

УДК 519.213

РЕКУРРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ СОБЫТИЙ

Д. В. Семенова, Н. А. Лукьянова

*Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета, г. Красноярск, Россия***E-mail:** dariasdv@gmail.com, nata00sfu@gmail.com

Исследуется класс дискретных вероятностных распределений II рода случайных множеств событий. В качестве инструмента построения таких распределений предлагается использовать ассоциативные функции. Излагается новый подход к определению дискретного вероятностного распределения II рода случайного множества на конечном множестве из N событий на основе полученного рекуррентного соотношения и заданной ассоциативной функции. Преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что для определения вероятностного распределения вместо полного набора 2^N вероятностей достаточно знать N вероятностей событий и вид ассоциативной функции. Данный подход продемонстрирован на примере трёх ассоциативных функций. Приводятся теоремы, устанавливающие вид и условия легитимности полученных вероятностных распределений случайных множеств событий.

Ключевые слова: *случайное множество событий, дискретное вероятностное распределение, ассоциативная функция.*

Введение

Теория случайных множеств рассматривается как естественное обобщение теории случайных векторов, которые играют ключевую роль в многомерном статистическом анализе. Случайные множества данных можно рассматривать как неточные/неполные наблюдения, которые часто встречаются в современном технологическом обществе [1]. Центральным объектом нашего исследования является специфическое случайное множество, а именно — случайное конечное множество событий. Случайные множества событий позволяют выявить общие статистические закономерности распределения событий в различных системах объектов нечисловой природы. Вероятностное распределение случайного множества событий — это удобный математический аппарат для описания всех способов взаимодействия элементов моделируемой этим множеством системы между собой. В работе исследуется проблема построения вероятностных распределений случайных множеств событий и предлагается метод решения этой проблемы с помощью аппарата ассоциативных функций.

В п. 1 приводятся основные сведения о ключевых объектах исследования — случайных множествах событий и вероятностных распределениях, их характеризующих, и инструменте исследования — аппарате ассоциативных функций. В п. 2 излагается суть предлагаемого рекуррентного подхода построения дискретного вероятностного распределения II рода случайных множеств событий на основе заданной ассоциативной функции, определяется вид соответствующего рекуррентного соотношения. В п. 3 предложенный подход демонстрируется на трёх известных ассоциативных функциях. Приводятся теоремы, устанавливающие вид и условия легитимности полученных вероятностных распределений.

1. Основные понятия и обозначения

1.1. Случайное множество событий

Наряду со случайными величинами в теории вероятностей и её приложениях рассматривают случайные объекты произвольной природы, например случайные точки, векторы, функции, поля, множества и наборы множеств. Для описания такого типа объектов используется понятие случайного элемента [2].

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, (U, \mathcal{A}) — измеримое пространство, где U — произвольное множество, а \mathcal{A} — некоторая σ -алгебра его подмножеств. Будем говорить, что функция $K = K(\omega)$, определённая на Ω и принимающая значения в U , есть \mathcal{F}/\mathcal{A} -измеримая функция, или случайный элемент (со значениями в U), если для любого $A \in \mathcal{A}$ верно $\{\omega : K(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$.

Отметим, что в случае, когда U — конечное множество, можно ограничиться понятием алгебры подмножеств 2^U .

Зафиксируем некоторый конечный набор событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$. Случайный элемент, значения которого являются подмножествами конечного множества \mathfrak{X} , т. е. элементами $2^{\mathfrak{X}}$, будем называть случайным множеством событий [1], заданным на конечном множестве $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$.

Определение 2. Случайное множество событий K на конечном множестве событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ определяется как отображение $K : \Omega \rightarrow 2^{\mathfrak{X}}$, измеримое относительно пары алгебр $(\mathcal{F}, 2^{2^{\mathfrak{X}}})$ в том смысле, что для всякого $X \in 2^{2^{\mathfrak{X}}}$ существует прообраз $K^{-1}(X) \in \mathcal{F}$, такой, что $\mathbf{P}(X) = \mathbf{P}(K^{-1}(X))$.

Выражение $K(\omega) = \{x \in \mathfrak{X} : \omega \in x\}$ может быть истолковано как «случайное множество наступивших событий», поскольку элементарному исходу эксперимента $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие некоторое подмножество событий $X \subseteq \mathfrak{X}$, которое содержит все те события, которые наступили в данном испытании.

