

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2021

№ 69

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменшиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Робаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shragер, Ernst R. Shragер.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Алиев А.Р., Раджабов Ш.Ш. Разложение по собственным функциям магнитного оператора Шредингера в ограниченных областях	5
Зюзьков В.М. Сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю	15
Имомов А.А., Мейлиев А.Х. Об асимптотической структуре некритических марковских ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем	22
Смоленцев Н.К., Шагабудинова И.Ю. О парасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли	37

МЕХАНИКА

Ахметов А.Ж., Смолин И.Ю. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния якутско-вилуйской изверженной провинции для анализа геотектонических процессов в Сибирском кратоне	53
Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений	69
Бурцев А.Ю., Глаголев В.В., Маркин А.А. Исследование процесса локальной разгрузки элемента в конечноэлементном континууме	86
Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объеме	97
Матвиенко О.В., Архипов В.А., Золоторёв Н.Н. Аэродинамика турбулентного потока во вращающемся полузамкнутом цилиндре	114
Рогаев К.С., Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю. Исследование горения высокоплотных топлив в условиях модельной баллистической установки	127
Худойназаров Х.Х., Халмурадов Р.И., Ялгашев Б.Ф. Продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки с вязкой сжимаемой жидкостью	139
Янов Д.В., Зелепугин С.А. Численный расчет нежесткой дорожной одежды на прочность и сдвигоустойчивость методом конечных элементов	155
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	166

CONTENTS

MATHEMATICS

Aliev A.R., Rajabov Sh.Sh. Eigenfunction expansions of the magnetic Schrödinger operator in bounded domains.....	5
Zyuz'kov V.M. Congruences of the Fibonacci numbers modulo a prime.....	15
Imomov A. A. , Meyliev A. Kh. On the asymptotic structure of non-critical Markov stochastic branching processes with continuous time.....	22
Smolentsev N. K., Shagabudinova I.Y. On parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras.....	37

MECHANICS

Akhmetov A.Z., Smolin I. Yu. Numerical modeling the state of stress and strain of the Yakutsk-Vilyui large igneous province for the analysis of geotectonic processes in the Siberian Craton.....	53
Bakushev S. V. Differential equations of balanced continuum for planar deformation in cylindrical coordinates at bilinear approximation of closing equations.....	69
Burtsev A.Yu., Glagolev V.V., Markin A.A. Local unloading element process in finite element continuum.....	86
Win K.K., Temnov A.N. Nonlinear effects of oscillations of two immiscible liquids in a limited vessel.....	97
Matvienko O.V., Arkhipov V.A., Zolotarev N.N. Aerodynamics of turbulent flow in rotating semi-closed cylinder.....	114
Rogaev K.S., Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu. Research of high-density fuels combustion under the conditions of a model ballistic plant.....	127
Khudoynazarov Kh.Kh., Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. Longitudinal-radial vibrations of a elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid.....	139
Yanov D.V., Zelepugin S.A. Numerical strength and shear resistance computations for non-rigid road pavement by the finite element method.....	155
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	166

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958
DOI 10.17223/19988621/69/1

MSC 35J10, 35J25, 46E35, 34L10

А.Р. Алиев, Ш.Ш. Раджабов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Вводится магнитный оператор Шредингера, соответствующий обобщенной задаче Дирихле. Доказывается его самосопряженность и дискретность спектра в ограниченных областях в многомерном случае, а также базисность его собственных функций в пространстве Лебега и магнитном соболевском пространстве. Дается новая характеристика области определения магнитного оператора Шредингера. Исследуется существование и единственность решения магнитного уравнения Шредингера со спектральным параметром. Доказывается, что если спектральный параметр отличен от собственных значений, то первая обобщенная задача Дирихле имеет единственное решение. Находится условие разрешимости обобщенной задачи Дирихле при совпадении спектрального параметра с собственным значением магнитного оператора Шредингера.

Ключевые слова: магнитный оператор Шредингера, дискретный спектр, собственные значения и собственные функции, разложение по собственным функциям, теоремы существования и единственности решений.

1. Постановка задачи

Пусть G – ограниченная область в n -мерном пространстве R^n .

Рассмотрим в G магнитное выражение Шредингера

$$H_{a,V} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \right)^2 + V(x), \quad (1)$$

где $V(x)$ – вещественный электрический потенциал, $a(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$ – вещественный магнитный потенциал, $i = \sqrt{-1}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$.

В пространстве $L_2(G)$ введем симметрический оператор $H_{a,V}^0$ с областью определения $D(H_{a,V}^0) = C_0^\infty(G)$, порожденный выражением (1), т.е. действующий по правилу

$$H_{a,V}^0 \varphi(x) := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \right)^2 \varphi(x) + V(x) \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C_0^\infty(G),$$

где $C_0^\infty(G)$ (пространство основных функций) – совокупность всех бесконечно

дифференцируемых финитных в G функций. Замыкание оператора $H_{a,V}^0$ обозначим через $H_{a,V}^D$.

Цель работы – доказать дискретность спектра оператора $H_{a,V}^D$, получить разложение по собственным функциям этого оператора и применить полученные результаты к исследованию первой обобщенной задачи Дирихле для уравнения

$$H_{a,V}^D u(x) - \lambda u(x) = f(x) \quad (2)$$

в ограниченных областях пространства R^n , где λ – спектральный параметр. Отметим, что под первой обобщенной задачей Дирихле для уравнения (2) понимаем задачу нахождения такой функции $u(x)$ из класса $\overset{\circ}{W}_2^1(G)$, которая удовлетворяет уравнению (2) в смысле теории обобщенных функций в области G при $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}(G)$. Здесь через $\overset{\circ}{W}_2^{1,1}(G)$ обозначено сопряженное пространство к $\overset{\circ}{W}_2^1(G)$, являющееся замыканием пространства $C_0^\infty(G)$ в пространстве Соболева первого порядка $W_2^1(G)$.

В приложениях принципиальное значение имеет разложение по собственным функциям краевых задач для дифференциальных уравнений. В настоящее время существует несколько методов (см. [1]) доказательства полноты собственных функций. В настоящей работе доказывается полнота собственных функций оператора $H_{a,V}^D$ методом Грина.

2. Основные результаты

В пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(G) \times \overset{\circ}{W}_2^1(G)$ с помощью выражения (1) определим полуторалинейную форму

$$h_{a,V}(u, v) = \sum_{k=1}^n \int_G \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + ia_k(x)u(x) \right) \left(\frac{\partial \overline{v(x)}}{\partial x_k} - ia_k(x)\overline{v(x)} \right) dx + \int_G V(x)u(x)v(x) dx. \quad (3)$$

Обозначим через $H_{a,V}^F$ оператор, ассоциированный с формой (3).

Теорема 1. Пусть G – ограниченная область в R^n , функции $a_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеют непрерывные ограниченные в G частные производные первого порядка, а функция $V(x)$ – измеримая и ограниченная в G . Тогда оператор $H_{a,V}^D$ – существенно самосопряженный и справедливы равенства

$$H_{a,V}^D = H_{a,V}^F = G_\mu^{-1} + \mu E,$$

где G_μ – оператор Грина, который введен в работе [2], E – единичный оператор.

Доказательство. Существенно самосопряженность оператора $H_{a,V}^0$ следует из теоремы Ляйнфельдера–Зимадера (см. [3]). Самосопряженность оператора $H_{a,V}^F$ следует из теоремы Лакса-Мильграма (см. [4], [5] и [6, с. 16]) и теории расширения по Фридрихсу (см. [7]). Из теории расширения Фридрихса следует, что область определения оператора $H_{a,V}^F$ следующая:

$$D(H_{a,V}^F) = \left\{ \varphi(x) \in \overset{o}{W}_2^1(G) : H_{a,V}\varphi(x) \in L_2(G) \right\}.$$

Очевидно, что $H_{a,V}^D = H_{a,V}^F$, так как расширение Фридриха $H_{a,V}^F$ является единственным самосопряженным расширением симметрического оператора $H_{a,V}^0$. В работе [8] доказано, что оператор Грина G_μ является самосопряженным оператором в пространстве $L_2(G)$. Поэтому его обратный G_μ^{-1} также будет самосопряженным. Из определения оператора G_μ (см. [2]) следует, что для любого элемента из $L_2(G)$ существует функция из $\overset{o}{W}_2^1(G)$, такая, что $G_\mu^{-1}f = H_{a,V,\mu}u$ ($H_{a,V,\mu}$ определено в работе [2]). Тем самым, область определения и действия оператора $G_\mu^{-1} + \mu E$ следующие:

$$D(G_\mu^{-1} + \mu E) = \left\{ u(x) \in L_2(G) : u(x) \in \overset{o}{W}_2^1(G), H_{a,V}u \in L_2(G) \right\},$$

$$(G_\mu^{-1} + \mu E)u = H_{a,V}u, \quad u \in D(G_\mu^{-1} + \mu E).$$

Отсюда следует, что

$$G_\mu^{-1} + \mu E = H_{a,V}^D.$$

Следовательно,

$$H_{a,V}^D = H_{a,V}^F = G_\mu^{-1} + \mu E.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем оператор $H_{a,V}^D$ назовем магнитным оператором Шредингера, соответствующим первой обобщенной задаче Дирихле.

Теорема 2. Магнитный оператор Шредингера $H_{a,V}^D$, соответствующий первой обобщенной задаче Дирихле, имеет чисто дискретный спектр.

Доказательство. Самосопряженность и полуограниченность снизу оператора Грина G_μ в произвольной области доказана в работе [8]. Из теоремы Реллиха (см. [9, с. 183] или [10, с. 167]) следует, что если область G – ограниченная, то оператор G_μ является вполне непрерывным оператором. Обозначим через $R_{a,V}^D(\lambda)$ резольвенту оператора $H_{a,V}^D$. Для доказательства теоремы достаточно доказать,

что оператор $H_{a,V}^D$ имеет компактную резольвенту (см. [11] или [12, с. 269, теорема XIII.64]).

Пусть λ и ν – произвольные регулярные числа оператора $H_{a,V}^D$. Тогда имеет место следующее тождество Гильберта (см. [13, с. 136]):

$$R_{a,V}^D(\lambda) - R_{a,V}^D(\nu) = (\lambda - \nu)R_{a,V}^D(\lambda) \cdot R_{a,V}^D(\nu). \quad (4)$$

Если в тождестве Гильберта (4) число ν заменить произвольным числом μ из промежутка $(-\infty, \lambda_0)$ (число λ_0 определено в работе [2]) и учесть, что $R_{a,V}^D(\mu) = G_\mu$, то получим

$$R_{a,V}^D(\lambda) - G_\mu = (\mu - \lambda)R_{a,V}^D(\lambda) \cdot G_\mu. \quad (5)$$

Из вполне непрерывности оператора Грина G_μ и равенства (5) вытекает, что оператор $R_{a,V}^D(\lambda)$ – вполне непрерывный, так как пространство вполне непрерывных операторов образует идеал. Теорема доказана.

Обозначим через $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, собственные значения магнитного оператора $H_{a,V}^D$ и упорядочим их в порядке возрастания (с учетом их кратности)

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Из теории Фредгольма следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$.

Пусть $\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots$, – ортонормированные собственные функции оператора $H_{a,V}^D$, отвечающие собственным значениям $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$.

Имеет место следующая

Теорема 3. Система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(G)$.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что

$$H_{a,V}^D = G_\mu^{-1} + \mu E.$$

Из этого равенства и равенства

$$H_{a,V}^D \varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

следует, что $\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots$, являются также собственными функциями для оператора Грина G_μ , отвечающими собственным значениям $\left\{ \frac{1}{\lambda_k - \mu} \right\}_{k=1}^\infty$, т.е.

$$G_\mu \varphi_k(x) = \frac{1}{\lambda_k - \mu} \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Так как оператор Грина является вполне непрерывным положительно-определенным самосопряженным оператором, то система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ полна в $L_2(G)$. Из ортонормированности и полноты следует, что система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ образует базис в пространстве $L_2(G)$, т.е.

любую функцию $f(x)$ из пространства $L_2(G)$ единственным образом можно разложить по собственным функциям, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$$

и

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2.$$

Теорема доказана.

Используя теорему 3 дадим новую характеристику области определения оператора $H_{a,V}^D$.

Теорема 4. Для того чтобы функция $f(x) \in L_2(G)$ принадлежала области определения оператора $H_{a,V}^D$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, \varphi_k)|^2 < +\infty. \quad (7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ принадлежит области определения оператора $H_{a,V}^D$. Так как $D(H_{a,V}^D) = D(G_{\mu}^{-1})$, то существует функция $g(x)$ из пространства $L_2(G)$, которая $G_{\mu}g(x) = f(x)$. Из теоремы 3 следует, что функцию $g(x)$ можно разложить по собственным функциям $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. справедливо равенство

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, \varphi_k) \varphi_k(x),$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(g, \varphi_k)|^2 < +\infty. \quad (8)$$

Отсюда и из равенства (6) получим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, \varphi_k) \frac{1}{\lambda_k - \mu} \varphi_k(x).$$

С другой стороны, имеем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x).$$

Из базисности системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ следует, что

$$(f, \varphi_k) = (g, \varphi_k) \frac{1}{\lambda_k - \mu}. \quad (9)$$

Так как $\lambda_k \sim \lambda_k - \mu$ при $k \rightarrow \infty$, то из (8) и (9) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, \varphi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(g, \varphi_k)|^2 \cdot \frac{1}{|\lambda_k - \mu|^2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} |(g, \varphi_k)|^2 < +\infty.$$

Достаточность. Пусть $f(x) \in L_2(G)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, \varphi_k)|^2 < +\infty.$$

Докажем, что $f(x) \in D(H_{a,V}^D)$. Положим

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^k (f, \varphi_j) \varphi_j(x).$$

Тогда

$$H_{a,V}^D f_k(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (f, \varphi_j) \varphi_j(x).$$

Из (7) и теоремы 3 следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_{a,V}^D f_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j) \varphi_j(x).$$

Из замкнутости оператора $H_{a,V}^D$ следует, что $f(x) \in D(H_{a,V}^D)$ и

$$H_{a,V}^D f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j) \varphi_j(x).$$

Теорема доказана.

Теперь докажем, что система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ магнитного оператора Шредингера $H_{a,V}^D$, соответствующая первой обобщенной задаче Дирихле, образует ортогональный базис в пространстве $W_{a,V,\mu}^1(G)$ (пространство $W_{a,V,\mu}^1(G)$ введено в работе [2]).

Справедлива следующая

Теорема 5. Система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $H_{a,V}^D$ образует ортогональный базис в магнитном пространстве Соболева первого порядка $W_{a,V,\mu}^1(G)$.

Доказательство. Так как функции $\varphi_k(x)$, $k=1,2,\dots$, принадлежат области определения оператора $H_{a,V}^D$, то из теоремы 3.1 работы [2] следует, что $\varphi_k(x) \in W_{a,V,\mu}^1(G)$, $k=1,2,\dots$. Из равенства

$$\begin{aligned} (\varphi_l, \varphi_m)_{W_{a,V,\mu}^1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_G \left(\frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x_k} + i a_k(x) \varphi_l(x) \right) \left(\frac{\partial \overline{\varphi_m(x)}}{\partial x_k} - i a_k(x) \overline{\varphi_m(x)} \right) dx + \\ &+ \int_G (V(x) - \mu) \varphi_l(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \int_G \left((H_{a,V}^D - \mu E) \varphi_l(x) \right) \overline{\varphi_m(x)} dx = \\ &= \int_G (\lambda_k - \mu) \varphi_k(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = (\lambda_k - \mu) (\varphi_k, \varphi_m)_{L_2(G)} \end{aligned}$$

и ортогональности системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(G)$ следует, что если $l \neq m$, то $(\varphi_l, \varphi_m)_{W_{a,V,\mu}^1(G)} = 0$, т.е. система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна и в пространстве $W_{a,V,\mu}^1(G)$. Так как пространство $W_{a,V,\mu}^1(G)$ плотно вложено в $L_2(G)$, то из теоремы 3 следует, что система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $W_{a,V,\mu}^1(G)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Из теоремы 3.1 работы [2] следует, что система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $W_2^1(G)$.

Теперь, используя полученные результаты, исследуем существование и единственность решения первой обобщенной задачи Дирихле в ограниченных областях.

Теорема 6. Пусть G – ограниченная область в R^n , $f(x) \in L_2(G)$ и $\lambda \in C \setminus \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда первая обобщенная задача Дирихле имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ и число λ удовлетворяют условию теоремы. Из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2$$

и $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k - \lambda) = \infty$ следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \tag{10}$$

сходится в пространстве $L_2(G)$. Обозначим сумму ряда (10) через $u(x, \lambda)$, т.е. положим

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k) \varphi_k(x). \tag{11}$$

Докажем, что функция $u(x, \lambda)$, определенная по формуле (11), принадлежит пространству $W_2^1(G)$. Так как пространства $W_2^1(G)$ и $W_{a,V,\mu}^1(G)$ топологически эквивалентны (см. [2]), то достаточно доказать, что $u(x, \lambda) \in W_{a,V,\mu}^1(G)$. По теореме 5

система функций $\left\{ \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k - \mu}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в пространстве

$W_{a,V,\mu}^1(G)$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|u(x, \lambda)\|_{W_{a,V,\mu}^1(G)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(u, \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k - \mu}} \right)_{W_{a,V,\mu}^1(G)} \right|^2.$$

Из (11) имеем

$$(u, \varphi_k)_{L_2(G)} = \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k)_{L_2(G)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

и

$$(u, \varphi_k)_{W_{a,V,\mu}^1(G)} = \frac{\sqrt{\lambda_k - \mu}}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k)_{L_2(G)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Так как $\lambda_k - \mu \sim \lambda_k$ при $k \rightarrow \infty$, то из (12) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \cdot \frac{|(f, \varphi_k)_{L_2(G)}|^2}{|\lambda_k - \lambda|^2} < +\infty.$$

Следовательно, $u(x, \lambda) \in W_{a,V,\mu}^1(G)$.

Теперь докажем, что функция $u(x, \lambda)$ принадлежит области определения оператора $H_{a,V}^D$.

Из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2$$

и асимптотического равенства $\lambda_k^2 \sim (\lambda_k - \lambda)^2$ при $k \rightarrow \infty$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(u, \varphi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \frac{|(f, \varphi_k)_{L_2(G)}|^2}{|\lambda_k - \lambda|^2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 < +\infty. \quad (13)$$

Из (13) и теоремы 4 следует, что $u(x, \lambda) \in D(H_{a,V}^D)$. Применяя оператор $H_{a,V}^D - \lambda E$ к равенству (11), получим

$$\begin{aligned} (H_{a,V}^D - \lambda E)u(x, \lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k) (H_{a,V}^D - \lambda E)\varphi_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) = f(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В заключение исследуем существование решения первой обобщенной задачи Дирихле для уравнения

$$H_{a,V}^D u(x) - \lambda_{k_0} u(x) = f(x), \quad (14)$$

где λ_{k_0} – один из собственных значений оператора $H_{a,V}^D$, $f(x) \in L_2(G)$.

Пусть порядок собственного значения λ_{k_0} равен p_{k_0} . Выберем ортонормированный базис $\varphi_1^{(k_0)}(x), \varphi_2^{(k_0)}(x), \dots, \varphi_{p_{k_0}}^{(k_0)}(x)$ в собственном подпространстве $L_{\lambda_{k_0}}$.

