

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2014

№ 5(31)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербakov Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики).

**THE EDITORIAL BOARD OF TOMSK STATE UNIVERSITY JOURNAL
OF MATHEMATICS AND MECHANICS**

Glazunov A.A., Dokt. of Phys. and Math., Prof. (Editor-in-Chief); Gul'ko S.P., Dokt. of Phys. and Math., Prof. (Deputy Editor-in-Chief); Lazareva E.G., Cand. of Phys. and Math., Assoc. Prof. (Executive Secretary under section Mathematics); Aleksandrov I.A., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Bertsun V.N., Cand. of Phys. and Math., Assoc. Prof.; Bimatov V.I., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Bubenchikov A.M., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Vasenin I.M., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Grishin A.M., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Ishchenko A.N., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Konev V.V., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Kraynov A.Yu., Dokt. of Phys. and Math.; Krylov P.A., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Pan'ko S.V., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Pergamenschikov S.M., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Sipacheva O.V., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Skripnyak V.A., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Starchenko A.V., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Shragер G.R., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Shragер E.R., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Shcherbakov N.R., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Khayrullina V.Yu., Cand. of Phys. and Math. (Executive Secretary under section Mechanics).

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 17.10.2014.
Формат 70 × 100¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10,0. Уч.-изд. л. 11,2. Тираж 300 экз. Заказ № 40.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ 623.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Александров И.А., Ежова О.И. Метод вариаций для отображений, представимых с помощью интегралов Стилтъяеса	5
Гриншпон С.Я., Мордовской А.К. Корректность абелевых групп без кручения и их определяемость своими подгруппами	16
Несмеев Ю.А. Алгоритм решения кубического уравнения	30
Пчелинцев В.А., Пчелинцев Е.А. Минимаксное оценивание гауссовской параметрической регрессии	40
Сорокин К.С. SP-группы ранга 2 с чистыми кольцами эндоморфизмов	48
Сухачева Е.С., Хмылева Т.Е. О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея	63

МЕХАНИКА

Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потекаев А.И., Усенко О.В., Шерстобитов А.А. Проницаемость туннеля из сферических наночастиц	69
Васенин И.М., Губанов С.М., Дурновцев М.И., Крайнов А.Ю., Чуканов М.В. Физико-математическое моделирование десублимации фтористого водорода из газовой смеси на стенке конденсатора	76
Золотарев В.Ю., Котляров Е.Ю., Финченко В.С., Тулин Д.В. Гибридная система терморегулирования посадочного лунного модуля на базе жидкостного контура с механическим насосом	83
Саблин М.Н., Никулина А.В., Коньков В.Ф., Маркелов В.А., Новиков В.В., Хохунова Т.Н. Обоснование использования труб направляющих каналов с гидротормозом из сплава Э635 для тепловыделяющих сборок легководных реакторов	94
Цыденов Б.О., Старченко А.В. Применение двухпараметрической $k - \omega$ -модели турбулентности для исследования явления термобара	104
Якутенок В.А., Пономарева М.А., Кузнецова А.Е. Моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости непрямым методом граничных элементов	114
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	123

CONTENTS

MATHEMATICS

Aleksandrov I.A., Ezhova O.I. Method of variations for maps representable by means of Stieltjes integrals	5
Grinshpon S.Ya., Mordovskoi A.K. Correctness of Abelian torsion-free groups and determinability of Abelian groups by their subgroups	16
Nesmeev Yu.A. An algorithm for solving cubic equations.....	30
Pchelintsev V.A., Pchelintsev E.A. Minimax estimation of the gaussian parametric regression	40
Sorokin K.S. Two-rank SP-groups with clean endomorphism rings	48
Sukhacheva E.S., Khmyleva T.E. On some linearly ordered topological spaces homeomorphic to the Sorgenfrey line	63

MECHANICS

Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Usenko O.V., Sherstobitov A.A. Permeability of the tunnel of spherical nanoparticles	69
Vasenin I.M., Gubanov S.M., Durnovtsev M.I., Krainov A.Yu., Chukanov M.V. Physico-mathematical modeling of fluoride hydrogen desublimation from gas mixtures onto walls of a condenser	76
Zolotarev V.Yu., Kotlyarov E.Yu., Finchenko V.S., Tulin D.V. Multipurpose hybrid thermal control system of lunar lander based on a pumped fluid loop.....	83
Sablin M.N., Nikulina A.V., Markelov V.A., Kon'kov V.F., Novikov V.V., Khokhunova T.N. Justification for applying of guide thimbles with hydraulic brake made from E635 alloy for fuel assembly from light water reactors.....	94
Tsydenov B.O., Starchenko A.V. Application of the two-parametric $k-\omega$ turbulence model for studying the thermal bar phenomenon	104
Yakutenok V.A., Ponomareva M.A., Kuznetsova A.E. Modeling of axisymmetric viscous flows of incompressible fluid by the boundary element method	114
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	123

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

И.А. Александров, О.И. Ежова

МЕТОД ВАРИАЦИЙ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ СТИЛТЬЕСА

В исследованиях свойств классов аналитических функций и в задачах нахождения экстремумов функционалов на таких классах используются соответствующие вариационные формулы. В данной работе они находятся для классов функций, представимых интегралами Стильтьеса или некоторыми комбинациями таких интегралов. Даны вариационные формулы для классов голоморфных функций с положительной вещественной частью в круге. На их основе получены вариационные формулы для звездных выпуклых однолистных отображений. Получены две вариационные формулы для голоморфных в круговом кольце функций, имеющих в нем положительную вещественную часть.

Ключевые слова: интеграл Стильтьеса, классы голоморфных функций, вариационные формулы.

Имеются классы аналитических функций, в которых функции представляются выражениями, содержащими интегралы Стильтьеса. О таких классах говорят, что они имеют структурную формулу. Г.М. Голузин [1], исследуя экстремальные задачи для звездных отображений, предложил вывод двух удобных вариационных формул и привел примеры применения их к нахождению экстремальных функций для некоторых вещественных функционалов. Во многих других экстремальных задачах завершение исследования встречается с необходимостью определять значения неизвестных постоянных, что составляет индивидуальную трудность в каждой конкретной задаче. Во многих случаях найдены способы преодоления таких трудностей, позволившие получить полное решение экстремальной конкретной задачи с указанием экстремальных функций [2–4]. В работе даются еще две вариационные формулы для классов функций, представимых интегралом Стильтьеса с непрерывно дифференцируемым ядром, усиливающие результаты Н.А. Лебедева и И.А. Александрова [5]. Применение этих формул позволяет записать необходимые условия в форме уравнений и неравенств для экстремальных функций в задачах об областях значений функционалов, а также систем функционалов на рассматриваемом классе функций.

1. Некоторые классы функций, представимые интегралом Стильтьеса

Класс C – множество функций

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

голоморфных в круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и имеющих в нем положительную вещественную часть. Рисс и Герглотц доказали, что для принадлежности функции $p(z)$ классу C необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление интегралом Стильтеса

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it} z}{1 - e^{it} z} d\mu(t), \quad (1)$$

где $\mu(t)$ – вещественная функция, не убывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ и такая, что $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$.

Подкласс $C_r \subset C$ функций $p_r(z)$ с вещественными коэффициентами имеет интегральное представление

$$p_r(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos t + z^2} d\mu(t)$$

и связан с классом T_r типично вещественных функций формулой $zp(z) = (1 - z^2)q(z)$, $p_r(z) \in C_r$, $q(z) \in T_r$. Функция $q(z) \in T_r$ вещественна на промежутке $(-1, 1)$, а в остальных точках круга E удовлетворяет условию $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} q(z) > 0$.

Класс S^* – множество функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

голоморфных, однолистных в круге E , конформно отображающих этот круг и таких, что область $D = f(E)$ звездна относительно нуля. Отрезок с концами в точках $0, w_0 \in D$ в силу звездности D лежит в D . Легко видеть, что область $D_r = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z), |z| < r\}$, $0 < r < 1$, звездна относительно нуля. Действительно, ее граница является замкнутой аналитической кривой $L(f, r) = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z), |z| = r\}$ с параметрическим уравнением $w = f(re^{i\varphi})$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Точке $w_0 \in D_r$ соответствует в круге $E_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, точка $z_0 = f^{-1}(w_0)$. Прообразом отрезка $k = \{w \in \mathbb{C} : w = tw_0\}$, $0 \leq t \leq 1$, в круге E является кривая $l = \{z \in E, z = f^{-1}(tw_0)\}$, $0 \leq t \leq 1$.

Функция $\psi(z) = f^{-1}(f(z))$ удовлетворяет в круге E условиям леммы Шварца, и поэтому $|\psi(z)| = |z|$. Из неравенства $|f^{-1}(tw_0)| \leq |z_0|$ следует, что прообраз отрезка k лежит в области E_r . Значит область D_r звездна относительно нуля.

Вектор с началом в точке $w=0$ и с концом в точке $f(re^{i\varphi})$, $f(z) \in S^*$, при фиксированном $r \in (0, 1)$ и при возрастании φ от 0 до 2π поворачивается против хода часовой стрелки, и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f(re^{i\varphi}) = \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln f(re^{i\varphi}) = \operatorname{Re} \left(\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} re^{i\varphi} \right) \geq 0.$$

Итак, если $f(z) \in S^*$, то функция $zf'(z)/f(z)$ принадлежит классу C .

Пусть $p(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots \in C$. Для нахождения голоморфного в E решения уравнения

$$\frac{zw'}{w} = p(z), \quad w(0) = 0,$$

имеющего особенность в точке $z = 0$, представим это уравнение в виде

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{w}{z} = \frac{p(z)-1}{z}, \quad w(0) = 0.$$

Интегрируя его по любой простой дуге, соединяющей точку 0 с точкой $z \in E$, получаем при $w'(0) = 1$ решение

$$w(z) = ze^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz},$$

являющееся, как легко проверить, функцией класса S^* . С помощью формулы (1) и простых преобразований находим, что формула

$$f(z) = ze^{-2 \int_0^{2\pi} \ln(1-e^{-it}z) d\mu(t)} \quad (2)$$

дает структурное представление класса S^* интегралом Стильеса.

Класс S^0 – множество функций

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

голоморфных, однолистных в круге E , конформно отображающих этот круг и таких, что область $D = g(E)$ выпукла. Отрезок с концами в точках $z_1, z_2 \in D$ в силу выпуклости D лежит в D . Убедимся, что область $D_r = \{w \in \mathbb{C} : w = g(z), |z| < r\}$, $0 < r < 1$, выпукла. Пусть w_1, w_2 – различные точки области D_r . Тогда отрезок $k = \{w \in \mathbb{C} : w = tw_1 + (1-t)w_2\}$, $0 \leq t \leq 1$, лежит в D . Обозначим через z_1, z_2 точки, отображаемые функцией $g(z)$ в w_1, w_2 соответственно. Очевидно, $z_k \in E_r$, $k = 1, 2$. Будем считать, что $|z_1| \leq |z_2|$. Функция

$$G(z) = t g\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1-t)g(z)$$

голоморфна в E при любом $t \in [0, 1]$. К функции $\psi(z) = g^{-1}(G(z))$ применима лемма Шварца. Неравенство $|\psi(z)| \leq |z|$, $z \in E$, дает при $z = z_2$

$$\left|g^{-1}(tg(z_1) + (1-t)g(z_2))\right| \leq |z_2| < r.$$

Значит, прообраз отрезка k лежит в E_r и, следовательно, область $g(E_r)$ выпукла.

Касательная к линии $L(g, r)$, являющейся границей области D_r , в точке $g(re^{i\varphi})$ образует с вещественной осью угол

$$\tau = \varphi + \frac{\pi}{2} + \arg g'(re^{i\varphi}).$$

При возрастании φ от 0 до 2π эта касательная вращается против хода часовой стрелки. Поэтому

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \operatorname{Re} \left(\frac{g''(re^{i\varphi})}{g'(re^{i\varphi})} \right) + 1 \geq 0.$$

Таким образом, если $g(z) \in S^0$, то

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1 \right) \geq 0, \quad z \in E, \quad (3)$$

и, следовательно, существует функция $p(z) \in C$, такая, что

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} = p(z) - 1.$$

Пусть $p(z) \in C$. Интегрируя уравнение

$$\frac{zw''}{w'} = p(z) - 1, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1,$$

получаем функцию $w(z) = \int_0^z e^{\int_0^{\zeta} \frac{p(\zeta)-1}{\zeta} d\zeta} dz$, (4)

которая, как легко проверить, принадлежит классу S^0 . Значит, формула (3) выражает необходимое и достаточное условие принадлежности функции $g(z)$ классу S^0 . С помощью формулы (1) приходим к представлению класса S^0 интегралом

$$g(z) = \int_0^z e^{-2 \int_0^{\zeta} \ln(1-e^{-it}\zeta) d\mu(t)} d\zeta.$$

Между классами S^* и S^0 формулой

$$g(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad f(z) = zg'(z),$$

где $g(z) \in S^0$, $f(z) \in S^*$, устанавливается взаимнооднозначное соответствие.

Класс $C(q,1)$ – множество голоморфных в кольце $E(q,1) = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$, $0 < q < 1$, функций $f(z)$, удовлетворяющих в нем условиям

$$\operatorname{Re} f(z) > 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi, \quad q < r < 1.$$

Этот класс представим [6] суммой интегралов Стильтеса

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} F(ze^{it}) d\mu_{1,f}(t) + \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{q}{z}e^{it}\right) d\mu_{2,f}(t) - 1, \quad (5)$$

где $\mu_{k,f}(t)$, $k=1,2$, – вещественная неубывающая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция и такая, что $\mu_{k,f}(\pi) - \mu_{k,f}(-\pi) = 1$ и

$$F(z) = \frac{1+z}{1-z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2q^{2k}z}{1-q^{2k}z} - \frac{2q^{2k}z^{-1}}{1-q^{2k}z^{-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1+q^{2k}z}{1-q^{2k}z}. \quad (6)$$

2. Вариационные формулы в классах C, C_r, T_r

Пусть $B \subset \mathbb{C}$ – область и K – некоторый класс голоморфных в области B функций. Если для любой функции $f(z) \in K$ и для любого достаточно малого по модулю вещественного числа h имеется функция $f_h(z) \in K$ вида

$$f_h(z) = f(z) + h\varphi_f(z) + o(z, h), \quad (7)$$

где $\varphi_f(z)$ – голоморфная в B функция и $o(z, h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно внутри B , то говорят, что (7) есть вариационная формула в классе K . Наличие в классе K вариационной формулы или нескольких вариационных формул, различающихся выбором $\varphi_f(z)$, а также ограничением в выборе знака числа h , облегчает решение экстремальных задач на классе K .

Структурные формулы в классах C, C_r, T_r и некоторых других классах функций имеют схожий вид. Вариационные формулы для них можно получить следующим образом.

Пусть $F(z, t)$ – функция, непрерывная в $B \times [a, b]$, $a < b$, и голоморфная по z в B при любом $t \in [a, b]$. Пусть $M[a, b]$ – класс вещественных функций $\mu(t)$, неубывающих на $[a, b]$ и таких, что $\mu(b) - \mu(a) = 1$. Обозначим через $\mathfrak{M}(F; a, b)$ класс функций

$$f(z) = \int_a^b F(z, t) d\mu_f(t), \quad z \in B, \quad \mu_f(t) \in M[a, b], \quad (8)$$

представимых посредством интеграла Стильеса. Функцию $F(z, t)$ называют ядром класса $\mathfrak{M}(F; a, b)$.

Почти невидны следующие утверждения:

- 1) $F(z, t) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ при любом фиксированном $t \in [a, b]$;
- 2) если $f_0(z)$ и $f_1(z)$ – функции класса $\mathfrak{M}(F; a, b)$ и $h, 0 \leq h \leq 1$, – постоянное число, то функция

$$f_h(z) = (1-h)f_0(z) + hf_1(z) \in \mathfrak{M}(F; a, b);$$

- 3) класс $\mathfrak{M}(F; a, b)$ равномерно ограничен внутри B , т.е. для любого замкнутого ограниченного множества $E \subset B$ существует число $M_E > 0$, такое, что для любой функции $f(z) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ имеем $|f(z)| \leq M_E, z \in E$;

4) функции класса $\mathfrak{M}(F; a, b)$ голоморфны в B , ибо интегральные суммы интеграла (8) голоморфны в B , а последовательность их, сходящаяся к интегралу, равномерно ограничена внутри B ;

5) любая сходящаяся в себе внутри B последовательность $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ функций $f_n(z) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ равномерно сходится внутри B к некоторой функции $f_0(z) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ (это следует из принципа выбора Хелли, теоремы Хелле о предельном переходе под знаком интеграла Стильеса и теоремы Витали);

- 6) класс $\mathfrak{M}(F; a, b)$ компактен и замкнут.

Из свойств 1) и 2) получаем простейшую вариационную формулу в классе $\mathfrak{M}(F; a, b)$:

$$f_h(z) = f(z) + h(F(z, t) - f(z)), \quad 0 \leq h \leq 1, \quad a \leq t \leq b. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть ядро $F(z,t)$ класса $\mathfrak{M}(F;a,b)$ имеет производную $F'(z,t)$, непрерывную в $B \times [a,b]$. Пусть $\delta > 0$ и $\eta(t)$ – непрерывная на $[a,b]$ вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{a-t}{\delta} \leq \pm \eta(t) \leq \frac{b-t}{\delta}, \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда в классе $\mathfrak{M}(F;a,b)$ имеет место вариационная формула

$$f_h(z) = f(z) + h \int_a^b F'(z,t) \eta(t) d\mu_f(t) + o(z,h). \quad (10)$$

Доказательство. Известно [7, с. 161], что если функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[a,b]$ и $a \leq \varphi(t) \leq b$ на $[a,b]$, то функция $f_*(z) = \int_a^b F(z, \varphi(t)) d\mu(t) \in \mathfrak{M}(F;a,b)$ при $\mu(t) \in M[a,b]$.

Положим здесь $\varphi(t) = t + h\eta(t)$ и $\mu(t) = \mu_f(t)$ и представим $F(z, \varphi(t))$ в виде

$$F(z, t + h\eta(t)) = F(z, t) + hF'(z, t)\eta(t) + o(z, h).$$

Остается выполнить подстановку в (10) и воспользоваться свойствами интеграла. Теорема доказана.

Заметим, что усиливая требования к дифференциальным свойствам функции $F(z,t)$, можно записать вариации второго и более высокого порядков.

Например, в классе C вариационная формула второго порядка имеет вид

$$f_h(z) = f(z) + h \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}z}{(1-e^{it}z)^2} \eta(t) d\mu_f(t) - h^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{2it}z}{(1-e^{it}z)^3} \eta^2(t) d\mu_f(t) + o(z, h^2).$$

Следствие. Если B – круг или круговое кольцо с центром в точке 0 , $a=0$, $b=2\pi$ и $F(z,t) = F(ze^{it})$, где $F(z)$ – функция, регулярная в B , то формула (10) примет вид

$$f_h(z) = f(z) + hz \frac{d}{dz} \int_0^{2\pi} F(z\xi) i\eta(t) d\mu_f(t) + o(z, h), \quad \xi = e^{it}. \quad (11)$$

Действительно, имеем $F'_t(z,t) = F'(ze^{it})ze^{it}$, $F'_z(z,t) = F'(ze^{it})e^{it}$. Значит,

$F'_t(z,t) = zF'(z,t)$. Остается воспользоваться формулой (10).

Теорема 2. В классе C имеет место вариационная формула

$$p_h(z) = p(z) + hz \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[A_k \frac{z+z_k}{z-z_k} (p(z) - p(z_k)) - \overline{A_k} \frac{1+z_kz}{1-\overline{z_k}z} (p(z) - \overline{p(z_k)}) \right] + iAp(z) \right\} + o(z, h), \quad (12)$$

где z_k , $k = 1, \dots, m$, $m = 1, 2, \dots$, – точки из круга E , A_k – произвольные комплексные постоянные, A – вещественная постоянная.

Доказательство. Напишем вариационную формулу (11) для ядра

$$F(z, t) = \frac{1 + ze^{it}}{1 - ze^{it}} :$$

$$p_h(z) = p(z) + hz \frac{d}{dz} \int_0^{2\pi} \frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} i\eta(t) d\mu_p(t) + o(z, h), \quad \xi = e^{it}, \quad (13)$$

и положим в ней

$$\eta(t) = -2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^m A_k \frac{1 + z_k \xi}{1 - z_k \xi} + A = -i \sum_{k=1}^m \left(A_k \frac{1 + z_k \xi}{1 - z_k \xi} + \overline{A_k} \frac{1 + z_k^{-1} \xi}{1 - z_k^{-1} \xi} \right) + A.$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1 + z\xi_k}{1 - z\xi_k} = \frac{1 + a\xi}{1 - a\xi} = \frac{z + a}{z - a} \left(\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} - \frac{1 + a\xi}{1 - a\xi} \right) + 1 \quad (14)$$

и при $a = z_k$ и $a = z_k^{-1}$ получим

$$\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} i\eta(t) = \sum_{k=1}^m \left[A_k \frac{z + z_k}{z - z_k} \left(\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} - \frac{1 + z_k \xi}{1 - z_k \xi} \right) - \overline{A_k} \frac{1 + \overline{z_k} z}{1 - \overline{z_k} z} \left(\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} - \frac{1 + z_k \xi}{1 - z_k \xi} \right) \right] + iA \frac{1 + z\xi}{1 - z\xi}.$$

Подставляя это выражение в (13), получим формулу (12), и теорема доказана.

Теоремы, аналогичные теореме 2, можно доказать для классов C_r, T_r . В качестве функции $\eta(t)$ можно взять мнимую часть какой-нибудь другой рациональной функции, голоморфной в \overline{E} , и записать соответствующие вариационные формулы.

Теорема 3. В классе C_r имеет место вариационная формула

$$p_{rh}(z) = p_r(z) + hz \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[\frac{A_k}{1 - z_k z} \left(z(1 - z_k^2) p_r(z) - z_k(1 - z^2) p_r(z_k) \right) + \frac{\overline{A_k}}{(1 - \overline{z_k} z)(z - z_k)} \left(z(1 - \overline{z_k}^2) p_r(z) - \overline{z_k}(1 - z^2) p_r(\overline{z_k}) \right) \right] + iA p_r(z) \right\} + o(z, h). \quad (15)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. В качестве $\eta(t)$ нужно взять функцию

$$\eta(t) = -i \sum_{k=1}^m \left(A_k F(z_k, t) + \overline{A_k} F(\overline{z_k}, t) \right) + A.$$

Функция $F(z, t)i\eta(t)$ преобразуется с помощью тождества (14). Теорема доказана.

Сравнивая ядро класса T_r с ядром класса C_r , сразу видим, что справедлива

Теорема 4. В классе T_r имеет место вариационная формула

$$q_h(z) = q(z) + h \frac{z^2}{1 - z^2} \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[A_k \frac{(1 - z_k^2)(1 - z^2)}{(1 - z_k z)(z - z_k)} (q(z) - q(z_k)) + \overline{A_k} \frac{(1 - \overline{z_k}^2)(1 - z^2)}{(1 - \overline{z_k} z)(z - z_k)} (q(z) - \overline{q(z_k)}) \right] + iA \frac{1 - z^2}{z^2} q(z) \right\} + o(z, h). \quad (16)$$

3. Вариационные формулы в классах функций, представимых с помощью интегралов Стильтьеса

Пусть $G(u_1, \dots, u_n)$, $n = 1, 2, \dots$, – функция, голоморфная по u_k , $|u_k| < \infty$, $k = 1, \dots, n$, и \mathfrak{N} – класс функций $f(z)$, представимых с помощью интегралов Стильтьеса формулой

$$f(z) = G(u_{1,f(z)}, \dots, u_{n,f(z)}), \quad u_{k,f(z)} \in \mathfrak{M}(F_k; a, b).$$

Легко видеть, что класс \mathfrak{N} равномерно ограничен внутри B . Отсюда и из принципа Монтеля следует компактность класса \mathfrak{N} , а из принципа выбора Хелли и теоремы Хелли следует его замкнутость.

Ради краткости записи для $f(z) \in \mathfrak{N}$ положим

$$G_{k,f(z)} = G'_{u_k}(u_{1,f(z)}, \dots, u_{n,f(z)}).$$

Легко видеть, что справедлива

Теорема 5. 1) Пусть $A_k, A_k \geq 0$, – постоянные, $a_k \leq t_k \leq b_k$. Пусть $F_k(z, t)$ имеет производную $F'_k(z, t)$. Тогда в классе \mathfrak{N} имеет место вариационная формула

$$f_h(z) = f(z) + h \sum_{k=1}^n A_k G_{k,f(z)} [F_k(z, t) - u_{k,f(z)}] + o(z, h), \quad 0 < h < 1. \quad (17)$$

2) Пусть $\delta > 0$ и $\eta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, – непрерывные на $[a_k, b_k]$ вещественные функции, удовлетворяющие условиям

$$\frac{a_k - t}{\delta} \leq \pm \eta_k(t) \leq \frac{b_k - t}{\delta}, \quad a_k \leq t \leq b_k,$$

A_k – вещественные постоянные. Тогда в классе \mathfrak{N} имеет место вариационная формула

$$f_h(z) = f(z) + h \sum_{k=1}^n A_k G_{k,f(z)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\partial}{\partial t} F_k(z, t) \eta_k(t) d\mu_{k,f}(t) + o(z, h). \quad (18)$$

Теорема 6. Пусть z_k , $k = 1, \dots, m$, $m = 1, 2, \dots$, – точки из кольца $E(q, 1)$, A_k – произвольные комплексные постоянные и A – вещественная постоянная. В классе $C(q, 1)$ имеет место вариационная формула

$$f_h(z) = f(z) + hz \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[A_k F\left(\frac{z_k}{z}\right) (f(z) - f(z_k)) + F\left(\frac{z_k z}{q}\right) \left(f(z) - f\left(\frac{q}{z_k}\right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \overline{A_k} F\left(\frac{1}{z_k z}\right) (f(z) + f(\overline{z_k})) + F\left(\frac{qz}{z_k}\right) \left(f(z) + f\left(\frac{q}{z_k}\right) \right) \right] + iAf(z) \right\} + o(z, h). \quad (19)$$

Доказательство. Опираясь на формулу (11), получаем вариационную формулу

$$f_h(z) = f(z) + hz \frac{d}{dz} \left\{ \int_0^{2\pi} F(z\xi) i\eta_1(t) d\mu_{1,f}(t) + \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{q}{z}\xi\right) i\eta_2(t) d\mu_{2,f}(t) \right\} + o(z, h), \\ \xi = e^{it}, \quad (20)$$

где полагаем

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \eta_2(t) = -2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^m A_k \left(F(z_k \xi) + F\left(\frac{q}{z_k} \xi\right) \right) + A = \\ &= i \sum_{k=1}^m \left\{ A_k \left(F(z_k \xi) - F\left(\frac{q}{z_k} \xi\right) \right) + \overline{A_k} \left(F\left(\frac{1}{z_k} \xi\right) - F\left(\frac{\overline{z_k}}{q} \xi\right) \right) \right\} + A. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $F(a) = F(\overline{a}) = -F\left(\frac{1}{a}\right)$. Интегралы в (20) вычисляем, пользуясь тождеством

$$\begin{aligned} F(z)[F(a) - F(b)] &= F\left(\frac{a}{z}\right)[F(z) - F(a)] - \\ &- F\left(\frac{b}{z}\right)[F(z) - F(b)] - 2[B(a) - B(b)] - 2\left[B\left(\frac{z}{a}\right) - B\left(\frac{z}{b}\right)\right], \end{aligned}$$

где

$$B(w) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2q^{2k} w}{1 - q^{2k} w} + \frac{2q^{2k} w^{-1}}{1 - q^{2k} w^{-1}} \right),$$

и тем, что $B(w^{-1}) = B(w)$, $F(w^{-1}) = F(w)$, $F(\overline{w}) = \overline{F(w)}$, $F(q^2 w) = F(w) + 2$. В результате получаем формулу (19).

4. Вариационные формулы в классах S^* , S^0

Теорема 7. В классе S^* имеет место вариационная формула

$$\begin{aligned} f_h(z) &= f(z) + hf(z) \sum_{k=1}^n \left\{ A_k \left[\frac{z + z_k}{z - z_k} \frac{zf'(z)}{f(z)} + 1 - \frac{z_k f'(z_k)}{f(z_k)} \frac{2z_k}{z - z_k} \right] - \right. \\ &\left. - A_k \left[\frac{1 + \overline{z_k} z}{1 - \overline{z_k} z} \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 + \frac{\overline{z_k} f'(z_k)}{f(z_k)} \frac{2z_k z}{1 - z_k z} \right] \right\} + ihA(zf'(z) - f(z)) + o(z, h). \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in S^*$. Тогда $zf'(z)/f(z) \in C$. Напишем формулу (13) для этой функции:

$$\frac{zf'_h(z)}{f_h(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)} + hz \frac{d}{dz} \varphi_f(z) + o(z, h), \quad (22)$$

где $\varphi_f(z)$ означает функцию, которую получим, если в выражении, стоящем в фигурных скобках формулы (12), заменим $p(z)$ и $p(z_k)$ на $zf'(z)/f(z)$ и $z_k f'(z_k)/f(z_k)$ соответственно. Интегрируя (22) по z от $z_0 \neq 0$ до z , имеем

$$\ln \frac{f'_h(z)}{f_h(z)} = \ln \frac{f'(z)}{f(z)} + h[\varphi_f(z) - \varphi_f(z_0)] + o(z, h),$$

или

$$f_h(z) = \frac{f_h(z_0)}{f(z_0)} f(z) e^{h[\varphi_f(z) - \varphi_f(z_0)] + o(z, h)}.$$

Устремляя здесь z_0 к нулю, получаем

$$f_h(z) = f(z) \left(1 + h \left[\varphi_f(z) - \varphi_f(0) \right] \right) + o(z, h),$$

или

$$f_h(z) = f(z) + hf'(z) \left[\varphi_f(z) - \varphi_f(0) \right] + o(z, h).$$

Это и есть формула (21). Теорема доказана.

Отметим, что вариационные формулы в классе S^* могут быть получены из представления этого класса с помощью интеграла Стилтъяса

$$f(z) = ze^{-2 \int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{it}z) d\mu_f(t)}, \quad \mu_f(t) \in M[0, 2\pi].$$

Здесь имеется в виду ветвь логарифма, которая обращается в нуль при $z = 0$. Отсюда имеем

$$\ln \frac{f(z)}{z} = -2 \int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{it}z) d\mu_f(t).$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при доказательстве теоремы 2. При этом после потенцирования полученной формулы приходим к вариационной формуле в классе S^* .

Используя формулу $zg'(z) = f(z)$, $g(z) \in S^0$, $f(z) \in S^*$, легко приходим к вариационной формуле в классе S^0 . Её можно получить, интегрируя уравнение

$$\frac{zf_h''(z)}{f_h'(z)} = p_h(z) - 1, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

с функцией $p_h(z)$ вида (12). Окончательная запись вариационной формулы на S^0 получается интегрированием формулы (11), деленной на z с последующей заменой под интегралом $f(z)$ на $zg'(z)$.

Вариационные формулы, аналогичные формуле (10), можно установить для классов функций, представимых в кольце с помощью интеграла Стилтъяса (по аналогии с тем, как это сделано для классов C , C_r , T_r , S^* , S^0 в круге) (см. [6, 8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г.М. Об одном методе вариаций в теории аналитических функций // Уч. зап. Ленингр. ун-та. Серия матем. наук. 1952. Т. 144. Вып. 23. С. 85–101.
2. Александров И.А. Вариационные задачи для звездообразных однолистных в круге функций // Изв. АН АрмССР. 1961. Т. 14. № 5. С. 7–19.
3. Александров И.А., Черников В.В. Экстремальные свойства звездообразных отображений // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4. № 2. С. 241–267.
4. Александров И.А., Гутлянский В.Я. Экстремальные задачи на классах аналитических функций, имеющих структурную формулу // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. № 5. С. 983–986.
5. Лебедев Н.А., Александров И.А. К методу вариаций в классах функций, представимых с помощью интегралов Стилтъяса // Труды Матем. ин-та имени В.А. Стеклова. М.: Наука, 1967. С. 79–89.
6. Зморевич В.А. О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце // Матем. сб. 1953. Т.32(74). № 3. С. 633–652.
7. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
8. Лит Ен Пир. О типично вещественных функциях в круговом кольце // Докл. АН СССР. Т. 92. № 4. С. 699–702.

Статья поступила 11.08.2014 г.

Aleksandrov I.A., Ezhova O.I. METHOD OF VARIATIONS FOR MAPS REPRESENTABLE BY MEANS OF STIELTJES INTEGRALS

In studying properties of classes of analytic functions and in finding extreme values of functionals on these classes, appropriate variational formulas are used. In this work, they are found for classes of functions that can be represented by a Stieltjes integral or some combination of such integrals. Variational formulas for classes of holomorphic functions with a positive real part in a circle are presented. Based on these formulas, variational formulas for star convex univalent mappings were obtained. Two variational formulas were obtained for functions holomorphic in a circular ring with a positive real part therein.

Keywords: Stieltjes integral, classes of holomorphic functions, variational formulas.

ALEKSANDROV Igor Aleksandrovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ma@math.tsu.ru

EZHOVA Olga Igorevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: oezhova@gmail.com

REFERENCES

1. Goluzin G.M. Ob odnom metode variatsiy v teorii analiticheskikh funktsiy. *Uch. zap. Leningr. un-ta. Seriya matem. nauk*, 1952, vol. 144, no. 23, pp. 85–101. (in Russian)
2. Aleksandrov I.A. Variatsionnye zadachi dlya zvezdoobraznykh odnolistnykh v kruge funktsiy. *Izvestiya AN ArmSSR*, 1961, vol. 14, no. 5, pp. 7–19. (in Russian)
3. Aleksandrov I.A., Chernikov V.V. Ekstremal'nye svoystva zvezdoobraznykh otobrazheniy. *Sib. mat. zhurn.*, 1963, vol. 4, no. 2, pp. 241–267. (in Russian)
4. Aleksandrov I.A., Gutlyanskiy V.Ya. Ekstremal'nye zadachi na klassakh analiticheskikh funktsiy, imeyushchikh strukturnuyu formulu. *Dokl. AN SSSR*, 1965, vol. 165, no. 5, pp. 983–986. (in Russian)
5. Lebedev N.A., Aleksandrov I.A. K metodu variatsiy v klassakh funktsiy, predstavimyykh s pomoshch'yu integralov Stil'tesa. *Trudy Matem. in-ta imeni V.A. Steklova*. Moscow, Nauka Publ., 1967, pp. 79–89. (in Russian)
6. Zmorovich V.A. O nekotorykh klassakh analiticheskikh funktsiy, odnolistnykh v krugovom kol'tse. *Matem. sb.*, 1953, vol. 32(74), no. 3, pp. 633–652. (in Russian)
7. Khalmosh P. *Teoriya mery*. Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury, 1953. (in Russian)
8. Lit En Pir. O tipichno veshchestvennykh funktsiyakh v krugovom kol'tse. *Dokl. AN SSSR*, vol. 92, no. 4, pp. 699–702. (in Russian)

УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, А.К. Мордовской

**КОРРЕКТНОСТЬ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ
И ИХ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ СВОИМИ ПОДГРУППАМИ**

Описана связь корректности и определяемости своими подгруппами (своими собственными подгруппами) для некоторых классов абелевых групп, получены критерии корректности для делимых групп без кручения и для обобщенно вполне разложимых групп в классе обобщенно вполне разложимых групп.

Ключевые слова: почти изоморфизм, s -изоморфизм, t -изоморфизм, корректность абелевой группы, определяемость группы своими подгруппами (своими собственными подгруппами).

Две абелевы группы называются *почти изоморфными*, если каждая из них изоморфна подгруппе другой группы [1]. Две абелевы группы называются почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы, обладающей этим свойством. Задача об изоморфизме почти изоморфных групп привлекала внимание многих алгебраистов. В одной из тестовых проблем Капланского [2] ставится вопрос об изоморфизме абелевых групп, почти изоморфных по прямым слагаемым. Для счетных редуцированных примарных групп эта проблема имеет положительное решение [2], однако П. Кроули привел пример неизоморфных p -групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы [3]. В ряде работ исследуются, когда из почти изоморфизма абелевых групп по сервантным или вполне характеристическим подгруппам вытекает их изоморфизм (например, [4–8]).

Известная теоретико-множественная теорема Кантора – Шредера – Бернштейна являлась источником постановки аналогичных задач в алгебре не только для абелевых групп. В [9] изучается теоретико-кольцевой, а в [10] – теоретико-категорный аналоги теоремы Кантора – Шредера – Бернштейна. Рассматриваются также почти изоморфные модули (например, [11–13]). Подобные задачи возникают и в других областях математики, в частности в топологии [14, с. 20, 21].

Существует также логический аспект задачи о почти изоморфизме, основанный на том, что если модули почти изоморфны по чистым подмодулям, то они элементарно эквивалентны [15].

Для рассмотренных аналогов теоремы Кантора-Шредера-Бернштейна характерно, в отличие от самой теоремы, наличие примеров отрицательного решения соответствующих задач, а также изучение классов объектов, для которых эти задачи имеют положительное решение.

Абелева группа A называется *корректной*, если для любой абелевой группы B из того, что $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A' , B' – подгруппы групп A и B соответственно, следует изоморфизм $A \cong B$ [7].

Для абелевой группы A обозначим соответственно через $S(A)$ и $Sub(A)$ множества ее подгрупп и ее собственных подгрупп.

Определение 1 [16]. Будем говорить, что группы A и B t -изоморфны (обозначение $A \stackrel{t}{\cong} B$), если существует биективное отображение множества $S(A)$ на множество $S(B)$, при котором соответствующие подгруппы групп A и B изоморфны.

Определение 2 [16]. Будем говорить, что группы A и B s -изоморфны (обозначение $A \stackrel{s}{\cong} B$), если существует биективное отображение множества $Sub(A)$ на множество $Sub(B)$, при котором соответствующие подгруппы групп A и B изоморфны.

Естественно возникает вопрос: как связаны между собой t -изоморфизм, s -изоморфизм и почти изоморфизм.

Приведем результаты о такой связи, полученные ранее.

Теорема 3 [17]. Если абелевы группы A и B почти изоморфны, то они t -изоморфны.

Так как любые две t -изоморфные группы почти изоморфны, получаем

Следствие 4 [17]. Абелевы группы A и B t -изоморфны тогда и только тогда, когда они почти изоморфны.

Связь между t -изоморфизмом и s -изоморфизмом устанавливают следующие результаты.

Теорема 5 [17]. Если абелевы группы A и B t -изоморфны, то они s -изоморфны.

Теорема 6 [17]. Абелевы группы A и B , содержащие собственные подгруппы, изоморфные самим группам, t -изоморфны тогда и только тогда, когда они s -изоморфны.

Естественно возникает вопрос: в каких случаях t -изоморфные (s -изоморфные) группы изоморфны.

Определение 7. Если абелева группа A такова, что для любой абелевой группы B из $A \stackrel{t}{\cong} B$ ($A \stackrel{s}{\cong} B$) вытекает $A \cong B$, то будем говорить, что группа A *определяется своими подгруппами (своими собственными подгруппами)*.

Вопрос об определяемости группы своими подгруппами (своими собственными подгруппами) представляет самостоятельный интерес, и как оказалось, этот вопрос тесно связан с исследованием корректных абелевых групп.

Из приведенных выше теорем вытекают следующие результаты:

Следствие 8 [17]. Абелева группа A определяется своими подгруппами тогда и только тогда, когда A – корректная группа.

Следствие 9 [17]. Абелева группа определяется своими подгруппами, если она определяется своими собственными подгруппами.

Следствие 10 [17]. Если абелева группа определяется своими собственными подгруппами, то она корректна.

Заметим, что определения почти изоморфизма, t -изоморфизма, s -изоморфизма можно дать аналогичным образом для двух универсальных алгебр A и B одной и той же сигнатуры. Также аналогично могут быть определены понятия корректной универсальной алгебры и алгебры, определяющейся своими подалгебрами (своими собственными подалгебрами). В приведенных выше результатах никак не учитывается специфика абелевых групп, и поэтому эти результаты с соответствующей переформулировкой справедливы для произвольных универсальных алгебр.

Для прямых сумм циклических групп критерии определяемости своими подгруппами и своими собственными подгруппами были получены в [17].

В настоящей работе исследуются корректность абелевых групп из некоторых классов и их определяемость своими подгруппами. Для полноты изложения рассмотрим сначала результаты из [17], относящиеся к группам без кручения (теоремы 11, 13, 14 и следствие 12).

Теорема 11. Пусть A – абелева группа без кручения, не являющаяся делимой. Группа A определяется своими собственными подгруппами тогда и только тогда, когда A – корректная группа.

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 10. Докажем достаточность. Пусть A – корректная абелева группа без кручения, не являющаяся делимой, и B – такая абелева группа, что $A \stackrel{s}{\cong} B$. Существует такое натуральное число n , что $nA \neq A$, и, так как A – группа без кручения, то $nA \cong A$. B – также группа без кручения. Действительно, если предположить, что в группе B существует ненулевой элемент b конечного порядка, то $\langle b \rangle$ – конечная подгруппа группы B , а тогда во множестве подгрупп группы A была бы конечная подгруппа A_1 , такая, что $|A_1| = |\langle b \rangle| = o(b)$, чего быть не может. Если B не является делимой группой, то существует такое натуральное число m , что $mB \neq B$, и, так как B – группа без кручения, то $mB \cong B$. Применяя теорему 6, получаем, что $A \stackrel{i}{\cong} B$, а значит, по следствию 4 группы A и B почти изоморфны. Учитывая корректность группы A , имеем $A \cong B$.

Покажем, что группа B не может быть делимой группой. Пусть B – делимая группа конечного ранга и ее ранг $r(B) = n$, где $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Запишем группу A в виде $A = D \oplus R$, где D – делимая часть группы A , а R – редуцированная часть этой группы, причем $R \neq 0$. Пусть $r(D) = m$. Наибольший ранг собственных делимых подгрупп группы B равен $n - 1$. Наибольшая собственная делимая подгруппа группы A совпадает с D и ее ранг равен m . Из s -изоморфизма групп A и B следует, что $n - 1 = m$. Так как в группе A есть единственная собственная делимая подгруппа ранга m , а в группе B есть по крайней мере две собственные делимых подгруппы ранга $n - 1$, то это противоречит s -изоморфизму групп A и B . Если же $r(B) = 1$, т.е. $B \cong \mathcal{Q}$, то всякая собственная подгруппа группы B имеет ранг 1 и типы собственных подгрупп группы B пробегает множество всевозможных типов, отличных от типа, представленного характеристикой $(\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$. Ясно, что тогда из s -изоморфизма групп A и B вытекает $r(A) = 1$ и $A \cong B \cong \mathcal{Q}$, чего быть не может, так как редуцированная часть группы A отлична от нуля.

Пусть теперь B – делимая группа без кручения, имеющая бесконечный ранг. $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$, где $B_i \cong \mathcal{Q}$ для всякого $i \in I$, $|I| \geq \aleph_0$. Пусть $i_0 \in I$ и $B_1 = \bigoplus_{i \in I \setminus \{i_0\}} B_i$. B_1 – собственная подгруппа группы B , изоморфная самой группе B . Тогда, применяя теорему 6 и следствие 4, получаем $A \cong B$, чего быть не может, так как группа A не является делимой. ■

Следствие 12. Пусть A – абелева группа без кручения, не являющаяся делимой. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A – корректная группа;
- 2) A определяется своими собственными подгруппами;
- 3) A определяется своими подгруппами.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) вытекает из теоремы 11. Эквивалентность условий 1) и 3) – из следствия 8. ■

Перейдем теперь к рассмотрению делимых групп без кручения.