1.2. Два основных способа представления вероятностного распределения случайного множества событий

Случайное множество событий K , заданное на конечном множестве событий \mathfrak{X} , определяется своим дискретным вероятностным распределением. Если мощность рассматриваемого множества событий $|\mathfrak{X}| = N < \infty$, то имеется 2^N видов вероятностных зависимостей между событиями этого множества, т. е. ровно столько, сколько у этого множества подмножеств. Дискретное вероятностное распределение (далее просто вероятностное распределение) случайного множества событий K , заданного на конечном множестве избранных событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$, — это набор 2^N значений вероятностной меры \mathbf{P} на событиях из $2^{\mathfrak{X}}$. Как известно, такое распределение можно задать шестью эквивалентными способами [3–5]. В настоящей работе исследуются только два из них.

PI. Вероятностное распределение I рода случайного множества событий K на \mathfrak{X} — это набор $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ из 2^N вероятностей вида

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \cap \left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right)\right),$$

где $X^c = \mathfrak{X} \setminus X$; $x^c = \Omega \setminus x$.

Вероятностное распределение I рода всегда легитимно, т. е. обладает свойствами

$$0 \leq p(X) \leq 1, \quad X \subseteq \mathfrak{X}; \quad (1)$$

$$\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p(X) = 1. \quad (2)$$

РП. Вероятностное распределение II рода случайного множества событий K на \mathfrak{X} — набор $\{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$ из 2^N вероятностей вида

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Вероятностное распределение II рода $\{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$ случайного множества событий K на \mathfrak{X} удовлетворяет системе из 2^N неравенств Фреше — Хёфдинга

$$0 \leq p_X^- \leq p_X \leq p_X^+ \leq 1,$$

где $p_X^- = \max\left\{0, 1 - \sum_{x \in X} (1 - p_x)\right\}$ — нижняя граница Фреше — Хёфдинга; $p_X^+ = \min_{x \in X} p_x$ — верхняя граница Фреше — Хёфдинга.

Замечание 1. В теории случайных событий [3–7] обозначение \emptyset используется для $\mathfrak{X}^c = \Omega \setminus \mathfrak{X}$. Событие $\emptyset = \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} x^c$ означает, что не наступило ни одно событие из \mathfrak{X} .

В вероятностном распределении II рода всегда $p_\emptyset = 1$.

Замечание 2. Только распределение I рода обладает привычным для распределения вероятности свойством нормировки (2), которое очевидно следует из того, что соответствующие события $\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \cap \left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$ образуют разбиение пространства элементарных событий Ω . А поскольку события $\bigcap_{x \in X} x$ образуют не разбиение, а всего лишь покрытие Ω , то соотношение нормировки для вероятностного распределения II рода не выполняется, сумма вероятностей этих событий всегда больше единицы.

Вероятностные распределения I и II рода связаны взаимно-обратными формулами обращения Мёбиуса [3]

$$p_X = \sum_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}: X \subseteq Y} p(Y); \quad (3)$$

$$p(X) = \sum_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}: X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y \quad (4)$$

для всех $X \in 2^{\mathfrak{X}}$.

Если задано вероятностное распределение I рода $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$, то по формуле (3) всегда можно получить вероятностное распределение II рода $\{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Однако преобразование (4) заданного набора из 2^N чисел $\{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$, удовлетворяющих границам Фреше — Хёфдинга, может привести к вероятностному распределению I рода с отрицательными значениями. Этот факт демонстрирует следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим случайное множество, заданное на триplete событий $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$. Пусть известно его вероятностное распределение II рода

$$\{p_\emptyset, p_x, p_y, p_z, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz}, p_{xyz}\} = \{1, 0,375, 0,75, 0,625, 0,243, 0,19, 0,429, 0,118\}. \quad (5)$$

Заметим, что все вероятности из (5) удовлетворяют границам Фреше — Хёфдинга. Например, для $p_{xz} = \mathbf{P}(x \cap z) = 0,19$ имеем

$$\max\{p_x + p_z - 1, 0\} \leq p_{xz} \leq \min\{p_x, p_z\} \Rightarrow 0 \leq p_{xz} \leq 0,375.$$