Из теории Фредгольма (см. [6, с. 30]) следует, что верна следующая

Теорема 7. А) Для того чтобы первая обобщенная задача Дирихле для уравнения (14) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ортогональна собственным функциям $\varphi_1^{(k_0)}(x), \varphi_2^{(k_0)}(x), \dots, \varphi_{p_{k_0}}^{(k_0)}(x)$.

В) Если $f(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_1^{(k_0)}(x), \varphi_2^{(k_0)}(x), \dots, \varphi_{p_{k_0}}^{(k_0)}(x)$, то уравнение (14) имеет бесконечно много решений вида

$$u_{k_0}(x) = \sum_{\substack{j \\ \lambda_j \neq \lambda_{k_0}}} \frac{(f, \varphi_j)}{\lambda - \lambda_j} \varphi_j(x) + \sum_{i=1}^{p_{k_0}} c_i \varphi_i^{(k_0)}(x),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{p_{k_0}}$ – произвольные постоянные числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Круликовский Н.Н. Пути развития спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. Томск: ТГУ, 2008. 224 с.
2. Rajabov Sh.Sh. Generalized Dirichlet problems for magnetic Schrödinger operator // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2019. V. 45. No. 1. P. 111–118.
3. Leinfelder H., Simader C. Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials // Math. Z. 1981. V. 176. P. 1–19.
4. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Векторный метод конечных элементов. Новосибирск: НГТУ, 2001. 69 с.
5. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
6. Raymond N. Elements of spectral theory. Master. France, 2017. 61 p.
7. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003. 303 с.
8. Rajabov Sh.Sh. On the existence and uniqueness of the solution of Dirichlet generalized problem in arbitrary domain of n -dimensional space R^n for magnetic Schrödinger operator // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2020. V. 10. No. 1. P. 172–180.
9. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
10. Adams R.A., Fournier J.J. Sobolev Spaces. Amsterdam; Boston: Academic Press, 2003. 317 p.
11. Алиев А.Р., Эйвазов Э.Х. О дискретности спектра магнитного оператора Шредингера // Функциональный анализ и его приложения. 2012. Т. 46. № 4. С. 83–85.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
13. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1. Харьков: Изд-во Харьковского университета, Вища школа, 1977. 318 с.

Статья поступила 25.05.2020

Aliiev A.R., Rajabov Sh.Sh. (2021) EIGENFUNCTION EXPANSIONS OF THE MAGNETIC SCHRÖDINGER OPERATOR IN BOUNDED DOMAINS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 69. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/69/1

Keywords: magnetic Schrödinger operator, discrete spectrum, eigenvalues and eigenfunctions, eigenfunction expansions, theorems for existence and uniqueness of solutions.

In this work, we introduce the magnetic Schrödinger operator corresponding to the generalized Dirichlet problem. We prove its self-adjointness and discreteness of the spectrum in bounded domains in the multidimensional case. We also prove the basis property of its eigenfunctions in the Lebesgue space and in the magnetic Sobolev space. We give a new characteristic of the definition domain of the magnetic Schrödinger operator. We investigate the

existence and uniqueness of a solution of the magnetic Schrödinger equation with a spectral parameter. It is proved that if the spectral parameter is different from the eigenvalues, then the first generalized Dirichlet problem has a unique solution. We then find the solvability condition for the generalized Dirichlet problem when the spectral parameter coincides with the eigenvalue of the Schrödinger magnetic operator.

AMS Mathematics Subject Classification: 35J10, 35J25, 46E35, 34L10.

Araz R. ALIEV (Doctor of Sciences on Mathematics, Professor of Azerbaijan State Oil and Industry University; Senior Research Associate of Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku city, Azerbaijan). E-mail: alievaraz@yahoo.com, alievaraz@asoiu.edu.az

Shahin Sh. RAJABOV (PhD student of Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku city, Azerbaijan). E-mail: shahin.racabov.88@mail.ru

REFERENCES

1. Krulikovskiy N.N. (2008) *Puti razvitiya spectral'noy teorii obyknovennykh differentsial'nykh operatorov*. [Ways of development of the spectral theory of ordinary differential operators]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Rajabov Sh.Sh. (2019) Generalized Dirichlet problems. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*. 45(1). pp. 111–118.
3. Leinfelder H., Simader C. (1981) Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials. *Mathematische Zeitschrift*. 176(1). pp. 1–19.
4. Balandin M.Yu., Shurina E.P. (2001) *Vektorny metod konechnykh elementov* [Vector finite element method]. Novosibirsk: NSTU.
5. Gilbarg D., Trudinger N.S. (1983) *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer-Verlag.
6. Raymond N. (2017) *Elements of spectral theory*. Access mode: <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01587623v2/document>.
7. Shubin M.A. (2003) *Leksii ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki*. [Lectures on equations of mathematical physics]. Moscow: MCCME.
8. Rajabov Sh.Sh. (2020) On the existence and uniqueness of the solution of Dirichlet generalized problem in arbitrary domain of n -dimensional space R^n for magnetic Schrödinger operator. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 10(1). pp. 172–180.
9. Mizohata S. (1973) *The Theory of Partial Differential Equations*. New York: Cambridge University Press.
10. Adams R.A., Fournier J.J. (2003) *Sobolev Spaces*. Amsterdam; Boston: Academic Press.
11. Aliev A.R., Eyvazov E.H. (2012) On the discreteness of the spectrum of the magnetic Schrödinger operator. *Functional Analysis and its Applications*. 46(4). pp. 305–307.
12. Reed M., Simon B. (1978) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators*. New York: Academic Press.
13. Akhiezer N.I., Glazman I.M. (1977) *Teoriya lineynykh operatorov v gil'bertovom prostranstve*. [Theory of linear operators in the Hilbert space]. Vol. 1. Kharkov: Izd-vo Khar'kovskogo universiteta, Vishcha shkola. 318 p.

Received: May 25, 2020

В.М. Зюзьков

СРАВНЕНИЯ С ЧИСЛАМИ ФИБОНАЧЧИ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ

Доказываются сравнения вида $F(expr) \equiv \varepsilon F(expr) \pmod{p}$, где p – простое число, ε равно 1 или -1 , в общем случае выражение $expr$ есть произвольный многочлен от p и $expr$ – более простое выражение, не содержащее p . Пример доказанной теоремы: пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем $F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}$. В частности, рассматривается случай, когда коэффициенты многочлена $expr$ образуют период Пизано по модулю p . Для поиска сравнений, имеющих место, проводились эксперименты в системе *Mathematica*.

Ключевые слова: числа Фибоначчи, сравнения по простому модулю, период Пизано, система *Mathematica*.

Почти все результаты, доказанные в этой статье, первоначально были обнаружены в рамках экспериментальной математики [2] с помощью системы *Mathematica* с языком программирования *Wolfram* [1, 2]. Эксперименты помогли сформулировать цепочки достоверных догадок, доказать которые оказалось уже нетрудно. Кроме того, *Mathematica* применялась для получения примеров, иллюстрирующих изложение.

Через $F(n)$ будем обозначать числа Фибоначчи. Следуя [3], считаем $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, и для отрицательных индексов доопределяем числа Фибоначчи с помощью правила

$$F(-n) = (-1)^{n-1} F(n). \quad (1)$$

Это равенство остается в силе и когда n меняет свой знак. Теперь для любого целого n имеем $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$.

Мы начинаем с известных фундаментальных фактов ([4, с. 78–79] или [2, с. 232]). В дальнейшем до конца статьи через p обозначаются положительные простые числа.

Лемма 1.

- а) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(p) \equiv 1 \pmod{p}$.
- б) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(p) \equiv -1 \pmod{p}$.
- с) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$.
- д) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(p+1) \equiv 0 \pmod{p}$.

Отсюда, используя определение чисел Фибоначчи, сразу следует, что

- е) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(p+1) \equiv 1 \pmod{p}$.
- ф) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(p-1) \equiv 1 \pmod{p}$.

Теорема 1. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$ и b – целое число. Тогда имеем

$$F(p+b) \equiv F(b+1) \pmod{p}. \quad (2)$$

Доказательство. Будем рассматривать два различных случая.

1. Случай $p+b \geq 0$. Будем использовать математическую индукцию по возрастанию b . Базис индукции составляют два сравнения для $b=0$: $F(p+0) \equiv F(0+1) \times$

$\times (\text{mod } p)$ – это лемма 1(a); и для $b = 1$: $F(p + 1) \equiv F(1 + 1) (\text{mod } p)$ – это лемма 1(e). Докажем индуктивный переход. Пусть выполнено $F(p + b) \equiv F(b + 1) (\text{mod } p)$ и $F(p + (b + 1)) \equiv F((b + 1) + 1) (\text{mod } p)$ и почленно сложим эти сравнения, что дает

$$F(p + b) + F(p + (b + 1)) \equiv F(b + 1) + F((b + 1) + 1) (\text{mod } p).$$

Суммы последовательных чисел Фибоначчи в последнем сравнении дают необходимое заключение

$$F(p + (b + 2)) \equiv F((b + 2) + 1) (\text{mod } p).$$

2. Случай $p + b \leq 0$. Теперь $b \leq 0$ и математическая индукция будет по убыванию b . Базис индукции составляют два сравнения для $b = 0$: $F(p + 0) \equiv F(0 + 1) (\text{mod } p)$ – это лемма 1(a); и для $b = -1$: $F(p - 1) \equiv F(-1 + 1) (\text{mod } p)$ – это лемма 1(c). Докажем индуктивный переход. Пусть выполнены сравнения $F(p + b) \equiv F(b + 1) (\text{mod } p)$ и $F(p + (b - 1)) \equiv F((b - 1) + 1) (\text{mod } p)$ и почленно вычтем эти сравнения, что дает

$$F(p + b) - F(p + (b - 1)) \equiv F(b + 1) - F((b - 1) + 1) (\text{mod } p).$$

Разности последовательных чисел Фибоначчи в последнем сравнении дают необходимое заключение

$$F(p + (b - 2)) \equiv F((b - 2) + 1) (\text{mod } p).$$

Таким образом, сравнение (2) доказано. ■

Следствие 1. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$ и b – целое число. Тогда имеем

$$F(-p + b) \equiv F(b - 1) (\text{mod } p). \quad (3)$$

Доказательство. Имеем $F(-p + b) = (-1)^{-p+b-1} F(p - b)$ и, учитывая (1), (2) и нечетность p , получаем сравнение $F(-p + b) \equiv (-1)^b F(1 - b) (\text{mod } p)$. Снова применяя (1), получаем $(-1)^b F(1 - b) = (-1)^b (-1)^{1-b-1} F(b - 1) = F(b - 1)$, что дает (3). ■

Сейчас исследуем, какое сравнение по модулю p выполнено для $ap + b$, где a – произвольное целое число. Несколько вычислений с небольшими a , b и p приводят к предположению, что $F(ap + b) \equiv F(a + b) (\text{mod } p)$. Проведем более серьезную экспериментальную проверку этого предположения.

Сначала создадим список ps простых чисел вида $p \equiv \pm 1 (\text{mod } 5)$ и не превосходящих простого числа с номером 200.

```
ps = Select[Prime[Range[200]], Mod[#, 5] == 1 || Mod[#, 5] == 4&];
```

Можно посмотреть на начало и конец этого списка, пропуская 76 чисел:

```
Short[ps]
```

```
{11, 19, 29, 31, 41, 59, 61, 71, 79, <<76>>, 1061, 1069, 1091, 1109, 1129, 1151, 1171, 1181, 1201}
```

Далее тысячу раз будем генерировать пары a и b в диапазоне от -50 до 50 включительно. И для каждой пары будем перебирать все простые числа p из списка ps и выдавать булевское значение, говорящее о делимости $F(ap + b) - F(a + b)$ на p . Каждый раз берем конкатенацию этих значений. Все результаты тысячи конкатенаций собираем также в один список ss и делаем окончательную конкатенацию.

```
ss = {}; Do[a = RandomInteger[{-50, 50}]; b = RandomInteger[{-50, 50}]; AppendTo[ss, And@@(Divisible[Fibonacci[a # + b] - Fibonacci[a + b], #] & /@ ps), 1000]; And @@ ss
True
```

Результат True говорит о том, что предположение оказалось верным для всей тысячи вариантов.

Теорема 2. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$ и a, b – целые числа. Тогда имеем

$$F(ap + b) \equiv F(a + b) \pmod{p}. \quad (4)$$

Доказательство. Для $a = 0$ сравнение очевидно. Рассмотрим еще два случая.

1. $a > 0$. Доказательство будем проводить математической индукцией по возрастанию a . Базис индукции при $a = 1$ доказан в теореме 1. Для индуктивного шага предположим, что сравнение (4) выполнено для ap плюс любое целое число. Тогда $F((a + 1)p + b) = F(ap + (p + b)) \equiv F(a + (p + b)) \pmod{p}$. Далее имеем $F(a + (p + b)) = F(p + (a + b)) \equiv$ (по теореме 1) $F(a + 1 + b) \pmod{p}$. Таким образом, доказано сравнение (4) для $a + 1$.

2. $a < 0$. Доказательство будем проводить математической индукцией, уменьшая a . Базис индукции при $a = -1$ доказан в следствии 1. Для индуктивного шага предположим, что сравнение (4) имеет место для ap плюс любое целое число. Тогда $F((a - 1)p + b) = F(ap + (-p + b)) \equiv F(a + (-p + b)) \pmod{p}$. Далее получаем $F(a + (-p + b)) = F(-p + (a + b)) \equiv$ (по следствию 1) $F(a - 1 + b) \pmod{p}$. Таким образом, доказано сравнение (4) для $a - 1$. ■

Теорема 3. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}. \quad (5)$$

Доказательство. Сначала докажем, что для целых чисел $n \geq 1$, a и b выполнено

$$F(ap^n + b) \equiv F(a + b) \pmod{p}. \quad (6)$$

Будем проводить математическую индукцию по n . Базис индукции для $n = 1$ доказан в теореме 2. Пусть (6) выполнено для некоторого n . Докажем выполнимость (6) для $n + 1$. Имеем равенство $F(ap^{n+1} + b) = F((ap^n)p + b)$ и снова в силу теоремы (2) получаем $F((ap^n)p + b) \equiv F(ap^n + b) \pmod{p}$. Используя индуктивное предположение, получаем требуемое сравнение $F(ap^{n+1} + b) \equiv F(a + b) \pmod{p}$.

Для доказательства утверждения (5) обозначим для любого натурального m , $k \geq m \geq 0$, через $B_m(x)$ многочлен с коэффициентами $a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$. Имеем $B_m(x) = a_m p^m + B_{m-1}(x)$, и тогда из (6) следует, что $F(B_m(p)) = F(a_m p^m + B_{m-1}(p)) \equiv F(B_{m-1}(p) + a_m) \pmod{p}$. Повторяя это преобразование до $m = 1$, получаем (5).

Следствие 2. Пусть N – натуральное число, которое в p -ичной системе счисления имеет цифры $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$. Тогда $F(N) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \times \pmod{p}$.

Перейдем к рассмотрению свойств, аналогичных свойствам, описанным в теоремах 1–3, для нечетных простых чисел вида $5t \pm 2$.

Формулировка следующей теоремы возникла после экспериментальной проверки для $b \in [-1000, 1000]$ и для всех простых чисел вида $5t \pm 2$ с порядковыми номерами, не превосходящими 1000.

Теорема 4. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 2$ и b – целое число. Тогда имеем

$$F(p + b) \equiv -F(b - 1) \pmod{p}. \quad (7)$$

Доказательство. Это доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Будем рассматривать два различных случая.

1. Случай $p + b \geq 0$. Будем использовать математическую индукцию по возрастанию b . Базис индукции составляют два сравнения для $b = 0$: $F(p + 0) \equiv \equiv -F(0 - 1) \pmod{p}$ – это лемма 1(b); и для $b = 1$: $F(p + 1) \equiv -F(1 - 1) \pmod{p}$ – это лемма 1(d). Докажем индуктивный переход. Пусть выполнены сравнения

$F(p + b) \equiv -F(b - 1) \pmod{p}$ и $F(p + (b + 1)) \equiv -F((b + 1) - 1) \pmod{p}$, что после почленного сложения получаем

$$F(p + b) + F(p + (b + 1)) \equiv -F(b - 1) - F((b + 1) - 1) \pmod{p}.$$

Суммы последовательных чисел Фибоначчи в последнем сравнении дают необходимое заключение $F(p + (b + 2)) \equiv -F((b + 2) - 1) \pmod{p}$.

2. Случай $p + b \leq 0$. Теперь $b \leq 0$ и математическая индукция будет по убыванию b . Базис индукции составляют сравнения: для $b = 0$ имеем $F(p + 0) \equiv -F(0 - 1) \times \pmod{p}$ – это лемма 1(b); и для $b = -1$ имеем $F(p - 1) \equiv -F(-1 - 1) \pmod{p}$ – это лемма 1(f). Докажем индуктивный переход. Пусть выполнены сравнения $F(p + b) \equiv -F(b - 1) \pmod{p}$ и $F(p + (b - 1)) \equiv -F((b - 1) - 1) \pmod{p}$ и почленное сложение этих сравнений дает

$$F(p + b) + F(p + (b - 1)) \equiv -F(b - 1) - F((b - 1) - 1) \pmod{p}.$$

Суммы последовательных чисел Фибоначчи в последнем сравнении дают необходимое заключение $F(p + (b + 1)) \equiv -F(b) \pmod{p}$. Таким образом, сравнение (7) доказано. ■

Следствие 3. Пусть нечетное простое p имеет вид $5t \pm 2$ и b – целые числа. Тогда имеем

$$F(-p + b) \equiv -F(b + 1) \pmod{p}. \quad (8)$$

Доказательство. Применяя (1), имеем $F(-p + b) = (-1)^{-p+b-1} F(p - b) = (-1)^b F(p - b)$, учитывая нечетность p . Поэтому сравнение (7) дает $F(-p + b) \equiv (-1)^{b+1} F(-b - 1) \times \pmod{p}$. Наконец, снова применяя (1), получаем $F(-p + b) \equiv -F(b + 1) \pmod{p}$. ■

Сейчас исследуем, какое сравнение по модулю p выполнено для $F(ap + b)$, где p – нечетное простое и имеет вид $5t \pm 2$, и a, b – целые числа. Эксперименты с различными числами a, b и p привели к предположению, что $F(ap + b) \equiv (-1)^a \times F(b - a) \pmod{p}$. Была проделана ниже описанная проверка этого предположения в системе *Mathematica*.