Теорема 13. Пусть A – делимая группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A – корректная группа;
- 2) A определяется своими собственными подгруппами;
- 3) A определяется своими подгруппами;
- 4) A имеет конечный ранг.

Доказательство. Покажем эквивалентность условий 1) и 4).

а) 1) \Rightarrow 4). Пусть A – делимая группа без кручения, имеющая бесконечный ранг. $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $A_i \cong \mathcal{Q}$ для всякого $i \in I$, $|I| \geq \aleph_0$. Зафиксируем индекс $i_0 \in I$

и выберем в группе A_{i_0} бесконечную циклическую подгруппу C_{i_0} ($C_{i_0} \cong \mathcal{Z}$).

Пусть $A_1 = C_{i_0} \oplus C$, где $C = \bigoplus_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i$. A_1 – подгруппа группы A , и, так как $A \cong C$,

то группы A и A_1 почти изоморфны, однако A не изоморфна A_1 . Значит, группа A не является корректной.

б) 4) \Rightarrow 1). Покажем, что делимая группа без кручения A конечного ранга корректна. Пусть B – абелева группа и группы A и B почти изоморфны, то есть $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A' , B' – подгруппы групп A и B соответственно. Так как B' – делимая группа, то имеем $B = B' \oplus B''$. Из почти изоморфизма групп A и B вытекает $r(A) = r(B') \leq r(B)$ и $r(B) = r(A') \leq r(A)$. Значит, $r(A) = r(B) = r(B')$, откуда $B'' = 0$. Итак, $B = B'$, и поэтому $A \cong B$.

Эквивалентность условий 1) и 3) дает следствие 8.

Покажем эквивалентность условий 2) и 4).

а) 2) \Rightarrow 4). Пусть делимая группа без кручения A определяется своими собственными подгруппами. Тогда по следствию 10 группа A корректна и, значит, в силу уже доказанной эквивалентности условий 1) и 4), группа A имеет конечный ранг.

б) 4) \Rightarrow 2). Пусть делимая группа без кручения A имеет конечный ранг n , где $n > 1$, B – абелева группа и $A \overset{s}{\cong} B$. Понятно, что группа B также имеет конечный ранг m и $m > 1$. В группе A максимальный ранг собственных подгрупп равен n , а в группе B такой ранг равен m . Из s -изоморфизма групп A и B вытекает $n = m$. Пусть A_1 – делимая подгруппа ранга $n - 1$ группы A . Тогда в группе B есть подгруппа B_1 , изоморфная подгруппе A_1 . Имеем $B = B_1 \oplus B_2$, где $r(B_1) = n - 1$, $r(B_2) = 1$. Если группа B_2 не является делимой, то в группе B есть единственная собственная делимая подгруппа ранга $n - 1$, а именно, подгруппа B_1 , а в группе A есть по крайней мере две собственные делимые подгруппы ранга $n - 1$. Это противоречит s -изоморфизму групп A и B . Значит, B_2 – делимая группа, а тогда и B – делимая группа, причем $r(B) = r(A)$. Следовательно, $A \cong B$.

Если же $r(A) = 1$, то $r(B) = 1$ и, так как A и B – s -изоморфны, то $A \cong B \cong \mathcal{Q}$. ■

Теорема 13 и следствие 12 показывают, что для абелевых групп без кручения справедлив такой результат.

Теорема 14. Пусть A – абелева группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A – корректная группа;
- 2) A определяется своими собственными подгруппами;
- 3) A определяется своими подгруппами.

Перейдем к исследованию корректности обобщенно вполне разложимых групп и их определяемости своими подгруппами.

Абелева группа A называется *обобщенно вполне разложимой*, если она разлагается в прямую сумму групп ранга 1 (не обязательно без кручения).

Понятие вполне разложимости было распространено с групп без кручения на произвольные группы С. Меджиббеном [18].

С.Я. Гриншпон доказал, что если G – обобщенно вполне разложимая группа, то любые два разложения группы G в прямую сумму групп ранга 1 изоморфны и всякое прямое слагаемое группы G – обобщенно вполне разложимая группа. Он также получил полное описание вполне характеристических подгрупп и решетки, ими образуемой, для обобщенно вполне разложимых групп [19].

Выберем в каждом классе изоморфных абелевых групп ранга 1 по одному представителю и пусть $\mathfrak{S} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in S}$ – множество этих представителей. \mathfrak{S} является максимальным множеством попарно неизоморфных абелевых групп ранга 1. Зададим отношение частичного порядка на множестве S следующим образом: $\alpha_1 \leq \alpha_2$, если группа G_{α_1} изоморфна подгруппе группы G_{α_2} .

Пусть A – обобщенно вполне разложимая группа. Собирая для всякого $\alpha \in S$ в ее разложение в прямую сумму групп ранга 1 прямые слагаемые, изоморфные G_α , получим разложение $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{S}_\alpha} G_\alpha$ (некоторые из групп $A(\alpha)$ могут быть нулевыми).

Определение 15. Будем говорить, что для группы $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{S}_\alpha} G_\alpha$, выполняется условие S -максимальности, если любая цепь $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$, где $\alpha_i \in S$, $A(\alpha_i) \neq 0$, обрывается.

Определение 16. Группу A назовем S -ступенчатой, если для любого $\alpha \in S$, такого, что $\mathfrak{S}_\alpha \geq \aleph_0$, и для любого $\beta \in S$, такого, что $\beta < \alpha$, выполняется $\mathfrak{S}_\beta > \mathfrak{S}_\alpha$.

Пусть Ω – некоторый класс абелевых групп. Напомним, что группа A из класса Ω называется *корректной в классе Ω* , если для любой группы B из класса Ω из того, что группы A и B почти изоморфны, следует изоморфизм $A \cong B$. Если группа A из класса Ω такова, что для любой группы B из класса Ω из t -изоморфизма групп A и B следует $A \cong B$, то будем говорить, что *группа A определяется своими подгруппами в классе Ω* .

Теорема 17. Обобщенно вполне разложимая группа A корректна в классе обобщенно вполне разложимых групп тогда и только тогда, когда A S -ступенчатая группа и для нее выполняется условие S -максимальности.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{S}_\alpha} G_\alpha$ обобщенно вполне разложимая группа и A – корректная группа в классе обоб-

ценно вполне разложимых групп. Допустим, что A не является S -ступенчатой группой, то есть существуют такие $\beta < \alpha$ из S , что $\mathfrak{T}_\alpha \geq \aleph_0$ и $\mathfrak{T}_\beta \leq \mathfrak{T}_\alpha$. Рассмотрим два случая: а) $\mathfrak{T}_\beta = 0$, б) $\mathfrak{T}_\beta \neq 0$.

а) Представим группу $A(\alpha)$ в виде $A(\alpha) = A^*(\alpha) \oplus A^{**}(\alpha)$, где $A^*(\alpha)$ – группа, изоморфная G_α , $A^{**}(\alpha)$ – прямая сумма \mathfrak{T}_α групп, изоморфных G_α . Рассмотрим подгруппу B группы A : $B = A^*(\beta) \oplus A(\gamma) \oplus A^{**}(\alpha)$, где $A^*(\beta)$ – подгруппа группы $A^*(\alpha)$, изоморфная G_β . Так как $A^{**}(\alpha) \cong A(\alpha)$, то группа A изоморфна подгруппе группы B , а именно $A \cong \bigoplus_{\gamma \neq \alpha} A(\gamma) \oplus A^{**}(\alpha)$. Значит, группа A и B почти изоморфны. Однако группы A и B не изоморфны, так как в группе A нет прямого слагаемого, изоморфного G_β , а в группе B есть.

б) Пусть $A = A(\alpha) \oplus A(\beta) \oplus A(\gamma)$. Рассмотрим следующую подгруппу B группы A : $B = A(\alpha) \oplus A(\gamma)$. Группы A и B не изоморфны, так как в группе B нет прямых слагаемых, изоморфных G_β . Однако группы A и B почти изоморфны. Покажем это. Так как $\mathfrak{T}_\alpha \geq \aleph_0$ и $\mathfrak{T}_\beta \leq \mathfrak{T}_\alpha$, то $\mathfrak{T}_\alpha + \mathfrak{T}_\beta = \mathfrak{T}_\alpha$ и группу $A(\alpha)$ можно записать в виде $A(\alpha) = A^*(\alpha) \oplus A^{**}(\alpha)$, где $A^*(\alpha)$ – прямая сумма \mathfrak{T}_β групп, изоморфных G_α , $A^{**}(\alpha)$ – прямая сумма \mathfrak{T}_α групп, изоморфных G_α . Имеем $B = A^*(\alpha) \oplus A^{**}(\alpha) \oplus A(\gamma)$ и $A \cong A^*(\beta) \oplus A^{**}(\alpha) \oplus A(\gamma)$, где $A^*(\beta) = \bigoplus_{\mathfrak{T}_\beta} G_\beta$ – подгруппа группы $A^*(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{T}_\beta} G_\alpha$. Значит, группы A и B почти изоморфны.

Итак, получили, что всякая обобщенно вполне разложимая корректная группа является S -ступенчатой.

Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$ – корректная в классе обобщенно вполне разложимых групп и S -ступенчатая группа, но для группы A не выполняется условие S -максимальности, то есть существует такое подмножество $S_1 = \{\alpha_i\}_{i \in N}$ элементов множества S , что $A(\alpha_i) \neq 0$ и цепь $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$ не обрывается. Пусть $S_2 = S \setminus S_1$. Тогда $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_1 = \bigoplus_{\alpha \in S_1} A(\alpha)$, $A_2 = \bigoplus_{\alpha \in S_2} A(\alpha)$. Предположим, что $\mathfrak{T}_{\alpha_i} \geq \aleph_0$ для всякого $\alpha_i \in S_1$. Так как во всяком множестве кардинальных чисел есть наименьшее, то существует такое $\alpha_j \in S_1$, что $\mathfrak{T}_{\alpha_j} \leq \mathfrak{T}_{\alpha_i}$ для каждого $\alpha_i \in S_1$ такого, что $\alpha_j < \alpha_i$, а это противоречит S -ступенчатости группы A .

Пусть α_r наименьшее из таких $\alpha_k \in S_1$, что $0 < \mathfrak{T}_{\alpha_k} < \aleph_0$. Так как A – S -ступенчатая группа, то для всякого $\alpha_m \in S_1$, $\alpha_m > \alpha_r$, имеем $\mathfrak{T}_{\alpha_m} < \aleph_0$. Тогда $A_1 = A(\alpha_r) \oplus A_1^*$, где $A_1^* = \bigoplus_{\alpha \in S_1 \setminus \{\alpha_r\}} A(\alpha)$. Рассмотрим следующую подгруппу B группы A : $B = A_1^* \oplus A_2$. Так как $\sum_{m > r} \mathfrak{T}_{\alpha_m} = \aleph_0$, а при $m \geq r$ все кардинальные числа \mathfrak{T}_{α_m} конечны, то в группе A_1^* есть подгруппа, изоморфная группе A_1 . Итак, полу-

чили, что группы A и B почти изоморфны. Однако группы A и B не изоморфны, так как в группе B нет прямого слагаемого, изоморфного G_{α_p} , а в группе A есть.

Достаточность. Пусть A – S -ступенчатая обобщенно вполне разложимая группа и для нее выполняется условие S -максимальности. $A = \bigoplus_p A_p \oplus A_0$, где

$$A_p = \bigoplus_{\alpha} A(\alpha) = \bigoplus_{\alpha} \bigoplus_{\mathfrak{I}_{\alpha}} G_{\alpha}, \quad G_{\alpha} - \text{коциклические } p\text{-группы и } A_0 = \bigoplus_{\alpha} A(\alpha) = \bigoplus_{\alpha} \bigoplus_{\mathfrak{I}_{\alpha}} G_{\alpha},$$

G_{α} – группы без кручения. Пусть группа B почти изоморфна группе A .

Среди подгрупп группы A , изоморфных группе B , выберем такую (обозначим ее через B), что $B = \bigoplus_p B_p \oplus B_0$ и $B_0 < A_0$, $B_p < A_p$ для каждого простого числа p .

Среди подгрупп группы B , изоморфных группе A , выберем такую (обозначим ее через C), что $C = \bigoplus_p C_p \oplus C_0$ и $C_0 < B_0$, $C_p < B_p$ для каждого простого числа p .

Тогда из почти изоморфизма групп A и B следует почти изоморфизм A_0 и B_0 , A_p и B_p для каждого простого числа p .

а) A_p и B_p почти изоморфны. Покажем, что $A_p \cong B_p$. Так как для группы A_p и, следовательно, B_p выполняется условие максимальнойности на множестве S , получаем $A_p = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{\mathfrak{I}_{\alpha_i}} G_{\alpha_i}$, $B_p = \bigoplus_{j=1}^m \bigoplus_{\mathfrak{I}'_{\alpha_j}} G_{\alpha_j}$.

В силу почти изоморфизма групп A_p и B_p , получаем такие системы неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \leq n \\ \mathfrak{I}'_m \leq \sum_{i=m}^n \mathfrak{I}_i \\ \mathfrak{I}'_{m-1} + \mathfrak{I}'_m \leq \sum_{i=m-1}^n \mathfrak{I}_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m \mathfrak{I}'_i \leq \sum_{i=1}^n \mathfrak{I}_i \end{array} \right. \text{ и } \left\{ \begin{array}{l} n \leq m \\ \mathfrak{I}_n \leq \sum_{i=n}^m \mathfrak{I}'_i \\ \mathfrak{I}_{n-1} + \mathfrak{I}_n \leq \sum_{i=n-1}^m \mathfrak{I}'_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \mathfrak{I}_i \leq \sum_{i=1}^m \mathfrak{I}'_i \end{array} \right.$$

Так как $m \leq n$ и $n \leq m$, то $m = n$. Системы неравенств переписуются так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{I}'_n \leq \mathfrak{I}_n \\ \mathfrak{I}'_{n-1} + \mathfrak{I}'_n \leq \mathfrak{I}_{n-1} + \mathfrak{I}_n \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \mathfrak{I}'_i \leq \sum_{i=1}^n \mathfrak{I}_i \end{array} \right. \text{ и } \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{I}_n \leq \mathfrak{I}'_n \\ \mathfrak{I}_{n-1} + \mathfrak{I}_n \leq \mathfrak{I}'_{n-1} + \mathfrak{I}'_n \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \mathfrak{I}_i \leq \sum_{i=1}^n \mathfrak{I}'_i \end{array} \right.$$

Проведя «индукцию вниз», покажем, что для всякого i ($i = 1, \dots, n$) $\mathfrak{I}_i = \mathfrak{I}'_i$. Сравнивая первые неравенства в системах, получаем $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}'_n$. Пусть $\mathfrak{I}_i = \mathfrak{I}'_i$ для всякого i , удовлетворяющего неравенству $k \leq i \leq n$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 1$). Из $(n + 2 - k)$ -х неравенств системы получаем $\sum_{i=k-1}^n \mathfrak{I}_i = \sum_{i=k-1}^n \mathfrak{I}'_i$. Если $\mathfrak{I}_i < \aleph_0$ для всякого $i = k, k+1, \dots, n$, то $\mathfrak{I}_{k-1} = \mathfrak{I}'_{k-1}$. Если существует такое $s > k - 1$, что $\mathfrak{I}_s \geq \aleph_0$, то, учитывая S -ступенчатость группы A , получаем $\mathfrak{I}_{k-1} > \sum_{i=k}^n \mathfrak{I}_i \geq \aleph_0$.

Имеем $\mathfrak{S}_{k-1} = \sum_{i=k-1}^n \mathfrak{S}_i = \sum_{i=k-1}^n \mathfrak{S}'_i = \mathfrak{S}'_{k-1} + \sum_{i=k}^n \mathfrak{S}'_i$, и так как $\mathfrak{S}_{k-1} > \sum_{i=k}^n \mathfrak{S}'_i = \sum_{i=k}^n \mathfrak{S}_i$, то $\mathfrak{S}_{k-1} = \mathfrak{S}'_{k-1}$.

Итак, для всякого i ($i = 1, \dots, n$) $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}'_i$. Следовательно, группы A_p и B_p изоморфны.

б) Пусть A – обобщенно вполне разложимая группа без кручения и $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{S}_\alpha} G_\alpha$. Каждая G_α – группа без кручения ранга 1 и A – вполне разложимая группа без кручения. Множество S можно считать совпадающим с множеством T всех типов групп без кручения ранга 1. Введем следующие обозначения: $A = \bigoplus_{t \in T_A} A_t$, где $A_t = \bigoplus_{\mathfrak{S}_t} G_t$, G_t – группа без кручения ранга 1 типа t , $T_A = \{t \in S \mid r(A_t) \neq 0\}$. Если $F = \bigoplus_{t \in T_F} F_t$ – вполне разложимая группа, то через F' обозначается прямая сумма подгрупп F_t , имеющих бесконечный ранг, а через F'' – прямая сумма подгрупп F_t , имеющих конечный ранг. Через $F(t)$ будем обозначать подгруппу $\bigoplus_{t' \in T_F, t' \geq t} F_{t'}$, через $F^*(t)$ – подгруппу $\bigoplus_{t' \in T_F, t' > t} F_{t'}$.

Пусть $A_0 = \bigoplus_{t \in T_A} A_t$ – вполне разложимая S -ступенчатая группа и для нее выполняется условие S -максимальности. Вполне разложимая группа $B_0 = \bigoplus_{t \in T_B} B_t$ почти изоморфна группе A_0 , то есть $A_0 \cong B'$ и $B_0 \cong A'$, где A' и B' – подгруппы соответственно групп A_0 и B_0 . Пусть $\psi: B_0 \rightarrow A'$ – указанный изоморфизм. Для упрощения записи введем следующие обозначения: $A = A_0 = \bigoplus_{t \in T_A} A_t$, $B = A' = \bigoplus_{t \in T_B} B_t$, $C = \psi(B') = \bigoplus_{t \in T_C} C_t$.

Следуя подходу, примененному в [20] при исследовании почти изоморфных абелевых групп без кручения, покажем, что для любого типа $t \in T_A$ верны следующие утверждения:

а) если $t' > t$, $t' \notin T_A$, то $t' \notin T_B$;

б) $r(A_t) = r(B_t)$;

в) если $a \in A_t$, где $r(A_t)$ конечен, то существует такое натуральное число m , что $ma \in B(t)$; если $b \in B_t$, где $r(B_t)$ конечен, то существует такое натуральное число m , что $mb \in C(t)$.

I. Пусть t – максимальный тип в множестве T_A .

а) Допустим, существует тип $t' > t$, такой, что $t' \notin T_A$, $t' \in T_B$. Тогда существует элемент $b \in B$, такой, что $t_B(b) = t'$. Имеем $t_A(b) \geq t'$, но это противоречит тому, что t – максимальный тип в множестве T_A . Здесь $t_B(b)$ и $t_A(b)$ – типы элемента b в группах B и A соответственно.

б) Так как t – максимальный тип в множестве T_A , имеем $B_t \subseteq A_t$, следовательно, $r(B_t) \leq r(A_t)$. Так как в множестве T_B не существует типа $t' > t$, имеем

$C_t \subseteq B_t$, следовательно, $r(C_t) \leq r(B_t)$. Таким образом, $r(C_t) \leq r(B_t) \leq r(A_t)$. Но $r(A_t) = r(C_t)$, так как $A \cong C$. Получаем, что $r(A_t) = r(B_t)$.

в) В силу максимальности типа t имеем $A(t)=A_t$, $B(t)=B_t$, $C(t)=C_t$. Так как $C_t \subseteq B_t \subseteq A_t$ и $r(C_t) = r(B_t) = r(A_t)$ является конечным, то утверждение в) имеет место.

II. Пусть $t \in T_A$ и допустим, что утверждение а), б), в) верны для любого типа $t^* > t$. Покажем, что эти утверждения верны также и для типа t .

а) Пусть тип $t^* > t$ такой, что $t^* \notin T_A$, $t^* \in T_B$. Тогда существует ненулевой элемент $b \in B_{t^*}$. В группе A элемент b имеет тип, больший или равный t^* , то есть $b = a_1 + \dots + a_k$, где $a_1 \in A_{t_1}, \dots, a_k \in A_{t_k}$, причем $t_1 > t^*, \dots, t_k > t^*$. Группы A_{t_1}, \dots, A_{t_k} имеют конечный ранг, так как в противном случае в силу строения группы A имеем $t^* \in T_A$. Тогда, согласно индуктивному предположению, существуют такие натуральные числа m_1, \dots, m_k , что $m_1 a_1 \in B(t_1), \dots, m_k a_k \in B(t_k)$. Следовательно, $mb \in B^*(t^*)$, где $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$. Но также имеем, что $mb \in B_{t^*}$. Получили противоречие.

б) Покажем, что $r(A_t) = r(B_t)$. Рассмотрим два случая отдельно: 1) $r(A_{t'})$ конечен для любого типа $t' > t$; 2) существует тип $t' > t$, такой, что $r(A_{t'})$ – бесконечный кардинал.

1) Пусть $r(A_{t'})$ конечен для любого типа $t' > t$. Тогда, согласно индуктивному предположению, $r(B_{t'})$ также конечен для любого типа $t' > t$.

Покажем, что $r(C_t) \leq r(B_t)$. Рассмотрим ненулевой элемент $c \in C_t$. Так как $C \subseteq B$, то $c = b_1 + \dots + b_k$, где $b_1 \in B_{t_1}, \dots, b_k \in B_{t_k}$. Допустим, что $t_i \neq t$ для всякого $1 \leq i \leq k$, то есть $t_1 > t, \dots, t_k > t$. Для любого $1 \leq i \leq k$ $r(B_{t_i})$ конечен, тогда, согласно индуктивному предположению, существуют такие натуральные числа m_1, \dots, m_k , что $m_1 b_1 \in C(t_1), \dots, m_k b_k \in C(t_k)$. Следовательно, $mc \in C^*(t)$, где $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$. Но также имеем, что $mc \in C_t$. Получили противоречие. Таким образом, элемент c имеет ненулевую координату в компоненте B_t , то есть $c = c' + c^*$, где $c' \in B_t$, $c^* \in B^*(t)$, $c' \neq 0$.

Пусть c_1, \dots, c_r – линейно независимая система элементов группы C_t . Тогда элементы c_1, \dots, c_r имеют ненулевые координаты в компоненте B_t , то есть $c_1 = c'_1 + c_1^*$, \dots , $c_r = c'_r + c_r^*$, где $c'_1, \dots, c'_r \in B_t$, $c_1^*, \dots, c_r^* \in B^*(t)$, $c'_1 \neq 0, \dots, c'_r \neq 0$. Допустим, что система элементов c'_1, \dots, c'_r является линейно зависимой. Тогда существуют такие целые числа m_1, \dots, m_r не все равные нулю, что $m_1 c'_1 + \dots + m_r c'_r = 0$. Следовательно, $m_1 c_1 + \dots + m_r c_r = m_1 c_1^* + \dots + m_r c_r^*$. Так как $m_1 c_1 + \dots + m_r c_r \neq 0$, то получим противоречие с тем, что любой ненулевой элемент $c \in C_t$ имеет ненулевую координату в компоненте B_t . Таким образом, c'_1, \dots, c'_r – линейно независимая система элементов группы B_t . Отсюда следует, что $r(C_t) \leq r(B_t)$.

Так как согласно индуктивному предположению для любого типа $t' > t$ $r(A_{t'}) = r(B_{t'}) = r(C_{t'})$, то аналогично доказанному показывается, что любой ненулевой элемент $b \in B_t$ имеет ненулевую координату в компоненте $A_{t'}$, то есть $b = b' + b^*$, где $b' \in A_{t'}$, $b^* \in A^*(t)$, $b' \neq 0$, и что для любой линейно независимой системы элементов $b_1 = b'_1 + b_1^*$, ..., $b_r = b'_r + b_r^*$, система элементов b'_1, \dots, b'_r также является линейно независимой. Следовательно, $r(B_t) \leq r(A_t)$.

Имеем $A \cong C$, следовательно, $r(A_t) = r(C_t)$. Так как $r(C_t) \leq r(B_t) \leq r(A_t)$, получаем, что $r(A_t) = r(B_t)$.

2) Пусть существует тип $t' > t$, такой, что $r(A_{t'})$ – бесконечный кардинал. Тогда в силу строения группы A $r(A_t)$ – бесконечный кардинал и, согласно индуктивному предположению, $r(B_{t'})$ – также бесконечный кардинал.

Покажем, что $r(C_t) \leq r(B_t)$. Рассмотрим ненулевой элемент $c \in C_t$. Так как $C \subseteq B$, то $c = c' + c''$, где $c' \in B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, $c'' \in B'' \cap B^*(t)$. Допустим, $c' = 0$, тогда $c \in B'' \cap B^*(t)$, то есть $c = b_1 + \dots + b_k$, где $b_1 \in B_{t_1}$, ..., $b_k \in B_{t_k}$, причем для любого $1 \leq i \leq k$ $t_i > t$ и $r(B_{t_i})$ конечен. Тогда, согласно индуктивному предположению, существуют такие натуральные числа m_1, \dots, m_k , что $m_1 b_1 \in C(t_1)$, ..., $m_k b_k \in C(t_k)$. Следовательно, $mc \in C^*(t)$, где $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$. Но также имеем, что $mc \in C_t$. Получили противоречие. Таким образом, элемент c имеет ненулевую координату в компоненте $B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, то есть $c = c' + c''$, где $c' \in B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, $c'' \in B'' \cap B^*(t)$, $c' \neq 0$.

Пусть c_1, \dots, c_r – линейно независимая система элементов группы C_t . Тогда элементы c_1, \dots, c_r имеют ненулевые координаты в компоненте $B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, то есть $c_1 = c'_1 + c''_1$, ..., $c_r = c'_r + c''_r$, где $c'_1, \dots, c'_r \in B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, $c''_1, \dots, c''_r \in B'' \cap B^*(t)$, $c'_1 \neq 0$, ..., $c'_r \neq 0$. Допустим, что система элементов c'_1, \dots, c'_r является линейно зависимой. Тогда существуют такие целые числа m_1, \dots, m_r не все равные нулю, что $m_1 c'_1 + \dots + m_r c'_r = 0$. Следовательно, $m_1 c_1 + \dots + m_r c_r = m_1 c''_1 + \dots + m_r c''_r$. Так как $m_1 c_1 + \dots + m_r c_r \neq 0$, то получим противоречие с тем, что любой ненулевой элемент $c \in C_t$ имеет ненулевую координату в компоненте $B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$. Таким образом, c'_1, \dots, c'_r – линейно независимая система элементов группы $B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$. Отсюда следует, что $r(C_t) \leq r(B_t \oplus (B' \cap B^*(t))) = r(B_t) + r(B' \cap B^*(t))$.

В силу строения группы A имеем $r(A_t) > r(A_{t^*})$ для всякого $t^* > t$. Так как множество типов $t^* \in T_A$ таких, что $r(A_{t^*})$ – бесконечный кардинал, – не более чем счетно, то $r(A_t) > r(A' \cap A^*(t)) = r(B' \cap B^*(t))$ согласно индуктивному предположению. Следовательно, $r(C_t) > r(B' \cap B^*(t))$. Тогда, так как $r(C_t)$ – бесконечный кардинал, получаем $r(C_t) \leq r(B_t) + r(B' \cap B^*(t)) = r(B_t)$, то есть $r(C_t) \leq r(B_t)$.

Так как $r(C_t) \leq r(B_t)$ и, согласно индуктивному предположению, для любого типа $t' > t$ $r(A_{t'}) = r(B_{t'}) = r(C_{t'})$, то аналогично доказанному показывается, что $r(B_t) \leq r(A_t) + r(A' \cap A^*(t))$. Но $r(A_t)$ – бесконечный кардинал и $r(A_t) > r(A' \cap A^*(t))$. Следовательно, $r(B_t) \leq r(A_t) + r(A' \cap A^*(t)) = r(A_t)$, то есть $r(B_t) \leq r(A_t)$.

Так как $r(C_t) \leq r(B_t) \leq r(A_t)$ и $r(A_t) = r(C_t)$, получаем, что $r(A_t) = r(B_t)$.

в) Рассмотрим ненулевой элемент $a \in A_t$, где $r(A_t) = r$ конечен. Так как $r(A_t) = r(B_t)$, в группе B_t можно выбрать максимальную линейно независимую систему элементов b_1, \dots, b_r . При доказательстве утверждения б) в пункте 1) было показано, что элементы b_1, \dots, b_r имеют ненулевые координаты в компоненте A_t , то есть $b_1 = b'_1 + b_1^*, \dots, b_r = b'_r + b_r^*$, где $b'_1, \dots, b'_r \in A_t$, $b_1^*, \dots, b_r^* \in A^*(t)$, $b'_1 \neq 0, \dots, b'_r \neq 0$, причем b'_1, \dots, b'_r является линейно независимой системой элементов группы A_t . Так как $r(A_t) = r$, b'_1, \dots, b'_r – максимальная линейно независимая система элементов группы A_t . Тогда существуют такие целые числа $m \neq 0, m_1, \dots, m_r$, что $ma = m_1 b'_1 + \dots + m_r b'_r$. Тогда $ma = m_1(b_1 - b_1^*) + \dots + m_r(b_r - b_r^*) = b + a^*$, где $b = m_1 b_1 + \dots + m_r b_r \in B_t$, $a^* = -(m_1 b_1^* + \dots + m_r b_r^*) \in A^*(t)$.

Покажем, что существует такое натуральное число n , что $na^* \in B^*(t)$. Элемент $a^* \in A^*(t)$, следовательно, $a^* = a_1 + \dots + a_k$, где $a_1 \in A_{t_1}, \dots, a_k \in A_{t_k}$, причем $t_1 > t, \dots, t_k > t$. Так как $r(A_t)$ конечен, то в силу строения группы A ранги подгрупп A_{t_1}, \dots, A_{t_k} также конечны. Тогда, согласно индуктивному предположению, существуют такие натуральные числа n_1, \dots, n_k , что $n_1 a_1 \in B(t_1), \dots, n_k a_k \in B(t_k)$. Следовательно, $na^* \in B^*(t)$, где $n = n_1 \cdot \dots \cdot n_k$.

Обозначим через $m^* = nm$. Тогда $m^* a = n(b + a^*) = nb + na^*$. Так как $nb \in B_t$, $na^* \in B^*(t)$, имеем $m^* a \in B(t)$. Первая часть утверждения в) доказана.

Так как $r(A_{t'}) = r(B_{t'}) = r(C_{t'})$ для любого типа $t' \geq t$, то вторая часть утверждения в) доказывается аналогично.

Итак, утверждения а), б), в) верны для любого типа $t \in T_A$. Так как $r(A_t) = r(B_t)$ для любого типа $t \in T_A$ (утверждение б)), то для доказательства изоморфизма вполне разложимых групп A и B осталось показать, что $T_A = T_B$.

Пусть $t \in T_A$, то есть $r(A_t) \neq 0$. Тогда в силу утверждения б) имеем $r(B_t) \neq 0$, то есть $t \in T_B$. Таким образом, $T_A \subseteq T_B$.

Покажем, что $T_B \subseteq T_A$.

Пусть $t' \in T_B$ и тип t' больше некоторого типа из множества T_A . Тогда в силу утверждения а) имеем $t' \in T_A$.

Пусть $t' \in T_B$ и тип t' меньше некоторого типа из множества T_A . Допустим $t' \notin T_A$. Рассмотрим ненулевой элемент $b \in B_{t'}$. Так как $b \in A$, то $b = a_1 + \dots + a_k$, где $a_1 \in A_{t_1}, \dots, a_k \in A_{t_k}$. Имеем $t_1 > t', \dots, t_k > t'$. Так как $t' \notin T_A$, то в силу строе-

ния группы A $r(A_{t_i})$ конечен для всех $1 \leq i \leq k$. Тогда, согласно утверждению в), существуют такие натуральные числа m_1, \dots, m_k , что $m_1 a_1 \in B(t_1), \dots, m_k a_k \in B(t_k)$. Следовательно, $mb \in B^*(t')$, где $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$. Но также имеем, что $mb \in B_{t'}$. Получили противоречие.

Пусть $t' \in T_B$ и тип t' не сравним с любым типом из множества T_A . Рассмотрим ненулевой элемент $b \in B_{t'}$. Так как $b \in A$, то b имеет ненулевую координату в некоторой компоненте A_t группы A . Тогда $t' \leq t$. Получили противоречие с тем, что тип t' не сравним с любым типом из множества T_A .

Таким образом, $T_B \subseteq T_A$. Получаем, что $T_A = T_B$.

Следовательно, группы A_0 и B_0 изоморфны.

Итак, получили $A_0 \cong B_0$ и $A_p \cong B_p$ для каждого простого числа p . Значит, группы A и B изоморфны и, следовательно, A – корректная группа в классе обобщенно вполне разложимых групп. ■

Используя теорему 17 и следствие 8, получаем такой результат.

Следствие 18. Обобщенно вполне разложимая группа A определяется своими подгруппами в классе обобщенно вполне разложимых групп тогда и только тогда, когда A – S -ступенчатая группа и для нее выполняется условие S -максимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jonson B. On direct decomposition of torsion free abelian groups // Math. Scand. 1959. No. 2. P. 361–371.
2. Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.
3. Crawly P. Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups // J. Algebra. 1965. No. 4. P. 413–431.
4. de Groot J. Equivalent abelian groups // Canad. J. Math. 1957. No. 9. P. 291–297.
5. Росошек С.К. Строго чисто корректные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1979. С. 143–150.
6. Шертнева А.И. U -последовательности и почти изоморфизм абелевых p -групп по вполне характеристическим подгруппам // Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 72–80.
7. Гриншпон С.Я. f.i.-корректность абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1989. Вып. 8. С. 65–79.
8. Гриншпон С.Я. f.i.-корректные абелевые группы // Успехи матем. наук. 1999. № 6. С. 155–156.
9. Cornel I. Some ring theoretic Schroder-Bernstein theorems // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 132. P. 335–351.
10. Trnkova V., Koubek V. The Cantor-Bernstein theorem for factors // Comment. Math. Univ. Carol. 1973. V. 14. P. 197–204.
11. Bumby R. Modules which isomorphic to submodules each other // Arch. Math. 1965. V. 16. P. 184–185.
12. Holzsager R., Hallahan C. Mutual direct summands // Arch. Math. 1974. V. 25. P. 591–592.
13. Росошек С.К. Чисто корректные модули // Изв. вузов. Математика. 1978. № 10. С. 143–150.
14. Борсук К. Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.
15. Eklof P., Sabbagh G. Model-completions and modules // Ann. Math. Log. 1971. V. 2. P. 251–299.
16. Мордовской А.К. Изоморфизм подгрупп абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып. 15. С. 38–45.

17. Гриншпон С.Я., Мордовской А.К. Определяемость абелевых групп своими подгруппами и почти изоморфизм // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск, 2001. Вып. 3. С. 72–80.
18. Megibben Ch. Separable mixed group // Comment. Math. Univ. Carolin. 1980. № 4. P. 755–768.
19. Гриншпон С.Я. Вполне характеристические подгруппы вполне разложимых абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 2004. № 9. С. 18–23.
20. Grinshpon S.Ya., Grinshpon I.E., Sherstneva A.I. Almost isomorphic torsion free abelian groups and similarity of homogeneously decomposable groups // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 147–156.

Статья поступила 21.05.2014 г.

Grinshpon S.Ya., Mordovskoi A.K. CORRECTNESS OF ABELIAN TORSION-FREE GROUPS AND DETERMINABILITY OF ABELIAN GROUPS BY THEIR SUBGROUPS

An Abelian group A is called correct if for any Abelian group B isomorphisms $A \cong B'$ and $B \cong A'$, where A' and B' are subgroups of the groups A and B , respectively, imply the isomorphism $A \cong B$. We say that a group A is determined by its subgroups (its proper subgroups) if for any group B the existence of a bijection between the sets of all subgroups (all proper subgroups) of groups A and B such that corresponding subgroups are isomorphic implies $A \cong B$.

In this paper, connections between the correctness of Abelian groups and their determinability by their subgroups (their proper subgroups) are established. Certain criteria of determinability of divisible torsion-free groups and completely decomposable groups by their subgroups and their proper subgroups, as well as a criterion of correctness of such groups, are obtained.

Keywords: almost isomorphism, s -isomorphism, t -isomorphism, correctness of abelian groups, determinability of abelian groups by their subgroups (their proper subgroups).

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

MORDOVSKOI Andrei Konstantinovich (Candidate of Physics and Mathematics, Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation)
E-mail: mak13@mail.ru

REFERENCES

1. Jonson B. On direct decomposition of torsion free abelian groups. *Math. Scand.*, 1959, no. 2, pp. 361–371.
2. Kaplansky I. *Infinite Abelian Groups*. Ann Arbor, Univ. of Michigan Press, 1954.
3. Crawly P. Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups. *J. Algebra*, 1965, no. 4, pp. 413–431.
4. de Groot J. Equivalent abelian groups. *Canad. J. Math.*, 1957, no. 9, pp. 291–297.
5. Rososhek S.K. Strogo chisto korrektnye abelevy gruppy bez krucheniya. *Abelevy gruppy i moduli*. Tomsk, 1979, pp. 143–150. (in Russian)
6. Sherstneva A.I. U-posledovatel'nosti i pochtii izomorfizm abelevykh p -grupp po vpolne kharakteristicheskim podgruppam. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2001, no. 5, pp. 72–80. (in Russian)
7. Grinshpon S.Ya. f.i.-korrektnost' abelevykh grupp bez krucheniya. *Abelevy gruppy i moduli*. Tomsk, 1989, vol. 8, pp. 65–79. (in Russian)
8. Grinshpon S.Ya. f.i.-korrektnye abelevye gruppy. *Uspekhi matem. nauk*, 1999, no. 6, pp. 155–156. (in Russian)
9. Cornel I. Some ring theoretic Schroder-Bernstein theorems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 132, pp. 335–351.

10. Trnkova V., Koubek V. The Cantor-Bernstein theorem for factors. *Comment. Math. Univ. Carol.*, 1973, vol. 14, pp. 197–204.
11. Bumby R. Modules which isomorphic to submodules each other. *Arch. Math.*, 1965, vol. 16, pp. 184–185.
12. Holzsager R., Hallahan C. Mutual direct summands. *Arch. Math.*, 1974, vol. 25, pp. 591–592.
13. Rososhek S.K. Chisto korrektnye moduli. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 1978, no. 10, pp. 143–150. (in Russian)
14. Borsuk K. *Teoriya retraktov*. Moscow, Mir Publ., 1971. (in Russian)
15. Eklof P., Sabbagh G. Model-completions and modules. *Ann. Math. Log.*, 1971, vol. 2, pp. 251–299.
16. Mordovskoy A.K. Izomorfizm podgrupp abelevykh grupp. *Abelevy gruppy i moduli*. Tomsk, 2000, vol. 15, pp. 38–45. (in Russian)
17. Grinshpon S.Ya., Mordovskoy A.K. Opredeyaemost' abelevykh grupp svoimi podgruppami i pochti izomorfizm. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu i algebre*. Tomsk, 2001, vol. 3, pp. 72–80. (in Russian)
18. Megibben Ch. Separable mixed group. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1980, no. 4, pp. 755–768.
19. Grinshpon S.Ya. Vpolne kharakteristicheskie podgruppy vpolne razlozhimyykh abelevykh grupp. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2004, no. 9, pp. 18–23. (in Russian)
20. Grinshpon S.Ya., Grinshpon I.E., Sherstneva A.I. Almost isomorphic torsion free abelian groups and similarity of homogeneously decomposable groups. *Acta Appl. Math.*, 2005, vol. 85, pp. 147–156.

УДК 512.1; 517.53; 519.6

Ю.А. Несмеев

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Предложен алгоритм нахождения корней кубического уравнения. Он использует метод неопределённых коэффициентов и дихотомию. Он учитывает: взаимное расположение параболы и гиперболы на плоскости; расположение корней алгебраического уравнения на комплексной плоскости. Предложена модификация алгоритма. Даны примеры применения и алгоритма, и его модификации. В одном из примеров вычисляются посредством алгоритма корни полинома Якоби.

Ключевые слова: дихотомия, комплексная плоскость, корень, уравнение.

В настоящее время в справочной литературе для научно-технических работников практически только в [1, с. 29] представлен численный способ решения кубического уравнения. Способ из [1] заключается в последовательном выполнении следующих действий: α) поиск (путём нахождения значений левой части уравнения в отдельных точках числовой оси) того замкнутого промежутка, который содержит во внутренней точке один корень, имеющий кратностью число 1; β) вычисление начального приближения этого корня обратной линейной интерполяцией; γ) итерационное вычисление следующих приближений этого корня по формуле метода касательных [2, с. 421]; δ) деление левой части уравнения на разность между неизвестной величиной и последним приближением этого корня; ϵ) вычисление корней квадратного многочлена, полученного предыдущим действием. Этот способ на практике часто требует больших затрат времени. Притом наибольшие затраты приходится на действия α , β и γ , то есть на использование метода касательных. Значительных затрат требует и действие δ (при воплощении в компьютерные программы). Поэтому целью исследований, представленных в данной работе, было построение такого доступного для научно-технических работников численного способа решения уравнения

$$x^3 + k_1x^2 + k_2x + k_3 = 0 \quad (1)$$

с действительными коэффициентами, который не использует метод касательных. Задачей исследования служило построение такого алгоритма вычисления корней уравнения (1), который не выполняет действий α , β , γ , δ и использует дихотомию. Задача исследования была решена в предположении $k_3 \neq 0$. Методами исследования были изучение и анализ литературных источников, теоретически обоснованные математические выкладки, математическое моделирование и компьютерный эксперимент. Решение задачи изложено ниже.

Применение метода неопределённых коэффициентов к преобразованию левой части уравнения (1) приводит к тождеству

$$x^3 + k_1x^2 + k_2x + k_3 \equiv (x^2 + a^*x + b^*)(x + c^*), \quad (2)$$

в котором совокупность величин a^* , b^* , c^* является решением системы

$$a + c = k_1, \quad (3.1)$$

$$ac + b = k_2, \quad (3.2)$$

$$bc = k_3. \quad (3.3)$$

Решение a^* , b^* , c^* может быть неоднозначным, но для нахождения корней уравнения (1) достаточно найти одно решение системы (3). Ниже этот факт учитывается при построении алгоритма. Алгоритм использует в формулировках шагов 4 и 6 следующие обозначения корней уравнения (1): тот действительный корень, который получается приравниванием к нулю выражения $x + c^*$, имеет обозначение x_1 ; те корни, которые получаются приравниванием к нулю квадратного трехчлена $x^2 + a^*x + b^*$, имеют обозначения x_2 и x_3 . Согласно принятым обозначениям, справедливо равенство $x_1 = -c^*$, которое с помощью зависимости (3.1) преобразуется в соотношение $x_1 = a^* - k_1$. Это соотношение используется в формулировке шага 4 алгоритма. Тот факт, что x_2 и x_3 являются корнями трёхчлена $x^2 + a^*x + b^*$, используется в формулировке шага 6 алгоритма.

