задача минимизации дифференцируемой функции  $f(x)$ ,  $x \in R^n$ , где  $R^n$  – конечномерное евклидово пространство. Обозначим  $(x, y)$  – скалярное произведение векторов,  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  – норму вектора. Для произвольной симметричной строго положительно определенной матрицы  $H$  размера  $n \times n$  будем использовать обозначение  $H > 0$ .

**Условие А.** Будем предполагать, что функция  $f(x), x \in R^n$ , дифференцируема и сильновыпукла с константой  $l > 0$  [14]

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - l\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2/2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (1)$$

а ее градиент удовлетворяет условию Липшица с константой  $L > 0$

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (2)$$

Последовательные приближения алгоритма СМДМ [23] на некоторой  $k$ -й итерации при точном одномерном спуске строятся по формулам

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k s_k, \quad s_k = H_k g_k; \quad (3)$$

$$\gamma_k = \arg \min_{\gamma > 0} f(x_k - \gamma s_k). \quad (4)$$

Здесь  $x_0$  – заданная начальная точка,  $H_0 > 0$  – заданная начальная матрица, а матрицы  $H_k > 0$  вычисляются по формулам

$$H_{k+1} = H_k - \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \frac{H_k y_k y_k^T H_k^T}{(y_k, H_k y_k)} - \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \frac{H_k p_k p_k^T H_k^T}{(p_k, H_k p_k)}, \quad (5)$$

$$y_k = g_{k+1} - g_k, \quad p_k = g_{k+1} + t_k y_k, \quad t_k = -\frac{(y_k, H_k g_{k+1})}{(y_k, H_k y_k)},$$

$$\alpha > 1, \quad \beta \in (0, 1], \quad \alpha \cdot \beta > 1. \quad (6)$$

где коэффициент  $t_k$  вычисляется из условия ортогональности  $(y_k, H_k p_k) = 0$ .

Здесь и далее  $g$ ,  $g(x)$  – некоторый субградиент из субградиентного множества  $\partial f(x)$  функции  $f(x)$ ,  $g_k = g(x_k)$ .

Итерационный процесс (3) – (6) является частным случаем алгоритма минимизации из [23]. В [23] для преобразования (5) необходимо из множества  $\partial f(x_{k+1})$  выбирать субградиент  $g(x_{k+1})$ , удовлетворяющий условию

$$(s_k, g(x_{k+1})) = (H_k g(x_k), g(x_{k+1})) \leq 0.$$

В силу точного одномерного спуска (4) для дифференцируемой функции это условие выполняется  $(s_k, g(x_{k+1})) = 0$ . В качестве нового агрегированного субградиента для формирования направления спуска в работе [23] предложено выбирать вектор на отрезке двух векторов  $p_k, g_{k+1}$ . В этой работе, как следует из (3), для формирования направления спуска используется только вектор  $g_{k+1}$  этого отрезка, что определяет алгоритм (3) – (6) как частный случай метода минимизации из [23].

Обозначим через  $x^*$  точку минимума функции  $f(x)$ ,  $f^* = f(x^*)$ ,  $f_k = f(x_k)$ ,  $\mu_k = f_k - f^*$ ,  $A_k = H_k^{-1}$ . Для матрицы  $H_{k+1}$ , полученной в результате (5) при параметрах  $\alpha, \beta$ , удовлетворяющих (6), при условии  $H_k > 0$  в [23] показано, что матрица  $H_{k+1} > 0$  и для нее выполняются равенства

$$A_{k+1} = A_k + (\alpha^2 - 1) \frac{y_k y_k^T}{(y_k, H_k y_k)} + (\beta^2 - 1) \frac{p_k p_k^T}{(p_k, H_k p_k)}; \quad (7)$$

$$Sp(A_{k+1}) = Sp(A_k) + (\alpha^2 - 1) \frac{(y_k, y_k)}{(y_k, H_k y_k)} + (\beta^2 - 1) \frac{(p_k, p_k)}{(p_k, H_k p_k)}; \quad (8)$$

$$\det(H_{k+1}) = \frac{\det(H_k)}{\alpha^2 \beta^2}. \quad \det(A_{k+1}) = \alpha^2 \beta^2 \det A_k. \quad (9)$$

В следующей теореме показано, что наличие движения в результате итераций метода (3) – (5) приводит к уменьшению функции.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условию А. Тогда для последовательности  $\{f_k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , заданной процессом (3), (4), имеет место оценка:

$$\mu_{k+1} \leq \mu_0 \exp \left[ -\frac{l^2}{L^2} \sum_{i=0}^k \frac{\|y_i\|^2}{\|g_i\|^2} \right]. \quad (10)$$

*Доказательство.* Для сильновыпуклой функции выполняются неравенства [14]

$$l \|x - x_*\|^2 / 2 \leq f(x) - f_* \leq \|g(x)\|^2 / 2l. \quad (11)$$

Согласно определению  $\mu_k$ , с учетом правого из неравенств в (11), получим

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &= \mu_k - (f_k - f_{k+1}) = \mu_k (1 - (f_k - f_{k+1}) / \mu_k) \leq \\ &\leq \mu_k (1 - 2l(f_k - f_{k+1}) / \|g(x)\|^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Левое из неравенств в (11) справедливо и для одномерной функции

$\varphi(t) = f(x_k - tr_k / \|r_k\|)$ . Отсюда, с учетом точного одномерного поиска (4) и условия Липшица (2), следует оценка

$$f_k - f_{k+1} \geq l \|x_k - x_{k+1}\|^2 / 2 \geq l \|y_k\|^2 / 2L^2.$$

Преобразуем (12), используя последнее соотношение и неравенство  $\exp(-c) \geq 1 - c$  при  $c \geq 0$ :

$$\mu_{k+1} \leq \mu_k \left( 1 - \frac{l^2 \|y_k\|^2}{L^2 \|g_k\|^2} \right) \leq \mu_k \exp \left( - \frac{l^2 \|y_k\|^2}{L^2 \|g_k\|^2} \right).$$

Рекуррентное использование последнего неравенства приводит к оценке (10). Теорема доказана.

В следующей теореме обосновывается линейная скорость сходимости метода СМДМ.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условию  $A$ . Тогда для последовательности  $\{f_k\}, k = 0, 1, 2, \dots$ , заданной процессом (3) – (6), с ограниченной начальной матрицей  $H_0$

$$m_0 \leq (H_0 z, z) / (z, z) \leq M_0, \tag{13}$$

имеет место оценка

$$\mu_{k+1} \leq \mu_0 \exp \left\{ - \frac{l^2}{L^2} \left[ \frac{2(k+1) \ln(\alpha\beta)}{n(\alpha^2 - 1)} + \frac{\ln(m_0 / M_0)}{(\alpha^2 - 1)} \right] \right\}. \tag{14}$$

*Доказательство.* Исходя из (8), учитывая неравенство  $\beta^2 - 1 \leq 0$ , получим оценку следа матриц  $A_k$ :

$$\text{Sp}(A_{k+1}) \leq \text{Sp}(A_k) \left[ 1 + \frac{(\alpha^2 - 1)(y_k, y_k)}{\text{Sp}(A_k)(H_k y_k, y_k)} \right]. \tag{15}$$

В силу точного одномерного спуска (4) выполняется условие

$$(s_k, g(x_{k+1})) = (H_k g(x_k), g(x_{k+1})) = 0,$$

что вместе с положительной определенностью матриц  $H_k$  доказывает неравенство

$$(H_k y_k, y_k) = (H_k g(x_k), g(x_k)) + (H_k g(x_{k+1}), g(x_{k+1})) - 2(H_k g(x_k), g(x_{k+1})) \geq (H_k g(x_k), g(x_k)).$$

Отсюда, с учетом неравенства  $\text{Sp}(A_k) \geq M_k$ , где  $M_k$  – максимальное собственное значение матрицы  $A_k$ , получим

$$\begin{aligned} \text{Sp}(A_k)(H_k y_k, y_k) &\geq \text{Sp}(A_k)(H_k g(x_k), g(x_k)) \geq \\ &\geq \frac{\text{Sp}(A_k)}{M_k} (g(x_k), g(x_k)) \geq (g(x_k), g(x_k)). \end{aligned}$$

Неравенство (15) на основании последней оценки преобразуется к виду

$$\text{Sp}(A_{k+1}) \leq \text{Sp}(A_k) \left[ 1 + (\alpha^2 - 1) \frac{\|y_k\|^2}{\|g(x_k)\|^2} \right]. \tag{16}$$

На основе соотношения между среднеарифметическим и среднегеометрическим собственными значениями матрицы  $A > 0$  имеем  $\text{Sp}(A)/n \geq [\det(A)]^{1/n}$ . Отсюда и из (16) получим

$$\frac{\text{Sp}(A_0)}{n} \prod_{i=0}^k \left[ 1 + (\alpha^2 - 1) \frac{\|y_i\|^2}{\|g(x_i)\|^2} \right] \geq \frac{\text{Sp}(A_{k+1})}{n} \geq (\det(A_{k+1}))^{1/n} = [(\alpha^2 \beta^2)^{k+1} \det(A_0)]^{1/n}.$$

Последнее неравенство на основе соотношения  $1 + p \leq \exp(p)$  преобразуем к виду

$$\frac{\text{Sp}(A_0)}{n} \exp \left[ (\alpha^2 - 1) \sum_{i=0}^k \frac{\|y_i\|^2}{\|g(x_i)\|^2} \right] \geq (\alpha^2 \beta^2)^{(k+1)/n} (\det(A_0))^{1/n}. \quad (17)$$

В силу условия (13)

$$\text{Sp}(A_0)/n \leq 1/m_0, \quad (\det(A_0))^{1/n} \geq 1/M_0.$$

Логарифмируя (17), с учетом последних неравенств, найдем

$$\sum_{i=0}^k \frac{\|y_i\|^2}{\|g(x_i)\|^2} \geq \frac{2(k+1) \ln(\alpha\beta)}{n(\alpha^2 - 1)} + \frac{\ln(m_0/M_0)}{(\alpha^2 - 1)},$$

что вместе с (10) доказывает (14). Теорема доказана.

Полученные оценки скорости сходимости не объясняют факт высокой скорости сходимости метода СМДМ, например, на квадратичных функциях. Для обоснования наличия ускоряющих свойств у метода нам необходимо показать его инвариантность относительно линейного преобразования координат, а затем использовать оценку (14) в системе координат, в которой отношение  $l/L$  максимально. Подобная возможность существует, например, в случае квадратичных функций, где это отношение будет равно 1.

Пусть задано линейное преобразование координат  $\bar{x} = Px$ ,  $\bar{x}, x \in R^n$ , где  $\bar{x}$  – переменные новой системы координат,  $P$  – невырожденная матрица размера  $n \times n$ . Образует функцию  $\bar{f}(\bar{x}) = f(P^{-1}\bar{x}) = f(x)$ . Здесь и далее черта сверху – признак принадлежности одноименной переменной новой системе координат. Обозначим  $P^{-T} = (P^T)^{-1}$ . Установим соответствие между характеристиками процесса (3) – (5), применяемого для минимизации функций  $\bar{f}(\bar{x})$  и  $f(x)$ .

**Лемма 1.** Пусть начальные условия процесса (3) – (5), применяемого для минимизации функций  $\bar{f}(\bar{x})$  и  $f(x)$ , связаны равенствами

$$\bar{x}_0 = Px_0, \quad \bar{H}_0 = PH_0P^T. \quad (18)$$

Тогда характеристики этих процессов связаны соотношениями

$$\bar{f}(\bar{x}_k) = f(x_k), \quad \bar{x}_k = Px_k, \quad \bar{g}(\bar{x}_k) = P^{-T}g(x_k), \quad \bar{H}_k = PH_kP^T \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (19)$$

**Доказательство.** Для производных функций  $\bar{f}(\bar{x})$  и  $f(x)$  справедлива взаимосвязь  $\bar{g}(\bar{x}) = P^{-T}g(x)$ . Отсюда и предположения (18) следует (19) при  $k = 0$ . Предположим, что равенства (19) выполнены при всех  $k = 0, 1, \dots, i$ . Покажем их выполнимость при  $k=i+1$ . Из (3) при  $k = i$  после умножения на  $P$  слева с учетом доказанных равенств (19) получим

$$Px_{i+1} = Px_i - \gamma_i PH_i P^T P^{-T} g(x_i) = \bar{x}_i - \gamma_i \bar{H}_i \bar{g}(\bar{x}_i). \quad (20)$$

Отсюда, согласно определению функции  $\bar{f}$ , на этапе одномерной минимизации (4) выполняется равенство  $\gamma_i = \bar{\gamma}_i$ . Поэтому правая часть (20) – реализация шага (3) в новой системе координат. Следовательно:

$$Px_{i+1} = \bar{x}_{i+1}, \quad \bar{g}(\bar{x}_{i+1}) = P^{-T} g(x_{i+1}) \quad \text{и} \quad \bar{y}_i = \bar{g}(\bar{x}_{i+1}) - \bar{g}(\bar{x}_i) = P^{-T} y_i. \quad (21)$$

Пмножая (5) слева на  $P$ , а справа на  $P^T$ , с учетом (21) получим

$$\begin{aligned} PH_{i+1}P^T &= PH_iP^T - \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \frac{PH_iP^T P^{-T} y_i y_i^T P^{-1} PH_i^T P^T}{(y_i, P^{-1} PH_i P^T P^{-T} y_i)} - \\ &- \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \frac{PH_i P^T P^{-T} p_i p_i^T P^{-1} PH_i^T P^T}{(p_i, P^{-1} PH_i P^T P^{-T} p_i)} = \\ &= \bar{H}_i - \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \frac{\bar{H}_i \bar{y}_i \bar{y}_i^T \bar{H}_i^T}{(\bar{H}_i \bar{y}_i, \bar{y}_i)} - \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \frac{\bar{H}_i \bar{p}_i \bar{p}_i^T \bar{H}_i^T}{(\bar{H}_i \bar{p}_i, \bar{p}_i)}, \end{aligned}$$

где правая часть есть реализация формулы (5) в новой системе координат. Поэтому  $PH_{i+1}P^T = \bar{H}_{i+1}$ . Следовательно, равенства (19) будут справедливы и при  $k = i + 1$ . Продолжая процесс индукции, получим доказательство леммы.

Обозначим через  $l_p, L_p$  соответственно константы сильной выпуклости и Липшица для функции  $\bar{f}(\bar{x})$ . Введем функцию  $K(P) = l_p / L_p$ . Обозначим  $V$  матрицу преобразования координат такую, что  $K(V) \geq K(P)$  для произвольных невырожденных матриц  $P$ .

**Теорема 3.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условию  $A$ . Тогда для последовательности  $\{f_k\}, k = 0, 1, 2, \dots$ , заданной процессом (3) – (6), с ограниченной начальной матрицей  $H_0$  (13) имеет место оценка

$$\mu_{k+1} \leq \mu_0 \exp \left\{ - \frac{l_V^2}{L_V^2} \left[ \frac{2(k+1) \ln(\alpha\beta)}{n(\alpha^2 - 1)} + \frac{\ln(m/M)}{(\alpha^2 - 1)} \right] \right\}, \quad (22)$$

где  $m$  и  $M$  – соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы  $\bar{H}_0 = VH_0V^T$ .

**Доказательство.** Согласно результатам леммы 1, мы можем выбрать произвольную систему координат для оценки скорости сходимости процесса минимизации (3) – (5). Поэтому используем оценку (14) в системе координат с матрицей  $P = V$ , получим оценку (22).

Для метода скорейшего спуска (схема (3), (4) при  $H_k = I$ ) на функциях, удовлетворяющих условию  $A$ , порядок скорости сходимости определяется выражением  $\mu_k \leq \mu_0 \exp(-kl/L)$  [14, 25]. При условии  $l_V^2 / L_V^2 \gg l/L$  оценка (22) оказывается предпочтительнее. Такая ситуация возникает, например, при минимизации квадратичных функций, матрицы вторых производных которых имеют большой разброс собственных значений. Второе слагаемое оценки (22) характеризует этап настройки матрицы СМДМ-алгоритма. При больших значениях  $\alpha$  настройка матрицы протекает интенсивнее. Таким образом, при конечных значениях параметра

растяжения пространства алгоритм СМДМ на сильно выпуклых функциях, без предположения существования вторых производных, обладает ускоряющими свойствами сравнительно с методом скорейшего спуска.

### 3. Результаты вычислительного эксперимента

**1. Исследование скорости сходимости алгоритма СМДМ.** Предварительный вычислительный эксперимент имеет целью сравнить скорости сходимости квазиньютоновского метода Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (BFGS) [15] и СМДМ и на квадратичных функциях с высокой степенью обусловленности ( $\mu = 10^{10}$ ). Вторая часть эксперимента состоит в соотношении скорости сходимости СМДМ на квадратичных и негладких функциях с равной степенью вытянутости функции:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot (1 + (i-1)(10^5 - 1)/(n-1))^2, \quad x_{0,i} = 1, \quad x_i^* = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot (1 + (i-1)(10^5 - 1)/(n-1)), \quad x_{0,i} = 1, \quad x_i^* = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим  $it$  – число итераций метода, а  $nfg$  – количество вычислений функции и градиента, требуемые для достижения заданной точности  $f_k - f^* \leq \varepsilon$ . Результаты для методов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты сходимости методов на сложных функциях

Функция	$f_1 (\varepsilon = 10^{-10})$	$f_2 (\varepsilon = 10^{-5})$		$f_3 = f_1 + f_2 (\varepsilon = 10^{-5})$
Методы	BFGS (it/nfg)	СМДМ (it/nfg)	СМДМ (it/nfg)	СМДМ (it/nfg)
$n = 500$	543 / 993	755 / 1267	2747 / 4883	2596 / 4600
$n = 1000$	1049 / 1974	1330 / 2144	5451 / 9159	5178 / 8305
$n = 5000$	5100 / 9873	5411 / 8321	20073 / 29607	18328 / 26514

Метод BFGS является конечным на квадратичных функциях с числом итераций, равным размерности задачи. Стратегии методов BFGS и СМДМ различные. В квазиньютоновских методах важна точность одномерного поиска, а в релаксационных субградиентных алгоритмах наоборот, чем больше окрестность поиска, тем эффективнее выбор направления для последующего выхода из этой окрестности. Результаты табл. 1 свидетельствуют о практической идентичности методов на квадратичных функциях с высокой степенью обусловленности и высокой эффективности СМДМ при минимизации сложных негладких функций  $f_2$  и  $f_3$ . В представленных ниже сценариях обучения ИНС требуется высокая точность решения задач негладкой минимизации. Данный эксперимент дает определенные гарантии возможности СМДМ решать подобные задачи.

**2. Задача аппроксимации двухслойной ИНС сигмоидального типа.** ИНС представляют собой мощный инструмент аппроксимации и находят применение в различных областях, в том числе и при решении уравнений математической физики [6, 7]. Требования к аппарату приближения – это надежность и качество приближения. Ниже будут изложены способы решения подобных проблем, где важ-

ную роль играет исследованный выше релаксационный субградиентный метод с двухранговой коррекцией матриц метрики СМДМ.

Рассмотрим задачу аппроксимации

$$w^* = \arg \min_w E(\alpha, w, D),$$

$$E(\alpha, w, D) = \sum_{x, y \in D} (y - f(x, w))^2 + \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i(w), \quad (23)$$

где  $D = \{(x^i, y_i) \mid x^i \in R^p, y_i \in R^1\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  – данные наблюдения,  $R_i(w)$  – различные виды регуляризаторов;  $\alpha_i$  – параметры регуляризации,  $f(x, w)$  – аппроксимирующая функция;  $x \in R^p$  – вектор данных;  $w \in R^n$  – вектор настраиваемых параметров,  $p$  и  $n$  – их размерности. В качестве регуляризаторов можно использовать следующие:

$$R2(w) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \text{ [8]}, \quad R1(w) = \sum_{i=1}^n |w_i| \text{ [26]},$$

$$R\gamma(w) = \sum_{i=1}^n (|w_i| + \varepsilon)^\gamma \text{ } (\varepsilon = 10^{-6}, \gamma = 0.7) \text{ [9]}.$$

Использование  $R2$  приводит к подавлению в большей мере больших компонент вектора  $w$ ,  $R1$  – больших и малых, а  $R\gamma$  – преимущественно малых. Подобное свойство  $R\gamma$  позволяет сводить к нулю слабые компоненты, несущественные для описания данных. В задачах приближения ИНС в отсутствие помех мы будем использовать регуляризатор  $R\gamma$ .

В задаче аппроксимации сетью прямого распространения требуется по данным  $D$  обучить двухслойную сигмоидальную нейронную сеть следующего вида (оценить ее неизвестные параметры  $w$ ):

$$f(x, w) = w_0^{(2)} + \sum_{i=1}^m w_i^{(2)} \varphi(s_i), \quad \varphi(s) = s / (1 + |s|),$$

$$s_i = w_{i0}^{(1)} + \sum_{j=1}^p x_j w_{ij}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (24)$$

где  $x_j$  – компоненты вектора  $x \in R^p$ ,  $w = ((w_i^{(2)}, i=0, \dots, m), (w_{ij}^{(1)}, j=0, \dots, p, i=1, \dots, m))$  – набор неизвестных параметров, которые необходимо оценить методом наименьших квадратов (23),  $\varphi(s)$  – функция активации нейрона,  $m$  – число нейронов. Для решения задач (23) используем субградиентный метод СМДМ.

**3. Оптимизационный алгоритм нахождения начального приближения ИНС.** Начальное приближение в задаче обучения ИНС играет решающую роль. В литературе по нейронным сетям [2, 3] предлагается задавать начальные значения параметров нейронов  $w$  случайным образом. Рассмотрим процесс задания начальных параметров сети, в котором каждому нейрону отводится зона активного приближения данных и при этом зоны нейронов покрывают область данных.

Рабочие области нейронов  $\varphi(s)$  в (24) имеют характер активной зависимости только в некоторой окрестности значений  $s = 0$ , а при значительных отклонениях значений  $s$  от нуля значения  $\varphi(s)$  близки к своим асимптотам, принимающим значения  $\{-1, 1\}$ . Важно иметь такие параметры нейронов  $w$ , которые обеспечивают для векторов области данных  $x \in R^p$  принадлежность рабочей области хотя бы одного нейрона.

При произвольном задании начальных параметров в задаче минимизации (23) зачастую оказывается, что рабочие области нейронов охватывают только часть области аппроксимации либо выходят за ее пределы, образуя локальные минимумы, выход из которых нельзя осуществить приемами локальных изменений текущего приближения. Даже если предположить, что рабочие области нейронов расположены правильно, нельзя гарантировать, что их положение сохранится при дальнейшем решении задачи обучения. Расположение нейронов в точках с высокой концентрацией данных также не обеспечивает сохранения этого положения, поскольку при дальнейшем обучении нейроны могут покинуть изначально заданные области. Поэтому требуется дополнительная привязка рабочих областей нейронов посредством обучения нейросети при фиксированных центрах. В этом случае нейрон сможет покинуть свой регион только в случае, когда в этом регионе будет обеспечена уже имеющаяся точность приближения данных.

В следующем алгоритме предлагается найти приближение ИНС, т.е. параметры нейронов при фиксированном положении рабочих областей нейронов с помощью заданных центров  $c_i \in R^p$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , в области аппроксимации  $x \in R^p$ , определяемой данными. В этом случае в (24) будут использоваться выражения

$$s_i = \sum_{j=1}^p (x_j - c_{ij}) w_{ij}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$w = ((w_i^{(2)}, i = 0, \dots, m), (w_{ij}^{(1)}, j = 1, \dots, p, i = 1, \dots, m)). \quad (25)$$

Центры  $c_i$  можно найти некоторым алгоритмом кластеризации данных  $x^i \in R^p$ ,  $i = 1, \dots, N$ , что полезно и с точки зрения расположения нейронов в областях с высокой плотностью данных. В этой работе использовался максиминный алгоритм [27], в котором в качестве первых двух центров выбираются две максимально удаленные друг от друга точки данных. Каждый новый центр получается выбором точки данных  $x^i$ , расстояние от которой до ближайшего известного центра максимально.

#### **Оптимизационный алгоритм нахождения начального приближения ИНС (ОИП).**

1. Задать данные  $D$ , число нейронов  $m < N$ . Выбрать регуляризатор и его параметры в (23).

2. На данных  $D$  определить центры рабочих областей нейронов  $c_i \in R^p$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

3. Выбрать начальное приближения параметров ИНС (24) в форме (25).

4. Для ИНС (24) в форме (25) найти неизвестные параметры посредством решения задачи (23).

5. Вернуться к исходному описанию сети в виде (24) посредством образования параметров

$$w_{i0}^{(1)} = -\sum_{j=1}^p c_{ij} w_{ij}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (26)$$

Пункт 4 алгоритма в определенной степени гарантирует, что область данных будет покрыта рабочими областями нейронов. В своей выделенной области каждый нейрон обеспечит некоторое качество приближения, которое при возврате (26) к виду (24) сохраняется, а при дальнейшем обучении может только улучшиться.

**4. Алгоритм обучения ИНС в задачах аппроксимации.** При малой размерности данных  $x \in R^p$ , например, при решении уравнений математической физики [6], можно обойтись без удаления переменных внутри нейронов, а сосредоточится на выборе оптимального числа нейронов, удаляя избыточные. В следующем алгоритме задается избыточное число нейронов, а регуляризация проводится только по параметрам  $w_i^{(2)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , из (24) с использованием регуляризатора  $R\gamma$ .

**Алгоритм обучения ИНС в задачах аппроксимации при отсутствии помех (A0).**

1. Задать данные  $D$ , число нейронов  $m < N$ . Выбрать регуляризатор  $R\gamma(w)$  и параметр  $\alpha$  для алгоритма ОНП и для алгоритма обучения нейросети (23).

2. Найти начальное приближение ИНС  $W_0$  используя алгоритм ОНП.

3. Для  $k=1, 2, \dots, m-1$  выполнить действия:

3.1.  $w^k = \arg \min_w E_\Omega(\alpha, w^{k-1}, D)$ . Вычислить величину среднеквадратичной погрешности

$$S_k = S(D, f_k) = \sum_{x, y \in D} (y - f(x, w^k))^2 / N. \quad (27)$$

3.2. Последовательно по одному удалить нейроны, обеспечивающие минимальное после удаления значение показателя  $S(D, f)$ , не превосходящее значение  $S_k$  более чем на заданное число процентов.

3.3. Если в пункте 3.2 не произошло удаления нейронов, то удалить один из нейронов, приводящий к наименьшему росту показателя  $S(D, f)$ .

4. В качестве окончательной модели аппроксимации выбрать ИНС  $f(x, w^k)$  с числом параметров  $n$ , не превосходящем  $N$ , и имеющей наименьшее значение показателя  $S_k$ .

Первоначально алгоритм, подобный A0, по аналогии с методом построения компактной линейной модели [9], не содержал пункта 2. Для получения качественной модели приходилось многократно применять алгоритм со случайным выбором начального приближения ИНС. При этом не всегда удавалось достигнуть необходимого качества. Сочетание первоначального равномерного покрытия области данных рабочими областями избыточного числа нейронов с последующим удалением избыточных нейронов средствами негладкой регуляризации позволило получать качественные приближения за один просчет алгоритма A0.

Обладание техникой размещения рабочих зон сигмоидальных нейронов в нужных областях данных и способом удаления избыточных нейронов позволяет построить другие разновидности алгоритма A0, например, с последовательным добавлением нейронов в областях данных с низким качеством приближения на предыдущих этапах. При этом негладкая регуляризация позволит исключить из модели малоинформативные нейроны.

**5. Примеры решения задач аппроксимации.** Обоснование эффективности изложенных алгоритмов проведем на примерах функций, для которых известны результаты аппроксимации ИНС [3]. Будем использовать следующую функцию активации нейрона  $\phi(s) = 1/(1 + \exp(-s))$ . Зададим параметр регуляризации  $\alpha = 10^{-9}$ . При решении задач алгоритмом A0 в качестве решения будем выбирать ИНС с наименьшим значением показателя (27) при условии  $n < N$ .

В [3] (с. 149) на данных при  $N = 625$ , сформированных в области  $\Omega = [-3, 3] \times [-3, 3]$  датчиком равномерных случайных чисел, аппроксимировалась функция

$$f_3(x_1, x_2) = 3(1 - x_1)^2 \exp(-x_1^2 - (x_2 + 1)) - 10(x_1/5 - x_1^3 - x_2^5) \exp(x_1^2 - x_2^2) - \exp(-(x_1 + 1) - x_2^2)/3.$$

Максимальное уклонение построенной в [3] ИНС, основанной на радиальных базисных функциях (RBF), на проверочной выборке из 1000 данных составило  $\Delta_{1000} = 0.06$  [3]. Функция  $f_3$  – типичный пример удобной для аппроксимации сетью RBF функции. Тем не менее использование алгоритма А0 на меньшей по размеру выборке ( $N = 600$ ) позволяет получить сигмоидальную сеть с меньшим уклонением  $\Delta_{1000} = 0.0171$ .

В той же работе [3, с. 162] в области  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  аппроксимировалась функция  $f_4(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1^2) \sin(2\pi x_2) / 2$ . На основе выборки с  $N = 500$  получено  $\Delta_{1000} = 0.15$  [3]. Алгоритм А0 при меньшем количестве данных  $N = 150$  позволяет получить сигмоидальную ИНС, для которой максимальное уклонение почти на порядок меньше  $\Delta_{1000} = 0.018$ .

Отметим, что при аппроксимации функций  $f_3$  и  $f_4$  сигмоидальной нейронной сетью без использования оптимизационного алгоритма нахождения начального приближения не удавалось получить качество аппроксимации выше, чем в [3].

В работе [6] ИНС применялись для решения уравнений математической физики. Использовался метод доверительных областей [28], в котором накладываются ограничения на область изменения параметров ИНС при обучении. В силу сложности и низкой скорости сходимости используемого метода в [13] предпринята попытка найти наиболее подходящий алгоритм для обучения сетей RBF. Среди исследуемых алгоритмов в [13] присутствовали и эффективные методы обучения глубоких нейронных сетей [29, 30]. На функции  $f_5(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  в области  $\Omega = [-3, 3] \times [-3, 3]$  на равномерно распределенных в области данных при  $N = 100$  лучшим оказался метод Левенберга – Марквардта. При этом достигнутая величина среднеквадратичной погрешности на обучающей выборке составляет  $S_{100} = 10^{-6}$  [13]. Для сигмоидальной ИНС, полученной алгоритмом А0, имеем на обучающей выборке  $S_{100} = 1.55 \cdot 10^{-11}$ , а на тестовой выборке –  $S_{1000} = 5.3 \cdot 10^{-10}$ , что на несколько порядков превосходит имевший место результат.

Приведенные результаты сведены в табл. 2, где  $m$  – число нейронов аппроксимирующей сети,  $m_0$  – первоначальное число нейронов. Остальные обозначения введены ранее.

Т а б л и ц а 2

Результаты аппроксимации нейросетями

Функция	Известные результаты			Полученные результаты			
	$N$	$m$	Результат	$N$	$m_0$	$m$	Результат
$f_3$	625	36	$\Delta_{1000} = 0.06$	600	70	64	$\Delta_{1000} = 0.0171$
$f_4$	500	41	$\Delta_{1000} = 0.15$	150	70	48	$\Delta_{1000} = 0.018$
$f_5$	100	16	$S_{100} = 10^{-6}$	100	30	16	$S_{100} = 1.55 \cdot 10^{-11}; S_{1000} = 5.3 \cdot 10^{-10}$

Таким образом, оптимизационный алгоритм отыскания начального приближения сети вместе с процедурой подавления избыточных нейронов позволяет получать ИНС высокого качества. Высокая точность решения задачи минимизации и скорость сходимости метода СМДМ дают возможность эффективно реализовать этапы алгоритма А0.

### Заключение

Доказано, что на сильно выпуклых функциях с липшицевым градиентом релаксационный субградиентный метод с двухранговой коррекцией матриц метрики сходится линейно, а преобразование метрики пространства в алгоритме обеспечивает его ускоряющие свойства. Вычислительный эксперимент устанавливает близость свойств скорости сходимости изучаемого алгоритма и квазиньютоновских методов на квадратичных функциях. Метод обладает высокой скоростью сходимости и на негладких функциях.

Предложен комплекс алгоритмов построения ИНС в условиях небольших по размеру обучающих выборок. Сюда входит оптимизационный алгоритм нахождения начального приближения ИНС, который состоит в закреплении рабочих областей нейронов в области данных посредством построения первоначальной сети с фиксированными центральными линиями сигмоидальных нейронов. В основной схеме построения ИНС используется негладкая регуляризация, необходимая для целей устранения эффектов переобучения и удаления малозначимых нейронов. Приводимые примеры решения задач построения ИНС позволяют сделать заключение об эффективности предложенных в работе алгоритмов. Высокая скорость сходимости на гладких и негладких функциях алгоритма минимизации СМДМ дает возможность эффективно решать задачи минимизации в схемах построения ИНС.

Авторы считают своим долгом выразить признательность анонимным рецензентам, замечания и комментарии которых позволили существенным образом улучшить изложение результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронцов К.В.* Курс лекций «Математические методы обучения по прецедентам» URL: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf>
2. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.
3. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. М.: Горячая линия – Телеком, 2016. 448 с.
4. *Горбань А.Н.* Обучение нейронных сетей. М.: Изд-во СССР – США СП «Параграф», 1990. 160 с.
5. *Бурнаев Е.В., Приходько П.В.* Об одной методике построения ансамблей регрессионных моделей // Автомат. и телемех. 2013. Вып. 10. С. 36–54.
6. *Горбаченко В.И., Жуков М.В.* Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 1. С. 133–143.
7. *Кретинин А.В.* Метод взвешенных невязок на базе нейросетевых пробных функций для моделирования задач гидродинамики // Сиб. журн. вычисл. матем. 2006. Т. 9. № 1. С. 23–35.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
9. *Крутиков В.Н., Арышев Д.В.* Алгоритм последовательного отсева неинформативных переменных линейной модели // Вестник Кемеровского государственного университета. 2004. № 3(7). С. 124–129.

10. *Li Wang, Ji Zhu, Hui Zou*. The doubly regularized support vector machine // *Statistica Sinica*. V. 16. No. 2. P. 589–615.
11. *Tatarchuk A., Mottl V., Eliseyev A., Windridge D*. Selectivity supervision in com-bining pattern-recognition modalities by feature- and kernel-selective Support Vector Machines // *Proc. of the 19<sup>th</sup> Int. Conf. on Pattern Recognition*, Vol. 1–6, IEEE, ISBN 978-1-4244-2174-9. 2008. P. 2336–2339.
12. *Tatarchuk A., Urlov E., Mottl V., Windridge D*. A support kernel machine for supervised selective combining of diverse pattern-recognition modalities // *Multiple Classifier Systems. Lecture Notes In Computer Science*. V. 5997. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. P. 165–174.
13. *Алкезуини М.М., Горбаченко В.И.* Совершенствование алгоритмов обучения сетей радиальных базисных функций для решения задач аппроксимации // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2017. № 3 (23). С. 123–138.
14. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
15. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
16. *Marquardt D.W.* An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // *J. Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963. V. 11. No 2. P. 431–441.
17. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979.
18. *Wolfe Ph.* Note on a method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions // *Math. Program*. 1974. V. 7. No. 1. P. 380–383.
19. *Lemarechal C.* An extension of Davidon methods to non-differentiable problems // *Math. Program. Study*. 1975. V. 3. P. 95–109.
20. *Нурминский Е.А., Тьен Д.* Метод сопряженных субградиентов с ограниченной памятью // *Автомат. и телемех.* 2014. № 4. P. 67–80; *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 4. P. 646–656.
21. *Крутиков В.Н., Вершинин Я.Н.* Многоступенчатый субградиентный метод для решения негладких задач минимизации высокой размерности // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 3. С. 5–19.
22. *Крутиков В.Н., Вершинин Я.Н.* Субградиентный метод минимизации с коррекцией векторов спуска на основе пар обучающих соотношений // *Вестник Кемеровского государственного университета*. 2014. Т.1. № 1 (57). С. 46–54. DOI: <https://doi.org/10.21603/2078-8975-2014-1-46-54>
23. *Крутиков В.Н., Горская Т.А.* Семейство релаксационных субградиентных методов с двухранговой коррекцией матриц метрики // *Экономика и мат. методы*. 2009. Т. 45. Вып. 4. С. 37–80.
24. *Крутиков В.Н., Петрова Т.В.* Релаксационный метод минимизации с растяжением пространства в направлении субградиента // *Экономика и мат. методы*. 2003. Т. 39. Вып. 1. С. 106–119.
25. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1980. 256 с.
26. *Tibshirani R.J.* Regression shrinkage and selection via the lasso // *J. Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. 1996. V. 58. No. 1. P. 267–288.
27. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978.
28. *Conn A.R., Gould N.I.M., Toint P.L.* Trust regions methods. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. 959 p.
29. *Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А.* Глубокое обучение. – М.: ДМК Пресс, 2017. 652 с.
30. *Sutskever I., Martens J., Dahl G., Hinton G.* On the importance of initialization and momentum in deep learning // *Proc. 30<sup>th</sup> Int. Conf. on Machine Learning*. V. 28. Atlanta, Georgia, 2013. P. 1139–1147.

Krutikov V.N., Samoylenko N.S. (2018) ON THE CONVERGENCE RATE OF THE SUBGRADIENT METHOD WITH METRIC VARIATION AND ITS APPLICATIONS IN NEURAL NETWORK APPROXIMATION SCHEMES *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 22–37

DOI 10.17223/19988621/55/3

Keywords: method, subgradient, minimization, rate of convergence, neural networks, regularization.

In this paper, the relaxation subgradient method with rank 2 correction of metric matrices is studied. It is proven that, on high-convex functions, in the case of the existence of a linear coordinate transformation reducing the degree of the task casualty, the method has a linear convergence rate corresponding to the casualty degree. The paper offers a new efficient tool for choosing the initial approximation of an artificial neural network. The use of regularization allowed excluding the overfitting effect and efficiently deleting low-significant neurons and intra-neural connections. The ability to efficiently solve such problems is ensured by the use of the subgradient method with metric matrix rank 2 correction. It has been experimentally proved that the convergence rate of the quasi-Newton method and that of the method under research are virtually equivalent on smooth functions. The method has a high convergence rate on non-smooth functions as well. The method's computing capabilities are used to build efficient neural network learning algorithms. The paper describes an artificial neural network learning algorithm which, together with the redundant neuron suppression, allows obtaining reliable approximations in one count.

AMS Mathematical Subject Classification: 65K05, 90C30, 82C32

*KRUTIKOV Vladimir Nikolayevich* (Doctor of Technical Science, Professor at the Department of Applied Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation).

*SAMOYLENKO Natalya Sergeevna* (Department of Applied Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation).

#### REFERENCES

1. Vorontsov K.V. *Course of lectures "Mathematical methods of learning by precedents"* <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf>
2. Khaikin S. (2006) *Neyronnyye seti: polnyy kurs [Neural networks: a full course]*. Moscow: Williams. 1104 p.
3. Osovski S. (2016) *Neyronnyye seti dlya obrabotki informatsii [Neural networks for information processing]*. Moscow: Goryachaya liniya – Telecom. 448 p.
4. Gorban A.N. (1990) *Obucheniye neyronnykh setey [Training of neural networks]*. Moscow: USSR – USA JV Paragraph. 160 p.
5. Burnaev E.V., Prikhodko P.V. (2013) On a method for constructing ensembles of regression models. *Autom. Remote Control*. 74(10). pp. 1630–1644. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117913100044>.
6. Gorbachenko V.I., Zhukov M.V. (2017) Solving boundary value problems of mathematical physics using radial basis function networks. *Comput. Math. and Math. Phys.* 57(1). pp. 145–155. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542517010079>.
7. Kretinin A.V. (2006) Metod vzveshennykh nevyazok na baze neyrosetevykh probnykh funktsiy dlya modelirovaniya zadach gidrodinamiki [The weighted residuals method based on neural net trial functions for simulation of hydrodynamics problems]. *Siberian J. Num. Math.* 9(1). pp. 23–35.
8. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. (1986) *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]*. Moscow: Nauka.