Создан список ps простых чисел вида $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$ и не превосходящих простого числа с номером 200.

```
ps = Select[Prime[Range[200]], Mod[#, 5] == 2 || Mod[#, 5] == 3 &];
```

Можно посмотреть на начало и конец этого списка, пропуская 86 чисел:

```
Short[ps]
```

```
{3, 7, 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, <<86>>, 1117, 1123, 1153, 1163, 1187, 1193, 1213, 1217, 1223}
```

Далее тысячу раз генерируются пары случайных чисел a и b в диапазоне от -50 до 50 включительно. И для каждой пары перебираются все простые числа p из списка ps и выдается булевское значение, говорящее о делимости $F(ap + b) - (-1)^a F(b - a)$ на p . Вычисляется конкатенация этих значений. Все результаты тысячи конкатенаций собираются также в один список ss и делается окончательная конкатенация.

```
ss = {}; Do[a = RandomInteger[{-50, 50}]; b = RandomInteger[{-50, 50}]; AppendTo[ss, And@@(Divisible[Fibonacci[a # + b] - (-1)^a Fibonacci[b - a], #] & /@ ps)], 1000]; And @@ ss
```

```
True
```

Результат True говорит о том, что предположение оказалось верным для всей тысячи вариантов. Догадываясь, какой вид имеет искомое сравнение, нетрудно привести доказательство.

Теорема 5. Пусть нечетное простое p имеет вид $5t \pm 2$ и $a \neq 0$, b – целые числа. Тогда имеем

$$F(ap + b) \equiv (-1)^a F(b - a) \pmod{p}. \quad (9)$$

Доказательство. Если $a = 0$, то обе части в (9) совпадают. Сравнение (9) для случая $a > 0$ докажем методом математической индукции. Базис индукции при $a = 1$ выполнен по теореме 4. Пусть по индуктивному предположению сравнение (9) выполнено для $a = n$ и для любого b . Тогда $F((n + 1)p + b) = F(np + p + b) \equiv (-1)^n F(p + b - n) \pmod{p}$ и по теореме 4 следует, что $(-1)^n F(p + b - n) \equiv (-1)^n (-1) F(b - n - 1) \pmod{p}$. Правая часть последнего сравнения равна $(-1)^{n+1} F(b - (n + 1))$, что доказывает индуктивный шаг.

Теперь рассмотрим $a < 0$. С помощью (1) переходим к положительному множителю перед p : $F(ap + b) = (-1)^{ap+b-1} F(-ap - b) \equiv (-1)^{ap+b-1} (-1)^{-a} F(-b + a) \pmod{p}$. В правой части сравнения снова применяем (1), получаем $(-1)^{ap+b-1} (-1)^{-a} \times (-1)^{-b+a-1} F(b - a) = (-1)^{ap} F(b - a)$ и имеем $(-1)^{ap} = (-1)^a$ для нечетного p . На этом доказательство (9) заканчиваем. ■

Теорема 6. Пусть нечетное простое p имеет вид $5t \pm 2$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv (-1)^R F(S) \pmod{p}, \text{ где } S = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i, R = \sum_{i=0}^k i a_i. \quad (10)$$

Доказательство. Сначала докажем, что для целых чисел $m \geq 0$, $a \neq 0$ и b выполнено

$$F(ap^m + b) \equiv (-1)^{am} F(b + (-1)^m a) \pmod{p}. \quad (11)$$

Базис математической индукции при $m = 0$ очевидно выполнен. Пусть по индуктивному предположению (11) выполнено для $m = n$ для любого a и b . Тогда по теореме 5 имеем сравнение $F(ap^{n+1} + b) = F((ap^n)p + b) \equiv (-1)^a F(b - ap^n) \pmod{p}$, так как четности чисел ap^n и a совпадают. Далее, применяя индуктивное предположение, получаем сравнение $(-1)^a F(b - ap^n) \equiv (-1)^a (-1)^{-an} F(b + (-1)^n (-a)) \pmod{p}$. Но правая часть сравнения равна $(-1)^{a(n+1)} F(b - (-1)^{n+1} a)$, поскольку $1 - n$ и $n + 1$ имеют одинаковую четность. Что и доказывает индуктивный шаг.

Для доказательства утверждения (10) обозначим для любого натурального m , с условием $k \geq m \geq 0$, через $B_m(x)$ многочлен с коэффициентами $a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$. Имеем

$$B_m(x) = a_m p^m + B_{m-1}(x) \quad (12)$$

и, таким образом, из (11) следует, что

$$F(B_m(p)) = F(a_m p^m + B_{m-1}(p)) \equiv (-1)^{a_m m} F(B_{m-1}(p) + (-1)^m a_m) \pmod{p}.$$

Повторно применяя (12) и (11), получаем

$$F(B_m(p)) \equiv (-1)^{a_m m} (-1)^{a_{m-1}(m-1)} F(B_{m-2}(p) + (-1)^m a_m + (-1)^{m-1} a_{m-1}) \pmod{p}.$$

Этот процесс будем повторять, пока не дойдем до $m = 1$. Окончательно, получаем

$$F(B_m(p)) \equiv (-1)^{R_m} F(S_m) \pmod{p}, \text{ где } S_m = \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i, R_m = \sum_{i=0}^m i a_i.$$

При замене m на k имеем (10). ■

Пример. Пусть $A(x) = 6x^4 + 16x^3 + 13x^2 - 7x - 275$.

Тогда $R = 6 \cdot 4 + 16 \cdot 3 + 13 \cdot 2 - 7 = 107$, $S = 6 - 16 + 13 + 7 - 275 = -265$.

Возьмем $p = 13$.

Вычислим значение многочлена $A(p)$:

$$A = 6x^4 + 16x^3 + 13x^2 - 7x - 275;$$

$$A /. x \rightarrow 13$$

$$208349$$

Оценим количество десятичных цифр в числе $F(208349)$.

$$\text{Length}[\text{IntegerDigits}[\text{Fibonacci}[208349]]]$$

$$43543$$

Значения левой и правой частей сравнения (10) совпали по модулю 13.

$$\{\text{Mod}[\text{Fibonacci}[208349], 13], \text{Mod}[-\text{Fibonacci}[-265], 13]\}$$

$$\{1, 1\}$$

Сравнения (5) и (10) приводят к следствиям, связанным с понятием периода Пизано. Последовательность чисел Фибоначчи $\{F(n)\}$ по модулю является периодической для любого модуля m и соответствующий период называется периодом Пизано и его длина обозначается как $\pi(m)$ [5]. Например, для $m = 5$ в последовательности $\{F(n)\} \bmod 5$ повторяющейся подпоследовательностью является период Пизано $\{0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2\}$ и $\pi(5) = 20$. По определению периода Пизано для любого целого n и любого модуля m имеет место сравнение

$$F(n) \equiv F(n \bmod \pi(m)) \pmod{m}, \quad (13)$$

где внутренний “mod” обозначает операцию нахождения остатка от целочисленного деления.

Следствие 4. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$, натуральное $k > 0$ и целые числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ образуют период Пизано длиной $k + 1$ для чисел Фибоначчи по модулю p . Положим $s = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k$ и $A(x)$ – многочлен степени k с коэффициентами a_i . Тогда имеет место сравнение

$$F(s) \equiv F(A(p) \bmod (k + 1)) \pmod{p}. \quad (14)$$

Доказательство сразу следует из сравнений (5) и (13) при $m = p$ и $n = A(p)$.

Следствие 5. Пусть нечетное простое p имеет вид $5t \pm 2$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ образуют период Пизано длиной $k + 1$ для чисел Фибоначчи по модулю p . Положим $A(x)$ – многочлен степени k с коэффициентами a_i . Обозначим через S, R и ε выражения

$$S = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i, R = \sum_{i=0}^k i a_i \text{ и } \varepsilon = (-1)^R.$$

Тогда имеем

$$\varepsilon F(S) \equiv F(A(p) \bmod (k + 1)) \pmod{p}. \quad (15)$$

Доказательство сразу следует из сравнений (10) и (13) при $m = p$ и $n = A(p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolfram Mathematica*. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
2. Зюзьков В.М. Эксперименты в теории чисел. Томск: Изд-во НТЛ, 2019. 348 с. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000658998>
3. Грэхем Р., Кнут Д., Поташник О. Конкретная математика. Основание информатики. 2-е изд., испр. М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 703 с.
4. Vajda S. *Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section: Theory and Applications*, Ellis Horwood, Chichester, England, 1989. 190 p.
5. Weisstein Eric W. *Wolfram MathWorld: Pisano Period*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/PisanoPeriod.html>

Статья поступила 06.07.2020

Zyuz'kov V.M. (2021) CONGRUENCES OF THE FIBONACCI NUMBERS MODULO A PRIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics] 69. pp. 15–21

DOI 10.17223/19988621/69/2

Keywords: Fibonacci numbers, congruences modulo a prime number, Pisano period, Mathematica system.

Congruences of the form $F(expr) \equiv \varepsilon F(expr) \pmod{p}$ modulo a prime p are proved, where $expr$ is a polynomial with respect to p . The value of ε equals 1 or -1 and $expr$ does not contain p . An example of such a theorem is as follows: given a polynomial $A(p)$ with integer coefficients $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ and with respect to p of form $5t \pm 2$; then, $F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}$. In particular, we consider the case when the coefficients of the polynomial $expr$ form a Pisano period modulo p . To search for existing congruences, experiments were performed in the Wolfram Mathematica system.

AMS Mathematical Subject Classification:

Valentin M. ZYUZ'KOV (Senior Researcher, Associate Professor of chair of Computational Mathematics and Computer Modeling, Tomsk State University, Professor of chair of computer systems in control and design of the Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vmz@math.tsu.ru

REFERENCES

1. *Wolfram Mathematica*. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
2. Zyuz'kov V.M. (2019) *Eksperimenty v teorii chisel* [Experiments in the number theory]. Tomsk: Izd-vo NTL. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000658998>
3. Graham R., Knut D., Patashnik O. (2006) *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley.
4. Vajda S. (1989) *Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section: Theory and Applications*. Chichester: Ellis Horwood.
5. Weisstein E.W. *Wolfram MathWorld: Pisano Period*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/PisanoPeriod.html>.

Received: July 6, 2020

А.А. Имомов, А.Х. Мейлиев

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ НЕКРИТИЧЕСКИХ
МАРКОВСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ**

Работа посвящена исследованию переходных вероятностей Марковских ветвящихся случайных процессов непрерывного времени при минимальных моментных условиях. Рассмотрим некритический случай, т.е. случай, когда средняя плотность интенсивности превращения частиц не равна нулю. Найдем асимптотическое представление для переходных вероятностей без дополнительных моментных условий. Для нахождения конечного предельного инвариантного распределения мы ограничиваемся условием конечности момента типа $\mathbb{E}[x \ln x]$ для плотности превращения частиц. Утверждение об асимптотическом представлении вероятностной производящей функции (Основная Лемма) исследуемого процесса и ее дифференциальный аналог будут лежать в основе наших выводов. При этом существенно применяется теория правильно меняющихся функций в смысле Карамата.

Ключевые слова: марковский ветвящийся процесс, правильно меняющиеся функции, Основная лемма, переходные вероятности, инвариантные распределения.

1. Введение

Модели ветвящихся случайных процессов являются наиболее подходящими, среди всех остальных, для многих природных и технических явлений, связанных с развитием численности популяции частиц. Процесс Гальтона – Ватсона (Г-В) с дискретным временем представляет собой простейший ветвящийся процесс, в котором последовательность числа поколений определяет однородную цепь Маркова, а закон превращения частиц не зависит от времени и наличия других частиц. К настоящему времени существует множество моделей ветвящихся процессов, которые являются модификациями или обобщениями процесса Г-В; см. [1]. Прямое обобщение модели процесса Г-В приводит к так называемому процессу Беллмана – Харриса, в котором время жизни всех частиц имеет некоторый произвольный закон распределения $G(t)$. Этот процесс впервые рассмотрен в работе [2] в 1948 году. Позднее, в 1964 году, Б.А. Севастьянов [3] построил модель несколько более общую, чем в [2], распространяя процесс Беллмана – Харриса на случай с несколькими типами частиц и определяя вероятность их превращения, зависящую от их возраста; см. также [4, гл. 8]. Еще одна модификация модели Г-В, это – модель ветвящихся процессов в случайной среде. Эта модель была введена в работе В. Смита и В. Вилкинсона [5] для случая среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. В настоящее время благодаря исследованиям В.А. Ватутина и его коллег и учеников, теория ветвящихся процессов в случайной среде продолжает интенсивно развиваться (см. [6–11]).

Развитие общей теории ветвящихся случайных процессов связано с одной стороны востребованностью углубленного исследования классических моделей и, с другой стороны, характеризуется открытием новых моделей, глубоко и наглядно описывающих суть изучаемых реальных явлений. В этой связи, исследование по улучшению имевшихся результатов в рамках классических моделей и установление новых, наиболее соответствующих объективным условиям, представляет определенное значение.

В настоящей работе мы рассмотрим классическую модель ветвящегося процесса, называемого Марковским однородным ветвящимся случайным процессом непрерывного времени, в котором распределение продолжительности жизни частицы $G(t)$ представляет собой экспоненциальный закон (см. [4, с. 28]).

Пусть в некоторой системе имеется популяция частиц одного типа, способных гибнуть и превращаться в случайное число частиц того же типа. Определим процесс эволюции численности этих частиц, развивающийся по следующей схеме. Случайная функция $Z(t)$ обозначает число частиц в момент времени $t \in \mathcal{T} = [0, +\infty)$. Каждая существующая в момент t частица, независимо от своей предыстории и от наличия других частиц, за малый промежуток времени $(t, t + \varepsilon)$ (при $\varepsilon \downarrow 0$) превращается в $j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ частиц с вероятностью $a_j \varepsilon + o(\varepsilon)$, где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$; с вероятностью $1 + a_1 \varepsilon + o(\varepsilon)$ частица продолжает жить или производит ровно одного потомка. Здесь числа $\{a_j, j \in \mathbb{N}_0\}$ – локальные плотности, которые указывают на интенсивности превращения частиц, причем они удовлетворяют соотношению

$$0 < a_0 < -a_1 = \sum_{j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}} a_j < \infty.$$

Появившиеся новые частицы претерпевают превращения по такому же случайному закону. Вышеопределенный процесс называется Марковским ветвящимся случайным процессом (МВП) и семейство случайных величин $\{Z(t), t \in \mathcal{T}\}$ образует однородную цепь Маркова с пространством состояний $S_0 = \{0\} \cup S$, где $S \subset \mathbb{N}$ (см. [4]). В последних обозначениях мы отметили, что состояние рассматриваемой цепи $\{Z(t)\}$ можно разделить на два класса: $\{0\}$ – единственное поглощающее состояние и S – класс всех сообщающихся состояний.

Частицы, участвующие в процессе, в зависимости от контекста, могут быть представлены животными в биологических задачах, элементарными частицами в ядерной физике, людьми в задачах демографии и т.д. А.Н. Колмогоров, одним из первых, обратил внимание на возможность применения теории МВП в биологических задачах в работе [12], опубликованной еще в 1938 в Известиях НИИ Томского университета.

Определим условную вероятность $\mathbb{P}_i\{*\} := \mathbb{P}\{* | Z(0) = i\}$ при условии, что в начальный момент в системе имеются ровно $i \in S$ частиц. Известно, что переходные вероятности $\mathbf{p}_{ij}(t) = \mathbb{P}_i\{Z(t) = j\}$ удовлетворяют для любых $i, j \in S$ условию ветвления (см. [4, с. 13])

$$\mathbf{p}_{kj}(t) = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_k = j} \mathbf{p}_{1j_1}(t) \cdot \mathbf{p}_{1j_2}(t) \cdot \dots \cdot \mathbf{p}_{1j_k}(t).$$

Из этого следует, что для изучения эволюции процесса $\{Z(t), t \in \mathcal{T}\}$ достаточно определить вероятности $p_j(t) := p_{1j}(t)$. Эти вероятности, в свою очередь, задаются с помощью локальных плотностей $\{a_j\}$ соотношением

$$p_j(\varepsilon) = \delta_{1j} + a_j \varepsilon + o(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \downarrow 0, \quad (1.1)$$

где δ_{ij} – знак Кронекера; $a_j = p'_j(0+)$. Из соотношения (1.1) следует, что для вероятностной производящей функции (ПФ) $F(t; s) := \sum_{j \in \mathcal{S}_0} p_j(t) s^j$ имеет место следующее представление:

$$F(\tau; s) = s + f(s) \cdot \tau + o(\tau) \text{ при } \tau \downarrow 0$$

для всех $s \in [0, 1)$, где $f(s) := \sum_{j \in \mathcal{S}_0} a_j s^j$ – ПФ интенсивностей превращения частиц; см. [4, с. 26].

Предполагая конечности ряда $\sum_{j \in \mathcal{S}} j a_j$, введем обозначение

$$m := \sum_{j \in \mathcal{S}} j a_j = f'(1-).$$

Параметр m – средняя плотность интенсивности превращения частиц, по сути, регулирует асимптотическое поведение траекторий процесса $\{Z(t)\}$. Рассмотрим случайную величину $\mathcal{H} := \inf\{t \in \mathcal{T} : Z(t) = 0\}$, обозначающую момент вырождения процесса. Из теоремы о вырождении [13, с. 108] следует, что $P_i\{\mathcal{H} < \infty\} = q^i$, где q – вероятность вырождения процесса, которая является наименьшим корнем уравнения $f(q) = 0$. Этот корень, как известно, равен 1, если $m \leq 0$ и меньше 1 при $m > 0$ (см. [4, Гл. 1, § 1]). В связи с этим МВП классифицируется в зависимости от знака параметра m и называется *докритическим*, *критическим* и *надкритическим* если $m < 0$, $m = 0$ и $m > 0$ соответственно.

Наши дальнейшие рассуждения будут связаны с теорией правильно меняющихся функций в смысле Карамата. Положительная функция называется медленно меняющейся (ММ) функцией на бесконечности, если она измерима на некоторой положительной полуоси $[A, \infty)$ и принадлежит классу

$$\mathfrak{L}_\infty := \left\{ \ell(x) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1 \text{ для произвольного } \lambda \in (0, \infty) \right\}.$$

Положительная функция $V(x)$ называется правильно меняющейся (ПМ) на бесконечности с показателем $\rho \in (0, \infty)$, если она представима в виде $V(x) = x^\rho L(x)$, где $L(x) \in \mathfrak{L}_\infty$. Через \mathfrak{R}_∞^ρ обозначим класс ПМ-функций на бесконечности. Функция $L(x)$ называется ММ-функцией в нуле, если $L(1/x) \in \mathfrak{L}_\infty$. Классы ММ- и ПМ-функций в нуле обозначим \mathfrak{L}_0 и \mathfrak{R}_0^ρ соответственно. Таким образом, если $L(1/x) \in \mathfrak{L}_\infty$, то $L(x) \in \mathfrak{L}_0$ (см. [14]).

Возможность применения ПМ-функций в теории МВП впервые была обсуждена в работе Золотарева [15]. Подробные материалы, связанные с применением

ПМ-функций в теории ветвящихся процессов, можно найти в монографиях [16, 17].

Далее мы рассмотрим некритический случай, т.е. $m \neq 0$. Введем в рассмотрение условные вероятности

$$p_{ij}^{\mathcal{H}}(t) := \mathbb{P}_i \{Z(t) = j \mid t < \mathcal{H} < \infty\}$$

и в дальнейшем, где это будет необходимо, будем писать $\mathbb{P}\{*\}$ вместо $\mathbb{P}_1\{*\}$.