Система (3) равносильна системе

$$c = k_1 - a, \quad (4.1)$$

$$a(k_1 - a) + b = k_2, \quad (4.2)$$

$$b(k_1 - a) = k_3. \quad (4.3)$$

Так как в уравнениях (4.2) и (4.3) отсутствует величина c , то лишь с помощью этих уравнений можно найти a^* и b^* . Используем эту возможность, отнеся плоскость к прямоугольным декартовым координатам a, b с центром в точке O . Будем считать, что плоскость изображена на экране монитора (заполняя его полностью), а точка O изображается его центром. Также будем считать, что относительно взгляда пользователя компьютером на экран координатная ось a направлена вправо от центра, а координатная ось b – вверх от центра. Преобразуем соотношения (4.2) и (4.3):

$$b = a^2 - k_1a + k_2, \quad (5.1)$$

$$b = -k_3 / (a - k_1). \quad (5.2)$$

Из соотношения (5.1) следует, что $b^* = a^*(a^* - k_1) + k_2$. Этот факт используется в формулировке шага 5 алгоритма.

Зависимость (5.1) задаёт на плоскости параболу, ветви которой направлены вверх. Ось симметрии параболы в случае $k_1 = 0$ совпадает с координатной осью b , а в случае $k_1 \neq 0$ параллельна ей. Абсциссой и ординатой вершины параболы являются соответственно числа $2^{-1} \cdot k_1$ и $k_2 - 4^{-1} \cdot k_1^2$. Зависимость (5.2) определяет на плоскости гиперболу, центром которой служит та точка, абсциссой и ординатой которой являются соответственно числа k_1 и 0. Асимптотами гиперболы являются координатная ось a и прямая $a = k_1$. Вертикальная асимптота гиперболы пересекается с параболой в той точке, абсциссой и ординатой которой являются соответственно числа k_1 и k_2 .

Исключение величины b из уравнений (4.2) и (4.3) приводит к следующему уравнению для нахождения абсциссы a^* точки пересечения гиперболы и параболы:

$$a^3 - 2k_1a^2 + (k_1^2 + k_2)a - k_1k_2 + k_3 = 0. \quad (6)$$

Заменим в нём обозначение неизвестной величины символом t , а вместо a^* будем использовать обозначение t^* . Построим (на основе левой части уравнения (6)) вспомогательный многочлен q , определяемый равенством

$$q(t) = t^3 - 2k_1t^2 + (k_1^2 + k_2)t - k_1k_2 + k_3. \quad (7)$$

Рассмотрим на комплексной z -плоскости соответствующее многочлену q уравнение

$$z^3 - 2k_1z^2 + (k_1^2 + k_2)z - k_1k_2 + k_3 = 0, \quad (8)$$

в котором $z = a + ib$. Воспользуемся (с точностью до обозначений) известными свойствами корней алгебраического уравнения с действительными коэффициентами на комплексной плоскости [3, с. 75]. Согласно этим свойствам, корни уравнения (8) на z -плоскости принадлежат замкнутому кольцу или замкнутому кругу. Центром кольца или круга служит начало координат. В случае кольца границей является объединение двух окружностей, имеющих свои радиусы. В случае круга границей служит его окружность. В данной работе в случае кольца меньший радиус имеет обозначение n_b , а больший радиус – n_c . В случае круга за n_b принято число 0, а за n_c – радиус круга. Величины n_b и n_c зависят от величин b_3 и c_0 , определяемых равенствами

$$b_3 = \max\{1, |-2k_1|, |k_1^2 + k_2|\}; \quad (9)$$

$$c_0 = \max\{|-2k_1|, |k_1^2 + k_2|, |-k_1k_2 + k_3|\}. \quad (10)$$

Для величин n_b и n_c справедливы зависимости

$$n_b = |-k_1k_2 + k_3|/(b_3 + |-k_1k_2 + k_3|), n_c = 1 + c_0. \quad (11)$$

Зависимости (9) – (11) учитываются на шаге 1 алгоритма.

Величина t^* , являясь корнем и многочлена (7), и уравнения (8), располагается на действительной оси комплексной z -плоскости, а именно в объединении замкнутых промежутков

$$[-n_c, -n_b], [n_b, n_c]. \quad (12)$$

Из величин n_b и n_c лишь n_b может принимать значение 0. Этот факт учитывается на шаге 2.

Если уравнение (8) имеет комплексные корни, а его действительный корень отличен от нуля, то этот корень является внутренней точкой одного из промежутков (12). Поэтому он может быть найден с помощью дихотомии одного из промежутков (12) и присваивания величине t^* значения этого корня. Если уравнение (8) не имеет комплексных корней и ни один из его корней не является нулём, то при любом расположении действительных корней уравнения (8) внутри промежутков (12) один из них позволяет найти с помощью дихотомии корень уравнения (8) и присвоить величине t^* значения найденного корня. Эти факты являются очевидными и используются на шаге 3 алгоритма.

Изложенное выше позволяет сформулировать алгоритм решения уравнения (1).

Алгоритм

1. Вычисление значений величин b_3 , c_0 , n_b , n_c по формулам

$$b_3 = \max\{1, |-2k_1|, |k_1^2 + k_2|\},$$

$$c_0 = \max\{|-2k_1|, |k_1^2 + k_2|, |-k_1k_2 + k_3|\},$$

$$n_b = |-k_1k_2 + k_3|/(b_3 + |-k_1k_2 + k_3|), n_c = 1 + c_0.$$

2. Проверка величин n_b на корень уравнения $z^3 - 2k_1z^2 + (k_1^2 + k_2)z - k_1k_2 + k_3 = 0$. В случае положительного результата проверки: присваивание величине t^* значения n_b и переход на шаг 4.

3. Определение знака произведения $q(n_b) \cdot q(n_c)$. В случае отрицательного знака – дихотомия промежутка $[n_b, n_c]$ и присваивание величине t^* значения найденного корня. В случае положительного знака – дихотомия промежутка $[-n_c, -n_b]$ и присваивание величине t^* значения найденного корня.

4. Вычисление действительного корня x_1 уравнения (1) по формуле $x_1 = t^* - k_1$.

5. Вычисление значений величин a^* и b^* по формулам

$$a^* = t^*, b^* = a^*(a^* - k_1) + k_2.$$

6. Вычисление корней уравнения $x^2 + a^*x + b^* = 0$ и присваивание их значений корням x_2 и x_3 уравнения (1).

Пример 1. Требуется решить с помощью алгоритма уравнение $x^3 - 18,1x - 34,8 = 0$ [1, с. 29]. Перед применением алгоритма находим значения величин k_1, k_2, k_3 : $k_1 = 0$; $k_2 = -18,1$; $k_3 = -34,8$.

Результаты выполнения шагов алгоритма:

1) $b_3 = 18,1$; $c_0 = 34,8$; $n_b = 0,657844990548204$; $n_c = 35,800000000000000$.

2) $q(n_b) \neq 0$.

3) $q(n_b) \cdot q(n_c) < 0$. $t^* = 5,005265097281269$.

4) $x_1 = 5,005265097281269$.

5) $a^* = 5,005265097281269$; $b^* = 6,952678694062071$.

6) $x_2 = -2,502632548640635 + i(-0,830366798798310)$;

$x_3 = -2,502632548640635 + i(0,830366798798310)$.

При решении уравнения из примера 1 посредством алгоритма итерационные шаги были прекращены тогда, когда абсолютная величина значения многочлена q в середине очередного отрезка не превысила числа 10^{-17} . Всего было сделано 65 шагов. Корни, полученные с помощью алгоритма, совпали с корнями, полученными по формулам из [4].

Сопоставление корней, полученных с помощью алгоритма, с корнями из [1] приводит к следующим выводам. При округлении x_1 и действительных частей корней x_2 и x_3 , полученных с помощью алгоритма, соответственно до шести и девяти значащих цифр получаются соответствующие величины из [1]. При таком округлении мнимых частей корней x_2 и x_3 , полученных с помощью алгоритма, при котором число значащих цифр совпадает с числом значащих цифр в корнях x_2 и x_3 из [1], имеет место несовпадение в трёх последних разрядах.

Пример 2. Требуется вычислить корни полинома Якоби $P_3(2,1,x)$ [5, с. v] с помощью алгоритма. Для вычисления корней предварительно найдём значения коэффициентов k_1, k_2, k_3 по следствию из формулы явного выражения [5, с. v]. В результате получим следующие равенства:

$$k_1 = -1,28571428571429; k_2 = 4,28571428571429 \cdot 10^{-1};$$

$$k_3 = -2,85714285714286 \cdot 10^{-2}.$$

Результаты выполнения шагов алгоритма:

1) $b_3 = 2,57142857142857$, $c_0 = 2,57142857142857$, $n_b = 1,68865435356201 \cdot 10^{-1}$, $n_c = 3,57142857142857$.

2) $q(n_b) \neq 0$.

3) $q(-n_c) \cdot q(-n_b) < 0$, $t^* = -1,19712632620158$.

4) $x_1 = 8,85879595127039 \cdot 10^{-2}$.

5) $a^* = -1,1971263262015$, $b^* = 3,22520450054291 \cdot 10^{-1}$.

6) $x_2 = 7,87659461760847 \cdot 10^{-1}$, $x_3 = 4,09466864440735 \cdot 10^{-1}$.

При решении уравнения из примера 2 посредством алгоритма итерационные шаги были прекращены тогда, когда абсолютная величина многочлена q в сере-

дине очередного отрезка не превысила число 10^{-17} . Всего было сделано 55 шагов. Все корни, полученные с помощью алгоритма, совпали с корнями, полученными по формулам из [4]. Корни x_1 и x_2 , полученные с помощью алгоритма, совпадают с соответствующими известными корнями [5, с. 235] (в [5] приведены корни, полученные методом Ньютона). Притом последняя значащая цифра корня x_3 , полученного с помощью алгоритма, отличается на единицу от соответствующей цифры корня из [5], а остальные значащие цифры полученного с помощью алгоритма корня x_3 совпадают с соответствующими цифрами корня из [5].

Значения величин a^* и b^* в примерах 1 и 2 являются координатами точек, расположенных в верхней полуплоскости той плоскости, которая выше отнесена к системе координат O, a, b . В обоих примерах значение величины a^* больше значения величины k_1 , а величина k_3 имеет отрицательное значение. Эти факты – проявление следующих закономерностей: если $k_3 < 0$, то в верхней полуплоскости, справа от вертикальной асимптоты гиперболы, парабола и гипербола имеют по крайней мере одну общую точку; если $k_3 > 0$, то в верхней полуплоскости, слева от вертикальной асимптоты гиперболы, парабола и гипербола имеют по крайней мере одну общую точку. Закономерности вытекают из взаимного расположения гиперболы и параболы на плоскости. Алгоритм закономерностей не учитывает, хотя учёт может приводить к уменьшению длины того промежутка, к которому можно применять дихотомию. Учёт закономерностей приводит к изложенной ниже модификации алгоритма. Модификация использует табл. 1, в которой тот промежуток, к которому следует применять дихотомию, имеет обозначение W . Если одной из его границ является k_1 , то имеет место упоминаемое выше уменьшение длины промежутка, подвергаемого дихотомии.

Таблица 1

Границы предназначенного для дихотомии промежутка W

Случай	Меньшая и большая границы промежутка W	
1	$k_3 < 0; k_1 \geq 0; q(k_1) \cdot q(n_c) < 0$	k_1 n_c
2	$k_3 < 0; k_1 < 0; q(k_1) \cdot q(-n_b) < 0$	k_1 $-n_b$
3	$k_3 < 0; k_1 < 0; q(n_b) \cdot q(n_c) < 0$	n_b n_c
4	$k_3 > 0; k_1 \leq 0; q(-n_c) \cdot q(k_1) < 0$	$-n_c$ k_1
5	$k_3 > 0; k_1 > 0; q(-n_c) \cdot q(-n_b) < 0$	$-n_c$ $-n_b$
6	$k_3 > 0; k_1 > 0; q(n_b) \cdot q(k_1) < 0$	n_b k_1

Модификация алгоритма

1. Вычисление значений величин b_3, c_0, n_b, n_c по формулам

$$b_3 = \max\{1, |-2k_1|, |k_1^2 + k_2|\},$$

$$c_0 = \max\{|-2k_1|, |k_1^2 + k_2|, |-k_1k_2 + k_3|\},$$

$$n_b = |-k_1k_2 + k_3| / (b_3 + |-k_1k_2 + k_3|), \quad n_c = 1 + c_0.$$

2. Установление номера случая по табл. 1.

3. Проверка величины n_b на корень уравнения $z^3 - 2k_1z^2 + (k_1^2 + k_2)z - k_1k_2 + k_3 = 0$. При положительном результате проверки: идентификация величины n_b как t^* и переход на шаг 4. При отрицательном результате проверки: дихотомия (в целях поиска корня многочлена q) промежутка W и идентификация найденного корня как величины t^* .

4. Вычисление действительного корня x_1 уравнения (1) по формуле $x_1 = t^* - k_1$.

5. Вычисление значений величин a^* и b^* по формулам

$$a^* = t^*, b^* = a^*(a^* - k_1) + k_2.$$

6. Вычисление корней уравнения $x^2 + a^*x + b^* = 0$ и идентификация их как корней x_2 и x_3 уравнения (1).

Пример 3. Требуется решить с помощью модификации алгоритма уравнение $x^3 + \pi x + 100 = 0$. Перед применением алгоритма находим значения величин k_1, k_2, k_3 : $k_1 = 0; k_2 = \pi; k_3 = 100$.

Результаты выполнения шагов
модификации алгоритма:

- 1) $b_3 = 3,14159265358979, c_0 = 1,00000000000000 \cdot 10^2,$
 $n_b = 9,69540972048579 \cdot 10^{-1}, n_c = 1,01000000000000 \cdot 10^2.$
- 2) Случай 4.
- 3) $t^* = -4,41616324489854.$
- 4) $x_1 = -4,41616324489854.$
- 5) $a^* = -4,41616324489854, b^* = 2,26440904591826 \cdot 10^1.$
- 6) $x_2 = 2,20808162244927 + i \cdot 4,21526582883979.$
 $x_3 = 2,20808162244927 - i \cdot 4,21526582883979.$

При решении уравнения из примера 3 деление пополам очередного отрезка было прекращено тогда, когда его длина не превысила числа 10^{-18} . Всего было сделано 67 итерационных шагов. Все корни, полученные с помощью модификации алгоритма, совпали с корнями, полученными по формулам из [4].

При получении вышеприведённых результатов, связанных с примерами 1–3, использовались специально разработанные автором компьютерные программы на языке Турбо Паскаль. В них для арифметических операций над числами и операции извлечения квадратного корня из неотрицательного числа применялись соответственно арифметические выражения [6, с. 146] и функция *sqrt* [6, с. 208] из стандарта языка программирования. Притом в программах все величины, имеющие дробные значения, имели тип *extended*, благодаря чему представления этих величин в компьютере содержали 19–20 цифр.

Для испытания предлагаемого алгоритма на возможность его применения к высокоточному вычислению (постановка вопроса принадлежит Е. М. Малекю из Магнитогорского государственного технического университета) действительный корень x_1 и компоненты корней x_2 и x_3 уравнения из примера 3 также были вычислены с точностью 50 знаков после запятой. Притом применялось моделирование шагов алгоритма, а в его рамках, в частности, и моделирование арифметических операций над числами и моделирование операции извлечения квадратного корня из неотрицательного числа. (При моделировании не использовались арифметические выражения и функция извлечения квадратного корня, содержащиеся в стандарте языка программирования.) Вычисление было произведено в среде языка Турбо Паскаль и описано ниже.

При моделировании выполнялись действия над строками. Каждая строка содержала 60 символов. Это число обеспечило, в частности, сходимость итерационных процессов, имитирующих при моделировании вычисление корня методом дихотомии и итерационного извлечения квадратного корня из неотрицательного числа. Первым символом строки был символ *пробел* в случае неотрицательного числа и символ *минус* в случае отрицательного числа. Те строки, которые заменя-

Автор благодарит Е.М. Малекю за проявленный им интерес к модификации алгоритма на стадии подготовки данной статьи к опубликованию и за помощь, связанную с Maple. Также за помощь, связанную с Maple, автор благодарит М.С. Бухтяка. Автор благодарит В.М. Галкина из Томского политехнического университета за его помощь (при подготовке данной статьи к печати) в улучшении формулировки шага 2 алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. *Математический энциклопедический словарь*. М.: Сов. энциклопедия, 1988. 847 с.
3. *Сборник задач по методам вычислений / под ред. П.И. Монастырского*. – Мн.: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1983. 288 с.
4. *Несмеев Ю.А.* Об одном подходе к решению алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2011. № 1(13). С. 26–30.
5. *Глонти Э.Н.* Таблицы корней и квадратурных коэффициентов полиномов Якоби. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1971. 238 с.
6. *Руководство по программированию под управлением MS DOS*. М.: Радио и связь, 1995. 544 с.

Статья поступила 15.10.2013 г.

Nesmeev Yu.A. AN ALGORITHM FOR SOLVING CUBIC EQUATIONS

An algorithm for finding the roots of a cubic equation is proposed. It uses the dichotomy and the method of undetermined coefficients. It takes into account the relative position of the parabola and the hyperbola in the plane and the location of roots of algebraic equations in the complex plane. A modification of the algorithm is proposed. Using the algorithm, three examples are solved. One of them is looking for roots of the Jacobi polynomial. The well-known numerical method for solving cubic equations is estimated (from the viewpoint of the scientific and technical personnel). Its following stages are estimated. α) Searching for an interval that contains one root. β) Calculation of the initial approximation of the root. γ) Calculation of next approximations. δ) Dividing the left side of the cubic equation by a binomial. ϵ) Calculation of roots of a quadratic polynomial. The author reported the aim of researches presented in this article. The aim was to build such a numerical method of solving the equation $x^3+k_1x^2+k_2x+k_3=0$, (1) that is available to technologists and does not use the method of tangents. The author reported the problem of the research: to construct such an algorithm that computes roots of equation (1) without performing actions α , β , γ , and δ and uses the dichotomy. The problem of the research was solved under the assumption that $k_3 \neq 0$. The used methods are as follows: studying and analyzing the literature, mathematical calculations, mathematical modeling, and computer experiment. The following algorithm is presented. **1.** Calculating values of the quantities b_3 , c_0 , n_b , and n_c by formulas $b_3 = \max \{1, |-2k_1|, |k_1^2 + k_2|\}$, $c_0 = \max \{|-2k_1|, |k_1^2 + k_2|, |-k_1k_2 + k_3|\}$, $n_b = |-k_1k_2 + k_3| / (b_3 + |-k_1k_2 + k_3|)$, and $n_c = 1 + c_0$. **2.** Checking quantities n_b for being a root of the equation $q(z) \equiv z^3 - 2k_1z^2 + (k_1^2 + k_2)z - k_1k_2 + k_3 = 0$. In the case of a positive test result, assigning the value n_b to the quantity t^* and going to step 4. **3.** Determination of the sign of the product $q(n_b) \cdot q(n_c)$. In the case of a negative sign, the dichotomy is applied to the interval $[n_b, n_c]$ and the quantity t^* is assigned the value of the found root. In the case of a positive sign, the dichotomy is applied to the interval $[-n_c, -n_b]$ and the quantity t^* is assigned the value of the found root. **4.** Calculating the real root x_1 of equation (1) by the formula $x_1 = t^* - k_1$. **5.** Evaluation of the quantities a^* and b^* by the formulas $a^* = t^*$ and $b^* = a^*(a^* - k_1) + k_2$. **6.** Calculation of roots of the equation $x^2 + a^*x + b^* = 0$ and assigning their values to the roots x_2 and x_3 of equation (1). In two examples, the author used a specially designed computer programs written in Turbo Pascal. Arithmetic operations on numbers and square rooting generation for non-negative numbers were performed by arithmetic

expressions and *sqrt* function, respectively, from the programming language standard. In one example, operations on numbers were replaced by operations on strings.

Keywords: dichotomy, complex plane, root of an equation.

NESMEEV Yurii Alekseevich (Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation)

E-mail: nes_ya@list.ru

REFERENCES

1. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i tablitsami*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 832 p. (in Russian)
2. *Matematicheskiy entsiklopedicheskiy slovar'*. Moscow, Sov. entsiklopediya Publ., 1988, 847 p. (in Russian)
3. Monastyrskiy P.I., ed. *Sbornik zadach po metodam vychisleniy*. Minsk, Izd-vo BGU im. V.I. Lenina, 1983, 288 p. (in Russian)
4. Nesmeev Yu.A. Ob odnom podkhode k resheniyu algebraicheskikh uravneniy 3-y i 4-y stepeney. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 1(13), pp. 26–30. (in Russian)
5. Glonti E.N. *Tablitsy korney i kvadraturnykh koeffitsientov polinomov Yakobi*. Moscow, Vychislitel'nyy tsentr AN SSSR Publ., 1971, 238 p. (in Russian)
6. *Rukovodstvo po programmirovaniyu pod upravleniem MS DOS*. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1995, 544 p. (in Russian)

УДК 519.2

В.А. Пчелинцев, Е.А. Пчелинцев

**МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ГАУССОВСКОЙ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ**

Рассматривается задача минимаксного оценивания d -мерного вектора неизвестных параметров регрессии с гауссовскими шумами при квадратической функции потерь. Предлагается модификация процедуры Джеймса – Стейна, для которой найдена явная верхняя граница для среднеквадратического риска и показано, что ее риск строго меньше риска классической оценки максимального правдоподобия для размерности $d \geq 2$. Проведено численное сравнение среднеквадратических рисков рассматриваемых оценок.

Ключевые слова: параметрическая регрессия, улучшенное оценивание, процедура Джеймса – Стейна, среднеквадратический риск, минимаксная оценка.

Рассмотрим классическую задачу оценивания неизвестных параметров регрессионных моделей. Пусть наблюдения описываются уравнением

$$Y = \theta + \sigma \xi, \tag{1}$$

где θ – неизвестный вектор постоянных параметров из некоторого ограниченного множества $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, ξ – гауссовский случайный вектор с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей I_d , т.е. $Law(\xi) = N_d(0, I_d)$, σ – некоторое известное положительное число. Задача состоит в том, чтобы оценить параметр θ по наблюдениям Y . В качестве меры точности оценки $\hat{\theta}$ выберем среднеквадратический риск, определяемый следующим образом:

$$R(\theta, \hat{\theta}) := E_{\theta} |\theta - \hat{\theta}|^2, |x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2,$$

E_{θ} – математическое ожидание относительно меры P_{θ} . Напомним, что оценкой параметра θ является любая борелевская функция от наблюдений Y [1].

Известно [2], что наилучшей по точности в классе линейных несмещенных оценок является оценка по методу максимального правдоподобия

$$\hat{\theta}_{ML} = Y, \tag{2}$$

которая имеет нормальное распределение $N_d(\theta, \sigma^2 I_d)$ и ее среднеквадратический риск определяется равенством

$$R(\theta, \hat{\theta}_{ML}) = d\sigma^2.$$

В 1961 г. Джеймс и Стейн [3] предложили сжимающую оценку вида

$$\hat{\theta}_{JS} = \left(1 - \frac{c}{|Y|^2} \right) Y,$$

которая для всех $0 < c < 2(d-2)$ равномерно по θ превосходит по среднеквадра-

тической точности оценку метода максимального правдоподобия при $d \geq 3$, т.е. для любого $\theta \in \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство

$$R(\theta, \hat{\theta}_{JS}) < R(\theta, \hat{\theta}_{ML}).$$

Оценка Джеймса – Стейна является минимаксной оценкой [3, 4]. Полученный результат побудил многих статистиков к развитию так называемой теории улучшенного оценивания. Появилась серия работ, в которых были предложены различные минимаксные модификации оценки Джеймса – Стейна. Одной из простых модификаций является оценка

$$\hat{\theta}_{JS}^+ = \left(1 - \frac{c}{|Y|^2} \right)_+ Y, \quad a_+ = \max(a, 0),$$

которая известна как положительная часть оценки Джеймса – Стейна и была предложена в 1964 году Баранчиком [5]. В этой работе было доказано, что такая оценка превосходит по среднеквадратической точности не только оценку по методу максимального правдоподобия, но и оценку Джеймса – Стейна $\hat{\theta}_{JS}$ (см. рис. 1).

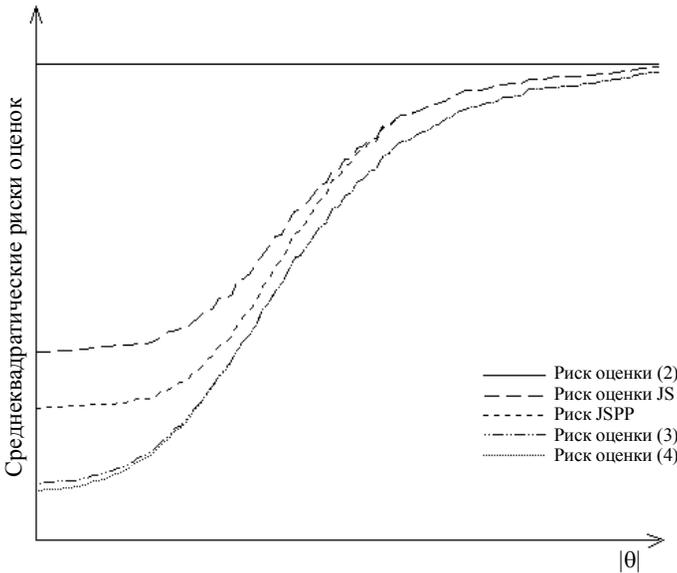


Рис. 1. Среднеквадратические риски оценок максимального правдоподобия (2), Джеймса – Стейна, её положительной части, (3) и (4) как функции от $|\theta|$

Различные оценки, обладающие аналогичным свойством, были предложены в работах [6–8]. В перечисленных работах сжимающий коэффициент не был явно определен аналитически, а лишь предложены алгоритмы его численной оптимизации. Задача Джеймса – Стейна была изучена для более общих моделей, в том числе с неизвестной ковариационной матрицей [9–11]. Значительные усилия были направлены на решение задачи улучшенного оценивания в негауссовских моделях [12–17].

В работах [14–17] для модели регрессии, в которой шум является условно-гауссовским, предложены новые минимаксные модификации оценки Джемса – Стейна вида

$$\theta^* = \left(1 - \frac{c}{|Y|}\right) Y. \quad (3)$$

Здесь, в отличие от всех других модификаций, сжимающий коэффициент определяется множителем, содержащим $|Y|$, а не $|Y|^2$. Такая замена оправдана тем, что позволяет получить явные формулы для среднеквадратической точности и контролировать ее.

Лемма. Пусть наблюдения описываются уравнением (1). Тогда оценка θ^* с $c = (d-1)\sigma^2\delta_d$, где $\delta_d = (\beta + \sigma\sqrt{d})^{-1}$, $\beta = \sup_{\theta \in \Theta} \{|\theta|\}$, превосходит по среднеквадратической точности оценку максимального правдоподобия для любого $d \geq 2$ и является минимаксной, причем разность рисков удовлетворяет неравенству

$$\Delta^*(\theta) := R(\theta, \theta^*) - R(\theta, \hat{\theta}) \leq -((d-1)\sigma^2\delta_d)^2.$$

Доказательство. Рассмотрим риски оценок (2) и (3):

$$R(\hat{\theta}_{ML}, \theta) = \mathbf{E}_\theta |\hat{\theta}_{ML} - \theta|^2 = \sigma^2 \mathbf{E}_\theta |\xi|^2 = \sigma^2 d;$$

$$R(\theta^*, \theta) = R(\hat{\theta}_{ML}, \theta) + \mathbf{E}_\theta (g(Y) - 1)^2 |Y|^2 + 2 \sum_{j=1}^d \mathbf{E}_\theta (g(Y) - 1) Y_j (Y_j - \theta_j),$$

где $g(Y) = 1 - c/|Y|$.

Обозначив $f(Y) = (g(Y) - 1)Y_j$ и используя плотность распределения вектора Y

$$p_Y(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sigma} \exp\left(-\frac{|x - \theta|^2}{2\sigma^2}\right),$$

имеем

$$I_j := \mathbf{E}_\theta f(Y)(Y_j - \theta_j) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(x_j - \theta_j) p_Y(x) dx, \quad j = \overline{1, d}.$$

Делая замену переменной $u = (x - \theta)/\sigma$ и полагая $\tilde{f}(u) = f(\sigma u + \theta)$, находим

$$I_j = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(u) u_j \exp\left(-\frac{|u|^2}{2}\right) du, \quad j = \overline{1, d}.$$

Эти величины можно переписать как

$$I_j = \sigma^2 \mathbf{E}_\theta \left(\frac{\partial f}{\partial u_j}(u) \Big|_{u=Y} \right), \quad j = \overline{1, d}.$$

Таким образом, квадратический риск для оценки (3) представляется в виде

$$R(\theta^*, \theta) = R(\hat{\theta}_{ML}, \theta) + \mathbf{E}_\theta (g(Y) - 1)^2 |Y|^2 + 2\sigma^2 \mathbf{E}_\theta \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial u_j} [(g(u) - 1)u_j] \Big|_{u=Y} \right).$$

Отсюда, после несложных преобразований, получаем

$$R(\theta, \theta^*) = R(\theta, \hat{\theta}) + E_{\theta} W(Y),$$

где

$$W(x) = c^2 - 2(d-1)\sigma^2 \frac{c}{|x|}.$$

Следовательно,

$$\Delta(\theta) = c^2 - 2(d-1)\sigma^2 c E_{\theta} |Y|^{-1}.$$

Оценим снизу величину $E_{\theta} |Y|^{-1}$. Из неравенства Йенсена [18] имеем

$$E_{\theta} |Y|^{-1} \geq (|\theta| + \sigma E_{\theta} |\xi|)^{-1} \geq (\beta + \sigma\sqrt{d})^{-1} = \delta_d.$$

Тогда для всех $\theta \in \Theta$:

$$\Delta(\theta) \leq c^2 - 2(d-1)\sigma^2 \delta_d c =: \varphi(c).$$

Минимизируя функцию $\varphi(c)$ по c , получим

$$\Delta^*(\theta) \leq -((d-1)\sigma^2 \delta_d)^2.$$

Лемма доказана.

Цель настоящей статьи выяснить, является ли оценка

$$\theta_+^* = \left(1 - \frac{c}{|Y|}\right)_+ Y \tag{4}$$

– положительная часть оценки (3), улучшенной по сравнению с оценками метода максимального правдоподобия (2) и θ^* и, следовательно, минимаксной.

Введем следующие обозначения:

$$M = (d-1)\sigma^2 \delta_d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) / \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{((d-1)\sigma \delta_d)^2}{2}\right),$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \gamma(z, a) = \int_0^a t^{z-1} e^{-t} dt$$

– полная и неполная гамма-функции соответственно,

$$\Theta_M = \{\theta \in \Theta : |\theta| < M\}.$$

Теорема. Пусть наблюдения описываются уравнением (1), причем $\theta \in \Theta_M$.

Тогда оценка (4) с $c = (d-1)\sigma^2 \delta_d$ превосходит по среднеквадратической точности оценку максимального правдоподобия (2) для любого $d \geq 2$, т.е.

$$\sup_{\theta \in \Theta_M} [R(\theta, \theta_+^*) - R(\theta, \hat{\theta})] < 0,$$

и является минимаксной.

Доказательство. Рассмотрим риск оценки (4):

$$R(\theta, \theta_+^*) = E_{\theta} |\theta - \theta_+^*|^2 = E_{\theta} |\theta - \theta_+^*|^2 I_{(|Y|>c)} + E_{\theta} |\theta - \theta_+^*|^2 I_{(|Y|\leq c)} =$$

$$\begin{aligned}
&= E_{\theta} |\theta - \theta_+^*|^2 I_{(|Y|>c)} + E_{\theta} |\theta|^2 I_{(|Y|\leq c)} = E_{\theta} |\theta - \theta_+^*|^2 (1 - I_{(|Y|\leq c)}) + E_{\theta} |\theta|^2 I_{(|Y|\leq c)} = \\
&= R(\theta, \theta^*) - E_{\theta} |\theta - \theta_+^*|^2 I_{(|Y|\leq c)} + |\theta|^2 P_{\theta} (|Y| \leq c),
\end{aligned}$$

где $I_A(t)$ – индикатор множества A , т.е.

$$I_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Поскольку второе слагаемое неотрицательно, то для риска оценки (4) получаем оценку

$$R(\theta, \theta_+^*) \leq R(\theta, \theta^*) + |\theta|^2 P_{\theta} (|Y| \leq c). \quad (5)$$

Используя неравенство Андерсона [18], для вероятности имеем

$$P_{\theta} (|Y| \leq c) = P_{\theta} (|\theta + \sigma \xi| \leq c) \leq P_{\theta} \left(|\xi|^2 \leq \frac{c^2}{2\sigma^2} \right).$$

Подставляя эту оценку в (5) и учитывая, что величина $|\xi|^2$ имеет хи-квадрат-распределение с d степенями свободы, получаем

$$R(\theta, \theta_+^*) \leq R(\theta, \theta^*) + |\theta|^2 \frac{\gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{c^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \quad (6)$$

Далее, из предыдущей леммы следует, что

$$R(\theta, \theta_+^*) \leq R(\theta, \hat{\theta}) - \left((d-1)\sigma^2\delta_d \right)^2 + |\theta|^2 \frac{\gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{((d-1)\sigma\delta_d)^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$

Отсюда и из условий теоремы имеем следующее неравенство для рисков оценок (4) и (2):

$$R(\theta, \theta_+^*) - R(\theta, \hat{\theta}) < 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. В теореме утверждается, что предложенная оценка (4) является улучшенной в смысле среднеквадратической точности по сравнению с оценкой максимального правдоподобия (2) и, следовательно, является минимаксной оценкой. Остался открытым вопрос: будет ли оценка (4) превосходить по среднеквадратической точности и оценку (3). Из неравенства (6) следует, что оценка (4) может иметь большую точность по сравнению с (3) лишь в случаях, когда неизвестный параметр лежит в некоторой малой окрестности нуля.

Для подтверждения аналитически установленных результатов, в среде Scilab проведено численное моделирование среднеквадратических рисков рассматриваемых в работе оценок. При численном моделировании наблюдений Y предполагалось, что размерность вектора параметров $d = 5$, коэффициент $\sigma = 1$ и ξ – вектор с независимыми случайными гауссовскими $(0, 1)$ компонентами. Вектор парамет-

ров θ выбирался таким, что $|\theta|$ изменяется в пределах от 0 до 100. Оценки вычислялись по соответствующим формулам (2) – (4). Среднеквадратический риск оценки вычислялся по эмпирической формуле

$$\tilde{R}(\theta, \hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\theta - \hat{\theta}_k|^2,$$

где $\hat{\theta}_k$ – k -я реализация оценки $\hat{\theta}$ и $N = 10\,000$.

На представленном рисунке видно, что в заданной области наилучшей по среднеквадратической точности является предложенная минимаксная оценка (4). Отметим, что при $|\theta| \rightarrow \infty$ риски всех изучаемых в работе оценок будут стремиться к риску оценки максимального правдоподобия (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fourdrinier D.* Statistique Inférentielle. Paris: Dunod, 2002.
2. *Lehmann E.L., Casella G.* Theory of Point Estimation. 2nd edition. N.Y.: Springer, 1998.
3. *James W., Stein C.* Estimation with quadratic loss // Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics Statistics and Probability. V. 1. Berkeley: University of California Press, 1961. P. 361–380.
4. *Stein C.* Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // The Annals of Statistics. 1981. V. 9(6). P. 1135–1151.
5. *Baranchik A.J.* Multiple regression and estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Technical Report / Department of Statistics, Stanford University. 1964. V. 51.
6. *Strawderman W.E.* Proper Bayes minimax estimators of the multivariate normal distribution // Annals of Mathematical Statistics. 1971. V. 42. P. 385–388.
7. *Guo Y.Y., Pal N.* A sequence of improvements over the James – Stein estimator // J. Multivariate Analysis. 1992. V. 42. P. 302–317.
8. *Shao P.Y.-S., Strawderman W.E.* Improving on the James – Stein positive-part estimator // The Annals of Statistics. 1994. V. 22. P. 1517–1538.
9. *Efron B., Morris C.* Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution // The Annals of Statistics. 1976. No. 4. P. 11–21.
10. *Berger J.O., Haff L.R.* A class of minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix // Statist. Decisions. 1983. No. 1. P. 105–129.
11. *Gleser L.J.* Minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix // The Annals of Statistics. 1986. V. 14. P. 1625–1633.
12. *Fourdrinier D., Pergamenschikov S.* Improved selection model method for the regression with dependent noise // Ann. of the Inst. of Statist. Math. 2007. V. 59 (3). P. 435–464.
13. *Fourdrinier D., Strawderman W.E., William E.* A unified and generalized set of shrinkage bounds on minimax Stein estimates // J. Multivariate Anal. 2008. V. 99. P. 2221–2233.
14. *Пчелинцев Е.А.* Процедура Джеймса – Стейна для условно-гауссовской регрессии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 4(16). С. 6–17.
15. *Конов В.В., Пчелинцев Е.А.* Оценивание параметрической регрессии с импульсными шумами по дискретным наблюдениям // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1(17). С. 20–35.
16. *Pchelintsev E.* Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2013. V. 16 (1). P. 15–28.
17. *Конов В.В., Пергаменищиков С.М., Пчелинцев Е.А.* Оценивание регрессии с шумами импульсного типа по дискретным наблюдениям // ТВП. 2013. V. 58(3). С. 454–471.
18. *Ибрагимов И.А., Хасъминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.

Статья поступила 15.07.2014 г.

Pchelintsev V.A., Pchelintsev E.A. MINIMAX ESTIMATION OF THE GAUSSIAN PARAMETRIC REGRESSION

The paper considers the problem of estimating a $d \geq 2$ dimensional mean vector of a multivariate normal distribution under quadratic loss. Let the observations be described by the equation

$$Y = \theta + \sigma \xi, \quad (1)$$

where θ is a d -dimension vector of unknown parameters from some bounded set $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, ξ is a Gaussian random vector with zero mean and identity covariance matrix I_d , i.e. $Law(\xi) = N_d(0, I_d)$ and σ is a known positive number. The problem is to construct a minimax estimator of the vector θ from observations Y . As a measure of the accuracy of estimator $\hat{\theta}$ we select the quadratic risk defined as

$$R(\theta, \hat{\theta}) := E_{\theta} |\theta - \hat{\theta}|^2, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2,$$

where E_{θ} is the expectation with respect to measure P_{θ} .

We propose a modification of the James – Stein procedure of the form

$$\theta_+^* = \left(1 - \frac{c}{|Y|}\right)_+ Y$$

where $c > 0$ is a special constant and $a_+ = \max(a, 0)$ is a positive part of a . This estimate allows one to derive an explicit upper bound for the quadratic risk and has a significantly smaller risk than the usual maximum likelihood estimator and the estimator

$$\theta^* = \left(1 - \frac{c}{|Y|}\right) Y$$

for the dimensions $d \geq 2$. We establish that the proposed procedure θ_+^* is minimax estimator for the vector θ .

A numerical comparison of the quadratic risks of the considered procedures is given. In conclusion it is shown that the proposed minimax estimator θ_+^* is the best estimator in the mean square sense.

Keywords: parametric regression; improved estimation; James – Stein procedure; mean squared risk, minimax estimator.

Pchelintsev Valery Anatolyevich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: vpchelintsev@vtomske.ru

Pchelintsev Evgeny Anatolyevich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: evgen-pch@yandex.ru

REFERENCES

1. Fourdrinier D. *Statistique Inférentielle*. Paris, Dunod Publ., 2002.
2. Lehmann E.L., Casella G. *Theory of Point Estimation*. 2nd ed. N.Y., Springer, 1998.
3. James W., Stein C. Estimation with quadratic loss. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics Statistics and Probability*. Berkeley, University of California Press., 1961, vol. 1, pp. 361–380.
4. Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics*, 1981, vol. 9(6), pp. 1135–1151.
5. Baranchik A.J. Multiple regression and estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Technical Report. Department of Statistics*, Stanford University, 1964, vol. 51.

6. Strawderman W.E. Proper Bayes minimax estimators of the multivariate normal distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, 1971, vol. 42, pp. 385–388.
7. Guo Y.Y., Pal N. A sequence of improvements over the James – Stein estimator. *J. Multivariate Analysis*, 1992, vol. 42, pp. 302–317.
8. Shao P.Y.-S., Strawderman W.E. Improving on the James – Stein positive-part estimator. *The Annals of Statistics*, 1994, vol. 22, pp. 1517–1538.
9. Efron B., Morris C. Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics*, 1976, no. 4, pp. 11–21.
10. Berger J.O., Haff L.R. A class of minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix. *Statist. Decisions*, 1983, no. 1, pp. 105–129.
11. Gleser L.J. Minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix. *The Annals of Statistics*, 1986, vol. 14, pp. 1625–1633.
12. Fourdrinier D., Pergamenshchikov S. Improved selection model method for the regression with dependent noise. *Ann. of the Inst. of Statist. Math.*, 2007, vol. 59 (3), pp. 435–464.
13. Fourdrinier D., Strawderman W.E., William E. A unified and generalized set of shrinkage bounds on minimax Stein estimates. *J. Multivariate Anal.*, 2008, vol. 99, pp. 2221–2233.
14. Pchelintsev E.A. Protsedura Dzhemyssa – Steyna dlya uslovno-gaussovskoy regressii. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 4(16), pp. 6–17. (in Russian)
15. Konev V.V., Pchelintsev E.A. Otsenivanie parametricheskoy regressii s impul'snymi shumami po diskretnym nablyudeniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 1(17), pp. 20–35. (in Russian)
16. Pchelintsev E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2013, vol. 16 (1), pp. 15–28.
17. Konev V.V., Pergamenshchikov S.M., Pchelintsev E.A. Estimation of a regression with the noise of pulse type from discrete data. *Theory of Probability and its Applications*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 454–471.
18. Ibragimov I.A., Khas'minskii R.Z. *Statistical Estimation. Asymptotic Theory*. New York, Springer-Verlag, 1981.

УДК 512.541

К.С. Сорокин

SP-ГРУППЫ РАНГА 2 С ЧИСТЫМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Данная работа продолжает исследование [1] вопросов чистоты колец эндоморфизмов SP-групп – одного из известных классов смешанных абелевых групп. Ключевой результат – доказательство чистоты колец эндоморфизмов SP-групп ранга 2 с циклическими p -компонентами без бесконечных периодических прямых слагаемых. Полученные при доказательстве основного результата вспомогательные утверждения позволяют получить представление о строении колец эндоморфизмов групп данного класса.

Ключевые слова: смешанная абелева группа, SP-группа, чистое кольцо, кольцо эндоморфизмов.

Данная работа является продолжением исследований автора [1] вопросов чистоты колец эндоморфизмов SP-групп конечного ранга без кручения – одного из классов смешанных абелевых групп [2–4]. Ранее автором было доказано, что кольца эндоморфизмов SP-групп ранга 1 с циклическими p -компонентами являются чистыми. Кроме того, было показано, что любой эндоморфизм SP-группы конечного ранга с циклическими p -компонентами, переводящий все элементы группы в её периодическую часть, является чистым.

В данной работе объектом исследования являются SP-группы ранга 2 с циклическими p -компонентами без бесконечных периодических прямых слагаемых. Ниже приведён основной результат, содержащий полный ответ на вопрос о чистоте рассматриваемых групп.

Теорема. *Кольцо эндоморфизмов SP-группы ранга 2 с циклическими p -компонентами, не имеющей бесконечных периодических прямых слагаемых, является чистым.*

Напомним основные определения.

Определение 1. Пусть R – кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется *чистым*, если $r = u + e$, где e – идемпотент, а u – обратимый элемент кольца R . Кольцо R называется *чистым*, если всякий его элемент является чистым.

Определение 2. Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p -компонент называется SP-группой, если естественное вложение $\bigoplus_p A_p \rightarrow \prod_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \rightarrow \prod_p A_p$. Здесь и далее предполагается, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A , то есть таких, что $A_p \neq 0$.