Применение формул (4) приводит к вероятностному распределению I рода

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \mathbf{P}(x \cap y^c \cap z^c) = p_x - p_{xy} - p_{xz} + p_{xyz} = 0,375 - 0,243 - 0,19 + 0,118 = 0,06; \\
 p(y) &= \mathbf{P}(x^c \cap y \cap z^c) = p_y - p_{xy} - p_{yz} + p_{xyz} = 0,75 - 0,243 - 0,429 + 0,118 = 0,196; \\
 p(z) &= \mathbf{P}(x^c \cap y^c \cap z) = p_z - p_{xz} - p_{yz} + p_{xyz} = 0,625 - 0,19 - 0,429 + 0,118 = 0,124; \\
 p(xy) &= \mathbf{P}(x \cap y \cap z^c) = p_{xy} - p_{xyz} = 0,243 - 0,118 = 0,125; \\
 p(xz) &= \mathbf{P}(x \cap y^c \cap z) = p_{xz} - p_{xyz} = 0,19 - 0,118 = 0,072; \\
 p(yz) &= \mathbf{P}(x^c \cap y \cap z) = p_{yz} - p_{xyz} = 0,429 - 0,118 = 0,311; \\
 p(xyz) &= \mathbf{P}(x \cap y \cap z) = p_{xyz} = 0,118; \\
 p(\emptyset) &= \mathbf{P}(x^c \cap y^c \cap z^c) = 1 - p_x - p_y - p_z + p_{xy} + p_{xz} + p_{yz} - p_{xyz} = -0,006.
 \end{aligned}$$

Такое распределение нелегитимно, так как $p(\emptyset) < 0$.

Определение 3. Будем говорить, что случайное множество событий K обладает легитимным вероятностным распределением II рода, если соответствующее вероятностное распределение I рода, полученное по формулам обращения Мёбиуса (4), является легитимным.

В общем случае количество параметров, задающих вероятностные распределения случайного множества событий, зависит от мощности \mathfrak{X} , поскольку каждое множество из N событий характеризуется набором из 2^N вероятностей. Одной из главных проблем исследования случайных множеств событий является задача описания их вероятностных распределений через меньшее число параметров. Например, для определения вероятностного распределения равномерного случайного множества необходимо знать только один параметр $N = |\mathfrak{X}|$. В [5] исследован класс m -зависимых распределений случайного множества событий, которые определяются через фиксированные вероятности p_X , когда $|X| \leq m < N$. Общей идеей современных подходов [5–7] является выражение вероятности пересечений множества событий функционально через вероятности самих событий, что приводит к уменьшению числа параметров, необходимых для построения самих вероятностных распределений случайных множеств событий. В работе предлагается рекуррентный подход построения вероятностных распределений случайных множеств событий, использующий ассоциативные функции, которые связывают вероятности пересечения множества событий $\mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right)$ с вероятностями самих событий $\mathbf{P}(x)$, $x \in X$, $X \subseteq \mathfrak{X}$.

1.3. Ассоциативные функции

Определение 4. Ассоциативная функция в теории случайных множеств событий $AF : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ определяется как двуместная функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

- A1) граничные условия: $AF(a, 0) = AF(0, a) = 0$, $AF(a, 1) = AF(1, a) = a$ для всех $a \in [0, 1]$;
- A2) монотонность: для всех $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$, таких, что $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, справедливо $AF(a_1, b_1) \leq AF(a_2, b_2)$;
- A3) коммутативность: $AF(a, b) = AF(b, a)$ для всех $a, b \in [0, 1]$;
- A4) ассоциативность: $AF(AF(a, b), c) = AF(a, AF(b, c))$ для всех $a, b, c \in [0, 1]$;
- A5) условие липшиц-непрерывности: $AF(c, b) - AF(a, b) \leq c - a$, $a \leq c$, $a, b, c \in [0, 1]$.

Геометрически график ассоциативной функции — это поверхность (рис. 1), которая «натянута» на четырёхугольник с вершинами $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$.

На рис. 1 стороны четырёхугольника выделены жирными линиями и соответствуют граничным условиям А1. Согласно свойству А2, ассоциативная функция возрастает по вертикали и по горизонтали [8, 9], а по свойству А3 она симметрична относительно плоскости $a = b$. Свойства А1–А3, А5 гарантируют, что значение функции $AF(a, b)$ обладает свойствами вероятности. Свойство А4 позволяет рекуррентно перейти к n -местной функции.