В монографии [16, с. 121–122] доказано, что для докритического случая ($m < 0$) и при любых $i, j \in \mathcal{S}$, существует предельная ПФ

$$\mathcal{V}(s) := \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}^{\mathcal{H}}(t) s^j$$

и она удовлетворяет функциональному уравнению Шредера

$$1 - \mathcal{V}(F(t; s)) = e^{mt} [1 - \mathcal{V}(s)], \tag{1.2}$$

причем $1 - \mathcal{V}(1-s) \in \mathfrak{R}_0^1$. Представляя $\mathcal{V}(s)$ в виде степенного ряда $\mathcal{V}(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}} v_j s^j$, из уравнения (1.2) можно получить $\mathcal{V}(1-) = \sum_{j \in \mathcal{S}} v_j = 1$. А также, это уравнение эквивалентно следующему соотношению:

$$e^{mt} \cdot v_j = \sum_{k \in \mathcal{S}} v_k p_{kj}^{\mathcal{H}}(\tau) \text{ для любого } \tau \in \mathcal{T}. \tag{1.3}$$

Доказательство последнего факта мы отложим до четвертого параграфа. Уравнение (1.3) выражает свойство инвариантности предельного распределения $\{v_j, j \in \mathcal{S}\}$ относительно переходных вероятностей $p_{ij}^{\mathcal{H}}(t)$.

В монографии [16, с. 121, 122] также было доказано, что существует функция $L(s) \in \mathfrak{L}_0$, такая, что

$$\mathbb{P}\{\mathcal{H} > t\} = L(e^{mt}) \cdot e^{mt}, \tag{1.4}$$

причем, если выполнено условие

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} a_j j \ln j < \infty, \tag{A}$$

то существует конечное математическое ожидание $\mu := \sum_{k \in \mathcal{S}} k v_k = \mathcal{V}'(1-)$ и $\mu = 1/L(0+)$. Так что

$$e^{mt} \mathbb{P}\{\mathcal{H} > t\} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty. \tag{1.5}$$

В работе [18] утверждения (1.4) и (1.5) были обобщены для некритического случая в процессах Гальтона – Ватсона с дискретным временем.

Асимптотические представления переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ впервые были исследованы в работе [19]. В этой же работе, помимо случая $m = 0$, автор рассмотрел случай $m > 0$ и нашел довольно громоздкий вид асимптотического представления $p_{1j}(t)$ используя, при этом, условие конечности второго момента $f''(1-)$. При том же условии асимптотические выражения для вероятностей $p_{ij}(t)$ найдены в работах автора [20, 21].

Настоящую работу мы посвящаем улучшению вышеуказанных результатов. В Теореме 1 мы распространим утверждения (1.4) и (1.5) на случай $m > 0$. Далее обсудим асимптотические свойства при $t \rightarrow \infty$ переходных вероятностей $p_{ij}(t)$. Найдем для них асимптотическое представление (Теоремы 2, 3) без дополнительных моментных условий, улучшая вышеупомянутые результаты из [19–21]. В конце мы переходим к задаче существования инвариантного распределения для МВП. Докажем аналог теоремы о сходимости отношений [20] к инвариантному распределению (Теорема 4). Эта теорема, в отличие от соответствующей теоремы из [20], указывает на регулярную изменчивость ПФ инвариантного распределения.

2. Основная лемма и ее дифференциальный аналог

В теории ветвящихся процессов асимптотическое представление ПФ рассматриваемого процесса служит основой для ряда важных результатов. Мы начнем с доказательства нижеследующей *Основной леммы* для некритических процессов (в литературе такое название обычно используется для критического случая).

Предполагая $q \neq 0$ в случае $m > 0$, введем в рассмотрение функцию $F_q(t; s) = F(t; qs)/q$. Нетрудно проверить, что она определяет докритический МВП $\{Z_q(t), t \in \mathcal{T}\}$ с пространством состояний \mathcal{S}_0 и с плотностью закона превращения частиц $\varphi_k = a_k q^{k-1}$. Определяя инфинитезимальную ПФ $f_q(s) := \sum_{k \in \mathcal{S}} \varphi_k s^k$, можно вычислить среднюю плотность $f'_q(1-) = \sum_{k \in \mathcal{S}} k \varphi_k$. Дифференцируя $f_q(s)$ в точке $s \uparrow 1$, имеем

$$f'_q(1-) = \sum_{k \in \mathcal{S}} k a_k q^{k-1} = f'(q).$$

Поскольку $a := \sum_{k \in \mathcal{S}} k a_k = f'(1-) < \infty$ и $q \leq 1$, то

$$f'(q) = \sum_{k \in \mathcal{S}} k a_k q^{k-1} \leq \sum_{k \in \mathcal{S}} k a_k < \infty.$$

Тогда, в соответствие с вышеупомянутым результатом из [6, с. 121, 122], убедимся в том, что существует предельная ПФ

$$\mathcal{V}(s) := \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_i \{Z_q(t) = j | t < \mathcal{H} < \infty\} s^j$$

при любых $i, j \in \mathcal{S}$ и для всех $s \in [0, 1)$, а также она удовлетворяет функциональному уравнению Шредера

$$1 - \mathcal{V}(F_q(t; s)) = \beta^t \cdot [1 - \mathcal{V}(s)], \quad (2.1)$$

где $1 - \mathcal{V}(1-s) \in \mathfrak{R}_0^1$ и $\beta := \exp\{f'(q)\}$. Притом, если выполнено условие [A], то $\mu := \mathcal{V}'(1-) < \infty$. Легко заметить, что $\beta < 1$. Действительно, в силу определения МВП, имеем $f(0) = a_0 > 0$, $f(q) = 0$, $0 < q \leq 1$, $f(1) = 0$ и

$$f''(s) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) a_k s^{k-2} \geq 0.$$

Последнее указывает на выпуклость вниз ПФ $f(s)$ для $0 \leq s \leq 1$. Также для $q \leq s \leq 1$ она удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда существует точка $s_0 \in (q, 1)$, такая, что $f(s_0) < 0$ и $f'(s_0) = 0$. Поэтому $f(s)$ непрерывно убывает от $f(0) = a_0 > 0$ до $f(s_0) < 0$, проходя точку $f(q) = 0$. Сказанное равносильно $f'(q) < 0$ и, следовательно, $\beta < 1$.

Итак, рассмотрим функцию

$$R_q(t; s) := 1 - F_q(t; s).$$

Лемма 1. Пусть $q > 0$. Тогда найдется функция $\ell_\beta(t; x)$, такая, что $\ell_\beta(t_0; x) =: \ell_\beta(x) \in \mathbb{R}_0$ для любого фиксированного $t_0 \in \mathcal{T}$, и справедливо следующее представление для $s \in [0, 1)$:

$$R_q(t; s) = (1 - s) \cdot \ell_\beta(t; 1 - s) \cdot \beta^t. \quad (2.2)$$

Если выполнено условие $[\mathcal{A}]$, то $\ell_\beta(t; 1) \rightarrow 1/\mu$ при $t \rightarrow \infty$, где μ – число, полученное в (1.5) и, $\ell_\beta(t; 0+) = 1$ для всех фиксированных $t \in \mathcal{T}$.

Доказательство. Используем по существу тот же метод, что применялся в работе [8], для доказательства дискретного аналога формулы (2.2). Обозначив $\phi(t; s) := 1 - F_q(t; 1 - s)$, уравнение (2.1) запишем в виде

$$\vartheta(\phi(t; s)) = \beta^t \cdot \vartheta(s), \quad (2.3)$$

где $\vartheta(s) := 1 - \mathcal{V}(1 - s)$. Используем верхний символ « \leftarrow » для обозначения обратной функции к заданной. Введем функцию $a(x) := \vartheta^{\leftarrow}(x)$. Тогда из определения функций $R_q(t; s)$, $\phi(t; s)$ и равенства (2.3), следует

$$R_q(t; s) = a\left(\vartheta(1 - s) \cdot \beta^t\right). \quad (2.4)$$

Обозначая $y := \vartheta(\phi(t; s))$, из равенства (2.3) имеем $s = a(y/\beta^t)$. Из того же обозначения выпишем равенство $\phi(t; s) = a(y)$. Отсюда, введя еще одну обратную функцию $b(t; x) := \phi^{\leftarrow}(t; x)$ по аргументу x , для любого фиксированного $t \in \mathcal{T}$, находим $b(t; a(y)) = s$. Таким образом, мы получили соотношение

$$a\left(\frac{y}{\beta^t}\right) = b(t; a(y)). \quad (2.5)$$

С другой стороны, из определения функции $\phi(t; s)$ и из свойства ПФ $F_q(t; s)$ следует, что $\phi(t; s) \downarrow 0$ при $s \downarrow 0$. Тогда, в силу того, что $\mathcal{V}(1-) = 1$, находим

$$\lim_{s \downarrow 0} y = \lim_{s \downarrow 0} \vartheta(\phi(t; s)) = \lim_{x \downarrow 0} \vartheta(x) = 0.$$

Отсюда $a(0+) = 0$. Следовательно, в силу равенства (2.5) имеем

$$\lim_{x \downarrow 0} b(t; x) = 0. \quad (2.6)$$

В свою очередь, нетрудно проверить, что согласно определению МВП $\partial\phi/\partial s \rightarrow \beta^t$ при $s \downarrow 0$, и поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций, получим

$$\frac{\partial b(t; x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial \phi(t; x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^{-1} = \frac{1}{\beta^t}. \quad (2.7)$$

Теперь, с помощью соотношений (2.6) и (2.7), можно записать формулу Тейлора для функции $b(t; s)$ в окрестности точки $s = 0$ (фиксируя t) с точностью до первой ненулевой производной в следующем виде:

$$b(t; s) = \frac{s}{\beta^t} (1 + o(1)) \text{ при } s \downarrow 0.$$

Это представление, вместе с формулой (2.5), с учетом $a(0+) = 0$, дает следующее соотношение:

$$\frac{a(s/\beta^t)}{a(s)} = \frac{b(t; a(s))}{a(s)} \longrightarrow \frac{1}{\beta^t} \text{ при } s \downarrow 0 \quad (2.8)$$

для любого фиксированного $t \in \mathcal{T}$.

Из теории обратных функций известно, что $a(s)/s$ является монотонно убывающей функцией при $s \downarrow 0$. На самом деле это следует из того, что $(1 - \mathcal{V}(s))/(1 - s)$ есть монотонно неубывающая функция. Так что в силу утверждения (2.8) получаем, что для каждого $\lambda \in [1, 1/\beta^t]$ справедливо соотношение

$$1 \leq \frac{a(\lambda s)/(s)}{a(s)/s} \leq \frac{a(s/\beta^t)/(s/\beta^t)}{a(s)/s} \longrightarrow 1$$

при $s \downarrow 0$. Выбирая $t \in \mathcal{T}$ достаточно большим, убедимся, что последнее соотношение выполняется и для всех $\lambda \geq 1$. Таким образом, мы установили, что $a(s)/s$ является ММ-функцией в нуле. Обозначим ее

$$\ell_a(s) := \frac{a(s)}{s} \in \mathfrak{L}_0.$$

Формулу (2.4) теперь можно записать в виде

$$R_q(t; s) = \mathfrak{Y}(1-s) \cdot \ell_a\left(\mathfrak{Y}(1-s)\beta^t\right) \cdot \beta^t. \quad (2.9)$$

Позже станет ясно (см. теорему 1), что $\ell_a(s)$ по сути та же ММ-функция, что и в формуле (1.4).

Как было отмечено выше, функция $\mathfrak{Y}(s) \in \mathfrak{R}_0^1$, поэтому, сохраняя прежние обозначения, функцию $\mathfrak{Y}(1-s)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathfrak{Y}(1-s) = (1-s)\ell_{\mathfrak{Y}}(1-s), \quad (2.10)$$

где $\ell_{\mathfrak{Y}}(x) \in \mathfrak{L}_0$. Теперь, введя обозначение $\ell_{\beta}(t; x) := \ell_{\mathfrak{Y}}(x) \cdot \ell_a(x\ell_{\mathfrak{Y}}(x)\beta^t)$, для $x \in (0, 1]$, из соотношений (2.9) и (2.10) мы получаем представление (2.2).

Далее проверяем свойства функции $\ell_\beta(t; x)$ при условии выполнения [A]. В этом случае, как было указано выше, существует конечное математическое ожидание $\mu := \sum_{k \in S} k \nu_k = \mathcal{V}'(1-)$. Очевидно $\mathcal{V}(0) = 0$ и, следовательно, $\mathfrak{G}(1) = 1$, поэтому $\ell_\beta(1) = 1$. Значит, $\ell_\beta(t; 1) = \ell_a(\beta^t)$. С другой стороны, как уже было показано выше, $a(0+) = \mathfrak{G}(0+) = 0$. Тогда в силу свойства производной обратных функций, с учетом $\mathcal{V}(1-) = 1$, находим

$$\begin{aligned} \ell_a(0+) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{a(x)}{x} = a'(0+) = \frac{1}{\mathfrak{G}'(0+)} = \\ &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\mathfrak{G}(x)} = \lim_{y \uparrow 1} \frac{1-y}{1-\mathcal{V}(y)} = \frac{1}{\mathcal{V}'(1-)} = \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Отсюда $\ell_\beta(t; 1) \rightarrow 1/\mu$ при $t \rightarrow \infty$. Аналогичным путем вычислим

$$\ell_\beta(0+) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\mathfrak{G}(x)}{x} = \mu.$$

Поэтому $\ell_\beta(t; 0+) = 1$.

Наконец очевидно, что функция $\ell_\beta(x) := \ell_\beta(t_0; x)$ при любом фиксированном $t_0 \in \mathcal{T}$, как комбинация двух функций $\ell_\beta(\cdot)$, $\ell_a(\cdot) \in \mathfrak{L}_0$, принадлежит классу \mathfrak{L}_0 : $\ell_\beta(x) \in \mathfrak{L}_0$.

Доказательство леммы завершено. ■

Основная лемма указывает на то, что в асимптотике траекторий некритического процесса $\{Z(t), t \in \mathcal{T}\}$ неявно присутствует свойство правильного изменения функций.

Далее мы интересуемся асимптотикой функции $\partial R_q(t; s)/\partial s$. Из комбинаций прямого и обратного уравнений Колмогорова следует, что

$$\frac{\partial F_q(t; s)}{\partial s} = \frac{f_q(F_q(t; s))}{f_q(s)}, \tag{2.11}$$

где $f_q(s) = f(qs)/q$. Очевидно, что $f_q(1) = 0$. Поэтому

$$f_q(s) \sim f'_q(1-)(s-1) = f'(q)(s-1), \text{ при } s \downarrow 0.$$

Применяя это соотношение в правой части (2.11), получаем

$$\frac{\partial R_q(t; s)}{\partial s} = -\frac{|\ln \beta|}{f_q(s)} R_q(t; s)(1 + o(1)), \text{ при } t \rightarrow \infty. \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.2) и (2.12) мы получаем теперь следующий дифференциальный аналог Основной леммы.

Лемма 2. В условиях леммы 1 справедливо следующее представление:

$$\frac{\partial R_q(t; s)}{\partial s} = -\frac{|\ln \beta|}{f_q(s)} (1-s) \cdot \ell_\beta(t; 1-s) \cdot \beta^t (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow \infty, \tag{2.13}$$

где функция $\ell_\beta(t; x)$ найдена в лемме 1.

3. Асимптотические свойства переходных вероятностей и инвариантные распределения

В этом параграфе мы исследуем некоторые асимптотические свойства МВП используя лемму 1. Начнем с предельного выражения «конечного хвоста» распределения величины \mathcal{H} .

Теорема 1. Пусть $q > 0$. Тогда найдется функция $\ell_a(x) \in \mathfrak{L}_0$, такая, что имеет место представление

$$\mathbb{P}\{t < \mathcal{H} < \infty\} = q \cdot \ell_a(\beta^t) \cdot \beta^t. \quad (3.1)$$

Если выполнено условие $[A]$, то

$$\beta^{-t} \cdot \mathbb{P}\{t < \mathcal{H} < \infty\} \longrightarrow \frac{q}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Доказательство. Так как вероятность исчезновения k частиц равна q^k , то $\mathbb{P}\{t < \mathcal{H} < \infty | Z(t) = k\} = q^k$. Поэтому из формулы полной вероятности следует

$$\mathbb{P}\{t < \mathcal{H} < \infty\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{t < \mathcal{H} < \infty | Z(t) = k\} p_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) q^k.$$

Учитывая уравнение $F(t; q) = q$ [1, с. 52], из последнего соотношения получаем

$$\mathbb{P}\{t < \mathcal{H} < \infty\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) q^k - p_0(t) = F(t; q) - F(t; 0) = q - F(t; 0).$$

Следовательно $\mathbb{P}\{t < \mathcal{H} < \infty\} = q \cdot R_q(t; 0)$. Здесь используем формулу (2.2) при $s = 0$. В ходе ее доказательства показано, что $\ell_\beta(t; 1) = \ell_a(\beta^t)$, где $\ell_a(x) \in \mathfrak{L}_0$. Таким образом, мы получаем формулу (3.1). Соотношение (3.2) следует из (3.1), с учетом того, что $\ell_a(0+) = 1/\mu$ при выполнении условия $[A]$.

Теорема доказана. ■

Далее используем обозначение

$$q_\beta := \frac{a_0}{|\ln \beta|}.$$

Поскольку $\partial R_q / \partial s \Big|_{s=0} = -p_{11}(t)$, то следующая локальная предельная теорема сразу получается из асимптотической формулы (2.13), полагая в ней $s = 0$, с учетом свойства функции $\ell_\beta(t; x)$ из леммы 1.

Теорема 2. Пусть $q > 0$. Тогда следующее асимптотическое представление имеет место:

$$p_{11}(t) = \frac{q}{q_\beta} \cdot \ell_a(\beta^t) \cdot \beta^t (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

где функция $\ell_a(x) \in \mathfrak{L}_0$ найдена в теореме 1. Если выполнено условие $[A]$, то

$$\beta^{-t} \cdot p_{11}(t) \longrightarrow \frac{q}{q_\beta} \frac{1}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Далее нас будет интересовать предельные поведения переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ для всех $i, j \in \mathcal{S}$ и вопрос существования инвариантной меры относительно этих вероятностей. Для этого мы используем следующую лемму о монотонной сходимости отношений переходных вероятностей из работы [22, с. 402]; см., также [20].

Лемма 3. Для всех $i, j \in \mathcal{S}$

$$\frac{p_{ij}(t)}{p_{11}(t)} \longrightarrow iq^{i-1} \cdot \pi_j \leq \infty \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

где числа $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{1j}(t)/p_{11}(t)$, для которых справедливо уравнение

$$\beta^t \cdot \pi_j = \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_k p_{kj}(\tau) \quad (3.5)$$

для любого $\tau \in \mathcal{T}$.