Пусть для группы A выполнено условие

$$A / \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p \cong W, \tag{1}$$

где W – двумерное подпространство \mathbb{Q} -пространства $\prod_{p \in \mathbb{P}} A_p / \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, порождённое двумя линейно независимыми векторами $a_i + \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, $i = 1, 2$. Причём \tilde{a}_i – беско-

нечные векторы из $\prod_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где $A_p \cong \mathbb{Z}_{k_p}$, $k_p \in \mathbb{N}$, \mathbb{P} – некоторое бесконечное множество простых чисел. Обозначим через Λ_i множество тех простых чисел $p \in \mathbb{P}$, для которых $\pi_p a_i \neq 0$. Будем полагать, что $\mathbb{P} \setminus (\bigcup_{i=1,2} \Lambda_i)$ – конечное множество, что равнозначно (поскольку все p -компоненты циклические) условию, что группа A не содержит бесконечных периодических прямых слагаемых. Легко показать, что A – SP-группа ранга 2. В свою очередь, любая SP-группа ранга 2 удовлетворяет условию (1), поэтому в дальнейшем изложении будем пользоваться представлением группы A , описанным выше.

Доказательство основного результата удобно разбить на несколько частей, каждая из которых будет соответствовать одному из следующих случаев строения множеств Λ_1 и Λ_2 :

- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – конечное множество;
- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное;
- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества.

Таким образом, план доказательства – показать чистоту кольца эндоморфизмов группы A для каждого из описанных выше случаев. Это будет гарантировать справедливость чистоты кольца эндоморфизмов для произвольной группы A , удовлетворяющей условиям теоремы.

Заметим, что в случае, когда $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – конечное множество, группу A можно представить в виде $A = (\prod_{p \in \Lambda_1 \setminus \Omega} A_p) \oplus (\prod_{p \in \Lambda_2 \setminus \Omega} A_p) \oplus (\prod_{p \in \Omega} A_p)$, где

$\Omega = (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \cup (\mathbb{P} \setminus (\bigcup_{i=1,2} \Lambda_i))$ – конечное множество. Учитывая полученные ранее результаты для случая SP-групп ранга 1 [1], мы получим, что группа A обладает чистым кольцом эндоморфизмов. Таким образом, согласно предложенному плану, остаётся рассмотреть оставшиеся два случая – когда $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ является бесконечным множеством. Поэтому далее для группы A будем предполагать, что данное условие выполнено.

Ниже рассмотрим некоторые вспомогательные результаты, которые будут использоваться при доказательстве основных результатов.

Запишем проекции для базисных векторов:

$$\pi_p(a_i) = p^{k_p - s_p^i} \alpha_p^i c_p,$$

и зафиксируем действие эндоморфизма f на p -компонентах группы A

$$f c_p = n_p c_p,$$

где $n_p \in \mathbb{Z}$; $\alpha_p^i \in \mathbb{Z}$, причём $(\alpha_p^i, p) = 1$; $s_p^i \in \mathbb{N}$, причём $0 < s_p^i \leq p^k$; c_p – образующий элемент группы A_p .

Лемма 1. Пусть множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное. Тогда $f a_2 \in T(A)$, если $f a_1 \in T(A)$.

Доказательство. Поскольку $fa_2 \in A$, найдутся такие целые числа n, n_1, n_2 , $a_2^t \in T(A)$, что $nfa_2 = n_1a_1 + n_2a_2 + a_2^t$. Перейдём к равенствам для p -компонент: почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство

$$nf\pi_p a_2 = n_1\pi_p a_1 + n_2\pi_p a_2.$$

Но $\pi_p a_2 = 0$, а $\pi_p a_1 \neq 0$ для $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, откуда следует, что $n_1 = 0$. Таким образом,

$$nfa_2 = n_2a_2 + a_2^t. \quad (2)$$

Следовательно, найдутся такие $n', n_2 \in \mathbb{Z}$, $a_1^2 \in T(A)$, что справедливо следующее равенство:

$$n'fa_2 = n_2a_2 + a_1^2.$$

Тогда почти для всех $p \in \Lambda_1$ имеем

$$\pi_p(fa_1) = n_p p^{k_p - s_p^1} \alpha_p^1 c_p = 0.$$

Следовательно, $n_p \div p^{s_p^1}$. В таком случае

$$n' n_p p^{k_p - s_p^2} \alpha_p^2 c_p = n' \pi_p(fa_2) = n_2 p^{k_p - s_p^2} \alpha_p^2 c_p.$$

Поэтому $(n' n_p - n_2) \div p^{s_p^2}$. Поскольку $s_p^i \neq 0$, то $n_2 \div p$ почти для всех $p \in \Lambda_1$. То есть $n_2 = 0$, а значит, $fa_2 \in T(A)$. ■

Лемма 2. Если для базисных векторов a_1 и a_2 существуют прообразы при отображении $f \in E(A)$ и f – автоморфизм для каждой p -компоненты A_p , то f – автоморфизм группы A .

Доказательство. Поскольку f – автоморфизм для каждой p -компоненты A_p , то f – мономорфизм группы A и автоморфизм группы $\prod_{p \in \mathbb{P}} A_p$. Для доказательства

предложения таким образом необходимо показать, что f – эпиморфизм. Поскольку $f|_{A_p}$ – автоморфизм для любого $p \in \mathbb{P}$, то для любого элемента группы A конечного

порядка найдётся прообраз при отображении f . Поэтому далее будет рассмотрен случай бесконечных векторов. Обозначим прообразы для векторов a_1 и a_2 через b_1 , b_2 соответственно. Покажем теперь, что для любого бесконечного вектора $a \in A$ элемент $f^{-1}(a) \in C$. Так как $a \in A$, найдутся такие $m, n_2 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \in T(A)$, что справедливо следующее равенство:

$$ma = m_1a_1 + m_2a_2 + a_1.$$

Заметим, что поскольку f – автоморфизм группы $\prod_{p \in \mathbb{P}} A_p$, то прообраз $f^{-1}(a)$ существует, поскольку $a \in A \subseteq \prod_{p \in \mathbb{P}} A_p$. Проверим, принадлежит ли $f^{-1}(a)$

группе A :

$$\begin{aligned} mf^{-1}(a) &= f^{-1}(ma) = f^{-1}(m_1a_1 + m_2a_2 + a_i) = \\ &= m_1f^{-1}(a_1) + m_2f^{-1}(a_2) + f^{-1}(a_i) = \\ &= m_1b_1 + m_2b_2 + f^{-1}(a_i). \end{aligned}$$

Ввиду того, что f – автоморфизм для каждой p -компоненты A_p , то $f^{-1}(a_i) \in A$. Тогда $m_1b_1 + m_2b_2 + f^{-1}(a_i) \in A$, а значит, и $mf^{-1}(a) \in A$. Следовательно, f – эпиморфизм группы A . ■

Лемма 3. Если существует такое конечное подмножество $\Omega \subset \mathbb{P}$, что f – чистый элемент в $E(\bigoplus_{p \in \mathbb{P} \setminus \Omega} A_p)$, то f – чистый элемент в $E(A)$.

Доказательство. Обозначим группу $\bigoplus_{p \in \mathbb{P} \setminus \Omega} A_p$ через C . Заметим, что $f|_{\bigoplus_{p \in \Omega} A_p}$ – чистый элемент кольца $E(\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$, поскольку $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$ – ограниченная группа (см. [7]). Принимая во внимание тот факт, что $A = C \oplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$ и то, что C и $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$ – вполне характеристические подгруппы группы A , из [6] получим, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

После доказательства некоторых вспомогательных утверждений перейдем непосредственно ко второму случаю из рассмотренного нами плана ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное). В следующей лемме будет рассмотрена первая часть доказательства данного случая, когда каждое из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное. Заметим, что для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$, поскольку в противном случае f – заведомо чистый элемент [1].

Лемма 4. Пусть множества $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечные. Тогда кольцо $E(A)$ является чистым.

Доказательство. Согласно условию теоремы, $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ и $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечные множества. В этом случае, согласно лемме 1, для любого эндоморфизма f группы A образ fa_2 может зависеть только от одного образующего вектора a_2 , а образ fa_1 – только от вектора a_1 . Следовательно, найдутся такие $n, n', n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $a_1^t, a_1^2 \in T(A)$, что справедливы следующие равенства:

$$nfa_1 = n_1a_1 + a_1^t, \tag{3}$$

$$n'fa_2 = n_2a_2 + a_1^2. \tag{4}$$

Заметим, что если $f \neq 0$, то, в силу леммы 1, справедливы следующие импликации:

$$\text{если } fa_1 \in T(A), \text{ то } fa_2 \in T(A);$$

$$\text{если } fa_2 \in T(A), \text{ то } fa_1 \in T(A).$$

Отсюда следует, что $fa_1 \notin T(A)$ и $fa_2 \notin T(A)$.

Покажем, что существует такое прямое слагаемое C группы A , что f – автоморфизм на C , причём $A = C \oplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$, а $\Omega \subseteq \mathbb{P}$ – конечное множество. Рас-

смотрим покомпонентно первое из равенств (3), (4): почти для всех $p \in \Lambda_1$ верны равенства

$$nn_p(\pi_p a_1) = \pi_p(nfa_1) = \pi_p(n_1 a_1) = n_1 \pi_p(a_1).$$

С учётом вида проекций для базисных векторов получим

$$(nn_p - n_1): p^{s_p^1}.$$

Поскольку $fa_1 \notin T(A)$, можно сделать вывод, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_1$.

Аналогично можно показать, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_2$. Тогда $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых последнее равенство не выполнено, обозначим через Ω . Добавим также к множеству Ω конечное множество тех простых чисел $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n_i ($i = 1, 2$). В таком случае получим разложение $A = C \oplus (\oplus_{p \in \Omega} A_p)$, где C – дополнительное прямое слагаемое к $\oplus_{p \in \Omega} A_p$. Причём подгруппа C – p -делимая для каждого $p \in \Omega$. Заметим, что поскольку $(n_p, p) = 1$ для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$, то $f|_{A_p}$ – автоморфизм для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Покажем, что существуют такие элементы $b_i \in A$ ($i = 1, 2$), что $fb_i = \pi_C a_i$, где группа C удовлетворяет описанным выше условиям. Поскольку C является n_i -делимой группой ($i = 1, 2$), то найдутся такие элементы $b_i \in C$, что $n_1 b_1 = n \pi_C(a_1)$ и $n_2 b_2 = n' \pi_C(a_2)$. В таком случае справедливо равенство

$$n_1 f b_1 = f(n_1 b_1) = f(n \pi_C(a_1)) = \pi_C(nfa_1) = \pi_C(n_1 a_1).$$

Отсюда следует, что $n_1(fb_1 - \pi_C(a_1)) = 0$. Тогда $fb_1 - \pi_C(a_1) \in \oplus_{p \in \Omega} A_p$, с другой стороны – $fb_1 - \pi_C(a_1) \in C$, поэтому $fb_1 = \pi_C(a_1)$. Аналогично можно показать, что $fb_2 = \pi_C(a_2)$. В таком случае выполнены условия леммы 2, следовательно, f – автоморфизм группы C . Таким образом, мы показали, что $f|_C$ – чистый элемент кольца $E(C)$, а значит, согласно лемме 3, f – чистый элемент $E(A)$. ■

Теперь мы можем перейти непосредственно к рассмотрению второго случая, когда $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное. Данное доказательство удобно провести в несколько этапов, каждый из которых будет соответствовать одному из дополнительных условий, налагающихся на порядки p -компонент базисных векторов и образы базисных векторов. Идеи первых двух доказательств в точности повторяют идеи и методы, изложенные в доказательстве предыдущего результата, отличия носят лишь технический характер, в связи с чем доказательства данных результатов не приводятся.

Во всех последующих результатах (леммы 5 – 9) будем полагать справедливость следующих условий: множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное, а множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное.

Лемма 5. Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 > 2s_p^2$ и f – такой эндоморфизм группы A , что $fa_2 \in T(A)$, то f – чистый элемент $E(A)$.

Лемма 6. Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$ и f – такой эндоморфизм группы A , что $fa_2 \notin T(A)$ и $fa_1 \notin T(A)$, то f – чистый элемент $E(A)$.

Лемма 7. Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 > 2s_p^2$, то кольцо $E(A)$ – чистое.

Доказательство. Как отмечалось ранее, для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$. Согласно лемме 5, в случае, когда $fa_2 \in T(A)$, f – чистый элемент $E(A)$.

Поскольку мы рассматриваем случай $f \notin R_t$, то, учитывая условия на множества $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ и $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$, можно показать, что $fa_1 \notin T(A)$. Следовательно, в случае, когда $fa_2 \notin T(A)$, выполнено условие леммы 6 и f – чистый элемент $E(A)$. Таким образом, мы показали, что $E(A)$ – чистое кольцо. ■

Лемма 8. Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 < 2s_p^2$, то кольцо $E(A)$ – чистое.

Доказательство. Как отмечалось ранее, для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$. Поскольку множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное, а множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное, то, как отмечалось в лемме 7, $fa_1 \notin T(A)$.

Покажем, что в условиях данной леммы $fa_2 \notin T(A)$. Предположим противное: что $fa_2 \in T(A)$. Поскольку множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное, а множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное, то для любого эндоморфизма f группы A образ fa_2 может зависеть только от одного образующего вектора a_2 . Таким образом, найдутся такие целые $n, n_2, n'_1, n'_2 \in \mathbb{Z}$ и $a'_1, a'_2 \in T(A)$, что

$$nfa_2 = n_2a_2 + a'_2; \tag{5}$$

$$n'fa_1 = n'_1a_1 + n'_2a_2 + a'_1. \tag{6}$$

Далее, перейдя во втором равенстве к p -компонентам, можно прийти к следующему выражению:

$$(p^{kp-s_p^1} (n' \gamma_p p^{s_p^2} - n'_1) \alpha_p^1 - n'_2 \alpha_p^2 p^{kp-s_p^2}); p^{kp}. \tag{7}$$

Рассмотрим далее два случая:

1. Для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$ справедливы неравенства $s_p^2 < s_p^1 < 2s_p^2$.
2. Для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 < s_p^2$.

Начнём с первого случая: для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$ справедливы неравенства $s_p^2 < s_p^1 < 2s_p^2$. Поскольку $s_p^2 < s_p^1$, то из (7) следует, что $n'_1 = 0$. То есть выражение (7) примет вид

$$(p^{kp-s_p^1+s_p^2} n' \gamma_p \alpha_p^1 - n'_2 p^{kp-s_p^2}); p^{kp}.$$

Далее, поскольку $s_p^1 < 2s_p^2$, то $k_p - s_p^1 + s_p^2 > k_p - s_p^2$. Значит,

$$(p^{2s_p^2 - s_p^1} n' \gamma_p \alpha_p^1 - n'_2) : p^{s_p^2}.$$

Следовательно, $n'_2 = 0$. В итоге мы получили, что $fa_1 \in T(A)$.

Рассмотрим далее случай, когда справедливо второе условие: для бесконечно-го числа $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 < s_p^2$. Тогда $k_p - s_p^1 > k_p - s_p^2$ и из выражения (7) будет следовать

$$(p^{s_p^2 - s_p^1} (n' \gamma_p p^{s_p^2} - n'_1) \alpha_p^1 - n'_2 \alpha_p^2) : p^{s_p^2}.$$

Это, в свою очередь, приведёт к тому, что $n'_2 = 0$. В таком случае из (7) получим, что $(n' \gamma_p p^{s_p^2} - n'_1) : p^{s_p^2}$, а значит, $n'_1 = 0$. В итоге получили, что $fa_1 \in T(A)$.

Таким образом, выполнено условие леммы 6 и f – чистый элемент $E(A)$. Следовательно, показали, что $E(A)$ – чистое кольцо. ■

Лемма 9. Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$, то кольцо $E(A)$ – чистое.

Доказательство. Для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$. Поскольку множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное, а множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное, то, как отмечалось в лемме 7, $fa_1 \notin T(A)$.

Рассмотрим вначале случай, когда $fa_2 \in T(A)$. Сразу отметим, что если разность множества Λ_2 и множества, для которого справедливы указанные выше равенства $s_p^1 = s_p^2$, есть бесконечное множество (обозначим данное множество через Λ), то $fa_1 \in T(A)$. Действительно, если для любого $p \in \Lambda$ будет справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$, то, с учётом условия $fa_2 \in T(A)$, получим $n'_1 = 0$. Последнее, в свою очередь, означает, что $n' fa_1 = n'_2 a_2 + a'_1$. С другой стороны, из равенства (7) следует, что при выполнении равенства $s_p^1 = s_p^2$ для бесконечного множества $p \in \Lambda_2$ справедливо $n'_2 : p$, то есть $n'_2 = 0$ и $fa_1 \in T(A)$. Полученное противоречие означает, что при $fa_2 \in T(A)$ равенство $s_p^1 = s_p^2$ справедливо почти для всех $p \in \Lambda_2$.

Таким образом, остаётся рассмотреть ситуацию, когда почти для всех $p \in \Lambda_2$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2 = s_p$. Из равенства (7) почти для всех $p \in \Lambda_2$ получим

$$(n'_1 \alpha_p^1 - n'_2 \alpha_p^2) : p^{s_p}.$$

Перейдём в группе $A/T(A)$ к новому базису: $b_1 + T(A) = (n'_1 a_1 - n'_2 a_2) + T(A)$, $b_2 + T(A) = a_2 + T(A)$. Очевидно, что векторы нового базиса выражаются через векторы старого и наоборот. Рассмотрим теперь проекции вектора $b_1 = n'_1 a_1 - n'_2 a_2$: почти для всех $p \in \Lambda_2$ $\pi_p b_2 = (n'_1 \alpha_p^1 - n'_2 \alpha_p^2) p^{k_p - s_p} c_p = 0$. Таким

образом, пришли к ситуации, описанной в начале данной статьи, когда группу A можно представить в виде прямой суммы двух групп ранга 1 и ограниченной периодической группы:

$$A = \left(\prod_{p \in \Lambda_1 \setminus \Omega} A_p \right) \oplus \left(\prod_{p \in \Lambda_2 \setminus \Omega} A_p \right) \oplus \left(\prod_{p \in \Omega} A_p \right),$$

где Ω – конечное множество простых чисел, в которое входит $\mathbb{P} \setminus (\bigcup_{i=1,2} \Lambda_i)$, а также все простые числа $p \in \Lambda_2$, для которых не выполнено равенство $s_p^1 = s_p^2 = s_p$. Учитывая полученные ранее результаты для случая SP-групп ранга 1 [1], можем утверждать, что группа A обладает чистым кольцом эндоморфизмов.

Перейдём к случаю, когда $fa_2 \notin T(A)$. Аналогично предыдущему случаю рассмотрим вначале вариант, когда разность множества Λ_2 и множества, для которого справедливы равенства $s_p^1 = s_p^2$, является бесконечным множеством (ранее мы обозначили данное множество через Λ). Тогда получаем, что условия леммы 6 выполнены, а значит, f – чистый элемент $E(A)$.

Рассмотрим ситуацию, когда $fa_2 \notin T(A)$ и почти для всех $p \in \Lambda_2$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2 = s_p$. Запишем равенство (5) покомпонентно: почти для всех $p \in \Lambda_2$

$$nn_p(\pi_p a_2) = \pi_p(nfa_2) = \pi_p(n_2 a_2) = n_2 \pi_p(a_2).$$

Отсюда следует, что $(nn_p - n_2): p^{s_p}$ почти для всех $p \in \Lambda_2$. При этом очевидно, что $(n_p, p) = 1$. Далее рассмотрим покомпонентно равенство (6): почти для всех $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$

$$n' n_p(\pi_p a_1) = \pi_p(n' fa_1) = \pi_p(n'_1 a_1 + n'_2 a_2) = \pi_p(n'_1 a_1) = n'_1 \pi_p(a_1).$$

Отсюда следует, что $(n' n_p - n'_1): p$ для бесконечного числа $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$. Следовательно, либо $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_1$, либо $n'_1 = 0$. В первом случае, аналогично доказательству леммы 4, легко показать, что существует такое прямое слагаемое C группы A , что f – мономорфизм на C , причём $A = C \oplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$, а $\Omega \subseteq \mathbb{P}$ – конечное множество. Кроме того, аналогично подходу, изложенному в доказательстве леммы 4, можно показать, что существуют прообразы проекций базисных векторов на группу C , что вместе с леммами 2 и 3 означает чистоту f в кольце $E(A)$. Рассмотрим подробнее второй вариант. В этом случае равенство (6) покомпонентно можно представить в следующем виде: почти для всех $p \in \Lambda_2$

$$n' n_p(\pi_p a_1) = n'_2 \pi_p(a_2).$$

Тогда $(n' n_p \alpha_p^1 - n'_2 \alpha_p^2): p^{s_p}$. Домножим обе части равенства на n и воспользуемся равенством $nn_p = p^{s_p} \delta_p + n_2$. Получим

$$(n'(p^{s_p} \delta_p + n_2) \alpha_p^1 - nn'_2 \alpha_p^2): p^{s_p}.$$

Отсюда следует, что $(n_1 n_2 \alpha_p^1 - n n_2 \alpha_p^2) : p^{s_p}$. Далее, аналогично рассуждениям, изложенным в доказательстве данной леммы для случая $fa_2 \in T(A)$, легко показать, что группу A можно представить в виде прямой суммы двух групп ранга 1 и ограниченной периодической группы, что, в свою очередь, будет означать чистоту кольца эндоморфизмов группы A . Таким образом, для каждого из рассмотренных случаев $fa_2 \in T(A)$ и $fa_2 \notin T(A)$ мы доказали чистоту $E(A)$. ■

Следующее предложение завершает доказательство второго случая из предложенного плана доказательства основного результата ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное).

Предложение 1. *Если хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное, то кольцо $E(A)$ – чистое.*

Доказательство. Как отмечалось ранее, для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$. Для начала отметим, что если оба множества $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечные, то выполнены условия леммы 4, а значит, кольцо $E(A/T(A))$ будет чистым. Тогда нам остаётся рассмотреть случай, когда только одно из множеств, не умаляя общности, можно считать, что это множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ является бесконечным. При этом множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное. Принимая во внимание результаты, доказанные в леммах 7 – 9, получаем, что кольцо $E(A)$ – чистое. ■

Далее переходим к доказательству последнего, третьего случая из плана доказательства основного результата данной работы ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество, и при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества). Вначале рассмотрим случай, когда почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$ (лемма 10 – 13).

Заметим, что в последующих двух леммах доказательства носят технический характер и используют лишь те приёмы и методы, которые уже применялись в представленных ранее доказательствах. В связи с этим, поскольку полученные результаты носят лишь вспомогательный характер, доказательство данных лемм не приводится.

Уточним действие произвольного эндоморфизма $f \in E(A)$ на базисных векторах:

$$nfa_1 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + a_1^1,$$

$$kfa_2 = k_1 a_1 + k_2 a_2 + a_1^2,$$

где $n, k \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $a_1^1, a_1^2 \in T(A)$. При этом $fc_p = n_p c_p$, где c_p – образующие A_p , $n_p \in \mathbb{Z}$. Аналогично предыдущим доказательствам будем рассматривать случай, когда $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$. Кроме того, во всех дальнейших результатах (леммы 10 – 13) будем полагать справедливость следующего условия: при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$ и почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$.

Лемма 10. Если $n_p \dot{=} p$ для бесконечного множества $p \in \mathbb{P}$, то справедливы следующие утверждения:

- $k_2 n_1 = k_1 n_2$,
- $kn_1 = -nk_2$,
- $k_1, k_2, n_1, n_2 \neq 0$,
- $n_p \dot{=} p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$.

Лемма 11. Если $k_2 n_1 = k_1 n_2$, то $n_p \dot{=} p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$.

Лемма 12. Если $n_p \dot{=} p$ для бесконечного множества $p \in \mathbb{P}$, то f – чистый элемент $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 10, выполнены равенства

$$k_2 n_1 = k_1 n_2 ; \tag{8}$$

$$kn_1 = -nk_2 . \tag{9}$$

Кроме того, $k_1, k_2, n_1, n_2 \neq 0$ и $n_p \dot{=} p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = 1$, обозначим через Ω . Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n, k, k_1 . Рассмотрим прямое разложение $A = C \oplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$ и докажем, что эндоморфизм $u = 1 - f$ является автоморфизмом группы C . Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $u|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$. Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство

$$mb_1 = m_1 \pi_C(a_1) + m_2 \pi_C(a_2),$$

где $m = -k_1 k x$, $m_1 = k_1 x(k_2 - k)$, $m_2 = k_2^2 x$, $x \in \Omega$. В таком случае справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} mnk ub_1 &= nk u(m_1 a_1 + m_2 a_2 + b_1) = nk (1 - f)(m_1 a_1 + m_2 a_2 + b_1) = \\ &= nk(m_1 a_1 + m_2 a_2) - m_1 k(n_1 a_1 + n_2 a_2) - m_2 n(k_1 a_1 + k_2 a_2) + b_1' = \\ &= (nkm_1 - m_1 kn_1 - m_2 nk_1) a_1 + (nkm_2 - m_1 kn_2 - m_2 nk_2) a_2 + b_1'. \end{aligned}$$

При этом легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$nkm_1 + m_1 kn_1 + m_2 nk_1 = mnk,$$

$$nkm_2 - m_1 kn_2 - m_2 nk_2 = 0.$$

Таким образом, получаем, что $mnk ub_1 = mnk \pi_C(a_1)$. Отсюда следует, что $kk_1 kn(ub_1 - \pi_C(a_1)) = 0$. Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из \mathbb{P} , которые участвуют в разложении следующих чисел: n, k, k_1 . Учитывая этот факт, можем утверждать, что $ub_1 - \pi_C(a_1) = 0$. Аналогично можно показать, что для элемента $\pi_C(a_2)$ прообразом будет элемент $b_2 \in C$, для которого справедливо равенство $lb_1 = l_1 \pi_C(a_1) + l_2 \pi_C(a_2)$, где $l = k$, $l_1 = k_1$, $l_2 = k + k_2$. Согласно лем-

ме $2, u$ – автоморфизм группы C , поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $u|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, f – чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C . Тогда из леммы 3 следует, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Лемма 13. Если $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, то f – чистый элемент $E(A)$.

Доказательство. Согласно условиям леммы, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = p$, обозначим через Ω . Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел $n, k, (k_1 n_2 - k_2 n_1)$. Рассмотрим прямое разложение $A = C \oplus (\oplus_{p \in \Omega} A_p)$, докажем, что эндоморфизм f является автоморфизмом группы C . Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $f|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$. Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство

$$mb_1 = m_1 \pi_C(a_1) + m_2 \pi_C(a_2),$$

где $m = k_2 n_1 - k_1 n_2$, $m_1 = nk_2$, $m_2 = -kn_2$. Принимая во внимание лемму 11, легко показать, что $k_2 n_1 - k_1 n_2 \neq 0$ и k_1, n_1 не могут одновременно равняться нулю, что также справедливо и для k_2, n_2 . В таком случае справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} mnk f b_1 &= nk f(m_1 a_1 + m_2 a_2 + b_1) = \\ &= m_1 k(n_1 a_1 + n_2 a_2) + m_2 n(k_1 a_1 + k_2 a_2) + b_1' = \\ &= (m_1 k n_1 + m_2 n k_1) a_1 + (m_1 k n_2 + m_2 n k_2) a_2 + b_1'. \end{aligned}$$

При этом легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$m_1 k n_1 + m_2 n k_1 = mnk,$$

$$m_1 k n_2 + m_2 n k_2 = 0.$$

Таким образом, получаем, что $mnk f b_1 = mnk \pi_C(a_1)$. Отсюда следует, что $kn(k_2 n_1 - k_1 n_2)(f b_1 - \pi_C(a_1)) = 0$. Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из \mathbb{P} , которые участвуют в разложении следующих чисел: $n, k, k_2 n_1 - k_1 n_2$. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $f b_1 - \pi_C(a_1) = 0$. Аналогично можно показать, что для элемента $\pi_C(a_2)$ прообразом будет элемент $b_2 \in C$, для которого справедливо равенство $l b_2 = l_1 \pi_C(a_1) + l_2 \pi_C(a_2)$, где $l = k_1 n_2 - k_2 n_1$, $l_1 = k_1 n$, $l_2 = -k n_1$. Согласно лемме 2, f – автоморфизм группы C , поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $f|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, f – чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C . Тогда из леммы 3 следует, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Лемма 14. Если при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества и почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$, то $E(A)$ – чистое кольцо.

Доказательство. Заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$, поскольку прямые суммы p -компонент, относящихся к множествам $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ и $\mathbb{P} \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ можно выделить конечными прямыми слагаемыми, каждое из которых, согласно [1], будет обладать чистым кольцом эндоморфизмов и будет вполне характеристической подгруппой. Тогда, учитывая [6], вопрос изучения чистоты $E(A)$ сведётся к прямому слагаемому, являющемуся дополнением к указанным выше прямым слагаемым, то есть к $A \cap (\prod_{p \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2} A_p)$. Пусть $f \in E(A)$. Сразу заметим, что в случае, когда $f \in \text{Hom}(A, T(A))$, согласно предыдущим результатам f – чистый элемент $E(A)$. Поэтому далее рассмотрим случай, когда $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$. В этом случае, согласно леммам 12 и 13, f – чистый элемент $E(A)$. ■

Теперь, для завершения доказательства третьего случая из плана доказательства основного результата нам остаётся рассмотреть условие, когда почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$ (леммы 15 – 19). Аналогично предыдущим доказательствам будем считать, что $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$. Кроме того, во всех дальнейших результатах (леммы 15 – 18) будем полагать справедливость следующего условия: при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$ и для всех $p \in \Omega$ справедливо неравенство $s_p^1 > s_p^2$ ($\Omega \subseteq \mathbb{P}$ – бесконечное множество).

Заметим, что доказательство следующей леммы носит технический характер и используют лишь те приёмы и методы, которые уже применялись в представленных ранее доказательствах. В связи с этим, поскольку полученные результаты носят лишь вспомогательный характер, доказательство данной леммы не приводится.

Лемма 15. Справедливы следующие утверждения:

- $kfa_2 = k_2a_2 + a_t^2$;
- если $n_p : p$ для бесконечного числа $p \in \Omega$, то
 - $nfa_1 = n_2a_2 + a_t^1$,
 - $fa_2 \in T(A)$, то есть $n_p : p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$,
 - почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо неравенство $s_p^1 > s_p^2$;
- если $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Omega$, то $k_2, n_1 \neq 0$.

Лемма 16. Пусть $f \in E(A)$ и $n_p : p$ для бесконечного числа $p \in \Omega$, тогда f – чистый элемент $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 15, неравенство $s_p^1 > s_p^2$ справедливо почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Кроме того, $fa_2 \in T(A)$, то есть $n_p : p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$ и $nfa_1 = n_2a_2 + a_t^1$, где $n, n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a_t^1 \in T(A)$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для ко-

торых $(n_p, p) = 1$, обозначим через Ω . Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении числа n . Рассмотрим прямое разложение $A = C \oplus (\oplus_{p \in \Omega} A_p)$ и докажем, что эндоморфизм $u = 1 - f$ является автоморфизмом группы C . Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $u|_{A_p}$ – автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$. Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство

$$mb_1 = m_1 \pi_C(a_1) + m_2 \pi_C(a_2),$$

где $m = n$, $m_1 = n$, $m_2 = n_2$. В таком случае справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} mnub_1 &= nu(m_1 \pi_C a_1 + m_2 \pi_C a_2) = n(1-f)(m_1 \pi_C a_1 + m_2 \pi_C a_2) = \\ &= n(m_1 \pi_C a_1 + m_2 \pi_C a_2) - m_1 n_2 \pi_C a_2 + b_1' = nm_1 \pi_C a_1 + (nm_2 \pi_C a_2 - m_1 n_2 \pi_C a_2) + b_1' = \\ &= n n \pi_C a_1 + (n n_2 \pi_C a_2 - n n_2 \pi_C a_2) + b_1' = m n \pi_C a_1 + b_1'. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $mnub_1 = n^2 \pi_C(a_1) + b_1'$. Отсюда следует, что $n^2(b_1 - \pi_C(a_1)) \in C$. Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из \mathbb{P} , которые участвуют в разложении n . Учитывая этот факт, можем утверждать, что $ub_1 - \pi_C(a_1) = 0$. Легко показать, что существует такой $b_1^2 \in T(A)$, что $a_2 = u(a_2 + b_1^2)$. Согласно лемме 2, u – автоморфизм группы C , поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $u|_{A_p}$ – автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, f – чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C . Тогда из леммы 3 следует, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Лемма 17. Пусть $f \in E(A)$ и $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, тогда f – чистый элемент $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 15, $kfa_2 = k_2 a_2 + a_i^2$, кроме того, $k_2, n_1 \neq 0$. Согласно условиям леммы, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = p$, обозначим через Ω . Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n, k, k_2, n_1 . Рассмотрим прямое разложение $A = C \oplus (\oplus_{p \in \Omega} A_p)$, докажем, что эндоморфизм f является автоморфизмом группы C . Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $f|_{A_p}$ – автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существуют также прообразы для элементов $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$. Заметим, что в лемме 13 было доказано, что для эндоморфизма f , удовлетворяющего условию $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, существуют прообразы для элементов $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$. Несложно показать, что найденные в доказательстве леммы 13 элементы будут прообразами для $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$ в условиях данного предложения: $kfa_2 = k_2 a_2 + a_i^2$ и $k_2, n_1 \neq 0$. Тогда, согласно лемме 2, f – автоморфизм группы C , поскольку существуют про-

образы для каждого из базисных векторов и $f|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, f – чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C . Тогда из леммы 3 следует, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Лемма 18. Пусть $f \in E(A)$ и $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Omega$ ($\Omega \subseteq \mathbb{P}$ – бесконечное множество), тогда f – чистый элемент $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 15, $kfa_2 = k_2a_2 + a_i^2$, кроме того, $k_2, n_1 \neq 0$. Предположим, что почти для всех $p \in \mathbb{P} \subseteq \Omega$ выполнено равенство $s_p^1 = s_p^2$. Согласно лемме 10, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$, так как в противном случае $kfa_2 = k_1a_1 + k_2a_2 + a_i^2$, где $k_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Следовательно, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим альтернативный случай, когда почти для всех $p \in \mathbb{P} \subseteq \Omega$ выполнено неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$. Предположим, что для бесконечного числа $p \in \mathbb{P} \subseteq \Omega$ справедливо $n_p : p$. Тогда, согласно лемме 16, $n_p : p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, что противоречит условиям предложения. Следовательно, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Таким образом, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда, согласно лемме 17, f – чистый элемент $E(A)$. ■

Лемма 19. Если при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества и для бесконечного множества чисел $p \in \mathbb{P}$ справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$, то $E(A)$ – чистое кольцо.

Доказательство. Заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$, поскольку прямые суммы p -компонент, относящихся к множествам $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ и $\mathbb{P} \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ можно выделить конечными прямыми слагаемыми, каждое из которых, согласно [1], будет обладать чистым кольцом эндоморфизмов и будет вполне характеристической подгруппой. Тогда, учитывая [6], вопрос изучения чистоты $E(A)$ сведётся к прямому слагаемому, являющемуся дополнением к указанным выше прямым слагаемым, то есть к $A \cap (\prod_{p \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2} A_p)$. Пусть $f \in E(A)$. Сразу заметим, что в случае, когда $f \in \text{Hom}(A, T(A))$, согласно предыдущим результатам, f – чистый элемент $E(A)$. Поэтому далее рассмотрим случай, когда $f \notin \text{Hom}(A, T(A))$. В этом случае, согласно леммам 16, 18, f – чистый элемент $E(A)$. ■

Следующее предложение завершает доказательство третьего случая из предложенного плана доказательства основного результата ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества) и непосредственно следует из лемм 14 и 19.

Предложение 2. Если при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества, то $E(A)$ – чистое кольцо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин К.С. SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 24–36.
2. Крылов П.А. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. Т. 269. С. 29–34.
3. Крылов П.А. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. 2004. Т. 43. № 1. С. 60–76.
4. Крылов П.А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 17–27.
5. Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean // J. Algebra. 2006. № 304. P. 94–111.
6. Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings // Commun. Algebra. 2001. V. 29. No. 6. P. 2589–2595.
7. Goldsmith B., Vámos P. A note on clean abelian groups // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2007. V. 117. P. 181–191.

Статья поступила 13.08.2014.

Sorokin K. S. TWO-RANK SP-GROUPS WITH CLEAN ENDOMORPHISM RINGS

The notion of clean ring was introduced by W.K. Nicholson in 1977 to give an example of ring with idempotents, which can be lifted modulo any left (right) ideal. In the case when R is an endomorphism ring of some module, the new descriptions of cleanness property appear which may be useful for study of the conditions of cleanness of ring R [6].

This work continues the author's investigations of cleanness of endomorphism rings of finite rank SP-groups, which are a class of mixed Abelian groups [2] – [4]. The author earlier proved cleanness of endomorphism rings of one-rank SP-groups with cyclic p -components. Moreover, it was shown that any endomorphism of a finite rank SP-group with cyclic p -components is clean if its image is contained in torsion subgroup of A .

In this work, the subject of investigation is a two-rank SP-groups with cyclic p -components without any infinite torsion direct summand. The proof of cleanness of endomorphism rings of these groups is the key result of this work. Subsidiary statements obtained in proof of this result allows to describe the structure of endomorphism rings of considering groups.

Keywords: mixed Abelian group, SP-group, clean ring, endomorphism ring.

SOROKIN Konstantin Sergeevich (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: Sorokin_k@list.ru

REFERENCES

1. Sorokin K.S. SP-gruppy s chistymi kol'tsami endomorfizmov. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 4(30), pp. 24–36. (in Russian)
2. Krylov P.A. Ob odnom klasse smeshannykh abelevykh grupp. *Vestnik TGU*, 2000, vol. 269, pp. 29–34. (in Russian)
3. Krylov P.A. Radikal Dzh Jakobsona kol'tsa endomorfizmov abelevoy gruppy. *Algebra i logika*, 2004, vol. 43, no. 1, pp. 60–76. (in Russian)
4. Krylov P.A. Radikaly kolets endomorfizmov abelevykh grupp. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2007, no. 1, pp. 17–27. (in Russian)
5. Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean. *J. Algebra*, 2006, no. 304, pp. 94–111.
6. Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings. *Commun. Algebra*, 2001, vol. 29, no. 6, pp. 2589–2595.
7. Goldsmith B., Vámos P. A note on clean abelian groups. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 2007, vol. 117, pp. 181–191.

УДК 515.12

Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева

**О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ,
ГОМЕОМОРФНЫХ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ**

Рассматривается топологическое пространство S_A , которое является модификацией прямой Зоргенфрея S и определяется следующим образом: если точка $x \in A \subset S$, то базой окрестностей точки x является семейство полуинтервалов $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b \text{ и } x \in [a, b]\}$. Если $x \in S \setminus A$, то база окрестностей точки x — $\{(c, d] : c, d \in \mathbb{R}, c < d \text{ и } x \in (c, d]\}$. Доказано, что для счетного подмножества $A \subset \mathbb{R}$, замыкание которого в евклидовой топологии счетно, пространство S_A гомеоморфно пространству S . Кроме того, получено, что пространство S_A гомеоморфно пространству S для любого замкнутого подмножества $A \subset \mathbb{R}$. Подобные вопросы рассматривались в работе V.A. Chatyrko, Y. Nattori, где топология «стрелки» на множестве A заменялась на евклидову топологию.

Ключевые слова: *прямая Зоргенфрея, производная множества, гомеоморфизм, ординал.*

В работе используются следующие обозначения: \mathbb{N} — множество натуральных чисел; \mathbb{R} — множество вещественных чисел, наделенное стандартной евклидовой топологией; символом S обозначим *прямую Зоргенфрея* (или «стрелку»), представляющую собой множество вещественных чисел, топология в котором порождена базой $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$; символом S_{\rightarrow} обозначается множество вещественных чисел, наделенное топологией, порожденной базой $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Очевидно, что S гомеоморфно S_{\rightarrow} . Топологическое пространство $S_{\rightarrow} = (\mathbb{R}, \tau_{\rightarrow})$, в отличие от S , будем называть «*правой стрелкой*».

Пусть множества $X, Y \subset \mathbb{R}$. Обозначим символом X_Y топологическое пространство, в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом:

$$x \in X \setminus Y : \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b \text{ и } x \in (a, b]\};$$

$$x \in Y : \{(c, d) : c, d \in \mathbb{R}, c < d \text{ и } x \in [c, d)\}.$$

В частности, если $X = S$, а $Y = A$, получаем пространство S_A , в котором на множестве A задана топология «правой стрелки». Подпространство $(a, b) \subset S_A$ обозначается $(a, b)_A$.

Для произвольного подмножества A топологического пространства X и произвольного ординала α производная множество $A^{(\alpha)}$ определяется по трансфинитной индукции следующими формулами:

$$A' - \text{множество предельных точек множества } A,$$

$$A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha-1)} \right)', \text{ если } \alpha - \text{непредельный ординал и}$$

$$A^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} A^{(\beta)}, \text{ если } \alpha - \text{предельный ординал.}$$

Если $A \subset \mathbb{R}$, то по теореме Кантора – Бендиксона [1, с. 162] существует наименьший счетный ординал α , такой, что производная α -го порядка $A^{(\alpha)}$ является совершенным множеством. Если замыкание множества A счетно, то совершенное множество $A^{(\alpha)} = \emptyset$. Если множество A счетно и компактно, то ординал α не может быть предельным и, следовательно, существует ординал β , такой, что $A^{(\beta)} \neq \emptyset$ и $A^{(\beta+1)} = A^{(\alpha)} = \emptyset$. Такой ординал β будем называть высотой счетного компакта A .

Определение. Высотой компакта F будем называть наименьший ординал α , такой, что $F^{(\alpha)} = \emptyset$.

Теорема 1. Пусть множество F замкнуто в \mathbb{R} . Тогда пространство S_F гомеоморфно S .

Доказательство. Так как $S_F \setminus F$ открыто в пространстве \mathbb{R} , то $S_F \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a^k, b^k)$, где $(a^k, b^k) \cap (a^l, b^l) = \emptyset$, если $k \neq l$. В каждом из интервалов (a^k, b^k) рассмотрим последовательности $a_1^k > a_2^k > \dots > a_n^k > \dots$ и $b_1^k < b_2^k < \dots < b_n^k < \dots$, такие, что $\inf_n a_n^k = a^k$ и $\sup_n b_n^k = b^k$, причем $a^1 = b^1$. Рассмотрим функции

$$f_n^k : (a_{n+1}^k, a_n^k) \rightarrow [a_{n+1}^k, a_n^k] \text{ и } g_n^k : (b_n^k, b_{n+1}^k) \rightarrow [b_n^k, b_{n+1}^k],$$

которые гомеоморфно отображают открыто-замкнутые множества $(a_{n+1}^k, a_n^k) \subset S_F$ и $(b_n^k, b_{n+1}^k) \subset S_F$ на открыто-замкнутые множества $[a_{n+1}^k, a_n^k] \subset S_r$ и $[b_n^k, b_{n+1}^k] \subset S_r$.

Обозначим через φ отображение $S_F \setminus F$ на $(S \setminus F)_{\rightarrow}$, определенное по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} f_n^k(x), & x \in (a_{n+1}^k, a_n^k), \\ g_n^k(x), & x \in (b_n^k, b_{n+1}^k). \end{cases}$$

Очевидно, отображение φ является гомеоморфизмом $S_F \setminus F$ на $(S \setminus F)_{\rightarrow}$. Заметим, что если точка $x \in (a_{n+1}^k, a_n^k)$, то $|x - \varphi(x)| \leq |a_{n+1}^k - a_n^k|$. Аналогично, для $x \in (b_n^k, b_{n+1}^k)$.