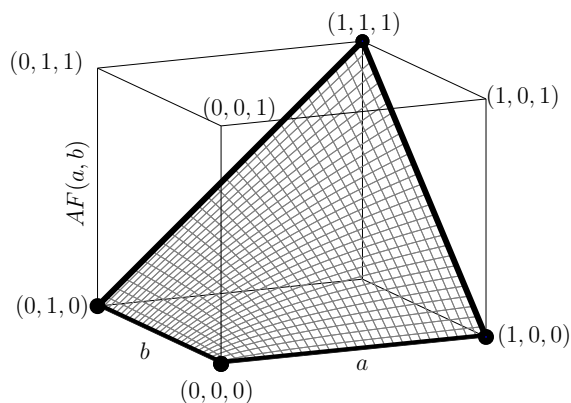


Рис. 1. График произвольной ассоциативной функции

Заметим, что свойства ассоциативной функции А1–А4 соответствуют свойствам треугольной нормы (t -нормы). Понятие t -нормы введено и используется в теории вероятностных метрических пространств [10, 11]. В настоящее время t -нормы получили широкое применение в нечёткой логике в качестве операции конъюнкции. Они представляют интерес для нечёткой логики, потому что сохраняют основные свойства связки «и», которые выполняются одновременно, а именно коммутативность, монотонность, ассоциативность и ограниченность, и, таким образом, служат естественным обобщением классической конъюнкции для многозначных систем рассуждений [8, 12, 13]. Классом бинарных операций, которые связаны с t -нормами, являются копулы [9], введённые А. Скларом в 1959 г. Модели на основе копул чрезвычайно значимы для моделирования многомерных наблюдений, ведь копула содержит всю информацию о природе зависимости между случайными величинами, которой нет в маргинальных распределениях, но не содержит информации о маргинальных распределениях. В результате информация о маргиналах и информация о зависимости между ними отделяются копулой друг от друга [9]. Таким образом, модели с использованием копул определяют функцию совместного распределения случайных величин в виде двух частей, что позволяет отдельно рассматривать одномерные маргинальные распределения и функцию, отвечающую за их зависимость [9]. В нашем случае использование копул позволяет представить вероятность пересечения множества событий через вероятности событий и функцию AF , отражающую их взаимосвязь. Некоторые семейства t -норм известны как семейства копул под различными именами. В [8] доказано, что свойство А5 даёт условия, при которых t -норма является копулой. С другой стороны, любая коммутативная и ассоциативная копула является t -нормой. Известно [8, 9, 13], что любая копула удовлетворяет границам Фреше — Хёфдинга, которые, как следствие, справедливы и для ассоциативных функций (рис. 2).

Таким образом, с учётом [8, 9, 13] и вышеизложенного определение 4 можно выразить так: ассоциативная функция — непрерывная t -норма, удовлетворяющая условию

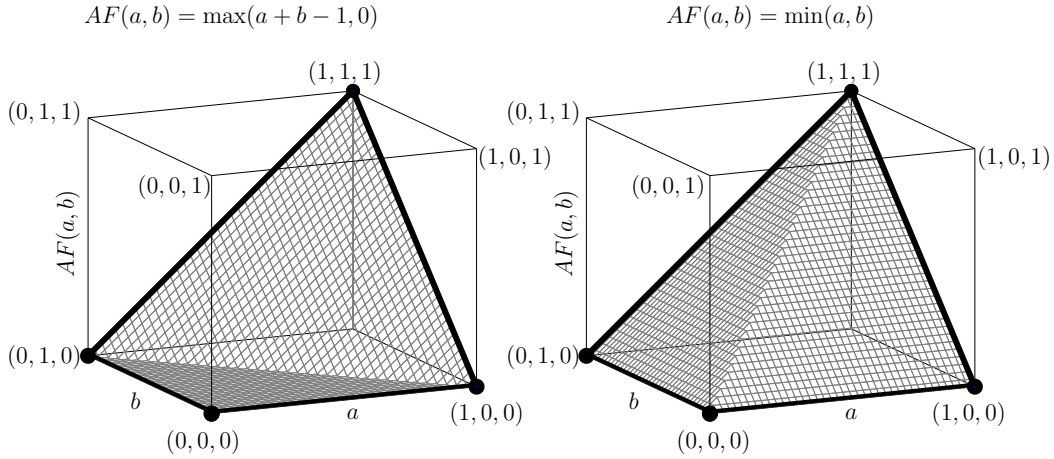


Рис. 2. Нижняя и верхняя границы Фреше — Хёфдинга для ассоциативных функций

Липшица, или, что то же самое, ассоциативная и коммутативная копула. Именно такая трактовка понятия ассоциативной функции используется далее.

2. Рекуррентное построение вероятностных распределений случайных множеств событий ассоциативными функциями

Применим аппарат ассоциативных функций к вероятностным распределениям случайных множеств событий. В качестве аргументов ассоциативной функции предлагается рассматривать вероятности событий, их число совпадает с мощностью базового множества. Таким образом, ассоциативные функции связывают вероятности пересечения множества событий $p_X = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in X} x \right)$ с вероятностями самих событий $p_x = \mathbf{P}(x)$, $x \in X$, $X \subseteq \mathfrak{X}$. Перейдём к изложению подхода.