9. Krutikov V.N., Aryshev D.V. (2004) Algorithm posledovatel'nogo otseva neinformativnykh peremennykh lineynoy modeli [Algorithm of sequential screening of non-informative variables of a linear model]. *Bulletin of Kemerovo State University*. 3(7). pp. 124–129.
10. Li Wang, Ji Zhu, Hui Zou. (2006) The doubly regularized support vector machine. *Statistica Sinica*. 16. pp. 589–615.
11. Tatarchuk A., Mottl V., Eliseyev A., Windridge D. (2008) Selectivity supervision in combining pattern-recognition modalities by feature- and kernel-selective support vector machines. *Proceedings of the 19th International Conference on Pattern Recognition. Vol. 1–6*. pp. 2336–2339.
12. Tatarchuk A.I., Urlov E., Mottl V., Windridge D. (2010) A support kernel machine for supervised selective combining of diverse pattern-recognition modalities. *Multiple Classifier Systems. Lecture Notes In Computer Science*. 5997. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg. pp. 165–174.
13. Alkezuini M.M., Gorbachenko V.I. (2017) Sovershenstvovaniye algoritmov obucheniya setey radial'nykh bazisnykh funktsiy dlya resheniya zadach approksimatsii [Improving the training algorithms for the networks of radial basis functions for solving approximation problems]. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve – Models, systems, networks in economics, engineering, nature and society*. 3(23). pp. 123–138.
14. Polyak B.T. (1983) *Vvedeniye v optimizatsiyu* [Introduction to optimization]. Moscow: Nauka.
15. Dennis J., Schnabel R. (1988) *Chislennyye metody bezuslovnoy optimizatsii i resheniya nelineynykh uravneniy* [Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations]. Moscow: Mir.
16. Marquardt D.W. (1963) An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 11(2). pp. 431–441.
17. Shore N.Z. (1979) *Metody minimizatsii nedifferentsiruyemykh funktsiy i ikh prilozheniya* [Minimization Methods for Non-Differentiable Functions]. Kiev: Naukova Dumka.
18. Wolfe Ph. (1974) Note on a method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions. *Math. Program*. 7(1). pp. 380–383.
19. Lemarechal C. (1975) An extension of Davidon methods to non differentiable problems. *Math. Program. Study*. 3. pp. 95–109.
20. Nurminskii E.A., Thien D. (2014) Method of conjugate subgradients with constrained memory. *Autom. Remote Control*. 75(4). pp. 646–656. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117914040055>.
21. Krutikov V.N., Vershinin Ya.N. (2014) Mnogoshagovyy subgradiyentnyy metod dlya resheniya nekladkikh zadach minimizatsii vysokoy razmernosti [The subgradient multistep minimization method for nonsmooth high-dimensional problems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(29). pp. 5–19.
22. Krutikov V.N., Vershinin Ya.N. (2014) Subgradiyentnyy metod minimizatsii s korrktsiyey vektorov spuska na osnove par obuchayushchikh sootnosheniy [Subgradient minimization method with descent vectors correction based on pairs of training relations]. *Bulletin of Kemerovo State University*. 1-1(57). pp. 46–54. DOI: <https://doi.org/10.21603/2078-8975-2014-1-46-54>.
23. Krutikov V.N., Gorskaya T.A. (2009) Semeystvo relaksatsionnykh subgradiyentnykh metodov s dvukhrangovoy korrktsiyey matrits metriki [A family of subgradient relaxation methods with rank 2 correction of metric matrices]. *Ekonomika i mat. metody – Economy and math. methods*. 45(4). pp. 105–120.
24. Krutikov V.N., Petrova T.V. (2003) Relaksatsionnyy metod minimizatsii s rastyazheniyem prostranstva v napravlenii subgradiyenta [Relaxation method of minimization with space extension in the subgradient direction]. *Ekonomika i mat. metody – Economy and math. methods*. 39(1). pp. 106–119.
25. Karmanov V.G. (1980) *Matematicheskoye programmirovaniye* [Mathematical programming]. Moscow: Nauka.

26. Tibshirani R.J. (1996) Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. 58(1). pp. 267–288.
27. Tou J.T., Gonzalez R.C. (1974) *Pattern recognition principles*. Reading, MA: Addison-Wesley.
28. Conn A.R., Gould N.I.M., Toint P.L. (2000) *Trust region methods*. Philadelphia PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). 959 p.
29. Goodfellow J. et al. (2016) *Deep Learning*. MIT Publ.
30. Sutskever I. et al. (2013) On the importance of initialization and momentum in deep learning. *Proceedings of the 30th International Conference on International Conference on Machine Learning*. 28. Atlanta, Georgia. pp. 1139–1147.

Е.А. Тимошенко

### ГРУППА ГРОТЕНДИКА $K_0$ ПРОИЗВОЛЬНОГО $\text{csp}$ -КОЛЬЦА<sup>1</sup>

Доказывается критерий конечной порождённости проективного модуля над  $\text{csp}$ -кольцом. Также показано, что группа Гротендика  $K_0$  всякого  $\text{csp}$ -кольца есть свободная группа счётного ранга.

**Ключевые слова:**  $\text{csp}$ -кольцо, проективный модуль, группа Гротендика.

Цель настоящей работы – выяснить, как функтор  $K_0$  действует на  $\text{csp}$ -кольца и на гомоморфизмы между ними. Для этого используются свойства проективных модулей над  $\text{csp}$ -кольцами, установленные автором ранее.

Через  $\mathbf{Z}$  будет обозначаться кольцо целых чисел. Символ  $\blacksquare$  обозначает конец доказательства или его отсутствие.

Пусть  $L$  – некоторое бесконечное множество простых чисел. Для числа  $p \in L$  зафиксируем кольцо  $R_p$ , совпадающее либо с кольцом целых  $p$ -адических чисел, либо с некоторым кольцом вычетов  $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$  (для разных  $p$  число  $k > 0$  может быть разным). Обозначим

$$K = \prod_{p \in L} R_p \quad \text{и} \quad T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset K;$$

ясно, что  $T$  является идеалом кольца  $K$ .

Будем называть  $\text{csp}$ -кольцом каждое подкольцо  $R$  кольца  $K$ , такое, что  $T \subset R$  и  $R/T$  является полем. Заметим, что мощность этого поля не превышает мощности континуума; из результатов статей [1–3] вытекает, что поле  $R/T$  может оказаться несчётным.

Если  $L$  совпадает с множеством всех простых чисел и каждое  $R_p$  есть кольцо целых  $p$ -адических чисел, а  $R/T$  изоморфно полю рациональных чисел, то соответствующее  $\text{csp}$ -кольцо (оно определено однозначно) называют *кольцом псевдорациональных чисел*. Это кольцо было независимо введено в работах Фомина [4] и Крылова, Пахомовой и Подберезиной [5] для исследования ряда важных классов смешанных абелевых групп (в частности,  $\text{sr}$ -групп). Позже Крылов предложил рассматривать  $\text{csp}$ -кольца (как обобщение кольца псевдорациональных чисел).

Кольцо  $R_p$  и его единичный элемент  $e_p$  можно естественным образом отождествить с соответствующими идеалом и идемпотентом в кольце  $R$ , в этом случае  $R_p = Re_p$ . Можно заметить, что кольцо  $R_p$  допускает в точности одну модульную структуру как над самим собой, так и над кольцом  $R$ ; поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать все  $R_p$  как  $R$ -модули, не оговаривая это дополнительно.

Напомним основные понятия, которые понадобятся в дальнейшем.

**Определение.** Пусть  $\langle \Phi, + \rangle$  – коммутативный моноид. Введём на множестве  $\Phi \times \Phi$  отношение эквивалентности: положим  $(\xi, \eta) \approx (\mu, \nu)$  в том и только в том случае, когда  $\xi + \nu + \zeta = \mu + \eta + \zeta$  хотя бы для одного  $\zeta \in \Phi$ . Далее, будем считать, что суммой класса эквивалентности, содержащего пару  $(\xi, \eta)$ , и того класса экви-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (госзадание № 1.12877.2018/12.1).

валентности, который содержит  $(\mu, \nu)$ , является класс, содержащий  $(\xi + \mu, \eta + \nu)$ . Относительно указанной операции множество всех классов эквивалентности пар из  $\Phi \times \Phi$  образует группу, которая называется *группой Гротендика* моноида  $\Phi$ .

Если  $R$  – некоторое кольцо, то через  $K_0(R)$  обозначается группа Гротендика моноида классов изоморфных конечно порождённых проективных  $R$ -модулей с операцией взятия прямой суммы (см. [6]).

Для описания группы  $K_0$  произвольного  $csp$ -кольца  $R$  нам потребуются некоторые дополнительные сведения. Как отмечено в [7], элемент кольца  $R$  является идемпотентом тогда и только тогда, когда он совпадает с элементом вида

$$e_X = \sum_{p \in X} e_p \quad \text{или} \quad 1 - e_X = 1 - \sum_{p \in X} e_p,$$

где  $X$  – конечное (возможно, пустое) подмножество множества  $L$ . В дальнейшем, используя обозначение  $e_X$ , мы будем автоматически полагать, что множество  $X$  является конечным. В работе [7] также показано, что подмножество из  $R$  будет идеалом в  $R$  тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством одного из следующих двух типов:

$$J = \bigoplus_{p \in L} J_p; \tag{1}$$

$$J = (1 - e_X)R \oplus \left( \bigoplus_{p \in X} J_p \right), \tag{2}$$

где  $J_p$  – произвольные идеалы соответствующих колец  $R_p$ .

С помощью матриц и определителей с элементами из  $csp$ -колец автором ранее была доказана

**Теорема 1 [8].** Каждый проективный  $R$ -модуль разлагается в прямую сумму подмодулей, изоморфных идеалам кольца  $R$ . ■

Следующий факт для удобства приведём вместе с доказательством.

**Предложение 2 [8].** Модуль  $M_R$  проективен тогда и только тогда, когда

$$M \cong \left( \bigoplus_{i \in I} M_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{p \in L} F_p \right), \tag{3}$$

где  $F_p$  – некоторые свободные  $R_p$ -модули, а все  $M_i$  – некоторые идеалы кольца  $R$  вида  $(1 - e_X)R$  (множество  $X$ , вообще говоря, зависит от индекса  $i$ ).

**Доказательство.** Пусть  $M$  – проективный  $R$ -модуль, тогда в силу теоремы 1 этот модуль будет изоморфен прямой сумме идеалов кольца  $R$ , которые, как мы знаем, имеют вид (1) или (2). Ясно, что все входящие в прямое разложение проективного модуля идеалы тоже должны быть проективными. Если  $R_p$  есть кольцо целых  $p$ -адических чисел, то всякий ненулевой идеал  $J_p \subset R_p$  как  $R$ -модуль будет изоморфен  $R_p$ . Если же  $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ , то из всех идеалов кольца  $R_p$  проективными как  $R$ -модули будут лишь 0 и  $R_p$  (поскольку только эти идеалы являются проективными  $R_p$ -модулями). Это означает, что любой проективный идеал кольца  $R$  обязательно изоморфен как  $R$ -модуль идеалу  $J$  вида (1) или (2), такому, что для всякого  $p$  идеал  $J_p$  совпадает либо с 0, либо с  $R_p$ . Группируя прямые слагаемые вида  $R_p$ , получаем, что имеет место изоморфизм (3).

Обратно, любой  $R$ -модуль вида (3) является проективным, так как он изоморфен прямой сумме семейства идеалов, каждый из которых служит для кольца  $R$  прямым слагаемым. ■

Для всякого модуля  $M_R$  размерность  $r(M)$  фактор-модуля  $M/MT$  как пространства над полем  $R/T$  назовём *псевдорангом* модуля  $M$ . Очевидно, что псевдоранг прямой суммы всякого семейства  $R$ -модулей равняется сумме псевдорангов этих модулей. Идеалы вида (1) и (2) имеют псевдоранги, равные соответственно 0 и 1; отсюда, в частности, следует, что для модуля вида (3) выполнено  $r(M) = |I|$ .

Пусть для  $R$ -модуля  $M$  имеет место изоморфизм (3). Тогда для любых  $i \in I$  и  $p \in L$  идеал  $M_i e_p$  либо совпадает с  $R_p$ , либо равен 0. Это означает, что при любом  $p \in L$  модуль  $M e_p$  является свободным  $R_p$ -модулем; ранг этого свободного модуля (определяемый однозначно) далее будем обозначать через  $r_p(M)$ . Таким образом, всякому проективному модулю  $M_R$  можно сопоставить кардинальные числа  $r(M)$  и  $\{r_p(M)\}_{p \in L}$ . Полученный набор кардиналов мы назовём *системой инвариантов* проективного модуля  $M$  (в статье [9] было впервые предложено использовать эту систему инвариантов для описания проективных модулей).

**Предложение 3 [8].** Пусть  $A$  и  $M$  – проективные  $R$ -модули, причём модуль  $A$  вкладывается в  $M$ . Тогда  $r(A) \leq r(M)$  и  $r_p(A) \leq r_p(M)$  при всех  $p \in L$ . ■

В статьях [8, 10] был доказан ряд важных структурных теорем о проективных модулях над сср-кольцами.

**Теорема 4 [8, 10].** Два проективных  $R$ -модуля изоморфны в том и только в том случае, когда они имеют одинаковые системы инвариантов. ■

Следующий результат показывает, какие условия должны быть наложены на набор кардинальных чисел, чтобы он служил системой инвариантов некоторого проективного  $R$ -модуля.

**Теорема 5 [8, 10].** Пусть  $\lambda$  и  $\{\lambda_p\}_{p \in L}$  – произвольные кардинальные числа, и пусть  $W = \{p \in L \mid \lambda_p < \lambda\}$ . Проективный  $R$ -модуль  $M$ , одновременно удовлетворяющий всем равенствам  $r(M) = \lambda$  и  $r_p(M) = \lambda_p$ , существует в том и только в том случае, когда

(А) множество  $W$  конечно

или

(В) множество  $W$  счётно и последовательность  $\{\lambda_p\}_{p \in W}$  сходится к  $\lambda$ . ■

При помощи приведённых результатов можно получить критерий конечной порождённости проективного  $R$ -модуля.

**Теорема 6.** Для проективного  $R$ -модуля  $M$  равносильны следующие условия:

1) модуль  $M$  конечно порождён;

2) все кардинальные инварианты модуля  $M$  конечны и  $r_p(M) = r(M)$  почти для всех  $p \in L$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\lambda = r(M)$  и  $\lambda_p = r_p(M)$ .

2)  $\Rightarrow$  1). Из условия 2) вытекает, что множество  $W = \{p \in L \mid \lambda_p < \lambda\}$  конечно, т.е. выполнено условие (А) теоремы 5. Проективный модуль  $A$  зададим условием

$$A = \left( \bigoplus_{\lambda} (1 - e_W)R \right) \oplus \left( \bigoplus_{p \in L} F_p \right),$$

где  $F_p$  – это свободный  $R_p$ -модуль ранга

$$r_p(F_p) = \begin{cases} \lambda_p, & \text{если } p \in W, \\ \lambda_p - \lambda, & \text{если } p \in L \setminus W. \end{cases}$$

Тогда  $r(A) = \lambda r((1 - e_W)R) = \lambda$ ; далее, если  $p \in W$ , то

$$r_p(A) = \lambda r_p((1 - e_W)R) + r_p(F_p) = 0 + \lambda_p = \lambda_p,$$

а если выполнено  $p \in L \setminus W$ , то справедливы равенства

$$r_p(A) = \lambda \cdot r_p((1 - e_W)R) + r_p(F_p) = \lambda + (\lambda_p - \lambda) = \lambda_p,$$

т.е. все инварианты модулей  $M$  и  $A$  совпадают. Так как строение проективного модуля  $M_R$  однозначно определяется его системой инвариантов, получаем, что  $M \cong A$ . Все кардиналы  $\lambda_p$  конечны, поэтому все свободные  $R_p$ -модули  $F_p$  имеют конечный ранг и, значит, являются конечно порождёнными  $R$ -модулями. Из 2) следует, что множество тех  $p \in L$ , для которых  $F_p \neq 0$ , конечно; отсюда получаем, что  $M$  – конечно порождённый  $R$ -модуль.

1)  $\Rightarrow$  2). Пусть  $M_R$  обладает конечной системой образующих, которая состоит из  $s$  элементов. В силу проективности модуля  $M$  можно считать, что  $M$  – прямое слагаемое свободного модуля  $R^s$ ; пусть  $R^s = M \oplus A$ . Ввиду предложения 3 инварианты модулей  $M$  и  $A$  не могут оказаться больше соответствующих инвариантов модуля  $R^s$ , т.е. они не превышают числа  $s$ . Из  $\lambda < \aleph_0$  следует, что условие (B) из теоремы 5 не выполнено, а значит, выполнено условие (A). Таким образом, почти для всех  $p \in L$  имеем  $r_p(M) \geq r(M)$ . Применяя аналогичные рассуждения к проективному модулю  $A$ , получаем, что при почти всех  $p \in L$  справедливы неравенства  $r_p(M) \geq r(M)$  и  $r_p(A) \geq r(A)$ . Для всех таких  $p$  выполнено

$$s = r(R^s) = r(M) + r(A) \leq r_p(M) + r_p(A) = r_p(R^s) = s,$$

откуда, в частности, следует равенство  $r_p(M) = r(M)$ . ■

Через  $\Phi$  обозначим множество всех функций  $\xi: L \rightarrow \mathbf{Z}$ , имеющих неотрицательные значения и таких, что  $\xi(p)$  равно одному и тому же числу почти для всех  $p \in L$ . Очевидно, что  $\Phi$  будет коммутативным моноидом относительно операции поточечного сложения.

Для всякого конечно порождённого проективного модуля  $M_R$  и всякого  $p \in L$  положим  $\xi^M(p) = r_p(M)$ , тогда ввиду теоремы 6 выполнено  $\xi^M \in \Phi$ . Очевидно, что  $\xi^{M \oplus A} = \xi^M + \xi^A$  и что из  $M \cong A$  всегда следует  $\xi^M = \xi^A$ . Обратно, если  $\xi^M = \xi^A$ , то по теореме 6 будет справедливо равенство  $r(M) = r(A)$ , а значит (в силу теоремы 4), выполнено  $M \cong A$ .

Зафиксируем функцию  $\mu \in \Phi$ . Для всякого  $p \in L$  положим  $\lambda_p = \mu(p)$ ; через  $\lambda$  обозначим то неотрицательное число, которое совпадает со значением  $\mu(p)$  при почти всех  $p \in L$ . Кардинальные числа  $\lambda$  и  $\{\lambda_p\}_{p \in L}$  удовлетворяют условию (A) теоремы 5, поэтому из теорем 5 и 6 следует, что  $\mu = \xi^M$  для некоторого конечно порождённого проективного  $R$ -модуля  $M$ . Таким образом,  $\Phi$  есть моноид классов изоморфных конечно порождённых проективных  $R$ -модулей.

**Теорема 7.** Для всякого csp-кольца  $R$  группа Гротендика  $K_0(R)$  представляет собой свободную группу счётного ранга.

*Доказательство.* Определим отображение  $h$  из  $\Phi \times \Phi$  в группу  $\mathbf{Z}^L$  всех функций  $L \rightarrow \mathbf{Z}$ , полагая  $h(\xi, \eta) = \xi - \eta$  (вычитание осуществляется поточечно). Так как в  $\Phi$  справедлив закон сокращения, то для произвольных  $\xi, \eta, \mu, \nu \in \Phi$  следующие три условия будут равносильны:

- 1)  $\xi + \nu + \zeta = \mu + \eta + \zeta$  для некоторого  $\zeta \in \Phi$ ;
- 2)  $\xi + \nu = \mu + \eta$ ;
- 3)  $h(\xi, \eta) = h(\mu, \nu)$ .

Если задать на  $\Phi \times \Phi$  операцию покоординатного сложения, получим

$$h((\xi, \eta) + (\mu, \nu)) = h(\xi + \mu, \eta + \nu) = \xi + \mu - \eta - \nu = h(\xi, \eta) + h(\mu, \nu)$$

для произвольных  $\xi, \eta, \mu, \nu \in \Phi$ . С учётом равносильности условий 1) и 3) отсюда можно заключить, что образ  $h(\Phi \times \Phi)$  отображения  $h$  служит группой Гротендика моноида  $\Phi$ . Остаётся лишь показать, что этот образ представляет собой прямую сумму счётного числа копий группы  $\mathbf{Z}$ .

В самом деле, рассмотрим множество функций  $\Lambda = \{\mu_0\} \cup \{\mu_p \mid p \in L\} \subset \mathbf{Z}^L$ , где  $\mu_0(p) = \mu_p(p) = 1$  для любого  $p \in L$  и  $\mu_p(q) = 0$  для любых различных  $p, q \in L$ . Для всякого  $p \in L \cup \{0\}$  имеем  $\mu_p \in \Phi$  и, следовательно,  $\mu_p = h(\mu_p, 0) \in h(\Phi \times \Phi)$ . Ясно также, что входящие в множество  $\Lambda$  функции являются линейно независимыми и порождают свободную группу. Заметим, что для произвольной функции  $\mu \in h(\Phi \times \Phi)$  значение  $\mu(p)$  при почти всех  $p \in L$  равно одному и тому же числу  $m \in \mathbf{Z}$ , т.е. множество  $Y = \{p \in L \mid \mu(p) \neq m\}$  конечно. Тогда

$$\mu = m \cdot \mu_0 + \sum_{p \in Y} (\mu(p) - m) \mu_p.$$

Таким образом,  $h(\Phi \times \Phi)$  есть свободная группа с базисом  $\Lambda$ . ■

Мы показали, что группу  $K_0(R)$  можно отождествить с подгруппой  $h(\Phi \times \Phi)$  группы  $\mathbf{Z}^L$ . Известно (см. [6, 11]), что всякому кольцевому гомоморфизму  $R \rightarrow S$  соответствует гомоморфизм абелевых групп  $K_0(R) \rightarrow K_0(S)$ , индуцируемый функтором  $-\otimes_R S: \text{mod-}R \rightarrow \text{mod-}S$  (последний, как легко видеть, переводит конечно порождённые проективные модули категории  $\text{mod-}R$  в модули, которые конечно порождены и являются проективными в  $\text{mod-}S$ ). Выясним, как этот гомоморфизм группы действует в случае, когда  $R$  и  $S$  – сср-кольца.

Пусть, помимо сср-кольца  $R$ , задано ещё одно сср-кольцо  $S$ , причём

$$U = \bigoplus_{p \in Z} S_p \subset S \subset \prod_{p \in Z} S_p = H$$

( $Z$  – некоторое бесконечное множество простых чисел). Обозначим через  $f_p$ , где  $p \in Z$ , идемпотент кольца  $S$ , лежащий в  $S_p$ .

Как обычно, мы считаем, что кольцевой гомоморфизм обязательно переводит единичный элемент кольца в единичный элемент.

**Предложение 8.** Пусть  $\varphi: R \rightarrow S$  – некоторый кольцевой гомоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (а)  $Z \subset L$ ;
- (б) при любом  $p \in Z$  существует единственный сюръективный гомоморфизм колец  $\varphi_p: R_p \rightarrow S_p$ ;
- (в) для всякого элемента  $x = (x_p)_{p \in L} \in R$  выполнено  $\varphi(x) = (\varphi_p(x_p))_{p \in Z}$ ;
- (г) поле  $R/T$  вкладывается в  $S/U$  в качестве подполя.

**Доказательство.** (а) Пусть  $p \in Z$ . Тогда элемент  $1_S = \varphi(1_R)$  не делится на  $p$ , из чего вытекает, что и  $1_R$  не делится на число  $p$ . С другой стороны, аддитивная группа  $R^+$  кольца  $R$  является  $p$ -делимой при всех  $p \notin L$ . Таким образом,  $Z \subset L$ .

(б) Зафиксируем число  $p \in Z$ . Если  $R_p$  – кольцо целых  $p$ -адических чисел, то требуемое утверждение очевидно. Допустим теперь, что  $R_p = \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}$ . Из того, что  $1_S = \varphi(1_R)$ , следует, что  $1_S$  есть сумма идемпотентов  $\varphi(e_p)$  и  $\varphi(1_R - e_p)$ ; при этом ввиду равенства  $p^k \varphi(e_p) = 0$  идемпотент  $\varphi(e_p)$  совпадает с 0 или с  $f_p$ . Идемпотент  $\varphi(1_R - e_p)$  не может совпадать с  $1_S$ , так как  $1_R - e_p$  делится на  $p$  в кольце  $R$ , но  $1_S$  не делится на  $p$  в кольце  $S$ . Таким образом, имеем  $\varphi(e_p) = f_p$ . Из равенства  $p^k f_p = 0$  легко вывести, что существует единственный сюръективный гомоморфизм колец  $R_p \rightarrow S_p$ .

(в) Зададим аддитивный гомоморфизм  $\psi: R \rightarrow H$ , полагая  $\psi(x) = (\varphi_p(x_p))_{p \in Z}$  для всех  $x = (x_p)_{p \in L} \in R$ . Тогда  $\varphi - \psi \in \text{Hom}(R, H)$ , причём порождённая единичным элементом  $1_R$  кольца  $R$  циклическая группа  $\langle 1_R \rangle$  лежит в ядре гомоморфизма  $\varphi - \psi$ . Легко убедиться, что группа  $R/\langle 1_R \rangle$  делима, а  $H$  – редуцированная группа. Поэтому  $\text{Hom}(R/\langle 1_R \rangle, H) = 0$ , а значит,  $\varphi = \psi$ , что и требовалось.

(г) Из пункта (в), в частности, вытекает, что  $\varphi(T) = U$ . Тогда гомоморфизм  $\varphi$  индуцирует вложение  $R/T \rightarrow S/U$ . Предложение доказано. ■

В ситуации, описанной в предложении 8, обозначим через  $\alpha$  тот гомоморфизм  $\mathbf{Z}^L \rightarrow \mathbf{Z}^Z$ , который сопоставляет всякой функции  $L \rightarrow \mathbf{Z}$  её ограничение на множество  $Z$ . Ясно, что  $R \otimes_R S \cong S$ ; кроме того,  $R_p \otimes_R S \cong S_p$ , если  $p \in Z$ , и  $R_p \otimes_R S = 0$ , если  $p \in L \setminus Z$ . Пусть  $\{\delta_0\} \cup \{\delta_p \mid p \in Z\} \subset \mathbf{Z}^Z$  есть базис свободной группы  $K_0(S)$ , построенный так же, как строился базис группы  $K_0(R)$ . Нетрудно убедиться, что проективному модулю  $R$  соответствует функция  $\mu_0$ , а проективным модулям  $R_p$ , где  $p \in L$ , — функции  $\mu_p$ ; аналогичные утверждения справедливы и для проективных  $S$ -модулей  $S$  и  $S_p$ . Заметим, что  $\alpha(\mu_0) = \delta_0$ , а функция  $\alpha(\mu_p)$  равна  $\delta_p$ , когда  $p \in Z$ , и равна 0, когда  $p \in L \setminus Z$ . Поэтому из изоморфизмов, приведённых выше, следует, что групповой гомоморфизм  $K_0(R) \rightarrow K_0(S)$ , индуцируемый кольцевым гомоморфизмом  $\varphi$ , представляет собой ограничение отображения  $\alpha: \mathbf{Z}^L \rightarrow \mathbf{Z}^Z$  на подгруппу  $K_0(R)$  группы  $\mathbf{Z}^L$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко Е.А. О базовых полях csp-колец // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. № 4. С. 555–565.
2. Тимошенко Е.А. Чисто трансцендентные расширения поля рациональных чисел как базовые поля csp-колец // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 30–39.
3. Тимошенко Е.А. О базовых полях csp-колец. II // Фундам. и прикл. математика. 2015. Т. 20. № 5. С. 149–156.
4. Fomin A.A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Basel et al.: Birkhäuser, 1999. P. 87–100. DOI: 10.1007/978-3-0348-7591-2.
5. Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 47–51.
6. Rosenberg J. Algebraic K-theory and its applications. New York: Springer, 1994. DOI: 10.1007/978-1-4612-4314-4.
7. Зиновьев Е.Г. Об одном обобщении колец псевдорациональных чисел // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 46–47.
8. Тимошенко Е.А. Проективные модули над csp-кольцами // Журнал СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5. № 4. С. 581–585.
9. Царев А.В. Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. 2006. Т. 80. № 3. С. 437–448. DOI: 10.4213/mzm2830.
10. Тимошенко Е.А. Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Журнал СФУ. Математика и физика. 2011. Т. 4. № 4. С. 541–550.
11. Bass H. Algebraic K-theory. New York; Amsterdam: W.A. Benjamin, 1968.

Статья поступила 07.06.2018г.

Timoshenko E.A. (2018) THE GROTHENDIECK GROUP  $K_0$  OF AN ARBITRARY CSP-RING *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 38–44

DOI 10.17223/19988621/55/4

Keywords: csp-ring, projective module, Grothendieck group.

Fix an infinite set  $L$  of primes. For every  $p \in L$ , let  $R_p$  be either the ring of  $p$ -adic integers or the residue class ring  $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$  (the number  $k > 0$  may depend on  $p$ ). Define

$$K = \prod_{p \in L} R_p \quad \text{and} \quad T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset K;$$

it is clear that  $T$  is an ideal of the ring  $K$ . By a csp-ring we mean any subring  $R$  of the ring  $K$  such that  $T \subset R$  and the quotient ring  $R/T$  is a field. The symbol  $K_0(R)$  denotes the Grothendieck group of the monoid of isomorphism classes of finitely generated projective modules over  $R$  (with direct sum as the operation).

We find necessary and sufficient conditions for a module over  $R$  to be a finitely generated projective module. These conditions enable us to prove the following theorem.

**Theorem 7.** For every csp-ring  $R$ , the Grothendieck group  $K_0(R)$  is a free group of countable rank.

If we have two csp-rings  $R$  and  $S$ , then every ring homomorphism  $R \rightarrow S$  induces a group homomorphism  $K_0(R) \rightarrow K_0(S)$ . We describe this group homomorphism for arbitrary csp-rings  $R$  and  $S$ .

AMS Mathematical Subject Classification: 19A49, 13D15, 18F30

*TIMOSHENKO Egor Aleksandrovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Timoshenko E.A. (2010) Base fields of csp-rings. *Algebra and Logic*. 49(4). pp. 378–385. DOI: 10.1007/s10469-010-9102-9.
2. Timoshenko E.A. (2013) Chisto transtsendentnye rasshireniya polya ratsional'nykh chisel kak bazovye polya csp-kolets [Purely transcendental extensions of the field of rational numbers as base fields of csp-rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(25). pp. 30–39.
3. Timoshenko E.A. (2018) Base fields of csp-rings. II. *J. Math. Sci. (New York)*. 230(3). pp. 451–456. DOI: 10.1007/s10958-018-3753-9.
4. Fomin A.A. (1999) Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers. *Abelian Groups and Modules*. Basel et al.: Birkhäuser. pp. 87–100. DOI: 10.1007/978-3-0348-7591-2.
5. Krylov P.A., Pakhomova E.G., Podberezina E.I. (2000) Ob odnom klasse smeshannykh abelevykh grupp [On a class of mixed abelian groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 47–51.
6. Rosenberg J. (1994) *Algebraic K-theory and its applications*. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-4314-4.
7. Zinoviev E.G. (2006) Ob odnom obobshchenii kolets psevdoratsional'nykh chisel [On a generalization of rings of pseudorational numbers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 290. pp. 46–47.
8. Timoshenko E.A. (2012) Proektivnye moduli nad csp-kol'tsami [Projective modules over csp-rings]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Matematika i fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 5(4). pp. 581–585.
9. Tsarev A.V. (2006) Projective and generating modules over the ring of pseudorational numbers. *Math. Notes*. 80(3). pp. 417–427. DOI: 10.1007/s11006-006-0155-y.
10. Timoshenko E.A. (2011) Proektivnye moduli nad kol'tsom psevdoratsional'nykh chisel [Projective modules over the ring of pseudorational numbers]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Matematika i fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 4(4). pp. 541–550.
11. Bass H. (1968) *Algebraic K-theory*. New York; Amsterdam: W.A. Benjamin.

А.К. Уринов, Т.Г. Эргашев

**КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ  
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К НАХОЖДЕНИЮ  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ  
ГЕЛЬМГОЛЬЦА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Вводится в рассмотрение новый класс конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных, изучаются их свойства, строятся интегральные представления и определяется система уравнений с частными производными, которую удовлетворяет данная функция. Оказывается, все фундаментальные решения обобщенного уравнения Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами выписываются через нововведенную конфлюэнтную гипергеометрическую функцию. С помощью установленной здесь формулы разложения для конфлюэнтной функции определен порядок особенности фундаментальных решений рассматриваемого эллиптического уравнения.

**Ключевые слова:** конфлюэнтная гипергеометрическая функция, функции Лауричелли, фундаментальные решения, обобщенное уравнение Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами, формула разложения.

Нет необходимости говорить о важности свойств гипергеометрических функций. Любой исследователь, имеющий дело с практическими применениями дифференциальных или интегральных уравнений, с ними встречается. Решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэродинамике, квантовой механике и теории потенциалов, приводит к изучению гипергеометрических функций.

Разнообразие задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост их числа. Особенно большие успехи в теории гипергеометрической функции одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для функций двух и многих переменных. Книги [1] и [2] посвящены систематическому изложению результатов по гипергеометрическим функциям двух и трех переменных соответственно. В литературе принято делить гипергеометрические функции на два вида: полные и конфлюэнтные (определения см. [1]). Конфлюэнтные гипергеометрические функции во всех отношениях значительно мало изучены по сравнению с полными, особенно, когда размерность переменных превышает две. Отметим лишь работы [3, 4], в которых были рассмотрены некоторые конфлюэнтные гипергеометрические функции трех переменных. В настоящей работе мы определим некоторый класс конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных.

Рассмотрим обобщенное уравнение Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^n \left( u_{x_i x_i} + \frac{2a_i}{x_i} u_{x_i} \right) - \lambda^2 u = 0 \quad (1)$$

в области  $R_n^+ := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0\}$ , где  $n$  – размерность Эвклидова пространства;  $n \geq 2$ ,  $\alpha_i$  – действительные числа, причем  $0 < 2\alpha_i < 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\lambda$  – действительное или чисто мнимое постоянное.

Как известно, фундаментальные решения играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений с частными производными. На них основываются формулировка и решение многих локальных и нелокальных краевых задач. Оказывается, все фундаментальные решения уравнения (1) выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию  $(n+1)$  переменных. Найдем эти решения уравнения (1), выпишем формулы разложения для них и с помощью этих формул установим, что фундаментальные решения уравнения (1) имеют особенность порядка  $1/r^{n-2}$  при  $r \rightarrow 0$ .

Отметим, что фундаментальные решения уравнения (1) в двух- и трехмерных случаях найдены и исследованы в работах [5–8], а также они применены к решению некоторых краевых задач для уравнения (1) в случае, когда  $n = 3$  и  $\lambda = 0$  [9, 10].

Прежде чем перейти к изложению основных результатов приведем некоторые известные факты из теории гипергеометрических функций.

Известная гипергеометрическая функция Гаусса  $F(a, b; c; x)$  определяется формулой [1]

$$F(a, b; c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m m!} x^m, \quad |x| < 1.$$

Здесь и далее  $(\kappa)_v$  обозначает символ Похгаммера:

$$(\kappa)_0 = 1, \quad (\kappa)_v = \frac{\Gamma(\kappa + v)}{\Gamma(\kappa)}, \quad v \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}.$$

Кроме того, в наших исследованиях будут участвовать некоторые гипергеометрические функции многих переменных:

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_m}{m! n! (c_1)_m (c_2)_m} x^m y^n, \quad |x| + |y| < 1; \quad (2)$$

$$H_2(a, b_1, d_1, d_2; c_1; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n} (b_1)_m (d_1)_n (d_2)_n}{m! n! (c_1)_m} x^m y^n, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1/(1+|x|);$$

$$F_A^{(n)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{m_1! \dots m_n! (c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},$$

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| < 1; \quad (3)$$

$$F_B^{(n)}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \dots (a_n)_{m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{m_1! \dots m_n! (c)_{m_1+\dots+m_n}} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},$$

$$\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) < 1.$$

Здесь  $F_2$  и  $H_2$  – известные гипергеометрические функции двух переменных [1], а

$F_A^{(n)}$  и  $F_B^{(n)}$  – гипергеометрические функции Лауричелли  $n \in \mathbb{N}$  переменных [11] (см. также [2]) Легко заметить, что функция  $F_2$  является функцией Лауричелли двух переменных.

### 1. Обобщение функций Лауричелли и его конфлюэнтная форма

А. Эрдейи [12] (см. также [2]) предложил обобщить функций Лауричелли многих переменных в виде

$$H_{p,n}(a, b_1, \dots, b_p, d_{n+1}, \dots, d_p; c_1, \dots, c_n; \xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{m_1, \dots, m_p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n-m_{n+1}-\dots-m_p} (b_1)_{m_1} \dots (b_p)_{m_p} (d_{n+1})_{m_{n+1}} \dots (d_p)_{m_p}}{m_1! \dots m_p! (c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \xi_1^{m_1} \dots \xi_p^{m_p}, \quad (4)$$

где  $p$  и  $n$  целые числа, причем  $0 \leq n \leq p$ .

Очевидно, что

$$H_{n,n} = F_A^{(n)}, H_{n,0} = F_B^{(n)}, \text{ и } H_{2,1} = H_2.$$

Гипергеометрическая функция (4) в случае  $p = n + 1$  принимает вид

$$H_{n+1,n}(a, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, d_{n+1}; c_1, \dots, c_n; \xi, \eta) = \sum_{m_1, \dots, m_{n+1}=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n-m_{n+1}} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n} (b_{n+1})_{m_{n+1}} (d_{n+1})_{m_{n+1}}}{m_1! \dots m_{n+1}! (c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \xi^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \eta^{m_{n+1}}. \quad (5)$$

Здесь и далее для краткости принята запись:  $\xi := \xi_1, \dots, \xi_n$ .

Из гипергеометрического ряда (5) нетрудно определить следующую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию:

$$H_A^{(n,1)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi, \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{n+1,n}\left(a, b_1, \dots, b_n, \frac{1}{\varepsilon}; \frac{1}{\varepsilon}; c_1, \dots, c_n; \xi, \varepsilon^2 \eta\right).$$

При определении конфлюэнтной гипергеометрической функции  $H_A^{(n,1)}$  мы пользовались равенством [2]  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1/\varepsilon)_k \cdot \varepsilon^k = 1$  (где  $k$  – натуральное число). Таким образом, конфлюэнтная гипергеометрическая функция многих переменных имеет вид

$$H_A^{(n,1)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi, \eta) = H_A^{(n,1)}\left[\begin{matrix} a, b_1, \dots, b_n; \xi, \eta \\ c_1, \dots, c_n \end{matrix}\right] = \sum_{m_1, \dots, m_{n+1}=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n-m_{n+1}} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{m_1! \dots m_{n+1}! (c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \eta^{m_{n+1}}, \quad (6)$$

$$|\xi_1| + \dots + |\xi_n| < 1,$$

Частные случаи конфлюэнтной гипергеометрической функции  $H_A^{(n,1)}$  были известны: в случае двух переменных [1]

$$H_3(a, b; c; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n} (b)_m}{m! n! (c)_m} x^m y^n, |x| < 1$$

и в случае трех переменных [6]

$$A_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z) = \sum_{m, n, k=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n-k} (b_1)_m (b_2)_n}{m! n! k! (c_1)_m (c_2)_n} x^m y^n z^k, \quad |x| + |y| < 1.$$

Конфлюэнтные гипергеометрические функции  $H_3$ ,  $A_2$  и  $H_A^{(n,1)}$  имеют следующие формулы для вычисления производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} H_3(a, b, c; x, y) &= \frac{(a)_{i-j} (b)_i}{(c)_i} H_3(a+i-j, b+i, c+i; x, y), \\ \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} A_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z) &= \\ &= \frac{(a)_{i+j-k} (b_1)_i (b_2)_j}{(c_1)_i (c_2)_j} A_2(a+i-j-k, b_1+i, b_2+j; c_1+i, c_2+j; x, y, z), \\ \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n+j}}{\partial \xi_1^{i_1} \dots \partial \xi_n^{i_n} \partial \eta^j} H_A^{(n,1)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi, \eta) &= \frac{(a)_{i_1+\dots+i_n-j} (b_1)_{i_1} \dots (b_n)_{i_n}}{(c_1)_{i_1} \dots (c_n)_{i_n}} \times \\ &\times H_A^{(n,1)}(a+i_1+\dots+i_n-j, b_1+i_1, \dots, b_n+i_n; c_1+i_1, \dots, c_n+i_n; \xi, \eta) \end{aligned} \quad (7)$$

и интегральные представления:

$$H_3(a, b, c; x, y) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-xt)^a} {}_0F_1(1-a; -(1-xt)y) dt, \\ \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0;$$

$$\begin{aligned} A_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z) &= \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)} \times \\ &\times \int_0^1 \int_0^1 \frac{s^{b_1-1} t^{b_2-1} (1-s)^{c_1-b_1-1} (1-t)^{c_2-b_2-1}}{(1-xs-yt)^a} {}_0F_1(1-a; -(1-xs-yt)z) ds dt, \\ \operatorname{Re} c_1 > \operatorname{Re} b_1 > 0, \operatorname{Re} c_2 > \operatorname{Re} b_2 > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_A^{(n,1)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi_1, \dots, \xi_n, \eta) &= \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(c_i)}{\Gamma(b_i)\Gamma(c_i-b_i)} \cdot \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n \text{ раз}} \prod_{i=1}^n t_i^{b_i-1} (1-t_i)^{c_i-b_i-1} (1-\xi_1 t_1 - \dots - \xi_n t_n)^{-a} \times \\ &\times {}_0F_1(1-a; -(1-\xi_1 t_1 - \dots - \xi_n t_n)\eta) dt_1 \dots dt_n, \\ \operatorname{Re} c_i > \operatorname{Re} b_i > 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где  ${}_0F_1(a; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_k k!} x^k$  – обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса [1].