Докажем, что отображение

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x \in F, \\ \varphi(x), & x \in S_F \setminus F \end{cases}$$

является гомеоморфизмом S_F на S_{\rightarrow} .

Действительно, на открытом множестве $S_F \setminus F$ отображение ψ совпадает с отображением φ , а значит, является гомеоморфизмом. Пусть теперь $x \in F$, последовательность $x_l \in S_F$ и $\lim_{l \rightarrow \infty} x_l = x$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем l_0 так,

что $0 < x_{l_0} - x < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем номер $p > l_0$ такой, что при $l > p$ выполняется неравенство $x \leq x_l < x_{l_0}$. Более того, если $l > p$ и $x_l \in [a_{n_l}^{k_l}, b_{n_l}^{k_l})$, то $b_{n_l}^{k_l} < x_{l_0}$ и, следовательно, $|a_{n_l}^{k_l} - b_{n_l}^{k_l}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если $x_l \notin F$, то

$$|\psi(x) - \psi(x_l)| = |x - \psi(x_l)| \leq |x - x_l| + |x_l - \psi(x_l)| < |x - x_l| + |a_{n_l}^{k_l} - b_{n_l}^{k_l}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Если $x_l \in F$, то при $l > p$ $|\psi(x) - \psi(x_l)| = |x - x_l| < |x - x_{l_0}| < \varepsilon/2$. Таким образом, непрерывность отображения ψ доказана. Непрерывность отображения ψ^{-1} доказывается аналогично. ■

Следствие 1. Пусть $x_1, \dots, x_n \in S$. Тогда $S_{\{x_1, \dots, x_n\}}$ гомеоморфно S .

Следствие 2. Пусть $A \subset S$ – счетное дискретное множество. Тогда S_A гомеоморфно S .

Докажем что, если $A \subset \mathbb{R}$ – произвольное счетное множество, замыкание которого также является счетным, то S_A гомеоморфно S . Для этого потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пространства $(a, b]_{(a, b)}$ и $(a, b]$ гомеоморфны, где $a, b \in S$ и $a < b$.

Доказательство. В интервале (a, b) рассмотрим последовательности $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ и $b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$, такие, что $\inf_n a_n = a$ и $\sup_n b_n = b$, причем $a^1 = b^1$. Рассмотрим отображение $\psi : (a, b]_{(a, b)} \rightarrow (a, b]$, которое гомеоморфно отображает промежутки $(a_{n+1}, a_n] \subset (a, b]_{(a, b)}$ и $(b_n, b_{n+1}] \subset (a, b]_{(a, b)}$ на открыто-замкнутые подмножества $(a_{n+1}, a_n] \subset (a, b]$, $(b_n, b_{n+1}] \subset (a, b]$ соответственно, и $\psi(b) = b$. Нетрудно видеть, что такое отображения является гомеоморфизмом. ■

Лемма 2. Пространства $(a, b]_{\{p\}}$ и $(a, b]$ гомеоморфны, где $p \in (a, b)$.

Доказательство. В интервале (a, p) рассмотрим последовательности $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ и $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$, такие, что $\inf_n a_n = a$ и $\sup_n p_n = p$. Определим отображение ψ , которое гомеоморфно отображает открыто-замкнутые множества $(a_{n+1}, a_n] \subset (a, p]_{\{p\}}$ и $(p_n, p_{n+1}] \subset (a, p]_{\{p\}}$ в открыто-замкнутые подмножества $[a_{n+1}, a_n) \subset (a, p]_{\rightarrow}$, $[b_n, b_{n+1}) \subset (a, p]_{\rightarrow}$ соответственно. На интервале (p, b) отображение ψ определяется аналогично и $\psi(p) = p$, $\psi(b) = b$. Нетрудно видеть, что отображение $\psi : (a, b]_{\{p\}} \rightarrow (a, b]_{(a, b)}$. Тогда, по лемме 1, множество $(a, b]_{\{p\}}$ гомеоморфно $(a, b]$. ■

Следствие 3. Пространства $(a, b]_{\{p_1, \dots, p_n\}}$ и $(a, b]$ гомеоморфны, где $\{p_1, \dots, p_n\} \subset (a, b)$.

Теорема 2. Пусть счетное множество $A \subset \mathbb{R}$ такое, что его замыкание \overline{A} относительно \mathbb{R} счетно. Если $\overline{A} \subset (a, b)$, то $(a, b]_A$ гомеоморфно $(a, b]$.

Доказательство. Доказательство проведем, используя метод трансфинитной индукции по высоте компакта $F = \overline{A}$. Напомним, что высотой компакта F называется α , такой, что $F^{(\alpha)}$ – последняя непустая производная компакта F . Очевидно, множество $F^{(\alpha)}$ конечно.

Пусть $\alpha = 0$, т.е. множество F конечно. Поскольку в этом случае $A = F$, то по следствию 2 пространство $(a, b]_A$ гомеоморфно $(a, b]$.

Пусть $\alpha = 1$, т.е. F' – конечное множество на $(a, b)_A$. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ точки множества F' и точки $a = p_0 < p_1 < \dots < p_n = b$ такие, что $p_{i-1} < x_i < p_i$ и $p_i \notin F$, где $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим разбиение множества

$$(p_{i-1}, p_i) \setminus \{x_i\} = \left(\prod_{m=1}^{\infty} (a_{m+1}, a_m] \right) \cup \left(\prod_{m=1}^{\infty} (b_m, b_{m+1}] \right),$$

где точки a_m и b_m не принадлежат множеству F , и $\sup_m a_m = \inf_{m \rightarrow \infty} b_m = p_i$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Поскольку на промежутке $(p_{i-1}, p_i]$ точка x_i – единственная предельная точка множества F , то каждый из промежутков $(a_{m+1}, a_m]$ и $(b_m, b_{m+1}]$ содержит лишь конечное число точек множества A . Тогда по следствию 2 каждый из промежутков $(a_{m+1}, a_m]_A$ и $(b_m, b_{m+1}]_A$ гомеоморфен $(a_{m+1}, a_m]$ и $(b_m, b_{m+1}]$ соответственно. Если $x_i \notin A$, то промежуток $(p_{i-1}, p_i]_A$ гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]$. Если же $x_i \in A$, то промежуток $(p_{i-1}, p_i]_A$ гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]_{\{x_i\}}$ и по лемме 2 $(p_{i-1}, p_i]_{\{x_i\}}$ гомеоморфно $(p_{i-1}, p_i]$. Так как промежуток $(a, b]$ есть дизъюнктное объединение открыто-замкнутых прометков $(p_{i-1}, p_i]$ и каждый из этих промежутков гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]_A$, то промежуток $(a, b]$ гомеоморфен $(a, b]_A$.

Пусть α – произвольный ординал и компакт F высоты α . Предположим, что для всех компактов высоты $\beta < \alpha$ теорема доказана. Поскольку $F^{(\alpha)}$ последняя непустая производная компакта F , то $F^{(\alpha)}$ содержит лишь конечное число точек, то есть $F^{(\alpha)} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset (a, b)$.

Рассмотрим точки $a = p_0 < p_1 < \dots < p_n = b$ такие, что $p_{i-1} < x_i < p_i$ и $p_i \notin F$, где $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим разбиение множества

$$(p_{i-1}, p_i) \setminus \{x_i\} = \left(\prod_{m=1}^{\infty} (a_{m+1}, a_m] \right) \cup \left(\prod_{m=1}^{\infty} (b_m, b_{m+1}] \right),$$

где точки a_m и b_m не принадлежат множеству F , и $\sup_m a_m = \inf_m b_m = p_i$ при всех

$m \in \mathbb{N}$. Поскольку на промежутке $(p_{i-1}, p_i]$ точка x_i – единственная точка множества $F^{(\alpha)}$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ компакты $(a_{m+1}, a_m] \cap F$ и $(b_m, b_{m+1}] \cap F$ имеют высоту $\beta_m < \alpha$. Тогда по предположению индукции каждый из промежутков $(a_{m+1}, a_m]_A$ и $(b_m, b_{m+1}]_A$ гомеоморфен $(a_{m+1}, a_m]$ и $(b_m, b_{m+1}]$ соответственно. Если $x_i \notin A$, то промежуток $(p_{i-1}, p_i]_A$ гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]$. Если же $x_i \in A$, то промежуток $(p_{i-1}, p_i]_A$ гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]_{\{x_i\}}$ и по лемме 2 $(p_{i-1}, p_i]_{\{x_i\}}$ гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]$. Так как промежуток $(a, b]$ есть дизъюнктное объединение открыто-замкнутых промежутков $(p_{i-1}, p_i]$ и каждый из этих промежутков гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]_A$, то промежуток $(a, b]$ гомеоморфен $(a, b]_A$. ■

Теорема 3. Пусть счетное множество $A \subset \mathbb{R}$ таково, что его замыкание \overline{A} относительно \mathbb{R} счетно. Тогда S_A гомеоморфно S .

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{a_n\}_{n=}$, такую, что $a_n \notin F$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Положим $A_n = A \cap (a_n, a_{n+1}]$. Тогда по теореме 2 множество $(a_n, a_{n+1}]_{A_n}$ гомеоморфно $(a_n, a_{n+1}]$. Поскольку $S_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, a_{n+1}]_{A_n}$ и все множества $(a_n, a_{n+1}]_{A_n}$ открыто замкнуты, то S_A гомеоморфно S . ■

Следствие 4. Пусть A – счетное замкнутое подмножество в S . Тогда S_A гомеоморфно S .

Доказательство. Рассмотрим замыкание множества A в евклидовой топологии прямой \mathbb{R} . Заметим, что замкнутые множества $A \subset S$ и $\overline{A} \subset \mathbb{R}$ отличаются не более чем счетным числом точек. Это следует из того, что открытое множество на прямой S имеет вид

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right) \cup \left(\prod_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j] \right),$$

где $a_i \leq b_i$ и $c_j \leq d_j$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Следовательно, множество \overline{A} счетно. Так как множество A является всюду плотным подмножеством множества \overline{A} , то по теореме 3 пространство S_A гомеоморфно S . ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
3. Энгелькин П. Общая топология. М.: Мир, 1986, 752 с.
4. Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers // Comment. Math. Univ. Carolin. 2013. V. 54. No. 2. P. 189–196.

Sukhacheva E.S., Khmyleva T.E. ON SOME LINEARLY ORDERED TOPOLOGICAL SPACES HOMEOMORPHIC TO THE SORGENFREY LINE

In this paper, we consider a topological space S_A which is a modification of the Sorgenfrey line S and is defined as follows: if a point $x \in A \subset S$, then the base of neighborhoods of the point x is a family of intervals $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b \text{ и } x \in [a, b)\}$. If $x \in S \setminus A$, then the base of neighborhoods of x is $\{(c, d] : c, d \in \mathbb{R}, c < d \text{ и } x \in (c, d]\}$. It is proved that for a countable subset $A \subset \mathbb{R}$ the closure of which in the Euclidean topology is a countable space, the space S_A is homeomorphic to the space S . In addition, it was found that the space S_A is homeomorphic to the space S for any closed subset $A \subset \mathbb{R}$. Similar problems were considered by V.A. Chatyrko and Y. Hattori in [4], where the "arrow" topology on the set A was replaced by the Euclidean topology. In this paper, we consider two special cases: A is a closed subset of the line in the Euclidean topology and the closure of the set A in the Euclidean topology of the line is countable.

The following results were obtained:

Let a set A be closed in \mathbb{R} . Then the space S_A is homeomorphic to the space S .

Let a countable set $A \subset \mathbb{R}$ be such that its closure \bar{A} is countable relatively to \mathbb{R} . Then S_A is homeomorphic to S .

Let A be a countable closed subset in S . Then S_A is homeomorphic to S .

Keywords: Sorgenfrey Line, derivative set, homeomorphism, ordinal.

SUHACHEVA Elena Sergeevna (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: Sirius9113@mail.ru

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University Russian Federation)
E-mail: TEX2150@yandex.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu*. Moscow, Nauka Publ., 1977, 368 p. (in Russian)
2. Kuratovskiy K., Mostovskiy A. *Teoriya mnozhestv*. Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p. (in Russian)
3. Engel'king R. *Obshchaya topologiya*. Moscow, Mir Publ., 1986, 752 p. (in Russian)
4. Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 189–196.

МЕХАНИКА

УДК 531.351

А.М. Бубенчиков, М.А. Бубенчиков, А.И. Потекаев,
О.В. Усенко, А.А. Шерстобитов

ПРОНИЦАЕМОСТЬ ТУННЕЛЯ ИЗ СФЕРИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ¹

Изучается способность пробных молекул преодолевать энергетический барьер, имеющийся в зазоре между двумя рядами сферических наночастиц. Туннель из частиц является простейшим структурным элементом составного пористого материала. От способности молекул сближаться с наночастицами, а затем двигаться в более мощном поле сил отталкивания зависят фильтрационные свойства пористых материалов. Рассмотрены углеродные наночастицы и бомбардирующие их молекулы гелия и метана.

Ключевые слова: молекулярная динамика, подход Ньютона, наночастицы, туннель частиц, потенциал Леннарда – Джонса, потенциал наночастица – молекула, проницаемость.

Углеродные фильтры могут быть получены как результат прессования древесного угля или порошка высокомолекулярного углерода, полученного в СВЧ-плазмотроне [1]. В любом случае основным наполнителем полученного фильтрующего элемента будут наночастицы аморфного углерода. Естественно, что поры углеродных фильтров будут иметь наноразмер. Поэтому мы сближаем сферические наночастицы на расстояние порядка одного или нескольких нанометров и исследуем способность пробных молекул проникать через полученный зазор. Если вектор скорости молекулы лежит в плоскости центров наночастиц и молекулы, то задача о сближении молекулы с частицами будет двумерной. Примеры, представленные в данной статье, относятся к плоской задаче и позволяют лучше изучить особенности сближения молекул с частицами. Однако математическая модель, приведенная в работе, описывает пространственный случай. При этом она справедлива для произвольного, достаточно большого количества частиц N_p . Более того, частицы могут быть полидисперсными и распределены в пространстве случайным образом, как это и бывает в реальных ситуациях.

Основное уравнение динамики перемещающейся молекулы запишем в стандартной форме в виде второго закона Ньютона:

$$M \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

где \mathbf{Y} – вектор скорости молекулы, M – масса летящей молекулы, \mathbf{F} – главный вектор внешних по отношению к рассматриваемой молекуле воздействий.

¹ Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-31365.

В проекциях на оси координат вместо (1) получим три скалярных уравнения:

$$M \frac{dU}{dt} = X', \quad M \frac{dV}{dt} = Y', \quad M \frac{dW}{dt} = Z'. \quad (2)$$

Здесь X' , Y' , Z' – проекции равнодействующей ван-дер-ваальсовских сил от элементов углеродной структуры, которые определяются как простые суммы силовых вкладов от отдельных частиц системы:

$$X' = \sum_{j=1}^{N_p} X'_j, \quad Y' = \sum_{j=1}^{N_p} Y'_j, \quad Z' = \sum_{j=1}^{N_p} Z'_j, \quad (3)$$

где X'_j , Y'_j , Z'_j – проекции на оси декартовых координат сил Ван-дер-Ваальса, действующих от j -й частицы системы, N_p – количество частиц в системе.

Далее введем в рассмотрение величины X_j , Y_j , Z_j : $X'_j = MX_j$, $Y'_j = MY_j$, $Z'_j = MZ_j$. Тогда в новых переменных уравнения (2) можно переписать в виде

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} X_j, \quad \frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Y_j, \quad \frac{dW}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Z_j. \quad (4)$$

При этом

$$X_j = a_j \frac{x - x_j^0}{\rho_j}, \quad Y_j = a_j \frac{y - y_j^0}{\rho_j}, \quad Z_j = a_j \frac{z - z_j^0}{\rho_j}, \quad (5)$$

где a_j – величина ускорения, которое приобретает пробная молекула под действием j -й частицы системы.

Пористое тело представляется совокупностью сферических наночастиц, для которых имеется потенциал взаимодействия наночастица – молекула [2]:

$$\Phi_9^3(\rho_j) = \Phi_9(\rho_j) - \Phi_3(\rho_j). \quad (6)$$

Здесь ρ_j – расстояние от j -й частицы пористой структуры до пробной молекулы.

$$\Phi_9(\rho) = C_9 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho - \rho_p)^9} - \frac{1}{(\rho + \rho_p)^9} \right] - \frac{9}{8\rho} \left[\frac{1}{(\rho - \rho_p)^8} - \frac{1}{(\rho + \rho_p)^8} \right] \right\}; \quad (7)$$

$$\Phi_3(\rho) = C_3 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho - \rho_p)^3} - \frac{1}{(\rho + \rho_p)^3} \right] - \frac{3}{2\rho} \left[\frac{1}{(\rho - \rho_p)^2} - \frac{1}{(\rho + \rho_p)^2} \right] \right\}, \quad (8)$$

где ρ_p – радиус наночастицы.

Величина ускорения a_j , входящая в правые части соотношений (5), будет являться производной от (6) по ρ_j :

$$a_j = \frac{d}{d\rho_j} \Phi_9^3(\rho_j) = \frac{d}{d\rho_j} \Phi_9(\rho_j) - \frac{d}{d\rho_j} \Phi_3(\rho_j), \quad (9)$$

при этом

$$\frac{d\Phi_9(\rho_j)}{d\rho_j} = -9C_9 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^{10}} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^{10}} \right] - \frac{1}{\rho_j} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^9} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^9} \right] - \frac{1}{8\rho_j^2} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^8} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^8} \right] \right\}; \quad (10)$$

$$\frac{d\Phi_3(\rho_j)}{d\rho_j} = -3c_3 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^4} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^4} \right] - \frac{1}{\rho_j} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^3} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^3} \right] - \frac{1}{2\rho_j^2} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^2} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^2} \right] \right\}. \quad (11)$$

Здесь $c_9 = \frac{4\pi\epsilon_{12}\sigma_{12}^2}{45V}$, $c_3 = \frac{2\pi\epsilon_{12}\sigma_{12}^6}{3V}$, V – объем твердого углеродного тела, приходящийся на одну молекулу. Потенциал (6) получен интегрированием парного потенциала Леннарда – Джона по объему наночастицы.

Значения констант взаимодействия ϵ и σ , входящих в потенциал Леннарда – Джона, для некоторых пар веществ приведены в следующей таблице:

Взаимодействующие молекулы	Относительная глубина потенциальной ямы	Радиус влияния потенциала взаимодействия
C – C (1)	$\epsilon/k = 51,2$ К	$\sigma = 0,335$ нм
He – He (2)	$\epsilon/k = 10,2$ К	$\sigma = 0,228$ нм
H ₂ – H ₂ (3)	$\epsilon/k = 34$ К	$\sigma = 0,29$ нм
O ₂ – O ₂ (4)	$\epsilon/k = 117$ К	$\sigma = 0,35$ нм
CH ₄ – CH ₄ (5)	$\epsilon/k = 148$ К	$\sigma = 0,38$ нм

Примечание: k – постоянная Больцмана.

Если исследуемая система состоит из разнородных молекул (атомов), то для параметров ϵ и σ справедливы следующие правила усреднения Лорентца – Бертело (Lorentz-Berthelot mixing rule):

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad \epsilon_{12} = (\epsilon_{11} \cdot \epsilon_{22})^{1/2}. \quad (12)$$

В настоящей работе в качестве пористого элемента рассматривается система из десяти наночастиц, образующих туннель для движущейся молекулы (рис. 1).

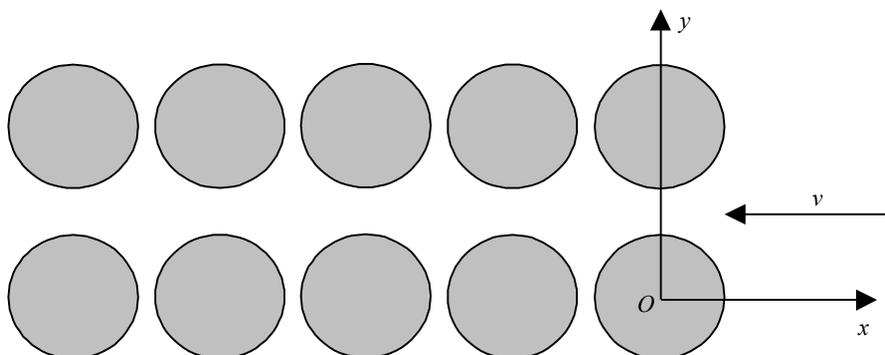


Рис. 1. Простейший фильтрующий элемент, составленный двумя рядами наночастиц

При изучении термофореза нанотрубок [3], а также графеновых пластинок [4] мы уже рассматривали задачу о совокупном влиянии молекул структуры на движение молекул окружения. Теперь это влияние определяется совокупностью наночастиц радиуса $r_p = 4$ нм, в каждой из которых находится $6,4 \cdot 10^4$ молекул углерода.

Начало координат помещаем в одной из частиц правого столбца (см. рис. 1). При этом ось Ox направим противоположно движению пробной молекулы. После этого нетрудно определить x_j^0, y_j^0, z_j^0 ($j = \overline{1,10}$) – координаты центров наночастиц, входящие в правые части скалярных уравнений (4). Эти уравнения интегрируются численно с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности [5]. При этом на каждом шаге по времени ($\Delta t = 10^{-5}$ нс) и даже в каждой точке пересчета внутри этого шага требуется знать расстояние от центра пробной молекулы до центра отдельной наночастицы, которое определяется обычным образом:

$$\rho_j = \sqrt{(x - x_j^0)^2 + (y - y_j^0)^2 + (z - z_j^0)^2},$$

где x, y, z – координаты перемещающейся молекулы.

На рис. 2 – 4 представлены результаты расчетов молекулярной баллистики для молекул метана и гелия, взаимодействующих с наночастицами выстроенного туннеля. Между частицами имеется постоянный зазор в направлении оси Ox равный 1 нм и переменный (варьируемый от расчета к расчету) в направлении оси Oy . Расчетами было установлено, что для молекул метана и углеродных наночастиц предельный максимальный по величине зазор между рядами частиц, при котором молекулы еще не проходят в туннель, равен 3,5 нм. Для молекул гелия эта величина есть 1,02 нм. Эти зазоры остаются постоянными при увеличении размеров

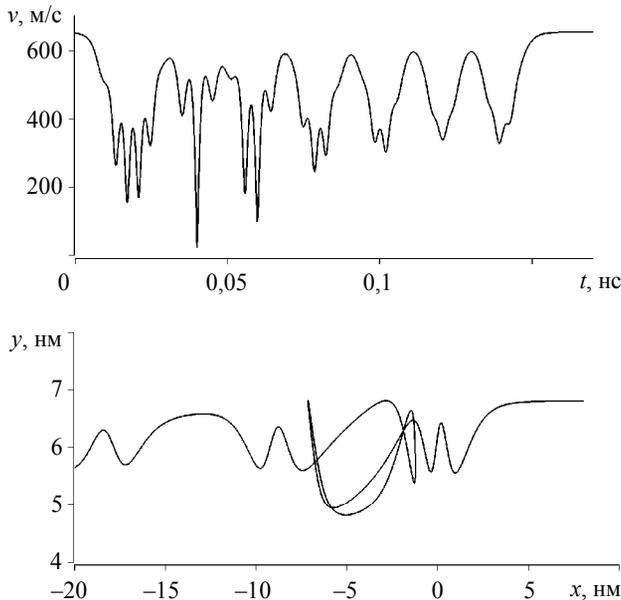


Рис. 2. Скорость и траектория молекулы метана, пущенной параллельно оси системы наночастиц с позиции $y = 6,8$ нм. Зазор между рядами наночастиц 4 нм

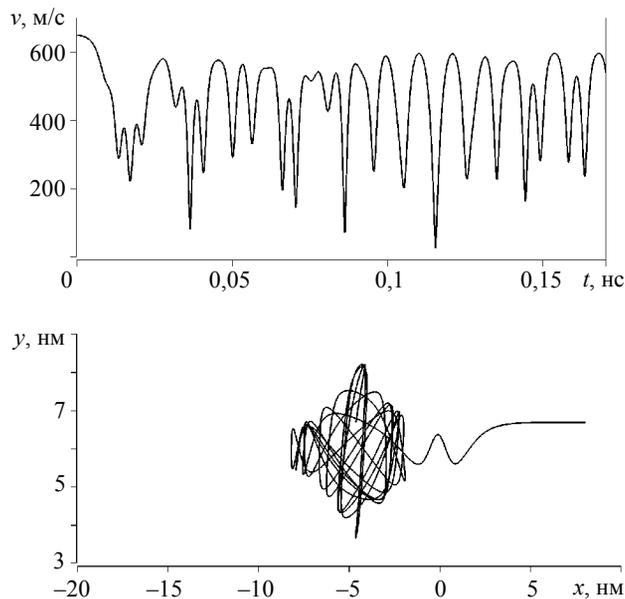


Рис. 3. Скорость и траектория молекулы метана, пущенной параллельно оси системы наночастиц с позиции $y = 6,7$ нм. Зазор между рядами наночастиц 4 нм

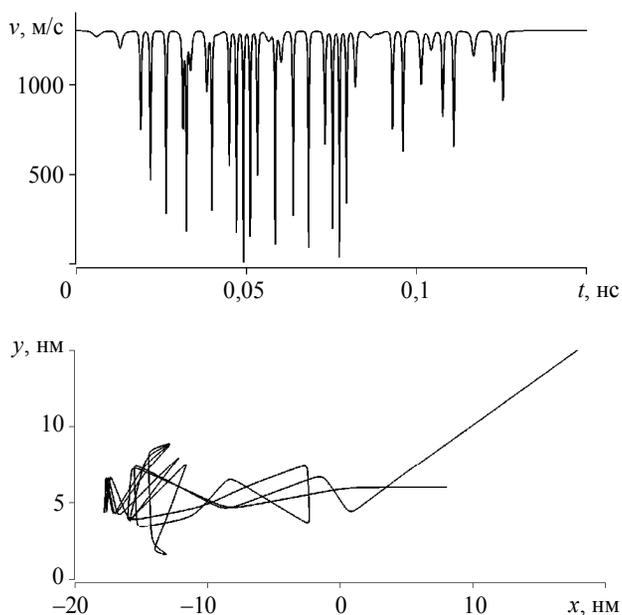


Рис. 4. Скорость и траектория молекулы гелия, пущенной параллельно оси системы наночастиц с позиции $y = 6$ нм. Зазор между рядами наночастиц 3 нм

наночастиц. Поэтому фильтры для гелия, выделяемого из природного газа, должны содержать нанопоры из диапазона от 1,02 до 3,5 нм.

Все представленные на рис. 2 – 4 случаи относятся к проницаемым туннелям. Однако, как это видно из рис. 4, не все молекулы проходят через проницаемую пору. В нашей теории симметричная пора является проницаемой, если через нее проходят молекулы, пущенные по оси симметрии.

Таким образом, расчетами найден размер пор нанопористого материала, обеспечивающий прохождение молекул гелия и непрохождение более крупных молекул метана, азота и других газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипов В.Б., Бубенчиков М.А., Медведев Ю.В. и др. Утилизация шахтного метана: способ и устройства для получения мелкодисперсного углерода и водорода из метана с использованием СВЧ энергии // Энергетическая безопасность России. Новые подходы к развитию угольной промышленности: сб. трудов XII Международной научно-практической конференции. – Кемерово, 2010. – С. 103–105.
2. Rudyak V.Y., Krasnolutskii S.L. The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases // J. Aerosol Science. 2003. V. 34, suppl. 1. P. 579–580.
3. Bubenchikov A.M., Potekaev A.I., Bubenchikov M.A., et al. Thermoforesis of Carboxylic Nanotubes in Gaseous Atmosphere // Advances in Nanoparticles. 2014. V. 3. P. 1–5.
4. Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Маслов А.С., Овчаренко В.В., Потекаев А.И., Усенко О.В. Термофорез графеновых пластинок // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 7. С. 87–92.
5. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.

Статья поступила 29.05.2014 г.

Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Usenko O.V., Sherstobitov A.A. PERMEABILITY OF THE TUNNEL OF SPHERICAL NANOPARTICLES. In this paper, we investigate the ability of test molecules to overcome the energy barrier existing in the gap between two rows of spherical nanoparticles. A tunnel of particles is the simplest structural element of a composite porous material. The ability of molecules to associate with nanoparticles and then move to a more powerful field of repulsive forces determines filtration properties of porous materials. We consider carbon nanoparticles and bombarding molecules of helium, hydrogen, and methane.

Keywords: molecular dynamics, Newton's approach, nanoparticles, particle tunnel, Lennard-Jones potential, nanoparticle–molecule potential, permeability

BUBENCHIKOV Alexey Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: alexy121@mail.ru

BUBENCHIKOV Mikhail Alekseevich (Candidate of Physics and Mathematics, «Gazprom Transgaz Tomsk», Tomsk, Russian Federation)
E-mail: michael121@mail.ru

POTEKAEV Alexandr Ivanovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Siberian Physical-Technical Institute, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: kanc@spti.tsu.ru

USENKO Olesya Vadimovna (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: usenko.olesya@yandex.ru

SHERSTOBITOV Alexandr Anatolyevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: sherstobitovalexandr@gmail.com

REFERENCES

1. Antipov V.B., Bubenchikov M.A., Medvedev Yu.V., et al. Utilizatsiya shakhtnogo metana: sposob i ustroystva dlya polucheniya melkdispersnogo ugleroda i vodoroda iz metana s ispol'zovaniem SVCh energii. *Sbornik trudov XII Mezhdunarodnoy nauchno-prakti-cheskoj konferentsii "Energeticheskaya bezopasnost' Rossii. Novye podkhody k razvitiyu ugol'noy promyshlennosti"*. Kemerovo, 2010, pp. 103–105. (in Russian)
2. Rudyak V.Y., Krasnolutskii S.L. The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases. *J. Aerosol Science*, 2003, vol. 34, suppl. 1, pp. 579–580.
3. Bubenchikov A.M., Potekaev A.I., Bubenchikov M.A., et al. Thermoforesis of Carboxylic Nanotubes in Gaseous Atmosphere. *Advances in Nanoparticles*, 2014, vol. 3, pp. 1–5.
4. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Maslov A.S., Ovcharenko V.V., Potekaev A.I., Usenko O.V. Termoforez grafenovykh plastinok. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 2014, vol. 57, no. 7, pp. 87–92. (in Russian)
5. Ortega Dzh., Pul U. *Vvedenie v chislennye metody resheniya differentsial'nykh uravneniy*. Moscow, Nauka Publ., 1986, 288 p. (in Russian)

УДК: 66.011, 533.59

**И.М. Васенин, С.М. Губанов, М.И. Дурновцев,
А.Ю. Крайнов, М.В. Чуканов**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕСУБЛИМАЦИИ ФТОРИСТОГО ВОДОРОДА ИЗ ГАЗОВОЙ СМЕСИ НА СТЕНКИ КОНДЕНСАТОРА

Построена математическая модель десублимации фтористого водорода на стенки емкости из газовой смеси. Проведены расчеты процесса десублимации для случаев охлаждения емкости жидким азотом до температуры 77 К и холодным воздухом до температуры 113 К. Приведены результаты численного моделирования процесса десублимации фтористого водорода при условии ассоциации шести молекул.

Ключевые слова: десублимация, диффузия, фтористый водород, математическая модель, численное моделирование.

Для очистки потоков гексафторида урана (ГФУ) от легких примесей используются очистительные каскады, состоящие из блоков диффузионных машин. Отфильтрованные очистительными каскадами вещества, удаляемые из технологической цепочки, представляют собой смесь газов, основными компонентами которой является ГФУ, фтористый водород (HF), воздух и другие неконденсируемые примеси в незначительном количестве [1]. Газовая смесь подвергается фракционной разгонке для возврата ГФУ в технологию и выделению фтористого водорода, для дальнейшей переработки.

Технологическая линия фракционной разгонки газовых смесей состоит из двух последовательно расположенных установок, работающих по принципу физических процессов конденсации и десублимации на охлажденных поверхностях. Установка улавливания ГФУ обеспечивает десублимацию вещества в промежуточных емкостях (ПЕ), охлаждаемых холодным воздухом с температурой 183 К. Десублимированный в ПЕ ГФУ возвращается в технологическую цепочку. Установка очистки от HF и прочих примесей предназначена для улавливания проскоков ГФУ после установки улавливания ГФУ и конденсации фтористого водорода в емкостях-осадителях объемом 24 л, охлаждаемых жидким азотом с температурой 77 К [2, 3]. Фтористый водород, сконденсированный в емкостях-осадителях установки, направляется на переработку, а компоненты воздуха и неконденсируемые примеси откачиваются вакуумными насосами, фильтруются специальными установками и выводятся в атмосферу.

Для десублимации фтористого водорода из газовой смеси в производстве ОАО «Сибирского химического комбината» используются емкости-десублиматоры, охлаждаемые жидким азотом до температуры 77 К. Экономически более целесообразно охлаждать десублиматоры холодным воздухом. В настоящей статье проводится математическое моделирование процесса десублимации фтористого водорода в емкостях-десублиматорах при температурах 77 и 113 К.

Десублиматор представляет собой цилиндрическую емкость с 6 пластинами-сегментами. Пластины-сегменты расположены поперек проходного сечения потока газовой смеси, и повернуты под углами 60° по отношению друг к другу. Стенки десублиматора охлаждаются либо жидким азотом при температуре 77 К, либо охлажденным до температуры 113 К воздухом. В верхнюю часть десублиматора подается газовая смесь фтористого водорода и воздуха.

Математическая модель строится при следующих допущениях: течение в десублиматоре предполагается квазиодномерным; периметр потока полагается равным площади охлаждающей поверхности, деленной на высоту цилиндра десублиматора; температура внутренних поверхностей десублиматора равна температуре охладителя; десублимация фтористого водорода происходит только на охлаждаемых стенках.

Десублимация фтористого водорода при наличии неконденсирующегося воздуха сопровождается диффузией HF через пограничный слой к холодной поверхности, на которой HF десублимируется. Принимается, что все сопротивление переносу массы и теплоты сосредоточено в этом слое. Диффузия через слой описывается уравнением [4]:

$$\dot{n}_{\text{HF}} = Dn \frac{dy_{\text{HF}}}{ds} + \dot{n}_{\text{HF}} y_{\text{HF}}, \quad (1)$$

где \dot{n}_{HF} – мольный поток HF; D – коэффициент диффузии HF по отношению к неконденсирующемуся воздуху; n – общая молярная концентрация; y_{HF} – мольная доля HF; s – расстояние от поверхности десублимации.

Для расчетов коэффициента диффузии в воздухе используется формула [4]

$$D = 0,0003204 \frac{T^{1,75} \left(\frac{1}{\mu_{\text{HF}}} + \frac{1}{\mu_b} \right)^{1/2}}{p \left(\nu_{\text{HF}}^{1/3} + \nu_b^{1/3} \right)^2}, \quad (2)$$

где ν_{HF} , ν_b – молярные диффузионные объемы HF и воздуха; μ_{HF} , μ_b – молярные массы этих веществ, кг/кмоль; p – давление в Па; T – температура в К.

Диффузионный объем воздуха равен 201, диффузионный объем HF вычисляется через объемы составляющих его атомов и равен 7.46. При вычислениях удобно использовать произведение Dn , входящее в формулу (1). Заменяя в (2) давление из уравнения состояния идеального газа $p = nRT$, запишем

$$nD = 0,0003204 \frac{T^{0,75} \left(\frac{1}{\mu_{\text{HF}}} + \frac{1}{\mu_b} \right)^{1/2}}{R \left(\nu_{\text{HF}}^{1/3} + \nu_b^{1/3} \right)^2}, \quad (3)$$

Если принять в формуле (1) в качестве произведения Dn среднее значение \overline{Dn} поперек пограничного слоя, то можно получить интеграл уравнения (1):

$$\dot{n}_{\text{HF}} = \frac{\overline{Dn}}{s_f} \ln \left(\frac{1 - y_{\text{HF0}}}{1 - y_{\text{HF}}} \right), \quad (4)$$

где y_{HF0} , y_{HF} – мольные концентрации HF на границе раздела фаз и в потоке соответственно; s_f – толщина пограничного слоя.

Для записи квазиодномерного уравнения сохранения числа молей n_{HF} в десублиматоре введена координата z . Координата z направлена параллельно оси десублиматора от точки входа первоначального потока к его выходу из устройства. Тогда для числа молей HF можно записать:

$$\frac{dSun_{\text{HF}}}{\partial z} = \Pi \dot{n}_{\text{HF}}, \quad (5)$$

где S – площадь поперечного сечения десублиматора; u – скорость потока; Π – периметр.

Подставляя в (5) величину потока из (4) и выражая относительные концентрации через числа молей HF и воздуха в единице объема, получим

$$\frac{dSun_{\text{HF}}}{\partial z} = -\Pi \frac{\overline{Dn}}{s_f} \left[\ln \left(1 + \frac{n_{\text{HF}}}{n_b} \right) - \ln \left(1 + \frac{n_{\text{HF0}}}{n_b} \right) \right].$$

Левую и правую части этого уравнения поделим на известную постоянную величину расхода воздуха $(Sun_b) = G_b$ и введем функцию $\xi(z) = n_{\text{HF}}/n_b$. В результате получим уравнение

$$\frac{d\xi}{\partial z} = -\Pi \frac{\overline{Dn}}{s_f G_b} [\ln(1 + \xi) - \ln(1 + \xi_0)], \quad (6)$$

которое не содержит неизвестную u , скорость потока. Коэффициент \overline{Dn} в этом уравнении зависит от температуры. Так как температура меняется поперек пограничного слоя при интегрировании (6), то вычислялась средняя величина \overline{Dn} по формуле

$$\overline{Dn} = 0,0003204 \frac{\left(\frac{T^{0,75} + T_0^{0,75}}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu_{\text{HF}}} + \frac{1}{\mu_b} \right)^{1/2}}{R \left(v_{\text{HF}}^{1/3} + v_b^{1/3} \right)^2},$$

в которой T – температура газа в потоке, T_0 – его температура на поверхности охлаждения.

Для вычисления температуры использовалось уравнение тепловой энергии

$$\frac{dS(c_{P\text{HF}}n_{\text{HF}} + c_{Pb}n_b)uT}{\partial z} = \Pi c_{P\text{HF}}\dot{n}_{\text{HF}} - \alpha \Pi (T - T_0), \quad (7)$$

где $c_{P\text{HF}}$ – молярная теплоемкость HF; c_{Pb} – молярная теплоемкость воздуха; α – коэффициент теплоотдачи.

В правой части (7) первое слагаемое описывает унос из потока тепла в результате диффузии, второе – в результате теплоотдачи.

С помощью (5) уравнение (7) приводится к виду

$$Su(c_{P_{HF}}n_{HF} + c_{P_b}n_b)\frac{dT}{dz} = -\alpha\Pi(T - T_0). \quad (8)$$

Поделив левую и правую части (8) на расход воздуха G_b , получим

$$(\xi(z)c_{P_{HF}} + c_{P_b}n_b)\frac{dT}{dz} = -\frac{\alpha\Pi}{G_b}(T - T_0). \quad (9)$$

Для определения коэффициента теплоотдачи выразим его через число Нуссельта Nu . Так как число Рейнольдса течения мало, то согласно [4] $Nu = 4$.

Система уравнений (6) и (9) решается численно.

Необходимое для расчетов значение n_{HF0} на охлаждающей поверхности вычисляется при давлении насыщенного пара на этой поверхности. Граничное значение функции $\xi(0)$ рассчитывалось из заданного значения отношения расходов $\xi(0) = (n_{HF}/n_b)_{z=0} = G_{HF}/G_b$. Температура при $z = 0$ полагалась равной 298 К.

Расчеты проводились для случая охлаждения жидким азотом с температурой равной $T_0 = 77$ К и холодным воздухом с температурой $T_0 = 113$ К. На рис. 1, а показана зависимость десятичного логарифма отношения концентраций $\lg(n_{HF}/n_b)$ от расстояния z . Видно, что на участке $z < 0,18$ м концентрация фтористого водорода вследствие вымораживания быстро уменьшается до величины n_{HF0} , соответствующей давлению насыщенного пара HF при температуре охлаждающего жидкого азота. Согласно расчетам, эта концентрация равна $1,5 \cdot 10^{-10}$ кмоль/м³. На рис. 1, б для этого случая показана зависимость температуры от z . Видно, что на участке $z < 0,18$ м температура газа быстро уменьшается до температуры азота $T_0 = 77$ К.

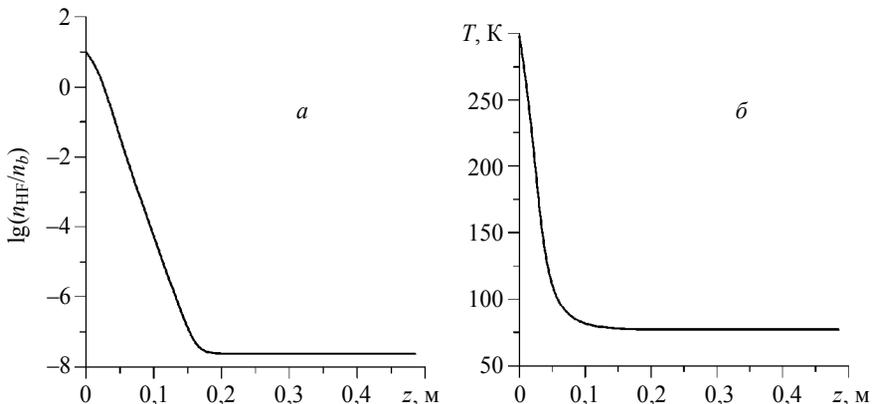


Рис. 1. Зависимость десятичного логарифма отношения концентраций фтористого водорода и воздуха (а) и температуры газовой смеси (б) от высоты емкости. $T_0 = 77$ К

Аналогичные расчеты были проведены для случая охлаждения емкости при температуре $T_0 = 113$ К. На рис. 2, а приведена зависимость $\lg(n_{\text{HF}}/n_b)$ для этого случая. Из рисунка следует, что при охлаждении воздухом вымораживание газообразного HF происходит быстрее, чем вымораживание с помощью азота. Этот факт объясняется увеличением коэффициента диффузии с ростом температуры, которая при охлаждении воздухом выше, чем при охлаждении азотом. Остаточная концентрация паров HF при охлаждении воздухом также выше, чем при охлаждении азотом. Ее величина согласно расчетам составляет $1,04 \cdot 10^{-6}$ кмоль/м³.

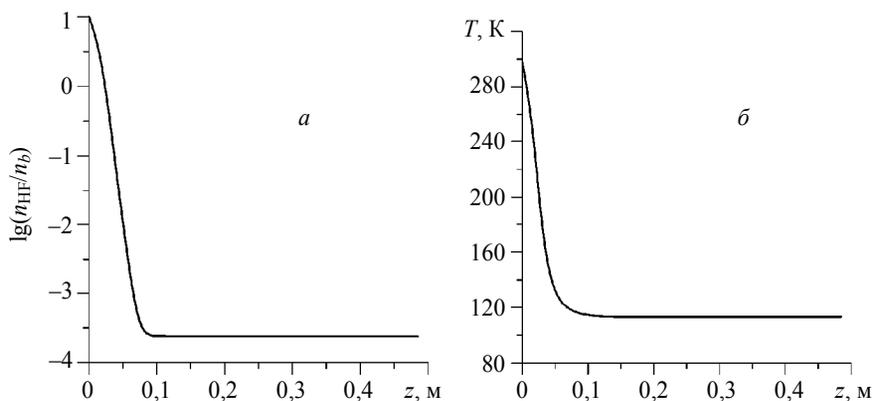


Рис. 2. Зависимость десятичного логарифма отношения концентраций фтористого водорода и воздуха (а) и температуры газовой смеси (б) от высоты емкости. $T_0 = 113$ К

Полученные расчетные концентрации HF не учитывают возможной конденсации перенасыщенного пара HF внутри пограничного слоя в виде капелек тумана, диффузия которых на охлаждающую поверхность будет затруднена вследствие их больших размеров по сравнению с размером молекул. Поэтому полученные результаты по концентрации можно рассматривать как нижний предел вероятных значений n_{HF} .