Вход:

- множество событий \mathfrak{X} , $|\mathfrak{X}| = N$;
- N вероятностей событий p_x , $x \in \mathfrak{X}$;
- ассоциативная функция $AF(a, b)$.

Выход: вероятностное распределение II рода $\{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$ случайного множества событий K на \mathfrak{X} .

Основная идея: исходя из известных вероятностей событий $p_x = \mathbf{P}(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, формирование вероятностей пересечения множеств событий p_X осуществлять последовательно согласно рекуррентной формуле

$$p_X = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in X} x \right) = AF \left(p_x, \mathbf{P} \left(\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} y \right) \right), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \quad |X| > 1. \quad (6)$$

Например,

$$\begin{aligned} p_{xy} &= \mathbf{P}(x \cap y) = AF(p_x, p_y), \\ p_{xyz} &= \mathbf{P}(x \cap y \cap z) = AF(p_x, AF(p_y, p_z)) = AF(p_x, \mathbf{P}(y \cap z)), \end{aligned}$$

и далее аналогичным образом. Напомним, что вероятность II рода для пустого множества событий всегда известна и равна 1.

Формула (6) позволяет построить вероятностное распределение II рода случайного множества событий, где в качестве входных параметров выступают N вероятностей событий и вид ассоциативной функции. В результате формируются $2^N - N - 1$ вероятностей II рода, удовлетворяющих границам Фреше — Хёфдинга, которых не хватало до полного набора. Однако полученные распределения могут быть нелегитимными в смысле определения 3. Следовательно, для каждого семейства ассоциативных функций необходимо определять условия легитимности построенных распределений.

3. Демонстрация рекуррентного построения вероятностных распределений случайных множеств событий

Проиллюстрируем предложенный рекуррентный подход на трех ассоциативных функциях, изученных в работах [8, 9, 12, 13]:

- $AF(a, b) = a \cdot b$;
- $AF(a, b) = \min\{a, b\}$;
- $AF(a, b) = \max\{a + b - 1, 0\}$.

Покажем для каждой из них, к какому вероятностному распределению случайного множества событий она приводит. Исследуем легитимность этого распределения.

Теорема 1. Пусть заданы вероятности событий $p_x = \mathbf{P}(x) > 0$, $x \in \mathfrak{X}$. Тогда ассоциативная функция

$$AF(a, b) = a \cdot b \tag{7}$$

определяет независимо-точечное случайное множество событий с легитимным вероятностным распределением II рода.

Доказательство. Доказательство теоремы следует непосредственно из определения независимо-точечного случайного множества [5, 14]. Исходя из этого определения, значениями независимо-точечного случайного множества K служат подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$ наступивших событий, независимых в совокупности. Поскольку события из \mathfrak{X} независимы в совокупности, то для всех $X \subseteq \mathfrak{X}$ справедливо

$$p_X = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in X} x \right) = \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x) = \prod_{x \in X} p_x. \tag{8}$$

С другой стороны, для $X \subseteq \mathfrak{X}$ по формуле (6) получаем

$$p_X = AF \left(p_x, \mathbf{P} \left(\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} y \right) \right) = \prod_{x \in X} p_x. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что ассоциативная функция (7) определяет независимо-точечное случайное множество событий.

Известно [5, 14], что для независимо-точечного случайного множества событий распределение вероятностей I рода имеет вид

$$p(X) = \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x) \prod_{x \in X^c} \mathbf{P}(x^c) = \prod_{x \in X} p_x \prod_{x \in X^c} (1 - p_x), \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

и это распределение всегда легитимное.

Таким образом, формула (6) с ассоциативной функцией (7) всегда позволяет построить одно легитимное распределение, которое определяет независимо-точечное случайное множество событий. ■

Теорема 2. Пусть заданы вероятности событий $p_x = \mathbf{P}(x) > 0$, $x \in \mathfrak{X}$. Тогда ассоциативная функция

$$AF(a, b) = \min\{a, b\} \quad (10)$$

определяет случайное множество вложенных событий с легитимным вероятностным распределением II рода.

Доказательство. Упорядочим события в $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ в порядке возрастания их вероятностей $p_{x_1} \leq p_{x_2} \leq \dots \leq p_{x_N}$. Применение формулы (6) даёт

$$\begin{aligned} p_{x_i x_j} &= \mathbf{P}(x_i \cap x_j) = \min\{p_{x_i}, p_{x_j}\} = p_{x_i}, \quad i < j, \\ p_{x_i x_j x_k} &= \mathbf{P}(x_i \cap x_j \cap x_k) = \min\{p_{x_i}, p_{x_j}, p_{x_k}\} = p_{x_i}, \quad i < j < k. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует, что $x_i \subseteq x_j \subseteq x_k$. Действительно, если $x \subseteq y$, то $\mathbf{P}(x \cap y) = \mathbf{P}(x)$; если $x \subseteq y$ и $y \subseteq z$, то $x \subseteq y \subseteq z$ и $\mathbf{P}(x \cap y \cap z) = \mathbf{P}(x)$.