Теперь, воспользовавшись формулой для вычисления производных (7), нетрудно показать, что конфлюэнтная гипергеометрическая функция (6) удовлетворяет систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} &\xi_i(1-\xi_i)\omega_{\xi_i\xi_i} - \xi_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi_j \omega_{\xi_i\xi_j} + \xi_i \eta \omega_{\xi_i\eta} + [c_i - (a+b_i+1)\xi_i] \omega_{\xi_i} - \\ &\quad - b_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi_j \omega_{\xi_j} + b_i \eta \omega_{\eta} - ab_i \omega = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ &\eta \omega_{\eta\eta} - \sum_{j=1}^n \xi_j \omega_{\xi_j} + (1-a)\omega_{\eta} + \omega = 0, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

где  $\omega(\xi, \eta) = H_A^{(n,1)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi, \eta)$ .

Отметим, что частные случаи (т.е.  $n = 2$  и  $n = 3$ ) системы уравнений (8) встречаются в работах [1, 5–8].

Выражение  $\omega(\xi, \eta) = \xi_1^{\tau_1} \dots \xi_n^{\tau_n} \eta^v \psi(\xi, \eta)$ , где  $\psi(\xi, \eta)$  – произвольная функция, а  $\tau_1, \dots, \tau_n$  и  $v$  – постоянные, подлежащие определению, подставим в систему (8). В результате элементарных вычислений получим алгебраическую систему уравнений для определения  $\tau_1, \dots, \tau_n$  и  $v$ , которая, в свою очередь, имеет следующие  $2^n$  решения:

$$\begin{aligned} C_n^0 &= 1 \{ \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = 0, \quad \dots \quad \tau_{n-1} = 0, \quad \tau_n = 0, \quad v = 0, \\ C_n^1 &= n \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = 1 - c_1, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = 0, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = 0, \quad \tau_n = 0, \quad v = 0, \\ \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 1 - c_2, \quad \tau_3 = 0, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = 0, \quad \tau_n = 0, \quad v = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = 0, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = 0, \quad \tau_n = 1 - c_n, \quad v = 0, \end{array} \right. \\ C_n^2 &= \frac{n(n-1)}{2} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = 1 - c_1 \quad \tau_2 = 1 - c_2 \quad \tau_3 = 0, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = 0, \quad \tau_n = 0, \quad v = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \tau_1 = 1 - c_1, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = 0, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = 0, \quad \tau_n = 1 - c_n, \quad v = 0, \\ \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 1 - c_2, \quad \tau_3 = 1 - c_3, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = 0, \quad \tau_n = 0, \quad v = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = 0, \quad \dots \quad \tau_{n-1} = 1 - c_{n-1}, \quad \tau_n = 1 - c_n, \quad v = 0, \end{array} \right. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$C_n^n = 1 \{ \tau_1 = 1 - c_1, \quad \tau_2 = 1 - c_2, \quad \tau_3 = 1 - c_3, \quad \dots \quad \tau_{n-1} = 1 - c_{n-1}, \quad \tau_n = 1 - c_n, \quad v = 0.$$

Здесь,  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  и нетрудно заметить, что  $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n$ .

Следовательно, система уравнений (8) имеет  $2^n$  линейно независимых решений:

$$1 \left\{ H_A^{(n,1)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi, \eta), \right. \\ C_n^1 \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^{1-c_1} H_A^{(n,1)}(a, 1+b_1-c_1, b_2, \dots, b_n; 2-c_1, c_2, \dots, c_n; \xi, \eta) \\ \dots \dots \dots \\ \xi_n^{1-c_n} H_A^{(n,1)}(a, b_1, \dots, b_{n-1}, 1+b_n-c_n; c_1, \dots, c_{n-1}, 2-c_n; \xi, \eta), \end{array} \right.$$

$$C_n^2 \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^{1-c_1} \xi_2^{1-c_2} H_A^{(n,1)}(a, 1+b_1-c_1, 1+b_2-c_2, b_3, \dots, b_n, 2-c_1, c_2, \dots, c_n; \xi, \eta), \\ \dots \dots \dots \\ \xi_1^{1-c_1} \xi_n^{1-c_n} H_A^{(n,1)}(a, 1+b_1-c_1, b_2, \dots, b_{n-1}, 1+b_n-c_n; 2-c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 2-c_n; \xi, \eta), \\ \xi_2^{1-c_2} \xi_3^{1-c_3} H_A^{(n,1)}(a, b_1, 1+b_2-c_2, 1+b_3-c_3, b_4, \dots, b_n; c_1, 2-c_2, 2-c_3, c_4, \dots, c_n; \xi, \eta), \\ \dots \dots \dots \\ \xi_{n-1}^{1-c_{n-1}} \xi_n^{1-c_n} H_A^{(n,1)}(a, b_1, \dots, b_{n-2}, 1+b_{n-1}-c_{n-1}, 1+b_n-c_n; c_1, \dots, c_{n-2}, 2-c_{n-1}, 2-c_n; \xi, \eta), \\ \dots \dots \dots \\ 1 \left\{ \xi_1^{1-c_1} \dots \xi_n^{1-c_n} H_A^{(n,1)}(a, 1+b_1-c_1, \dots, 1+b_n-c_n; 2-c_1, \dots, 2-c_n; \xi, \eta) \right. \end{array} \right.$$

С учетом симметричности функции  $H_A^{(n,1)}$  относительно параметров  $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  можно сгруппировать вышеприведенные линейно независимые решения системы уравнений (8). В результате этого уменьшится количество решений системы (8), которые необходимы в дальнейших исследованиях. Таким образом, все решения системы (8) выражаются формулой

$$\omega_k(\xi) = C_k \prod_{i=1}^k \xi_i^{1-c_i} H_A^{(n,1)} \left[ \begin{array}{l} a, b_1+1-c_1, \dots, b_k+1-c_k, b_{k+1}, \dots, c_n; \xi \\ 2-c_1, \dots, 2-c_k, c_{k+1}, \dots, c_n; \end{array} \right], \quad k = \overline{0, n}, \quad (9)$$

где  $C_k$  – произвольные постоянные. Произведение вида  $\prod_{i=1}^0$  считается равным единице.

**2. Формулы разложения**

Формулы разложения позволяют представить гипергеометрическую функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций с одним переменным, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных. Впервые Дж.Берчнелл и Т.Ченди [13,14] разложили многие гипергеометрические функции двух переменных в бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций Гаусса одного переменного. Например, функция  $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$ , определенная формулой (2), разлагается в виде [13]

$$\begin{aligned} & F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b_1)_i (b_2)_i}{i! (c_1)_i (c_2)_i} x^i y^i F(a+i, b_1+i; c_1+i; x) F(a+i, b_2+i; c_2+i; y). \end{aligned}$$

На основе метода Берчнелла – Ченди, который ограничивался функциями двух переменных, лежали следующие взаимно-обратные символические операторы [13]:

$$\nabla(h) = \frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\delta_2+h)}{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+h)}, \quad \Delta(h) = \frac{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\delta_2+h)}, \quad (10)$$

где  $\delta_1 = x \frac{\partial}{\partial x}$  и  $\delta_2 = y \frac{\partial}{\partial y}$ .

С целью обобщить операторы  $\nabla(h)$  и  $\Delta(h)$ , определенные (10), А. Хасанов и Х.М. Сривастава [15,16] ввели операторы

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{x_1, x_2, \dots, x_n}(h) &= \frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1 + \dots + \delta_n + h)}{\Gamma(\delta_1 + h)\Gamma(\delta_2 + \dots + \delta_n + h)}, \\ \tilde{\Delta}_{x_1, x_2, \dots, x_m}(h) &= \frac{\Gamma(\delta_1 + h)\Gamma(\delta_2 + \dots + \delta_n + h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1 + \dots + \delta_n + h)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\delta_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), с помощью которых им удалось найти формулы разложения целого класса гипергеометрических функций многих переменных. Например, гипергеометрическая функция Лауричелли  $n$  переменных  $F_A^{(n)}$ , определенная формулой (3), имеет разложение [15]

$$\begin{aligned} &F_A^{(n)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi_1, \dots, \xi_n) = \\ &= \sum_{m_2, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_2 + \dots + m_n} (b_1)_{m_2 + \dots + m_n} (b_2)_{m_2} \dots (b_n)_{m_n} \xi_1^{m_2 + \dots + m_n} \xi_2^{m_2} \dots \xi_n^{m_n} \times}{m_2! \dots m_n! (c_1)_{m_2 + \dots + m_n} (c_2)_{m_2} \dots (c_n)_{m_n}} \times \\ &\quad \times F(a + m_2 + \dots + m_n, b_1 + m_2 + \dots + m_n; c_1 + m_2 + \dots + m_n; \xi_1) \times \\ &\quad \times F_A^{(n-1)}(a + m_2 + \dots + m_n, b_2 + m_2, \dots, b_n + m_n; c_2 + m_2, \dots, c_n + m_n; \xi_2, \dots, \xi_n), \\ &\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Однако, из-за рекуррентности формулы (12) могут возникать дополнительные трудности в приложениях этого разложения. Дальнейшее изучение свойств операторов (10) и (11) показало, что формулу (12) можно привести к более удобному виду [17]

$$\begin{aligned} F_A^{(n)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi) &= \sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2 \leq i \leq j \leq n)}}^{\infty} \frac{(a)_{N(k,n)}}{m_{2,2}! m_{2,3}! \dots m_{i,j}! \dots m_{n,n}!} \times \\ &\times \prod_{k=1}^n \frac{(b_k)_{M(k,n)}}{(c_k)_{M(k,n)}} \xi_k^{M(k,n)} F(a + N(k,n), b_k + M(k,n); c_k + M(k,n); \xi_k), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $M(k,n) = \sum_{i=s}^k m_{i,k} + \sum_{i=k+1}^n m_{k+1,i}$ ,  $N(k,n) = \sum_{i=s}^{k+1} \sum_{j=i}^n m_{i,j}$ .

Теперь, следуя [13–16] и используя формулу (13), нетрудно установить формулу разложения для конфлюэнтной гипергеометрической функции  $H_A^{(n,1)}$ , определенной формулой (6):

$$\begin{aligned} &H_A^{(n,1)}(a; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi, \eta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l(n,k)} C_k^j \Phi(k, i_1, \dots, i_n; \xi) \frac{(-1)^{k+j} \eta^j}{(1-a)_j j!} {}_0F_1(1-a+j; -\eta) \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $d(k, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0 \text{ и } j = 0, \\ j/k, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } j > 0, \end{cases}$

$$I(n, k) = \{(i_1, \dots, i_n) : i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0, i_1 + \dots + i_n = k\},$$

$$\Phi(k, i_1, \dots, i_n; \xi) = \sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2 \leq i \leq j \leq n)}}^{\infty} \frac{(a)_{N(n,n)}}{m_{2,2}! m_{2,3}! \dots m_{i,j}! \dots m_{n,n}!} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^n \frac{(b_s)_{i_s} \xi_s^{i_s}}{(c_s)_{i_s} i_s!} F_A^{(n)}(a+k; b_1+i_1, \dots, b_n+i_n; c_1+i_1, \dots, c_n+i_n; \xi).$$

Исследуем гипергеометрическую функцию  $\Phi(k, i_1, \dots, i_n; \xi)$ . Для этого функцию  $F_A^{(n)}(a+k; b_1+i_1, \dots, b_n+i_n; c_1+i_1, \dots, c_n+i_n; \xi)$  выпишем с помощью формулы (13). Применив к каждой  $F(a+k+N(k, n), b_k+i_k+M(k, n); c_k+i_k+M(k, n); \xi_k)$  известную формулу [1]

$$F(a, b; c; x) = (1-x)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{x}{x-1}\right),$$

получим

$$\Phi(k, i_1, \dots, i_n; \xi) =$$

$$= \sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2 \leq i \leq j \leq n)}}^{\infty} \frac{(a)_{N(n,n)}}{m_{2,2}! m_{2,3}! \dots m_{i,j}! \dots m_{n,n}!} \prod_{s=1}^n \frac{(b_s)_{i_s+M(s,n)}}{(c_s)_{i_s+M(s,n)} i_s!} (1-\xi_s)^{-b_s} \left(\frac{\xi_s}{1-\xi_s}\right)^{i_s+M(s,n)} \times$$

$$\times F\left(c_s+i_s-a-k+M(s, n)-N(s, n), b_s+i_s+M(s, n); c_s+i_s+M(s, n); \frac{\xi_s}{\xi_s-1}\right). \quad (15)$$

Формула (15) будет полезна при исследовании фундаментальных решений уравнения (1).

### 3. Фундаментальные решения

Решение уравнения (1) в области  $R_n^+$  будем искать в виде

$$u(x, x_0) = P(r)\omega(\xi, \eta), \quad (16)$$

где  $x = x_1, \dots, x_n; x_0 = x_{01}, \dots, x_{0n}; P(r) = (r^2)^{-\alpha}$ ,  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i - 1 + \frac{n}{2}$ ;

$$\xi := \xi_1, \dots, \xi_n, \quad \eta = -\frac{1}{4}\lambda^2 r^2; \quad r^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2, \quad r_k^2 = (x_k + x_{0k})^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^n (x_i - x_{0i})^2,$$

$$\xi_k = \frac{r^2 - r_k^2}{r^2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Вычислив необходимые производные функции  $u(x, x_0)$  и подставив их в уравнение (1), получим

$$\sum_{m=1}^n A_m \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_m^2} + A_{n+1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \sum_{m=1}^n \sum_{k=m+1}^n B_{mk} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_m \partial \xi_k} + \sum_{m=1}^n C_m \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_m \partial \eta} +$$

$$+ \sum_{m=1}^n D_m \frac{\partial \omega}{\partial \xi_m} + D_{n+1} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + E\omega = 0, \quad (17)$$

где

$$A_k = -\frac{4P(r)}{r^2} \frac{x_{0k}}{x_k} \xi_k (1 - \xi_k), \quad C_k = \frac{4P(r)}{r^2} \frac{x_{0k}}{x_k} \xi_k \eta + \frac{\lambda^2}{2} P(r) \xi_k,$$

$$B_{kl} = \frac{4P(r)}{r^2} \left( \frac{x_{0k}}{x_k} + \frac{x_{0l}}{x_l} \right) \xi_k \xi_l, \quad k \neq l, \quad l = \overline{1, n},$$

$$D_k = -\frac{4P(r)}{r^2} \left\{ (2\alpha_k - \alpha \xi_k) \frac{x_{0k}}{x_k} - \xi_k \sum_{m=1}^n \frac{x_{0m}}{x_m} \alpha_m \right\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$A_{n+1} = \lambda^2 P(r) \eta, \quad D_{n+1} = \frac{4P(r)}{r^2} \eta \sum_{m=1}^n \frac{x_{0m}}{x_m} \alpha_m + \lambda^2 P(r) \alpha,$$

$$E = -\lambda^2 P + \frac{4\alpha P(r)}{r^2} \sum_{m=1}^n \frac{x_{0m}}{x_m} \alpha_m.$$

С учетом найденных выражений коэффициентов уравнения (17) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \xi_i (1 - \xi_i) \omega_{\xi_i \xi_i} - \xi_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi_j \omega_{\xi_i \xi_j} + \xi_i \eta \omega_{\xi_i \eta} + [2\alpha_i - (\alpha + \alpha_i + 1) \xi_i] \omega_{\xi_i} - \\ \alpha_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi_j \omega_{\xi_j} + \alpha_i \eta \omega_{\eta} - \alpha \alpha_i \omega = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \eta \omega_{\eta \eta} - \sum_{j=1}^n \xi_j \omega_{\xi_j} + (1 - \alpha) \omega_{\eta} + \omega = 0, \end{cases} \quad (18)$$

Теперь, воспользовавшись решениями (9) системы уравнений (8), нетрудно определить решения системы (18), и подставив эти решения в (16), получить фундаментальные решения уравнения (1) в виде

$$q_k(x, x_0) = \gamma_k \prod_{i=1}^k (x_i x_{0i})^{1-2\alpha_i} \cdot r^{-2\tilde{\alpha}_k} H_A^{(n,1)} \left[ \tilde{\alpha}_k, 1 - \alpha_1, \dots, 1 - \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n; \xi, \eta \right], \quad (19)$$

где

$$\gamma_k = 2^{2\tilde{\alpha}_k - m} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}_k)}{\pi^{m/2}} \prod_{j=1}^k \frac{\Gamma(1 - \alpha_j)}{\Gamma(2 - 2\alpha_j)} \prod_{i=k+1}^n \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(2\alpha_i)},$$

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{n}{2} + k - 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n, \quad k = \overline{0, n}.$$

#### 4. Особенность фундаментальных решений уравнения (1).

Определим порядок особенности фундаментальных решений (19) при  $r \rightarrow 0$ . Возьмем решение

$$q_0(x, x_0) = \gamma_0 r^{-2\tilde{\alpha}_0} H_A^{(n,1)}(\tilde{\alpha}_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n; 2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n; \xi, \eta).$$

Воспользовавшись формулами (14) и (15), получим

$$q_0(x, x_0) = r^{2-n} \prod_{i=1}^n r_i^2 \cdot f(r^2, r_1^2, \dots, r_n^2),$$

где

$$f(r^2, r_1^2, \dots, r_n^2) = \gamma_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{I(n,k)} d(k, j) C_k^j \frac{(-1)^{k+j} \eta^j}{(1-\tilde{\alpha}_0)_j j!} {}_0F_1(1-\tilde{\alpha}_0 + j; -\eta) \times \\ \times \sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2 \leq i \leq j \leq n)}}^{\infty} \frac{(\tilde{\alpha}_0)_{N(n,n)}}{m_{2,2}! m_{2,3}! \dots m_{i,j}! \dots m_{n,n}!} \prod_{s=1}^n \frac{(\alpha_s)_{i_s+M(s,n)}}{(2\alpha_s)_{i_s+M(s,n)} i_s!} \left(1 - \frac{r^2}{r_s^2}\right)^{i_s+M(s,n)} \times \\ \times F\left(2\alpha_s + i_s - \tilde{\alpha}_0 - k + M(s,n) - N(s,n), \alpha_s + i_s + M(s,n); 2\alpha_s + i_s + M(s,n); 1 - \frac{r^2}{r_s^2}\right).$$

Теперь в  $f(r^2, r_1^2, \dots, r_n^2)$ , перейдя к пределу при  $r \rightarrow 0$  и несколько раз применив к полученному выражению известную формулу

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots, \operatorname{Re}(c-a-b) > 0,$$

имеем

$$f(0, r_1^2, \dots, r_n^2) = \frac{4^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1}}{\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right), \quad p > 2.$$

Таким образом, фундаментальное решение  $q_0(x, x_0)$  при  $r \rightarrow 0$  имеет особенность порядка  $1/r^{n-2}$ . Аналогичным образом устанавливается, что фундаментальные решения  $q_k(x, x_0)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) при  $r \rightarrow 0$  также имеют особенность порядка  $1/r^{n-2}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
2. Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. New York; Chichester; Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.
3. Jain R.N. The confluent hypergeometric functions of three variables // Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A. 1966. V. 36. P. 395–408.
4. Exton H. On certain confluent hypergeometric of three variables // Ganita. 1970. V. 21. No. 2. P. 79–92.
5. Уринов А.К. Фундаментальные решения для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами // Научный вестник Ферганского государственного университета. 2006. № 1. С. 5–11.
6. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007. V. 52. No. 8. P. 673–683.
7. Hasanov A., Karimov E.T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Applied Mathematic Letters. 2009. V. 22. P. 1828–1832.
8. Urinov A.K., Karimov E.T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // Applied Mathematic Letters. 2011. V. 24. P. 314–319.
9. Karimov E.T. On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations // Applied Mathematics Letters. 2010. V. 23. P. 517–522.
10. Karimov E.T. A boundary-value problem for 3-D elliptic equation with singular coefficients // Progress in Analysis and its Applications. 2010. P. 619–625.
11. Lauricella G. Sille funzioni ipergeometriche a più variabili // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1893. V. 7. P. 111–158.

12. Erdélyi A. Integraldarstellungen für Produkte Whittakerscher Funktionen // Nieuw Arch. Wisk. 1939. No. 2(20). P. 1–34.
13. Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart. J. Math. (Oxford). 1940. Ser. 11. P. 249–270.
14. Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions. II // Quart. J. Math. (Oxford). 1941. Ser. 12. P. 112–128.
15. Hasanov A., Srivastava H.M. Some decomposition formulas associated with the Lauricella function  $F_A^{(r)}$  and other multiple hypergeometric functions // Applied Mathematic Letters. 2006. 19(2). P. 113–121.
16. Hasanov A., Srivastava H.M. Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions // Computers and Mathematics with Applications. 2007. 53(7). P. 1119–1128.
17. Ergashev T.G. Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients. ArXiv:1805.03826. 9 p.

Статья поступила 18.07.2018 г.

Urinov A.K., Ergashev T.G. (2018) CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS OF MANY VARIABLES AND THEIR APPLICATION TO THE FINDING OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE GENERALIZED HELMHOLTZ EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 45–56

DOI 10.17223/19988621/55/5

Keywords: confluent hypergeometric function, Lauricella functions, fundamental solutions, generalized Helmholtz equation with several singular coefficients, decomposition formula.

An investigation of applied problems related to heat conduction and dynamics, electromagnetic oscillations and aerodynamics, quantum mechanics and potential theory leads to the study of various hypergeometric functions. The great success of the theory of hypergeometric functions of one variable has stimulated the development of the corresponding theory for functions of two and more variables. In the theory of hypergeometric functions, an increase in the number of variables will always be accompanied by a complication in the study of the function of several variables. Therefore, the decomposition formulas that allow us to represent the hypergeometric function of several variables in terms of an infinite sum of products of several hypergeometric functions in one variable are very important, and this, in turn, facilitates the process of studying the properties of multidimensional functions. Confluent hypergeometric functions in all respects, including the decomposition formulas, have been little studied in comparison with other types of hypergeometric functions, especially when the dimension of the variables exceeds two. In this paper, we define a new class of confluent hypergeometric functions of several variables, study their properties, give integral representations, and establish decomposition formulas. An important application of confluent functions has been found. It turns out that all fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with singular coefficients are written out through one new introduced confluent hypergeometric function of several variables. Using the decomposition formulas, the order of the singularity of the fundamental solutions of the above elliptic equation is determined.

AMS Mathematical Subject Classification: 33C15, 33C20, 35A08, 35J70

URINOV Ahmadzhon Kushakovich (Fergana State University, Fergana, Uzbekistan).  
E-mail: urinovak@mail.ru

ERGASHEV Tuhtasin Gulamzhanovich (V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: ertuhtasin@mail.ru

## REFERENCES

1. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. (1953) *Higher Transcendental Functions. I*. New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company.
2. Srivastava H.M., Karlsson P.W. (1985) *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*. New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press.
3. Jain R.N. (1966) The confluent hypergeometric functions of three variables. *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A*. 36. pp. 395–408.
4. Exton H. (1970) On certain confluent hypergeometric of three variables. *Ganita*. 21(2). pp. 79–92.
5. Urinov A.K. (2006) Fundamental'nye resheniya dlya nekotoryh uravnenij ellipticheskogo tipa s singulyarnymi koefficientami [Fundamental solutions for the some elliptic equations with singular coefficients]. *Nauchnyj vestnik Ferganskogo gosudarstvennogo universiteta – Scientific Records of Fergana State University*. 1. pp. 5–11.
6. Hasanov A. (2009) Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 52(8). pp. 673–683. DOI: 10.1080/17476930701300375.
7. Hasanov A., Karimov E.T. (2009) Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. *Applied Mathematic Letters*. 22. pp. 1828–1832. DOI: 10.1016/j.aml.2009.07.006.
8. Urinov A.K., Karimov E.T. (2011) On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter. *Applied Mathematic Letters*. 24. pp. 314–319. DOI: 10.1016/j.aml.2010.10.013.
9. Karimov E.T. (2010) On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations. *Applied Mathematics Letters*. 23. pp. 517–522. DOI: 10.1016/j.aml.2010.01.002.
10. Karimov E.T. (2010) A boundary-value problem for 3-D elliptic equation with singular coefficients. *Progress in analysis and its applications*. pp. 619–625.
11. Lauricella G. (1893) Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili. *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 7. pp. 111–158.
12. Erdélyi A. (1939) Integraldarstellungen für Produkte Whittakerscher Funktionen. *Nieuw Arch. Wisk.* (2) 20. pp. 1–34.
13. Burchinal J.L., Chaundy T.W. (1940) Expansions of Appell's double hypergeometric functions. *Quart. J. Math. (Oxford)*. 11. pp. 249–270.
14. Burchinal J.L., Chaundy T.W. (1941) Expansions of Appell's double hypergeometric functions. II. *Quart. J. Math. (Oxford)*. 12. pp. 112–128.
15. Hasanov A., Srivastava H.M. (2006) Some decomposition formulas associated with the Lauricella function  $F_A^{(r)}$  and other multiple hypergeometric functions. *Applied Mathematic Letters*. 19(2). pp. 113–121. DOI: 10.1016/j.aml.2005.03.009.
16. Hasanov A., Srivastava H.M. (2007) Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions. *Computers and Mathematics with Applications*. 53(7). pp. 1119–1128. DOI: 10.1016/j.camwa.2006.07.007.
17. Ergashev T.G. (2018) Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients. *ArXiv:1805.03826*. 9 p.

## МЕХАНИКА

УДК 536.7

DOI 10.17223/19988621/55/6

**М.В. Агафонцев, И.С. Ануфриев, Е.П. Копьев,  
Е.Ю. Шадрин, Е.Л. Лобода, А.В. Луценко**

### ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ПЛАМЕНИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ МАЛЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ<sup>1</sup>

Представлены результаты экспериментальных исследований масштабов турбулентных вихрей в диффузионных пламенах и влияние малых энергетических воздействий на пламя. Проведено сопоставление данных, полученных на основе метода цифровой трассерной визуализации и термографии.

**Ключевые слова:** *горение, турбулентность, пламя, ИК-диагностика, PIV-измерения.*

Физико-химические процессы, связанные с горением и распространением пламени в различных технологических устройствах и при природных пожарах, реализуются, как правило, в условиях турбулентности [1]. Разные участки фронта пламени переносятся вместе с газом с различными скоростями, которые складываются из осредненной и пульсационной составляющих. В результате фронт пламени приобретает сложную форму, хаотически искривляется, площадь поверхности пламени возрастает. Турбулентное горение представляет собой нестационарный процесс турбулентного смешения продуктов сгорания со свежей смесью и воспламенение ее вследствие повышения температуры. В этих условиях закономерности ламинарного распространения пламени теряют силу. Решающими факторами становятся турбулентные пульсации и связанная с ними интенсивность турбулентного перемешивания. В зависимости от масштаба турбулентности и величины турбулентных пульсаций возможны различные механизмы горения в турбулентных потоках [2].

Традиционно в экспериментальных исследованиях процессов горения применяют термопары для определения полей температуры в пламени. При этом утрачивается «чистота эксперимента», так как термопары вносят возмущение в поток продуктов горения, изменяют энергетический баланс вследствие отвода тепла из зоны химической реакции по свободным концам и обладают инерционностью, которая зачастую значительно превышает характерное время протекающих процессов. Методы термографии позволяют отказаться от применения термопар и при этом получить информацию о распределении температуры с хорошим пространственным и временным разрешением. Это обеспечивает возможность исследования полей температуры и визуализации температурных неоднородностей пламени без внесения возмущений в него [3–8]. Следует отметить, что применение термо-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ № 17-38-50014\_мол-нр.

графии связано с рядом методических трудностей, вызванных необходимостью определения оптических характеристик пламени (коэффициенты излучения и пропускания), выбора спектрального интервала, учета влияния слоя пламени на регистрацию экранированных им объектов [9, 10].

Применение быстродействующих тепловизоров позволяет фиксировать колебания локальной температуры турбулентного пламени и исследовать характерные частоты в спектре изменения температуры [4, 7, 11]. Эти колебания вызваны перемещением в пламени температурных неоднородностей, характерных для структуры течения. В работах [12–14] представлены поля скоростей, траектории трассеров и неоднородные распределения температуры пламени при сжигании углеводородных топлив. Из представленных в [12–15] результатов очевидно, что пульсации температуры пламени непосредственно связаны с турбулентным режимом течения. В частности, математические модели [16–19], описывающие распространение лесных пожаров, непосредственно учитывают вклад турбулентности в распространение фронта горения.

В работах [20–22] представлены результаты исследования турбулентной структуры пламени с применением метода PLIF (Planar laser-induced fluorescence), позволяющего визуализировать распределение скорости в определенном сечении.

Очевидно, что температурные неоднородности в «мгновенном» поле температур должны быть связаны с турбулентными характеристиками в пламени, интенсифицирующими перемешивание компонент и химические реакции. Следует отметить, что влияние различных малых колебаний на процесс горения был замечен человеком еще в древности, при колебании факелов во время игры таких музыкальных инструментов, как орган, способных воспроизводить звуковые колебания в широком спектре частот и с достаточной мощностью. Представляет интерес возможность управления режимом течения и другими характеристиками процесса горения путем внешнего воздействия на пламя. Таким воздействием может быть воздействие пульсациями внешнего давления с малой амплитудой. В данной работе представлены результаты исследования влияния таких возмущений на процесс горения, тепловую и гидродинамическую структуру пламени, что в дальнейшем может позволить разработать методы управления процессом горения с малыми энергетическими затратами.

### **Описание экспериментальной установки**

В качестве горючих материалов использовались жидкие углеводородные топлива (бензин, керосин, дизельное топливо) и растительные горючие материалы (смесь полевых горючих материалов, хвоя кедра, древесина сосны, древесина кедра). Горение жидкого топлива осуществлялось со свободной поверхности площадью 176 см<sup>2</sup> (объем топлива 20 мл). Твердые растительные горючие материалы (50–200 г) укладывались естественным образом без уплотнения. Интенсивность ИК-излучения пламени и распределение температуры регистрировались при помощи тепловизора JADE J530SB с узкополосным оптическим фильтром (спектральный интервал 2.5–2.7 мкм), позволяющим измерять температуру в диапазоне 583–1773 К с погрешностью измерений, не превышающей 1 %, и частотой регистрации до 177 Гц. При измерениях использовались калибровки завода-изготовителя для выбранного типа объектива и фильтров. Съемка производилась

с объективом, имеющим фокусное расстояние  $F = 50$  мм, а матрица тепловизора имела разрешение  $320 \times 240$  пикселей.

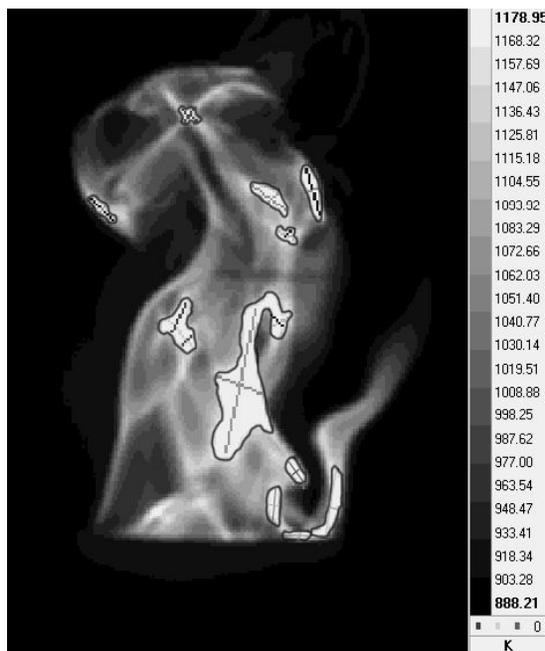
Для измерения скорости потока в турбулентном пламени использовался современный бесконтактный (оптический) метод диагностики потоков – метод цифровой трассерной визуализации (PIV). Данный метод является полевым и характеризуется высокой производительностью – позволяет измерять распределение мгновенной скорости в выбранном сечении потока [23]. Принцип метода PIV состоит в следующем. Импульсный лазер создает тонкий световой нож и освещает мелкие взвешенные частицы (трассеры), движущиеся в исследуемом потоке. Положения частиц в момент двух последовательных вспышек лазера регистрируются на два кадра цифровой камеры. Скорость потока рассчитывается по перемещениям трассеров за время между вспышками лазера. Определение перемещения основано на применении корреляционных методов к трассерным картинам с использованием регулярного разбиения на элементарные подобласти. Варьирование времени задержки между лазерными вспышками позволяет изменять диапазон измеряемых скоростей от доли миллиметра в секунду до сверхзвуковых.

Измерения поля скорости в пламени осуществлялись с использованием PIV-системы «Полис». Измерительный комплекс включает в себя: двойной импульсный Nd:YAG-лазер Quantel EverGreen с энергией в импульсе 145 мДж (длина волны 532 нм, частота до 15 Гц, длительность импульса 10 нс); объектив для формирования лазерного ножа; CCD-камеру Видеоскан 4021 с разрешением  $2048 \times 2048$  пикселей, частотой съемки – до 1,25 Гц, временем экспозиции – 128 мс; широкоугольный объектив Nikkor 28 mm F/2.8 D (диаметр 52 мм); синхронизирующий процессор; персональный компьютер с программным обеспечением ActualFlow. В качестве трассеров в данной работе, по аналогии с [24], использовались частицы оксида кремния, образующиеся при добавлении небольшого количества силиконового масла в зону горения.

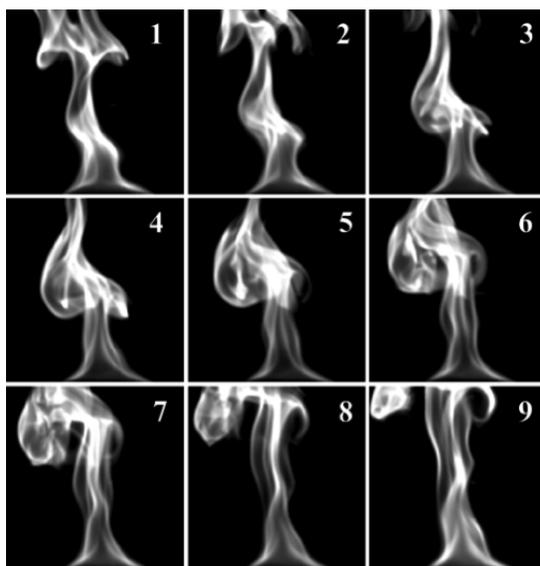
Для генерации колебаний давления и воздействия их на пламя была разработана и изготовлена экспериментальная установка, позволяющая осуществлять воздействия на пламя пульсациями давления с частотой 2–15 Гц. Установка состояла из генератора колебаний специальной формы Г6-28, усилителя LV 103 и акустической системы с обратной связью, включающей низкочастотную динамическую головку с мягким подвесом 25-ГД-26. Расстояние от источника колебаний до внешней поверхности пламени составляло 0.3 м.

### Результаты экспериментальных исследований

В [9] показано, что размеры температурных неоднородностей, показанные на термограмме (рис. 1), можно с приемлемой точностью определить по спектру изменения температуры в пламени с использованием простой математической модели [9], основанной на предположении подобия распределений гидродинамических и термодинамических параметров. На рис. 2 приведена последовательность термограмм, показывающих цикличность процесса формирования и перемещения температурных неоднородностей на примере горения бензина. Цикличность этих процессов обуславливает наличие характерных частот пульсации температуры в пламени [4, 9].

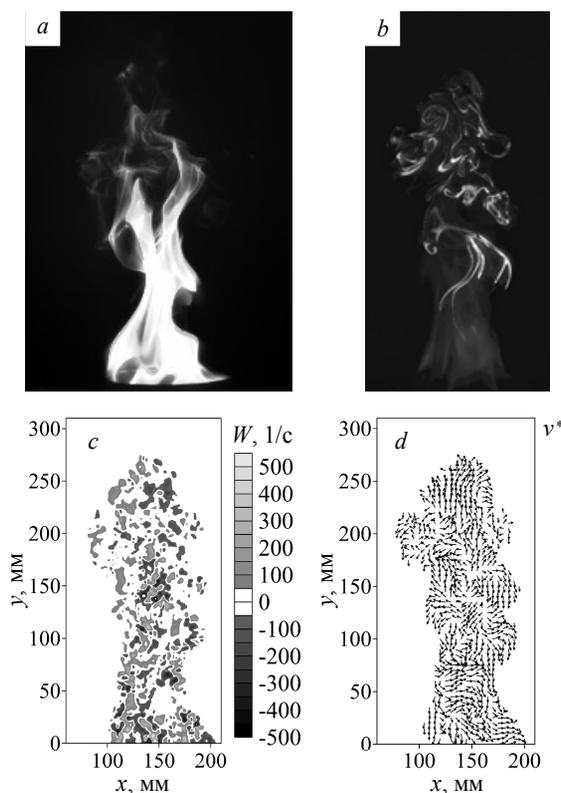


**Рис. 1.** Характерная мгновенная термограмма пламени при горении бензина со свободной поверхности с обозначенными областями температурных неоднородностей  
**Fig. 1.** A characteristic instantaneous flame thermogram during the combustion of gasoline from a free surface with designated regions of temperature inhomogeneities



**Рис. 2.** Последовательность термограмм пламени при горении бензина  
**Fig. 2** Sequence of flame thermograms in the combustion of gasoline

На рис. 3 (дизельное топливо) и 4 (бензин) приведены мгновенные термограммы, трассерные PIV-изображения, завихренность и поле относительной скорости в пламени  $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{v}_z$ , где  $\vec{v}$  – мгновенная скорость в пламени,  $\vec{v}_z$  – среднее значение вертикальной компоненты  $\vec{v}$ . Все изображения получены в близкие моменты времени в интервале 130 мкс.