В [5] показано, что при низких температурах вблизи давления насыщенных паров молекулы фтористого водорода образуют ассоциации, содержащие до 6 молекул HF в одном комплексе. Эти ассоциации обладают большим молекулярным весом и в соответствии с теорией большими диффузионными объемами. Это приводит, как следует из формулы (2), к уменьшению коэффициента диффузии и, следовательно, к уменьшению диффузионного потока на охлаждаемые стенки десублиматора.

На рис. 3, а показано распределение десятичного логарифма отношения концентраций фтористого водорода и воздуха по высоте емкости при охлаждении жидким азотом с учетом наличия комплекса HF, содержащего 6 молекул фтористого водорода. Видно, что вследствие уменьшения потока на стенки концентрация в объеме уменьшается значительно медленнее, чем для неассоциированного HF. На рис. 3, б показано распределение температуры для этого случая. На рис. 4, а показано распределение десятичного логарифма отношения концентраций фтористого водорода и воздуха по высоте емкости при охлаждении воздухом с учетом наличия комплекса HF, содержащего 6 молекул фтористого водорода. На рис. 4, б показано распределение температуры для этого случая.

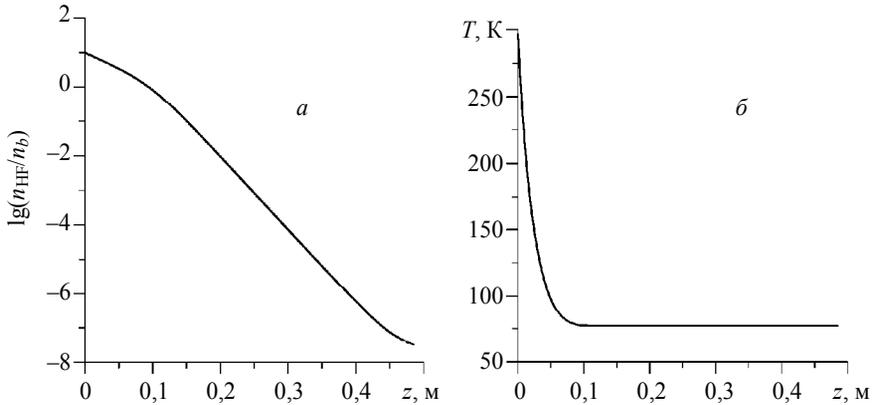


Рис. 3. Зависимость десятичного логарифма отношения концентраций фтористого водорода и воздуха (а) и температуры газовой смеси (б) от высоты емкости. $T_0 = 77$ К

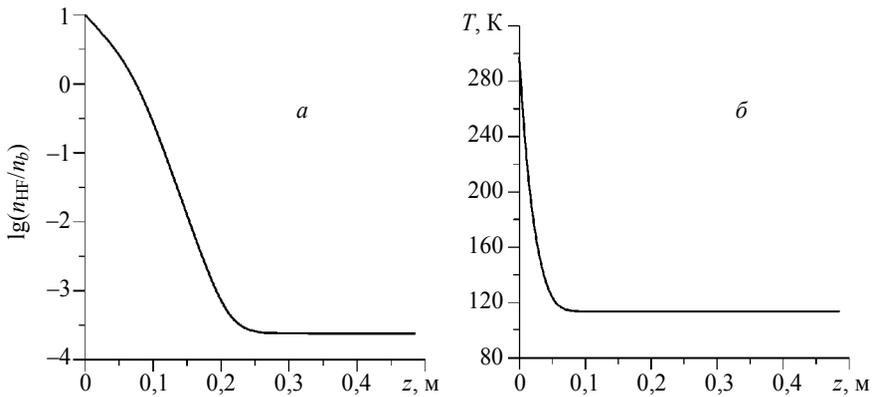


Рис. 4. Зависимость десятичного логарифма отношения концентраций фтористого водорода и воздуха (а) и температуры газовой смеси (б) от высоты емкости. $T_0 = 113$ К

С увеличением степени ассоциации скорость очистки газовой смеси от HF существенно уменьшается.

Тепловое равновесие между температурой стенок емкости и температурой потока смеси газов устанавливается на одной трети пути газа по высоте емкости. Концентрация фтористого водорода стремится к равновесному значению, соответствующему давлению насыщенных паров при температуре стенок емкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васенин И.М., Крайнов А.Ю., Мазур Р.Л., Зернаев П.В., Чуканов М.В. Определение степени ассоциации малых количеств фтористого водорода в системе HF – UF₆ // Изв. вузов. Физика. 2009. Т. 52. № 7/2. С. 44–48.
2. Горелик А.Г., Амитин А.В. Десублимация в химической промышленности. М.: Химия, 1986.
3. Белозеров Б.П., Гуцин А.А., Русаков И.Ю. и др. Анализ процесса и аппарата для десублимации и создание десублиматоров для гексафторида урана и других летучих фторидов // Ядерный топливный цикл. 2006. № 2. С. 55–61.

4. *Справочник по теплообменникам*: в 2 т. Т. 1. М.: Энергоатомиздат, 1987. 561 с.
5. *Рысс И.Г.* Химия фтора и его неорганических фторидов. М.: Химия. 1956. 719 с.

Статья поступила 26.07.2014 г.

Vasenin I.M., Gubanov S.M., Durnovtsev M.I., Krainov A.Yu., Chukanov M.V. PHYSICO-MATHEMATICAL MODELING OF FLUORIDE HYDROGEN DESUBLIMATION FROM GAS MIXTURES ONTO WALLS OF A CONDENSER

To reduce expenditures for cooling of desublimation tanks, the possibility to use cold air as a refrigerant with a temperature of 113 K is considered. The article describes the process of fluoride hydrogen desublimation from gas mixtures onto walls of the tank-desublimator. A mathematical model of hydrogen fluoride desublimation in the presence of air is constructed. The desublimation process was calculated for cases where the tank is cooled by liquid nitrogen down to the temperature of 77 K and by cold air with a temperature of 113 K. Results of numerical simulation of the hydrogen fluoride desublimation process under the condition of the association of six molecules are presented. With an increase in the degree of association, the speed of purification of the gas mixture from hydrogen fluoride is significantly reduced. The results of the numerical simulation show that hydrogen fluoride reaches the wall temperature of the container-desublimator in the first third of the container both in the case of liquid nitrogen cooling and in the case of cooling by cold air. The concentration of hydrogen fluoride in both the cases corresponds to the pressure of saturated vapors at appropriate temperatures.

Keywords: desublimation, diffusion, hydrogen fluoride, mathematical model, numerical simulation.

VASENIN Igor Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

GUBANOV Sergei Mikhailovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Siberian Chemical Plant, Seversk, Russian Federation)

DURNOVTSEV Maxim Ivanovich (M.Sc., Siberian Chemical Plant, Seversk, Russian Federation)

KRAINOV Alexey Yurievich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

CHUKANOV Mikhail Viktorovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Siberian Chemical Plant, Seversk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Vasenin I.M., Krainov A.Yu., Mazur R.L., Zernaev P.V., Chukanov M.V. Opredelenie stepeni assotsiatsii malykh kolichestv fluoristogo vodoroda v sisteme HF – UF₆. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 2009, vol. 52, no. 7/2, pp. 44–48. (in Russian)
2. Gorelik A.G., Amitin A.V. *Desublimateziya v khimicheskoy promyshlennosti*. Moscow, Khimiya Publ., 1986. (in Russian)
3. Belozherov B.P., Gushchin A.A., Rusakov I.Yu., et al. Analiz protsessa i apparatura dlya desublimatezii i sozdanie desublimatezov dlya geksaforida urana i drugikh letuchikh fluoridov. *Yadernyy toplivnyy tsikl*, 2006, no. 2, pp. 55–61. (in Russian)
4. *Spravochnik po teploobmennikam*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1987, vol. 1, 561 p. (in Russian)
5. Ryss I.G. *Khimiya flora i ego neorganicheskikh fluoridov*. Moscow, Khimiya Publ., 1956, 719 p. (in Russian)

УДК 629.7.018.3:536.24

В.Ю. Золотарев, Е.Ю. Котляров, В.С. Финченко, Д.В. Тулин**ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА ТЕРМОРЕГУЛИРОВАНИЯ
ПОСАДОЧНОГО ЛУННОГО МОДУЛЯ НА БАЗЕ
ЖИДКОСТНОГО КОНТУРА С МЕХАНИЧЕСКИМ НАСОСОМ**

Анализируется перспективный вариант системы обеспечения теплового режима (СОТР) на базе жидкостного контура (ЖК) с механическим насосом для термостабилизации приборного отсека посадочного модуля (ПсМ). Регулирование температуры осуществляется с помощью контурных тепловых труб, соединяющих ЖК с четырьмя панелями солнечных батарей. Последние, поочередно, выполняют функции радиаторов. С помощью простой тепловой математической модели исследуется возможность применения гибридной СОТР на базе ЖК в условиях «лунного климата», а также оцениваются ее основные характеристики.

***Ключевые слова:** посадочный лунный модуль, жидкостной контур с механическим насосом, контурная тепловая труба, гибридная система терморегулирования.*

На сегодняшний день только три страны – СССР, США и КНР осуществили мягкую посадку автоматических долгоживущих космических аппаратов (КА) на поверхность Луны. При этом технические специалисты, создававшие эти аппараты, по-разному решили задачу обеспечения теплового режима, установленного на них оборудования.

В советских самоходных лабораториях Луноход, которые по сей день держат первенство по длительности пребывания на Луне, для стабилизации температуры приборного отсека использовался азотный газовый циркуляционный контур [1]. Движение газа по контуру осуществлялось с помощью вентилятора таким образом, чтобы газ мог нагреваться от имеющегося на борту радиоизотопного источника тепла (РИТ) либо охлаждаться, циркулируя через регулируемый тепловой отсек (РТО). Регулируемая заслонка нужным образом изменяла маршрут движения газового потока. Ночью, длящейся около 14 земных дней, циркулирующий поток направлялся к РИТ, а РТО и солнечная батарея (СБ) складывались заблаговременно рабочими сторонами вместе, минимизируя теплообмен приборного отсека с окружающей средой (СБ, в ночное время, выполняла роль «крышки» для РТО). Дежурный режим работы вентилятора обеспечивался лунной ночью с помощью аккумуляторной батареи (АБ). Таким образом, РТО, СБ, а также все оборудование приборного отсека предохранялись в советских аппаратах от переохлаждения и перегрева.

В американских автоматических посадочных аппаратах Surveyor наиболее чувствительное к внешним воздействиям оборудование было размещено в двух теплоизолированных (негерметичных) приборных контейнерах (ПК), тепло из которых отводилось с помощью пассивных тепловых ключей (thermal switches) к небольшим РТО [2]. При охлаждении ПК ниже заданного температурного предела тепловые ключи размыкались и отключали РТО, что позволяло значительно снизить темп остывания оборудования в контейнерах лунной ночью. Характери-

стики аккумуляторных батарей КА Surveyor не позволяли обеспечить продолжительный обогрев ПК, а автономные источники тепла, подобные РИТ, в данных аппаратах не были предусмотрены. Это приводило к глубокому охлаждению оборудования, размещенного в контейнерах, в течение лунной ночи, в результате аппараты выходили из строя через 2–3 лунных суток.

Посадочный комплекс КНР, состоящий из стационарной платформы и небольшого самоходного аппарата (Change-3 и Yutu), был посажен на поверхность Луны спустя 30 лет после завершения лунных программ США и СССР. В распоряжении китайских специалистов имелись более современные и эффективные технические средства: агрегаты, приборы, материалы и технологии. Сообщается [3], что в китайском посадочном модуле применяется РИТЭГ, а самоходный аппарат снабжен несколькими РИТ, кроме того, СОТР содержит двухфазные теплопередающие устройства, возможно, контурные тепловые трубы (КнТТ) и/или тепловые трубы (ТТ).

В настоящее время аппараты КНР продолжают функционировать на Луне и, по-видимому, могут создать наиболее длительный прецедент работы на ее поверхности. В целом, разрозненные и скупые описания китайской миссии рисуют концепцию, схожую с находящимися в стадии проектирования российскими автоматическими посадочными модулями (ПсМ) «Луна-Ресурс» и «Луна-Глоб» [4].

Литературные источники, в которых описывалось бы применение ЖК в составе автоматического посадочного лунного модуля, авторам неизвестны, однако, применительно к КА на орбите ИСЗ, идея похожей гибридной СОТР на базе КнТТ и ЖК была описана в [5]. Рассмотрим предлагаемую здесь СОТР применительно к ПсМ «Луна-Глоб», подразумевая, что приборный отсек данного модуля можно доработать для инсталляции ЖК в некоторой перспективе.

На рис. 1 показана платформа (8) с установленными приборами и оборудованием (7). В составе оборудования, в частности, предусмотрен РИТЭГ (6), обеспечивающий постоянный подогрев платформы и дежурное электропитание. С помощью насоса (1) обеспечивается циркуляция жидкого теплоносителя через трубопроводы, проходящие внутри платформы и через другие элементы СОТР, что способствует «выравниванию» температуры между ними. (Трубопроводы ЖК показаны на рис. 1 темной толстой линией.) Для минимизации воздействия окружающей среды платформа, трубопроводы ЖК и четыре теплообменника (4) ЖК закрыты теплоизоляцией (9). Сброс излишков тепла от системы в окружающее

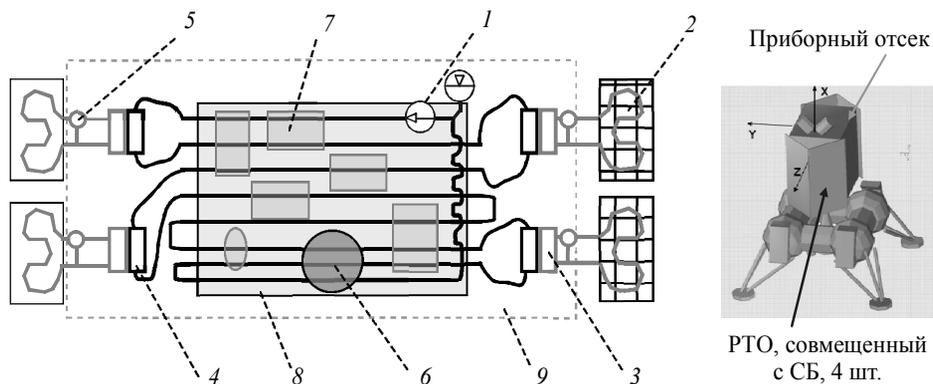


Рис. 1. Схема гибридной СОТР на базе жидкостного контура и контурных тепловых труб

пространство осуществляется с помощью четырех РТО (2), в каждом из которых встроены конденсатор КнТТ. Испарители (3) КнТТ контактируют с теплообменниками ЖК, что позволяет отбирать тепло от жидкого теплоносителя и передавать его к РТО. (Элементы КнТТ схематично изображены серой толстой линией.)

Таким образом, представленная СОТР располагает четырьмя параллельными теплопроводящими трактами, каждый из которых содержит последовательно соединенные: теплообменник ЖК, регулируемую КнТТ и РТО.

Функции РТО в данной системе выполняют адаптированные для этой цели панели СБ. Решение о конструктивном совмещении СБ и РТО посредством инсталляции в панели СБ конденсаторов КнТТ было предложено в [4] и предусматривает поочередное использование панелей в качестве РТО, либо в качестве СБ, а также работу КнТТ в режиме термодиодов. Взаимная ориентация панелей СБ в ПсМ выполнена таким образом, что в любой момент 2–3 из них будут иметь температуры ниже температуры платформы и, следовательно, могут выполнять функции РТО.

Для того чтобы не переохладить платформу ниже заданной температуры КнТТ снабжены пассивными регуляторами температуры (5), способными «перепускать» двухфазный теплоноситель через байпас. Благодаря таким регуляторам [6], при снижении температуры испарителя до установленного предела регулирования (определенного по аналогии с КА «Луна-Глоб» значением 6 ± 3 °С) КнТТ перестает передавать тепловой поток от платформы к РТО. При повышении температуры испарителя выше указанного предела КнТТ вновь начинает отводить тепло к РТО.

На схеме рис. 1 все четыре теплообменника и прочие элементы ЖК соединены (по теплоносителю) строго последовательно. Такое решение повышает надежность системы, поскольку позволяет исключить «самозапирание» отдельных параллельных секций ЖК или предотвратить недопустимое снижение расхода в них. Возникновение подобных нежелательных эффектов наиболее вероятно в случаях, когда параллельные секции ЖК несимметрично теплонагружены или существует несимметричный сток тепла.

Дополнительную иллюстрацию теплового соединения теплообменников ЖК с КнТТ дает рис. 2. Здесь показано, что контактные основания испарителей устанавливаются на металлические теплопроводные пластины, имеющие мелкие каналы (канавки) для жидкого теплоносителя. Проводимость такого соединения в составе предлагаемой СОТР оценивается значением 15 Вт/К, которое далее будет использовано в тепловой модели.

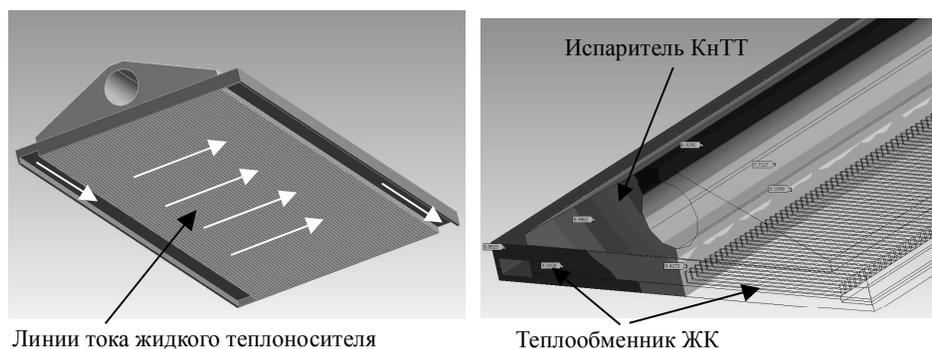


Рис. 2. Пример соединения теплообменника ЖК с испарителем КнТТ

Максимальная тепловая проводимость между паром в испарителе и излучающей поверхностью РТО, по аналогии с штатными РТО «Луна-Глоб» (в режиме, когда КнТТ работает как обычная, нерегулируемая), принята равной 45 Вт/К. Данное значение учитывает то, что покрытие рабочей поверхности РТО элементами фотоэлектрических преобразователей (ФЭП) снижает его эффективность. Применительно к актуальным геометрическим размерам КА «Луна-Глоб» замена штатных РТО на совмещенные РТО – СБ приводит к росту площади излучающей поверхности с 1,3 до 3,6 м², что в значительной мере компенсирует указанную потерю эффективности.

Платформа, несущая приборы и оборудование как элемент ЖК, также представляет собой контактный теплообменник, который образован набором последовательно соединенных профилированных алюминиевых труб, закрытых с двух сторон плоскими алюминиевыми листами-обечайками. Имеющиеся внутри платформы пустоты, так же как и в ТСП на базе ТТ, при необходимости могут быть заполнены сотовым наполнителем. Устанавливаемое оборудование можно крепить к платформе с двух сторон подобно тому, как это делается на штатной ТСП «Луна-Глоб» [4]. Суммарная проводимость, выражающая качество теплового соединения между обечайками, на которые устанавливается оборудование, и теплоносителем, циркулирующим внутри встроенных в платформу алюминиевых профилей, определена, для дальнейшего анализа, величиной 80 Вт/К.

Важным решением, применяемым в СОТР на рис. 1, является то, что насос в ЖК работает постоянно, а циркуляция теплоносителя происходит без какой-либо корректировки расхода. *Стабилизацию нижней температурной границы такого (нерегулируемого) ЖК обеспечивают регулируемые КнТТ, которые необходимым образом увеличивают термическое сопротивление между ЖК и РТО.* КнТТ, планируемые к использованию, заправлены пропиленом, поэтому их конденсаторы, интегрированные в РТО, можно охлаждать до очень низких температур (минус 190 °С), а это крайне важно в условиях «лунного климата».

Все элементы СОТР находятся в неизменном тепловом контакте с постоянно циркулирующей однофазной жидкостью. Поскольку эта жидкость непрерывно подогревается от РИТЭГ, а регуляторы КнТТ не дают охлаждаться испарителям ниже 3 °С, диапазон рабочих температур теплоносителя ЖК может лежать, ориентировочно, внутри интервала 0–50 °С (температуру «сверху» ограничивает допустимый диапазон температур установленного на платформе оборудования). Сказанное означает, что в качестве теплоносителя ЖК можно применять многие жидкости, в том числе и теплоноситель вода – этиленгликоль, эффективно используемый в большинстве бытовых и промышленных систем охлаждения¹.

В результате применения ЖК, а также за счет совмещения РТО и СБ, предлагаемая СОТР обретает ряд преимуществ.

Во-первых, верхнюю часть КА можно освободить для установки научных и служебных приборов, а также расширить обзор для уже установленных приборов и оборудования. Во-вторых, СОТР ПсМ становится нечувствительной к наклонам КА относительно вектора земной и лунной гравитации (в отличие от СОТР на базе ТТ). В-третьих, единичные приборы можно охлаждать вне общей панели, снабдив их теплообменниками («cold plates»), подобными показанному на рис. 2. Без изменения схемы СОТР можно увеличить и количество панелей, несущих оборуду-

¹ При полном (тепловом) отключении платформы от РТО минимальная температура платформы должна поддерживаться за счет тепловыделения РИТЭГ, компенсирующего потери тепла через теплоизоляцию.

дование, то есть общим количеством теплообменников можно варьировать и, при необходимости, можно отказаться от идеи «единой платформы». В-четвертых, хладопроизводительность системы можно наращивать, поскольку ЖК позволяет устанавливать дополнительные РТО, в том числе и на удалении от платформы.

Традиционным недостатком СОТР на базе ЖК принято считать необходимость длительного непрерывного применения механического насоса с электроприводом. Ресурс работы таких устройств ныне исчисляется годами, однако, на практике, насосы принято дублировать. Принимая во внимание лунную аппликацию технологии ЖК, важно учесть в числе недостатков и то, что ночная (двухнедельная в земной шкале) работа насоса потребует расхода (ночной) электроэнергии при ее очевидном дефиците. Если принять, что для поддержки ночного режима может быть использован РИТЭГ, а также некоторая часть емкости аккумуляторной батареи – дежурное энергопотребление насоса можно без риска довести до 6–7 Вт (при этом логично переводить насос в режим ограниченного электропотребления).

Рассмотрим разработанную в рамках настоящей работы упрощенную тепловую математическую модель, с помощью которой ниже будет анализироваться применение ЖК на поверхности Луны. Модель построена с помощью PC-ESATAN [7] и представлена следующими узлами:

- 10 – насос, обеспечивающий циркуляцию жидкости;
- 20, 40, 60, 80 – платформа несущая оборудование и приборы;
- 30, 50, 70, 90 – узлы, имитирующие 4 «сборки» испарителей КнТТ с теплообменниками ЖК (см. рис. 2);
- 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 – замкнутый жидкостной контур, осуществляющий циркуляцию через узлы с 10 по 90;
- 190, 170, 150, 130 – радиаторы (совмещенные с панелями СБ);
- 998 – граничный узел «Космос»;
- 999 – граничный узел «Поверхность Луны».

Применяемую расчетную схему демонстрирует рис. 3. Представленная схема была сгенерирована утилитой TERMNV пакета PC-ESATAN автоматически. Линейные, нелинейные, а также адвективные связи между узлами показаны разными цветами. Адвективными связями соединены узлы ЖК 11-21-31-41-51-61-71-81-91-11, образуя замкнутый контур, а нелинейные связи между узлами 190, 170, 150, 130 и граничными узлами 998, 999 моделируют работу РТО-СБ, излучающих

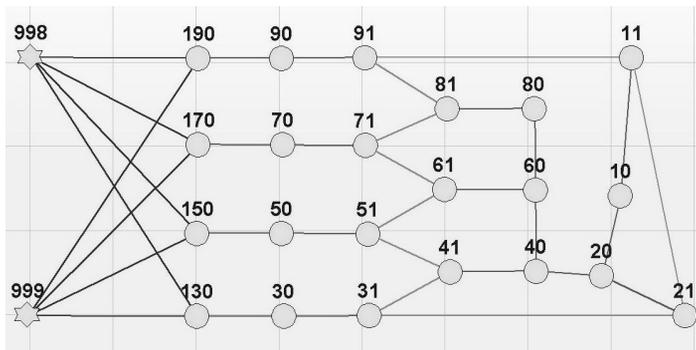


Рис. 3. Расчетная схема тепловой модели СОТР на базе ЖК (TERMNV/ESATAN)

в космос и на поверхность Луны. Для сохранения наглядности схемы в ней не показаны узлы, имитирующие экранно-вакуумную изоляцию (ЭВТИ), которой закрыта платформа с приборами, однако, при выполнении расчетов наличие ЭВТИ учитывалось.

Для анализа работы ЖК в составе ПсМ дополнительно к параметрам, которые были определены выше, применялись следующие допущения и условия:

- установленный в системе насос имеет тепловыделение порядка 10 Вт и обеспечивает постоянный объемный расход теплоносителя 0,7 л/мин (по аналогии с характеристиками насосного блока в проектах MPF, MER и MSL [8]);

- теплоносителем в ЖК является вода с содержанием этиленгликоля 20 % (принимается, что внутренние поверхности ЖК защищены от коррозии);

- поскольку все элементы ЖК работают в относительно узком температурном диапазоне и соединены последовательно, массовый расход в контуре задан директивно постоянным значением (т.е. учет гидравлических характеристик циркуляционного контура в тепловой модели не обеспечивается);

- РТО ПсМ расположены вертикально и излучают к граничным узлам № 998 и № 999 в равных долях, выраженных с помощью угловых коэффициентов (в соответствии с компоновкой СБ на КА «Луна-Глоб»);

- солнечные потоки, падающие на панели СБ, имеют циклический характер и также соответствуют штатной ориентации КА Луна-Глоб в точке посадки (потоки на РТО рассчитаны заранее и применяются в разработанной модели в виде циклограмм);

- точка посадки КА лежит в полярной зоне Луны с географической широтой 80° («Луна-Глоб»/«Луна-Ресурс»).

Многообразие рабочих циклограмм оборудования, а также некоторая неопределенность в части их наложения друг на друга делают формальное представление работы ПсМ на поверхности Луны затруднительным. Выбор наиболее теплонапряженных режимов в таких задачах зачастую неочевиден. В связи с этим, для проведения анализа были сформированы два упрощенных универсальных расчетных сценария (традиционно, «холодный» и «горячий»). Оба сценария охватывают лунные сутки целиком.

Учитывая то, что на Луне нет атмосферы, а сезонные явления, присущие Земле, здесь практически отсутствуют, характер изменения и значения температуры поверхности планеты и падающих внешних потоков в месте посадки для обоих сценариев приняты одинаковыми.

Циклограмму изменения температуры поверхности Луны в точке посадки иллюстрирует рис. 4. Отличие двух сценариев выражено лишь величинами тепловыделения оборудования, установленного на платформе, которые также отражены в виде циклограмм на рис. 4. В «холодном режиме» дежурное тепловыделение от оборудования к платформе выражено постоянными значениями 150 Вт в течение дня и 0 Вт в течение ночи. В «горячем режиме», трижды за лунный день, дополнительно к дежурному тепловыделению включается оборудование, дающее плавное увеличение мощности на 150 Вт, т.е. доводит теплонагружение платформы до 300 Вт. Продолжительность единичного теплонагружения величиной 300 Вт составляет 42 часа (см. рис. 4). На ночь в горячем режиме все оборудование также выключается, но заметно позднее, чем в холодном режиме, с задержкой на 100 ч.

Независимо от циклограмм, показанных на рис. 4, на платформе непрерывно (круглосуточно) работает РИТЭГ. Его тепловая мощность равна 145 Вт в горячем режиме и 120 Вт в холодном. Тепловая мощность, определяемая циклограммами

по рис. 4, распределена равномерно между узлами № 20, 40 и 60, мощность РИ-ТЭГ приложена к узлу № 80.

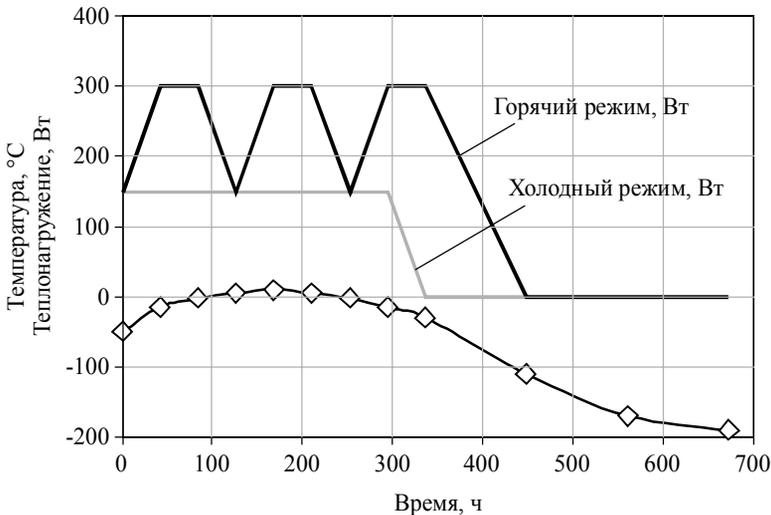


Рис. 4. Циклограммы тепловыделения на платформе и температуры поверхности грунта

Результаты расчета температур в узлах модели для установившихся лунных суток представлены на рис. 5 и 6. Толстые линии здесь отражают поведение РТО; тонкие сплошные серые линии – температуру теплообменников, прерывистые линии – температуры платформы.

Здесь мы видим как РТО по очереди «проходят засветку», а затем, ночью, их температуры выстраиваются в той последовательности, в которой испарители соответствующих КнТТ подключены к жидкостному контуру (по ходу теплоносителя). В дежурном режиме группа температур Т10 – Т90, представляющая приборный отсек, круглосуточно находится в «комфортном» температурном интервале, 0–20 °С («холодный случай», рис. 6). Результаты для «горячего случая» можно считать также приемлемыми (рис. 5), однако, в лунный полдень наблюдается опасный нагрев платформы до 45 °С. (Данный уровень температуры неприемлем, например, для АБ.) Это значит, что интенсивное применение оборудования в середине лунного дня нецелесообразно.

Очевидно, что на протяжении лунного дня работу оборудования и приборов, а также выполнение различных экспериментов следует планировать с учетом реальной хладопроизводительности СОТР, которая, в свою очередь, зависит от времени суток и позиции КА на поверхности Луны. При этом возможность проведения работ лучше анализировать непосредственно перед их началом с учетом реального положения КА и особенностей местного рельефа в точке посадки. Если какой-либо эксперимент затруднительно выполнить в лунный полдень, его, в принципе, можно выполнить утром или вечером, поскольку в земном масштабе это составляет несколько дней.

По характеру изменения кривых, в целом, можно оценить работу СОТР как удовлетворительную и допустимую к применению.

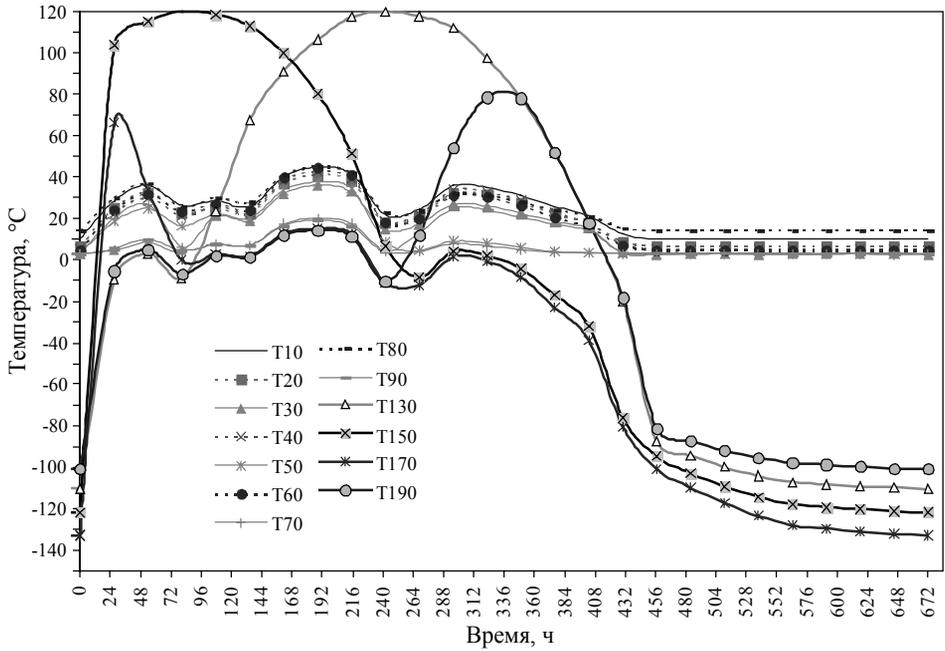


Рис. 5. Расчетные температуры в узлах тепловой модели для установившихся лунных суток («горячий» режим)

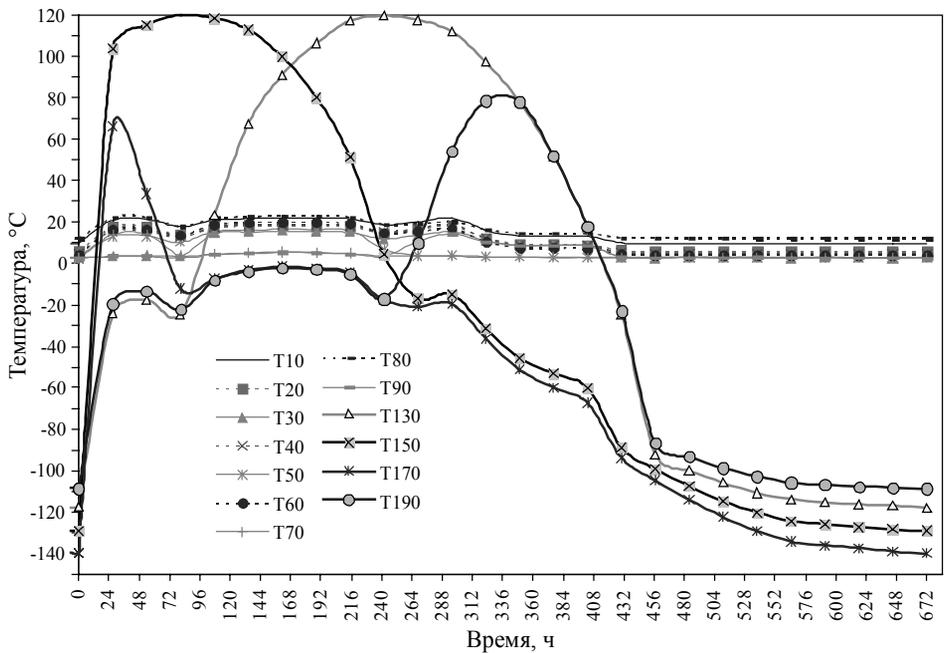


Рис. 6. Расчетные температуры в узлах тепловой модели для установившихся лунных суток («холодный» режим)

В заключение, в описательной форме, рассмотрим альтернативный вариант регулируемого теплопроводящего тракта от ЖК к РТО без применения КнТТ. В этом случае переменное тепловое сопротивление между теплообменниками ЖК и РТО могут обеспечить пассивные тепловые ключи, описанные в [9] и реализующие идею переменного теплового контакта с помощью плавящегося вещества (см. рис. 7). При разогреве теплообменника ЖК выше заданной температуры (например, выше 8°C) парафин в закрытых полостях «ключей» плавится, контактные поверхности смыкаются и РТО начинает принимать тепловой поток от ЖК и передавать его к РТО. При охлаждении теплообменников – парафин затвердевает и, с помощью пружинящих элементов, тепловой ключ размыкает тепловой контакт. В результате, ЖК отключается от РТО.

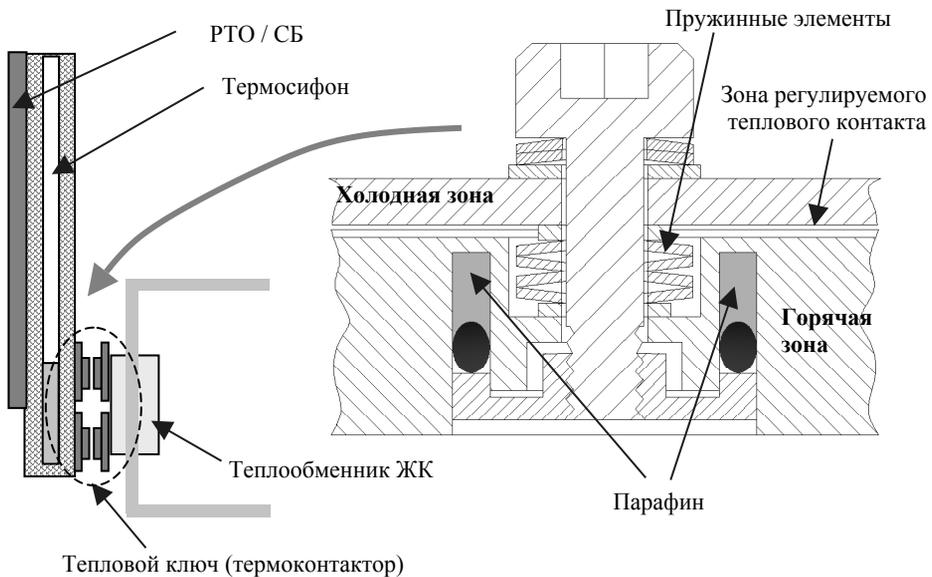


Рис. 7. Альтернативный вариант соединения теплообменников ЖК с РТО на базе тепловых ключей

РТО здесь также должны быть выполнены на базе пропиленовых тепловых труб, которые следует располагать внутри вертикальных панелей вертикально. Для того чтобы обеспечить работу РТО в условиях гравитации, теплообменники ЖК должны контактировать с ТТ в нижней зоне, и жидкостной контур позволяет это условие выполнить. Применение ТТ в качестве термосифонов обеспечивает диодность соединения ЖК и РТ в условиях гравитации, что предотвратит обратный тепловой поток от РТО к ЖК в случае засветки РТО.

На этапе доставки КА к Луне ТТ будут работать в невесомости и, в этом случае, идея реализации теплового диода на базе термосифона неприменима. Здесь, очевидно, следует организовать диодный режим другими средствами, например таким образом подобрать заправку теплоносителя (и внутренний объем ТТ по зонам), чтобы зона конденсации при обратном потоке блокировалась жидкостью.

Материалы представленной работы будут полезны для специалистов, занимающихся проектированием посадочных модулей, в частности модулей, применяемых на Луне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еленов А.И., Рыбин А.М., Яковлев А.С. Тепловой режим и система терморегулирования. Передвижная лаборатория на Луне «Луноход-1» / под ред. Академика А.П. Виноградова. М.: Наука, 1971. С. 30–33.
2. Technical Report 32-1262/ Surveyour VI Mission Report. Part I. Mission Description and Performance, 1968.
3. <http://www.cnsa.gov.cn/n360696/n361228/n361378/607787.html>
4. Котляров Е.Ю. Система терморегулирования приборного отсека посадочного модуля ЛУНА-ГЛОБ и расчетный анализ оптимальных рабочих параметров радиационного теплооменика // Тепловые процессы в технике. 2014. Т. 6. № 4. С. 164–178.
5. Tulin D., Kotlyarov E., Serov G., Tulin I. The 4000W Hybrid Single- and Two-Phase Thermal Control System for Payload and Equipment of Geostationary Communication Satellite // 40 ICES. Barcelona, Spain, 11–15 July 2010, AIAA #6121.
6. Bodendieck F., Schlitt R., Romberg O., Goncharov K., Buz V., Hildebrand U. Precision Temperature Control With a Loop Heat Pipe, 05-ICES-145, ICES, Rom, 2005.
7. ESATAN 9.2 User Manual // UM-ESATAN-004 ALSTOM Power Technology Centre Whetstone, Leicester, UK, February 2005.
8. Bhandari P., Birur G., et al. Mars science laboratory thermal control architecture // SAE 2005-01-2828, 35th International Conference on Environmental Systems, Rome, Italy, July 2005.
9. *Spacecraft thermal control handbook* / ed. by David G. Gilmore. 2nd ed. Copyright © 2002 by The Aerospace Corporation. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 1801 Alexander Bell Drive Reston, Virginia 20191-4344.

Статья поступила 22.05.2014 г.

Zolotarev V.Yu., Kotlyarov E.Yu., Finchenko V.S., Tulin D.V. MULTIPURPOSE HYBRID THERMAL CONTROL SYSTEM OF LUNAR LANDER BASED ON A PUMPED FLUID LOOP

This paper describes the unmanned lunar lander having a thermal control system (TCS) based on the pumped fluid loop (PFL). In the proposed TCS, by circulation of the cooling liquid, the heat generated by the equipment and instruments mounted on a thermally insulated platform is removed. The heat transfer from the coolant fluid to the radiative heat exchangers (RHX) will be organized via loop heat pipes (LHPs). For this purpose, four heat exchangers having an effective thermal link between LHP's evaporators and fluid loop is used. The condensers of four LHP's are integrated in four solar array panels. The solar array panels are oriented oppositely and serve alternately as radiators. The temperature control is carried out using LHPs because their thermal resistance varies in a predetermined manner via existing passive regulators. With use of a simplified thermal mathematical model, the ability of the proposed hybrid TCS based on PFL and LHPs, as well as its basic characteristics in a lunar surface environment conditions are estimated.

Keywords: lunar lander, pumped fluid loop, loop heat pipe, hybrid thermal control system.

ZOLOTAREV Victor Yurievitch (M.Sc., Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation).

KOTLYAROV Evgeny Yurievitch (M.Sc., Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation)
E-mail: key@laspace.ru

FINCHENKO Valeriy Semionovich (Doctor of technical Sciences, Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation)
E-mail: feofin.val@yandex.ru

TULIN Dmitry Vladimirovich (Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation)
E-mail: tulin@laspace.ru

REFERENCES

1. Elenov A.I., Rybin A.M., Yakovlev A.S. *Teplovoj rezhim i sistema termoregulirovaniya. Peredvizhnaya laboratoriya na Lune "Lunokhod-1"*. Moscow, Nauka Publ., 1971, pp. 30–33. (in Russian)
2. Technical Report 32-1262 / Surveyour VI Mission Report. Part I. Mission Description and Performance, 1968.
3. <http://www.cnsa.gov.cn/n360696/n361228/n361378/607787.html>
4. Kotlyarov E.Yu. Sistema termoregulirovaniya pribornogo отсека posadochnogo modulya LUNA-GLOB i raschetnyy analiz optimal'nykh rabochikh parametrov radiatsionnogo teploomennika. *Teplovy protsessy v tekhnike*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 164–178. (in Russian)
5. Tulin D., Kotlyarov E., Serov G., Tulin I. The 4000W hybrid single- and two-phase thermal control system for payload and equipment of geostationary communication satellite. *40 ICES*. Barcelona, Spain, 11–15 July 2010, AIAA #6121.
6. Bodendieck F., Schlitt R., Romberg O., Goncharov K., Buz V., Hildebrand U. *Precision Temperature Control With a Loop Heat Pipe*, 05-ICES-145, ICES, Rom, 2005.
7. ESATAN 9.2 User Manual. UM-ESATAN-004 ALSTOM Power Technology Centre Whetstone, Leicester, UK, February 2005.
8. Bhandari P., Birur G., et al. Mars science laboratory thermal control architecture. *35th International Conference on Environmental Systems*. Rome, Italy, July 2005.
9. David G. Gilmore, ed. *Spacecraft thermal control handbook*. The Aerospace Corporation. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2002.