С помощью соотношения (3.4), получаем теперь следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $q > 0$. Тогда следующее асимптотическое представление имеет место:

$$p_{ij}(t) = \frac{iq^i}{q_\beta} \pi_j \cdot \ell_a(\beta^t) \cdot \beta^t (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

где функция $\ell_a(x) \in \mathfrak{R}_0$ найдена в теореме 1. Если выполнено условие [A], то

$$\beta^{-t} \cdot p_{ij}(t) \longrightarrow \frac{iq^i}{q_\beta} \cdot \frac{\pi_j}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим теперь ПФ

$$\mathfrak{P}_i(t; s) := \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{p_{ij}(t)}{p_{11}(t)} s^j \text{ и } \mathfrak{P}(s) := \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j s^j.$$

Очевидно, что $\mathfrak{P}_i(t; s) = iq^{i-1} \cdot \mathfrak{P}(t; s)$, где $\mathfrak{P}(t; s) := \mathfrak{P}_1(t; s)$, и из сходимости (3.4) следует $\mathfrak{P}(t; s) \rightarrow \mathfrak{P}(s)$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно для всех $s \in [0, 1)$. А соотношение (3.5) эквивалентно функциональному уравнению

$$\beta^t \cdot \mathfrak{P}(s) = \mathfrak{P}(F(t; s)) - \mathfrak{P}(F(t; 0)) \quad (3.6)$$

(см. [22, с. 403]). Таким образом, множество положительных чисел $\{\pi_j, j \in \mathcal{S}\}$ представляет собой инвариантную меру для процесса $\{Z(t), t \in \mathcal{T}\}$. Следующая теорема описывает ее основные свойства.

Теорема 4. Пусть $q > 0$. Тогда следующая сходимость имеет место:

$$\frac{\mathfrak{P}(t; qs)}{q_\beta} \longrightarrow 1 - \mathfrak{Q}(1-s) \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

где и $\mathfrak{Q}(x) \in \mathfrak{R}_0^1$. Более того $\mathfrak{P}(0) = 0$ и $\mathfrak{P}(q) = q_\beta$. Если выполнено условие [A], то

$$\mathfrak{P}'(q) = \frac{q_\beta}{q} \mu.$$

Доказательство. Согласно нашим обозначениям, $F(t; qs) = q \cdot (1 - R_q(t; s))$. Поэтому можем написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t; qs) &= \frac{F(t; qs) - F(t; 0)}{\rho_{11}(t)} = \\ &= \frac{q}{\rho_{11}(t)} [R_q(t; 0) - R_q(t; s)] = q \frac{R_q(t; 0)}{\rho_{11}(t)} \cdot \left[1 - \frac{R_q(t; s)}{R_q(t; 0)} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Как было показано в доказательстве теоремы 1, $\mathbb{P}\{t < \mathcal{H} < \infty\} = q \cdot R_q(t; 0)$. Тогда в силу представления (3.1) получаем равенство $R_q(t; 0) = \ell_a(\beta^t) \cdot \beta^t$, здесь $\ell_a(x) \in \mathfrak{L}_0$. Из последнего равенства вместе с асимптотической формулой (3.3) получим

$$q \frac{R_q(t; 0)}{\rho_{11}(t)} = q_\beta (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

В свою очередь, из представления (2.9) для $R_q(t; s)$ следует, что

$$\frac{R_q(t; s)}{R_q(t; 0)} = \mathfrak{V}(1-s) \cdot \frac{\ell_a(\mathfrak{V}(1-s)\beta^t)}{\ell_a(\beta^t)}, \quad (3.10)$$

где $\mathfrak{V}(x) = 1 - \mathcal{V}(1-x) \in \mathfrak{R}_0^1$. Поскольку $0 \leq \mathcal{V}(s) < 1$ для $s \in [0, 1)$, то $0 < \mathfrak{V}(x) \leq 1$ для $x \in (0, 1]$. Тогда согласно результату из [23, с. 140, лемма 1], дробь правой части (3.10) стремится к 1 при $t \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\frac{R_q(t; s)}{R_q(t; 0)} = \mathfrak{V}(1-s) (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Комбинируя теперь (3.8) – (3.11), мы получаем утверждение (3.7). Оно же нам дает формулу

$$\frac{\mathcal{P}(qs)}{q_\beta} = 1 - \mathfrak{V}(1-s). \quad (3.12)$$

Теперь, пусть выполнено условие [A]. В ходе доказательства леммы 1 было замечено, что $\mathfrak{V}(0+) = 0$ и $\mathfrak{V}(1) = 1$. Тогда, из формулы (3.12) получаем

$$\mathcal{P}(0) = 0 \text{ и } \mathcal{P}(q) = q_\beta.$$

Учитывая последние результаты и представление (2.10), равенство (3.12) преобразуем к виду

$$\frac{\mathcal{P}(q) - \mathcal{P}(qs)}{q - sq} = \frac{q_\beta}{q} \ell_\mathfrak{V}(1-s),$$

где $\ell_\mathfrak{V}(x) \in \mathfrak{L}_0$. В последнем равенстве переходим к пределу при $s \uparrow 1$. Тогда очевидно, что левая часть будет равняться $\mathcal{P}'(q)$, а функция $\ell_\mathfrak{V}(x)$ в правой части, как известно из доказательства леммы 1, имеет конечный предел $\mu = \lim_{x \downarrow 0} \ell_\mathfrak{V}(x)$.

Следовательно, $\mathcal{P}'(q) = \mu q_\beta / q$.

Теорема доказана. ■

4. Заключительные замечания

Изучение предельной структуры некритического МВП было основной целью данной работы. Полученные результаты основаны исключительно на Основной лемме. Начатое в начале обсуждение свойств инвариантного распределения $\{\nu_j, j \in \mathcal{S}\}$ закончилось в теореме 4 подтверждением того, что распределения $\{\nu_j, j \in \mathcal{S}\}$ и $\{\pi_j, j \in \mathcal{S}\}$, порожденные ПФ $\mathcal{V}(s)$ и $\mathcal{P}(s)$ являются, как оказалось, лишь разными версиями одного и того же предельного закона. На самом деле, формула (3.12) нам дает следующую связь между $\mathcal{P}(s)$ и $\mathcal{V}(s)$:

$$\frac{\mathcal{P}(qs)}{\mathcal{P}(q)} = \mathcal{V}(s) \tag{4.1}$$

или же $\mathcal{P}(qs) = q_\beta \mathcal{V}(s)$. Полученный вывод указывает на единственность инвариантного распределения с точностью до постоянного множителя. Соотношение (4.1) согласуется с соответствующим результатом из работы [22, с. 397], где выражение $\ell_\beta(t; 1-s)$ в правой части соотношения (2.2) было выведено в виде экспоненты от интегральной функции, зависящей от ПФ $f(s)$.

Вернемся теперь к предельной ПФ $\mathcal{V}(s) := \sum_{j \in \mathcal{S}} \nu_j s^j$ и покажем, что для множества $\{\nu_j, j \in \mathcal{S}\}$ на самом деле выполняется уравнение (1.3). Из равенства (4.1) получаем

$$\mathcal{P}(F(t; qs)) = \mathcal{P}(q) \mathcal{V}(F_q(t; s)).$$

В свою очередь, в силу (3.6)

$$\beta^t \cdot \mathcal{P}(qs) = \mathcal{P}(F(t; qs)) - \mathcal{P}(F(t; 0)).$$

Из последних двух соотношений находим

$$\beta^t \cdot \mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(F_q(t; s)) - \mathcal{V}(F_q(t; 0)).$$

Отсюда по правилу сравнения степенных рядов легко получить уравнение

$$\beta^t \cdot \nu_j = \sum_{k \in \mathcal{S}} \nu_k \mathbf{p}_{kj}^{\mathcal{H}}(t) \text{ для любого } t \in \mathcal{T},$$

что является обобщением уравнения (1.3) для случая $m \neq 0$.

Наконец, определим случайный процесс $\{Z_{\mathcal{H}}(t), t \in \mathcal{T}\}$ с переходными вероятностями

$$\mathbf{p}_{ij}^{\mathcal{H}}(t) := \mathbb{P}_i \{Z(t) = j \mid t < \mathcal{H} < \infty\}.$$

Отметим, что этот процесс является ветвящимся процессом и обладает свойством эргодичности (см. [22]). Таким образом, в рассматриваемом случае существует эргодическая цепь $\{Z_{\mathcal{H}}(t), t \in \mathcal{T}\}$, связанная с исходным процессом $\{Z(t), t \in \mathcal{T}\}$, такая, что ее переходные вероятности

$$\mathbf{p}_{ij}^{\mathcal{H}}(t) = \frac{\mathbf{p}_{ij}(t) q^j}{\sum_{k \in \mathcal{S}} \mathbf{p}_{kj}(t) q^k}.$$

При выполнении условия $[A]$ эти вероятности имеют конечный предел $\{\nu_j, j \in \mathcal{S}\}$, представляющий собой инвариантное распределение с конечным математическим ожиданием $\mu = \sum_{k \in \mathcal{S}} k \nu_k$.

Благодарность. Авторы выражают глубокое уважение и благодарность рецензенту за его ценные замечания и полезные предложения, способствовавшие улучшению содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris T.E. The theory of branching processes. Berlin: Springer-Verlag, 1963.
2. Bellman R, Harris T.E. On the theory of age-dependent stochastic branching processes // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1948. V. 34. P. 601–604.
3. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста частиц // Теория вероятн. и ее применен. 1964. Т. 9. № 4. С. 577–594.
4. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
5. Smith W.L., Wilkinson W. On branching processes in random environment // Ann. Math. Statist. 1969. V. 40(3). P. 814–827.
6. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций // Теория вероятн. и ее применен. 2006. Т. 51. № 1. С. 22–46.
7. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Вероятность невырождения для одного класса много-типных докритических ветвящихся процессов в случайной среде // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 163–177.
8. Dyakonova E.E., Li D., Vatutin V.A., Zhang M. Branching processes in random environment with immigration stopped at zero // J. Appl. Probab. 2020. V. 57(1). P. 237–249.
9. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Докритические ветвящиеся процессы в случайной среде с иммиграцией: выживание одного семейства // Теория вероятн. и ее применен. 2020. Т. 65. № 4. С. 671–692.
10. Dong C., Smadi C., Vatutin V.A. Critical branching processes in random environment and Cauchy domain of attraction // ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 2020. V. 17. P. 877–900.
11. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., Топчий В.А. Критические процессы Гальтона – Ватсона со счетным множеством типов частиц и бесконечными вторыми моментами // Матем. сб. Т. 212. № 1. 2021. С. 3–27.
12. Колмогоров А.Н. К решению одной биологической задачи // Изв. НИИ Матем. и мех. Томского ун-та. 1938. № 2. С. 7–12.
13. Athreya K.B. and Ney P.E. Branching processes. New York: Springer, 1972.
14. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции: пер. с англ. М.: Наука, 1985.
15. Zolotarev V.M. More exact statements of several theorems in the theory of branching processes // Theory Prob. and Appl. 1957. V. 2. P. 245–253.
16. Asmussen S., Hering H. Branching Processes. Boston, 1983.
17. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular Variation. Cambridge, 1987.
18. Imomov A.A. On a limit structure of the Galton–Watson branching processes with regularly varying generating functions // Probab. and Math. Stat. 2019. V. 39(1). P. 61–73.
19. Чистяков В.П. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов // Теория вероятн. и ее применен. 1957. Т. 2. № 3. P. 360–374.
20. Imomov A.A. Limit Properties of Transition Functions of Continuous-Time Markov Branching Processes // Int. J. Stoch. Anal. 2014. 10 p. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/409345>.
21. Imomov A.A. A differential analog of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications // Ukrainian Math. Journal. 2005. V. 57(2). P. 307–315.
22. Imomov A.A. On conditioned limit structure of the Markov branching process without finite second moment // Malaysian J. Math. Sciences. 2017. V. 11(1). P. 393–422.
23. Slack R.S. A branching process with mean one and possible infinite variance // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1968. V. 9. P. 139–145.

Imomov A.A., Meyliev A.Kh. (2021) ON THE ASYMPTOTIC STRUCTURE OF NON-CRITICAL MARKOV STOCHASTIC BRANCHING PROCESSES WITH CONTINUOUS TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 69. pp. 22–36

DOI 10.17223/19988621/69/3

Keywords. Branching process, regularly varying functions, Main Lemma, transition functions, invariant distributions.

We study the evolution of the population of single-type particles called Markov branching process. Let $Z(t)$ be the population size at a time $t \in \mathcal{T} = [0, +\infty)$. The conversion intensity of particles is given by determining the local densities $\{a_j, j \in \mathcal{S}\}$. The process $\{Z(t), t \in \mathcal{T}\}$ is a homogeneous-time Markov chain with the state space $\mathcal{S}_0 = \{0\} \cup \mathcal{S}$, where $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$, and its classification depends on the sign of the parameter $a := \sum_{j \in \mathcal{S}} ja_j$, the average density. We consider the case $a \neq 0$, in which the process is called non-critical. We find an asymptotic representation of transition functions $p_{ij}(t) := \mathbb{P}\{Z(\tau+t) = j | Z(\tau) = i\}$, $\tau, t \in \mathcal{T}$ without any additional conditions. Afterwards, we show that conditional transition functions $p_{ij}^{\mathcal{H}}(t) := \mathbb{P}_i\{Z(t) = j | t < \mathcal{H} < \infty\}$ have a finite limit v_j as $t \rightarrow \infty$ and an appropriate generating function $\mathcal{V}(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}} v_j s^j$ satisfies the Schroeder functional equation. We prove that another limit law $\pi_j := \lim_{t \rightarrow \infty} p_{1j}(t)/p_{11}(t)$ has the same properties as $\{v_j\}$. So that setting $\mathcal{P}(s) := \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j s^j$, we assert that

$$\frac{\mathcal{P}(qs)}{\mathcal{P}(q)} = \mathcal{V}(s).$$

All our conclusions are based on the Main Lemma of the theory of non-critical processes; see Lemma 1.

AMS Mathematical Subject Classification: 60J80, 26A12

Azam A. IMOMOV (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Karshi State University, Uzbekistan). E-mail: imomov_azam@mail.ru

Abror Kh. MEYLIEV (researcher-teacher, Karshi State University, Uzbekistan). E-mail: abror_meyliyev@mail.ru

REFERENCES

1. Harris T.E. (1963) *The Theory of Branching Processes*. Berlin: Springer-Verlag.
2. Bellman R., Harris T.E. (1948) On the theory of age-dependent stochastic branching processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 34(12). pp. 601–604.
3. Sevast'yanov B.A. (1964) Age-dependent branching processes. *Theory of Probability and its Applications*. 9(4). pp. 521–537.
4. Sevast'yanov B.A. (1971) *Vetyashchiyessa protsessy* [Branching processes]. Moscow: Nauka. 1971.
5. Smith W.L., Wilkinson W. (1969) On branching processes in random environment. *Annals of Mathematical Statistics*. 40(3). pp. 814–827.
6. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. (2006) Branching processes in a random environment and bottlenecks in the evolution of populations. *Theory of Probability and its Applications*. 51(1). 189–210.

7. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. (2020) The survival probability for a class of multitype subcritical branching processes in random environment. *Mathematical Notes*. 107(2). pp. 189–200.
8. Dyakonova E.E., Li D., Vatutin V.A., Zhang M. (2020) Branching processes in random environment with immigration stopped at zero. *Journal of Applied Probability*. 57(1). pp. 237–249.
9. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. (2020) Dokriticheskiye vetvyashchiyesya protsessy v sluchaynoy srede s immigratsiyey: vyzhivaniye odnogo semeystva [Precritical branching processes in a random medium with immigration: survival of a single family]. *Theory of Probability and its Applications*. 65(4). pp. 671–692.
10. Dong C., Smadi C., Vatutin V.A. (2020) Critical branching processes in random environment and Cauchy domain of attraction. *ALEA Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*. 17. pp. 877–900.
11. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. Topchii V.A. (2021) Critical Galton-Watson branching processes with countably infinitely many types and infinite second moments. *Sbornik: Mathematics*. 212(1). (in press)
12. Kolmogorov A.N. (1992) Solution of a biological problem. *Selected Works of A.N. Kolmogorov*. pp. 216–221. Springer-Science.
13. Athreya K.B. and Ney P.E. (1972) *Branching Processes*. New York: Springer.
14. Seneta E. (1976) *Regularly Varying Functions*. Springer.
15. Zolotarev V.M. (1957) More exact statements of several theorems in the theory of branching processes. *Theory of Probability and its Applications*. 2(2). pp. 245–253.
16. Asmussen S., Hering H. (1983) *Branching Processes*. Boston: Birkhauser.
17. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. (1987) *Regular Variation*. Cambridge: Cambridge University Press.
18. Imomov A.A. (2019) On a limit structure of the Galton–Watson branching processes with regularly varying generating functions. *Probability and Mathematical Statistics*. 39(1). pp. 61–73.
19. Chistyakov V.P. (1957) Local limit theorems in the theory of branching random processes *Theory of Probability and its Applications*. 2(3). pp. 345–363.
20. Imomov A.A. (2014) Limit properties of transition functions of continuous-time Markov branching processes. *International Journal of Stochastic Analysis*. 46. pp. 1–10. DOI: 10.1155/2014/409345.
21. Imomov A.A. (2005) A differential analog of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications. *Ukrainian Mathematical Journal*. 57(2). pp. 307–315.
22. Imomov A.A. (2017) On conditioned limit structure of the Markov branching process without finite second moment. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 11(1). pp. 393–422.
23. Slack R.S. (1968) A branching process with mean one and possible infinite variance. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*. 9. pp. 139–145.

Received: July 21, 2020

УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/69/4

AMS MSC 53C15, 53D10, 53C25, 53C50

Н.К. Смоленцев, И.Ю. Шагабудинова

О ПАРАСАСАКИЕВЫХ СТРУКТУРАХ НА ПЯТИМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Рассматриваются парасасакиевы структуры на пятимерных контактных алгебрах Ли \mathfrak{g} с ненулевым центром. Такие алгебры Ли являются центральными расширениями четырехмерных паракэлеровых алгебр Ли (\mathfrak{h}, ω) . В работе предложена классификация пятимерных парасасакиевых алгебр Ли с нетривиальным центром, основанная на классификации паракэлеровых структур J на симплектических алгебрах Ли (\mathfrak{h}, ω) .

Ключевые слова: *паракомплексная структура, левоинвариантная паракэлерова структура, параконтактная структура, левоинвариантная парасасакиева структура.*

1. Введение

Комплексные и контактные многообразия – одни из самых активных областей исследований в дифференциальной геометрии. В последние годы все большее число исследователей привлекают их паракомплексные и параконтактные аналоги [1–4, 14]. Если мы имеем дело с группами Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные структуры, которые определяются эндоморфизмами алгебр Ли. Структуры на группах Ли малых размерностей представляют особый интерес ввиду возможностей их классификации. В частности, четырехмерные комплексные алгебры Ли, симплектические и псевдокэлеровы алгебры Ли были классифицированы в работах Овандо [5–7]. Комплексные и паракомплексные структуры на четырехмерных обобщенных симметрических пространствах изучались в [8]. В работе Д. Калварузо [9] приведена классификация паракэлеровых структур на четырехмерных группах Ли. Она основывается на классификации структур произведения на четырехмерных алгебрах Ли [10]. Для каждой заданной структуры произведения J Калварузо, используя классификацию четырехмерных симплектических алгебр Ли, нашел все возможные симплектические структуры ω , согласованные с данной паракомплексной структурой J . В работе [14] рассмотрены парасасакиевы структуры на пятимерных группах Ли. Для шестимерных и семимерных алгебр Ли пока мало информации о паракомплексных и соответственно о параконтактных алгебрах Ли.