Рассмотрим упорядоченный набор индексов $I \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, соответствующий некоторому подмножеству $X \subseteq \mathfrak{X}$, элементы которого упорядочены в порядке возрастания вероятностей событий. Тогда формула (6) примет вид

$$p_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} x_i\right) = \min_{i \in I}\{p_{x_i}\} = p_{x_m}, \quad \text{где } m = \min_{i \in I} i. \quad (12)$$

Формула (12) определяет вероятностное распределение случайного множества K , заданного на множестве $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ из N вложенных друг в друга событий $x_1 \subseteq x_2 \subseteq \dots \subseteq x_N$.

Обратимся теперь к вопросу легитимности полученного вероятностного распределения II рода случайного множества вложенных событий (12). По формулам обращения Мёбиуса (4) перейдём к вероятностному распределению I рода и получим $N + 1$ ненулевую вероятность

$$\begin{aligned} p(\mathfrak{X}) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in \{1, \dots, N\}} x_i\right) = p_{x_1}; \quad p(\mathfrak{X} \setminus \{x_1\}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in \{2, \dots, N\}} x_i\right) = p_{x_2} - p_{x_1}; \\ p(\mathfrak{X} \setminus \{x_1, x_2\}) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in \{3, \dots, N\}} x_i\right) = p_{x_3} - p_{x_2}; \\ &\dots \\ p(\mathfrak{X} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in \{k, \dots, N\}} x_i\right) = p_{x_k} - p_{x_{k-1}}; \\ &\dots \\ p(x_{N-1} x_N) &= \mathbf{P}(x_{N-1} \cap x_N) = p_{x_{N-1}} - p_{x_{N-2}}; \quad p(x_N) = \mathbf{P}(x_N) = p_{x_N} - p_{x_{N-1}}; \\ p(\emptyset) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in \{1, \dots, N\}} x_i^c\right) = 1 - p_{x_N}. \end{aligned} \quad (13)$$

Остальные $2^N - N - 1$ вероятности равны нулю.

Из (13) видно, что полученное распределение I рода удовлетворяет условиям (1) и (2), следовательно, формула (6) с ассоциативной функцией (10) всегда позволяет построить одно легитимное распределение, которое определяет случайное множество вложенных событий. ■

Теорема 3. Пусть заданы вероятности событий $p_x = \mathbf{P}(x) > 0$, $x \in \mathfrak{X}$. Ассоциативная функция

$$AF(a, b) = \max\{a + b - 1, 0\} \quad (14)$$

определяет

- 1) случайное множество с непересекающейся структурой зависимостей с легитимным вероятностным распределением, если вероятности событий $p_x = \mathbf{P}(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяют неравенству

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x \leq 1; \quad (15)$$

- 2) случайное множество событий с легитимным вероятностным распределением, если вероятности событий $p_x = \mathbf{P}(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяют неравенствам

$$|\mathfrak{X}| - 1 \leq \sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x \leq |\mathfrak{X}|. \quad (16)$$

Доказательство. В [12, 13] получен вид n -местной функции

$$AF(a_1, \dots, a_n) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i - n + 1, 0 \right\}.$$

Для всех $X \subseteq \mathfrak{X}$, $|X| > 1$, из (6) и (3) следует

$$p_X = AF \left(p_x, \mathbf{P} \left(\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} y \right) \right) = \max \left\{ \sum_{x \in X} p_x - |X| + 1, 0 \right\}. \quad (17)$$

Рассмотрим следующие ситуации.

- 1) Пусть в (17) все вероятности p_X равны нулю, т. е. $\max \left\{ \sum_{x \in X} p_x - |X| + 1, 0 \right\} = 0$ для всех $X \subseteq \mathfrak{X}$, таких, что $|X| > 1$. По формулам обращения Мёбиуса (4) перейдём к вероятностному распределению I рода:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_x \text{ для всех } x \in \mathfrak{X}, \\ p(X) &= 0 \text{ для всех } X \subseteq \mathfrak{X}, \text{ таких, что } |X| > 1, \\ p(\emptyset) &= 1 - \sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x. \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что полученное распределение (18) удовлетворяет свойству (1), если $p(\emptyset) \geq 0$. Следовательно, распределение будет легитимным тогда и только тогда, когда $\sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x \leq 1$.