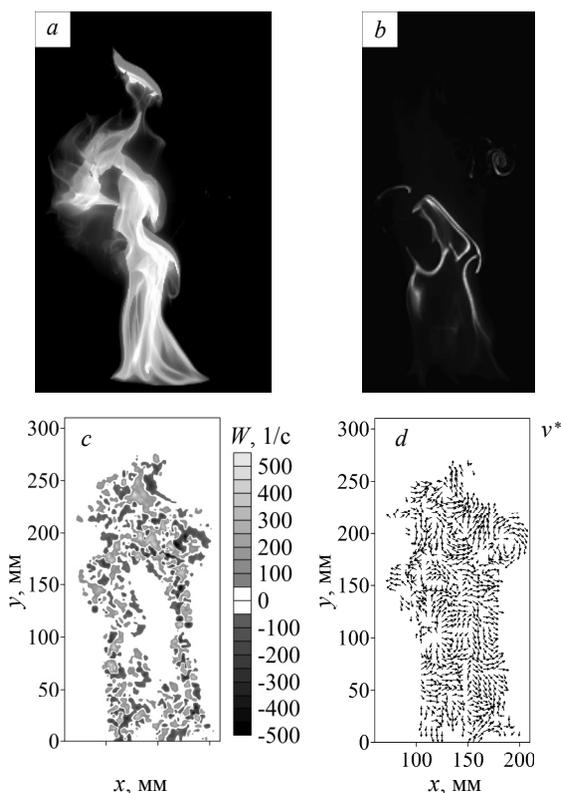


**Рис. 3.** Термограмма (a), трассерное PIV-изображение (b), завихренность (c), поле относительной скорости (d) в пламени при горении дизельного топлива

**Fig. 3.** The thermogram (a), the tracer PIV image (b), the vorticity (c), the relative velocity field (d) in the flame when burning diesel fuel

Относительно малое время экспозиции кадра тепловизионной камеры (180 мкс) позволяет получить «мгновенное» поле температуры в пламени, на котором можно обнаружить локальные температурные неоднородности (см. рис. 1). Синхронизированные (с тепловизором) PIV-измерения позволяют получить 2D-распределения скорости в пламени. На рис. 3 и 4 видно, что поле относительной скорости  $\vec{v}^*$  демонстрирует сложную нестационарную структуру турбулентного пламени. В структуре течения наблюдаются локальные завихрения, которые коррелируют (в пространстве и времени) с температурными неоднородностями пламени.

Аналогично обработке термограмм [9] была проведена статистическая обработка размеров крупных вихревых областей на трассерных PIV-изображениях, поддающихся идентификации и измерению. Результаты измерений приведены в табл. 1, где  $b$  – масштаб турбулентных вихрей, полученных на основании спектров пульсации температуры [9],  $b_{\text{exp}}$  – экспериментально измеренные размеры температурных неоднородностей на термограммах [9],  $b_{\text{PIV}}$  – размеры завихрений в облаке частиц оксида кремния, полученные при помощи PIV-метода,  $L$  – высота пламени.



**Рис. 4.** Термограмма (*a*), трассерное PIV-изображение (*b*), завихренность (*c*), поле относительной скорости (*d*) в пламени при горении бензина

**Fig. 4.** The thermogram (*a*), the tracer PIV image (*b*), the vorticity (*s*), the relative velocity field (*d*) in the flame when the gasoline burns

Анализ данных, представленных в табл. 1, говорит о приемлемом согласовании результатов измерений размеров температурных неоднородностей в пламени, полученных при помощи термографии, и размеров завихрений в облаке трассеров (оксида кремния) на PIV-изображениях. Следует обратить внимание, что размеры областей завихренности ( $\text{rot } \vec{v}^*$ ) на рис. 3, *c* и 4, *c* также сравнимы с величинами  $b_{\text{exp}}$  и  $b_{\text{PIV}}$ . На основании полученных результатов и данных о подобии частот пульсаций термодинамических и гидродинамических параметров в зависимости

Таблица 1

**Сравнение размеров масштабов крупных турбулентных вихрей,  
полученное при помощи термографии [9] и PIV**

Топливо	$L, \text{ м}$	$b, \text{ м [9]}$	$b_{\text{exp}}, \text{ м [9]}$	$b_{\text{PIV}}, \text{ м}$
Бензин	0.7	$0.025 \pm 0.005$	$0.024 \pm 0.004$	$0.024 \pm 0.003$
		$0.014 \pm 0.001$	$0.015 \pm 0.003$	$0.015 \pm 0.002$
Керосин	0.7	$0.157 \pm 0.006$	$0.019 \pm 0.005$	$0.019 \pm 0.003$
		$0.098 \pm 0.014$	$0.012 \pm 0.004$	$0.012 \pm 0.003$
Дизельное топливо	0.5	$0.025 \pm 0.0055$	$0.019 \pm 0.006$	$0.025 \pm 0.005$ $0.019 \pm 0.005$
Смесь полевых растительных горючих материалов	1.2	$0.049 \pm 0.003$	–	$0.035 \pm 0.004$
		$0.035 \pm 0.004$	–	$0.027 \pm 0.001$
		$0.027 \pm 0.002$	$0.018 \pm 0.008$	$0.018 \pm 0.007$
Хвоя кедр	0.8	$0.062 \pm 0.013$	–	$0.029 \pm 0.002$
		$0.029 \pm 0.03$	–	$0.019 \pm 0.001$
		$0.019 \pm 0.001$	$0.022 \pm 0.011$	
Древесина сосны	1.2	$0.051 \pm 0.01$	–	$0.029 \pm 0.004$
		$0.029 \pm 0.004$	$0.011 \pm 0.007$	$0.011 \pm 0.006$
Древесина кедр	1.2	$0.042 \pm 0.011$	–	$0.042 \pm 0.001$
		$0.024 \pm 0.004$	$0.023 \pm 0.007$	$0.023 \pm 0.006$

от числа Шмидта [25] можно говорить, что в рассмотренных в данной статье условиях отношения параметров вязкости и диффузии существует взаимосвязь между областями повышенной температуры и вихревыми структурами в поле скоростей (рис. 3 и 4).

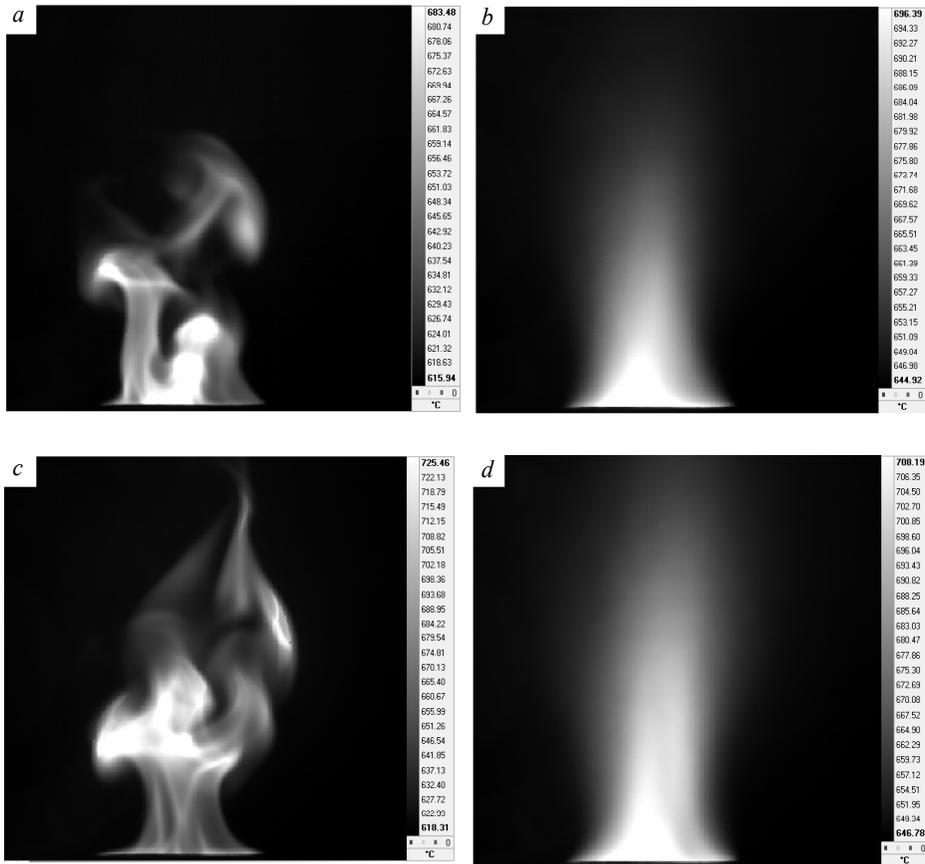
**Результаты экспериментальных исследований воздействий  
малых возмущений на тепловые характеристики пламени**

На рис. 5, на примере горения спирта представлены мгновенные и осредненные поля температуры нестационарного факела пламени как без воздействия (рис. 5, а, б), так и с воздействием пульсациями давления с частотой 4 Гц (рис. 5, в, г).

В результате исследований было установлено, что воздействие на пламя с частотами 3–8 Гц для рассматриваемых топлив приводит к изменению высоты факела пламени. Помимо изменений геометрических размеров пламени эффект внешних воздействий проявлялся также в спектре изменения температуры в пламени. На рис. 6 и 7, на примере горения спирта и бензина показаны спектры изменения температур в пламени как при наличии внешних воздействий, так и без них.

В [9] делается предположение, что пульсации температуры с определенной частотой обусловлены размерами тепловых неоднородностей поля температуры в пламени, которые в свою очередь являются отражением неоднородностей поля гидродинамических параметров, а именно наличием турбулентных вихрей. В [9] представлена оригинальная методика оценки масштабов турбулентных вихрей в пламени по характерной частоте в спектре изменения температуры в пламени.

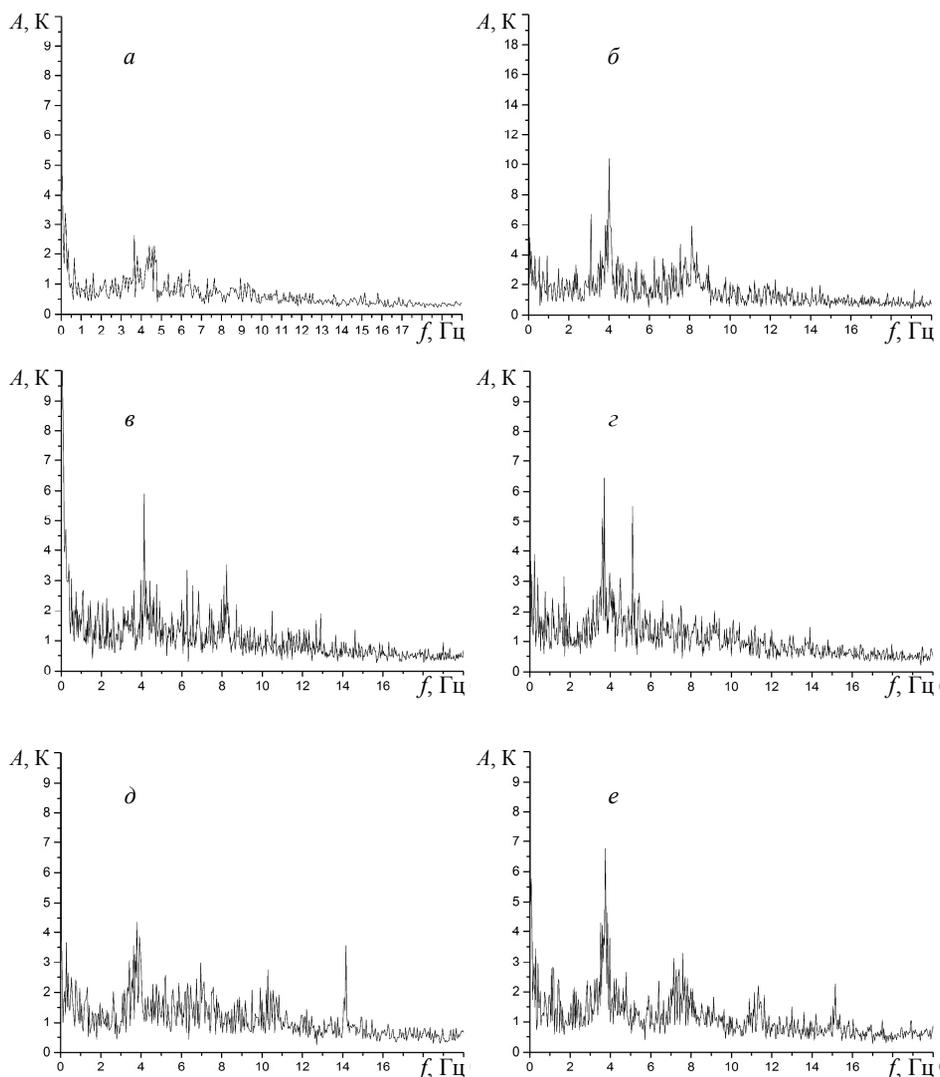
Из спектров на рис. 6 и 7 видно, что при воздействии на пламя пульсациями внешнего давления в спектре выделяются максимумы с частотой, соответствующей частоте воздействия. При этом характерные частоты, которые присутствовали в спектре изменения температуры без воздействия сохраняются с изменением амплитуды. Это обуславливает наличие характерных масштабов турбулентности для невозмущенного пламени и появление новых масштабов, которые не попадают



**Рис. 5.** Термограммы пламени при горении спирта: *a* – мгновенная термограмма факела пламени без внешнего воздействия, *b* – осредненная по времени термограмма факела пламени без внешнего воздействия, *c* – мгновенная термограмма факела пламени при воздействии с частотой 4 Гц, *d* – осредненная по времени термограмма факела пламени при воздействии с частотой 4 Гц

**Fig. 5.** Thermograms of a flame in the burning of alcohol: *a* – instantaneous thermogram of the flame of the flame without external influence, *b* – time-averaged thermogram of the flame of the flame without external influence, *c* – instantaneous thermogram of the flame of the flame when exposed to a frequency of 4 Hz, *r* – averaged over time thermogram of the flame exposure with a frequency of 4 Hz

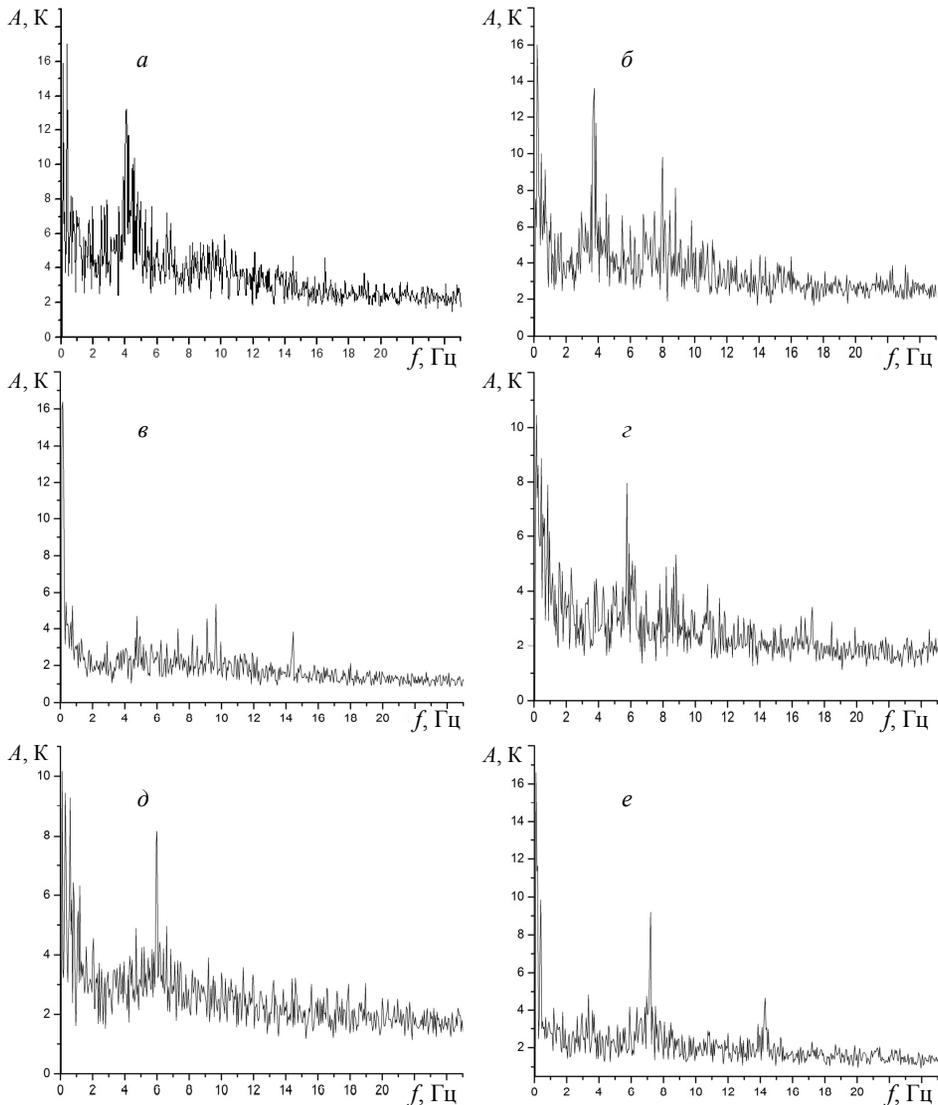
в доверительные интервалы [9]. В табл. 2 представлены результаты оценки масштабов турбулентности в пламени при горении спирта и бензина с частотами  $f$  воздействия пульсациями давления, при которых были установлены отклики в спектре изменения температуры ( $b_f$  – рассчитанное значение по частотам спектра изменения температуры в пламени). В [9] при отсутствии внешних возмущений получены масштабы турбулентности при помощи оригинальной модели для спирта  $b = (0.0032 \pm 0.0002)$  м, для бензина  $b = (0.025 \pm 0.005)$  м,  $b = (0.014 \pm 0.001)$  м и измеренные непосредственно размеры температурных неоднородностей в мгновенном поле температуры для спирта  $b_{\text{exp}} = (0.0033 \pm 0.0015)$  м, для бензина  $b_{\text{exp}} = (0.024 \pm 0.004)$  м,



**Рис. 6.** Спектры изменения температуры в пламени при горении этилового спирта без внешнего воздействия (*a*) при воздействии с частотой 3 (*б*), 4 (*в*), 5 (*г*), 14 (*д*) и 15 Гц (*е*)  
**Fig. 6.** Spectra of temperature change in a flame during burning of ethyl alcohol without external influence (*a*) when exposed to a frequency of 3 Hz (*b*), 4 Hz (*in*), 5 Hz (*g*), 14 Hz (*d*), 15 Hz (*e*)

$b_{\text{exp}} = (0.015 \pm 0.003)$  м. Для дизельного топлива соответствующие характеристики в [9] равны:  $b = (0.025 \pm 0.0055)$  м и  $b_{\text{exp}} = (0.019 \pm 0.006)$  м. При горении керосина в работе [9] получен большой разброс значений  $b$  и  $b_{\text{exp}}$ , что объясняется размытостью границ областей повышенной температуры в пламени. При выполнении проекта в случае горения керосина не было выявлено явных эффектов внешних воздействий.

Данные табл. 2 показывают, что при воздействии на пламя пульсациями давления, несмотря на изменение высоты пламени и появление новых частотных



**Рис. 7.** Спектры изменения температуры в пламени при горении бензина без воздействия (*a*) и при воздействии с частотой 4.5 (*б*), 4.7 (*в*), 5 (*г*), 5.6 (*д*) и 5.8 Гц (*е*)

**Fig. 7.** Spectra of temperature changes in a flame when burning gasoline without exposure (*a*) and when exposed to a frequency of 4.5 Hz (*b*), 4.7 Hz (*c*), 5 Hz (*d*), 5.6 Hz (*e*), 5.8 Hz (*e*)

максимумов, не происходит значительных изменений размеров турбулентных вихрей, рассчитанных по методике [9], и они укладываются в доверительные интервалы, приведенные там же. Следует отметить, что появление новых частотных максимумов в спектре изменения температуры (при рассмотренном диапазоне частот воздействия) не приводит к появлению температурных неоднородностей других размеров. Следует отметить, что не всякие колебания внешнего давления вызывают соответствующий отклик на спектре изменения температуры. Природа этого явления не изучена и требует дальнейших исследований.

Таблица 2

## Оценка масштабов турбулентности в пламени при горении спирта и бензина

Топливо	$f, \text{Гц}$	$b_f, \text{м}$
Спирт	0	0.0032
	3.4	0.004
	3.7	0.0038
	4	0.0037
	4.2	0.0033
	4.5	0.0035
	5.2	0.003
	5.5	0.0018
Бензин	0	0.0257
	4	0.0260
	4.2	0.0318
	4.4	0.0286
	4.8	0.0238
	4.9	0.0274
	5	0.0239
	7.5	0.0156
	8.5	0.0125
	9	0.0149
Дизельное топливо	3	0,0259
	4	0,0204
	4.1	0,0225
	4.2	0,0245
	4.4	0,0251
	4.5	0,0260
	4.6	0,0227
	4.7	0,0249
4.8	0,0213	

## Выводы

Согласие результатов измерений, полученных двумя разными методами, говорит о следующем: наблюдается хорошая корреляция между размерами крупных вихревых структур в поле скоростей, регистрируемых с помощью PIV-метода, и размерами температурных неоднородностей, регистрируемых при помощи термографии в пламени, что говорит о допустимости применения гипотезы подобия распределений гидродинамических и термодинамических параметров, предложенной в [9] для определения масштабов турбулентности по спектрам пульсации температуры.

При анализе полученных результатов и погрешностей необходимо учитывать, что источником информации служат плоские изображения объемного полупрозрачного объекта и значительный разброс результатов обусловлен трехмерной структурой реальных температурных неоднородностей. Более точный анализ может обеспечить трехмерная томография пламени, что на данном этапе авторам статьи недоступно. Тем не менее отмеченная корреляция достаточно наглядна и при анализе плоских изображений.

Следует отметить, что пульсации внешнего давления влияют на режим течения в пламени, вызывают формирование новых областей повышенной температу-

ры в пламени, где происходят окислительные реакции, что в свою очередь приводит к увеличению максимальной температуры на осредненной по времени термограмме на 8–80 К. Однако не всякие колебания внешнего давления вызывают соответствующий отклик на спектре изменения температуры. Природа этого явления не изучена и требует дальнейших исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Lewis B. and Elbe G.* Combustion, Flames and Explosions of Gases. 3 ed. Academic Press., 1987.
2. *Warnatz J., Maas U., Dibble R.W.* Combustion. Berlin: Springer, 1999. 300 p.
3. *Shelkin K.I.* Influence of tube non-uniformities on the detonation ignition and propagation in gases // JETP. 1940. V. 10. P. 823–827.
4. *Loboda E.L., Reyno V.V., Vavilov V.P.* The use of infrared thermography to study the optical characteristics of flames from burning vegetation // Infrared Physics and Technology. 2014. V. 67. P. 566–573. DOI: 10.1016/j.infrared.2014.09.041.
5. *Kuznetsov V.T. and Loboda E.L.* Experimental study of peat ignition upon exposure to radiant energy // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2010. V. 46. No. 6. P. 690–695. DOI: 10.1007/s10573-010-0091-8.
6. *Qian C. and Saito K.* Measurements of pool-fire temperature using IR technique // Combustion Institute/Central and Western States (USA) and Combustion Institute/Mexican National Section and American Flame Research Committee. Combustion Fundamentals and Applications. Joint Technical Meeting. Proceedings. April 23–26, 1995, San Antonio, TX, Gore, J. P., Editor(s). P. 81–86.
7. *Rinieri F., Balbi J.-H., Santoni P.-A.* On the use of an infra-red camera for the measurement of temperature in fires of vegetative fuels // QIRT 2006 (<http://qirt.gel.ulaval.ca/archives/qirt2006/papers/011.pdf>).
8. *Dupuy J., Vachet P., Maréchal J., Meléndez J., De Castro A.J.* Thermal infrared emission–transmission measurements in flames from a cylindrical forest fuel burner // Int. J. Wildland Fire. 2007. No. 16. P. 324–340. DOI: 10.1071/WF06043.
9. *Loboda E.L., Matvienko O.V., Vavilov V.P., Reyno V.V.* Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale // Infrared Physics & Technology. 2015. V. 72. P. 1–7. DOI: 10.1016/j.infrared.2015.07.001.
10. *Лобода Е.Л., Рейно В.В., Агафонцев М.В.* Выбор спектрального интервала для измерения полей температуры в пламени и регистрации экранированных пламенем высокотемпературных объектов с применением методов ИК-диагностики // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 2. С. 124–128.
11. *Loboda E.L. and Reyno V.V.* Influence of the coefficient of measuring temperatures at burning forest and steppe combustible materials with different moisture content with IR methods. Frequency analysis of temperature changing // Optics of Atmosphere and Ocean. 2011. No. 11. P. 1002–1006. [In Russian]
12. *Anufriev I.S., Anikin Yu.A., Filkov A.I., et al.* Investigation into the structure of a swirling flow in a model of a vortex combustion chamber by laser Doppler anemometry // Techn. Phys. Lett. 2013. V. 39. No. 1. P. 30–32. DOI: 10.1134/S1063785013010045.
13. *Alekseenko S.V., Anufriev I.S., Vigriyanov M.S., et al.* Steam-enhanced regime for liquid hydrocarbons combustion: velocity distribution in the burner flame // Thermophysics and Aeromechanics. 2014. V. 21. No. 3. P. 393–396. DOI: 10.1134/S0869864314030123.
14. *Anufriev I.S., Kopyev E.P. and Loboda E.L.* Study of flame characteristics during liquid hydrocarbons combustion with steam gasification // Proc. SPIE 9292, 20th Int. Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 929226 (November 25, 2014); DOI: 10.1117/12.2086623.
15. *Kairuki J., Dawson J.R., Mastorakos E.* Measurements in turbulent premixed bluff body flames close to blow-off // Combustion and Flame. 2012. V. 159. P. 2589–2607. DOI: 10.1016/j.combustflame.2012.01.005.

16. *Albini F.A.* Physical model for fire spread in brush // Proc. 2 Int. Symposium on Combustion. Pittsburg, 1967. P. 553–560.
17. *Grishin A.M.* Mathematical modeling of forest fires and new methods of fighting them. Tomsk: Publishing House of the Tomsk State University, 1997. 390 p.
18. *Morvan D., Dupuy J.L.* Modeling the propagation of a wildfire through a Mediterranean shrub using a multiphase formulation // Combustion and Flame. V. 138. No. 3. P. 199–210.
19. *Perminov V.A., Loboda E.L. and Reyno V.V.* Mathematical modeling of surface forest fires transition into crown forest fires // Proc. SPIE 9292, 20th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 929225 (November 25, 2014). DOI: 10.1117/12.2086618.
20. *Li Z.S., Li B., Sun Z.W., Bai X.S., Alden M.* Turbulence and combustion interaction: High resolution local flame front structure visualization using simultaneous single-short PLIF imaging of CH, OH, and CH<sub>2</sub>O in piloted premixed jet flame // Combustion and Flame. 2010. V. 157. P. 1087–1096. DOI: 10.1016/j.combustflame.2010.02.017.
21. *Kathryn N. Gabet, Han Shen, Randy A. Patton, Frederik Fuest, Jeffrey A. Sutton.* A comparison of turbulent dimethyl ether and methane non-premixed flame structure // Proc. Combustion Institute. 2013. V. 34. P. 1447–1454. DOI: 10.1016/j.proci.2012.06.183.
22. *Kazuhiro Yamamoto, Shinji Isii, Masahiro Ohnishi.* Local flame structure and turbulent burning velocity by joint PLIF imaging // Proc. Combustion Institute. 2011. V. 33. P. 1285–1292. DOI: 10.1016/j.proci.2010.06.087.
23. *Anufriev I.S., Sharypov O.V., and Shadrin E.Yu.* Flow diagnostics in a vortex furnace by particle image velocimetry // Techn. Phys. Lett. 2013. V. 39. No. 5. P. 30–37. DOI: 10.1134/S1063785013050155.
24. *Alekseenko S.V., Anufriev I.S., Vigriyanov M.S., et al.* Steam-Enhanced Regime for Liquid Hydrocarbons Combustion: Velocity Distribution in the Burner Flame // Thermophys. Aeromech. 2014. V. 21. No. 3. P. 393–396. DOI: 10.1134/S0869864314030123.
25. *Cant R.S., Mastorakos E.* An Introduction to Turbulent Reacting Flows. Imperial College Press, 2008. 177 p.

Статья поступила 26.04.2018 г.

Agafontsev M.V., Anufriev I.S., Kopyev E.P., Shadrin E.Y., Loboda E.L., Lutsenko A.V. INVESTIGATION OF CHARACTERISTICS OF TURBULENT FLAME WITH EFFECT OF LOW ENERGY FLUCTUATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 57–71

DOI 10.17223/19988621/55/6

Keywords: combustion, turbulence, flame, IR- diagnostic, PIV-measurements.

The physicochemical processes associated with combustion and flame propagation in various technological devices and in natural fires are realized under conditions of turbulence. Traditionally, in experimental studies of combustion processes, thermocouples are used to determine the temperature fields in a flame. The methods of thermography allow us to abandon the use of thermocouples and at the same time obtain information on the temperature distribution with good spatial and temporal resolution.

In this paper we present the results of an investigation of the influence of sound perturbations on the combustion process. As combustible materials liquid hydrocarbon fuels (gasoline, kerosene, diesel fuel) and vegetable combustible materials (a mixture of field combustible materials, pine needles, pine wood, cedar wood) were used.

To measure the flow velocity in a turbulent flame, the contactless optical method of flow diagnostics was used – particle image velocimetry (PIV) method. The intensity of the IR radiation of the flame and the temperature distribution in the flame were registered with the JADE J530SB thermal imager. As a result, a good agreement was reached on the estimation of the size of the vortex structures obtained using PIV and the dimensions of the temperature inhomogeneities recorded by means of IR thermography in a flame.

AGAFONTSEV Mihail Vladimirovich (Tomsk State University, Tomsk, Russia) E-mail: kim75mva@gmail.com

ANUFRIEV Igor' Sergeevich (Candidate of Physics and Mathematics, Kutateladze Institute of Thermophysics, SB RAS, Novosibirsk). E-mail: anufriev@itp.nsc.ru

KOPYEV Evgenij Pavlovich (Kutateladze Institute of Thermophysics, SB RAS, Novosibirsk). E-mail: kopyev.evgeniy@mail.ru

SHADRIN Evgenij Yur'evich (Kutateladze Institute of Thermophysics, SB RAS, Novosibirsk). E-mail: evgen\_zavita@mail.ru

LOBODA Egor Leonidovich (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia) E-mail: loboda@mail.tsu.ru

LUTSENKO Anastasiya Vladimirovna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia) E-mail: loboda@mail.tsu.ru

#### REFERENCES

- Lewis B., Elbe G. (1987) *Combustion, Flames and Explosions of Gases*. 3 ed. Academic Press.
- Warnatz J., Maas U., Dibble R.W. (1999) *Combustion*. Springer, Berlin. 300 p.
- Shelkin K.I. (1940) Influence of tube non-uniformities on the detonation ignition and propagation in gases. *JETP*. 10.
- Loboda E.L., Reyno V.V., Vavilov V.P. (2014) The use of infrared thermography to study the optical characteristics of flames from burning vegetation. *Infrared Physics and Technology*. 67. pp. 566–573. DOI: 10.1016/j.infrared.2014.09.041.
- Kuznetsov V.T., Loboda E.L. (2010) Experimental study of peat ignition upon exposure to radiant energy. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 46(6). pp. 690–695. DOI: 10.1007/s10573-010-0091-8.
- Qian C., Saito K. (1995) Measurements of pool-fire temperature using IR technique. *Combustion Institute, Central and Western States (USA) and Combustion Institute, Mexican National Section and American Flame Research Committee. Combustion Fundamentals and Applications. Joint Technical Meeting. Proceedings*. pp. 81–86.
- Rinieri F., Balbi J.-H., Santoni P.-A. (2006) On the use of an infrared camera for the measurement of temperature in fires of vegetative fuels. *QIRT* (<http://qirt.gel.ulaval.ca/archives/qirt2006/papers/011.pdf>). DOI: 10.21611/qirt.2006.011.
- Dupuy J., Vachet P., Maréchal J., Meléndez J., De Castro A.J. (2007) Thermal infrared emission–transmission measurements in flames from a cylindrical forest fuel burner. *International Journal of Wildland Fire*. 16. pp. 324–340. DOI: 10.1071/WF06043.
- Loboda E.L., Matvienko O.V., Vavilov V.P., Reyno V.V. (2015) Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale. *Infrared Physics & Technology*. 72. pp. 1–7. DOI: 10.1016/j.infrared.2015.07.001.
- Loboda E.L., Agafontsev M.V., Reino V.V. (2015) Choice of a spectral range for measuring temperature fields in a flame and recording high-temperature objects screened by the flame using IR diagnostic methods. *Russian Physics Journal*. 58(2). pp. 278–282. DOI: 10.1007/s11182-015-0493-x.
- Loboda E.L., Reyno V.V. (2011) Influence of the coefficient of measuring temperatures at burning forest and steppe combustible materials with different moisture content with IR methods. Frequency analysis of temperature changing. *Optics of Atmosphere and Ocean*. 11. pp. 1002 – 1006.
- Anufriev I.S., Anikin Yu.A., Filkov A.I., et al. (2013) Investigation into the structure of a swirling flow in a model of a vortex combustion chamber by laser Doppler anemometry. *Technical Physics Letters*. 39(1). pp. 30–32. DOI: 10.1134/S1063785013010045.
- Alekseenko S.V., Anufriev I.S., Vigriyanov M.S., Dulin V.M., Kopyev E.P., Sharypov O.V. (2014) Steam-enhanced regime for liquid hydrocarbons combustion: velocity distribution in

- the burner flame. *Thermophysics and Aeromechanics*. 21(3). pp. 393–396. DOI: 10.1134/S0869864314030123.
14. Anufriev I.S., Kopyev E.P. and Loboda E.L. (2014) Study of flame characteristics during liquid hydrocarbons combustion with steam gasification. *Proc. SPIE, 20th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*. 9292. DOI: 10.1117/12.2086623.
  15. Kairuki J., Dawson J.R., Mastorakos E. (2012) Measurements in turbulent premixed bluff body flames close to blow-off. *Combustion and Flame*. 159. pp. 2589–2607. DOI: 10.1016/j.combustflame.2012.01.005.
  16. Albin F.A. (1967) Physical model for fire spread in brush. *Proceedings of the 2 Int. Symposium on Combustion*. Pittsburg. 11(1). pp. 553–560. DOI: 10.1016/S0082-0784(67)80180-2.
  17. Grishin A.M. (1997) *Mathematical Modeling of Forest Fires and New Methods of Fighting them*. Tomsk: Publishing House of the Tomsk State University. 390 p.
  18. Morvan D., Dupuy J.L. (2004) Modeling the propagation of a wildfire through a Mediterranean shrub using a multiphase formulation. *Combustion and Flame*. 138(3). pp. 199–210. DOI: 10.1016/j.combustflame.2004.05.001.
  19. Perminov V.A., Loboda E.L. and Reyno V.V. (2014) Mathematical modeling of surface forest fires transition into crown forest fires. *Proc. SPIE, 20th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*. 9292. DOI: 10.1117/12.2086618.
  20. Li Z.S., Li B., Sun Z.W., Bai X.S., Alden M. (2010) Turbulence and combustion interaction: High resolution local flame front structure visualization using simultaneous single-shot PLIF imaging of CH, OH, and CH<sub>2</sub>O in piloted premixed jet flame. *Combustion and Flame*. 157. pp. 1087–1096. DOI: 10.1016/j.combustflame.2010.02.017.
  21. Kathryn N. Gabet, Han Shen, Randy A. Patton, Frederik Fuest, Jeffrey A. Sutton (2013) A comparison of turbulent dimethyl ether and methane non-premixed flame structure. *Proceedings of Combustion Institute*. 34. pp. 1447–1454. DOI: 10.1016/j.proci.2012.06.183.
  22. Kazuhiro Yamamoto, Shinji Isii, Masahiro Ohnishi (2011) Local flame structure and turbulent burning velocity by joint PLIF imaging. *Proceeding of the Combustion Institute*. 33. pp. 1285–1292. DOI: 10.1016/j.proci.2010.06.087.
  23. Anufriev I.S., Sharypov O.V., and Shadrin E.Yu. (2013) Flow diagnostics in a vortex furnace by particle image velocimetry. *Techn. Phys. Letters*. 39(5). pp. 30–37. DOI: 10.1134/S1063785013050155.
  24. Alekseenko S.V., Anufriev I.S., Vigriyanov M.S., et al. (2014) Steam-enhanced regime for liquid hydrocarbons combustion: velocity distribution in the burner flame. *Thermophys. Aeromech.* 21(3). pp. 393–396. DOI: 10.1134/S0869864314030123.
  25. Cant R.S., Mastorakos E. (2008) *An Introduction to Turbulent Reacting Flows*. Imperial College Press. 177 p.

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/55/7

**Е.С. Вячкин, В.О. Каледин, Е.В. Решетникова, Е.А. Вячкина, А.Е. Гилева****РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
С НЕСЖИМАЕМЫМИ СЛОЯМИ**

Рассматривается однопараметрическая математическая модель деформирования слоистой среды, содержащей чередующиеся упругие и объемно несжимаемые слои. Используется регуляризация некорректной задачи по А.Н. Тихонову с параметром, обратным к модулю объемной сжимаемости. Численная схема на основе метода конечных элементов сводится к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов, линейно зависящей от параметра, а искомые поля перемещений и напряжений вычисляются как предел решения регуляризованной задачи. Сеточная сходимость исследована на контрольном примере, допускающем аналитическое решение.

**Ключевые слова:** *слоистые тела вращения, упругость, дискретная схема, несжимаемость, регуляризация, сходимость.*

Слоистые структуры, образованные чередованием слоёв с различающимися жесткостями, находят применение в конструкциях высоконагруженных опор в автомобилестроении, мостостроении [1], двигателестроении [2] и других областях техники. Многослойные опоры, как правило, содержат чередующиеся эластомерные прослойки и упругие армирующие элементы из стали или полимерных композиционных материалов. Наибольшее распространение получили многослойные сферические резинометаллические опоры [1]. Прочность таких опор лимитируется армирующими слоями – вкладышами, а слои эластомера играют вспомогательную роль и служат для перераспределения опорного давления между вкладышами.

Традиционные методы расчёта и проектирования многослойных опор базируются на модели многослойной оболочки [3], развитой в [4] применительно к слоистым структурам, подверженным преимущественно действию давления вдоль нормали к слоям. Однако область применимости модели оболочки ограничивается опорами, толщина которых достаточно мала по отношению к радиусу сферы.

Поэтому в последние десятилетия развиваются методы расчёта, основанные на конечно-элементном моделировании опор, содержащих эластомерные слои [5–7]. Дискретные схемы потенциально позволяют учесть эффекты, представляющиеся существенными для моделирования конструкций, содержащих эластомеры: геометрическую нелинейность, физическую нелинейность эластомера и малую объемную сжимаемость. Так, в работе [5] на основе общей методики решения геометрически нелинейных задач [8, 9] получено численное решение задачи об осесимметричном деформировании резинового амортизатора при сжатии между двумя плоскими штампами. В монографии [6] подробно описаны гибридные конечно-элементные схемы для расчёта деформирования слабо сжимаемых и объемно-несжимаемых материалов. В [7] конечно-элементное моделирование в ком-

плексе Ansys используется для расчёта напряжённого состояния резинометаллической опоры поворотного сопла, при этом отмечается, что инженерных методик, учитывающих работу эластомера в составе двигательной установки, не существует. Заметим, что напряжённое состояние эластомерных слоёв оказалось в этом случае близким к гидростатическому, что позволило авторам [7] предложить как возможное направление исследований, представление реакции эластомера как «гидравлического клина». Это уменьшает трудоёмкость расчёта и приближает методику к потребностям практики проектирования, поскольку решение трёхмерной задачи требует значительных вычислительных ресурсов. Альтернативой может быть разработка более экономичной численной схемы.

В зависимости от целей моделирования, определяющие уравнения эластомера в известных работах принимаются такими, чтобы описать только существенные особенности их свойств. Наиболее общая формулировка, предполагающая учёт реологических свойств [10], необходима для описания процессов длительного деформирования. Такой уровень описания материала используется, как правило, при одновременном принятии гипотез слоистых оболочек [11]. Поэтому при кратковременном нагружении и более реалистичной модели деформирования применяются более простые определяющие уравнения эластомера на основе потенциала Муни – Ривлина [12], потенциала Трелоара [13] и различных асимптотических представлений. Так, в [14] обсуждается построение определяющих уравнений для эластомера, находящегося в состоянии продольного сдвига и кручения при конечных деформациях, в [15] предложены приближённые уравнения третьего порядка, в [16] рассматривается продольный сдвиг и кручение резиновой втулки. Следует отметить, что построение определяющих уравнений гиперупругого материала требует большого объёма экспериментальных данных.