В данной работе мы обращаемся к вопросу о классификации пятимерных парасасакиевых алгебр Ли с нетривиальным центром. Как известно, они являются центральными расширениями $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ симплектических алгебр Ли (\mathfrak{h}, ω) . Также известно [4], что параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ является парасасакиевой тогда и только тогда, когда симплектическая паракомплексная алгебра Ли $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ является паракэлеровой. Поэтому вопрос о классификации пятимерных парасасакиевых алгебр Ли сводится к вопросу нахождения всех паракомплексных структур J на каждой симплектической алгебре Ли (\mathfrak{h}, ω) . В разделе 4 данной работы такие структуры J найдены

в явном виде. Они определяют все возможные аффиноры ϕ парасасакиевых структур (η, ξ, ϕ, g) на центральных расширениях $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ симплектических алгебр Ли (\mathfrak{h}, ω) , что и дает классификацию пятимерных парасасакиевых алгебр Ли с нетривиальным центром.

2. Паракомплексные структуры

Пусть J – поле эндоморфизмов касательного расслоения TM многообразия M размерности $2n$, такое, что $J^2 = Id$. В этом случае J имеет действительные собственные числа ± 1 и соответствующие собственные распределения T^+M и T^-M . Если ранги собственных распределений T^+M равны, то J называется *почти паракомплексной* структурой на многообразии M .

Почти паракомплексная структура J называется *интегрируемой*, если распределения T^+M инволютивны. В этом случае J называется *паракомплексной* структурой. Почти паракомплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда кручение Нейенхейса $N_{\omega}(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$ обращается в нуль для всех векторных полей X, Y на M . *Паракэлерово* многообразие можно определить как псевдориманово многообразие (M, g) с кососимметрической паракомплексной структурой J , для которого фундаментальная форма $\omega(X, Y) = g(X, JY)$ замкнута. Свойство кососимметричности J обычно записывают в виде $g(JX, JY) = -g(X, Y)$. Метрика g является псевдоримановой сигнатуры (n, n) . Метрика g определяется через ω и J : $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. Поэтому паракэлерову структуру на M часто задают парой (ω, J) , где ω – симплектическая форма, а J – паракомплексная структура, *согласованная* с ω , т.е. такая, что $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$. В работе [1] представлен обзор теории паракомплексных структур и рассмотрены инвариантные паракомплексные и паракэлеровы структуры на однородных многообразиях. Обзор теории паракомплексных структур представлен в работе [3].

Левоинвариантная паракэлерова структура на группе Ли G – это тройка (g, ω, J) , состоящая из левоинвариантной псевдоримановой метрики g , левоинвариантной симплектической формы ω и кососимметричной левоинвариантной паракомплексной структуры J , причем $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ для любых левоинвариантных векторных полей X и Y на G . Из левоинвариантности рассматриваемых объектов следует, что паракэлерова структура (g, ω, J) может быть задана значениями ω, J и g на алгебре Ли \mathfrak{g} группы Ли G . Тогда $(\mathfrak{g}, \omega, J, g)$ называется *паракэлеровой алгеброй Ли*.

Отметим, что из разложения $TM = T^+M \oplus T^-M$ и свойства инволютивности собственных распределений T^+M и T^-M следует, что любая паракомплексная структура J на алгебре Ли \mathfrak{g} приводит к разложению \mathfrak{g} в прямую сумму подалгебр

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \text{ где } J\mathfrak{g}_+ = Id, J\mathfrak{g}_- = -Id.$$

Как уже упоминалось, структуры на группах Ли малых размерностей представляют особый интерес ввиду возможностей их классификации. В работе [6] найдены все четырехмерные симплектические группы Ли. Паракомплексные структуры на четырехмерных разрешимых алгебрах Ли получены в работе [10]. В работе [9] найдены все возможные симплектические структуры, согласованные с паракомплексной структурой. Учитывая все эти результаты, получается следующий список четырехмерных симплектических алгебр Ли, допускающих паракэлерову структуру (таблица). В этой таблице представлены ненулевые скобки Ли алгебр в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 и симплектическая структура в дуальном базисе e^1, e^2, e^3, e^4 .

Четырехмерные симплектические алгебры Ли, допускающие паракэлерову структуру

No	Скобки Ли	Симплектическая структура
1	$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ $[e_1, e_2] = e_2, [e_3, e_4] = e_4$	$\omega = e^1 \wedge e^2 + \lambda e^1 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4, \lambda \geq 0$
2	\mathfrak{rh}_3 $[e_1, e_2] = e_3$	$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$
3	$\mathfrak{rr}_{3,0}$ $[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = 0$	$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$
4	$\mathfrak{rr}_{3,-1}$ $[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = -e_3$	$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$
5	\mathfrak{r}'_2 $[e_1, e_3] = e_3, [e_1, e_4] = e_4, [e_2, e_3] = e_4,$ $[e_2, e_4] = -e_3$	$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$
6	$\mathfrak{r}_{4,0}$ $[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = 0, [e_4, e_3] = e_2$	$\omega_+ = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, \omega_- = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$
7	$\mathfrak{r}_{4,-1}$ $[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = -e_2, [e_4, e_3] = e_2 - e_3$	$\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$
8	$\mathfrak{r}_{4,-1,\beta}$ $[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = -e_2, [e_4, e_3] = \beta e_3$	$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4, -1 < \beta < 0$
9	$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$ $[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = -e_2, [e_4, e_3] = -e_3$	$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$
10	$\mathfrak{r}_{4,-\alpha,\alpha}$ $[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = -\alpha e_2, [e_4, e_3] = \alpha e_3$	$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, 0 < \alpha < 1$
11	$\mathfrak{d}_{4,1}$ $[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_3] = e_3, [e_4, e_1] = e_1,$ $[e_4, e_2] = 0$	$\omega_1 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4, \omega_2 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$
12	$\mathfrak{d}_{4,2}$ $[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_3] = e_3, [e_4, e_1] = 2e_1,$ $[e_4, e_2] = -e_2$	$\omega_1 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4,$ $\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, \omega_3 = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$
13	$\mathfrak{d}_{4,\lambda}$ $[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_3] = e_3, [e_4, e_1] = \lambda e_1,$ $[e_4, e_2] = (1-\lambda)e_2$	$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, \lambda \geq 1/2, \lambda \neq 1, 2$
14	\mathfrak{h}_4 $[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_3] = e_3, [e_4, e_1] = 1/2 e_1,$ $[e_4, e_2] = e_1 + 1/2 e_2$	$\omega_+ = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4,$ $\omega_- = -e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$
15	\mathfrak{R}_4	$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$

Обозначения в этом списке: $\mathfrak{r}_2 = \text{aff}(\mathbf{R})$ – алгебра Ли аффинных преобразований прямой \mathbf{R} ; \mathfrak{r}'_2 – вещественная алгебра Ли, лежащая в основе комплексной алгебры Ли $\text{aff}(\mathbf{C})$; $\mathfrak{rr}_{3,0}$, $\mathfrak{rr}_{3,-1}$ и \mathfrak{rh}_3 – тривиальные расширения алгебры Ли $\mathfrak{e}(2)$ группы движений \mathbf{R}^2 , алгебры Ли $\mathfrak{e}(1,1)$ группы движений двумерного пространства Минковского и алгебры Ли Гейзенберга \mathfrak{h}_3 соответственно.

3. Параконтактные структуры

Дифференцируемое $(2n+1)$ -мерное многообразие M класса C^∞ называется *контактным многообразием*, если на нем задана дифференциальная 1-форма η , такая что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1} . Контактная форма η определяет на многообразии M^{2n+1} распределение $D = \{X \in TM \mid \eta(X) = 0\}$ ранга $2n$, которое называется *контактным распределением*. Контактное многообразие M имеет всюду ненулевое векторное поле ξ , которое определяется свойствами $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для всех векторных полей X на M . Поле ξ называется *полем Риб*а контактной структуры. Легко видеть, что $L_\xi \eta = 0$. Подробнее о контактных структурах см. в [12].

Параконтактной структурой на контактном многообразии M^{2n+1} называется тройка (η, ξ, ϕ) , где η – контактная 1-форма, ξ – поле Риба и ϕ – эндоморфизм TM , называемый обычно аффинором, обладающие свойством

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi.$$

Кроме того предполагается, что аффинор ϕ действует на слоях контактного распределения $D = \text{Ker}(\eta)$ как паракомплексная структура, т.е. $\phi|_D = Id_D$ и ранги собственных распределений D^+ и D^- равны.

Определение 1. Если M^{2n+1} контактное многообразие с контактной формой η , то параконтактной метрической структурой называется четверка (η, ξ, ϕ, g) ,

где ξ – поле Рибба, g – псевдориманова метрика на M^{2n+1} и φ – аффиносор на M , для которых имеют место следующие свойства:

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad d\eta(X, Y) = g(\varphi X, Y), \quad g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Из второго и третьего свойств сразу следует, что ассоциированная метрика g для параконтактной структуры полностью определяется аффиносором φ :

$$g(X, Y) = -d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Отметим, что для векторных полей X и Y , лежащих в контактном распределении D , выполняются равенства:

$$d\eta(\varphi X, \varphi Y) = -d\eta(\varphi X, Y) \text{ и } g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y).$$

Определим понятие парасасакиевой структуры по аналогии со структурой Сасаки в контактной геометрии. Пусть (M, η, ξ, φ) – параконтактное многообразие. Рассмотрим прямое произведение $M \times \mathbf{R}$. Векторное поле на $M \times \mathbf{R}$ представим в виде $(X, f\partial_t)$, где X – касательный к M^{2n+1} , t – координата на \mathbf{R} и f – функция на $M \times \mathbf{R}$.

Определение 2 [4]. *Параконтактная структура (η, ξ, φ) на M называется нормальной, если интегрируема почти паракомплексная структура J на $M \times \mathbf{R}$, определенная формулой*

$$J(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi, -\eta(X)\partial_t).$$

Нормальная параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется парасасакиевой.

Параконтактные структуры на центральных расширениях алгебр Ли. Левоинвариантные контактные структуры на группах Ли определяются своими значениями на алгебре Ли. В этом смысле мы будем говорить о *контактных алгебрах Ли* (\mathfrak{g}, η) . Как известно [13], контактная алгебра Ли с нетривиальным центром есть центральное расширение симплектической алгебры Ли (\mathfrak{h}, ω) при помощи 2-коцикла ω . Напомним, что центральное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ есть прямое произведение $\mathfrak{h} \times \mathbf{R}$, на котором скобки Ли задаются следующим образом:

- $[X, \xi]_{\mathfrak{g}} = 0$,
- $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi$ для любых $X, Y \in \mathfrak{h}$,

где $\xi = \partial_t$ – единичный вектор из \mathbf{R} .

На алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ контактная форма задается формой $\eta = \xi^*$, т.е. такой формой, что $\eta(\xi) = 1$ и $\eta(\mathfrak{h}) = 0$. Поле $\xi = \partial_t$ является полем Рибба. Контактное распределение D – это подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Если $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$, где $X, Y \in \mathfrak{h}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, тогда

$$d\eta(x, y) = -\eta([x, y]) = -\xi^*([X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi) = -\omega(X, Y).$$

Поскольку аффиносор φ параконтактной структуры определяется фактически своим действием на контактном распределении $D = \mathfrak{h}$ как оператор паракомплексной структуры, то для задания аффиносора φ на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ можно использовать почти паракомплексную структуру J на \mathfrak{h} следующим образом: если $x = X + \lambda\xi$, где $X \in \mathfrak{h}$, то $\varphi(x) = JX$. Таким образом, аффиносор φ имеет блочный вид:

$$\varphi = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если почти паракомплексная структура J на \mathfrak{h} будет еще и согласованной с ω , т.е. обладать свойством $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$, то мы получим параконтактную (псевдориманову) метрическую структуру (η, ξ, φ, g) на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$, определенную формулой

$$g(X, Y) = -d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Теория параконтактных метрических структур в большой степени аналогична классической теории контактных метрических структур. Однако есть и различия, поэтому аналоги основных фактов контактной геометрии требуют доказательств. В частности, хорошо известно, что контактная метрическая структура (η, ξ, ϕ, g) на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ является сасакиевой тогда и только тогда, когда симплектическая алгебра $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ является кэлеровой. Аналогичный факт имеет место и для параконтактных структур, его доказательство приведено в работе [4].

Теорема 1 [4]. *Параконтактная метрическая структура (η, ξ, ϕ, g) на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ является парасасакиевой тогда и только тогда, когда симплектическая алгебра Ли $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ является паракэлеровой.*

В работе [4] показано также, что тензор кривизны парасасакиевой структуры на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ выражается через тензор кривизны паракэлеровой структуры на \mathfrak{h} .

Теорема 2 [4]. *Пусть (ω, J, h) – паракэлерова структура на алгебре Ли \mathfrak{h} и (η, ξ, ϕ, g) – соответствующая ей контактная парасасакиева структура на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$. Тогда тензор кривизны R на \mathfrak{g} выражается через тензор кривизны $R_{\mathfrak{h}}$ на \mathfrak{h} , форму ω и почти паракомплексную структуру J на \mathfrak{h} следующим образом: для любых $X, Y \in \mathfrak{h}$,*

$$R(X, Y)Z = R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z - \frac{1}{4}h(X, JZ)JY + \frac{1}{4}h(Y, JZ)JX - \frac{1}{2}h(X, JY)JZ,$$

$$R(X, Y)\xi = 0, R(X, \xi)Z = \frac{1}{4}g(X, Z)\xi, R(X, \xi)\xi = -\frac{1}{4}X,$$

Теорема 3 [4]. *Пусть (ω, J, h) – паракэлерова структура на алгебре Ли \mathfrak{h} и (η, ξ, ϕ, g) – соответствующая ей параконтактная структура Сасаки на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$. Тогда тензор Риччи Ric на \mathfrak{g} выражается через тензор Риччи $Ric_{\mathfrak{h}}$ на \mathfrak{h} , форму ω и почти паракомплексную структуру J на \mathfrak{h} следующим образом:*

$$Ric(Y, Z) = Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) + \frac{1}{2}h(Y, Z), Ric(Y, \xi) = 0, Ric(\xi, \xi) = -n/2.$$

Следующая теорема представляет основной результат данной работы.

Теорема 4. *Любая парасасакиева структура (g, η, ξ, ϕ, g) на пятимерной алгебре Ли \mathfrak{g} с нетривиальным центром изоморфна центральному расширению $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ одной из алгебр Ли (\mathfrak{h}, ω) , указанных в таблице 1. При этом поле Рибба есть $\xi = \partial_t$, контактная форма $\eta = \xi^*$, аффинор имеет вид $\phi = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где J представлена в списке 4.1 – 4.15 раздела 4 и ассоциированная метрика g определяется по формуле $g(X, Y) = -d\eta(X, \phi Y) + \eta(X)\eta(Y)$.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для классификации парасасакиевых структур на (η, ξ, ϕ, g) на контактных алгебрах Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ достаточно предъявить классификацию паракэлеровых структур J на (\mathfrak{h}, ω) . Аффинор ϕ парасасакиевой структуры на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ определяется паракомплексной структурой J и имеет указанный выше блочный вид. Поэтому для классификации парасасакиевых структур на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ достаточно для каждой симплектической алгебры Ли (\mathfrak{h}, ω) найти все согласованные с ω паракомплексные структуры J , т.е. такие эндоморфизмы $J: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$, которые обладают свойствами:

1. $J^2 = Id$.
2. $\omega(JX, Y) + \omega(X, JY) = 0$.
3. $[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$.

Тогда $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ образует паракэлерову структуру на алгебре Ли \mathfrak{h} , а (η, ξ, φ, g) – парасасакиеву структуру на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$.

В случае четырехмерных симплектических алгебр Ли (\mathfrak{h}, ω) вычисление всех согласованных с ω паракомплексных структур J может быть проведено в явном виде для всех алгебр Ли (\mathfrak{h}, ω) , допускающих паракомплексную структуру (таблица). Явные выражения всех согласованных с ω паракомплексных структур J приведены в разделе 4. Это дает полную классификацию парасасакиевых структур на (η, ξ, φ, g) на пятимерных параконтактных алгебрах Ли \mathfrak{g} с ненулевым центром, т.е. являющихся центральными расширениями $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$.

Рассмотрим, например, алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{rh}_3 \times_{\omega} \mathbf{R}$, где \mathfrak{rh}_3 – вторая алгебра Ли в таблице, $\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$. Базис \mathfrak{g} : e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , где e_1, e_2, e_3, e_4 – базис \mathfrak{rh}_3 и $e_5 = \partial_t$ – касательный вектор к \mathbf{R} . Тогда контактная форма есть $\eta = e^5, d\eta = -e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$, поле Рибба – это $e_5 = \partial_t$, ненулевые скобки Ли алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{rh}_3 \times_{\omega} \mathbf{R}$ следующие: $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{rh}_3 \times_{\omega} \mathbf{R}$ допускает две парасасакиевы структуры (η, ξ, φ, g) с аффинорами φ вида (см. пункт 4.2):

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} a & -b & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2-1}{b} & -a & 0 & 0 & 0 \\ d & c & a & b & 0 \\ -\frac{ca^2+2abd-c}{b^2} & d & -\frac{a^2-1}{b} & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{bd}{2} & c & 1 & b & 0 \\ d & -\frac{bd}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и ассоциированными метриками $g_i(X, Y) = -d\eta(X, \varphi_i Y) + \eta(X)\eta(Y)$, $i = 1, 2$. ■

4. Четырехмерные паракэлеровы алгебры Ли

В этом разделе мы дадим классификацию четырехмерных паракэлеровых алгебр Ли. Она отличается от классификации, предложенной Д. Калварузо [9], тем, что для каждой симплектической алгебры Ли (\mathfrak{h}, ω) таблицы мы находим все согласованные с ω паракомплексные структуры J , т.е. такие эндоморфизмы $J: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$, которые обладают свойствами 1 – 3, указанными в конце раздела 3. Преимущество такого подхода заключается в том, что полученные паракомплексные структуры J можно использовать для определения аффиноров φ парасасакиевых структур на пятимерных параконтактных алгебрах Ли \mathfrak{g} с ненулевым центром.

Ясно, что паракомплексная структура J определяется с точностью до знака. Мы будем указывать только одну J из двух $\pm J$. Паракомплексные структуры $J = J_j^i e_i \otimes e^j$ будем представлять матрицами в базисе $\{e_i\}$ алгебры Ли \mathfrak{h} . Тогда условия 1 – 3 на матрицу J выражаются формулами:

1. $J_k^i J_j^k = \delta_j^i$.
2. $J_i^k \omega_{ki} + \omega_{is} J_j^s = 0$.
3. $C_{ij}^k + J_i^l J_j^m C_{lm}^k - J_i^l J_m^k C_{lj}^m - J_j^l J_m^k C_{il}^m = 0$,

где C_{ij}^m – структурные константы алгебры Ли \mathfrak{h} и δ_j^i – единичная матрица.