УДК: 620.193:621.039.5

**М.Н. Саблин, А.В. Никулина, В.Ф. Коньков,
В.А. Маркелов, В.В. Новиков, Т.Н. Хохунова**

ОБОСНОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТРУБ НАПРАВЛЯЮЩИХ КАНАЛОВ С ГИДРОТОРМОЗОМ ИЗ СПЛАВА Э635 ДЛЯ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ СБОРОК ЛЕГКОВОДНЫХ РЕАКТОРОВ

Направляющий канал, являясь элементом силового каркаса тепловыделяющей сборки, в процессе всего срока эксплуатации должен обладать высоким сопротивлением формоизменению и коррозионной стойкостью. Представлены результаты исследований структуры, текстуры, сопротивления ползучести и коррозии усовершенствованных труб НК (НК с гидротормозом), а также анализа эксплуатации труб НК из сплава Э635. Выданы рекомендации по использованию труб НК с ГТ в ТВСА-Т реактора ВВЭР-1000.

Ключевые слова: циркониевый сплав Э635, тепловыделяющая сборка, реактор ВВЭР-1000, направляющий канал с гидротормозом, коррозия, ползучесть, микроструктура, состав и размер интерметаллидов, степень рекристаллизации, автоклавные испытания.

В разработанной ОАО «ОКБМ Африкантов» конструкции кассеты ТВСА-Т для реактора ВВЭР-1000 предусмотрено использование направляющих каналов (НК) с гидротормозом (ГТ) из сплава Э635. Зона гидротормоза представляет собой участок с уменьшенным диаметром в нижней части трубы с целью снижения скорости падения сборки системы управления защитой (СУЗ) в нижней части активной зоны.

Направляющий канал, являясь элементом силового каркаса тепловыделяющей сборки, в процессе всего срока эксплуатации должен обладать достаточным сопротивлением формоизменению, что определяется характеристиками радиационного роста и радиационной ползучести, а также высокими прочностными, пластическими и коррозионными свойствами материала, из которого они изготовлены.

Контрольные испытания труб НК с ГТ после предварительного наводораживания показали радиальную ориентацию гидридов в зоне гидротормоза трубы.

Целью настоящей работы являлось определение причин образования и влияния радиальной ориентации гидридов в зоне гидротормоза труб на их эксплуатационные характеристики и оценка на этой основе возможности использования таких труб в ТВСА – Т реактора ВВЭР – 1000.

Представлены результаты исследований структуры, текстуры, сопротивления ползучести и коррозии труб НК с ГТ, а также анализа эксплуатации труб НК из сплава Э635. На основании проведенных исследований показана возможность использования труб НК с ГТ в ТВСА-Т реактора ВВЭР-1000.

1. Материал и методы исследований

В качестве материала исследований использованы трубы направляющих каналов с гидротормозом из сплава Э635, термообработанных на готовом размере при $T = 580$ °С в течение 3 часов в вакуумной печи типа СНВ.

Исследования структуры труб в продольном и поперечном сечениях (по отношению к оси прокатки) проводили с помощью оптического микроскопа «Leica» при увеличении 300 крат.

Более детальное исследование микроструктуры труб с анализом структурно-фазового состояния проводили с помощью просвечивающего электронного микроскопа JEM 2000-FX в сканирующем (СЭМ) и просвечивающем (ТЭМ) режимах. Электронно-микроскопические фольги готовили методом одностороннего электрохимического утонения в установке струйно-пульсирующего типа «Микрон» при напряжении 32–38 В и температуре электролита 30 °С.

Наводороживание образцов проводили на установке сухого наводороживания типа «Сивертс» до содержания водорода 0,02 мас.% при температуре менее 400 °С. Ориентацию гидридов оценивали по фотографиям, полученным с металлографических шлифов в оптическом микроскопе.

Механические свойства определяли в продольном и поперечном направлениях при комнатной и повышенной (350 °С) температуре на испытательной машине типа Instron.

Для анализа изменений текстуры вырезали специальные образцы, анализируемая поверхность которых была перпендикулярна радиальному направлению и находилась на различной глубине по сечению стенки. Анализ текстуры труб проводили по неполным прямым полюсным фигурам (ППФ) (0001) и {110}. Для расчёта интегральных текстурных параметров Кёрнса восстанавливали полные ППФ методом экстраполяции данных на неисследованную область стереографической проекции.

Сопротивление термической ползучести труб оценивали по результатам испытаний при одноосном нагружении в осевом направлении при температуре 380 °С и напряжении 100 МПа. Погрешность поддержания осевой нагрузки составляла $\pm 1\%$, колебания температуры на образцах ± 3 °С. В процессе испытаний осуществлялась регистрация параметров испытаний: время, температура и осевая деформация.

Коррозионные испытания наводороженных и ненаводороженных образцов выполнялись в автоклавах по методикам, разработанным в соответствии с международным стандартом [1], в условиях, моделирующих водно-химический режим реакторов ВВЭР при температуре 330 °С.

2. Результаты исследований

2.1. Ориентация гидридов

Ориентация гидридов в основной части и в зоне гидротормоза наводороженных образцов представлена на рис. 1.

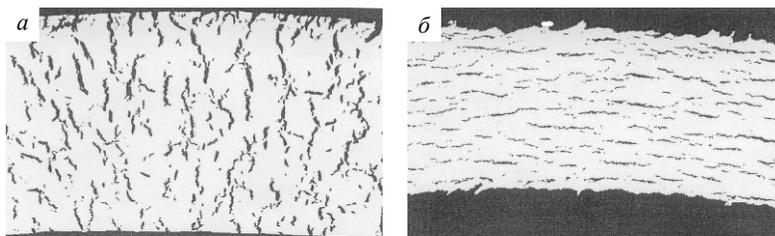


Рис. 1. Ориентация гидридов в трубах НК с гидротормозом: *a* – ориентация гидридов в зоне гидротормоза; *б* – ориентация гидридов в основной части трубы

Как видно, в основной части трубы коэффициент ориентации гидридов (F_n) находится в пределах (0,00 – 0,15), а в зоне гидротормоза трубы в пределах (0,89 – 0,97).

Такое различие может свидетельствовать о наличии текстурных и структурных отличий, что может оказывать влияние на эксплуатационные характеристики направляющих каналов.

2.2. Механические свойства труб

В табл. 1 представлены механические свойства различных участков труб НК с ГТ из сплава Э635.

Таблица 1

Механические свойства труб НК с гидротормозом из сплава Э635 (средние значения)

Место отбора	Продольное направление						Поперечное направление					
	20 °			350 °			20 °			350 °		
	σ_B , МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ_5 , %	σ_B , МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ_5 , %	σ_B , МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ_5 , %	σ_B , МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ_5 , %
Основная зона	510	370	38	280	190	41	510	440	25	260	230	30
Зона гидротормоза	520	370	28	280	190	29	540	450	23	280	230	29
Требования конструкторской документации, не менее												
	420	300	24	220	150	20	400	340	15	200	180	12

По прочностным и пластическим свойствам трубы удовлетворяют требованиям конструкторской документации. Однако отмечается различие в пластических свойствах основной зоны и зоны гидротормоза, более выраженное при комнатной температуре, которое составляет в среднем около 10 абс. %.

2.3. Структура труб

Зеренная структура основной части и зоны гидротормоза труб из сплава Э635 представлена на рис. 2. Видно, что структурное состояние основной части и зоны гидротормоза исследованных труб можно оценить как близкое к полностью рекристаллизованному (рис. 2). Измерения микротвердости основной части трубы

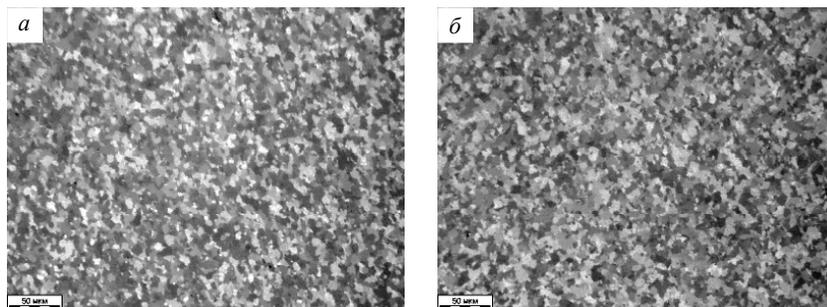


Рис. 2. Зеренная структура труб НК с гидротормозом из сплава Э635: *a* – зеренная структура основной части трубы; *б* – зеренная структура зоны гидротормоза

и зоны гидротормоза также подтвердили близость структурного состояния материала в этих участках труб (табл. 2).

Таблица 2

Микротвердость различных участков труб НК с гидротормозом из сплава Э635

Зона гидротормоза			Основная зона		
Наружная поверхность	Середина	Внутренняя поверхность	Наружная поверхность	Середина	Внутренняя поверхность
136	137	136	138	137	134

Более детальное исследование микроструктуры проводили методом электронной микроскопии в ТЭМ- и СЭМ-режимах. СЭМ-исследования подтвердили данные металлографии и показали высокую однородность в распределении частиц второй фазы в циркониевой матрице (рис. 3, а, в). ТЭМ-исследования показали, что во всех образцах наблюдаются частицы одного типа, а именно фазы Лавеса – $Zr(Nb,Fe)_2$ с кристаллической решеткой ГПУ (рис. 3, б, г). Средний размер выделений фазы Лавеса составляет около 100 нм, концентрация $\sim(1-4) \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Структура практически полностью рекристаллизована. Степень рекристаллизации в обоих участках труб всех исследованных вариантов составляет более 90 %.

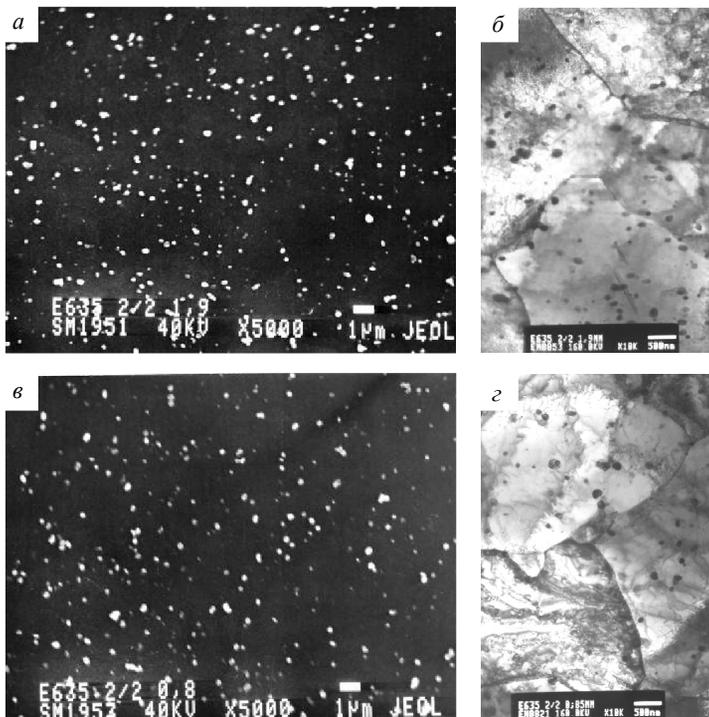


Рис. 3. СЭМ (а, в) и ТЭМ (б, г) – фотографии различных участков труб НК с гидротормозом из сплава Э635: а, в – зона гидротормоза; б, г – основная часть трубы

2.4. Текстура

Результаты определения текстуры труб из сплава Э635 приведены в табл. 3.

Таблица 3

Текстурные параметры различных участков труб НК с ГТ из сплава Э635

Место отбора	Текстурные параметры		
	f_R	f_T	f_L
Основная зона трубы	0,52	0,43	0,05
Зона гидротормоза	0,27	0,66	0,07

Как видно из представленных результатов, переход от основной части трубы к зоне гидротормоза приводит к резкому изменению текстуры от радиальной ($f_R = 0,52-0,57$) к тангенциальной ($f_T = 0,63-0,65$) (табл. 3). Такое различие обусловлено сложной геометрией труб направляющих каналов с гидротормозом и, как следствие, различными параметрами деформационной обработки различных ее частей в процессе изготовления.

2.5. Коррозионная стойкость

В предыдущих разделах показано, что в зоне гидротормоза труб наблюдается радиальная ориентация гидридной фазы, обусловленная формированием текстуры с преобладающей тангенциальной компонентой.

Для оценки влияния тангенциальной текстуры и радиальной ориентации гидридной фазы на коррозионную стойкость труб НК с ГТ проведены испытания образцов в исходном состоянии и после предварительного наводораживания до 0,02 мас.%. Содержание водорода 0,02 мас.%, выбрано исходя из условий получения в металле радиально ориентированных гидридов, обусловленных текстурой труб, так как известно, что превышение содержания водорода в металле труб свыше (0,02–0,03) мас.% приводит к переориентации гидридной фазы из-за деформации циркониевой матрицы, обусловленной большим объемным эффектом образования гидридной фазы [2].

Результаты коррозионных испытаний труб НК с ГТ из сплава Э635 в исходном состоянии и после предварительного наводораживания в условиях, приближенных к условиям эксплуатации НК в реакторах ВВЭР-1000 (без учета нейтронного облучения), показаны в табл. 4 и на рис. 4. Из данных табл. 4 и рис. 4 видно, что за 150 суток испытаний не наблюдается различий в коррозионном поведении основной части и зоны гидротормоза труб НК.

Таблица 4

Коррозионная стойкость труб НК с ГТ из сплава Э635
($T = 330\text{ }^\circ\text{C}$, вода, длительность 150 суток)

Место отбора	Исходное содержание водорода, мас.%	Толщина оксидной пленки, мкм
Основная зона трубы	-	1,8–1,9
Основная зона трубы	0,02	1,8–2,2
Зона гидротормоза	-	1,8–1,9
Зона гидротормоза	0,02	1,9–2,2

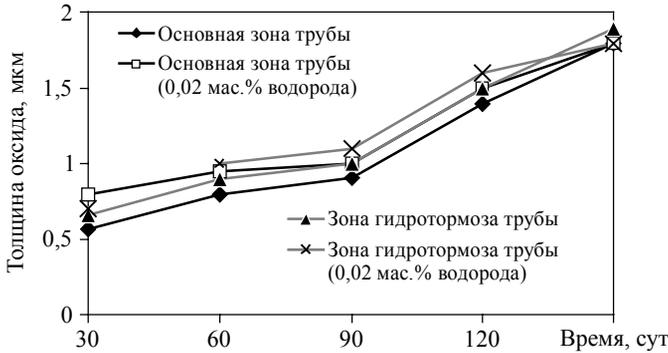


Рис. 4. Коррозионная стойкость труб НК с ГТ из сплава Э635 ($T = 330\text{ }^{\circ}\text{C}$, деаэрированная вода)

2.4. Ползучесть труб

Для изучения влияния текстуры на размерную стабильность труб НК с ГТ проведены испытания труб на стойкость к ползучести при одноосном нагружении в осевом направлении при $T = 400\text{ }^{\circ}\text{C}$ и напряжении 100 МПа. Результаты представлены в табл. 5 и на рис. 5. За 3500 ч испытаний выявлено незначительное уменьшение деформации ползучести зоны гидротормоза трубы в сравнении с ее основной тонкостенной частью (табл. 5).

Таблица 5

Деформация ползучести труб НК с ГТ из сплава Э635 при одноосном нагружении в осевом направлении ($T = 400\text{ }^{\circ}\text{C}$, напряжение 100 МПа)

Место отбора образца	Длительность испытаний, ч	Деформация, %
Основная зона	3500	1,3 – 1,7
Зона гидротормоза	3500	1,2 – 1,3

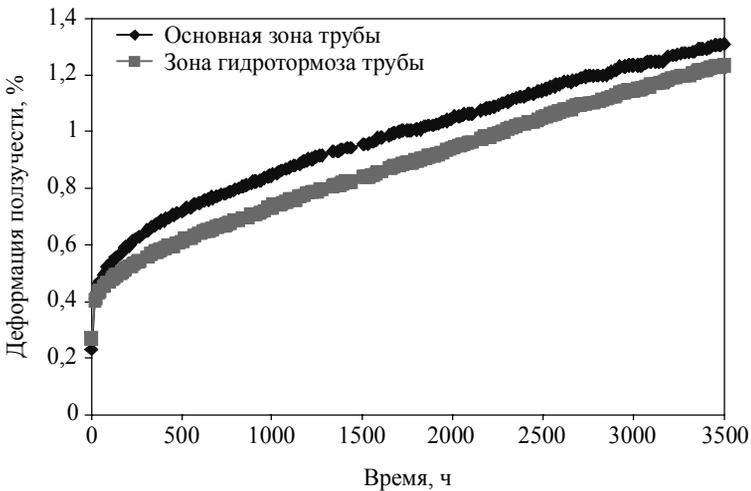


Рис. 5. Деформация ползучести при одноосном растяжении ($T = 400\text{ }^{\circ}\text{C}$, 100 МПа) основной зоны и зоны гидротормоза труб НК из сплава Э635

3. Обсуждение результатов

Направляющий канал, являясь составной частью силового каркаса ТВС, должен обладать высокими прочностными свойствами, сопротивлением формоизменению и достаточной коррозионной стойкостью. Выполненные исследования показали, что по механическим свойствам направляющие каналы с гидротормозом с достаточным запасом удовлетворяют выставленным требованиям, несмотря на различие в свойствах основной части трубы и зоны гидротормоза. При этом прочностные свойства зоны гидротормоза находятся практически на уровне прочностных свойств основной части трубы.

Сопротивление формоизменению направляющих каналов в процессе эксплуатации, а также во время загрузки – выгрузки ТВС определяется помимо прочностных свойств характеристиками радиационно-термической ползучести и радиационного роста.

Радиационно-термическая ползучесть зависит не только от приложенных напряжений, температуры, флюенса нейтронов, структурного состояния и химического состава сплава, но и его сопротивления термической ползучести [2–4].

Проведенные в настоящей работе исследования показали, что структурное состояние основной части и зоны гидротормоза трубы идентично (рекристаллизованное), а исследования стойкости к термической ползучести не выявили значительных различий в поведении различных частей труб. Поэтому можно ожидать, что в процессе эксплуатации зона гидротормоза по своим характеристикам ползучести не будет отличаться от характеристик основной зоны трубы.

Деформация радиационного роста в значительной степени зависит не только от состава сплава, температуры и структурного состояния материала, но и от кристаллографической текстуры матрицы. В работах [5, 6] была определена эмпирическая зависимость, связывающая деформацию радиационного роста (ДРР) с характеристиками текстуры:

$$\text{ДРР} \sim (1 - 3f_i),$$

где f_i – текстурные параметры Кернса.

В соответствии с уравнением можно рассчитать, что деформация радиационного роста зоны гидротормоза труб в продольном направлении, определяемой фактором f_L , не превысит деформацию радиационного роста тонкостенной части трубы.

Основным вопросом, который должен был быть решен при обосновании безопасности эксплуатации направляющих каналов с гидротормозом, является их коррозионная стойкость.

Изучению влияния водорода на коррозионную стойкость изделий из циркониевых сплавов уделяется достаточно большое внимание [7–10]. При этом однозначного влияния содержания водорода на коррозионную стойкость циркониевых сплавов не выявлено, а данные по влиянию ориентации гидридной фазы на коррозию отсутствуют. Анализ литературных данных позволил только установить, что действие водорода на коррозию проявляется только при наличии градиента содержания водорода по толщине стенки циркониевых изделий [7–10].

Проведенные в настоящей работе исследования коррозионной стойкости основной части трубы и зоны гидротормоза в исходном состоянии и после предварительного наводороживания (до 0,02 мас.% водорода) не выявили отличий в коррозионном поведении различных частей труб НК с ГТ. Толщина оксидной пленки на всех исследованных образцах находилась в пределах (1,8–2,2) мкм. Та-

кие результаты указывают на отсутствие влияния содержания водорода (в исследованных пределах (до 0,02 мас.%) и ориентации гидридной фазы на коррозионную стойкость труб НК с ГТ. Необходимо отметить, что в данной работе был использован метод «сухого» наводороживания, позволяющий обеспечить равномерное распределение водорода по всему периметру образца. Имеющиеся результаты послереакторных исследований направляющих каналов из сплава Э635 показывают, что в трубах НК отсутствует градиент содержания водорода по сечению, что подтверждается равномерным распределением гидридов по толщине стенки направляющего канала [11]. Поэтому, полученные результаты могут быть использованы как обосновывающие безопасную эксплуатацию НК с ГТ.

Таким образом, выполненные исследования показали, что по своим прочностным и коррозионным свойствам направляющие каналы с гидротормозом удовлетворяют выставленным требованиям и могут быть использованы в ТВСА-Т реактора ВВЭР-1000.

Выводы

1. Проведенные структурные и текстурные исследования труб НК с гидротормозом показали, что радиальная ориентация гидридов в зоне гидротормоза труб обусловлена формированием тангенциальной текстуры. Тангенциальная текстура практически не оказывает влияния на прочностные свойства и стойкость труб к термической ползучести, снижая при этом их пластические характеристики.

2. Автоклавные коррозионные испытания показали, что тангенциальная текстура и радиально ориентированные выделения гидридной фазы не влияют на коррозионную стойкость труб из сплава Э635.

3. На основании выполненных исследований обоснована возможность использования труб НК с гидротормозом из сплава Э635 в ТВСА-Т реактора ВВЭР-1000.

ЛИТЕРАТУРА

1. *International standard. Corrosion of metals and alloys «Aqueous corrosion testing of zirconium alloys for use in nuclear power reactors»*. ISO №10270.
2. *Займовский А.С., Никулина А.В., Решетников Н.Г.* Циркониевые сплавы в ядерной энергетике. М.: Энергоатомиздат, 1994.
3. *Решетников Ф.Г., Бибилашвили Ю.К., Головин И.С. и др.* Разработка, производство и эксплуатация тепловыделяющих элементов энергетических реакторов. Книга 1. М.: Энергоатомиздат, 1995.
4. *Magnus Limback et al.* A Model for analysis of the effect of final annealing on the In and out-of-reactor creep behavior of zircaloy cladding // *Zirconium in the Nuclear Industry; Eleventh International Symposium, ASTM STP 1295*. 1996.
5. *Fidleris V.* Primary creep of zircaloy-2 under irradiation // *Zirconium in the Nuclear Industry: Proceedings of the Fourth International Conference, ASTM STP 681*, American Society for Testing of Materials, Philadelphia, 1978.
6. *Fidleris V., Tucker R.P., Adamson R.B.* An overview of microstructural and experimental factors that affect the irradiation growth behavior of zirconium alloys // *Zirconium in the Nuclear Industry: Seventh International Symposium, ASTM STP 939*, American Society for Testing of Materials, Philadelphia, 1987.
7. *Blat M. et al.* Detrimental role of hydrogen on the corrosion rate of zirconium alloys // *Zirconium in the Nuclear Industry: Eleventh International Symposium, ASTM STP 1295*, American Society for Testing of Materials, 1996.
8. *Blat M. et al.* Contribution to a better understanding of the detrimental role of hydrogen on the corrosion rate of zircaloy-4 cladding materials // *Zirconium in the Nuclear Industry: Twelfth*

International Symposium, ASTM STP 1354, American Society for Testing of Materials, 2000.

9. *Garde A.M.* Enhancement of aqueous corrosion of zircaloy-4 due to hydride precipitation at the metal-oxide interface // *Zirconium in the Nuclear Industry: Ninth International Symposium*, ASTM STP 1132, American Society for Testing of Materials, 1991.
10. *Kim Y.S. et al.* Phenomenological study of In-reactor corrosion of zircaloy-4 in pressurized water reactors // *Zirconium in the Nuclear Industry: Tenth International Symposium*, ASTM STP 1245, American Society for Testing of Materials, Philadelphia, 1994.
11. *Markelov V., Novikov V., Nikulina A., Kon'kov V., Sablin M., et al.* Application of E635 alloy as structural components of WWER-1000 fuel assemblies // 6th International conference WWER Fuel Performance, Modelling and Experimental Support, Bulgaria, 2005.

Статья поступила 17.06.2014 г.

Sablin M.N., Nikulina A.V., Markelov V.A., Kon'kov V.F., Novikov V.V., Khokhunova T.N. JUSTIFICATION FOR APPLYING OF GUIDE THIMBLES WITH HYDRAULIC BRAKE MADE FROM E635 ALLOY FOR FUEL ASSEMBLY FROM LIGHT WATER REACTORS

The guide tube (GT), being an element of the bearing frame of the fuel assembly, must be highly resistant to form change and corrosion during the whole operating life.

The aim of this work was to determine reasons for formation and influence of radial orientation of hydrides in the area of dashpot of GT on their performance characteristics and assessment on this basis the possibility of using such tubes in TVSA-T for the VVER-1000 reactor.

The report presents results of research into the structure, texture, creep resistance, and corrosion of GT tubes with dashpot, and of the analysis of operation results of GT tubes made of the E635 alloy. On the basis of the investigations, GT tubes with dashpot were recommended for use in TVSA-T of the VVER-1000 reactor.

Keywords: zirconium alloy E635, fuel assembly, VVER – 1000, guide thimble with dashpot, corrosion, creep, microstructure, composition and size of intermetallic, degree of recrystallization, autoclave tests

Sablin Michail Nikolaevich (M.Sc., Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: sablin@bochvar.ru

Nikulina Antonina Vasil'evna (Doctor of technical Sciences, Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: nikulina@bochvar.ru

KON'KOV Viktor Fedorovich (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: kalina@bochvar.ru

Novikov Vladimir Vladimirovich (Candidate of technical Sciences, Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: novikov@bochvar.ru

Markelov Vladimir Andreevich (Doctor of technical Sciences, Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: markelov@bochvar.ru

Hohunova Tatiana Nikolaevna (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: o_mil@bochvar.ru

REFERENCES

1. International standard. Corrosion of metals and alloys "Aqueous corrosion testing of zirconium alloys for use in nuclear power reactors". ISO No.10270.
2. Zaymovskiy A.S., Nikulina A.V., Reshetnikov N.G. *Tsirkonievye splavy v yadernoy energetike*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1994. (in Russian)
3. Reshetnikov F.G., Bibilashvili Yu.K., Golovnin I.S., et al. *Razrabotka, proizvodstvo i ekspluatatsiya teploydel'yayushchikh elementov energeticheskikh reaktorov. Kniga 1*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1995. (in Russian)
4. Magnus Limback et al. A Model for analysis of the effect of final annealing on the In and out-of-reactor creep behavior of zircaloy cladding. *Zirconium in the Nuclear Industry. Eleventh International Symposium*, ASTM STP 1295, 1996.
5. Fidleris V. Primary creep of zircaloy-2 under irradiation. *Zirconium in the Nuclear Industry. Proceedings of the Fourth International Conference*, ASTM STP 681, American Society for Testing of Materials, Philadelphia, 1978.
6. Fidleris V., Tucker R.P., Adamson R.B. An overview of microstructural and experimental factors that affect the irradiation growth behavior of zirconium alloys. *Zirconium in the Nuclear Industry. Seventh International Symposium*, ASTM STP 939, American Society for Testing of Materials, Philadelphia, 1987.
7. Blat M. et al. Detrimental role of hydrogen on the corrosion rate of zirconium alloys. *Zirconium in the Nuclear Industry. Eleventh International Symposium*, ASTM STP 1295, American Society for Testing of Materials, 1996.
8. Blat M. et al. Contribution to a better understanding of the detrimental role of hydrogen on the corrosion rate of zircaloy-4 cladding materials. *Zirconium in the Nuclear Industry. Twelfth International Symposium*, ASTM STP 1354, American Society for Testing of Materials, 2000.
9. Garde A.M. Enhancement of aqueous corrosion of zircaloy-4 due to hydride precipitation at the metal-oxide interface. *Zirconium in the Nuclear Industry. Ninth International Symposium*, ASTM STP 1132, American Society for Testing of Materials, 1991.
10. Kim Y.S. et al. Phenomenological study of In-reactor corrosion of zircaloy-4 in pressurized water reactors. *Zirconium in the Nuclear Industry. Tenth International Symposium*, ASTM STP 1245, American Society for Testing of Materials, Philadelphia, 1994.
11. Markelov V., Novikov V., Nikulina A., Kon'kov V., Sablin M., et al. Application of E635 alloy as structural components of WWER-1000 fuel assemblies. *6th International conference WWER Fuel Performance, Modelling and Experimental Support*. Bulgaria, 2005.

УДК 519.6:532.516

Б.О. Цыденов, А.В. Старченко

**ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ k - ω -МОДЕЛИ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ ТЕРМОБАРА¹**

При математическом моделировании явления термобара впервые применена двухпараметрическая дифференциальная k - ω -модель для расчёта значений коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии. Проведен сравнительный анализ алгебраической модели Холланда П.Р. и др. и двухпараметрической дифференциальной k - ω -модели Уилкокса на примере воспроизведения термобара в канадском озере Камлупс.

Ключевые слова: термобар, модель турбулентности, математическое моделирование, численный эксперимент, озеро Камлупс.

1. Введение

С 1883 г. (классические работы О. Рейнольдса) многие математики и механики занимаются поиском наиболее приемлемых для практики моделей турбулентности. При численном воспроизведении термобара (*термобар* – это узкая вертикальная зона в озёрах умеренных широт, разделяющая водоём на области с разными значениями теплофизических характеристик воды) часто используются простейшие полуэмпирические модели турбулентности. В частности, многие исследователи явления термобара (например, авторы работ [1, 2]) коэффициенты турбулентной диффузии задают в виде константы.

Из семейства двухпараметрических моделей турбулентности в океанологической практике наиболее известны:

- «классическая» модель Меллора – Ямада (1982) [3], которая состоит из уравнений для кинетической энергии турбулентности (k) и произведения kl (l – турбулентный масштаб длины);
- k - ϵ -модель Лаундера – Сполдинга с поправками на плавучесть Роди (1987) [4], где ϵ представляет собой скорость диссипации k ;
- k - ω -модель Уилкокса (1988) [5], здесь ω – частота турбулентных пульсаций.

В работе [6] проведён сравнительный анализ вышеперечисленных моделей турбулентности для океанических течений. Авторы [6] сделали вывод о том, что k - ω -модель наиболее реалистично описывает процессы перемешивания в океане. Поэтому можно предположить, что применение двухпараметрической k - ω -модели турбулентности для численного исследования течений, связанных с термобаром, скорее всего, приведёт к более качественным результатам.

Целью данной работы является сравнение результатов моделирования термобара, полученных с помощью двух различных моделей турбулентности: алгебраической модели Холланда П.Р. и др. [7] и двухпараметрической k - ω -модели Уилкокса [5].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента РФ для молодых учёных и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики (СП-71.2012.5), и Минобрнауки России (государственное задание № 5.628.2014/К).

2. Математическая модель

2.1. Основные уравнения модели

Негидростатическая математическая модель для воспроизведения гидродинамических процессов в глубоком озере, учитывающая влияние силы Кориолиса, связанной с вращением Земли, и записанная в приближении Буссинеска, включает в себя следующие уравнения:

а) уравнения количества движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2\Omega_z v - 2\Omega_y w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2\Omega_x w - 2\Omega_z u; \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{g\rho}{\rho_0} + 2\Omega_y u - 2\Omega_x v; \quad (3)$$

б) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

в) уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial wT}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial H_{\text{sol}}}{\partial z}; \quad (5)$$

г) уравнения баланса солёности в озере

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial wS}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial S}{\partial z} \right), \quad (6)$$

где u , v – горизонтальные компоненты скорости; w – вертикальная компонента скорости; Ω_x , Ω_y и Ω_z – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли; g – ускорение свободного падения; c_p – удельная теплоёмкость; T – температура; S – солёность; p – давление; ρ_0 – плотность воды при стандартном атмосферном давлении, температуре T_L и солёности S_L (T_L и S_L – характерная температура и солёность озера соответственно). Коротковолновая солнечная радиация, проникающая в воду, рассчитывается по закону

$$H_{\text{sol}} = Q(1 - r_s) \exp(-\varepsilon_{\text{abs}} z),$$

где Q – поток тепла через свободную поверхность, r_s – коэффициент отражения воды, ε_{abs} – коэффициент поглощения.

В качестве уравнения состояния $\rho = \rho(T, S, p)$ выбрано уравнение Чена – Миллера [8], принятое UNESCO. Данное уравнение состояния связывает плотность воды с температурой, солёностью, давлением и справедливо в диапазоне $0 \leq T \leq 30$ °C, $0 \leq S \leq 0.6$ г/кг, $0 \leq p \leq 180$ бар.

2.2. Модель турбулентности

Для замыкания системы уравнений (1) – (6) используются двухпараметрическая $k-\omega$ -модель турбулентности Уилкокса [5], состоящая из уравнений для кине-

тической энергии и частоты турбулентных пульсаций:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial uk}{\partial x} + \frac{\partial wk}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P + B - \varepsilon; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u\omega}{\partial x} + \frac{\partial w\omega}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{\omega}{k} (c_{\omega 1} P + c_{\omega 3} B - c_{\omega 2} \varepsilon), \quad (8)$$

где k – кинетическая энергия турбулентности; ω – частота турбулентных пульсаций; $\nu_T = \frac{k}{\omega}$ – турбулентная кинематическая вязкость. Числовые значения параметров уравнений (7), (8) представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры k - ω -модели турбулентности

Модельная константа	$c_{\omega 1}$	$c_{\omega 2}$	$c_{\omega 3}$	σ_k	σ_ω	$(c_\mu^0)^2$
Значение	0,555	0,833	0,755 (B>0) -1 (B<0)	2	2	0,307

Член $\varepsilon = (c_\mu^0)^4 k \omega$ в (7), (8) отвечает за вязкую диссипацию энергии турбулентности, а члены P и B выражают генерацию турбулентности за счёт сдвиговых напряжений и действия силы плавучести:

$$P = \nu_T \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right];$$

$$B = -\frac{\nu_T}{Pr_T} N^2,$$

где N^2 – частота Брента – Вайсяля (частота плавучести), определяемая соотношением

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Коэффициенты вертикальной диффузии количества движения и скалярной характеристики рассчитываются как

$$K_z = \nu_T + \nu;$$

$$D_z = \frac{\nu_T}{Pr_T} + \frac{\nu}{Pr},$$

где ν – молекулярная кинематическая вязкость воды; Pr , Pr_T – молекулярное и турбулентное числа Прандтля, $Pr_T = 1$.

Коэффициенты горизонтальной диффузии задаются постоянными [7]

$$K_x = D_x = 2,5 \text{ м}^2/\text{с}.$$

2.3. Начальные и граничные условия

В начальный момент времени система находится в состоянии покоя и удовлетворяет заданным полям температуры, солёности и турбулентных характеристик:

$$t = 0: \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad T = T_L; \quad S = S_L; \quad k = 0; \quad \omega = \omega_R.$$

Граничные условия имеют следующий вид:

а) на поверхности

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0; \quad D_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q}{\rho_0 \cdot c_p}; \quad \frac{\partial k}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\sqrt{k}}{c_{\mu}^0 \kappa (L_z - z + z_0)},$$

где $\kappa = 0,41$ – константа фон Кармана, L_z – глубина озера, $z_0 = 0,5$ м – высота шероховатости.

б) на твёрдых границах (на дне)

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = -\frac{\sqrt{k}}{c_{\mu}^0 \kappa (z + z_0)},$$

где n – направление внешней нормали к области, $z_0 = 0,05$ м;

в) на границе входа реки (на левой границе) (см. рис. 1, б)

$$u = u_R; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad T = T_R; \quad S = S_R, \quad k = k_R, \quad \omega = \omega_R,$$

где u_R – скорость речного притока, T_R, S_R, k_R, ω_R – температура, солёность, кинетическая энергия турбулентности и частота турбулентных пульсаций в реке соответственно. Начальные значения для кинетической энергии турбулентности и частоты турбулентных пульсаций в реке задаются исходя из предположения изотропии и интенсивности турбулентности 30 %.

г) на правой границе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial k}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Начальное поле давления определяется из решения уравнений состояния и гидростатики с граничным условием на поверхности $p = p_a$ (p_a – атмосферное давление) методом Рунге-Кутты четвёртого порядка точности. Уравнение гидростатики выводится из уравнения движения для вертикальной компоненты скорости (при условии $w = 0$ и отсутствии силы Кориолиса) и имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

3. Численный метод решения

Решение задачи основано на методе конечного объёма, согласно которому скалярные величины (температура, солёность и т.д.) определяются в центре сеточной ячейки, в то время как компоненты вектора скорости – в средних точках на границах ячеек. В целях приближения расчётной области к прибрежному профилю озера применяется метод блокировки фиктивных областей [9]: приравниваются нулю компоненты скорости в выключенной зоне за счёт использования больших значений коэффициентов вязкости в этой зоне.

Численный алгоритм нахождения поля течения и температуры опирается на разностную схему Кранка – Николсон. Конвективные слагаемые в уравнениях аппроксимируются по противопотоковой схеме QUICK [10] второго порядка.

Для согласования рассчитываемых полей скорости и давления разработана процедура SIMPLD для течений с плавучестью, представляющая собой модификацию метода SIMPLE Патанкара [9]. Алгоритм SIMPLD, основанный на циклической последовательности операций «предположение–коррекция», приведен в ранее опубликованной работе [11].

Системы сеточных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом нижней релаксации или явным методом Н.И. Булеева [12].

Тестирование численного алгоритма проводилось для случая квадратной каверны при изотермических боковых границах [13]. Кроме того, серия вычислительных экспериментов «зима», «ранняя весна», «середина весны» и «поздняя весна» [11], связанных с периодом существования термобара, демонстрирует полное соответствие гидродинамических сценариев взаимодействия систем «река – озеро», описанных Кармаком Э.К. и др. на основе натуральных наблюдений в озере Камлупс [14].

4. Результаты моделирования

4.1 Морфометрия исследуемой области и описание численных расчётов

Озеро Камлупс находится на юго-западе Канады (провинция Британская Колумбия) в 340 км северо-восточнее Ванкувера и расположено между $50^{\circ}26' - 50^{\circ}45'$ с. ш. и $120^{\circ}03' - 120^{\circ}32'$ з. д. по течению реки Томпсон, имеет вытянутую форму (см. рис. 1, а).

В качестве исследуемой области выбрано вертикальное сечение озера Камлупс, соответствующее направлению впадения р. Томпсон, начало системы координат

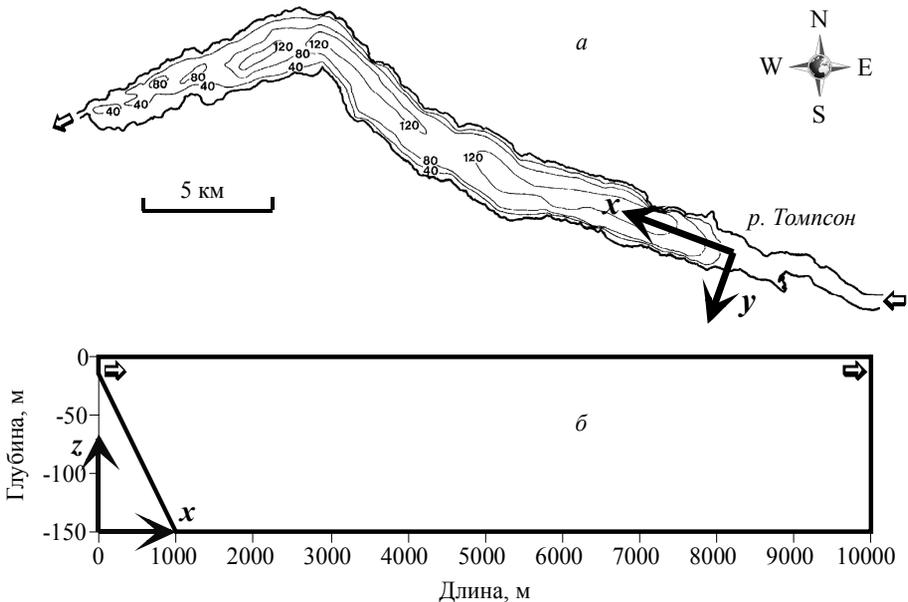


Рис. 1. Морфометрия оз. Камлупс: а – батиметрия оз. Камлупс, б – расчётная область (продольное сечение)

совпадает с устьем реки (см. рис. 1, а). Расчётная область имеет протяженность 10 км и глубину 150 м (см. рис. 1, б). Участок, через который втекает в озеро речной поток, составляет 15 м от поверхности.

В начальный момент времени система находится в состоянии покоя и удовлетворяет заданным полям температуры и солёности. Начальное распределение температуры в озере Камлупс имеет постоянное значение равное $2,4\text{ }^{\circ}\text{C}$, в то время как температура воды в реке соответствует $3,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ и нагревается на $0,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ в день. Река Томпсон впадает в озеро со скоростью $0,01\text{ м/с}$, минерализация воды в озере и в реке составляет $0,1\text{ г/кг}$. Поток тепла, поступающий на водную гладь, равен 170 Вт/м^2 , коэффициент поглощения проникающей в воду солнечной радиации $-0,3\text{ м}^{-1}$. Ветровое трение отсутствует.

Расчётная область (см. рис. 1, б) покрывается равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25\text{ м}$ и $h_z = 3\text{ м}$. Шаг по времени $\Delta t = 60\text{ с}$. Вычисления проводились на суперкомпьютере НИ ТГУ «СКИФ Cyberia».

4.2 Сравнение моделей турбулентности

Результаты расчётов показали (см. рис. 2), что при использовании $k-\omega$ -модели начальная стадия развития термобара существенно не отличается от картины течений, полученной с помощью алгебраической модели Холланда П.Р. и др. [7]:

$$K_x = 2,5\text{ м}^2/\text{с}, K_z = \begin{cases} 0,0004 + 6 \cdot 10^{-7} (N^2)^{-0,5}\text{ м}^2/\text{с}, & \text{если } N^2 > N_{\min}^2, \\ 0,02\text{ м}^2/\text{с}, & \text{если } N^2 \leq N_{\min}^2, \end{cases}$$

$$D_x = K_x, D_z = K_z,$$

где $N_{\min}^2 = 9,371 \cdot 10^{-10}\text{ с}^{-2}$ (пороговое значение для условия устойчивости N_{\min}^2 вводится для того, чтобы избежать больших значений K_z при $N^2 \rightarrow 0$),

$N^2 = g\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial z} - \Gamma \right)$, $\Gamma = -\frac{g\alpha}{c_p} (T_C + 273,15)$ – адиабатический градиент температу-

ры, α – коэффициент термического расширения.