Потребность в первую очередь обеспечить прочность армирующих слоёв на этапе проектирования, когда экспериментальных данных недостаточно, вынуждает использовать для эластомера модель упругого материала. Такая постановка использована также в [5] при анализе резиновой втулки без армирующих слоёв при больших перемещениях. Особенностью сеточных методов в задачах с большим числом степеней свободы является целесообразность последовательных линеаризаций [17], что усиливает актуальность исследований в рамках моделей теории упругости, в том числе – модели линейного несжимаемого неогуковского материала.

В монографии [4] указано соотношение модуля объёмного сжатия и модуля сдвига – в диапазоне от  $3 \cdot 10^3$  до  $8 \cdot 10^3$ , что соответствует коэффициенту Пуассона 0.49982–0.49993. Близость этой величины к 0.5 является одним из аргументов в пользу неогуковской модели, в которой достаточно измерение только модуля сдвига. Рассмотрение совместного деформирования эластомера и армирующих слоёв, для которых характерны модули упругости порядка  $10^7$  МПа, приводит к ухудшению обусловленности разрешающих уравнений, при котором погрешность решения системы уравнений превышает невязку в  $10^7$  раз. Это является дополнительным аргументом в пользу модели несжимаемого эластомера, по сравнению со слабо сжимаемым, при построении эффективной численной схемы расчёта.

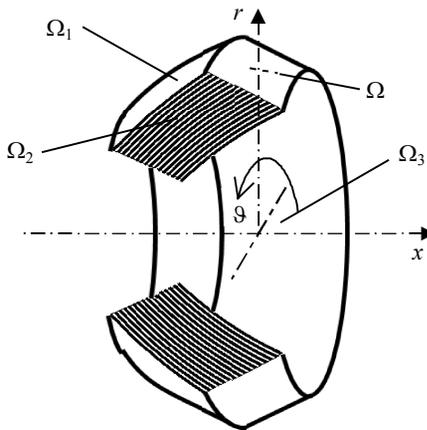
Вопросы сходимости и точности конечно-элементных схем для слабо сжимаемых и несжимаемых материалов подробно обсуждаются в монографии [6]. Показано, что для слабо сжимаемых материалов гибридные схемы, с использованием функционала Васидзу, обладают большей точностью, чем изопараметрические элементы на основе функционала Лагранжа. Однако функционал Васидзу не об-

ладает выпуклостью, и численные схемы на его основе приводят к системам линейных уравнений, не обладающих положительной определённой, что затрудняет апостериорную оценку погрешности решения.

Поэтому представляют интерес эффективные численные схемы для расчёта слоистых структур с чередующимися эластомерными и высокомодульными слоями, при явном включении в модель слоёв с различными характеристиками, на основе выпуклого функционала Лагранжа. Одна из таких схем предложена в [18, 19] на основе регуляризации по А.Н. Тихонову и вычисления предела решения регуляризованной задачи. Целью настоящей работы является исследование сеточной сходимости этой схемы и чувствительности к начальному параметру регуляризации.

### Однопараметрическая математическая модель деформирования слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои

Рассмотрим осесимметричную конструкцию, содержащую чередующиеся высокомодульные ортотропные и изотропные объемно-несжимаемые упругие слои с высокой сдвиговой податливостью, выделенные чёрным цветом в продольном сечении (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема расположения слоёв:  $\Omega$  – тело вращения,  $\Omega_1$  – жесткое основание,  $\Omega_2$  – продольное сечение,  $\Omega_3$  – нагруженная поверхность

**Fig. 1.** Arrangement of layers:  $\Omega$  is the body of revolution,  $\Omega_1$  is the rigid base,  $\Omega_2$  is the longitudinal section, and  $\Omega_3$  is the loaded surface

Материал высокомодульных армирующих слоёв считаем упругим, а деформации достаточно малыми, чтобы можно было принять определяющее уравнение в виде линейного закона Гука [20]:

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} e_{kl}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $e_{kl}$  – компоненты линейного тензора деформаций;  $d_{ijkl}$  – компоненты тензора упругости.

Для эластомера примем обобщенный закон Гука в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \cdot \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2)$$

где  $\Theta = e_{ii}$  – объемная деформация;  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе;  $\delta_{ij}$  – симметричный символ Кронекера.

Уменьшение объемной сжимаемости материала приводит к стремлению постоянной  $\lambda$  в бесконечность, в результате чего объёмная деформация  $\Theta$  в пределе равна нулю, и уравнение (2) в пределе не разрешимо относительно деформаций. Регуляризация (2) состоит в искусственном принятии конечного значения  $\lambda = \lambda_0$ . Очевидно, в этом случае равенству (2) может быть придана форма (1).

С учётом этого сформулируем вариационную задачу: найти перемещения  $u_i \in C^0(\Omega)$ , равные нулю на границе  $\Omega_1$  и доставляющие минимум функционалу Лагранжа

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} e_{ij} d_{ijkl} e_{kl} d\Omega - \int_{\Omega_3} u_i \sigma_{ij} n_j d\Omega_3, \quad (3)$$

где  $n_j$  – координаты единичного вектора внешней нормали к поверхности  $\Omega_3$ , деформации под интегралом выражены через перемещения  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ .

Условие  $u_i|_{\Omega_1} = 0$  является главным граничным условием этой вариационной задачи, а условия сопряжения на границах раздела слоёв и граничные условия в напряжениях на границе  $\Omega_3$  – естественными граничными условиями.

Дискретная схема для такой вариационной задачи хорошо известна [6, 17]. Представим искомые перемещения в виде линейной комбинации базисных функций  $\varphi_{\Gamma} \in C^0(\Omega)$ :

$$u_i = \varphi_{\Gamma} \cdot u_i^{\Gamma}, \quad (4)$$

где  $u_i^{\Gamma}$  – значение перемещения  $u_i$  в узле  $\Gamma$  сетки (множество узлов не содержит точек поверхности  $\Omega_1$ , на которой перемещения заданы равными нулю в граничных условиях).

Учитывая сделанные выше замечания относительно плохой обусловленности, целесообразно уменьшить число степеней свободы. Для этого разложим искомые перемещения в ряд Фурье по угловой координате  $\vartheta$ :

$$u_i(x, r, \vartheta) = u_i^0(x, r) + \sum_k \left[ \hat{u}_i^k(x, r) \sin k\vartheta + \tilde{u}_i^k(x, r) \cos k\vartheta \right]. \quad (5)$$

Сетка будет образована только узлами продольного сечения  $\Omega_2$  (рис. 1) в плоскости  $(x, r)$ , а амплитуды гармоник  $u_i^0, \hat{u}_i^n, \tilde{u}_i^n$  в узлах являются искомыми узловыми неизвестными. Матрицу-столбец всех узловых неизвестных обозначим через  $U$ . Тогда условие минимума функционала (3) примет вид системы линейных уравнений:

$$KU = R, \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_i \partial U_j}, \quad R_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial U_i} \Big|_{U=0}. \quad (6)$$

Матрица жесткости  $K$  симметрична, положительно определена и имеет ленточную структуру, что позволяет использовать при решении метод Холецкого, устойчивый к накоплению погрешности округлений.

Интеграл по объёму в (3) – энергию деформации – представим в виде суммы интегралов: по объёму армирующих и по объёму податливых слоёв, для которых принят закон Гука (2). Первый из этих интегралов не включает параметра регуляризации, в то время как второй с учетом

$$d_{ijkl} = d^{\alpha}_{ijkl} + \lambda d^{\beta}_{ijkl} \quad (7)$$

можно представить в виде

$$\int_{\Omega} e_{ij} d_{ijkl} e_{kl} d\Omega = \Pi^{\alpha} + \lambda \Pi^{\beta}, \quad (8)$$

где  $\Pi^{\alpha}$  – энергия сдвиговой деформации,  $\Pi^{\beta}$  – энергия объемной деформации, не зависящие от  $\lambda$ . Тогда, варьируя  $\lambda$ , получим следующее представление матрицы  $K$  в (6):

$$K(\lambda) = K(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)C, \quad C_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi^{\beta}}{\partial U_i \partial U_j}. \quad (9)$$

Введём малый параметр  $\alpha$ , обратный к  $\lambda - \lambda_0$ . Система уравнений относительно узловых неизвестных примет вид

$$\left[ K + \frac{1}{\alpha} C \right] U(\alpha) = R, \quad (10)$$

причём матрица  $C$  симметрична, вырождена и полуположительно определена. Корректность поставленной алгебраической задачи показана в [18]. Итерационный алгоритм поиска предела решения регуляризованной задачи, обладающий сверхлинейной сходимостью, построен в [19].

### Исследование сеточной сходимости решения

Представленный алгоритм реализован в среде функционально-объектного программирования «Алгорит» [20]. Для исследования сходимости численного решения сравним его с аналитическим. В качестве тестового примера рассмотрим задачу о толстостенной трубе под действием внутреннего давления (рис. 2) [21].

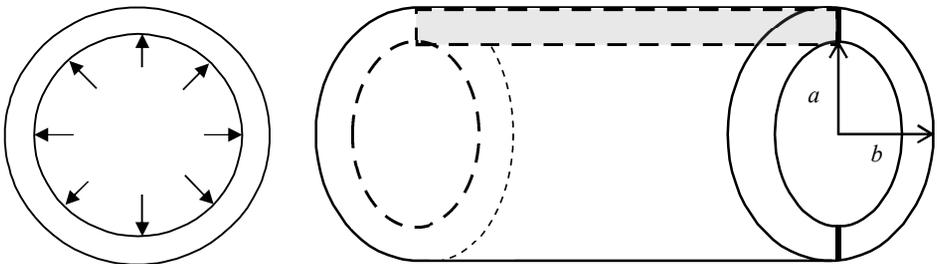


Рис. 2. Схема нагружения трубы  
Fig. 2. Loading condition for a pipe

Обозначим  $a$  – внутренний радиус;  $b$  – внешний радиус трубы равный  $1.2a$ . На внутреннюю поверхность приложено давление  $q$  МПа, при этом растягивающая сила равна нулю. Труба выполнена из несжимаемого материала с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.5$ .

Деформации определяются по формулам [21]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dU_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \text{const.} \quad (11)$$

Напряжения определяются следующим образом [21]:

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} + 2\nu A, \quad (12)$$

где  $A = q \frac{a^2}{b^2 - a^2}$ ,  $B = -q \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ ,  $r$  – радиальная координата.

Для рассматриваемой задачи примем  $\varepsilon_{zz} = 0$ , запретив таким образом осевые деформации и перемещения. Тогда осевые напряжения примут вид

$$\sigma_{zz} = 2\nu A. \quad (13)$$

Радиальные перемещения определяются по формуле [21]

$$U_r = \frac{r}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})], \quad (14)$$

где  $E$  – модуль упругости.

Подставим (12) и (13) в (14)

$$U_r = \frac{r}{E} \left[ A - \frac{B}{r^2} - \nu \left( A + \frac{B}{r^2} + 2\nu A \right) \right]. \quad (15)$$

Подставив в (15) значение  $\nu = 0.5$ , имеем

$$U_r = \frac{3B}{2Er}. \quad (16)$$

Подставив выражения для  $B$  в уравнение (16) получим формулу для радиальных перемещений трубы из объемно-несжимаемого материала:

$$U_r = \frac{3qa^2b^2}{2Er(b^2 - a^2)}. \quad (17)$$

Используя (16), вычислим максимальные и минимальные теоретические перемещения:  $U_{r\min} = 0.021714qa$ ,  $U_{r\max} = 0.026056qa$  при  $E=0.03$  ГПа.

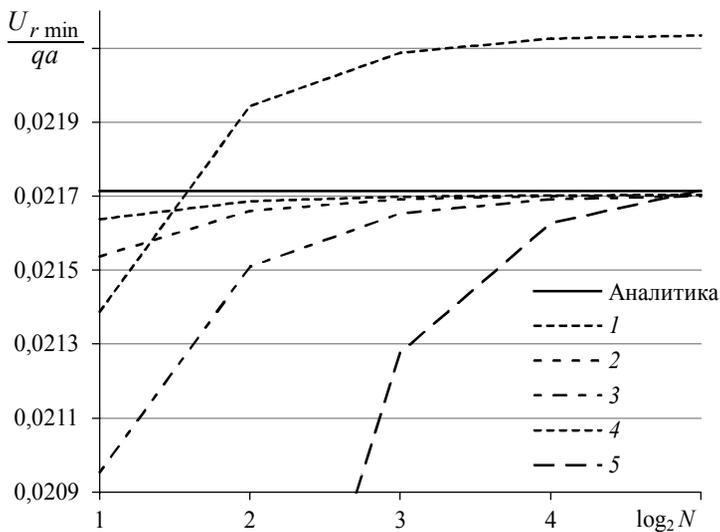
Для численного решения данной задачи продольное сечение трубы разбивалось на четырехугольные четырехузловые конечные элементы следующими видами сеток: 1 –  $0.1a \times 0.1a$ ; 2 –  $0.05a \times 0.05a$ ; 3 –  $0.025a \times 0.025a$ ; 4 –  $0.0125a \times 0.0125a$ ; 5 –  $0.00625a \times 0.00625a$ . Регуляризация выполнялась при различных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ . В каждом случае вычислялся предел решения регуляризованной задачи по методике [18] при  $\nu$ , стремящемся к 0.5.

Для анализа использовались следующие решения предложенной задачи:

- 1) предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.35$ ,
- 2) предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.45$ ,
- 3) предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.49$ ,
- 4) решение задачи при  $\nu = 0.49$ ,
- 5) решение задачи при  $\nu = 0.499$ .

Первые три варианта расчета проведены по изложенной выше методике. В 4-м и 5-м вариантах область рассматривалась как сжимаемая, с коэффициентами Пуассона, близкими к 0.5, т.е. предел при  $\nu \rightarrow 0.5$  не вычислялся.

Построим зависимость значений минимальных перемещений от логарифма числа элементов по толщине  $N$ , и сравним с вычисленным аналитически значением (рис. 3). Из графиков видно, что предложенный подход позволяет получить точную сходимость при любом значении параметра регуляризации, при этом для значений  $\nu$ , равных 0.35 и 0.45, даже на самой крупной сетке получены перемещения, близкие к аналитически вычисленным. Решение задачи для сжимаемой среды с  $\nu = 0.49$  при сгущении сетки не позволяет выйти на аналитическое значение перемещений. Решение задачи для сжимаемой среды с  $\nu = 0.499$  при первых двух разбиениях, когда сетка более крупная, позволяет получить перемещения, значения которых отличаются от аналитических на 10–25 %. Сгущение сетки позволяет выйти на полученные аналитически значения перемещений, но при этом размер конечного элемента должен быть меньше радиуса трубы примерно в 200 раз. То же самое получается и для максимальных перемещений.



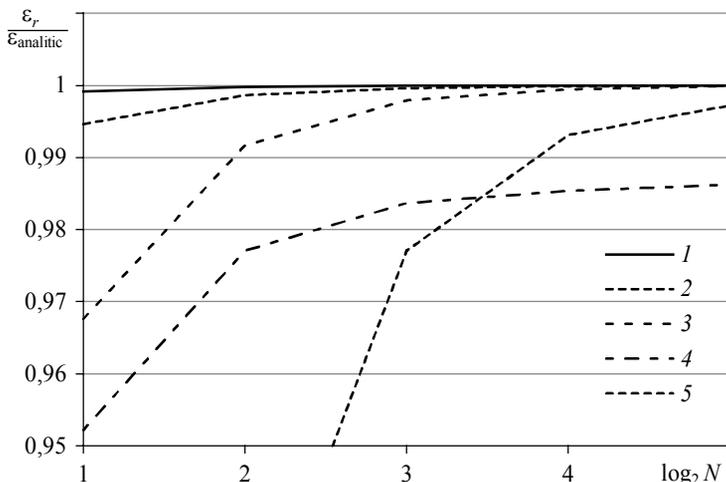
**Рис. 3.** Минимальные значения перемещений: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.35$ , 2 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.45$ , 3 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.49$ , 4 – решение задачи при  $\nu = 0.49$ , 5 – решение задачи при  $\nu = 0.499$

**Fig. 3.** Displacement minimums: 1, limit of the regularized problem solution at  $\nu = 0.35$ ; 2, limit of the regularized problem solution at  $\nu = 0.45$ ; 3, limit of the regularized problem solution at  $\nu = 0.49$ ; 4, problem solution at  $\nu = 0.49$ ; and 5, problem solution at  $\nu = 0.499$

Для сравнения вычисленных деформаций и напряжений будем использовать зависимость отношения деформаций и напряжений, полученных численно, к деформациям и напряжениям, вычисленным аналитически. Построим график только для  $\epsilon_r$ , так как  $\epsilon_z = 0$ , а  $\epsilon_0 = -\epsilon_r$  (рис. 4).

Из графика видно, что решение задачи для сжимаемой среды с  $\nu = 0.49$  имеет существенно большую погрешность для любого разбиения. Решение задачи для сжимаемой среды с  $\nu = 0.499$  при сгущении сетки позволяет значительно уменьшить погрешность, однако для  $\log_2 N = 1$  она составляет 25 %, а для  $\log_2 N = 2$  –

9 %, что является неприемлемым. При использовании предложенного подхода все значения параметра регуляризации позволяют получить приемлемую погрешность для любого разбиения сетки, при этом минимальная погрешность получается при использовании параметра регуляризации 0.35.



**Рис. 4.** Значения  $\varepsilon_r / \varepsilon_{analytic}$ : 1 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.35$ , 2 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.45$ , 3 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu = 0.49$ , 4 – решение задачи при  $\nu = 0.49$ , 5 – решение задачи при  $\nu = 0.499$

**Fig. 4.** Ratio of the  $\varepsilon_r$  to the  $\varepsilon_{analytic}$ : 1, limit of the regularized problem solution at  $\nu = 0.35$ ; 2, limit of the regularized problem solution at  $\nu = 0.45$ ; 3, limit of the regularized problem solution at  $\nu = 0.49$ ; 4, problem solution at  $\nu = 0.49$ ; and 5, problem solution at  $\nu = 0.499$

Из графиков видно, что приемлемый уровень точности расчета напряжений для любой сетки достигается при параметре регуляризации, соответствующем  $\nu = 0.35$  и  $\nu = 0.45$ . При параметре регуляризации, соответствующем  $\nu = 0.49$ , решение выходит на приемлемый уровень только при сгущении сетки.

### Выводы

В задачах расчета напряженно-деформированного состояния, при работе с слабосжимаемыми материалами, принято использовать модель деформирования сжимаемой среды с коэффициентами Пуассона, близкими к 0.5. Однако решение тестовых задач показало, что при использовании  $\nu = 0.49$  вычисленные значения перемещений отличаются от теоретических на 3–4 %. При расчете деформаций сгущение сетки позволило уменьшить погрешность с 5 до 1.5 %, а для напряжений – с 15 до 2 %. Если использовать  $\nu = 0.499$ , то отклонение перемещений от теоретических для крупной сетки составляет 26 %. Использование сгущения сетки позволяет уменьшить эту погрешность до уровня менее 0.5 %. При расчете деформаций и напряжений сгущение сетки позволило уменьшить погрешность с 15 % до приемлемого уровня. Таким образом, при использовании математической

модели деформирования сжимаемой среды с коэффициентами Пуассона, близкими к 0.5, возникают следующие проблемы:

1) неизвестно насколько надо сгущать сетку, чтобы получить решение с приемлемой точностью;

2) при сильном сгущении сетки расчеты требуют большого количество времени и мощностей компьютеров, при этом неизвестен необходимый объем оперативной памяти компьютера для требуемого сгущения сетки в реальных задачах.

Этих недостатков можно избежать, если использовать предложенный подход с параметрами регуляризации, соответствующими значению  $\nu = 0.35-0.45$ . В этом случае численное решение устойчиво, а погрешность вычисленных перемещений, напряжений и деформаций на любом виде сетки менее 0.5 %. При больших  $\nu$  для достижения требуемой точности необходимо сгущение сетки в два и более раза. Это связано с тем, что при приближении коэффициента Пуассона к значению 0.5 решение задачи становится неустойчивым. Предложенный подход, состоящий в явном вычислении предела решения регуляризованной задачи, позволяет использовать параметр регуляризации с гораздо меньшими значениями, такими, как  $\nu = 0.35$ , и при этом получать устойчивое решение. Поэтому рационально выбирать меньшие значения параметра регуляризации.

Таким образом, предложенный подход может быть использован для решения технических задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Рекомендации по проектированию и установке полимерных опорных частей мостов.* М.: Росавтодор, 2008. 89 с.
2. *Петренко В.И.* Управляемые энергетические установки на твердом ракетном топливе. М.: Машиностроение, 2003. 464 с.
3. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
4. *Мальков В.М.* Механика многослойных эластомерных конструкций. СПб.: СПбГУ, 1998. 320 с.
5. *Димитриенко Ю.И., Царёв С.М., Веретенников А.В.* Разработка метода конечных элементов для расчета конструкций из несжимаемых материалов с большими деформациями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. № 3. С. 69–83.
6. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов. М: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 1024 с.
7. *Ощепков А.Н.* Исследование напряженно-деформированного состояния эластичного опорного шарнира поворотного управляющего сопла ракетного двигателя твердого топлива в программном комплексе Ansys Workbench // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. 2016. Т. 1. С. 116–118.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
9. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
10. *Пелевин А.Г., Свистков А.Л.* Алгоритм поиска констант для модели механического поведения резины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2009. № 1. С. 85–92.
11. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Численное моделирование нелинейно-наследственного поведения пространственно-армированных композитных сред // Изв. Алтайского государственного университета. 2012. № 1-1. С. 103–106.
12. *Mooney M.* A theory of large elastic deformation // J. Appl. Phys. 1940. V. 11. P. 582–592.
13. *Треллоар Л.Р.Г.* Физика упругости каучука: пер. с англ. под ред. Е.В. Кувшинского. М.: ИИЛ, 1953. 240 с.

14. Жуков Б.А. Нелинейное взаимодействие конечного продольного сдвига и конечного кручения втулки из резиноподобного материала // Изв. Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. № 3. С. 127–135.
15. Колтак Е.П. Полый цилиндр из несжимаемого материала при больших деформациях // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. – Труды научной школы академика В.В. Новожилова. 1998. № 1. С. 96–117.
16. Акчурин Т.Р., Мальков В.М. Теоретическое и экспериментальное исследование кручения эластомерного цилиндрического шарнира // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2004. № 1. С. 73–80.
17. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 465 с.
18. Вячкин Е.С., Решетникова Е.В., Аульченко С.М., Рябков А.П., Вячкина Е.А. Однопараметрическая модель деформирования слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 6. С. 120–123.
19. Каледин В.О., Решетникова Е.В., Равковская Е.В. Алгоритм расчета напряжений в упругой среде с внутренними кинематическими связями // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы XXIV Всероссийской конференции. Новосибирск, 2015. С. 64–66.
20. Каледин В.О. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Среда функционально-объектного программирования «Алгозит» // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ, 06 марта 2017, № 2017612895.
21. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

Статья поступила 09.11.2017 г.

Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikova E.V., Vyachkina E.A., Gileva A.E. MATHEMATICAL MODELING OF STATIC DEFORMATION OF A LAYERED CONSTRUCTION WITH INCOMPRESSIBLE LAYERS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 72–83

DOI 10.17223/19988621/55/7

Keywords: layered bodies of revolution, elasticity, discrete scheme, incompressibility, regularization, convergence.

This paper presents a mathematical model of static deformation of a layered medium with alternating layers of different stiffness. The proposed regularization of the problem is implemented using the parameter inverse to the volume compressibility modulus. The obtained numerical results are compared with analytical solution to verify a numerical algorithm convergence. The problem of stress-strain state calculation in a thick-walled pipe under internal pressure is considered as a test problem. Test problem solution is obtained applying the proposed methodology using regularization parameters corresponding to the Poisson ratio of 0.35, 0.45, and 0.49. The problem with compressible medium is also solved at the Poisson ratio of 0.49 and 0.499. The grid convergence of the problem solution is analyzed and the relative error is calculated. When considering the calculations obtained for compressible media at the Poisson ratio equal to 0.49, the relative error as regard to analytical solution exceeds an acceptable level, and when the ratio is of 0.499 for coarse meshes, the calculated results are different from analytical data. When using the proposed approach with regularization parameters corresponding to a range of Poisson ratio from 0.35 up to 0.45, the numerical solution is stable and the error obtained for calculated displacements, stresses, and strains for any kind of grid is less than 0.5%. Thus, in this paper, the rational value of regularization parameter is determined and the special approach that can be used to solve real technical problems is proposed.

VYACHKIN Evgeniy Sergeevich (Novokuznetsk Institute (Branch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: viachkine@mail.ru

*KALEDIN Valeriy Olegovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Novokuznetsk Institute (Brunch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: vkaled@mail.ru

*RESHETNIKOVA Elena Vasil'evna* (Candidate of Technical Sciences, Novokuznetsk Institute (Brunch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: elenares@yandex.ru

*VYACHKINA Elena Aleksandrovna* (Candidate of Physics and Mathematics, Novokuznetsk Institute (Brunch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: SedovaEA@yandex.ru

*GILEVA Anna Evgen'evna* (Novokuznetsk Institute (Brunch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: anna310591@yandex.ru

#### REFERENCES

1. *Rekomendatsii po proektirovaniyu i ustanovke polimernykh opornykh chastey mostov* [Recommendations for the design and installation of polymeric support of a bridge] (2008) Moscow: Rosavtodor.
2. Petrenko V.I. (2003) *Upravlyaemye energeticheskie ustanovki na tverdom raketnom toplive* [Managed power plants for solid propellants]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. (1980) *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy* [Mechanics of multilayered structures]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Mal'kov V.M. (1998) *Mekhanika mnogosloynnykh elastomernykh konstruksiy* [Mechanics of multilayered elastomeric structures]. Saint-Petersburg: SPbGU.
5. Dimitrienko Yu.I., Tsariov S.M., Veretennikov A.V. (2007) Razrabotka metoda konechnykh elementov dlya rascheta konstruksiy iz neszhimaemykh materialov s bol'shimi deformatsiyami [Development of a finite element method for calculation of structures made of incompressible materials with large deformations]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Eststvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 3. pp. 69–83.
6. Bathe K.Yu. (1996) *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall.
7. Oshchepkov A.N. (2016) Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya elastichnogo opornogo sharnira povorotnogo upravlyayushchego sopla raketnogo dvigatelya tverdogo topliva v programnom komplekse Ansys Workbench [Investigation of a stress-strain state of elastic support hinge of a rotary control nozzle of solid fuel rocket engine using Ansys Workbench software package]. *Aerokosmicheskaya tekhnika, vysokie tekhnologii i innovatsii*. 1. pp. 116–118.
8. Truesdell C. (1977) *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. New York: Academic Press.
9. Korobechnikov S.N. (2000) *Nelineynoe deformirovanie fizicheskikh tel* [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.
10. Pelevin A.G., Svistkov A.L. (2009) Algoritm poiska konstant dlya modeli mekhanicheskogo povedeniya reziny [Search algorithm for the constants of a model of rubber mechanical behavior]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 85–92.
11. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. (2012) Numerical simulation of behaviour of the three-dimensional reinforcement composite materials with nonlinear memory. *Altai State University Journal*. 1. pp. 103–106.
12. Mooney M. (1940) A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.* 11. pp. 582–592. DOI: 10.1063/1.1712836.
13. Treloar L.R.G. (1953) *Fizika uprugosti kauchuka* [The physics of rubber elasticity]. Ed. by E.V. Kuvshinskiy. Moscow: IIL.
14. Zhukov B.A. (2015) Nelineynoe vzaimodeystvie konechnogo prodol'nogo sdviga i konechnogo krucheniya vtulki iz rezinopodobnogo materiala [Nonlinear interaction of finite longitu-

- dinal shear with finite torsion of a rubber-like bushing]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 50(3). pp. 127–135.
15. Kolpak E.P. (1998) Poly y tsilindr iz neszhimaemogo materiala pri bol'shikh deformatsiyakh [Hollow cylinder of incompressible material under large deformations]. *Nelineynye problemy mekhaniki i fiziki deformiruемого tela. Trudy nauchnoy shkoly akademika V.V. Novozhilova*. 1. pp. 96–117.
  16. Akchurin T.R., Mal'kov V.M. (2004) Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie krucheniya elastomernogo tsilindricheskogo sharnira [Theoretical and experimental investigation of twisting of an elastomeric cylindrical bearing]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya – Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 1. pp. 73–80.
  17. Oden J. (1976) *Konechnyye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred* [Finite elements of nonlinear continua]. Moscow: Mir.
  18. Vyachkin E.S., Reshetnikova E.V., Aul'chenko S.M., Ryabkov A.P., Vyachkina E.A. (2016) Odnoparametricheskaya model' deformirovaniya sloistykh struktur, sodержashchikh ob'emno-neszhimaemye sloi [The one-parametric model of the deformation of layered structures containing three-dimensional incompressible layers]. *Nauchno-tekhnicheskyy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technological Volga Region Bulletin*. 6. pp. 120–123.
  19. Kaledin V.O., Reshetnikova E.V., Ravkovskaya E.V. (2015) Algoritm rascheta napryazheniy v uprugoy srede s vnutrennimi kinematcheskimi svyazyami [Calculating algorithm for stresses in an elastic medium with internal kinematic bonds]. *Chislennyye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti. Materialy XXIV Vserossiyskoy konferentsii*. pp. 64–66.
  20. Kaledin V.O. (2017) *Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM «Sreda funktsional'no-ob'ektnogo programmirovaniya «Algozit»* [Certificate of the state registration for computer program «Software environment of a functional object oriented programming «Algozit»]. № 2017612895.
  21. Rabotnov Yu.N. (1988) *Mekhanika deformiruемого tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka.

УДК 539.5; 539.8; 669  
DOI 10.17223/19988621/55/8

**П.А. Данилов, А.П. Хрусталеv, А.Б. Ворожцов, И.А. Жуков,  
В.В. Промахов, М.Г. Хмелева, Е.В. Пикушак, А.В. Кветгинская**

## **АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНИХ ФИЗИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПРОЦЕССЫ ЛИТЬЯ ЛЕГКИХ СПЛАВОВ<sup>1</sup>**

Проведен анализ современных методов внешних физических воздействий на алюминиевые сплавы в процессе литья и добавления в них упрочняющих элементов: механического перемешивания, воздействия электромагнитными полями, обработки ультразвуком, вибрации. Выделены преимущества и ограничения этих методов. Обсуждаются процессы, происходящие во время применения воздействий, их конечное влияние на эксплуатационные свойства получаемых сплавов. Приведены схемы технологических установок, с помощью которых реализуются воздействия, и собственный опыт обработки легких сплавов внешними физическими полями.

**Ключевые слова:** *легкие сплавы, механическое перемешивание, электромагнитная обработка, ультразвук, вибрация.*

В современном машиностроении динамично возрастает спрос на легкие сплавы на основе алюминия. Эти сплавы позволяют решать технологическую задачу повышения эксплуатационных свойств изделий машиностроительных производств, одновременно снижая их массу. Одновременно с изучением и развитием методов упрочнения легких сплавов требуют совершенствования и литейные технологии, поскольку традиционные технологии литья не позволяют повышать свойства сплава при введении в жидкую фазу основного металла твердой фазы упрочняющих частиц [1].

Современные способы обработки легких сплавов во время литья делают возможным повысить физические, а в конечном счете, и эксплуатационные свойства получаемых сплавов [2, 3] путем дегазации, снижения среднего размера зерна, повышения однородности состава сплава, снижения количества агломераций и примесей на границах зерен, улучшения смачиваемости и т.д.

На базе лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов НИ ТГУ для решения этих задач используются и развиваются такие способы обработки сплавов внешними физическими полями во время литья и последующей кристаллизации, как механическое перемешивание, воздействие на расплав электромагнитными полями, обработка расплава ультразвуком, а также вибрация [4–7].

### **Механическое перемешивание**

С помощью механического перемешивания повышается равномерность распределения легирующего вещества в матрице основного металла сплава. Данный способ обработки легко реализуем технологически. И при его применении не требуется подвергать расплав дополнительному нагреву и обработке расплава во время кристаллизации. Чем выше интенсивность перемешивания твердой фазы

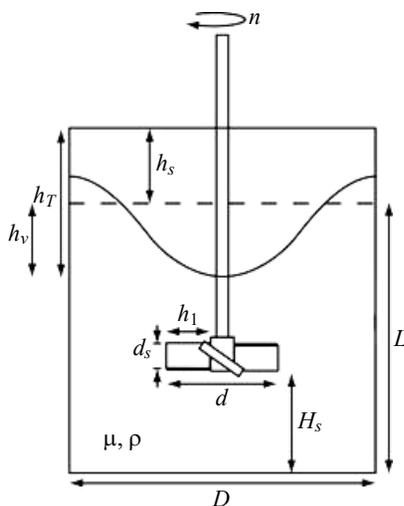
<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-13-01252).

упрочняющего вещества в жидкой фазе основного металла, тем выше дисперсность армирующей фазы. Также высокая интенсивность перемешивания способствует равномерности распределения армирующего вещества по объему расплава.

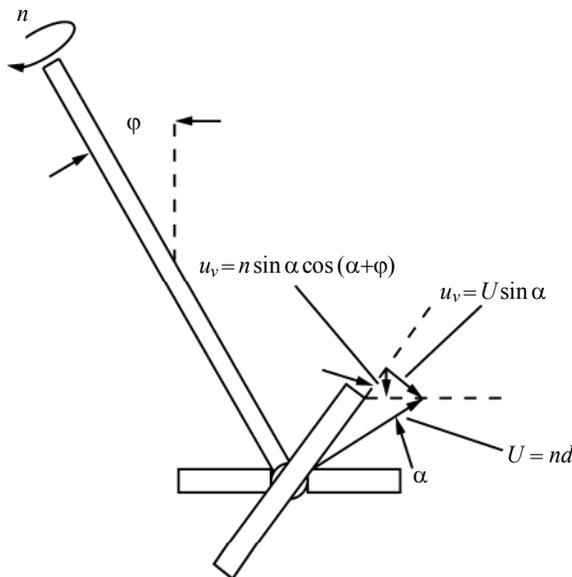
В [8] описана схема установки для механического перемешивания алюминиевых расплавов (рис. 1).

**Рис. 1.** Схема установки для механического перемешивания алюминиевых расплавов ( $D$  – диаметр тигля,  $d$  – диаметр крыльчатки,  $H_s$  – расстояние между крыльчаткой и дном тигля,  $L$  – статическая высота жидкого металла,  $h_1$  – ширина лезвия,  $d_s$  – высота лезвия)

**Fig. 1.** Installation diagram for mechanical mixing of aluminum melts ( $D$  is the crucible diameter;  $d$  is the impeller diameter;  $H_s$  is the distance between impeller and crucible bottom;  $L$  is the static height of a liquid metal;  $h_1$  is the blade width; and  $d_s$  is the blade height)



Также в данной работе приведена схема лопастей винта в этой установке (рис. 2).



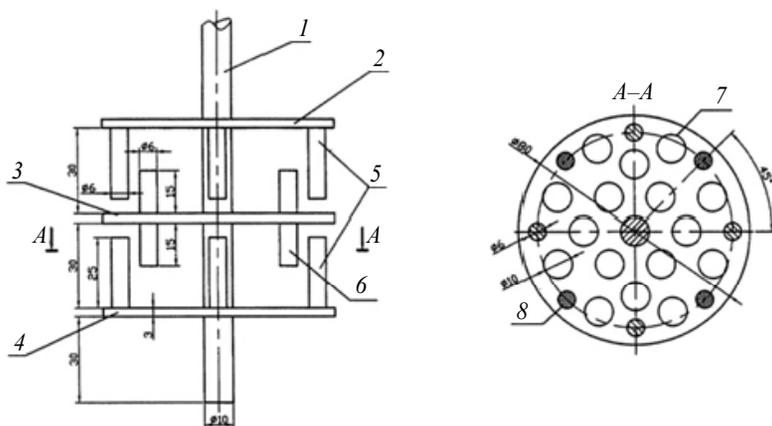
**Рис. 2.** Схема лопастей винта в конструкции установки для механического перемешивания алюминиевых расплавов:  $\alpha$  – угол поворота,  $\varphi$  – угол наклона вала,  $n$  – скорость вращения

**Fig. 2.** Arrangement of propeller blades in an installation design for mechanical mixing of aluminum melts:  $\alpha$  is the angle of rotation;  $\varphi$  is the angle of shaft tilt; and  $n$  is the rotation rate

Пример исследования алюминиевых сплавов, получаемых в результате литья с механическим перемешиванием, представлен в [9]. Результаты исследования показывают, что механическое перемешивание способствует дисперсности армирующей фазы и равномерности распределения армирующего вещества по объему расплава.

Значимые результаты в исследовании и новых оригинальных технологиях механического перемешивания легких сплавов, экспериментах по выбору оптимальных режимов механического перемешивания получили авторы настоящей работы [4].

С использованием разработанного оригинального устройства для механического замешивания порошковых материалов в расплав металла авторами были проведены эксперименты по введению частиц диборида титана в расплав алюминия АК7 [4]. На рис. 3 показана схема рабочего органа устройства.

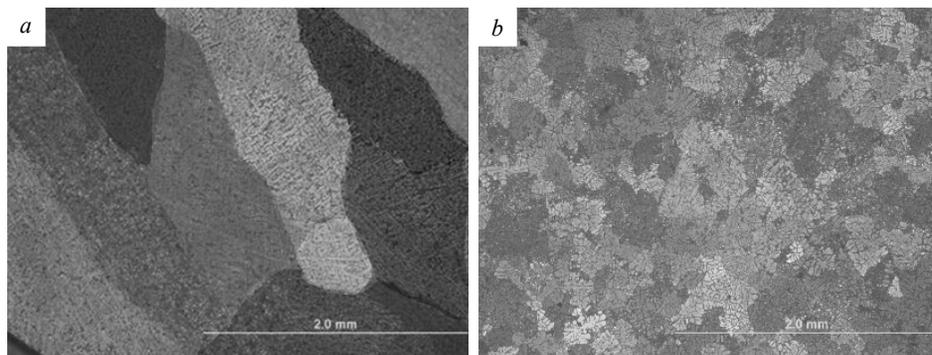


**Рис. 3.** Схема рабочего органа устройства для механического замешивания порошковых материалов в расплав металла

**Fig. 3.** Design of working element in a device for mechanical mixing of powdered materials into metal melt

Обнаружено, что использование механического завихрителя позволяет вводить в алюминиевый расплав тугоплавкие частицы диборида титана, что в свою очередь способствует получению отливок с мелкозернистой структурой и равномерно распределенными включениями частиц-упрочнителей (диборид титана). Установлено, что средней размер зерна в сплавах уменьшается с 900 мкм до 400 мкм при введении 0,2 мас.% диборида титана, при этом предел текучести увеличивается с 15 до 65 МПа, предел прочности с 140 до 220 МПа при сохранении исходной пластичности 4,5 %. На рис. 4 показана структура образца сплава, полученного без использования устройства (рис. 4, а) и с его использованием (рис. 4, б).

Изучена гидродинамика процесса перемешивания жидкого (расплавленного) металла в тигле под действием оригинального механического смесителя-завихрителя, выполненного в виде трех перфорированных дисков с размещенными на них штифтами. Получены оценки влияния скорости вращения завихрителя на картину течения жидкости в тигле. Показано, что увеличение скорости вращения завихрителя ведет к интенсивному росту турбулентной диффузии в жидком металле до



**Рис. 4.** Структура образца сплава, полученного:  
*a* – без использования устройства; *b* – с использованием устройства

**Fig. 4.** Structure of the alloy pattern obtained:  
(*a*) without the use of device and (*b*) with the use of device

тех пор, пока поверхность раздела металл – воздух не начнет взаимодействовать с нижним перфорированным диском завихрителя. Критерий мощности экспоненциально убывает с ростом числа Рейнольдса (скорости вращения завихрителя). Условия, при которых элементы завихрителя погружены полностью в жидкий металл, более благоприятны для формирования мелких вихрей, чем условия, при которых поверхность раздела жидкий металл – воздух взаимодействует с элементами завихрителя. Самые крупные вихри, сопоставимые по величине с размерами завихрителя, способны неравномерно перемешивать жидкий металл и внедренные в него микрочастицы, тогда как мелкие вихри, хотя и энергетически более слабые, могут обеспечить равномерное перемешивание, создавая участки равномерности в несколько десятков микрон.