- 2) Пусть в (17) все $p_X \neq 0$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, $|X| > 1$. Тогда из (17) и условия (1) следует $0 < \sum_{x \in X} p_x - |X| + 1 \leq 1$ или, что эквивалентно, $|X| - 1 < \sum_{x \in X} p_x \leq |X|$.

По формулам обращения Мёбиуса (4), используя принципы сет-суммирования [3], получим легитимное вероятностное распределение I рода:

$$\begin{aligned} p(X) &= 0 \text{ для всех } X \subset \mathfrak{X} \text{ мощности } |X| < |\mathfrak{X}| - 1, \\ p(\mathfrak{X} \setminus \{x\}) &= 1 - p_x \text{ для всех } x \in \mathfrak{X}, \\ p(\mathfrak{X}) &= \sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x - |\mathfrak{X}| + 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, ассоциативная функция (14) определяет случайное множество событий с легитимным вероятностным распределением (19), если вероятности событий $p_x = \mathbf{P}(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяют системе из $2^{|\mathfrak{X}|} - 1$ неравенств

$$|X| - 1 < \sum_{x \in X} p_x \leq |X|, \quad X \subseteq \mathfrak{X}. \quad (20)$$

Покажем, что если выполняется неравенство (16), то справедлива вся система (20). Действительно, пусть $|\mathfrak{X}| - 1 \leq \sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x \leq |\mathfrak{X}|$. Оценка сверху $\sum_{x \in X} p_x \leq |X|$ для всех $X \subseteq \mathfrak{X}$ следует из свойства вероятности $p_x \leq 1$. Оценка снизу для $X \subset \mathfrak{X}$ получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x &= \sum_{x \in X} p_x + \sum_{y \in \mathfrak{X} \setminus X} p_y \geq |\mathfrak{X}| - 1 \Rightarrow \sum_{x \in X} p_x \geq |\mathfrak{X}| - 1 - \sum_{y \in \mathfrak{X} \setminus X} p_y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{x \in X} p_x \geq |\mathfrak{X}| - 1 - (|\mathfrak{X}| - |X|) \Rightarrow \sum_{x \in X} p_x \geq |X| - 1. \end{aligned}$$

Из (20) также следует, что для получения легитимного распределения требуется, чтобы все p_X были больше нуля, за исключением, может быть, $p_{\mathfrak{X}}$. Действительно, пусть для некоторого X , такого, что $1 < |X| < |\mathfrak{X}|$, вероятность p_X равна нулю, а все остальные вероятности, полученные с помощью ассоциативной функции (14), отличны от нуля. Из (17) и (20) следует, что $\sum_{x \in X} p_x = |X| - 1$. Добавим к множеству X любое событие y из $\mathfrak{X} \setminus X$. Тогда для множества $X \cup \{y\}$ из (20) получаем

$$|X| \leq \sum_{x \in X} p_x + p_y \leq |X| + 1 \Rightarrow |X| \leq |X| - 1 + p_y \leq |X| + 1 \Rightarrow 1 \leq p_y \leq 2,$$

что противоречит свойству вероятности $0 \leq p_y \leq 1$.

Рассмотрим ситуацию, когда $\sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x = |\mathfrak{X}| - 1$, т. е. $p_{\mathfrak{X}} = 0$. Из (20) следует, что все $p_X > 0$ для $X \subset \mathfrak{X}$. По формулам обращения Мёбиуса (4), используя принципы сет-суммирования [3], получим легитимное вероятностное распределение I рода:

$$\begin{aligned} p(X) &= 0 \text{ для всех } X \subset \mathfrak{X} \text{ мощности } |X| < |\mathfrak{X}| - 1, \\ p(\mathfrak{X} \setminus \{x\}) &= \sum_{y \in \mathfrak{X} \setminus \{x\}} p_y - |\mathfrak{X}| + 2 \text{ для всех } x \in \mathfrak{X}, \quad p(\mathfrak{X}) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Из теоремы 3 можно сделать следующий вывод: рекуррентное построение легитимного вероятностного распределения случайного множества событий с использованием ассоциативной функции (14) возможно только при выполнении определённых ограничений на входные вероятности событий. При этом возникают только три вида результирующих случайных множеств событий с соответствующими вероятностными распределениями:

- 1) случайное множество непересекающихся событий, если выполнено условие (15);
- 2) случайное множество событий, принимающее значения с ненулевой вероятностью лишь на подмножествах мощности $|\mathfrak{X}| - 1$ и $|\mathfrak{X}|$, если $|\mathfrak{X}| - 1 < \sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x \leq |\mathfrak{X}|$;
- 3) случайное множество событий, принимающее значения с ненулевой вероятностью лишь на подмножествах мощности $|\mathfrak{X}| - 1$, если $\sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x = |\mathfrak{X}| - 1$.