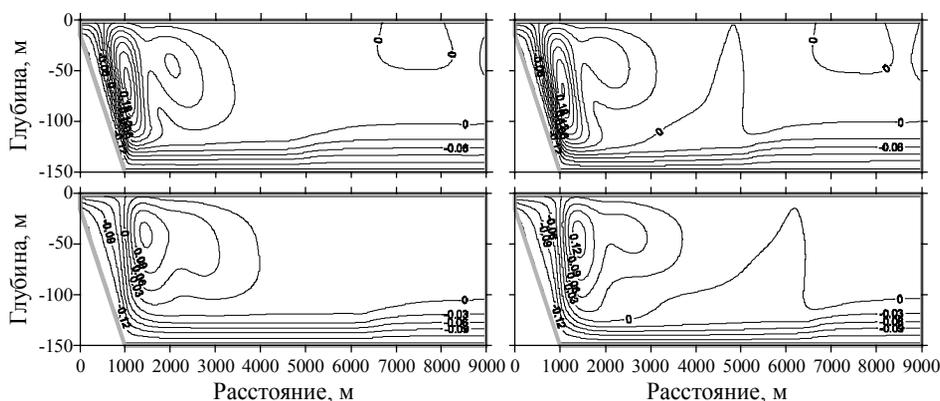


Рис. 2. Линии тока на 8-е и 12-е расчётные сутки (сверху вниз): слева – $k-\omega$ -модель, справа – модель Холланда П.Р. и др. [7]

Однако с увеличением времени k - ω -модель в отличие от модели Холланда П.Р. и др. описывает более сложную структуру вертикального перемешивания (рис. 3).

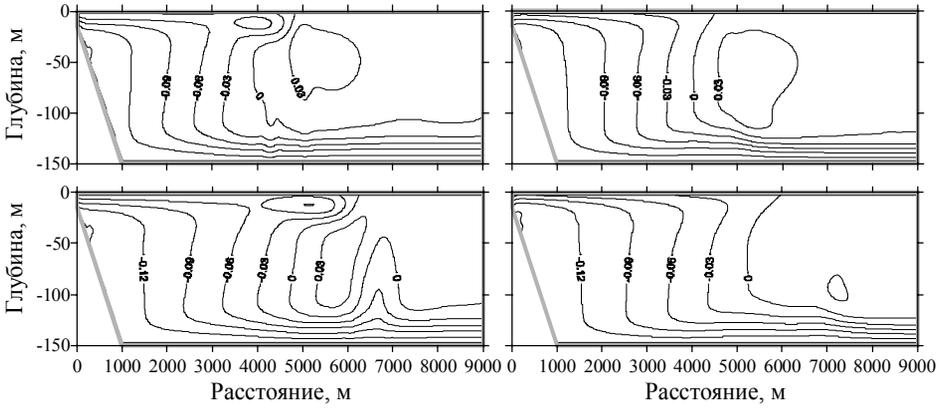


Рис. 3. Линии тока на 32-е и 40-е расчётные сутки (сверху вниз): слева – k - ω -модель, справа – модель Холланда П.Р. и др. [7]

Из рис. 3 видно, что при вычислении коэффициентов турбулентной диффузии с помощью k - ω -модели слева от фронта термобара, в теплоактивной области, формируется приповерхностная локальная циркуляция, которая развивается с течением времени преимущественно в горизонтальном масштабе.

По определению термобар возникает в том месте, где температура воды близка температуре максимальной плотности. Рассмотрим функцию $T - T_{MD}(p, S)$, где $T_{MD}(p, S)$ – температура максимальной плотности. Тогда нулевая изолиния функции $T - T_{MD}(p, S)$ будет соответствовать температуре максимальной плотности (рис. 4). На основании местоположения температуры максимальной плотности можно сделать вывод о том, что возникающая локальная циркуляция влияет на профиль термобара (рис. 4) и на скорость его горизонтального перемещения (рис. 5). Согласно рис. 5, образование термобара происходит приблизительно на

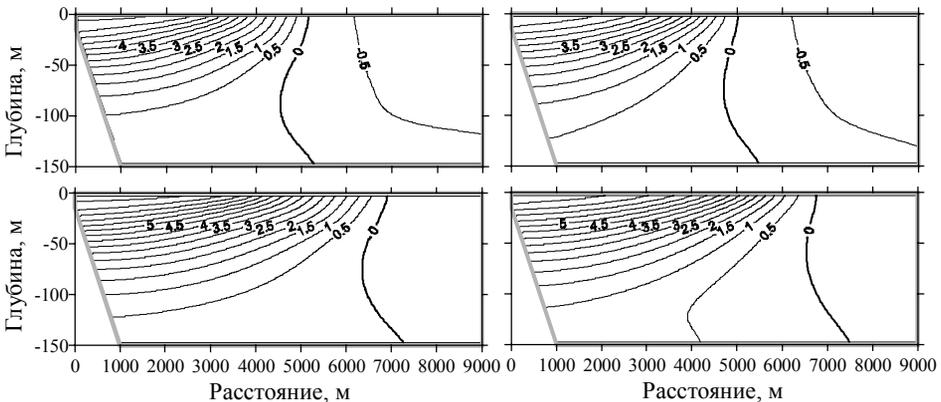


Рис. 4. Изолинии функции $T - T_{MD}(p, S)$ на 32-е и 40-е расчётные сутки (сверху вниз): слева – k - ω -модель, справа – модель Холланда П.Р. и др. [7]

5-е расчётные сутки. Исходя из графиков зависимости температуры максимальной плотности от времени, представленной на рис. 5, можно заключить, что после 20 суток предсказанные координаты положения термобара начинают различаться: при использовании $k-\omega$ -модели фронт термобара продвигается быстрее по сравнению с результатами, полученными по модели Холланда П.Р. и др. На 40-е расчётные сутки расхождение увеличивается почти на 100 м.

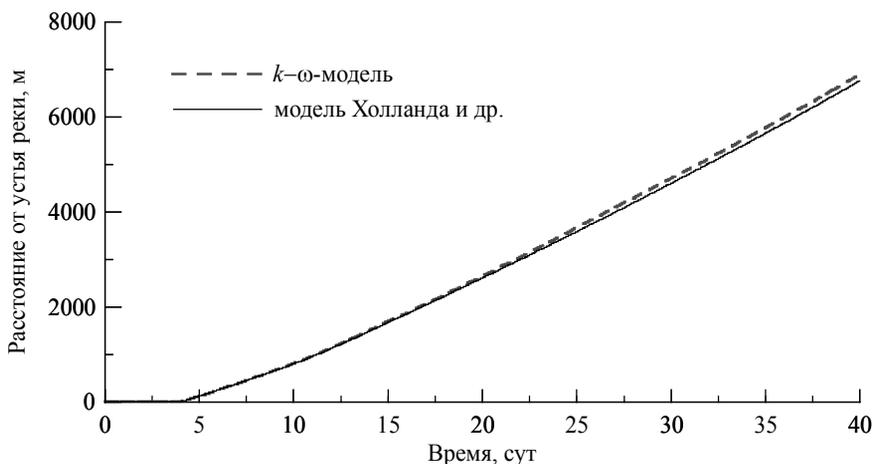


Рис. 5. Динамика эволюции термобара: положение температуры максимальной плотности на глубине 4,5 м от поверхности озера

Заключение

С помощью разработанной негидростатической модели, учитывающей нестационарную и пространственную динамику турбулентной структуры, воспроизведены термогидродинамические процессы, связанные с явлением термобара в озере Камлупс. Численные эксперименты показали, что использование $k-\omega$ -модели турбулентности даёт более сложную картину эволюции термобара: в теплоактивной области формируется приповерхностная локальная циркуляция, влияющая на скорость горизонтального перемещения фронта термобара от устья притока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинникова Т.Э., Бочаров О.Б. Сезонное влияние вод притока на водообмен в глубоком озере в условиях больших уклонов дна // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12. № 6. С. 59–72.
2. Killworth P.D., Carmack E.C., Weiss R.F., Matear R. Modeling deep-water renewal in Lake Baikal // Limnol. Oceanogr. 1996. V. 41. No. 7. P. 1521–1538.
3. Mellor G.L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // Rev. Geophys. Space Phys. 1982. V. 20. No. 4. P. 851–875.
4. Rodi W. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. V. 92. No. C5. P. 5305–5328.
5. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA Journal. 1988. V. 26. No. 11. P. 1299–1310.
6. Umlauf L., Burchard H., Hutter K. Extending the $k-\omega$ turbulence model towards oceanic applications // Ocean Modelling. 2003. V. 5. P. 195–218.

7. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Sys.* 2003. V. 43. No. 1–2. P. 61–81.
8. Chen C.T., Millero F.G. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // *Limnol. Oceanogr.* 1986. V. 31. No. 3. P. 657–662.
9. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. / под ред. В.Д. Виоленского. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
10. Leonard B. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1979. V. 19. No. 1. P. 59–98.
11. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Численная модель взаимодействия систем «река – озеро» на примере весеннего термобара в озере Камлупс // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2013. № 5(25). С. 102–115.
12. Булеев Н.И. Метод неполной факторизации для решения двумерных и трехмерных разностных уравнений типа диффузии // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1970. Т. 10. № 4. С. 1042–1044.
13. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Численное моделирование эффекта термобара в озере Байкал в период весенне-летнего прогревания // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2011. № 1(13). С. 120–130.
14. Carmack E.C., Gray C.B.J., Pharo C.H., Daley R.J. Importance of lake-river interaction on seasonal patterns in the general circulation of Kamloops Lake, British Columbia // *Limnol. Oceanogr.* 1979. V. 24. No. 4. P. 634–644.

Статья поступила 06.07.2014 г.

Tsydenov B.O., Starchenko A.V. APPLICATION OF THE TWO-PARAMETRIC $k-\omega$ TURBULENCE MODEL FOR STUDYING THE THERMAL BAR PHENOMENON

In this paper, the phenomenon of the thermal bar in Kamloops Lake (Canada) is studied with a nonhydrostatic mathematical model. A thermal bar is a narrow zone in a lake in temperate latitudes where maximum-density waters sink from the surface to the bottom. Two different turbulence models are compared: the algebraic model of Holland P. R. et al. [1] and the two-equation $k-\omega$ model of Wilcox D.C. [2]. The two-parameter model of turbulence developed by D.C. Wilcox consists of equations for turbulence kinetic energy (k) and specific dissipation rate (ω). The mathematical model which includes the Coriolis force due to the Earth's rotation, is written in the Boussinesq approximation with the continuity, momentum, energy, and salinity equations. The Chen–Millero equation [8], adopted by UNESCO, was taken as the equation of state. The formulated problem is solved by the finite volume method. The numerical algorithm for finding the flow and temperature fields is based on the Crank–Nicholson difference scheme. The convective terms in the equations are approximated by a second-order upstream QUICK scheme [10]. To calculate the velocity and pressure fields, the SIMPLED procedure for buoyant flows [11], which is a modification of the well-known Patankar's SIMPLE method [9], has been developed. The systems of grid equations at each time step are solved by the under-relaxation method or N.I. Buleev's explicit method [12]. The turbulence models were applied to predict the evolution of the spring thermal bar in Kamloops Lake. The numerical experiments have shown that the application of the $k-\omega$ turbulence model leads to new effects in the thermal bar evolution.

Keywords: thermal bar, temperature of maximum density, Boussinesq approximation, numerical experiment, Kamloops Lake.

TSYDENOV Bair Olegovich (M. Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: btsydenov@gmail.com

STARCHENKO Alexander Vasilievich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: starch@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Ovchinnikova T.E., Bocharov O.B. Sezonnoe vliyaniye vod pritoka na vodoobmen v glubokom ozere v usloviyakh bol'shikh uklonov dna. *Vychisl. tekhnologii*, 2007, vol. 12, no. 6. C. 59–72. (in Russian)
2. Killworth P.D., Carmack E.C., Weiss R.F., Matear R. Modeling deep-water renewal in Lake Baikal. *Limnol. Oceanogr.*, 1996, vol. 41, no. 7, pp. 1521–1538.
3. Mellor G.L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1982, vol. 20, no. 4, pp. 851–875.
4. Rodi W. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids. *J. Geophys. Res.*, 1987, vol. 92, no. C5, pp. 5305–5328.
5. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 1988, vol. 26, no. 11, pp. 1299–1310.
6. Umlauf L., Burchard H., Hutter K. Extending the $k-\omega$ turbulence model towards oceanic applications. *Ocean Modelling*, 2003, vol. 5, pp. 195–218.
7. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *J. Mar. Sys.*, 2003, vol. 43, no. 1–2, pp. 61–81.
8. Chen C.T., Millero F.G. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range. *Limnol. Oceanogr.*, 1986, vol. 31, no. 3, pp. 657–662.
9. Patankar S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984, 152 p. (in Russian)
10. Leonard B. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 59–98.
11. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. Chislennaya model' vzaimodeystviya sistem "reka – ozero" na primere vesennego termobara v ozere Kamlups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 5(25), pp. 102–115. (in Russian)
12. Buleev N.I. Metod nepolnoy faktorizatsii dlya resheniya dvumernykh i trekhmernykh raznostnykh uravneniy tipa diffuzii. *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 1970, vol. 10, no. 4, pp. 1042–1044. (in Russian)
13. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. Chislennoe modelirovanie effekta termobara v ozere Baykal v period vesenne-letnego progrevaniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 1(13), pp. 120–130. (in Russian)
14. Carmack E.C., Gray C.B.J., Pharo C.H., Daley R.J. Importance of lake-river interaction on seasonal patterns in the general circulation of Kamloops Lake, British Columbia. *Limnol. Oceanogr.*, 1979, vol. 24, no. 4, pp. 634–644.

УДК 532.516.5

В.А. Якутенок, М.А. Пономарева, А.Е. Кузнецова

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НЕПРЯМЫМ МЕТОДОМ
ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹**

Приводится вывод выражений для компонент фундаментальных тензоров скоростей и усилий для уравнений Стокса в цилиндрической системе координат для осесимметричного случая. На основе полученных выражений выписаны граничные интегральные уравнения в соответствии с представлениями теории потенциала. Предложен простой вариант получения приближенного решения, являющийся реализацией основных положений непрямого метода граничных элементов. Достоверность результатов подтверждается решением тестовой задачи. Разработанный метод решения краевых задач для уравнений Стокса может использоваться для моделирования ползущих течений вязкой жидкости со свободной поверхностью.

Ключевые слова: вязкая жидкость, метод граничных элементов, фундаментальные решения, осесимметричное течение.

Метод граничных элементов (МГЭ) является эффективным средством решения различных задач механики сплошных сред, в частности задач динамики жидкости. Существуют различные его варианты, причем главная разница в используемых подходах обусловлена выбором прямой или не прямой формулировки метода [1, 2]. Соотношения непрямого МГЭ для плоских и пространственных течений вязкой жидкости и примеры расчетов приведены в [3, 4]. Данный подход позволил провести ряд исследований практически важных двумерных течений, характерной особенностью которых является наличие свободной поверхности [5–8]. Возможен учет нелинейного поведения жидкости [9].

В некоторых случаях течение имеет осевую симметрию. Например, при заполнении цилиндрических пресс-форм или растекании капли жидкости по горизонтальной поверхности. Тогда становится возможным существенно упростить трехмерный анализ, сведя его практически к решению задачи в одной плоскости, проходящей через ось симметрии. Для этого необходимо использовать вместо декартовой цилиндрическую систему координат и соответствующие ей выражения для фундаментальных сингулярных тензоров скоростей и усилий. Последний необходим при моделировании течений со свободной поверхностью. Этому вопросу посвящено значительное количество работ, в основном касающихся теории упругости, например [10, 11]. В [12] приводятся соотношения для компонент фундаментального тензора скоростей (в том числе проинтегрированных по угловой координате) для уравнений Стокса при использовании прямого МГЭ. В итоге получаются довольно громоздкие формулы, содержащие различные комбинации эллиптических интегралов первого и второго рода. Как следует из работ по теории упругости, для усилий получаются еще более сложные выражения [13].

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол_а.

В настоящей работе приводится полный вывод выражений для компонент фундаментальных тензоров скоростей и усилий в цилиндрической системе координат, необходимых для решения осесимметричных задач динамики вязкой жидкости, и формулируется гранично-интегральная постановка задачи в непрямом представлении. Проверка полученных соотношений проведена с помощью решения смешанной краевой задачи (с граничными условиями первого и второго рода), имеющей аналитическое решение.

Фундаментальные сингулярные решения уравнений Стокса в осесимметричном случае

Уравнения Стокса и неразрывности для случая единичной сосредоточенной силы, действующей в точке ξ в направлении k декартовой системы координат можно записать в безразмерной форме в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial x_j} = \delta_{ik} \delta(x_k - \xi_k), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

где $\sigma_{ij}^k = -p^k \delta_{ij} + 2e_{ij}^k$ – компоненты тензора напряжений, p^k – давление, δ_{ik} – символ Кронекера, $e_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right)$ – компоненты тензора скоростей деформаций,

$\delta(x_k - \xi_k)$ – дельта-функция Дирака, x_k, ξ_k ($k = 1, 2, 3$) – декартовы координаты точек \mathbf{x} и ξ .

Все переменные являются безразмерными, причем используются масштабы: длины – R , скорости – U , давления – $\mu U/R$, где μ – коэффициент динамической вязкости, а R, U – некоторые характерные величины задачи. При указанном выборе масштаба давления уравнения (1), (2) не содержат безразмерных комплексов.

Решение задачи (1), (2) можно получить с помощью преобразования Фурье, что дает [14]

$$u_i^k(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{ik}}{\rho} + \frac{y_i y_k}{\rho^3} \right), \quad p^k(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{y_k}{4\pi \rho^3}, \tag{3}$$

где $y_i = x_i - \xi_i$, $\rho = [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2}$.

При исследовании осесимметричных течений естественно использовать цилиндрическую систему координат r, θ, z (рис. 1).

Расположим точку наблюдения \mathbf{x} в плоскости $x_1 0 x_3$, в которой и будет определяться решение. Необходимо иметь выражения для компонент фундаментального тензора скоростей:

$$u_r^r(\mathbf{x}, \xi), u_z^r(\mathbf{x}, \xi), u_r^z(\mathbf{x}, \xi), u_z^z(\mathbf{x}, \xi).$$

Здесь, по-прежнему, нижний индекс обозначает компоненту вектора скорости в точке \mathbf{x} , соответствующую направлению действия силы в точке ξ , которое обозначается верхним индексом. Пусть в точке ξ действует единичная сосредоточенная сила $\mathbf{e}_r(\xi) = \cos \theta_\xi \mathbf{e}_1 + \sin \theta_\xi \mathbf{e}_2$ (рис. 2).

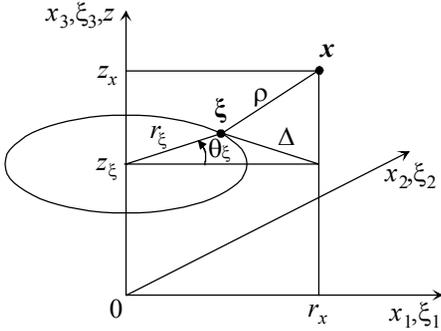


Рис. 1. Системы координат

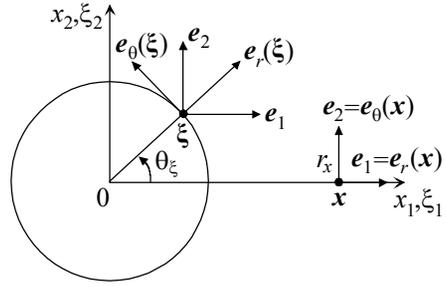


Рис. 2. Орты систем координат

Очевидно, что $e_r(x) = e_1$, $e_z(x) = e_3$, так как $\theta_x = 0$. Тогда в точке x , согласно принципу суперпозиции, будем иметь

$$u_r^r(x, \xi) = \cos \theta_\xi \cdot u_1^1(x, \xi) + \sin \theta_\xi \cdot u_1^2(x, \xi), \tag{4}$$

$$u_z^r(x, \xi) = \cos \theta_\xi \cdot u_3^1(x, \xi) + \sin \theta_\xi \cdot u_3^2(x, \xi). \tag{5}$$

Аналогично для силы $e_z(\xi)$:

$$u_r^z(x, \xi) = u_1^3(x, \xi), \quad u_z^z(x, \xi) = u_3^3(x, \xi). \tag{6}$$

Таким образом, все необходимые компоненты выражаются через решение (3) для общего трехмерного случая в декартовой системе координат. Все остальные компоненты фундаментального тензора не нужны. Например, хотя $u_\theta^r(x, \xi) = \cos \theta_\xi \cdot u_2^1(x, \xi) + \sin \theta_\xi \cdot u_2^2(x, \xi) \neq 0$, но при дальнейшем интегрировании по углу θ_ξ в силу осесимметричности получим ноль.

Из рис. 1 можно усмотреть, что

$$\rho = \sqrt{(z_x - z_\xi)^2 + \Delta^2} = \sqrt{(z_x - z_\xi)^2 + r_x^2 + r_\xi^2 - 2r_x r_\xi \cos \theta_\xi},$$

$$y_1 = r_x - r_\xi \cos \theta_\xi, \quad y_2 = -r_\xi \sin \theta_\xi, \quad y_3 = z_x - z_\xi.$$

Тогда, используя формулы (3) – (6), получим выражения для компонент фундаментального тензора скоростей в цилиндрической системе координат:

$$u_r^r(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\cos \theta_\xi}{\rho} + \frac{\cos \theta_\xi (r_x^2 + r_\xi^2) - r_x r_\xi (\cos^2 \theta_\xi + 1)}{\rho^3} \right),$$

$$u_z^r(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi} \frac{(z_x - z_\xi)(r_x \cos \theta_\xi - r_\xi)}{\rho^3}, \tag{7}$$

$$u_r^z(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi} \frac{(z_x - z_\xi)(r_x - r_\xi \cos \theta_\xi)}{\rho^3},$$

$$u_z^z(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{(z_x - z_\xi)^2}{\rho^3} \right).$$

При решении задач со смешанными краевыми условиями (например, при наличии свободной поверхности) на части границы области задаются компоненты вектора усилий:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \tag{8}$$

где n_j – компоненты внешней нормали к границе в точке x . Выражения (8), (3) позволяют получить формулу для компонент фундаментального тензора усилий для уравнений Стокса в декартовой системе координат:

$$t_i^k(x, \xi) = \frac{3}{4\pi\rho^5} \cdot y_i y_j y_k n_j(x).$$

Поступая совершенно аналогично предыдущему, получим компоненты этого тензора в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} t_r^r(x, \xi) &= \frac{3}{4\pi\rho^5} (r_x - r_\xi \cos \theta_\xi) (r_x \cos \theta_\xi - r_\xi) [n_r (r_x - r_\xi \cos \theta_\xi) + n_z (z_x - z_\xi)], \\ t_z^r(x, \xi) &= \frac{3}{4\pi\rho^5} (z_x - z_\xi) (r_x \cos \theta_\xi - r_\xi) [n_r (r_x - r_\xi \cos \theta_\xi) + n_z (z_x - z_\xi)], \\ t_r^z(x, \xi) &= \frac{3}{4\pi\rho^5} (z_x - z_\xi) (r_x - r_\xi \cos \theta_\xi) [n_r (r_x - r_\xi \cos \theta_\xi) + n_z (z_x - z_\xi)], \\ t_z^z(x, \xi) &= \frac{3}{4\pi\rho^5} (z_x - z_\xi)^2 [n_r (r_x - r_\xi \cos \theta_\xi) + n_z (z_x - z_\xi)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Соотношения (7), (9) позволяют перейти к гранично-интегральной постановке краевой задачи (1), (2) в осесимметричном случае.

Гранично-интегральная формулировка задачи и метод решения

Течение рассматривается в осесимметричной области Ω с поверхностью S , получаемой вращением образующей Γ вокруг оси z (рис. 3).

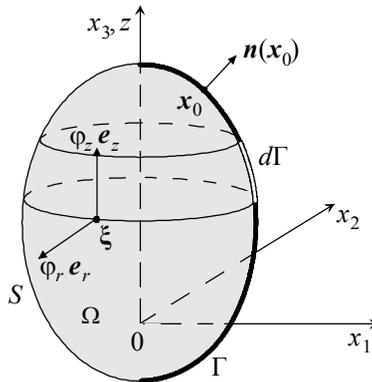


Рис. 3. Область течения

Само течение также осесимметричное, т.е. скорость движения жидкости зависит только от r, z и не зависит от угловой координаты θ . В соответствии со стандартными представлениями теории потенциала будем считать, что по поверхности S области Ω распределены фиктивные силы с плотностью на единицу площади S равной $\phi(\xi)$. Таким образом, используется представление, аналогичное тому, что приводит к понятию потенциала простого слоя. Причем вектор $\phi(\xi)$ в силу

осесимметричности имеет вид $\varphi(\xi) = \varphi_r e_r(\xi) + \varphi_z e_z(\xi)$. Тогда, используя принцип суперпозиции и фундаментальные решения, соответствующие единичным сосредоточенным силам $e_r(\xi)$, $e_z(\xi)$, можно записать для точек x_0 , принадлежащих образующей Γ :

$$u_r(x_0) = \int_{\Gamma} [\varphi_r(\xi) \tilde{u}_r^r(x_0, \xi) + \varphi_z(\xi) \tilde{u}_r^z(x_0, \xi)] d\Gamma(\xi), \quad (10)$$

$$u_z(x_0) = \int_{\Gamma} [\varphi_r(\xi) \tilde{u}_z^r(x_0, \xi) + \varphi_z(\xi) \tilde{u}_z^z(x_0, \xi)] d\Gamma(\xi), \quad (11)$$

$$t_r(x_0) = \int_{\Gamma} [\varphi_r(\xi) \tilde{t}_r^r(x_0, \xi) + \varphi_z(\xi) \tilde{t}_r^z(x_0, \xi)] d\Gamma(\xi), \quad (12)$$

$$t_z(x_0) = \int_{\Gamma} [\varphi_r(\xi) \tilde{t}_z^r(x_0, \xi) + \varphi_z(\xi) \tilde{t}_z^z(x_0, \xi)] d\Gamma(\xi), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^r(x_0, \xi) &= r_{\xi} \int_0^{2\pi} u_r^r(x_0, \xi) d\theta_{\xi}, & \tilde{u}_r^z(x_0, \xi) &= r_{\xi} \int_0^{2\pi} u_r^z(x_0, \xi) d\theta_{\xi}, \\ \tilde{u}_z^r(x_0, \xi) &= r_{\xi} \int_0^{2\pi} u_z^r(x_0, \xi) d\theta_{\xi}, & \tilde{u}_z^z(x_0, \xi) &= r_{\xi} \int_0^{2\pi} u_z^z(x_0, \xi) d\theta_{\xi}, \\ \tilde{t}_r^r(x_0, \xi) &= r_{\xi} \int_0^{2\pi} t_r^r(x_0, \xi) d\theta_{\xi}, & \tilde{t}_r^z(x_0, \xi) &= r_{\xi} \int_0^{2\pi} t_r^z(x_0, \xi) d\theta_{\xi}, \\ \tilde{t}_z^r(x_0, \xi) &= r_{\xi} \int_0^{2\pi} t_z^r(x_0, \xi) d\theta_{\xi}, & \tilde{t}_z^z(x_0, \xi) &= r_{\xi} \int_0^{2\pi} t_z^z(x_0, \xi) d\theta_{\xi}, \end{aligned} \quad (14)$$

а также принято во внимание, что элемент поверхности S равен $dS(\xi) = r_{\xi} d\theta_{\xi} d\Gamma(\xi)$. В уравнениях (10) – (13) подразумевается, что точка ξ принадлежит образующей Γ .

Краевые условия в общем случае заключаются в том, что на части образующей Γ задано значение вектора скорости (твердая стенка либо входная или выходная граница), а на другой части вектор усилий (свободная поверхность или граница раздела). Таким образом, левая часть в уравнениях (10) – (13) известна и задача заключается в определении неизвестной функции плотности $\varphi(\xi)$. После этого по формулам, аналогичным (10) – (13), можно найти значения вектора скорости и других характеристик течения в любой внутренней точке x .

Основные уравнения (10) – (13) можно записать в компактной форме:

$$u_i(x_0) = \int_{\Gamma} \tilde{u}_i^j(x_0, \boldsymbol{\eta}) \varphi_j(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma(\boldsymbol{\eta}), \quad (15)$$

$$t_i(x_0) = \int_{\Gamma} \tilde{t}_i^j(x_0, \boldsymbol{\eta}) \varphi_j(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma(\boldsymbol{\eta}), \quad (16)$$

где индексы $i, j = 1, 2$ соответствуют координатам η_1, η_2 , т.е., фактически r и z (рис. 4).

Тогда
$$\tilde{u}_i^j(x_0, \boldsymbol{\eta}) = \eta_1 \int_0^{2\pi} u_i^j(x_0, \boldsymbol{\eta}) d\theta_{\eta}, \quad (17)$$

$$\tilde{t}_i^j(x_0, \boldsymbol{\eta}) = \eta_1 \int_0^{2\pi} t_i^j(x_0, \boldsymbol{\eta}) d\theta_{\eta}, \quad (18)$$

причем точки $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma$.

Уравнения (15), (16) практически тождественны уравнениям для плоского случая, поэтому для их решения можно использовать метод, приведенный в [3]. Главное отличие заключается в том, что соответствующие интегралы крайне затруднительно вычислить аналитически, поэтому используются стандартные численные квадратуры. Отметим, что подынтегральное выражение в (15) имеет слабую особенность, эквивалентную $\ln \rho$. Интеграл (16) существует в смысле главного значения по Коши, поэтому при совпадении точек x_0 и η следует использовать анализ, проведенный в [14]. Это означает, что диагональные элементы матрицы, получаемые после дискретизации задачи (рис. 4) равны $\frac{1}{2} \delta_{ij} \varphi_i^j(x_0)$.

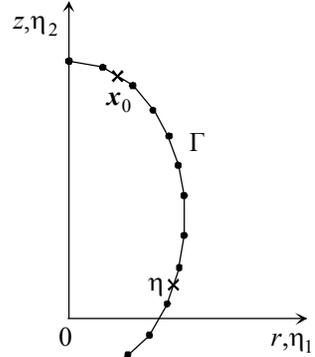


Рис. 4. Гранично-элементная дискретизация

Вычислительные свойства получаемой в итоге системы линейных алгебраических уравнений аналогичны плоскому случаю. Поэтому при получении решения были использованы технологии параллельных вычислений хорошо зарекомендовавшие себя ранее [15].

Решение тестовой задачи

Краевые условия тестовой задачи представлены на рис. 5, причем в качестве масштаба длины R выбран радиус цилиндрической трубы, а масштаба скорости U – средняя скорость течения. Очевидно, что решение уравнений Стокса при таких условиях соответствует течению Пуазейля. Целью является проверка полученных выше соотношений НМГЭ, включая формулы для фундаментальных сингулярных решений (7), (9) путем сравнения с известным аналитическим решением. Отметим, что представленная краевая задача имеет все основные типы граничных условий, которые встречаются в практических приложениях, а именно: входная граница, твердая стенка и выходная граница с заданными значениями компонент вектора усилий (аналог свободной поверхности, либо границы раздела). Одновременно проверяется возможность использования простых численных квадратур (типа формул Гаусса) для вычисления интегралов со слабыми особенностями.

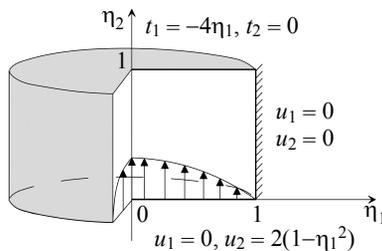


Рис. 5. Тестовая краевая задача

Результаты вычислений представлены на рис. 6 и 7. Аппроксимационная сходимость оценивалась в норме L_2 , т.е. отклонение профиля скорости, рассчитанного на выходной границе от аналитического, вычислялось по формуле

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(u_i^p - u_i^a)^2},$$

где u_i^p – рассчитанные значения аксиальной компоненты вектора скорости на выходной границе, u_i^a – аналитические значения, i – номер узла (середины) i -го граничного элемента, N – количество элементов на выходной границе. Общее число граничных элементов равно $3N$. Полученные результаты подтверждают работоспособность изложенного в работе варианта НМГЭ.

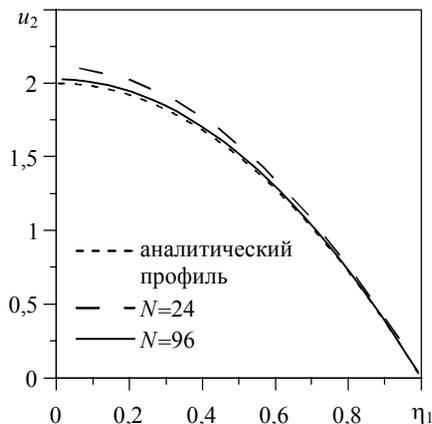


Рис. 6. Профили аксиальной скорости на выходной границе для различных N

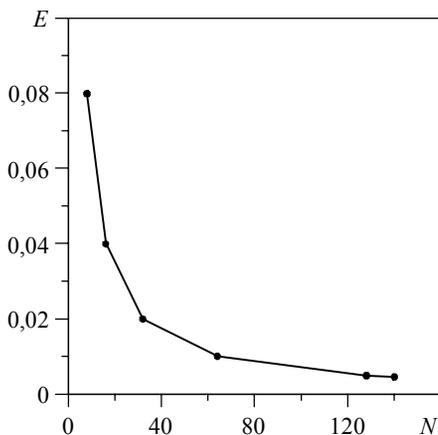


Рис. 7. Аппроксимационная сходимость в норме L_2

Заключение

Получены выражения для компонент фундаментальных тензоров скоростей и усилий, необходимых для моделирования ползущих течений вязкой жидкости в осесимметричном случае. Представлен упрощенный вариант непрямого метода граничных элементов, основанный на численном вычислении всех необходимых интегралов, включая интегралы со слабыми особенностями. Достоверность приведенных в работе соотношений подтверждена решением тестовой краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках: пер. с англ. М.: Мир, 1984.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов: пер. с англ. М.: Мир, 1987.
3. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Математическое моделирование. 1992. Т. 4. № 10. С. 62–70.
4. Якутенок В.А. Численное решение трехмерных задач о ползущем течении вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Математическое моделирование. 1999. Т. 11. № 10. С. 92–99.
5. Штоколова М.Н., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Формирование свободной поверхности объема вязкой жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 2. С. 179–185.

6. Пономарева М.А., Шрагер Г.Р., Якутенко В.А. Устойчивость плоской струи высоковязкой жидкости, натекающей на горизонтальную твердую плоскость // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 1. С. 53–61.
7. Новошинцев А.В., Шрагер Г.Р., Якутенко В.А. и др. Численное моделирование истечения вязкой жидкости из объемного смесителя // Теоретические основы химической технологии. 2006. Т.40. № 6. С. 668–674.
8. Пономарева М.А., Шрагер Г.Р., Якутенко В.А. Использование уравнения Дюпре – Юнга для решения задачи о растекании жидкости при ограниченном смачивании // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 1. С. 90–96.
9. Якутенко В.А., Штоколова М.Н. Численное моделирование плоских течений неньютоновской жидкости со свободной поверхностью непрямым методом граничных элементов // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № 5. С. 106–118.
10. Yun B.I., Ang W.T. A dual-reciprocity boundary element method for axisymmetric thermoelastostatic analysis of nonhomogeneous materials // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. № 36. С. 1776–1786.
11. Karageorghis A., Fairweather G. The method of fundamental solutions for axisymmetric elasticity problems // Computational Mechanics. 2000. № 25. С. 524–532.
12. Pozrikidis C. Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow. Cambridge University Press, 1992.
13. Park K.H., Benerjee P.K. A new BEM formulation for transient axisymmetric poroelasticity via particular integrals // International Journal of Solids and Structures. 2007. № 44. С. 7276–7290.
14. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
15. Пономарева М.А. Анализ эффективности использования средств распределенных вычислений для систем с общей памятью при моделировании течений вязкой жидкости методом граничных элементов // Седьмая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям / под ред. проф. А.В. Старченко. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. С. 137–144.

Статья поступила 01.07.2014 г.

Yakutenok V.A., Ponomareva M.A., Kuznetsova A.E. MODELING OF AXISYMMETRIC VISCOUS FLOWS OF INCOMPRESSIBLE FLUID BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

In this paper, the derivation of the fundamental velocity and traction tensor components is presented for Stokes equations in the cylindrical coordinate system for axisymmetric viscous flows. The derivation is based on a three-dimensional singular solution in Cartesian coordinates. Using the presented formulas, the boundary integral equations are constructed in accordance with the potential theory conception. A simple numerical solution algorithm that is an implementation of principles of the indirect boundary element method is proposed. Reliability of the results is verified by solving a test problem the role of which is played by the problem about a flow in a cylindrical tube (the Poiseuille flow) with mixed boundary conditions. The developed method of solving boundary problems for Stokes equations can be used for modeling creeping flows of a viscous fluid with a free surface.

Keywords: viscous fluid, boundary element method, fundamental solutions, axisymmetric flow

YAKUTENOK Vladimir Albertovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: yva@ftf.tsu.ru

PONOMAREVA Maria Andreevna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: pma@ftf.tsu.ru

KUZNETSOVA Alina Evgenievna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: lina_kuznetsova@inbox.ru

REFERENCES

1. Banerjee P.K., Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill book company, UK, 1981.
2. Brebbia C.A. Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques. Theory and applications in engineering*. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
3. Yakutenok V.A. Chislennoe modelirovanie medlennykh techeniy vyazkoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu metodom granichnykh elementov. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1992, vol. 4, no. 10, pp. 62–70. (in Russian)
4. Yakutenok V.A. Chislennoe reshenie trekhmernykh zadach o polzushchem techenii vyazkoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu metodom granichnykh elementov. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1999, vol. 11, no. 10, pp. 92–99. (in Russian)
5. Shrager G.R., Shtokolova M.N., Yakutenok V.A. Formation of the free surface of a viscous fluid volume inside a rotating horizontal cylinder. *Fluid Dynamics*, 2009, vol. 44(2). pp. 322–327.
6. Ponomareva M.A., Shrager G.R., Yakutenok V.A. Stability of a Plane Jet of a Highly Viscous Fluid Impinging on a Horizontal Solid Wall. *Fluid Dynamics*, 2011, vol. 46(1), pp. 44–50.
7. Novoshintsev A.V., Shrager G.R., Yakutenok V.A. et al. Numerical modeling of the outflow of a viscous liquid from a bulk mixer. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2006, vol. 40(6). pp. 626–632.
8. Ponomareva M.A., Shrager G.R., Yakutenok V.A. Ispol'zovanie uravneniya Dyupre – Yunga dlya resheniya zadachi o rastekanii zhidkosti pri ogranichenom smachivanii. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2008, no. 1, pp. 90–96. (in Russian)
9. Yakutenok V.A., Shtokolova M.N. Chislennoe modelirovanie ploskikh techeniy nen'yutonovskoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu nepryamym metodom granichnykh elementov. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2006, vol. 11, no. 5, pp. 106–118. (in Russian)
10. Yun B.I., Ang W.T. A dual-reciprocity boundary element method for axisymmetric thermoelastostatic analysis of nonhomogeneous materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, no. 36, pp. 1776–1786.
11. Karageorghis A., Fairweather G. The method of fundamental solutions for axisymmetric elasticity problems. *Computational Mechanics*, 2000, no. 25, pp. 524–532.
12. Pozrikidis C. *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press, 1992.
13. Park K.H., Benerjee P.K. A new BEM formulation for transient axisymmetric poroelasticity via particular integrals. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, no. 44, pp. 7276–7290.
14. Ladyzhenskaya O.A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. 2nd ed. New York, Gordon & Breach, 1969.
15. Ponomareva M.A. Analiz effektivnosti ispol'zovaniya sredstv raspredelennykh vychisleniy dlya sistem s obshchey pamyat'yu pri modelirovanii techeniy vyazkoy zhidkosti metodom granichnykh elementov. *Sed'maya Sibirskaya konferentsiya po parallel'nym i vysokoproizvoditel'nym vychisleniyam*. Tomsk, Izd-vo Tom. un-ta, 2014, pp. 137–144. (in Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛЕКСАНДРОВ Игорь Александрович – доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАО, профессор, профессор кафедры математического анализа механико-математического анализа Томского государственного университета. E-mail: ma@math.tsu.ru

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: alexy121@mail.ru

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, специалист первой категории отдела инновационного развития и интеллектуальной собственности производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск». E-mail: michael121@mail.ru

ВАСЕНИН Игорь Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета.

ГРИНШПОН Самуил Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: grinspron@math.tsu.ru

ГУБАНОВ Сергей Михайлович – кандидат физико-математических наук, начальник службы механиков завода разделения изотопов ОАО «Сибирский химический комбинат». E-mail: ssubanov@yandex.ru

ДУРНОВЦЕВ Максим Иванович – аспирант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: maxhd@inbox.ru

ЕЖОВА Ольга Игоревна – научный сотрудник лаборатории математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета. E-mail: oezhova@gmail.com

ЗОЛОТАРЕВ Виктор Юрьевич – аспирант, инженер центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина».

КОНЬКОВ Виктор Федорович – старший научный сотрудник ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: kalina@bochvar.ru

КОТЛЯРОВ Евгений Юрьевич – аспирант, ведущий специалист центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина». E-mail: key@laspace.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

КУЗНЕЦОВА Алина Евгеньевна – магистрант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: lina_kuznetsova@inbox.ru

МАРКЕЛОВ Владимир Андреевич – доктор технических наук, начальник отдела ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: markelov@bochvar.ru

МОРДОВСКОЙ Андрей Константинович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и математического анализа Института математики и информатики Бурятского государственного университета. E-mail: mak13@mail.ru

НЕСМЕЕВ Юрий Алексеевич – пенсионер, до выхода на пенсию преподаватель кафедры высшей математики Магнитогорского государственного технического университета. E-mail: nes_ya@list.ru

НИКУЛИНА Антонина Васильевна – доктор технических наук, главный специалист ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: nikulina@bochvar.ru

НОВИКОВ Владимир Владимирович – кандидат технических наук, заместитель генерального директора ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: novikov@bochvar.ru

ПОНОМАРЕВА Мария Андреевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pma@ftf.tsu.ru

ПОТЕКАЕВ Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, директор СФТИ. E-mail: kanc@spti.tsu.ru

ПЧЕЛИНЦЕВ Валерий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, ассистент Томского политехнического университета. E-mail: vpchelintsev@vtomske.ru

ПЧЕЛИНЦЕВ Евгений Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Томского государственного университета. E-mail: evgen-pch@yandex.ru

САБЛИН Михаил Николаевич – главный специалист ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: sablin@bochvar.ru

СОРОКИН Константин Сергеевич – аспирант кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: Sorokin_k@list.ru

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: starch@math.tsu.ru

СУХАЧЕВА Елена Сергеевна – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: Sirius9113@mail.ru

ТУЛИН Дмитрий Владимирович – начальник центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им.С.А.Лавочкина». E-mail: tulin@laspace.ru

УСЕНКО Олеся Вадимовна – аспирантка кафедры теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: usenko.olesya@yandex.ru

ФИНЧЕНКО Валерий Семенович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им.С.А.Лавочкина». E-mail: feofin.val@yandex.ru

ХМЫЛЕВА Татьяна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: TEX2150@yandex.ru

ХОХУНОВА Татьяна Николаевна – старший научный сотрудник ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: o_mil@bochvar.ru

ЦЫДЕНОВ Баир Олегович – младший научный сотрудник лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета. E-mail: btsydenov@gmail.com

ЧУКАНОВ Михаил Викторович – кандидат физико-математических наук, инженер-механик завода разделения изотопов ОАО «Сибирский химический комбинат». E-mail: chukanov2008@yandex.ru

ШЕРСТОБИТОВ Александр Анатольевич – студент кафедры теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: sherstobitovalexandr@gmail.com

ЯКУТЕНОК Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: yva@ftf.tsu.ru