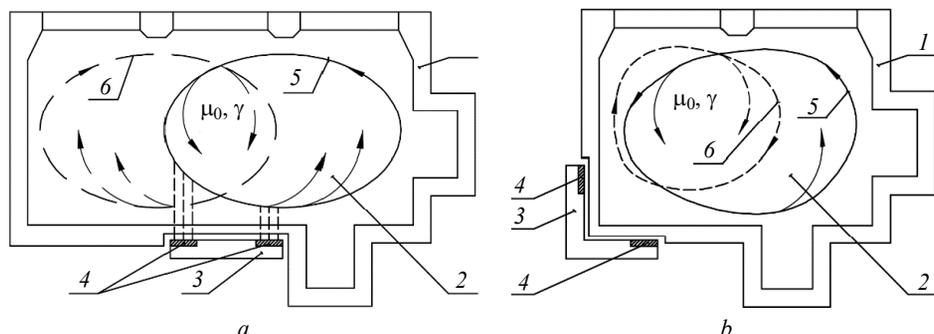
Способ механического перемешивания имеет следующие недостатки:

- 1) снижение стойкости ротора и, как следствие, увеличение нагрузки на привод мешалки в ходе процесса деформации ротора;
- 2) образование окислов при контакте с атмосферой расплава на поверхности воронки при перемешивании.

### Воздействие на расплав электромагнитными полями

Воздействие электромагнитными полями на расплавы во время добавления в них упрочняющих частиц позволяет снизить средний размер зерна, уменьшить концентрацию примесей на границах зерен, добиться равномерности и однородности структуры получаемого сплава, противостоять образованию столбчатой структуры. Одно из технологических решений воздействия на расплав электромагнитными полями – это электромагнитное перемешивание (ЭМП). Чтобы добиться максимальной однородности расплава и распределения по его структуре упрочняющего вещества, важно обеспечить нелинейное течение при перемешивании. Для этого можно при ЭМП воздействовать на расплав не одним, а сразу несколькими полями разного рода (пульсирующие и бегущие) [10] и с разным расположением по отношению к объему расплава. Важно обеспечить перемешивание всего объема и в обе стороны при изменении интенсивности и траектории полей.

Источник электромагнитного поля может располагаться как у прямолинейной части боковой стороны миксера, так и у угловой (рис. 5) [10].



**Рис. 5.** Миксер с источником электромагнитного поля: а) источник электромагнитного поля у прямолинейной части боковой стороны миксера; б) источник электромагнитного поля у угловой части боковой стороны миксера. (1 – миксер, печь; 2 – расплав; 3 – источник бегущего электромагнитного поля; 4 – источники пульсирующих электромагнитных полей; 5 – траектории движения расплава под действием бегущего электромагнитного поля и пульсирующих полей разной интенсивности; 6 – траектории движения расплава при изменении направления бегущего поля)

**Fig. 5.** Stirrer with electromagnet ic field source located at: (a) rectilinear part of mixer's lateral side and (b) corner part of mixer's lateral side (1, stirrer and furnace; 2, melt; 3, the source of incoming electromagnetic field; 4, the sources of pulsating electromagnetic fields; 5, the trajectory of melt motion under the action of both incoming electromagnetic field and pulsating electromagnetic fields of various intensity; and 6, the trajectory of melt motion at the opposite direction of incoming field)

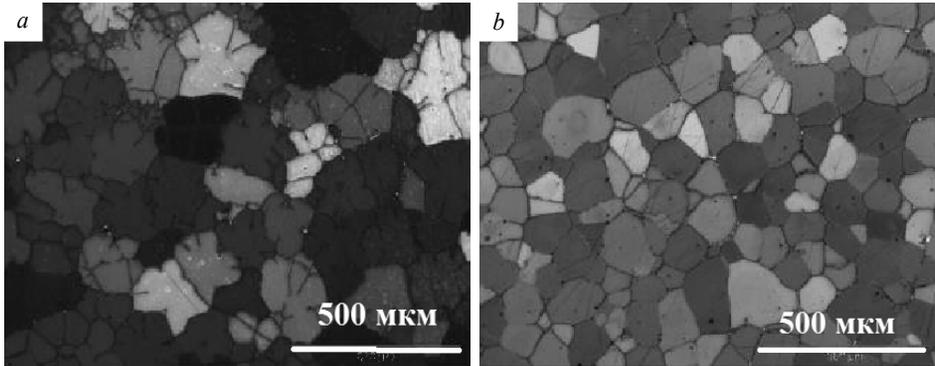
Под действием бегущего поля 3 расплав движется вдоль боковой стороны миксера в одну сторону. При изменении интенсивности разных пульсирующих полей 4 расплав начинает двигаться по траектории 5. При изменении направления бегущего поля, а также дальнейшем изменении интенсивности полей 4, расплав начинает двигаться по траектории 6. Таким образом, расплав перемешивается во всех частях миксера, печи.

Обычно процесс ЭМП занимает от 10 до 30 мин (это зависит от компонентов сплава и его объема) при силе тока в районе 200 А и при частоте используемого напряжения – от 0.1 до 2 Гц [11].

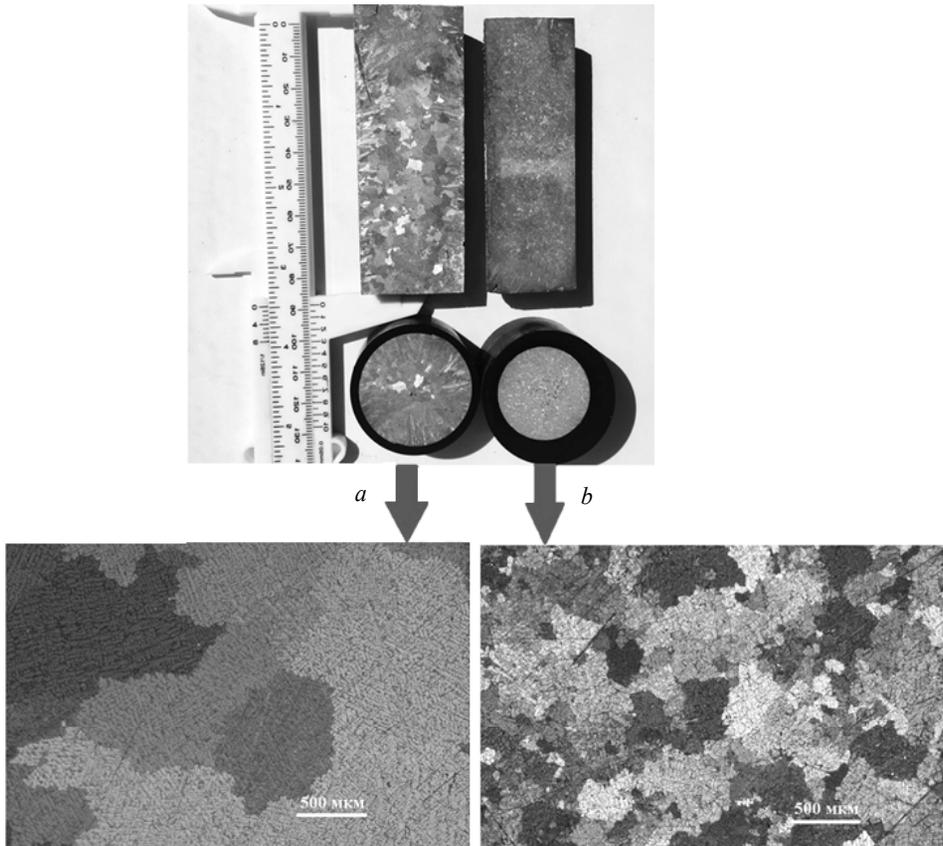
Первый этап ЭМП заключается в образовании связей между жидкой фазой основного сплава и твердой фазой легирующего вещества (на данном этапе важной задачей является подбор такого режима ЭМП, при котором растворение упрочняющего вещества в расплаве происходит быстро). И далее происходит распределение упрочняющих частиц в структуре и объеме расплава.

Авторами проведены эксперименты, показывающие, что электромагнитная обработка существенно влияет на структуру сплава. Так, за счет применения электромагнитной обработки средний размер зерна магниевого сплава МЛ5 снижен с 121 до 95 мкм (рис. 6) [7].

На рис. 7 показаны экспериментальные образцы сплава Al–4%Cu – до электромагнитной обработки и после нее. В результате электромагнитной обработки снижается средний размер зерна и характер кристаллизации.



**Рис. 6.** Изображения структуры образцов сплава МЛ5: *a* – без обработки; *b* – после электромагнитной обработки  
**Fig. 6.** Illustrations of the structure of ML5 alloy patterns: (a) before processing and (b) after electromagnetic processing



**Рис. 7.** Изображения структуры образцов сплава Al–4%Cu: *a* – без обработки; *b* – после электромагнитной обработки  
**Fig. 7.** Illustrations of the structure of Al–4%Cu alloy patterns: (a) before processing and (b) after electromagnetic processing

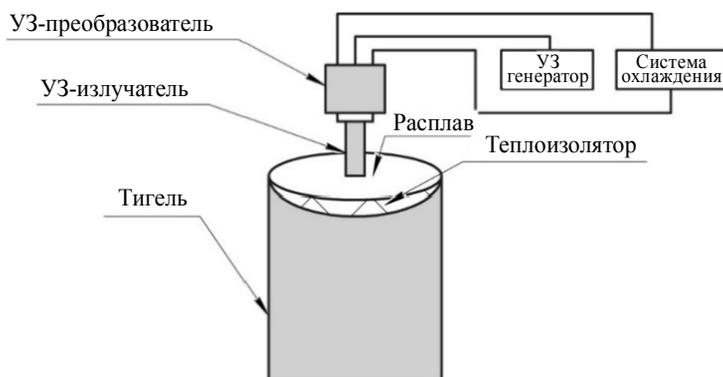
Основным недостатком ЭМП является наличие мертвых зон перемешивания в миксере (в них эффективность перемешивания снижается). Также в случае применения ЭМП в больших печах за счет необходимости увеличения интенсивности бегущего поля снижаются эксплуатационные характеристики получаемого сплава и значительно повышается потребление электроэнергии установкой. Важным фактором, влияющим на свойства получаемого расплава, является режим воздействия электромагнитными полями. Интенсивность полей должна возрастать с увеличением концентрации упрочняющих частиц в расплаве [12].

### Воздействие ультразвуком

Воздействие на легкие сплавы ультразвуковым излучением, так же, как и электромагнитными полями, является одним из наиболее эффективных и перспективным способом обработки расплавов. Данный метод позволяет обеспечить дегазацию, уменьшение среднего размера зерна в структуре сплава, повысить смачиваемость и деагломерацию частиц.

Для достижения требуемых параметров целевого сплава необходимо правильно подобрать параметры материалов и применения ультразвуковой обработки сплава: чистоту основного сплава, объем упрочняющих частиц, условия введения ультразвука в расплав, интенсивность ультразвука и т.д.

Типовая схема установки ультразвуковой обработки расплава показана на рис. 8.



**Рис. 8.** Типовая схема установки ультразвуковой обработки расплава  
**Fig. 8.** Diagram of typical installation for ultrasonic processing of melts

Ультразвуковая обработка – эффективный способ дегазации сплава.

Вода, содержащаяся в атмосфере, в процессе плавления алюминия образует на поверхности расплава водород и оксид алюминия. Этот водород распределяется по объему расплава, являясь основой пористости материала. Пористость, в свою очередь, приводит к снижению эксплуатационных свойств сплава: подверженности трещинам, снижению пластичности и т.д. Растворимость водорода в структуре материала зависит от ряда факторов:

- 1) условий на границе между атмосферой и жидкой фазой расплава;
- 2) влажности атмосферы и концентрации водорода в расплаве;
- 3) давления;
- 4) температуры.

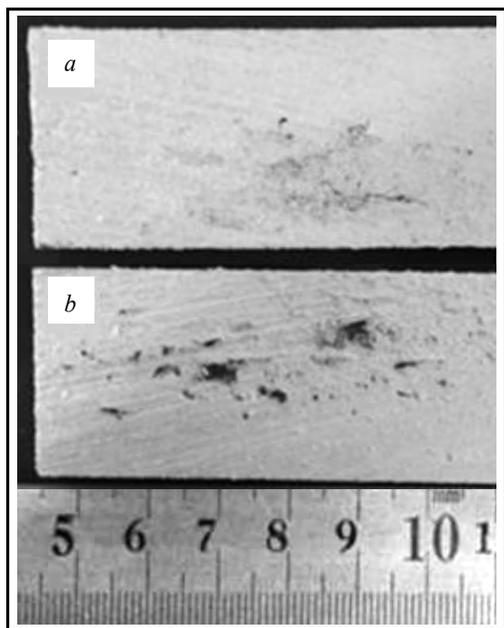
Преимуществом ультразвуковой дегазации перед вакуумной или продувкой газом является эффективное воздействие на водород внутри материала [2]. Снижению концентрации водорода в расплаве способствуют преобразования:

- 1) образование пузырьков водорода;
- 2) пульсация пузырьков в акустическом поле и рост диффузии водорода;
- 3) объединение мелких пузырьков в более крупные;
- 4) всплытие пузырьков на поверхность жидкой фазы расплава.

Факторы, влияющие на эффективность ультразвуковой дегазации:

- 1) параметры плавки материала, такие, как температура, поверхностное натяжение, растворимость водорода, вязкость и т.д.;
- 2) параметры ультразвуковой обработки, такие, как мощность, амплитуда, частота и т.д.;
- 3) текучесть расплава;
- 4) условия среды, такие, как давление, влажность и т.д.

Эксперименты, проведенные авторами [2, 5, 7, 13], показали, что воздействие ультразвуком на расплав – наиболее эффективно среди других видов воздействий для снижения размера зерна сплава. Если электромагнитное воздействие на сплав МЛ5 позволило снизить размер зерна со 121 до 95 мкм, то воздействие ультразвуком способствовало снижению среднего размера зерна до 80 мкм.



Влияние ультразвукового воздействия на уменьшение внутренних макродефектов показаны на рис. 9.

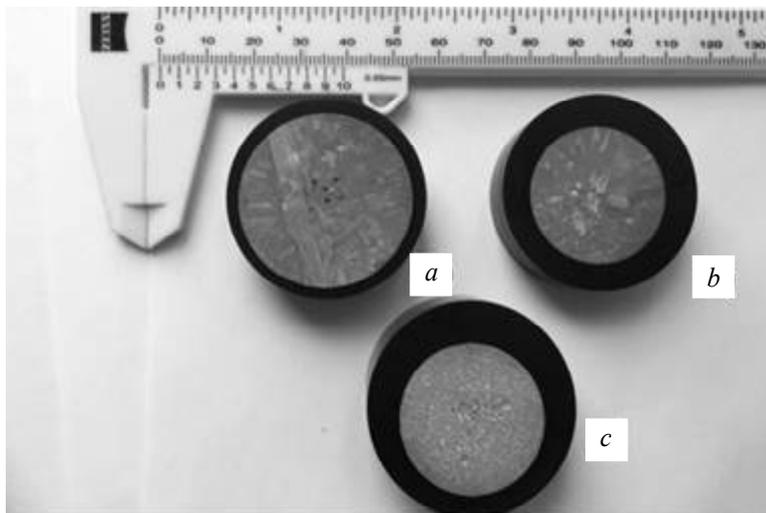
**Рис. 9.** Снимок макроструктуры литых образцов Al-4%Cu, полученных: *a* – с применением ультразвуковой обработки расплава; *b* – без применения ультразвуковой обработки расплава

**Fig. 9.** Picture of the macrostructure of Al-4%Cu alloy patterns obtained: (*a*) with ultrasonic processing and (*b*) without ultrasonic processing of melt

Воздействие ультразвука на расплав Al-4%Cu приводит к дегазации расплава, а дополнительное добавление частиц  $Al_2O_3$  (0.1 %) способствует измельчению зерен (рис. 10).

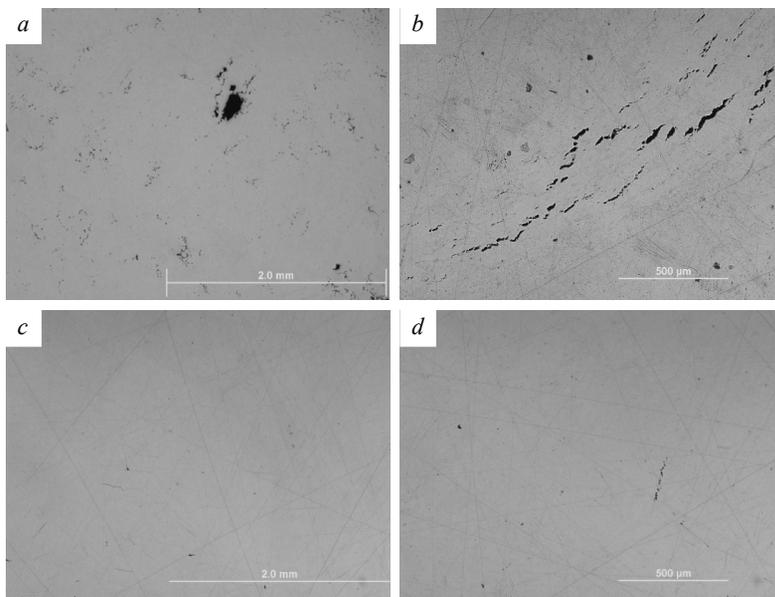
Эксперимент по микроструктуре образцов Al-4%Cu с использованием оптического микроскопа показал, что ультразвуковая обработка расплава приводит к снижению среднего размера зерна и пористости (рис. 11). Особенно хорошо видны размеры зерен при наблюдении структуры слитка в поляризованном свете (рис. 12).

Результаты эксперимента по воздействию на сплав А356 ультразвуком с добавлением частиц  $ScF_3$  показаны на рис. 13 [14].



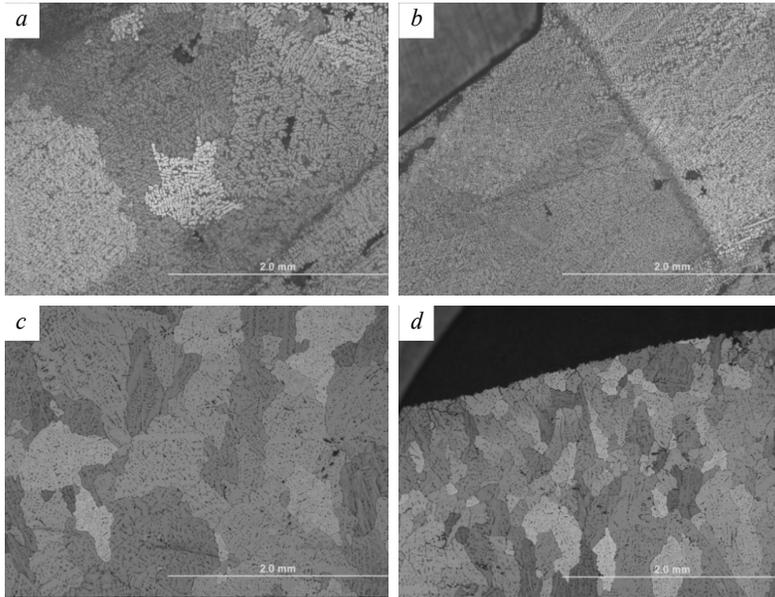
**Рис. 10.** Снимок макроструктуры образцов сплава Al-4%Cu: *a* – без ультразвуковой обработки; *b* – с применением ультразвуковой обработки; *c* – с применением ультразвуковой обработки с добавлением наночастиц  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (0.1%)

**Fig. 10.** Picture of the macrostructure of Al-4%Cu alloy patterns obtained: (*a*) without ultrasonic processing; (*b*) with ultrasonic processing; and (*c*) with both ultrasonic processing and addition of nanoparticles of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (0.1%)



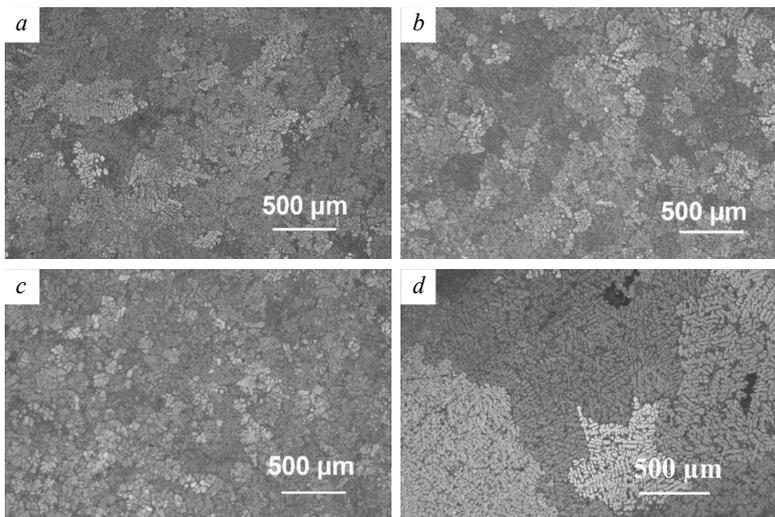
**Рис. 11.** Изображения структуры образцов сплава Al-4%Cu: *a*, *b* – без ультразвуковой обработки расплава; *c*, *d* – с применением ультразвуковой обработки расплава

**Fig. 11.** Illustrations of the structure of Al-4%Cu alloy patterns: (*a*), (*b*) without ultrasonic processing of melt and (*c*), (*d*) with ultrasonic processing of melt



**Рис. 12.** Изображения структуры образцов сплава Al–4%Cu в поляризованном свете: *a, b* – без ультразвуковой обработки расплава; *c, d* – с применением ультразвуковой обработки расплава

**Fig. 12.** Illustrations of the structure of Al–4%Cu alloy patterns illuminated by polarized light: (*a*), (*b*) without ultrasonic processing and (*c*), (*d*) with ultrasonic processing of melt



**Рис. 13.** Изображение микроструктуры сплава A356: *a* – после воздействия ультразвуком; *b* – после воздействия ультразвуком и добавления (0.2 вес.%) ScF<sub>3</sub>; *c*) после воздействия ультразвуком и добавления (1 вес. %) ScF<sub>3</sub>; *d*) без воздействия ультразвуком и без добавления ScF<sub>3</sub>

**Fig. 13.** Illustration of microstructure of A356 aluminum alloy: (*a*) after ultrasonic treatment; (*b*) after ultrasonic treatment and addition of ScF<sub>3</sub> (0.2 wt.%); (*c*) after ultrasonic treatment and addition of ScF<sub>3</sub> (1 wt.%); and (*d*) without ultrasonic treatment and addition of ScF<sub>3</sub>

### Вибрация

Применение вибрации при литье легких сплавов с добавлением упрочняющих элементов позволяет добиться измельчения структуры сплава, равномерно распределить упрочняющие элементы в структуре расплава и, как следствие, повысить эксплуатационные свойства получаемого сплава, такие, как предел прочности, предел текучести и др.

Повышению эффекта от применения вибрации способствует одновременное применение механического перемешивания.

Принципиальная схема экспериментальной установки для обработки расплава вибрацией показана на рис. 14.

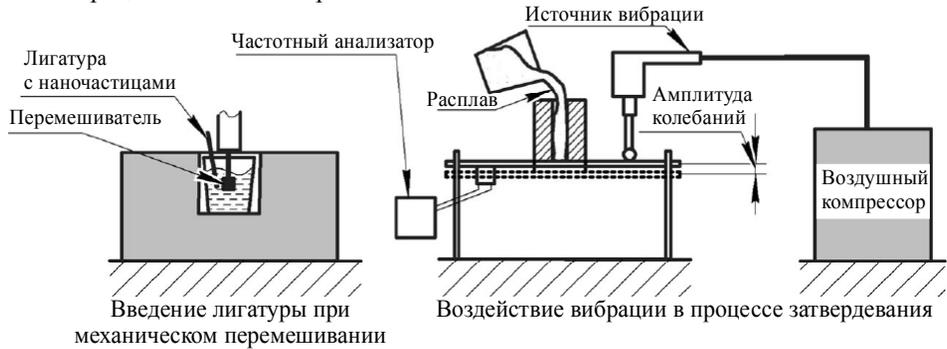


Рис. 14. Схема экспериментальной установки для обработки расплава вибрацией  
Fig. 14. Diagram of experimental installation for vibro treatment of melts

Эксперимент, проведенный авторами, показал, что обработка сплава А356 вибрацией в режиме – частота 75 Гц, амплитуда 8 мм – повысила предел текучести с  $(48 \pm 5)$  до  $(60 \pm 5)$  МПа, а предел прочности на растяжение с  $(168 \pm 7)$  до  $(185 \pm 12)$  МПа [6].

При выборе режима вибрации частота, как правило, устанавливается от 10 до 100 Гц в зависимости от свойств обрабатываемых сплавов и режимов литья.

Оптимальные режимы вибрации (частота и амплитуда) для сплавов на основе разных металлов показаны на рис. 15.

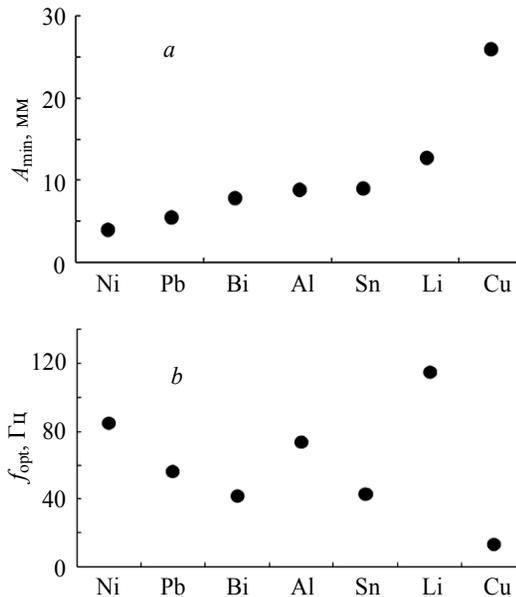


Рис. 15. Оптимальные режимы вибрации для сплавов на основе разных металлов: *a* – частота; *b* – амплитуда  
Fig. 15. Optimal vibration modes for alloys based on different metals: (a) frequency and (b) magnitude

Комбинация различных

### способов воздействия

Помимо развития технологии и повышения эффективности каждого вида воздействия на легкие сплавы при литье в отдельности, важно исследовать возможность сочетания двух или более видов воздействия. Такие исследования активно ведутся на базе лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов НИ ТГУ.

С использованием комбинации различных методов внешнего воздействия (электростатическое поле, ультразвуковая обработка, вибрационная обработка) [4–6] авторами получены лёгкие сплавы на основе алюминиевого сплава АК7, упрочнённого наночастицами оксида алюминия. Установлено, что введение 0.2 вес.% наночастиц оксида алюминия способствует уменьшению пористости и среднего размера зерна (с 1000 до 300 мкм) сплава АК7 и увеличению механических свойств: предела текучести с 45 до 60 МПа, предела прочности с 175 до 210 МПа, пластичности с 3.5 до 4.5 %. Получены зависимости, связывающие время воздействия с физико-химическими свойствами частиц и расплава и с характеристиками акустического излучения. Установлено, что электростатический заряд поверхности частицы уменьшает краевой угол смачивания тем сильнее, чем меньше частица. Ультразвуковое воздействие делает возможным пропитку агломератов частиц расплавом металла и введения в расплав частиц благодаря создаваемому звукокапиллярному эффекту; время пропитки существенно зависит от значения краевого угла смачивания. Чем меньше краевой угол, тем меньше времени требуется для пропитки частицы с помощью ультразвука; при значении краевого угла смачивания меньше 90° пропитка частиц возможна даже без применения ультразвука, хотя ультразвуковое воздействие ускоряет этот процесс. Обнаружено, что величина критического заряда зависит от диаметра частиц, их диэлектрической проницаемости, поверхностного натяжения металла и краевого угла смачивания поверхности незаряженной частицы. Предложенные простые расчетные формулы позволяют оценить величину заряда и время ультразвукового воздействия, необходимого для успешного введения частиц в расплав металла [5].

### Заключение

Таким образом, в работе показана эффективность применения различных методов внешнего воздействия (электромагнитное поле, ультразвуковая обработка, вибрационная обработка) на легкие сплавы. Продемонстрировано, что применение одновременно нескольких методов воздействия на расплав при литье при выборе верных режимов дает возможность реализовать для повышения эксплуатационных свойств сплава преимущества всех используемых методов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Choi H., Jones M., Konishi H., Li X. Effect of combined addition of Cu and aluminum oxide nanoparticles on mechanical properties and microstructure of Al–7Si–0.3Mg alloy // *Metal. Mater. Trans.* 2012. V. 43A. P. 738–746. DOI: 10.1007/s11661-011-0905-7.
2. Puga H., Costa S., Barbosa J., et al. Influence of ultrasonic melt treatment on microstructure and mechanical properties of AlSi<sub>9</sub>Cu<sub>3</sub> alloy // *J. Mater. Proc. Technol.* 2011. No. 211. P. 1729–1735. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2011.05.012.
3. Vorozhtsov S.A., Eskin D.G., Tamayo J., et al. The application of external fields to the manufacturing of novel dense composite master alloys and aluminum-based nanocomposites // *Metal. Mater. Trans. A: Phys. Metal. Mater. Sci.* 2015. V. 46. No. 7. P. 2870–2875. DOI: 10.1007/s11661-015-2850-3.

4. Vorozhtsov S., Minkov L., Dammer V., et al. Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: Modeling and experiment // JOM. 2017. V. 69. No. 12. P. 2653–2657. DOI: 10.1007/s11837-017-2594-1.
5. Kudryashova O.B., Eskin D.G., Khrustalev A.P., Vorozhtsov S.A. Ultrasonic effect on the penetration of the metallic melt into submicron particles and their agglomerates // Russ. J. Non-Ferrous Metals. 2017. V. 58. No 4. P. 427–433. DOI: 10.3103/ S1067821217040101.
6. Vorozhtsov S.A., Kudryashova O.B., Promakhov V.V., et al. Theoretical and experimental investigations of the process of vibration treatment of liquid metals containing nanoparticles // JOM. 2016. V. 68. No 12. P. 3094–3100. DOI: 10.1007/s11837-016-2147-z.
7. Sillekens W.H., Jarvis D.J., Vorozhtsov A., et al. The ExoMet Project: EU/ESA research on high performance light metal alloys and nanocomposites // Metal. Mater. Trans. A: Phys. Metal. Mater. Sci.. 2014. V. 45. No 8. P. 3349–3361.
8. Grandfield J., Eskin D.G., Bainbridge I. Direct-Chill Casting of Light Alloys. John Wiley & Sons, 2013. 424 p.
9. García-Rodríguez S., Puentes J., Li X.C., Osswald T.A. Prediction of vortex height from mechanical mixing in metal matrix nanocomposite processing by means of dimensional analysis and scaling // J. Manufacturing Processes. 2014. No. 16. P. 212–217. DOI: 10.1016/j.jmapro.2013.12.001.
10. Патент № 2113672 РФ. Способ электромагнитного перемешивания электропроводных расплавов / Тимофеев В.Н., Христинич Р.М., Бояков С.А., Рыбаков С.А. Оpubл. 20.06.1998.
11. Павлов Е.А., Боговалов С.В., Тимофеев В.Н., Надточий Д.С. Магнитогидродинамическое перемешивание алюминиевых расплавов в миксерах сопротивления // Сибирский журнал науки и технологий. 2006. Т. 5. № 12. С. 201–205.
12. Robles Hernández F.C., Sokolowski J.H. Effects and on-line prediction of electromagnetic stirring on microstructure refinement of the 319 Al–Si hypoeutectic alloy // J. Alloys and Compounds. 2009. No. 480. P. 416–421. DOI: 10.1016/j.jallcom.2009.02.109.
13. Vorozhtsov S., Zhukov I., Vorozhtsov A., et al. Synthesis of micro- and nanoparticles of metal oxides and their application for reinforcement of Al-based alloys // Advances in Materials Science and Engineering. 2015. P. 6. DOI: 10.1155/2015/718207.
14. Vorozhtsov S., Zhukov I., Promakhov V., et al. The Influence of ScF<sub>3</sub> nanoparticles on the physical and mechanical properties of new metal matrix composites based on A356 aluminum alloy // JOM. 2016. V. 68. No. 12. P. 3101–3106. DOI: 10.1007/s11837-016-2141-5.

Статья поступила 27.04.2018 г.

Danilov P.A., Khrustalev A.P., Vorozhtsov A.B., Zhukov I.A., Promakhov V.V., Khmeleva M.G., Pikushchak E.V., Kvetinskaya A.V. (2018) ANALYSIS OF THE EFFECT OF EXTERNAL PHYSICAL FIELDS ON THE CASTING OF LIGHT ALLOYS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 84–98

DOI 10.17223/19988621/55/8

Keywords: light alloys, mechanical mixing, electromagnetic processing, ultrasound, vibration.

Advanced methods of external physical effects on the aluminum alloys during casting process and addition of reinforcing elements, which are used in the Research Laboratory of High-Energy and Special Materials in Tomsk State University, are analyzed. These methods are mechanical stirring, treatment by electromagnetic fields, vibration, and ultrasound. Application of external fields leads to an increase in the performance of obtained alloys by means of degassing, decreasing in the average grain size, increasing in the uniformity of alloy structure, decreasing in the quantity of agglomerations and impurities on the grain boundaries, improving wettability, etc. The changes observed in the structure of melt and the dependence of melt properties on the type and treatment mode of the external field, on the characteristics of initial metal as well as on the

characteristics and quantity of reinforcing particles added to the melt are shown. The results of several experiments demonstrating the effect of external fields on the aluminum alloys during casting process and the impact of reinforcing particles added to the melt are presented. The diagrams of technological installations whereby the external fields impact the melt are shown. The main parameters of operating conditions of installations are identified; for mechanical mixing they are the impeller rotation rate and the duration of mixing; for treatment by electromagnetic fields – the current intensity, the voltage frequency, and the exposure time; for ultrasound treatment – the capacity, the magnitude and the frequency of ultrasound, and the duration of application; for vibration – the frequency, the amplitude, and the duration of vibration.

*DANILOV Pavel Alekseevich* (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: padanilov@gmail.com

*KHRUSTALEV Anton Pavlovich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tofik0014@mail.ru

*VOROZHTSOV Aleksander Borisovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: abv1953@mail.ru

*ZHUKOV Il'ya Aleksandrovich* (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

*PROMAKHOV Vladimir Vasil'evich* (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vvpromakhov@mail.ru

*KHMELEVA Marina Grigor'evna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: khmelmg@gmail.com

*PIKUSHCHAK Elizaveta Vladimirovna* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: liza@ftf.tsu.ru

*KVETINSKAYA Alesya Vladimirovna* (The Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation). E-mail: ep.alessya.kvetinskaya@gmail.com

#### REFERENCES

1. Choi H., Jones M., Konishi H., Li X. (2012) Effect of combined addition of cu and aluminum oxide nanoparticles on mechanical properties and microstructure of Al–7Si–0.3Mg alloy. *Metall. Mater. Trans. A*. 43. pp. 738–746. DOI: 10.1007/s11661-011-0905-7.
2. Puga H., Costa S., Barbosa J., Ribeiro S., Prokic M. (2011) Influence of ultrasonic melt treatment on microstructure and mechanical properties of AlSi<sub>9</sub>Cu<sub>3</sub> alloy. *J. Mater. Process. Technol.* 211. pp. 1729–1735. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2011.05.012.
3. Vorozhtsov S.A., Eskin D.G., Tamayo J., Vorozhtsov A.B., Promakhov V.V., Averin A.A., Khrustalyov A.P. (2015) The application of external fields to the manufacturing of novel dense composite master alloys and aluminum-based nanocomposites. *Metall. Mater. Trans. A*. 46(7). pp. 2870–2875. DOI: 10.1007/s11661-015-2850-3.
4. Vorozhtsov S., Minkov L., Dammer V., Khrustalyov A., Zhukov I., Promakhov V., Vorozhtsov A., Khmeleva M. (2017) Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: modeling and experiment. *JOM*. 69(12). pp. 2653–2657. DOI: 10.1007/s11837-017-2594-1.
5. Kudryashova O.B., Eskin D.G., Khrustalev A.P., Vorozhtsov S.A. (2017) Ultrasonic effect on the penetration of the metallic melt into submicron particles and their agglomerates. *Russ. J. Non-Ferrous Met.* 58(4). pp. 427–433. DOI: 10.3103/S1067821217040101.
6. Vorozhtsov S.A., Kudryashova O.B., Promakhov V.V., Dammer V., Vorozhtsov A.B. (2016) Theoretical and experimental investigations of the process of vibration treatment of liquid metals containing nanoparticles. *JOM*. 68(12). pp. 3094–3100. DOI: 10.1007/s11837-016-2147-z.

7. Sillekens W.H., Jarvis D.J., Vorozhtsov A., Bojarevics V., Badini C.F., Pavese M., Terzi S., Salvo L., Dieringa H., Katsarou L. (2014) The ExoMet Project: EU/ESA research on high-performance light metal alloys and nanocomposites. *Metall. Mater. Trans. A.* 45(8). pp. 3349–3361.
8. Grandfield J., Eskin D.G., Bainbridge I. (2013) *Direct-Chill Casting of Light Alloys: Science and Technology*. John Wiley & Sons.
9. García-Rodríguez S., Puentes J., Li X.C., Osswald T.A. (2014) Prediction of vortex height from mechanical mixing in metal matrix nanocomposite processing by means of dimensional analysis and scaling. *J. Manuf. Process.* 16. pp. 212–217. DOI: 10.1016/j.jmapro.2013.12.001.
10. Timofeev V.N., Khristinich R.M., Boyakov S.A., Rybakov S.A. (1998) *Sposob elektromagnitnogo peremeshivaniya elektroprovodnykh rasplavov* [Method of electromagnetic mixing of electrically conductive melts]. RF Patent 2113672.
11. Pavlov E.A., Bogovalov S.V., Timofeev V.N., Nadtochiy D.S. (2006) Magnitogidrodinamicheskoe peremeshivanie alyuminievykh rasplavov v mikserakh soprotivleniya [Magnetohydrodynamic mixing of aluminum melt in resistance mixers]. *Sibirskiy zhurnal nauki i tekhnologii – Siberian Journal of Science and Technology.* 5(12). pp. 201–205.
12. Robles Hernández F.C., Sokolowski J.H. (2009) Effects and on-line prediction of electromagnetic stirring on microstructure refinement of the 319 Al–Si hypoeutectic alloy. *J. Alloys Compd.* 480. pp. 416–421. DOI: 10.1016/j.jallcom.2009.02.109.
13. Vorozhtsov S., Zhukov I., Vorozhtsov A., Zhukov A., Eskin D., and Kvetinskaya A. (2015) Synthesis of micro- and nanoparticles of metal oxides and their application for reinforcement of Al-based alloys. *Adv. Mater. Sci. Eng.* pp. 6. DOI: 10.1155/2015/718207.
14. Vorozhtsov S., Zhukov I., Promakhov V., Naydenkin E., Khrustalyov A., Vorozhtsov A. (2016) The influence of ScF<sub>3</sub> nanoparticles on the physical and mechanical properties of new metal matrix composites based on A356 aluminum alloy. *JOM.* 68(12). pp. 3101–3106. DOI: 10.1007/s11837-016-2141-5.

УДК 665.455:006.354  
DOI 10.17223/19988621/55/9

О.В. Матвиенко

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ, ОПИСЫВАЕМОЙ МОДЕЛЬЮ СИСКО, В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Проведено исследование течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе, определена зависимость расхода жидкости от перепада давления, получены зависимости для радиального распределения скорости и эффективной вязкости течения. Проведенные исследования показали, что при значениях числа Сиско  $Si > 500$  неньютоновские свойства течения можно не учитывать и, с точностью достаточной для инженерных расчетов, рассматривать течение ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu_{cr}$ .

**Ключевые слова:** *реология, псевдопластические среды, вязкость, неньютоновские жидкости, модель Сиско.*

Развитие химических технологий делает актуальными задачи исследования закономерностей течения неньютоновских сред [1]. Одним из определяющих параметров при течении жидкостей, является вязкость, которая существенно влияет на структуру течения. Неньютоновские среды, с которыми приходится иметь дело на практике, являются многокомпонентными, многофазными и дисперсными. Вязкость таких сред зависит от соотношения фаз, степени дисперсности, параметров течения [2, 3] и описывается сложной функциональной зависимостью от градиента скорости.