Заключение

Предложен новый подход к определению дискретного вероятностного распределения Π рода случайного множества на конечном множестве из N событий на основе заданной ассоциативной функции. Преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что для определения вероятностного распределения вместо полного набора 2^N вероятностей достаточно знать N вероятностей событий и вид ассоциативной функции. Данный подход продемонстрирован на примере трёх ассоциативных функций. Рассмотренные в работе функции хорошо известны и широко применяются как в нечёткой логике [8, 12, 13], так и в теории вероятностей [9–11]. Рекуррентное построение дискретного вероятностного распределения на основе данных ассоциативных функций привело к известным вероятностным распределениям случайных множеств событий с независимо-точечной (8), вложенной (13) и непересекающейся (18) структурой зависимостей, что подтверждает корректность предложенного подхода. Случайные множества с такими структурами зависимостей играют ключевую роль в теории случайных множеств событий, поскольку описывают «крайние» ситуации [15]. Стоит отметить, что предложенный рекуррентный подход с использованием ассоциативных функций (7) и (10) приводит всегда к одному из соответствующих легитимных вероятностных распределений случайного множества событий, в то время как рекуррентное построение легитимного вероятностного распределения случайного множества событий с использованием ассоциативной функции (14) возможно только при выполнении определённых ограничений на входные вероятности событий. При этом возникают только три вида результирующих случайных множеств событий с соответствующими вероятностными распределениями.

Перспективными представляются дальнейшие исследования характеристик построенных вероятностных распределений случайных множеств событий в зависимости от аргументов ассоциативных функций (7), (10), (14), а также изучение новых классов вероятностных распределений, построенных с использованием известных однопараметрических семейств ассоциативных функций, например Али — Михаэля — Хака, Франка и др. [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nguyen H. T.* An Introduction to Random Sets. Boca Raton: Taylor & Francis Group, LLC, 2006. 240 p.
2. *Ширяев А. Н.* Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2004. 519 с.
3. *Воробьев О. Ю., Воробьев А. О.* Суммирование сет-аддитивных функций и формула обращения Мёбиуса // Доклады РАН. 2009. Т. 336. № 4. С. 417–420.
4. *Semenova D. V.* On new notion of quasi-entropies of eventological distribution // Proc. Second IASTED Intern. Multi-Conf. Automation Control and Inform. Technology. Novosibirsk: ACTA PRESS, 2005. P. 380–385.
5. *Vorobyev O. Yu. and Lukyanova N. A.* Properties of the entropy of multiplicative-truncated approximations of eventological distributions // J. Siberian Federal University. Math. & Physics. 2011. V. 4. No. 1. P. 50–60.
6. *Semenova D. V. and Lukyanova N. A.* Random set decomposition of joint distribution of random variables of mixed type // Proc. IAM. 2012. V. 1. No. 2. P. 50–60.
7. *Semenova D. V. and Shangareeva L. Yu.* Associative Ali-Mikhail-Haq's random set // Proc. scientific-applied conf. «Statistics and its Applications». Tashkent: National University of Uzbekistan, 2013. P. 88–94.

8. *Alsina S., Frank M., and Schweizer B.* Associative Functions: Triangular Norms and Copulas. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. 237 p.
9. *Nelsen R. B.* An Introduction to Copulas (second edition). N.Y.: Springer Science+Business Media, Inc., 2006. 270 p.
10. *Menger K.* Statistical metrics // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1942. No. 8. P. 535–537.
11. *Schweizer B. and Sklar A.* Probabilistic Metric Spaces. N.Y.: North Holland, 1983. 275 p.
12. *Klement E. P., Mesiar R., and Pap E.* Triangular Norms. Boston: Kluwer Academic Pub., 2000. 220 p.
13. Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms / eds. E. P. Klement and R. Mesiar. Amsterdam: Elsevier, 2005. 481 p.
14. *Орлов А. И.* Нечисловая статистика. М.: МЗ-Пресс, 2004. 513 с.
15. *Goldenok E. E., Lukyanova N. A., and Semenova D. V.* Applications of wide dependence theory in eventological scoring // Proc. IASTED Intern. Conf. Automation Control and Inform. Technology, Control, Diagnostics, and Automation. Novosibirsk: ACTA Press Anaheim|Calgary|Zurich, 2010. P. 316–322.