Решение уравнений 1 – 3 проведено в системе Maple. Для каждой полученной паракэлеровой структуры $(\mathfrak{h}, \omega, J, g)$ вычислены также тензоры кривизны и Риччи. Напомним, что тензор кривизны определяется формулой $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$. В случае левоинвариантной метрики g_{ij} тензор кривизны вычисляется по формуле $R_{ijk}^s = \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^s - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s - C_{ij}^m \Gamma_{mk}^s$, где $\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} (C_{ij}^p g_{pk} + C_{ki}^p g_{pj} + C_{kj}^p g_{ip})$ – символы Кристоффеля. Тензор Риччи – это свертка тензора кривизны по первому и четвертому (верхнему) индексам, $Ric_{jk} = R_{ijk}^i$. Мы рассматриваем тензор Риччи как тензор типа (1,1), т.е. как оператор Риччи $RIC = Ric \cdot g^{-1}$. Мы представляем тензор Риччи, если он имеет не слишком сложный вид.

Вычисления показывают, что оператор J паракомплексной структуры часто является блочным, имеет в качестве инвариантных подпространств $\mathbf{R}\{e_1, e_2\}$ и $\mathbf{R}\{e_3, e_4\}$ и действует на этих подпространствах матрицами следующего вида:

$$J_-(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{bmatrix}, J_+(a) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$J_-(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{bmatrix}, J_+(a, b) = \begin{bmatrix} a & -\frac{a^2-1}{b} \\ b & -a \end{bmatrix},$$

где $a, b \in \mathbf{R}$. Это простейшие паракомплексные структуры на плоскости \mathbf{R}^2 , согласованные с 2-формой $e^1 \wedge e^2$. Блочный оператор J , составленный из этих матриц, мы будем обозначать как прямое произведение блоков. Например, мы пишем, $J = J_-(a) \times J_+(b)$, если J действует как $J_-(a)$ на $\mathbf{R}\{e_1, e_2\}$ и как $J_+(b)$ на $\mathbf{R}\{e_3, e_4\}$. Единичную матрицу порядка k будем обозначать символом Id_k .

4.1. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_2$

Ненулевые скобки Ли: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_4$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^2 + \lambda e^1 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4$, $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda > 0$ и $\lambda = 0$ существенно различны.

Случай $\lambda > 0$. Существует три паракомплексные структуры J , которые вместе с 2-формой ω дают три паракэлеровы структуры, зависящие от параметров a и b , все нулевой кривизны:

$$J_{1,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{bmatrix}, J_{1,2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & -2 & b & -1 \end{bmatrix}, J_{1,3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & -b & -1 \end{bmatrix}.$$

Случай $\lambda = 0$. Существует 5 паракэлеровых структур.

1. Паракомплексная структура, которая вместе с 2-формой ω дает паракэлерову структуру с эрмитовым тензором Риччи (т.е. $Ric(JX, JY) = Ric(X, Y)$) и с оператором Риччи $RIC = Ric \cdot g^{-1}$ вида, указанного ниже

$$J_{2,1} = \begin{bmatrix} -a & b \\ -\frac{a^2-1}{b} & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c & -\frac{c^2-1}{d} \\ d & -c \end{bmatrix}, RIC_{2,1} = (-b \cdot Id_2) \times \frac{c^2-1}{d} \cdot Id_2.$$

2. Эйнштейнова паракэлерава структура

$$J_{2,2} = \begin{bmatrix} a+1 & b & c-1 & b \\ -\frac{a(a+2)}{b} & -a-1 & -\frac{a(c-1)}{b} & -a \\ a & b & c & b \\ -\frac{a(c-1)}{b} & 1-c & -\frac{c^2-1}{b} & -c \end{bmatrix},$$

$$RIC_{2,2} = -\frac{3b}{2} Id_4.$$

3. Паракэлерава структура с эрмитовым тензором Риччи

$$J_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b & -\frac{b^2-1}{c} \\ c & -b \end{bmatrix}, \quad RIC_{2,3} = \frac{b^2-1}{c} (e_3 \otimes e^3 + e_4 \otimes e^4).$$

4. Паракэлерава структура с эрмитовым тензором Риччи. При $b = c$ является эйнштейновой:

$$J_{2,4} = \begin{bmatrix} -a & b \\ -\frac{a^2-1}{b} & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad RIC_{2,4} = (-b \cdot Id_2) \times (-c \cdot Id_2)$$

5. Паракэлерава структура нулевой кривизны

$$J_{2,5} = e_1 \otimes e^1 - e_2 \otimes e^2 - e_3 \otimes e^3 + e_4 \otimes e^4 + \\ + e_2 \otimes (ae^1 + be^3 - 2e^4) + 2e_3 \otimes e^1 + e_4 \otimes (be^1 - be^3).$$

4.2. Алгебра Ли \mathfrak{rh}_3

Ненулевые скобки Ли: $[e_1, e_2] = e_3$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$. Имеется две паракэлеравы структуры нулевой кривизны:

$$J_1 = \begin{bmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ \frac{a^2-1}{b} & -a & 0 & 0 \\ d & c & a & b \\ -\frac{ca^2+2abd-c}{b^2} & d & -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{bd}{2} & c & 1 & b \\ d & -\frac{bd}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.3. Алгебра Ли $\mathfrak{rx}_{3,0}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = 0$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$. Две паракомплексные структуры J .

1. Паракэлерава структура с эрмитовым тензором Риччи

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & c \\ -\frac{a^2-1}{c} & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b & -\frac{b^2-1}{d} \\ d & -b \end{bmatrix}, \quad RIC_1 = -c(e_1 \otimes e^1 + e_2 \otimes e^2).$$

2. Паракэлерова структура нулевой кривизны

$$J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b & -\frac{b^2-1}{c} \\ c & -b \end{bmatrix}.$$

4.4. Алгебра Ли $\mathfrak{rr}_{3,-1}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = -e_3$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$. Три согласованные паракомплексные структуры J .

1. Две паракэлеровы структуры с нулевым тензором Риччи с инвариантными паракомплексными подпространствами $\mathbf{R}\{e_1, e_4\}$ и $\mathbf{R}\{e_2, e_3\}$

$$J_1 = (e_1 + be_4) \otimes e^1 - e_4 \otimes e^4 + (-e_2 + ae_3) \otimes e^2 + e_3 \otimes e^3,$$

$$J_2 = (-e_1 + be_4) \otimes e^1 + e_4 \otimes e^4 - e_2 \otimes e^2 + (ae_2 + e_3) \otimes e^3.$$

2. Паракэлерова структура нулевой кривизны с инвариантными подпространствами $\mathbf{R}\{e_1, e_4\}$ и $\mathbf{R}\{e_2, e_3\}$

$$J_3 = (-ae_1 + be_4) \otimes e^1 + \left(-\frac{a^2-1}{b}e_1 + ae_4\right) \otimes e^4 - e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^3.$$

4.5. Алгебра Ли \mathfrak{r}'_2

Ненулевые скобки Ли: $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_4$, $[e_2, e_4] = -e_3$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$. Три согласованные паракомплексные структуры J .

1. Паракэлерова структура с эрмитовым тензором Риччи

$$J = \begin{bmatrix} -a & b & c & -d \\ -b & -a & d & c \\ J_1^3 & J_2^3 & a & -b \\ -J_2^3 & J_1^3 & b & a \end{bmatrix}, \quad RIC = 2 \begin{bmatrix} d & -c & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix},$$

где $J_1^3 = -\frac{2abd + c(a^2 - b^2 - 1)}{d^2 + c^2}$, $J_2^3 = \frac{2abc - d(a^2 - b^2 - 1)}{d^2 + c^2}$.

2. Паракэлерова эйнштейнова структура

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{ab+c^2+2}{2} & -c & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{c(ab+c^2+4)}{2b} & a & 1 & c \\ J_1^4 & -\frac{c(ab+c^2+4)}{2b} & 0 & \frac{ab+c^2+2}{2} \end{bmatrix}, \quad RIC = -\frac{3b}{2} Id_4,$$

где $J_1^4 = -\frac{a^2b^2 + 2abc^2 + c^4 + 4ab + 4c^2}{4b}$.

3. Паракэлерова структура нулевой кривизны

$$J = (-e_1 + ae_3 - be_4) \otimes e^1 + (-e_2 + be_3 + ae_4) \otimes e^2 + e_3 \otimes e^3 + e_4 \otimes e^4.$$

4.6. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_{4,0}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = 0$, $[e_4, e_3] = e_2$. Две симплектические структуры $\omega_+ = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$, $\omega_- = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$. Две паракэлеровы структуры с нулевым тензором Риччи и с одной паракомплексной структурой с инвариантными подпространствами $\mathbf{R}\{e_1, e_4\}$ и $\mathbf{R}\{e_2, e_3\}$

$$J = e_1 \otimes e^1 + (ae_1 - e_4) \otimes e^4 - e_2 \otimes e^2 + (be_2 + e^3) \otimes e^3.$$

4.7. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_{4,-1}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$, $[e_4, e_3] = e_2 - e_3$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$. Паракэлерова структура с нулевым тензором Риччи и с инвариантными подпространствами $\mathbf{R}\{e_1, e_3\}$ и $\mathbf{R}\{e_2, e_4\}$

$$J = -e_1 \otimes e^1 + (ae_1 + e_3) \otimes e^3 + e_2 \otimes e^2 + (be_2 - e_4) \otimes e^4.$$

4.8. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_{4,-1,\beta}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$, $[e_4, e_3] = \beta e_3$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$, $-1 < \beta < 0$. Три паракомплексные структуры J .

1. Паракэлерова структура с эрмитовым тензором Риччи

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & -\frac{a^2-1}{b} \\ b & -a \end{bmatrix}, \quad RIC_1 = b\beta^2(e_3 \otimes e^3 + e_4 \otimes e^4).$$

2. Две паракэлеровы структуры с нулевым тензором Риччи

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.9. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$, $[e_4, e_3] = -e_3$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$. Пять согласованных паракомплексных структур J .

1. Паракэлерова структура с эрмитовым тензором Риччи

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{a^2}{b} & a & -\frac{a(c-1)}{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(c-1)}{b} & c & -\frac{c^2-1}{b} \\ 0 & -a & b & -c \end{bmatrix}, \quad RIC_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

2. Три паракэлеровы структуры с нулевым тензором Риччи

$$J_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -\frac{a^2-1}{b} \\ c & -a & b & -d \\ d & -\frac{a^2-1}{b} & a & \frac{c(a^2-1)-2abd}{b^2} \\ b & 0 & 0 & -a \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, J_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{2a}{b} \\ b & 1 & 0 & -a \\ a & \frac{2a}{b} & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Паракэлерова структура нулевой кривизны

$$J = e_1 \otimes e^1 + (-e_2 + ae_3) \otimes e^2 + e_3 \otimes e^3 + (ae_1 + be_3 - e_4) \otimes e^4.$$

4.10. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_{4,-\alpha,\alpha}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = -\alpha e_2$, $[e_4, e_3] = \alpha e_3$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$, $0 < \alpha < 1$. Три паракомплексные структуры.

1. Паракэлерова структура с эрмитовым тензором Риччи и с паракомплексными подпространствами $\mathbf{R}\{e_1, e_4\}$ и $\mathbf{R}\{e_2, e_3\}$:

$$J_1 = (-\alpha e_1 + be_4) \otimes e^1 + \left(-\frac{\alpha^2-1}{b} e_1 + \alpha e_4\right) \otimes e^4 - e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^3,$$

$$RIC_{1,2} = b(e_1 \otimes e^1 + e_4 \otimes e^4).$$

2. Две паракэлеровы структуры с нулевым тензором Риччи и с паракомплексными подпространствами $\mathbf{R}\{e_1, e_4\}$ и $\mathbf{R}\{e_2, e_3\}$

$$J_2 = e_1 \otimes e^1 + (\alpha e_1 - e_4) \otimes e^4 - e_2 \otimes e^2 + (be_2 + e_3) \otimes e^3,$$

$$J_3 = e_1 \otimes e^1 + (\alpha e_1 - e_4) \otimes e^4 + (e_2 + be_3) \otimes e^2 - e_3 \otimes e^3.$$

4.11. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,1}$

Ненулевые скобки Ли $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_3] = e_3$, $[e_4, e_1] = e_1$. Две симплектические структуры $\omega_1 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$, $\omega_2 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4$.

4.11.1. Симплектическая структура $\omega_1 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$. Пять паракэлеровых структур.

1. Паракэлерова эйнштейнова структура

$$J_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a^2}{b} & a & -\frac{a(c+1)}{b} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(c+1)}{b} & c & -\frac{c^2-1}{b} \\ 0 & a & b & -c \end{bmatrix}, RIC_{1,1} = -\frac{3b}{2} Id_4.$$

2. Паракэлерова структура с эрмитовым тензором Риччи

$$J_{1,2} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & \frac{a^2-1}{b} \\ c & a & b & d \\ d & -\frac{a^2-1}{b} & -a & -\frac{2abd+c(a^2-1)}{b} \\ -b & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$RIC_{1,2} = 2be_1 \otimes e^3 - 2be_4 \otimes e^2.$$

3. Паракэлерова структура с нулевым тензором Риччи

$$J_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2a}{b} \\ b & -1 & 0 & a \\ a & -\frac{2a}{b} & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Две паракэлеровы структуры нулевой кривизны

$$J_{1,4} = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_{1,5} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.11.2. Симплектическая структура $\omega_2 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4$. Одна паракэлерова структура нулевой кривизны

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.12. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,2}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_3] = e_3$, $[e_4, e_1] = 2e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$. Три симплектические структуры $\omega_1 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$, $\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$, $\omega_3 = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$.

1. Симплектическая структура $\omega_1 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$. Три паракэлеровы структуры. Эйнштейнова структура

$$J_{1,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{bmatrix},$$

$$RIC_{1,1} = \frac{3(a^2-1)}{2b} Id_4.$$

Две Риччи-плоские структуры

$$J_{1,2} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Симплектическая структура $\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$. Существуют две паракэлеровы структуры с паракомплексными подпространствами $\mathbf{R}\{e_1, e_4\}$ и $\mathbf{R}\{e_2, e_3\}$

$$J_{2,1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 2\frac{a^2-1}{b} \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & -\frac{a^2-1}{b} & a & 0 \\ -b/2 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \quad RIC_{1,2} = 3be_1 \otimes e^1 - 3be_4 \otimes e^4,$$

$$J_{2,2} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & -b(a+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -1 & 0 \\ \frac{a-1}{b} & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad RIC_{1,2} = 4\frac{a-1}{b}(e_1 \otimes e^1 - e_4 \otimes e^4).$$

3. Симплектическая структура $\omega_3 = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$. Девять паракэлеровых структур ненулевой кривизны

$$J_{3,1} = J_{2,1}, \quad J_{3,2} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -b(a+1) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ \frac{a-1}{b} & 0 & 0 & -a \end{bmatrix},$$

$$J_{3,3} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & b & -1 & a \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & b & -1 & a \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_{3,5} = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & b & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{3,6} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad J_{3,7} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & a & 1 \end{bmatrix},$$

$$J_{3,8} = \begin{bmatrix} a-1 & b & a & -\frac{2b(a-2)}{a} \\ \frac{a^2}{2b} & \frac{a}{2}+1 & \frac{a^2}{2b} & -a \\ \frac{a}{2} & \frac{b(a+4)}{2a} & \frac{a}{2}-1 & b \\ \frac{a^2}{2b} & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{2b} & 1-a \end{bmatrix}, \quad J_{3,9} = \begin{bmatrix} -a-1 & b & a & \frac{2b(a+2)}{a} \\ \frac{a^2}{2b} & \frac{a}{2}+1 & \frac{a^2}{2b} & -a \\ \frac{a}{2} & \frac{b(a-4)}{2a} & \frac{a}{2}-1 & b \\ -\frac{a^2}{2b} & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{2b} & a+1 \end{bmatrix}.$$

4.13. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,\lambda}$

Ненулевые скобки Ли: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_3] = e_3$, $[e_4, e_1] = \lambda e_1$, $[e_4, e_2] = (1-\lambda)e_2$, $\lambda \geq 1/2$, $\lambda \neq 1, 2$. Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$. Три паракэлеровы структуры ненулевой кривизны. Две Риччи-плоские метрики

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Эйнштейнова метрика

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \frac{1-a^2}{b} \\ 0 & 0 & b & -a \end{bmatrix}, \quad RIC_3 = -\frac{3b}{2} Id_4.$$

4.14. Алгебра Ли \mathfrak{h}_4

Ненулевые скобки Ли: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_3] = e_3$, $[e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1$, $[e_4, e_2] = e_1 + \frac{1}{2}e_2$. Симплектическая структура $\omega = \pm e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$. Одна паракэлерова структура с нулевым тензором Риччи

$$J = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.15. Алгебра Ли \mathfrak{R}_4

Симплектическая структура $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ на \mathbf{R}^4 . Любая паракомплексная структура J на \mathbf{R}^4 , согласованная с ω определяет паракэлерову структуру нулевой кривизны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // Успехи математических наук. 2009. Т. 64. Вып. 1(385). С. 3–50. URL: <https://doi.org/10.4213/rm9262>.
2. Calvaruso G. and Fino A. Complex and paracomplex structures on homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Int. J. Math. 2013. V. 24. 1250130. 28 p. URL: <https://doi.org/10.1142/S0129167X12501303>.
3. Cruceanu V., Fortuny P. and Gadea P.M. A survey on paracomplex geometry // Rocky Mount. J. Math. 1996. V. 26. P. 83–115.
4. Смоленцев Н.К. Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3.
5. Ovando G. Invariant complex structures on solvable real Lie groups // Manuscripta Math. 2000. V. 103. P. 19–30. URL: <https://doi.org/10.1007/s002290070026>.
6. Ovando G. Four-dimensional symplectic Lie algebras // Beiträge Algebra Geom. V. 47. 2006. No. 2. P. 419–434. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0407501>.

7. *Ovando G.* Invariant pseudo-Kähler metrics in dimension four // *J. Lie Theory.* 2006. V. 16. P. 371–391.
8. *Calvaruso G.* Symplectic, complex and Kähler structures on four-dimensional generalized symmetric spaces // *Diff. Geom. Appl.* 2011. V. 29. P. 758–769. URL: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2011.08.004>.
9. *Calvaruso G.* A complete classification of four-dimensional para-Kähler Lie algebras // *Complex Manifolds.* 2015. V. 2. Iss. 1. P. 733–748. DOI: 10.1515/coma-2015-0001.
10. *Andrada A., Barberis M.L., Dotti I.G., Ovando G.* Product structures on four-dimensional solvable Lie algebras // *Homology, Homotopy and Applications.* 2005. No. 7. P. 9–37. DOI: 10.4310/HHA.2005.v7.n1.a2.
11. *Kobayashi S. and Nomizu K.* *Foundations of Differential Geometry.* Vol. 1 and 2. New York; London: Interscience Publ., 1963.
12. *Blair D.E.* *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976. ISBN 978-3-540-38154-9.
13. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // *Diff. Geom. and its Appl.* 2008. V. 26. Iss. 5. P. 544–552 (arXiv: math. DG/0403555 v2 24 Sep 2004). URL: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001>
14. *Calvaruso G., Perrone A.* Five-dimensional paracontact Lie algebras // *Diff. Geom. and Appl.* 2016. V. 45. P. 115–129. URL: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2016.01.001>.

Статья поступила 08.06.2020

Smolentsev N. K., Shagabudinova I.Y. (2021) ON PARASASAKIAN STRUCTURES ON FIVE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 69. pp. 37–52

DOI 10.17223/19988621/69/4

Keywords: para-complex structure; left-invariant para-Kähler structure; para-contact structure; left-invariant para-Sasakian structures.