В связи с этим изучению особенностей течения неньютоновских сред со сложным реологическим поведением уделяется значительное внимание [4]. Подробный обзор исследований, посвященных течениям реологически сложных сред, приведен в монографиях [1 – 5].

Исследование закономерностей течения неньютоновских сред в каналах различной формы. Для описания реологического поведения использовались модели Карро, Пауэлла-Эйринга, Уильямсона, Шведова – Бингама, Балкли – Гершеля, Робертсона – Стиффа проведено авторами [6–14]. Результаты исследований показывают важность учета неньютоновских свойств жидкости для корректного описания структуры течения и теплообмена потока.

Авторами [15] исследуется структура течения и формирование динамического пограничного слоя при обтекании пластины потоком жидкости Сиско. Полученные результаты сравниваются с известным решением Блазиуса для обтекания пластины потоком ньютоновской жидкости.

Течение жидкости Сиско в цилиндрической трубе. С использованием метода малых возмущений получено приближенное аналитическое решение для определения профиля скорости рассмотрено в [16].

Настоящая работа является продолжением исследований течений неньютоновских сред [17– 21]. Ее целью является исследование установившегося течения

псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрическом канале.

### Математическая модель

При описании движения жидких сред, как правило, используют подход Эйлера [22], в рамках которого рассматривают изменение скорости частиц, проходящих через определенную точку пространства.

Деформационное течение определяется тензором скоростей деформаций [2], компоненты которого в декартовой системе координат имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1)$$

Напряженное состояние среды описывается тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , который можно разложить на девиатор  $\tau_{ij}$  и шаровую часть  $p$ , называемую давлением [4]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (2)$$

Для построения моделей жидких сред нужно установить связь между девиаторами тензора скоростей деформации и тензора напряжений [3]. В тензорно-линейных моделях такая связь задаётся соотношениями

$$\tau_{ij} = 2K\dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (3)$$

В классических моделях предполагается зависимость  $K$  только от второго инварианта девиатора тензора скоростей деформации. В качестве вторых инвариантов тензоров  $\dot{\varepsilon}$  и  $\sigma$  удобно ввести

$$U = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^D \dot{\varepsilon}_{ji}^D}, \quad T = \sqrt{\tau_{ij} \tau_{ij} / 2}, \quad (4)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij}^D = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}$  – компоненты девиатора тензора скоростей деформации.

Из соотношения (3) вытекает следующее соотношение между инвариантами:

$$T = KU. \quad (5)$$

Если связь (5) установлена, то, подставляя её в уравнения движения и присоединяя уравнение неразрывности, а также формулируя необходимые начальные и граничные условия, получим замкнутую систему для определения поля течения.

К настоящему времени разработано большое количество реологических моделей, описывающих поведение неньютоновских сред. К числу наиболее простых относится модель Оствальда – де Вейля [23]. Обобщение этой модели на трехмерный случай приводит к реологическому уравнению

$$\mu_{\text{eff}} = kU^{n-1}. \quad (6)$$

Постоянная  $k$  называется показателем (индексом) консистенции жидкости: чем меньше ее текучесть, тем больше  $k$ . Параметр  $n$  характеризует степень неньютоновского поведения материала: чем сильнее  $n$  отличается от единицы (в большую или меньшую сторону), тем отчетливее проявляется аномалия вязкости и нелинейность кривой течения.

Значениям  $0 < n < 1$  отвечают псевдопластичные жидкости, эффективная вязкость которых убывает с ростом скоростей сдвига. Ньютоновская жидкость характеризуется параметром  $n = 1$ . Значениям  $n > 1$  отвечают дилатантные жидкости, у которых эффективная вязкость растет с увеличением скоростей сдвига.

К недостаткам модели Оствальда – де Вейля относится нереалистичное описание реологического поведения псевдопластических сред при больших скоростях сдвига ( $U \rightarrow \infty$ ), а дилатантных – при малых ( $U \rightarrow 0$ ). В этих случаях согласно (7) эффективная вязкость становится равной нулю. Отметим, что стремление эффективной вязкости к бесконечности при  $U \rightarrow 0$  в псевдопластических средах и  $U \rightarrow \infty$  в дилатантных объясняется их структурированием и формированием квазитвердых зон.

Реологическая модель Сиско позволяет преодолеть отмеченный выше недостаток модели Оствальда – де Вейля. Эта модель имеет вид [2]

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_* + kU^{n-1}. \quad (7)$$

Параметр модели  $\mu_*$  в случае псевдопластических сред характеризует эффективную вязкость при бесконечной скорости сдвига ( $\mu_* = \mu_\infty$ ), в случае дилатантных сред – при нулевой ( $\mu_* = \mu_0$ ).

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение жидкости в прямой горизонтальной трубе круглого сечения радиуса  $R$ . Координату  $x$ , отсчитываемую вдоль оси трубы, направим вниз по потоку. Ограничимся исследованием стабилизированного течения вдали от входного течения, когда жидкость движется параллельно оси трубы.

В этом случае уравнение движения жидкости примет вид [23]

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \mu_{\text{eff}} \frac{du}{dr} \right) = - \left| \frac{dp}{dx} \right|. \quad (8)$$

Интегрирование уравнения (8) с учетом граничного условия

$$r = 0 : \frac{du}{dr} = 0; \quad r = R : u = 0. \quad (9)$$

В случае установившегося течения течение псевдопластической жидкости Сиско ( $u_x = u(r)$ ,  $u_r = 0$ ,  $u_\varphi = 0$ ) реологическое соотношение (7) принимает вид:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_\infty + k \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1}. \quad (10)$$

С учетом соотношения (10) запишем уравнение движения в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \mu_\infty + k \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{n-1} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (11)$$

Интегрирование уравнения (11) при значении показателя нелинейности  $n = 0.5$  позволяет определить радиальное распределение осевой скорости в канале:

$$u = 2u_N \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) + 2u_S \left( 1 - \frac{r}{R} \right) + \frac{1}{3} \frac{u_S^2}{u_N} \left( \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \frac{r}{R} \right)^{3/2} - \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \right)^{3/2} \right). \quad (12)$$

В формуле (12)  $u_S = \left(\frac{k}{2\mu_\infty}\right)^2 R$  – масштаб скорости, характеризующий неньютоновские свойства среды,  $u_N = \frac{R^2}{8\mu_\infty} \left|\frac{dp}{dx}\right|$  – среднерасходная скорость ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu_\infty$ , движущейся вследствие перепада давления  $\left|\frac{dp}{dx}\right|$ .

Максимальная скорость жидкости достигается на оси потока:

$$u_{\max} = 2u_N + 2u_S + \frac{1}{3} \frac{u_S^2}{u_N} \left[ 1 - \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \right)^{3/2} \right]. \quad (13)$$

Расход жидкости через поперечное сечение трубы вычисляется по формуле

$$Q = 2\pi \int_0^R u r dr = \pi R^2 \left[ u_N + \frac{2}{3} u_S - \frac{1}{3} \frac{u_S^2}{u_N} \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \right)^{3/2} + \frac{1}{24} \frac{u_S^4}{u_N^3} \left( \frac{2}{7} \left( \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \right)^{7/2} - 1 \right) - \frac{2}{5} \left( \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \right)^{5/2} - 1 \right) \right) \right],$$

а среднерасходная скорость определяется как

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = u_N + \frac{2}{3} u_S - \frac{1}{3} \frac{u_S^2}{u_N} \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \right)^{3/2} + \frac{1}{24} \frac{u_S^4}{u_N^3} \left( \frac{2}{7} \left( \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \right)^{7/2} - 1 \right) - \frac{2}{5} \left( \left( 1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \right)^{5/2} - 1 \right) \right).$$

Вязкие свойства потока можно характеризовать двумя величинами: эффективной вязкостью  $\mu_{\text{eff}}$ , определяющей локальные свойства течения и среднерасходной вязкостью  $\bar{\mu}$ , определяющей интегральные свойства потока.

Для определения эффективной вязкости воспользуемся реологическим соотношением (10) с учетом радиального распределения скорости (12). В результате получим

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_\infty \left[ 1 + \sqrt{2} \left| \sqrt{1 + 4 \frac{u_N}{u_S} \frac{r}{R}} - 1 - 2 \frac{u_N}{u_S} \frac{r}{R} \right|^{-0.5} \right]. \quad (14)$$

Определим среднерасходную вязкость неньютоновской жидкости  $\bar{\mu}$  как вязкость ньютоновской жидкости, движущейся со среднерасходной скоростью  $\bar{u}$  в трубе радиусом  $R$  под действием перепада давления  $\left|\frac{dp}{dx}\right|$ . Введение среднерасходной вязкости позволяет при проведении гидравлических расчетов вместо неньютоновской среды рассматривать ньютоновскую жидкость с вязкостью  $\bar{\mu}$ .

Для ньютоновской жидкости связь между перепадом давления и массовым расходом определяется выражением [24]

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\bar{\mu}} \left| \frac{dp}{dx} \right|. \quad (15)$$

Таким образом, среднерасходная вязкость потока  $\bar{\mu}$  будет равна:

$$\bar{\mu} = \mu_{\infty} \frac{u_N}{\bar{u}}. \quad (16)$$

В технических расчетах принято связывать перепад давления со среднерасходной скоростью течения с использованием коэффициента сопротивления  $\zeta$ . Для этого предполагается, что перепад давления должен быть пропорционален динамическому напору

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| = \zeta \frac{\rho \bar{u}^2}{4R}. \quad (17)$$

Подставляя в равенство (17) значения  $\left| \frac{dp}{dx} \right|$  из формулы (15), получим выражения для коэффициента сопротивления

$$\zeta = 32 \frac{\bar{\mu}}{\rho \bar{u} R} = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (18)$$

где  $\text{Re} = \rho \bar{u} d / \bar{\mu}$  – число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости  $\bar{u}$ , среднерасходной вязкости  $\bar{\mu}$  и диаметру трубы  $d = 2R$ .

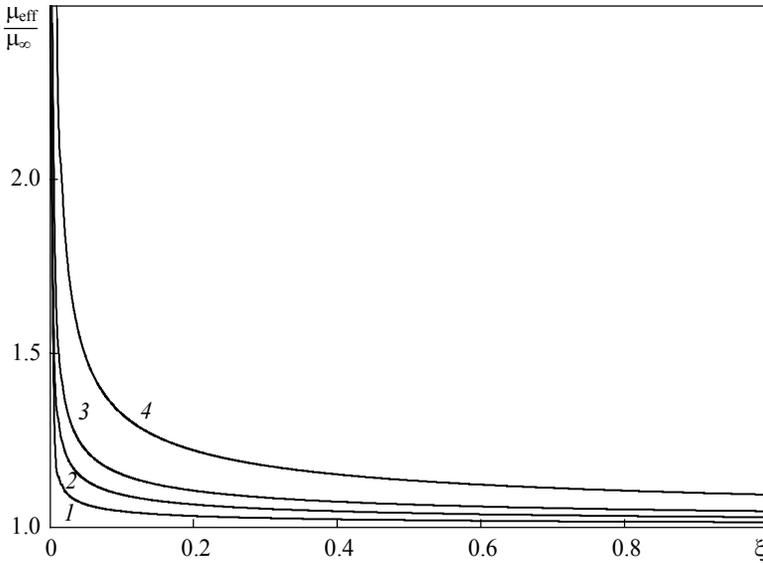
Равенство (18) выражает закон сопротивления Блазиуса для течения неньютоновской жидкости

### Результаты математического моделирования

Перейдем к анализу полученных результатов. Диапазон изменения параметров был выбран следующим: показатель нелинейности –  $n = 0.5$ , консистенция жидкости изменялась в пределах  $k = 0.1 - 1 \text{ Н} \cdot \text{с}^{0.5} / \text{м}^2$ , перепад давления –  $|dp/dx| = 200 - 5000 \text{ Па/м}$ , вязкость при бесконечной скорости сдвига –  $\mu_{\infty} = 0.05 - 5 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Радиус канала составлял  $R = 0.1 \text{ м}$ .

На рис. 1 показана зависимость относительной эффективной вязкости  $\mu_{\text{eff}} / \mu_{\infty}$  от безразмерной радиальной координаты  $\xi = r/R$ . Это распределение является типичным для псевдопластических сред. В периферийной и пристеночной частях течения эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения, где градиент скорости имеет невысокие значения, наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. На оси течения  $\mu_{\text{eff}} / \mu_{\infty} \rightarrow \infty$ . Увеличение эффективной вязкости псевдопластических сред с уменьшением скоростей сдвиговых деформаций в реологии объясняется процессами структурирования [2]. При малых скоростях сдвига происходит стягивание молекул полимера между собой, вследствие чего в потоке формируется область структурированного течения, характеризуемая высокими значениями эффективной вязкости. С увеличением скорости сдвига структурированность среды нару-

шается, молекулы ориентируются вдоль направления движения. В результате этого сопротивление среды ослабевает, что означает уменьшение эффективной вязкости.



**Рис. 1.** Радиальное распределение относительной эффективной вязкости:  
1 – Si = 25, 2 – 100, 3 – 250, 4 – 25

**Fig. 1.** Radial distribution of relative effective viscosity:  
1 – Si = 1000, 2 – 250, 3 – 100, 4 – 25

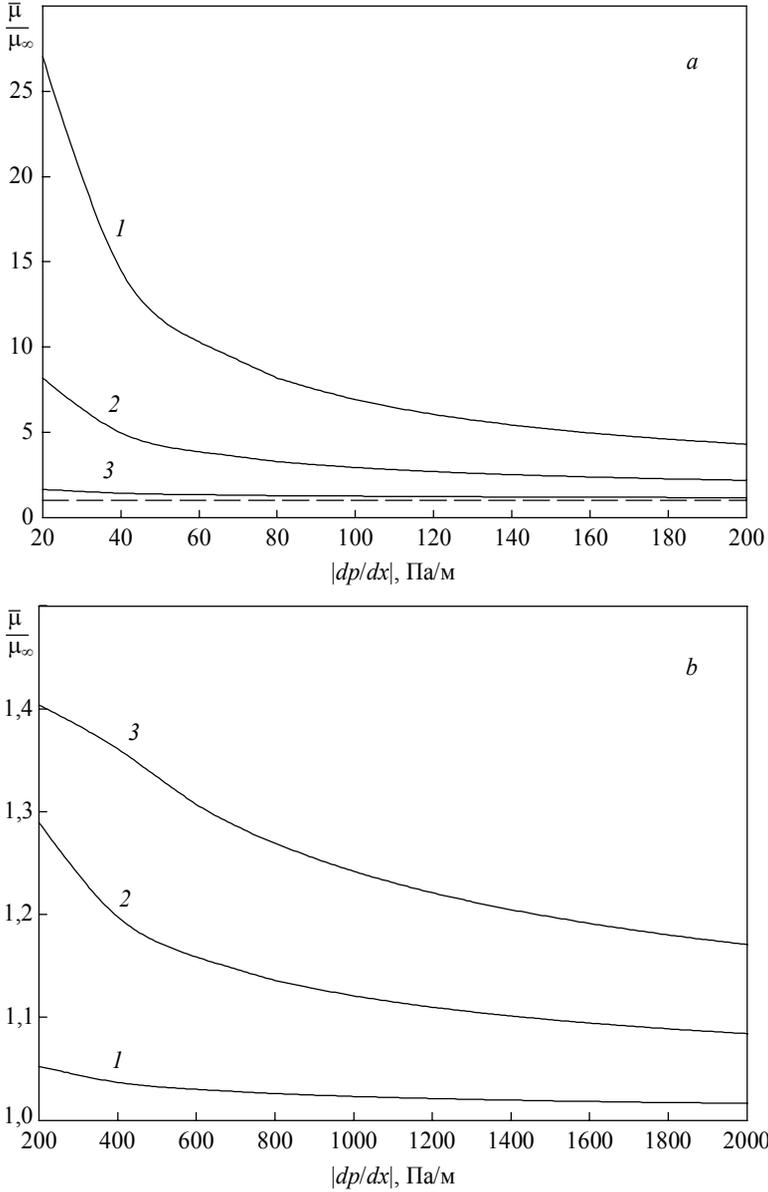
Анализ формулы (14) показывает, что эффективная вязкость потока прямо пропорциональна вязкости при бесконечной скорости сдвига  $\mu_\infty$  и нелинейным

образом зависит от числа Сиско  $Si = \frac{u_N}{u_S} = \frac{\mu_\infty R}{2k^2} \left| \frac{dp}{dx} \right|$ . Из рис. 1 видно, что с ростом

значений Si происходит уменьшение значений  $\mu_{\text{eff}}/\mu_\infty$ . Этот результат объясняется преобладающей ролью ньютоновских свойств течения в потоках с высокими значениями числа Si.

На рис. 2 показана зависимость относительного значения среднерасходной вязкости  $\bar{\mu}/\mu_\infty$  от перепада давления  $\left| \frac{dp}{dx} \right|$ . Как видно из рисунка, величина сред-

нерасходной вязкости монотонно убывает с ростом перепада давления, асимптотически стремясь к  $\mu_\infty$ . С увеличением консистенции среды  $k$  величина среднерасходной вязкости увеличивается. Этот эффект наиболее выражен для низкоскоростных потоков, движущихся при малом перепаде давления. С уменьшением значений  $\mu_\infty$  жидкость становится более подвижной. Это приводит к уменьшению значений  $\bar{\mu}$ . Отметим, что при уменьшении  $\mu_\infty$  при одном и том же  $u_N$ , отношение среднерасходной вязкости к вязкости при бесконечной скорости сдвига стремится к единице:  $\bar{\mu}/\mu_\infty \rightarrow 1$ .



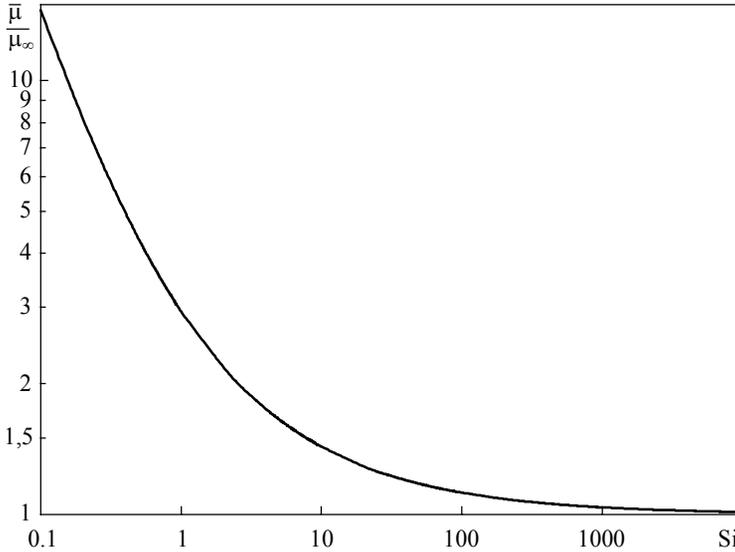
**Рис. 2.** Зависимость относительной величины среднерасходной вяз  $\bar{\mu}/\mu_\infty$  от перепада давления  $|dp/dx|$ :  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $a - \mu_\infty = 0.05 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $b - 0.5$ ;  $1 - k = 0.1 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.5}$ ,  $2 - 0.5$ ,  $3 - 1$ . Пунктирная прямая на рис. 2,  $a$  соответствует значению  $\bar{\mu}/\mu_\infty = 1$

**Fig. 2.** Dependence of the relative value of the mean-flow viscosity  $\bar{\mu}/\mu_\infty$  on the pressure drop  $|dp/dx|$ :  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $a - \mu_\infty = 0.05 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $b - 0.5$ ;  $1 - k = 0.1 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.5}$ ,  $2 - 0.5$ ,  $3 - 1$ . The dashed line on Fig. 2,  $a$  corresponds to the value  $\bar{\mu}/\mu_\infty = 1$

Результаты, представленные на рис. 2, можно систематизировать, если рассмотреть зависимость  $\bar{\mu}/\mu_\infty$  от числа Сиско  $Si$ . Перепишем зависимость (16) в виде

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_\infty} = \left[ 1 + \frac{2}{3}Si^{-1} - \frac{1}{3}Si^{-2}(1+4Si)^{3/2} + \frac{1}{24}Si^{-4} \left( \frac{2}{7}((1+4Si)^{7/2} - 1) - \frac{2}{5}((1+4Si)^{5/2} - 1) \right) \right]^{-1}. \quad (19)$$

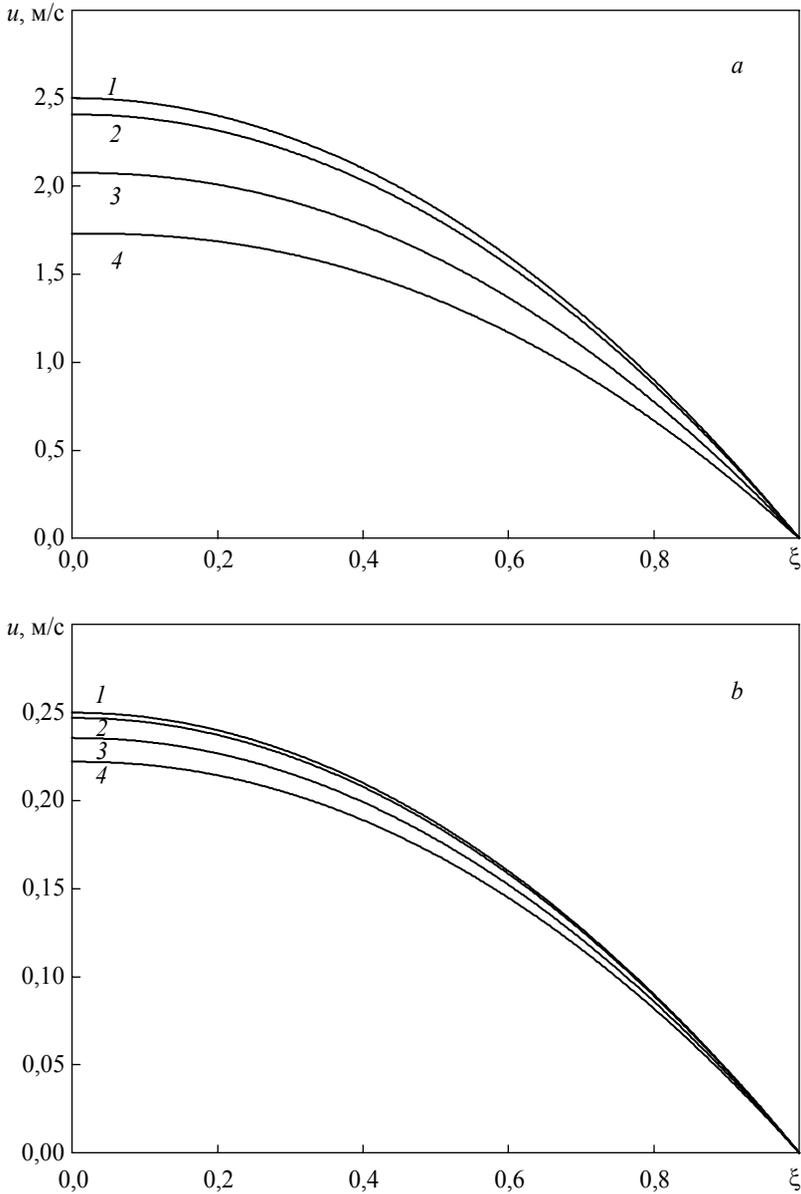
Результаты вычисления относительного значения среднерасходной вязкости от числа Сиско представлены на рис. 3. При  $Si = 0.1$  величина среднерасходной вязкости почти в 15 раз превышает  $\mu_\infty$ . Однако с ростом значений числа Сиско  $Si$  различие в значениях  $\bar{\mu}$  и  $\mu_\infty$  уменьшается: при  $Si = 500$  величина среднерасходной вязкости всего лишь на 5 % превышает  $\mu_\infty$ , а при  $Si = 10^4$  – менее чем на 1 %. Этот факт объясняется тем, что в потоках с малыми значениями числа  $Si$  преобладают нелинейные свойства, а при больших значениях числа  $Si$  – ньютоновские свойства. Таким образом, если при течении псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, параметр  $Si > 500$ , то неньютоновские свойства течения проявляются незначительно и с точностью, достаточной для инженерных расчетов, можно рассматривать течение ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu_\infty$ .



**Рис. 3.** Зависимость относительной величины среднерасходной вязкости  $\bar{\mu}/\mu_\infty$  от числа Сиско

**Fig. 3.** Dependence of the relative value of the mean-flow viscosity  $\bar{\mu}/\mu_\infty$  on Sisko number

На рис. 4 представлены радиальные распределения скорости, рассчитанные для одного и того же значения перепада давления, но различных значений реологических параметров  $\mu_\infty$ ,  $k$ .

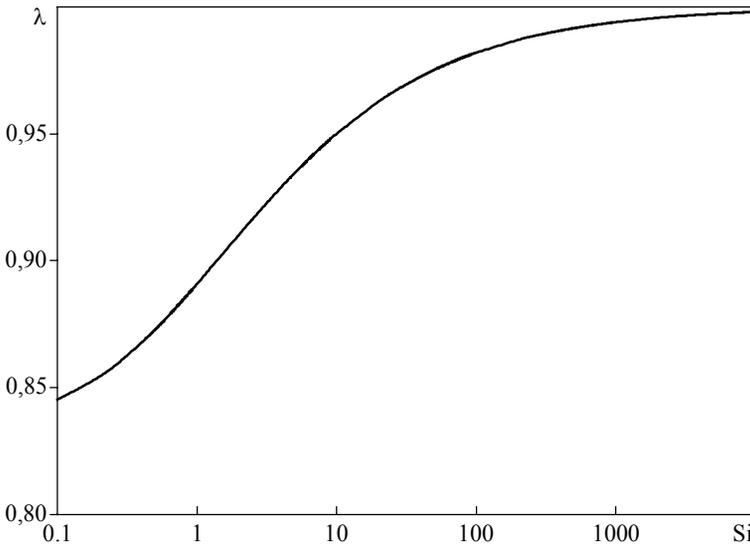


**Рис. 4.** Радиальное распределение скорости:  $|dp/dx| = 500$  Па/м,  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  
 $a - \mu_{\infty} = 0.5$  Па·с,  $b - 5$ ;  $1 - k = 0$  (ньютоновская жидкость),  
 $2 - k = 0.1$  Па·с<sup>0.5</sup>,  $3 - 0.5$ ,  $4 - 1$

**Fig. 4.** Radial distribution of velocity:  $|dp/dx| = 500$  Pa/m  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  
 $a - \mu_{\infty} = 0.5$  Па·с,  $b - 5$ ;  $1 - k = 0$  (newtonian fluid),  
 $2 - k = 0.1$  Па·с<sup>0.5</sup>,  $3 - 0.5$ ,  $4 - 1$

С увеличением консистенции скорость потока уменьшается: среда становится менее подвижной, нелинейная составляющая эффективной вязкости возрастает. Это приводит к росту гидравлического сопротивления. В результате расход жидкости уменьшается. При этом значения скорости уменьшаются по всему сечению трубы. Аналогичный эффект наблюдается и при увеличении значений  $\mu_\infty$ . Однако уменьшение скорости потока объясняется ростом гидравлического сопротивления, вызванного увеличением линейной составляющей эффективной вязкости.

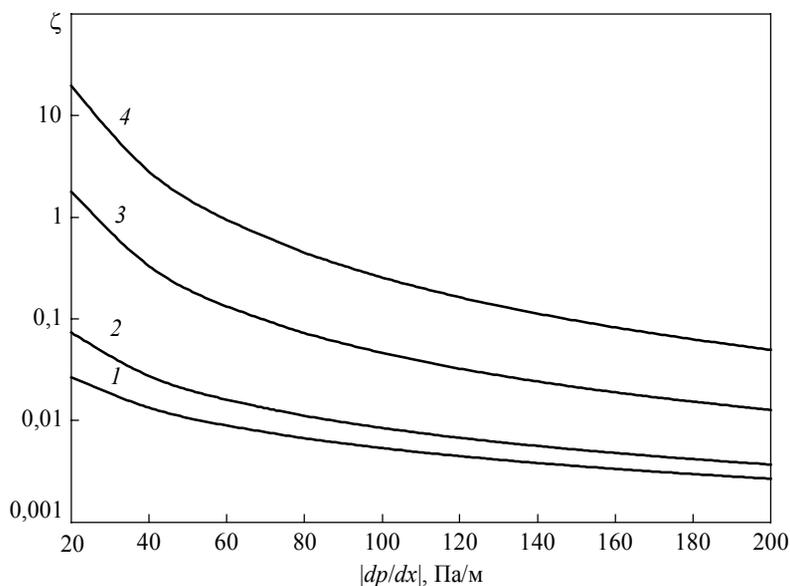
Заполненность профиля скорости характеризует параметр  $\lambda = u_{\max} / (2\bar{u})$ , представляющий отношение скорости на оси течения к удвоенному значению среднерасходной скорости. Для ньютоновской жидкости  $\lambda = 1$ . При течении псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско,  $\lambda$  является функцией числа  $Si$ . Результаты расчетов показывают, что  $\lambda < 1$ . Это свидетельствует о большей заполненности профиля скорости: радиальное распределение скорости становится более пологим. С ростом значений  $Si$  ньютоновские свойства становятся доминирующими. В результате этого профиль скорости становится менее заполненным, а значения  $\lambda \rightarrow 1$  (рис. 5).



**Рис. 5.** Зависимость коэффициента заполнения профиля скорости от числа Сиско  
**Fig. 5.** Dependence of the occupancy rate of the velocity profile on the Sisko number

На рис. 6 показано изменение коэффициента гидравлического сопротивления  $\zeta$  с ростом перепада давления  $|dp/dx|$  для различных значений параметра консистенции  $k$ . Коэффициент гидравлического сопротивления псевдопластической жидкости Сиско существенно превышает коэффициент сопротивления ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu_\infty$ , движущейся под тем же перепадом давления. Величина  $\zeta$  тем больше, чем выше значения параметра консистенции. С увеличением значений  $|dp/dx|$  гидравлическое сопротивление потока уменьшается. При больших значениях перепада давления  $|dp/dx|$  величина коэффициента гидрав-

лического сопротивления  $\zeta$ , рассчитанная для жидкости Сиско, приближается к значениям, рассчитанным для ньютоновской жидкости с вязкостью  $\bar{\mu}$ .



**Рис. 6.** Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от перепада давления:  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_\infty = 0.05 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , 1 –  $k = 0$  (ньютоновская жидкость), 2 –  $k = 0.1 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.5}$ , 3 – 0.5, 4 – 1

**Fig. 5.** Dependence of coefficient of hydraulic resistance from the pressure drop:  $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_\infty = 0.05 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , 1 –  $k = 0$  (newtonian fluid), 2 –  $k = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.5}$ , 3 – 0.5, 4 – 1

### Заключение

Проведенные исследования показали, что при значениях числа Сиско  $Si > 500$  неньютоновские свойства течения можно не учитывать.

Для  $Si < 500$  коэффициент гидравлического сопротивления псевдопластической жидкости Сиско существенно превышает коэффициент сопротивления ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu_\infty$ , движущейся под тем же перепадом давления.

В периферийной и пристеночной частях течения эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения, где градиент скорости имеет невысокие значения, наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. С увеличением скорости сдвига происходит уменьшение эффективной вязкости.

С увеличением консистенции среды  $k$  и вязкости при бесконечной скорости сдвига  $\mu_\infty$  величина среднерасходной вязкости увеличивается. Этот эффект наиболее выражен для низкоскоростных потоков, движущихся при малом перепаде давления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кутепов А.М., Полянин Л.Д., Запryanов З.Д. и др. Химическая гидродинамика: справочное пособие. М.: Бюро Квантум, 1996.
2. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. СПб.: Профессия, 2007. 560 с.
3. Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость и перемешивание. М.: Наука, 2005.
4. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.
5. Матвиенко О.В., Унгер Ф.Г., Базуев В.П. Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем. Томск: Изд-во ТГАСУ, 2015.
6. Перминов А.В., Любимова Т.П. Устойчивость стационарного плоскопараллельного течения псевдопластической жидкости в плоском вертикальном слое // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. № 3. С. 270–278.
7. Вахрушев А.А., Липанов А.М., Вахрушев А.В. Численное исследование течения жидкости с переменными вязкими свойствами в изогнутых каналах // Химическая физика и мезоскопия. 2005. Т. 7. № 3. С. 286–300.
8. Снигерев Б.А., Тазюков Ф.Х. Двухслойное течение расплавов полимеров в каналах фильер // Изв. Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 3 С. 349–354.
9. Харламов С.Н., Терещенко Р.Е. Неизотермическое течение реологически сложных вязких сред с переменными свойствами в элементах трубопроводных систем // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2013. № 4. С. 293–298.
10. Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершеля – Балкли // Вестник Воронежского гос. университета. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 246–257.
11. Алексеева К.Г., Борзенко Е.И. Структура течения жидкости Шведова – Бингама в канале со скачком сечения // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55. № 7/2. С. 15–19.
12. Борзенко Е.И., Рьльцов И.А., Шрагер Г.Р. Кинематика течения жидкости Балкли – Гершеля со свободной поверхностью при заполнении канала // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2017. Т. 52. № 5. С. 53–63.
13. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Течение неньютоновской жидкости со свободной поверхностью при заполнении круглой трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 2. С. 53–60.
14. Fan H.H., Zhou H.B., Peng Qi, Zhai Y.H. A generalized hydraulic calculation model for non-Newtonian fluid pipe flow and its application evaluation // 2014. SOCAR Proceedings. 10.5510/OGP20140200195.
15. Patel M., Patel J., Timol M.G. Laminar boundary layer flow of Sisko fluid // Applications and Applied Mathematics Intern. J. 2015. V. 10. Iss. 2. P. 909 – 918.
16. Moallemi N., Shafteenejad I., Novinzadeh A.B. Exact solutions for flow of a sisko fluid in pipe // Special Issue of the Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2011. V. 37 No. 2. Part 1. P. 49–60.
17. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Южанова Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале. Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 3. С. 544–547.
18. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Южанова Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 1. С. 192–199.
19. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 5. С. 1129–1137.
20. Матвиенко О.В. Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 183–189.
21. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N., Smirnova N.G. Numerical investigation of Herschel

- Bulkley fluids mixing // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Advanced Materials in Construction and Engineering, TSUAB 2014. 2015. P. 012034.
22. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1974.
23. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000.
24. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.

Статья поступила 25.03.2018 г.

Matvienko O.V. (2018) INVESTIGATION OF THE STABILIZED FLOW OF PSEUDO-PLASTIC LIQUID, DESCRIBED BY THE SISCO MODEL, IN THE CYLINDRICAL TUBE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 99–112

DOI 10.17223/19988621/55/9

Keywords: rheology, pseudoplastic media, viscosity, non-Newtonian fluids, the Sisko model.

The pseudoplastic fluid flow described by the Sisko model was investigated, the dependence of the fluid flow rate on the pressure drop and also radial distribution of the velocity and the effective viscosity of the flow were determined. The effective viscosity of the flow is directly proportional to the viscosity at an infinite shear rate and depends nonlinearly on the Sisko number. In the peripheral and near-wall part of the flow, the effective viscosity is characterized by low values. However, in the vicinity of the flow axis, where the velocity gradient has low values, a significant increasing the effective viscosity is observed. As the shear rate increases, the effective viscosity decreases. With an increase in the consistency of the fluid and the viscosity at an infinite shear rate, the value of the average viscosity increases. This effect is most pronounced for low-velocity flows moving at a small pressure drop. The investigations carried out have shown that for values of the Sisko number less than 500 the non-Newtonian properties of the flow appear insignificantly and with an accuracy sufficient for engineering calculations, one can consider the flow of a Newtonian fluid. The coefficient of hydraulic resistance of a pseudo-plastic Sisko fluid is significantly larger than the resistance coefficient of a Newtonian fluid with a viscosity  $\mu_\infty$  moving under the same pressure drop.

MATVIENKO Oleg Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University).  
E-mail: matvolegv@mail.ru

#### REFERENCES

1. Kutepov A.M., Polyanin L.D., Zapryanov Z.D., et al. (1996) *Khimicheskaya gidrodinamika: spravochnoe posobie* [Chemical Hydrodynamics: a textbook]. Moscow: Byuro Kvantum.
2. Malkin A.Ya, Isaev A.I. (2005) *Rheology: Concepts, Methods, and Applications*, Toronto: ChemTec Publishing.
3. Klimov D.M., Petrov A.G., Georgievskii D.V. (2005) *Vyazko plasticheskie techeniya: Dinamicheskii haos i peremeshivanie* [Viscoplastic Flows: Dynamic Chaos, Stability, and Mixing]. Moscow: Nauka.
4. Wilkinson W.L. (1960) *Non-Newtonian Fluids. Fluid Mechanics, Mixing, and Heat Transfer*. London: Pergamon Press.
5. Matvienko O.V., Unger F.G., Bazuev V.P. (2015) *Matematicheskiye modeli proizvodstvennykh protsessov dlya prigotovleniya bitumnykh dispersnykh system* [Mathematical models of manufacturing processes for the preparation of bitumen disperse systems]. Tomsk: Publishing house of TGASU.
6. Perminov A.V., Lyubimova T.P. (2014) Ustoychivost' statsionarnogo ploskoparallelnogo techeniya pсевдопластической жидкости v ploskom vertikal'nom sloye [Stability of a stationary plane-parallel flow of a pseudoplastic fluid in a flat vertical layer]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational mechanics of continuous media*. 7(3). pp. 270–278. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.27.

7. Vakhrushev A.A., Lipanov A.M., Vakhrushev A.V. (2005) Chislennoye issledovaniye techeniya zhidkosti s peremennymi v'язkimi svoystvami v izognutykh kanalakh [Numerical investigation of fluid flow with variable viscous properties in curved channels]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya – Chemical physics and mesoscopy*. 7(3). pp. 286–300.
8. Snigerev B.A., Tazyukov F.Kh. (2014) Dvukhsloynoye techeniye rasplavov polimerov v kanalakh fil'yer [Two-layer flow of polymer melts in the channels of spinnerets]. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Matematika. Mehanika. Informatika – Saratov University Journal of Mathematics, Mechanics, Informatics*. 14(3). pp. 349 – 354.
9. Kharlamov S.N., Tereshchenko R.E. (2013) Neizotermicheskoye techeniye reologicheskii slozhnykh v'язkikh sred s peremennymi svoystvami v elementakh truboprovodnykh sistem [Nonisothermal flow of rheologically complex viscous media with variable properties in the elements of pipeline systems]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' – Mountain information and analytical bulletin*. 4. pp. 293–298.
10. Turbin M.V. (2013) Issledovaniye nachal'no-krayevoy zadachi dlya modeli dvizheniya zhidkosti Gershelya – Balkli [Investigation of the initial – boundary value problem for the Herschel – Bulkley fluid motion model]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Fizika. Matematika – Bulletin of the Voronezh state university. Ser. Physics. Mathematics*. 13(2). pp. 246–257.
11. Alekseeva K.G., Borzenko E.I. (2012) Struktura techeniya zhidkosti Shvedova – Bingama v kanale so skachkom secheniya [Structure of the Shvedov-Bingham fluid flow in a channel with a discontinuity]. *Russian Physical Journal*. 55(7-2). pp. 15 – 19. (In Russian).
12. Borzenko E.I., Ryl'tsev I.A., Shrager G.R. (2017) Kinematics of Bulkley – Herschel fluid flow with a free surface during the filling of a channel. *Fluid Dynamics*. 52(5.) pp. 646–656. DOI: 10.1134 / S0015462817050064.
13. Borzenko E.I., Shrager G.R., Yakutenok V.A. (2012) Free-surface non-newtonian fluid flow in a round pipe. *Journal of applied mechanics and technical physics*. 53(2). pp. 190–197. DOI: 10.1134 / S002189441202006X.
14. Fan H.H., Zhou H.B., Peng Qi, Zhai Y.H. (2014) A generalized hydraulic calculation model for non-Newtonian fluid pipe flow and its application evaluation. *SOCAR Proceedings*. 10.5510/OGP20140200195.
15. Patel M., Patel J., Timol M.G. (2015) Laminar Boundary Layer Flow of Sisko Fluid. *Applications and Applied Mathematics Intern. J*. 10(2). pp. 909–918.
16. Moallemi N., Shafieejad I., Novinzadeh A.B. (2011) Exact solutions for flow of a Sisko fluid in pipe. *Special Issue of the Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. 37(2). pp. 49–60.
17. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Yuzhanova, N.K. (2011) Mathematical simulation of a twisted pseudoplastic fluid flow in a cylindrical channel. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(3). pp. 589–593. DOI: 10.1007 / s10891-011-0509-5.
18. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Dul'zon N.K. (2014) Mathematical simulation of the swirling flow of a dilatant liquid in a cylindrical channel. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 87(1). pp. 200–207. DOI: 10.1007 / s10891-014-1001-9.
19. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Dul'zon N.K. (2014) Mathematical simulation of a swirling viscoplastic fluid flow in a cylindrical channel. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 87(5). pp. 1177–1185. DOI: 10.1007 / s10891-014-1119-9.
20. Matvienko O.V. (2014) Numerical study of the flow of non-Newtonian fluids in a cylindrical channel. *Russian Physical Journal*. 57(8-2). pp. 183–189.
21. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N., Smirnova N.G. (2015) Numerical investigation of Herschel – Bulkley fluids mixing. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Advanced Materials in Construction and Engineering*. 71(1). DOI: 10.1088/1757-899X/71/1/012034.
22. Loitsyanskii L.G. (1966) *Mechanics of Liquids and Gases*. Oxford: Pergamon Press.
23. Ostrovsky G.M. (2000) *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred* [Applied mechanics of heterogeneous media]. Saint Petersburg: Nauka.
24. Schlichting H. (1955) *Boundary-layer theory*. New York: McGraw-Hill.

УДК 519.6:532.546  
DOI 10.17223/19988621/55/10

М.К. Хасанов

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЖЕКЦИИ СЕРОВОДОРОДА В ПРИРОДНЫЙ ПЛАСТ, СОПРОВОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБРАЗОВАНИЕМ ЕГО ГАЗОГИДРАТА<sup>1</sup>

На основе уравнений механики многофазных сред построена математическая модель инжекции жидкого сероводорода в пористый пласт, насыщенный нефтью и водой. Построены автомодельные решения задачи для случая, когда в пласте возникают две подвижные межфазные поверхности, на которых происходят образование газогидрата сероводорода и вытеснения нефти сероводородом. Исследована зависимость автомодельных координат межфазных границ от проницаемости пласта и его начального давления. Установлено, что при низких значениях проницаемости и высоких значениях начального давления пласта может происходить слияние межфазных поверхностей. Найдены зависимости критических значений давления инжекции, соответствующих слиянию межфазных поверхностей, от проницаемости пласта и его исходного давления.

**Ключевые слова:** математическая модель, автомодельное решение, пористая среда, фильтрация, газогидраты, сероводород.

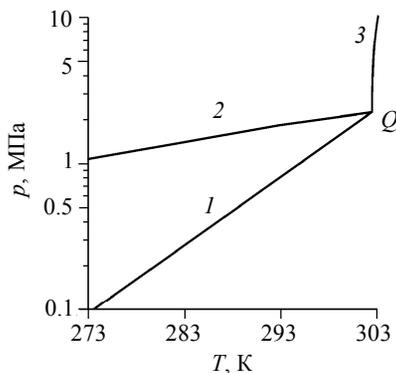
Одним из методов снижения эмиссии сероводорода, вырабатываемого промышленными предприятиями, в атмосферу является его подземное захоронение в истощенных нефтегазовых коллекторах [1, 2]. Поскольку при долгосрочном подземном хранении утилизируемых газов в виде флюида существует риск их утечки на поверхность, то рассматривается возможность их перевода в газогидратное состояние, позволяющее по сравнению со свободным состоянием хранить одинаковые объемы газа при меньших давлениях [3–5].

Поскольку любые технологические идеи должны быть подкреплены соответствующими расчетами, основанными на теоретических моделях, то актуальной задачей является построение адекватных математических моделей гидратообразования в природных пластах. Математические модели образования газогидратов в пористых средах, насыщенных метаном и водой, сформулированы, в частности, в работах [6, 7]. Математические модели образования газогидрата  $H_2S$  в пластах, насыщенных нефтью и водой, при инжекции жидкого сероводорода представлены в работах [8, 9]. Однако в данных работах задача решена в наиболее простой постановке, когда образование газогидрата происходит на границе, совпадающей с границей вытеснения нефти сероводородом. В настоящей работе построена математическая модель образования газогидрата  $H_2S$  для случая, когда гидратообразование происходит на фронтальной границе, которая не совпадает с границей вытеснения нефти жидким сероводородом.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Республики Башкортостан (проект 17-48-020123 p\_a).

### Постановка задачи

Термобарические условия существования газогидрата  $H_2S$  показаны на фазовой диаграмме (рис. 1) [5]. На данной диаграмме кривая 1 определяет трехфазное равновесие между газообразным сероводородом, водой и газогидратом  $H_2S$ , кривая 2 – равновесие между жидким сероводородом, водой и газогидратом  $H_2S$ , а кривая 3 – двухфазное равновесие между газообразным и жидким сероводородом. Соответственно газогидрат  $H_2S$  существует левее кривых 1 и 3. В квадрупольной точке  $Q$  ( $T_Q = 302.6$  К и  $p_Q = 2.24$  МПа) все четыре указанные фазы находятся в равновесии.



**Рис. 1.** Фазовая диаграмма системы «сероводород – вода»  
**Fig. 1.** Phase diagram of the system "hydrogen sulfide – water"

Пусть полубесконечный горизонтальный пористый пласт (занимающий полупространство  $x > 0$ ) в начальный момент времени насыщен водой и нефтью. Будем полагать, что начальная температура пласта  $T_0$  выше температуры  $T_Q$ , соответствующей квадрупольной точке. Следовательно, в рассматриваемой задаче начальное состояние пласта не соответствует условиям образования газогидрата сероводорода. Положим, что через границу ( $x=0$ ) закачивается жидкий сероводород, давление  $p_e$  и температура  $T_e$  которого соответствуют условиям существования газогидрата сероводорода.

В данной работе будем рассматривать модель с поршневым вытеснением нефти жидким сероводородом, а также случай, когда значение исходной водонасыщенности пласта не превышает 0.2, тогда воду можно считать неподвижной. Таким образом, в данной модели только две фазы являются подвижными – нефть и жидкий сероводород. Рассматривая масштабы времени, значительно превышающие характерное время кинетики процесса гидратообразования, и учитывая, что в рассматриваемой задаче начальное состояние пласта не соответствует условиям образования газогидрата сероводорода можно полагать, что гидратообразование происходит на фронтальной границе, не совпадающей с границей вытеснения нефти сероводородом. Следовательно, в рассматриваемом случае в пласте образуются три характерные области (рис. 2). В первой (ближней) области поры насыщены сероводородом и газогидратом  $H_2S$ , во второй (промежуточной) области присутствуют вода и сероводород, а в третьей (дальней) зоне поры насыщены водой и нефтью. Соответственно существуют две подвижные межфазные поверхно-

сти: между первой и второй областями, где вода полностью переходит в газогидратное состояние (фронт гидратообразования), и между второй и третьей областями, где происходит вытеснение нефти сероводородом (фронт вытеснения).

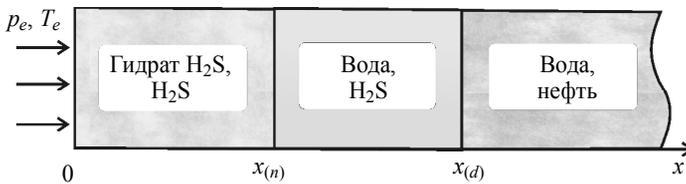


Рис. 2. Схема задачи  
Fig. 2. Schematic diagram of the problem

### Основные уравнения

Примем следующие упрощающие предположения: пористость пласта  $m$  постоянна, скелет пористой среды, газогидрат и вода несжимаемы и неподвижны. Газогидрат H<sub>2</sub>S является двухкомпонентной системой с массовой концентрацией сероводорода  $G$ . Жидкий сероводород и нефть будем считать слабосжимаемыми жидкостями.

Система основных уравнений, описывающая в одномерном случае процессы фильтрации и теплопереноса в пористом пласте представляет собой законы сохранения масс и энергии, закон Дарси и уравнения состояния нефти и воды [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i m S_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i m S_i v_i) &= 0, \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_i c_i m S_i v_i \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \\ m S_i v_i &= - \frac{k_i}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho_i &= \rho_{0i} (1 + \beta_i (p - p_0)). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $t$  – время;  $x$  – координата;  $m$  – пористость;  $T$  – температура;  $p$  – давление; нижние индексы  $i = l, s$  относятся соответственно к параметрам нефти и сероводорода;  $\rho_i$  – плотность;  $v_i$  – действительная средняя скорость;  $k_i$  – фазовая проницаемость;  $\mu_i$  – динамическая вязкость;  $c_i$  – удельная теплоемкость;  $S_i$  – насыщенность;  $\beta_i$  – коэффициент сжимаемости;  $\rho c$  и  $\lambda$  – эффективные значения объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности насыщенного пласта, которые считаем постоянными величинами (так как основной вклад в их значения вносят параметры горной породы).

Зависимость коэффициента фазовой проницаемости  $k_i$  от насыщенности  $S_i$  и абсолютной проницаемости пласта  $k_0$  зададим следующим образом:

$$k_i = k_0 S_i \quad (i=s, l).$$

На поверхности  $x = x(n)$ , разделяющей первую и вторую области, происходит полный переход воды в гидратное состояние. Поэтому из условий баланса массы

и тепла на этой границе следует

$$-\frac{k_{s(1)}}{\mu_s} \frac{\partial p_{(1)}}{\partial x} + \frac{k_{s(2)}}{\mu_s} \frac{\partial p_{(2)}}{\partial x} = mS_h \left( \frac{\rho_h G}{\rho_{0s}} + \frac{\rho_h (1-G)}{\rho_w} - 1 \right) V_{(n)}, \quad (2)$$

$$mS_h \rho_h (1-G) V_{(n)} = mS_{w0} \rho_w V_{(n)}, \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} - \lambda \frac{\partial T_{(2)}}{\partial x} = mS_h \rho_h L_h V_{(n)}. \quad (4)$$

Здесь  $V_{(n)}$  – скорость движения фронта образования газогидрата  $H_2S$ ,  $G$  – массовая концентрация сероводорода в гидрате,  $L_h$  – удельная теплота образования газогидрата  $H_2S$ ,  $S_{w0}$  – начальная водонасыщенность пористой среды,  $\rho_w$  – плотность воды,  $k_{s(1)}$  – фазовая проницаемость для сероводорода в первой области,  $k_{s(2)}$  – фазовая проницаемость для сероводорода во второй области. Нижний индекс  $n$  относится к параметрам на границе, разделяющей первую и вторую области, а нижние индексы 1 и 2 – к параметрам первой и второй областей соответственно. Температуру на этой границе будем считать непрерывной и равной температуре квадрупольной точки  $T_Q$ .

На поверхности  $x = x_{(d)}$ , разделяющей вторую и третью области, происходит вытеснение нефти сероводородом. Поэтому с учетом условий баланса массы нефти и сероводорода, а также баланса тепла на этой границе имеем

$$-\frac{k_{s(2)}}{\mu_s} \frac{\partial p_{(2)}}{\partial x} = m(1 - S_{w0}) V_{(d)}; \quad (5)$$

$$-\frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial p_{(3)}}{\partial x} = m(1 - S_{w0}) V_{(d)}; \quad (6)$$

$$\lambda \frac{\partial T_{(2)}}{\partial x} - \lambda \frac{\partial T_{(3)}}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

где  $V_{(d)}$  – скорость движения фронта вытеснения нефти сероводородом,  $k_l$  – фазовая проницаемость для нефти в третьей области. Нижний индекс  $d$  относится к параметрам на границе, разделяющей вторую и третью области, а нижний индекс 3 – к параметрам третьей области.

На обеих границах давление и температуру будем считать непрерывными величинами.

Из уравнения (3) можно найти величину гидратонасыщенности в первой области:

$$S_h = \frac{\rho_w S_{w0}}{\rho_h (1-G)}.$$

На основе уравнений системы (1), уравнения пьезопроводности и температуропроводности запишутся в виде

$$\frac{\partial p_{(j)}}{\partial t} = \chi_{(j)}^{(p)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p_{(j)}}{\partial x} \right), \quad j = 1, 2, 3; \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_{(j)}}{\partial t} = \chi^{(T)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \chi^{(T)} \alpha_{(j)} \frac{\partial p_{(j)}}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где  $\chi_{(1)}^{(p)} = \frac{k_{s(1)}}{\mu_s m (1 - S_h) \beta_s}$ ,  $\chi_{(2)}^{(p)} = \frac{k_{s(2)}}{\mu_s m (1 - S_{w0}) \beta_s}$ ,  $\chi_{(3)}^{(p)} = \frac{k_l}{\mu_l m (1 - S_{w0}) \beta_l}$ ,

$$\chi^{(T)} = \frac{\lambda}{\rho c}, \quad \alpha_{(1)} = \frac{2\rho_{0s} c_s k_{s(1)}}{\lambda \mu_s \beta_s}, \quad \alpha_{(2)} = \frac{2\rho_{0s} c_s k_{s(2)}}{\lambda \mu_s \beta_s}, \quad \alpha_{(3)} = \frac{2\rho_{0l} c_l k_l}{\lambda \mu_l \beta_l},$$

нижние индексы  $j=1,2,3$  относятся к параметрам соответственно первой, второй и третьей областей.

Поскольку в рассматриваемой задаче перепады температур в пласте незначительны ( $\Delta T \ll T_0$ ), то в уравнении пьезопроводности отброшено слагаемое, отвечающее за переменность температуры.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$t = 0: \quad S_w = S_{w0}, \quad T = T_0, \quad p = p_0 \quad (x \geq 0).$$

$$x = 0: \quad T = T_e, \quad p = p_e \quad (t > 0). \quad (10)$$

### Автомодельное решение

Введем автомодельную переменную:  $\xi = x / \sqrt{\chi^{(T)} t}$ . Для этой переменной уравнения пьезопроводности и температуропроводности (8), (9) в каждой области примут вид

$$-\xi \frac{dp_{(j)}}{d\xi} = 2\eta_{(j)} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dp_{(j)}}{d\xi} \right); \quad (11)$$

$$-\xi \frac{dT_{(j)}}{d\xi} = \alpha_{(j)} \frac{dp_{(j)}}{d\xi} \frac{dT_{(j)}}{d\xi} + 2 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dT_{(j)}}{d\xi} \right), \quad (12)$$

где  $\eta_{(j)} = \chi_{(j)}^{(p)} / \chi^{(T)}$ .

После интегрирования (11), (12) с учетом начальных и граничных условий (10) решения для распределения давления и температуры в каждой из областей могут быть записаны в виде

$$p_{(1)} = p_{(n)} + \frac{(p_e - p_{(n)}) I(\xi, \xi_{(n)}; \eta_{(1)})}{I(0, \xi_{(n)}; \eta_{(1)})}, \quad T_{(1)} = T_{(n)} + \frac{(T_e - T_{(n)}) J_{(1)}(\xi, \xi_{(n)})}{J_{(1)}(0, \xi_{(n)})}; \quad (13)$$

$$p_{(2)} = p_{(d)} + \frac{(p_{(n)} - p_{(d)}) I(\xi, \xi_{(d)}; \eta_{(2)})}{I(\xi_{(n)}, \xi_{(d)}; \eta_{(2)})}, \quad T_{(2)} = T_{(d)} + \frac{(T_{(n)} - T_{(d)}) J_{(2)}(\xi, \xi_{(d)})}{J_{(2)}(\xi_{(n)}, \xi_{(d)})}; \quad (14)$$

$$p_{(3)} = p_0 + \frac{(p_{(d)} - p_0) I(\xi, \infty; \eta_{(3)})}{I(\xi_{(d)}, \infty; \eta_{(3)})}, \quad T_{(3)} = T_0 + \frac{(T_{(d)} - T_0) J_{(3)}(\xi, \infty)}{J_{(3)}(\xi_{(d)}, \infty)}, \quad (15)$$

где введены обозначения интегралов:

$$I(a, b; c) = \int_a^b \exp\left(-\frac{\xi^2}{4c}\right) d\xi; \quad J_{(j)}(a, b) = \int_a^b \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \alpha_{(j)} p_{(j)}\right) d\xi;$$

$p_{(n)}$  и  $T_{(n)}$  – давление и температура на границе между первой и второй областями;  
 $p_{(d)}$  и  $T_{(d)}$  – давление и температура на границе между второй и третьей областями.

На основе соотношений (2), (4) с учетом решений (13), (14) получим уравнения для определения координаты фронта гидратообразования  $\xi_{(n)}$  и значений параметров на нем:

$$k_{s(2)} \frac{(p_{(d)} - p_{(n)}) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4\eta_{(2)}}\right)}{I(\xi_{(n)}, \xi_{(d)}; \eta_{(2)})} - k_{s(1)} \frac{(p_{(n)} - p_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4\eta_{(1)}}\right)}{I(0, \xi_{(n)}; \eta_{(1)})} = K S_h \xi_{(n)}; \quad (16)$$

$$\frac{(T_{(n)} - T_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4} - \alpha_{(1)} p_{(1)}\right)}{J_{(1)}(0, \xi_{(n)}) \xi} - \frac{(T_{(d)} - T_{(n)}) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4} - \alpha_{(2)} p_{(2)}\right)}{J_{(2)}(\xi_{(n)}, \xi_{(d)})} = \frac{m \rho_h L_h S_h \xi_{(n)}}{2\rho c}; \quad (17)$$

$$T_{(n)} = T_Q, \quad (18)$$

где  $K = m \mu_s \chi^{(T)} \left( \frac{\rho_h G}{\rho_{s0}} + \frac{\rho_h (1-G)}{\rho_w} - 1 \right)$ .

Аналогично на основе соотношений (5) – (7) с учетом решений (14) и (15) получим систему уравнений для определения координаты фронта вытеснения нефти сероводородом  $\xi_{(d)}$  и значений параметров на нем:

$$k_{s(2)} \frac{(p_{(n)} - p_{(d)}) \exp\left(-\frac{\xi_{(d)}^2}{4\eta_{(2)}}\right)}{I(\xi_{(n)}, \xi_{(d)}; \eta_{(2)})} = m \mu_s \chi^{(T)} (1 - S_{w0}) \xi_{(d)}; \quad (19)$$

$$k_l \frac{(p_{(d)} - p_0) \exp\left(-\frac{\xi_{(d)}^2}{4\eta_{(3)}}\right)}{I(\xi_{(d)}, \infty; \eta_{(2)})} = m \mu_l \chi^{(T)} (1 - S_{w0}) \xi_{(d)}; \quad (20)$$

$$\frac{(T_{(d)} - T_{(n)}) \exp\left(-\frac{\xi_{(d)}^2}{4} - \alpha_{(2)} p_{(d)}\right)}{J_{(2)}(\xi_{(n)}, \xi_{(d)})} - \frac{(T_0 - T_{(d)}) \exp\left(-\frac{\xi_{(d)}^2}{4} - \alpha_{(3)} p_{(d)}\right)}{J_{(3)}(\xi_{(d)}, \infty)} = 0. \quad (21)$$

Система граничных уравнений (16) – (21) в работе решена следующим образом. Вначале задается нулевое приближение искомых величин на фронте гидратообразования. Далее, решая уравнение (19), находим величину  $p_{(d)}$  (как функцию  $\xi_{(d)}$ ), подставляя которую в уравнение (20) получим трансцендентное уравнение для нахождения  $\xi_{(d)}$ . Решив данное уравнение (методом половинного деления),

определим величину  $\xi_{(d)}$  (и соответственно  $p_{(d)}$ ), а затем из (21) определяем  $T_{(d)}$ . Далее, подставляя (18) в уравнение (17), получим трансцендентное уравнение для нахождения  $\xi_{(n)}$ . Решая данное уравнение (методом половинного деления), определяем новое приближение величины  $\xi_{(n)}$ . Затем, решая уравнение (16), находим новое приближение величины  $p_{(n)}$ . В результате циклического повторения описанной итерационной процедуры получаем последовательность приближенных значений, которая сходится к искомым значениям граничных параметров.

### Результаты расчетов

На рис. 3 приведены распределения температуры и давления в зависимости от автомодельных переменных. Здесь и далее, если не оговорено иное, для параметров, характеризующих систему, приняты следующие значения:  $m = 0,1$ ,  $S_{w0} = 0,2$ ,  $p_e = 8,6$  МПа,  $T_e = 290$  К,  $p_0 = 8$  МПа,  $T_0 = 305$  К,  $k_0 = 10^{-11}$  м<sup>2</sup>,  $G = 0,24$ ,  $\beta_l = 1 \cdot 10^{-9}$  Па<sup>-1</sup>,  $\beta_s = 3 \cdot 10^{-9}$  Па<sup>-1</sup>,  $\lambda = 2$  Вт/(м·К),  $\rho c = 2 \cdot 10^6$  Дж/(К·кг),  $\mu_l = 2 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\mu_s = 2 \cdot 10^{-4}$  Па·с,  $\rho_h = 1003$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{0l} = 900$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{0s} = 890$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_l = 1900$  Дж/(К·кг),  $c_s = 1800$  Дж/(К·кг),  $L_h = 4,1 \cdot 10^5$  Дж/кг.

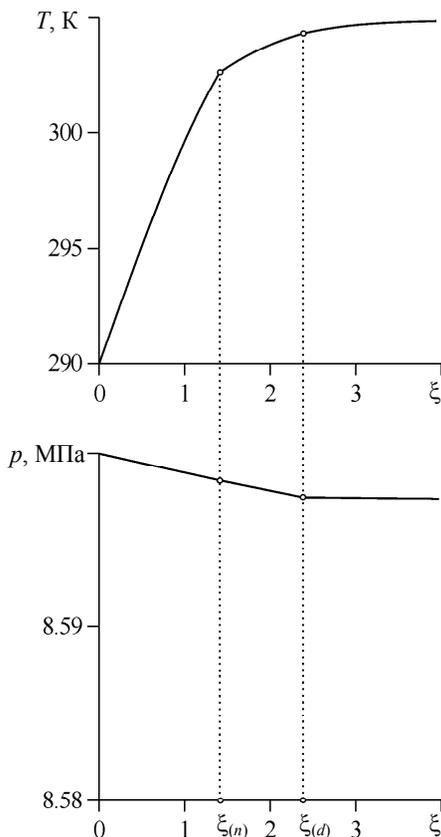


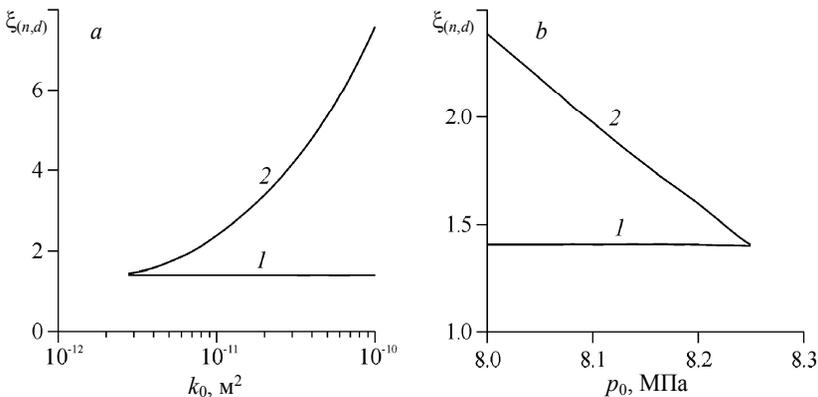
Рис. 3. Распределения температуры и давления  
 Fig. 3. Temperature and pressure distributions

Рис. 3 показывает, что перераспределение давления в пласте происходит значительно быстрее изменения температуры. Это обусловлено тем, что величина коэффициента пьезопроводности  $\chi^{(p)} = \frac{k}{\mu \tau \beta}$  значительно превышает величину

коэффициента температуропроводности  $\chi^{(T)} = \frac{\lambda}{\rho c}$ . Кроме того, согласно рис. 3,

граница образования газогидрата движется очень медленно. Это обусловлено тем, что процесс образования газогидрата сопровождается выделением тепла, а температура на фронте гидратообразования не должна превышать температуру квадрупольной точки  $T_Q$ . Поэтому движение границы образования газогидрата лимитируется скоростью отвода выделяющейся энергии, которая оттекает от фронта фазовых переходов в основном за счет теплопроводности в пласте. Вследствие того, что процесс образования газогидрата сопровождается выделением тепла, градиент температуры на ближней границе фазовых переходов согласно рис. 3 терпит разрыв.

На рис. 4 приведены зависимости координат фронтов образования газогидрата  $H_2S$  (кривая 1) и вытеснения нефти жидким сероводородом (кривая 2) от проницаемости пласта ( $a$ ) и его начального давления ( $b$ ). Из рис. 4 видно, что скорость фронта образования газогидрата  $H_2S$  практически не зависит от начального давления пласта и его проницаемости. Это обусловлено тем, что скорость данного фронта лимитируется, прежде всего, отводом тепла, выделяющегося при образовании газогидрата  $H_2S$ . Также согласно рис. 4, скорость фронта вытеснения нефти сероводородом снижается с увеличением начального давления пласта и уменьшением его проницаемости. Это обусловлено тем, что скорость фронта вытеснения нефти сероводородом лимитируется скоростью течения в пласте, которая согласно закону Дарси пропорциональна перепаду давления в пласте и его проницаемости.

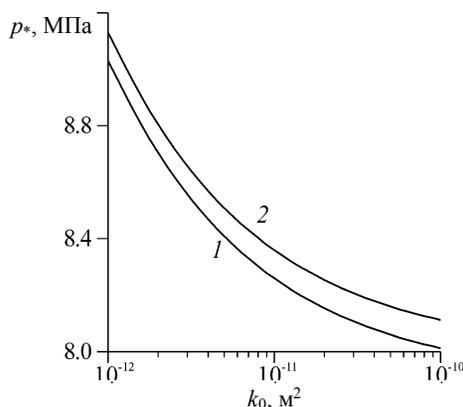


**Рис. 4.** Зависимость координат границ образования газогидрата  $H_2S$  (кр. 1) и вытеснения нефти сероводородом (кр. 2) от проницаемости пласта ( $a$ ) и начального давления ( $b$ )

**Fig. 4.** Coordinates of the boundaries of  $H_2S$  gas hydrate formation (curve 1) and displacement of oil by hydrogen sulfide (curve 2) as functions of ( $a$ ) permeability of the reservoir and ( $b$ ) initial pressure

Также видно, что при достаточно больших значениях исходного давления пласта и его проницаемости происходит слияние фронтов. В этом случае режим, при котором гидратообразование происходит на фронтальной границе, а фронт вытеснения нефти сероводородом опережает данную границу, переходит в режим, при котором образование газогидрата сероводорода происходит на фронтальной границе, совпадающей с границей вытеснения нефти жидким сероводородом.

Рассматриваемый в данной работе режим реализуется в том случае, когда скорость фронта вытеснения нефти сероводородом (лимитируемая скоростью течения в пласте) превышает скорость фронта гидратообразования. Поэтому существует некоторое критическое значение давления инжекции сероводорода, ниже которого происходит слияние границ. На рис. 5 приведены зависимости величины данного давления от проницаемости при разных значениях исходного давления пласта  $p_0 = 7.9$  МПа (кривая 1) и  $p_0 = 8$  МПа (кривая 2).



**Рис. 5.** Зависимость предельного давления от проницаемости пласта при  $p_0 = 7.9$  МПа (кривая 1) и  $p_0 = 8$  МПа (кривая 2)

**Fig. 5.** Limiting pressure as a function of permeability of the reservoir at  $p_0 = (1) 7.9$  and (2) 8 МПа

Согласно рис. 5, с увеличением проницаемости пласта и уменьшением его начального давления критическое значение давления снижается. Это обусловлено тем, что с увеличением проницаемости и уменьшением начального давления пласта увеличивается интенсивность массопереноса в пласте и соответственно возрастает скорость фронта вытеснения нефти сероводородом. Поэтому в этом случае данный фронт опережает границу образования газогидрата  $H_2S$  даже при малых значениях давления инжекции сероводорода.

### Заключение

Предложена математическая модель закачки жидкого сероводорода в пласт, насыщенный нефтью и водой, сопровождающейся образованием газогидрата сероводорода. Рассмотрен случай, когда фронт вытеснения нефти сероводородом опережает фронт образования газогидрата  $H_2S$ . Результаты расчетов показали, что скорость фронта вытеснения нефти сероводородом снижается с увеличением начального давления пласта и уменьшением его проницаемости. Поэтому при достаточно больших значениях исходного давления пласта и его проницаемости

может происходить слияние фронтов образования газогидрата  $H_2S$  и вытеснения нефти сероводородом. Получена зависимость критического значения давления инъекции сероводорода, ниже которого происходит слияние фронтов, от проницаемости пласта. Установлено, что с увеличением проницаемости пласта и уменьшением его начального давления критическое значение давления снижается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Machel H.G.* Geological and hydrogeological evaluation of the Nisku Q-Pool in Alberta, Canada, for  $H_2S$  and/or  $CO_2$  storage // *Oil Gas Sci. Technol.* 2005. V. 60. P. 51–65. DOI: 10.2516/ogst:2005005.
2. *Xu T., Apps J. A., Pruess K. and Yamamoto H.* Numerical modeling of injection and mineral trapping of  $CO_2$  with  $H_2S$  and  $SO_2$  in a sandstone formation // *Chem. Geology.* 2007. V. 24. No 3–4. P. 319–346. DOI: 10.1016/j.chemgeo.2007.03.022.
3. *Дучков А.Д., Соколова Л.С., Аюнов Д.Е., Пермяков М.Е.* Оценка возможности захоронения углекислого газа в криолитозоне Западной Сибири // *Криосфера Земли.* 2009. Т. 13. № 4. С. 62–68.
4. *Чувиллин Е.М., Гурьева О.М.* Экспериментальное изучение образования гидратов  $CO_2$  в поровом пространстве промерзающих и мерзлых пород // *Криосфера Земли.* 2009. Т. 13. № 3. С. 70–79.
5. *Бык С.Ш., Макогон Ю.Ф., Фомина В.И.* Газовые гидраты. М.: Химия, 1980.
6. *Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Хасанов М.К.* К теории образования газогидрата в частично водонасыщенной пористой среде при нагнетании метана // *Теплофизика высоких температур.* 2016. Т. 54. № 6. С. 911–920. DOI: 10.1134/S0018151X16060171.
7. *Гималдинов И.К., Хасанов М.К.* Математическая модель образования газогидрата при инъекции газа в пласт, частично насыщенный льдом // *Прикладная математика и механика.* 2016. Т. 80. № 1. С. 80–90. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2016.05.009.
8. *Хасанов М.К.* Инъекция жидкого сероводорода в пласт, насыщенный нефтью и водой // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика.* 2017. Т. 3. № 2. С. 72–84. DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-2-72-84.
9. *Хасанов М.К.* Математическая модель инъекции сероводорода в пористую среду, насыщенную нефтью и водой // *Изв. ТулГУ. Технические науки.* 2017. Вып. 9. Ч. 1. С. 337–345.
10. *Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G., Ngoc Hai Duong* Theoretical research of the gas hydrate deposits development using the injection of carbon dioxide // *International J. Heat and Mass Transfer.* 2017. V. 107. P. 347–357. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.034.

Статья поступила 06.02.2108 г.

Khasanov M.K. (2018) MATHEMATICAL MODEL OF HYDROGEN SULFIDE INJECTION INTO A NATURAL RESERVOIR ACCOMPANIED BY ITS HYDRATE FORMATION *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 113–123

DOI 10.17223/19988621/55/10

Keywords: mathematical model, self-similar solution, porous medium, filtration, gas hydrates, hydrogen sulfide.

Based on the equations of mechanics of multiphase media, a mathematical model of liquid hydrogen sulfide injection into a porous formation saturated with oil and water is developed. To describe the processes of heat and mass transfer in the porous medium, the combined equations including mass and energy conservation laws, Darcy's law, and the equation of state are used.

Self-similar solutions to the problem, in which three characteristic areas are formed in the reservoir, are obtained. In the first area (the nearest region), the porous are saturated with liquid hydrogen sulfide and its hydrate; in the second area (intermediate region), there is water and liquid hydrogen sulfide; and in the third area (distant region), the porous are saturated with oil and water.

Self-similar coordinates of the interphase borders are studied as functions of permeability of the reservoir and its initial pressure. It is established that increase in the initial pressure of the reservoir and decrease in its permeability cause a decrease in the velocity of oil displacement by hydrogen sulfide. It is shown that in conditions of low permeability of the reservoir and high initial pressure, the merge of interphase boundaries could happen. The dependences of critical values of injection pressure, corresponding to a merge of interphase boundaries, on the permeability of the reservoir and its initial pressure are found.

*KHASANOV Marat Kamilovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation). E-mail: hasanovmk@mail.ru

#### REFERENCES

1. Machel H.G. (2005) Geological and hydrogeological evaluation of the Nisku Q-Pool in Alberta, Canada, for H<sub>2</sub>S and/or CO<sub>2</sub> storage. *Oil Gas Sci. Technol.* 60. pp. 51–65. DOI: 10.2516/ogst:2005005.
2. Xu T., Apps J.A., Pruess K., Yamamoto H. (2007) Numerical modeling of injection and mineral trapping of CO<sub>2</sub> with H<sub>2</sub>S and SO<sub>2</sub> in a sandstone formation. *Chemical Geology.* 24(3-4). pp. 319–346. DOI: 10.1016/j.chemgeo.2007.03.022.
3. Duchkov A.D., Sokolova L.S., Ayunov D.E., Permyakov M.E. (2009) Otsenka vozmozhnosti zakhroneniya uglekislogo gaza v kriolitozone Zapadnoy Sibiri [Assesment of potential of West Siberian permafrost for the carbon dioxide storage]. *Kriosfera Zemli – Earth's Cryosphere.* 13(4). pp. 62–68.
4. Chuvilin E.M., Guryeva O.M. (2009) Eksperimental'noe izuchenie obrazovaniya gidratov CO<sub>2</sub> v porovom prostranstve promerzayushchikh i merzlykh porod [Experimental investigation of CO<sub>2</sub> gas hydrate formation in porous media of frozen and freezing sediments]. *Kriosfera Zemli – Earth's Cryosphere.* 13(3). pp. 70–79.
5. Byk S.Sh., Makogon Yu.F., Fomina V.I. (1980) *Gazovye gidraty* [Gas hydrates]. Moscow: Khimiya.
6. Shagapov V.Sh., Rafikova G.R., Khasanov M.K. (2016) On the theory of formation of gas hydrate in partially water-saturated porous medium when injecting methane. *High Temperature.* 54(6). pp. 858–866. DOI: 10.1134/S0018151X16060171.
7. Gimaltdinov I.K., Khasanov M.K. (2016) Mathematical model of the formation of a gas hydrate on the injection of gas into a stratum partially saturated with ice. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 80(1). pp. 57–64. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2016.05.009.
8. Khasanov M.K. (2017) Inzhektiysiya zhidkogo serovodoroda v plast, nasyshchennyy nef'tyu i vodoy [Injection of liquid hydrogen sulfide in a layer saturated with oil and water]. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft', gaz, energetika – Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy.* 3(2). pp. 72–84. DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-2-72-84.
9. Khasanov M.K. (2017) Matematicheskaya model' inzhektitsii serovodoroda v poristuyu sredu, nasyshchennuyu nef'tyu i vodoy [Mathematical model of hydrogen sulfide injection into a porous medium saturated with oil and water]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta – Izvestiya Tula State University.* 9. pp. 337–345.
10. Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G., Ngoc Hai Duong (2017) Theoretical research of the gas hydrate deposits development using the injection of carbon dioxide. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 107. pp. 347–357. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.034.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АГАФОНЦЕВ Михаил Владимирович** – инженер, аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: kim75mva@gmail.com

**АНУФРИЕВ Игорь Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск. E-mail: anufriev@itp.nsc.ru

**ВОРОЖЦОВ Александр Борисович** – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: abv1953@mail.ru

**ВЯЧКИН Евгений Сергеевич** – старший преподаватель Новокузнецкого филиала (института) Кемеровского государственного университета, г. Новокузнецк. E-mail: viachkine@mail.ru

**ВЯЧКИНА Елена Александровна** – кандидат физико-математических наук, доцент, Новокузнецкий филиал (институт) Кемеровского государственного университета, г. Новокузнецк. E-mail: SedovaEA@yandex.ru

**ГИЛЕВА Анна Евгеньевна** – аспирантка Новокузнецкого филиала (института) Кемеровского государственного университета, г. Новокузнецк. E-mail: anna310591@yandex.ru

**ДАНИЛОВ Павел Александрович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: padanilov@gmail.com

**ЖУКОВ Илья Александрович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: gofra930@gmail.com

**ЗАБАРИНА Анна Ивановна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Томского государственного педагогического университета, г. Томск. E-mail: aizabarina@gmail.com

**ЗАДОРЖНАЯ Ольга Владимировна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры и анализа Калмыцкого государственного университета им. Б.Б. Городовикова, г. Элиста. E-mail: ovz\_70@mail.ru

**КАЛЕДИН Валерий Олегович** – доктор технических наук, заведующий лабораторией Новокузнецкого филиала (института) Кемеровского государственного университета, г. Новокузнецк. E-mail: vkaled@mail.ru

**КВЕТИНСКАЯ Алеся Владимировна** – секретарь-референт, Министерство образования и науки Российской Федерации, г. Москва. E-mail: ep.alessya.kvetinskaya@gmail.com

**КОПЬЕВ Евгений Павлович** – инженер-исследователь, аспирант Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск. E-mail: kopyev.evgeniy@mail.ru

**КОЧЕТКОВ Владимир Константинович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и анализа Калмыцкого государственного университета им. Б.Б. Городовикова, г. Элиста. E-mail: kvk1106@mail.ru

**КРУТИКОВ Владимир Николаевич** – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Кемеровского государственного университета. E-mail: krutikovvn@rambler.ru

**ЛОБОДА Егор Леонидович** – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: loboda@mail.tsu.ru

**ЛУЦЕНКО Анастасия Владимировна** – студентка механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: loboda@mail.tsu.ru

**МАТВИЕНКО Олег Викторович** – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного архитектурно-строительного университета, г. Томск. E-mail: matvolegv@mail.ru

**ПИКУЩАК Елизавета Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: liza@ftf.tsu.ru

**ПРОМАХОВ Владимир Васильевич** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: vvpromakhov@mail.ru

**РЕШЕТНИКОВА Елена Васильевна** – кандидат технических наук, заведующая кафедрой Новокузнецкого филиала (института) Кемеровского государственного университета, г. Новокузнецк. E-mail: elenares@yandex.ru

**САМОЙЛЕНКО Наталья Сергеевна** – аспирант кафедры прикладной математики Кемеровского государственного университета, г. Кемерово. E-mail: nostienataly@mail.ru

**ТИМОШЕНКО Егор Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

**УРИНОВ Ахмаджон Кушакович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Ферганского государственного университета, г. Фергана, Узбекистан. E-mail: urinovak@mail.ru

**ФОМИНА Елена Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета. E-mail: ef254@mail.ru

**ХАСАНОВ Марат Камилевич** – кандидат физико-математических наук, доцент Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак. E-mail: hasanovmk@mail.ru

**ХМЕЛЁВА Марина Григорьевна** – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: khmelmg@gmail.com

**ХРУСТАЛЁВ Антон Павлович** – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: tofik0014@mail.ru

**ШАДРИН Евгений Юрьевич** – инженер-исследователь, аспирант Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск. E-mail: evgen\_zavita@mail.ru

**ЭРГАШЕВ Тухтасин Гуламанович** – кандидат физико-математических наук, докторант Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен  
**ООО «Издательство научно-технической литературы»**  
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*  
Верстка *Д.В. Фортеса*

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.  
Подписано к печати 15.06.2018. Выпуск в свет **31.10.2018**.  
Формат 70 × 100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 10.16. Уч.-изд. л. 11.38. Тираж 250 экз. Заказ № 25. Цена свободная.

---

Отпечатано на оборудовании  
**Издательского Дома Томского государственного университета,**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. **Заказ № ???**.  
<http://publish.tsu.ru> E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)