In this paper, we consider para-Sasakian structures on five-dimensional Lie algebras with a nontrivial center. As is known, they are central extensions $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ of symplectic Lie algebras (\mathfrak{h}, ω) . It is also known that a paracontact metric structure $(\eta, \xi, \varphi, \mathfrak{g})$ on a central extension $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ is para-Sasakian if and only if the symplectic para-complex Lie algebra $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ is para-Kähler. In this case, the affinor φ has the block form $\varphi = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Therefore, it suffices to present a para-complex structure J in order to find the affinor φ . The associated metric g is found by the formula $g(X, Y) = -d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Therefore, the question of classification of five-dimensional para-Sasakian Lie algebras is reduced to the question of classification of para-Kähler structures J on four-dimensional symplectic Lie algebras (\mathfrak{h}, ω) . In this paper, such a classification is obtained, and the para-complex structures J are found explicitly for each Lie algebra (\mathfrak{h}, ω) . The resulting structures J define all possible affinors φ of para-Sasakian structures $(\eta, \xi, \varphi, \mathfrak{g})$ on central extensions $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ of symplectic Lie algebras (\mathfrak{h}, ω) , which gives the classification of five-dimensional para-Sasakian Lie algebras with a nontrivial center.

AMS Mathematical Subject Classification: 53C15, 53D10, 53C25, 53C50

Nikolay K. SMOLENTSEV (Doctor of phys.-math. sciences, professor of Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia. E-mail: smolennk@mail.ru).

Irina Y. SHAGABUDINOVA (graduate student of Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia. E-mail: shagabudinovai@mail.ru).

REFERENCES

1. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russian Mathematical Surveys*. 64(1). pp. 1–43. URL: <https://doi.org/10.4213/rm9262>
2. Calvaruso G. and Fino A. (2013) Complex and paracomplex structures on homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds, *International Journal of Mathematics*. 24. 1250130. URL: <https://doi.org/10.1142/S0129167X12501303>.
3. Cruceanu V., Fortuny P. and Gadea P.M. (1996) A survey on paracomplex geometry. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 26. pp. 83–115.
4. Smolentsev N.K. (2019) Levoinvariantnyye para-sasakiyevy struktury na gruppakh Li [Left-invariant para-Sasakian structures on Lie groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3.
5. Ovando G. (2000) Invariant complex structures on solvable real Lie groups. *Manuscripta Mathematica*. 103. pp. 19–30. URL: <https://doi.org/10.1007/s002290070026>.
6. Ovando G. (2006) Four-dimensional symplectic Lie algebras. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*. 47(2). pp. 419–434. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0407501>.
7. Ovando G. (2006) Invariant pseudo-Kähler metrics in dimension four. *Journal of Lie Theory*. 16. pp. 371–391.
8. Calvaruso G. (2011) Symplectic, complex and Kähler structures on four-dimensional generalized symmetric spaces. *Differential Geometry and its Applications*. 29(6). pp. 758–769. URL: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2011.08.004>.
9. Calvaruso G. (2015) A complete classification of four-dimensional paraKähler Lie algebras. *Complex Manifolds*. 2(1). pp. 733–748. DOI: 10.1515/coma-2015-0001.
10. Andrada A., Barberis M.L., Dotti I.G., Ovando G. (2005) Product structures on four-dimensional solvable Lie algebras. *Homology, Homotopy and Applications*. 7(1). pp. 9–37. DOI: 10.4310/HHA.2005.v7.n1.a2.
11. Kobayashi S. and Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2*. New York: Interscience Publishers.
12. Blair D.E. (1976) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag.
13. Diatta A. (2008) Left invariant contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 26(5). pp. 544–552. URL: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001>.
14. Calvaruso G., Perrone A. (2016) Five-dimensional paracontact Lie algebras. *Differential Geometry and its Applications*. 45. pp. 115–129. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2016.01.001>.

Received: June 8, 2020

МЕХАНИКА

УДК 539.3,551.24

DOI 10.17223/19988621/69/5

А.Ж. Ахметов, И.Ю. Смолин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЯКУТСКО-ВИЛЮЙСКОЙ ИЗВЕРЖЕННОЙ ПРОВИНЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ГЕОТЕКТОНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИБИРСКОМ КРАТОНЕ¹

Статья посвящена моделированию напряженно-деформированного состояния участка земной коры и верхней мантии. Объектом исследования является двумерная структурная компьютерная модель участка Якутско-Виллюйской крупной изверженной провинции (КИП), построенная на основе геологического профиля «Кратон-1980», полученного методом глубинного сейсмического зондирования (ГСЗ). Для описания деформирования геосред применена упругопластическая модель с неассоциированным законом пластического течения, критерием текучести Друкера – Прагера – Николаевско-го и прочностной модели «jelly sandwich». Представлены результаты моделирования напряженно-деформированного состояния выбранного участка Сибирского кратона. Полученная в расчетах локализация пластической деформации соответствует местонахождениям полезных ископаемых. Показано, что характер неоднородного распределения напряжений определяется наличием и кривизной слоёв земной коры и верхней мантии, а также реологическими свойствами геосреды.

Ключевые слова: численное моделирование, напряженно-деформированное состояние, локализация неупругой деформации, упругопластическая среда, Якутско-Виллюйская крупная изверженная провинция (КИП).

В настоящее время полностью не исследована природа формирования и изменения внешних и внутренних геологических структур земной коры. За многие миллионы лет внешняя земная структура не один раз подвергалась геологическим изменениям вследствие движения литосферных плит, которое вызвано циркуляцией мантии в глубоких недрах Земли [1]. Одним из методов определения эволюции движения литосферных плит и оценки равновесного состояния между земной корой и мантийным слоем является анализ напряженно-деформированного состояния глубинной структуры литосферы [2].

На территории Евразии находится один из самых больших блоков земной коры – Сибирский кратон. Многие учёные начиная с XIX века усиленно изучали структуру данной области, от первых полевых экспедиций в Сибирь до создания компьютерных структурных моделей всего геологического объекта в целом [3, 4]. Ввиду большой протяженности Сибирского кратона, в его внутренних областях

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90034.

выделяется ряд геологических объектов, на территориях которых наблюдаются такие геодинамические процессы, как коллизия, растяжения и сдвиги. Анализ геотектонических процессов на территории Енисейского кряжа, находящегося в состоянии коллизии, проведен нами ранее и представлен в работах [5, 6]. В данной статье в качестве объекта исследования была выбрана Вилюйская синеклиза, которую в ряде источников [7, 8] называют Якутско-Вилюйской крупной изверженной провинцией (КИП). Данная территория расположена в северо-восточной области Сибирского кратона, примыкает к Предверхоанскому краевому прогибу и граничит на севере и юге со склонами Анабарского массива и Байкало-Алданского щита, а на западе и юго-западе постепенно переходит в Ангаро-Ленский прогиб. На самой территории и на границах с прилегающими геологическими областями распространены зоны разломов. На территории Якутско-Вилюйской КИП находится Лено-Вилюйская нефтегазоносная провинция, которая является одним из богатейших месторождений нефти и газа на территории Российской Федерации [9]. Это определяет важность исследования этой области.

Цель данного исследования – разработать компьютерную модель, позволяющую оценить геотектонические процессы на основе анализа напряженно-деформированного состояния выбранного геологического объекта, и выявить связь между расположением областей локализации пластической деформации в слоях литосферы и местоположением залежей нефти и газа.

Структурная модель Якутско-Вилюйской КИП

В 80-х годах XX века на территории Якутско-Вилюйской КИП, входящей в состав Сибирского Кратона, были проведены геологические и геофизические исследования слоёв земной коры и верхней мантии в ходе проекта «Комплексного освоения земных недр СССР» [10]. На рис. 1 показана ориентация геологического профиля «Кратон-1980» общей протяженностью около 3500 км, полученного методом глубинного сейсмического зондирования. Черным прямоугольником выделена часть геологического разреза, которая проходит по территории Якутско-Вилюйской КИП.

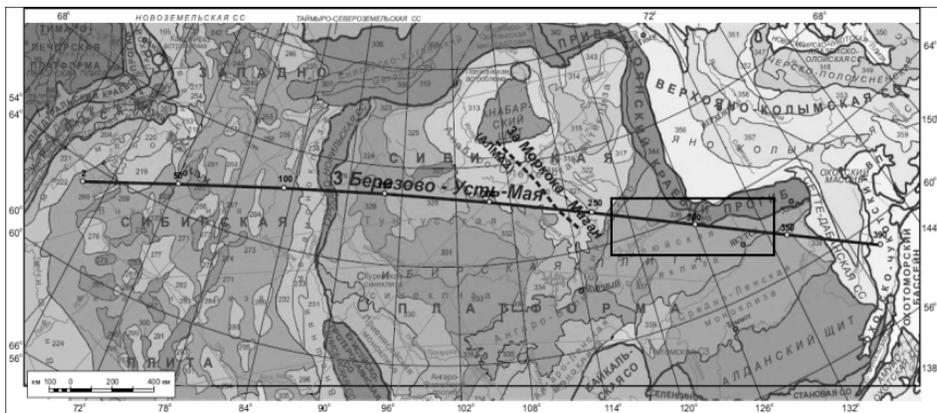


Рис. 1. Ориентация геологического профиля «Кратон-1980» на геолого-структурной карте России [11]

Fig. 1. Orientation of the geological profile “Craton-1980” on the geological and structural map of Russia [11]

Особенность ориентации геологического профиля «Кратон-1980» в том, что он проходит по территории Лено-Вилуйской нефтегазовой провинции, которая является одним из крупнейших месторождений нефти и газа в Якутии (рис. 1 и 2) [12].

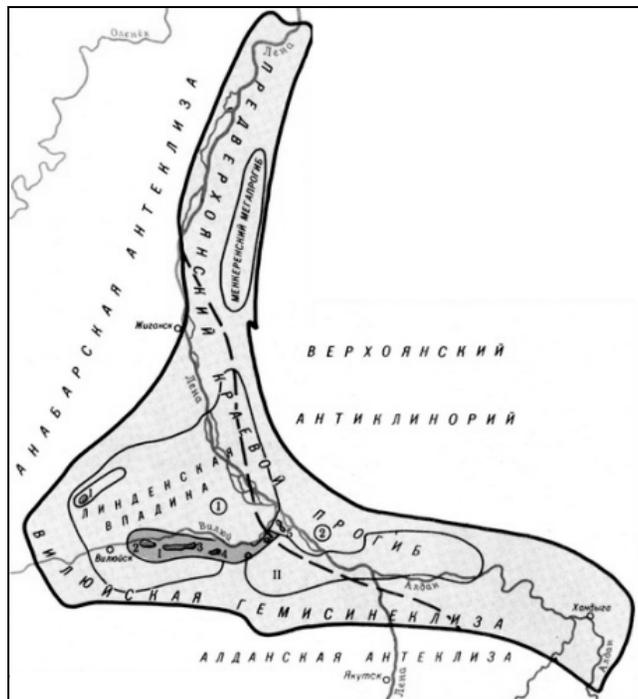


Рис. 2. Лено-Вилуйская газонефтеносная провинция [13]. Цифрами обозначены структурные элементы: I – Хапчгайский мегавал, II – Лунгхинско-Келинский мегапрогиб; нефтегазоносные области (цифры в кружочках): 1 – Вилуйская, 2 – Предверхоянская; месторождения: 1 – Среднетюнговское, 2 – Средневилуйское, 3 – Толон-Мастахское, 4 – Соболах-Недлинское, 5 – Усть-Вилуйское. Черной прерывистой линией показаны границы нефтегазоносных областей

Fig. 2. Leno-Viluyi gas- and oil-bearing province [13]. The numbers indicate structural elements: I – Napchagai megalithic bank and II – Lungkhinsko-Kelinsky mega-trough; oil- and gas-bearing areas (circled numbers): (1) Vilyui and (2) Pre-Verkhoyansk; deposits: 1, Srednetnyungskoe; 2, Srednevilyuyskoe; 3, Tolon-Mastakhscoe; 4, Sobolokh-Nedlinskoe; and 5, Ust-Vilyuyskoe. The black dashed line indicates the boundaries of the oil- and gas-bearing areas

На рис. 3 представлена часть геологического профиля «Кратон-1980» с геофизическими данными, полученными методом ГСЗ, отражающая неоднородную глубинную структуру исследуемого региона. Протяженность данного участка профиля равна 475 км, а глубина – 60 км. Регистрация сейсмических волн осуществлялась аналоговыми станциями «Тайга» и «Черепаша» с трёхкомпонентными

сейсмоприемниками НСП-3. Шаг пунктов приёма – 10 км. Длина годографа 200–1050 км [14]. Зарегистрировано около 1500 аналоговых сейсмограмм, из которых оцифровано и принято для дальнейшей работы 1488 сейсмограмм (730 сейсмограмм – при возбуждении ядерными взрывами, 758 сейсмограмм – при возбуждении химическими взрывами) [15]. Условные знаки геофизических данных представлены в атласе [11].

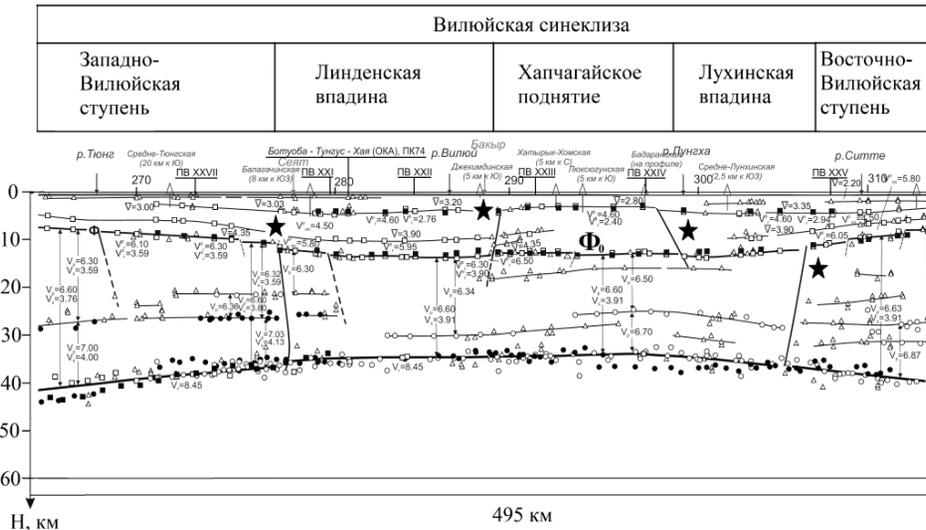


Рис. 3. Часть геологического профиля «Кратон-1980», охватывающая всю территорию Вилуйской синеклизы
Fig. 3. A part of the geological profile “Craton-1980” comprising the entire territory of the Vilyuy Syncline

На рис. 3 наблюдается глубокий прогиб кристаллического фундамента, обозначенный буквой Φ_0 , который простирается вдоль профиля на глубине 7 км от земной поверхности в левой и правой сторонах профиля и далее опускается до 15–18 км в глубину в середине профиля. Верхний слой земной коры, граничащий непосредственно с кристаллическим фундаментом, является Вилуйским осадочным бассейном, который накапливался в течение миллионов лет. Весь геологический профиль разделён на серию блоков, которые отделяются друг от друга сквозными разломами – они обозначены на профиле субвертикальными сплошными линиями, обозначенными звездочками. Также на рис. 3 видно продольное расслоение осадочного чехла на глубине 4–8 км, но мы не будем учитывать данную особенность структуры чехла ввиду малого различия значений скоростей продольных и поперечных волн. На данном рисунке отчётливо видны сквозные разломы, которые разделяют весь профиль на серию обозначенных блоков, из которых состоит Якутско-Вилуйская КИП. Это Западно-Вилуйская ступень, Линденская впадина, Хапчагайское поднятие, Лунхинская впадина, Восточно-Вилуйская ступень. Ниже на глубине 46 км выявлена граница Мохо (M), обозначенная черной толстой линией, которая отделяет земную кору от верхней мантии. Она имеет форму, симметричную с границей кристаллического фундамента. Гра-

нища Мохо простирается вдоль профиля на глубине 40–42 км в левой и правой стороне профиля и поднимается до глубины 37 км в середине профиля. Вследствие такого расположения границы Мохо и границы, разделяющей кристаллический фундамент с осадочным чехлом, внутренние глубинные слои земной коры, лежащие на глубинах 20–40 км, являются сильно деформированными.

На основе вышеуказанных геофизических данных была создана двумерная структурная модель исследуемого региона, представленная на рис. 4.



Рис. 4. Компьютерная структурная модель Якутско-Вилуйской КИП вдоль геологического профиля «Кратон-1980»

Fig. 4. A computer structural model of the Yakutsk-Vilyui LIP along the geological profile “Craton-1980”

В этой модели отражена слоистая неоднородность земной коры и верхней мантии. Слои отличаются своими физико-механическими свойствами. В ходе численного моделирования такая структура будет обуславливать неоднородность напряженного состояния и локализацию неупругой деформации, которые могут повлиять на образование местонахождений полезных ископаемых. Упругие свойства каждого из слоёв земной коры и верхней мантии представлены в таблице. Они были определены по геофизическим данным геологического профиля «Кратон-1980».

Упругие свойства слоёв земной коры и верхней мантии геологического профиля «Кратон-1980»

							
	Осадочный слой	Слой 2	Слой 3	Слой 4	Слой 5	Слой 6	Верхняя мантия
Плотность, г/см ³	2.684	2.78	2.81	2.93	3.05	3.25	3.4
Модуль сдвига, ГПа	33.67	35.43	36.52	41.64	46.98	44.25	40.25
Модуль всестороннего сжатия, ГПа	52.22	58.73	63.12	66.07	66.57	78.73	80.73

Математическая постановка задачи

В основе математической постановки задачи о расчете напряженно-деформированного состояния и движения элементов земной коры лежат фундаментальные уравнения механики деформируемого твердого тела и определяющие соотношения. К фундаментальным уравнениям относятся законы сохранения массы, импульса и энергии [16]:

$$\rho_0 V_0 = \rho V ; \quad (1)$$

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + \rho g_i ; \quad (2)$$

$$\dot{E} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} , \quad (3)$$

Здесь ρ_0, ρ – начальное и текущее значение плотности среды, V_0, V – начальное и текущее значение объема некоторой малой области среды, u_i – компоненты вектора перемещения, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, g_i – компоненты ускорения свободного падения, E – внутренняя энергия единицы начального объема, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций. Точка над символом обозначает материальную производную по времени, запятая в нижнем индексе – частную производную по соответствующей пространственной координате.

Для описания упругопластического деформирования среды принимается гипотеза аддитивного разложения полного тензора деформаций и тензора скоростей деформаций на упругую и пластическую составляющие

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p . \quad (4)$$

Определяющие соотношения первой группы задают связь между напряжениями и упругими деформациями и ниже записаны в скоростной форме (5), (6), в которых скорость напряжений пропорциональна скорости упругой деформации

$$\frac{Ds_{ij}}{Dt} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} \right) , \quad (5)$$

$$\dot{P} = -K \dot{\varepsilon}_{kk}^e , \quad (6)$$

где

$$\sigma_{ij} = (-P \delta_{ij} + s_{ij}) ; \quad (7)$$

$$\frac{Ds_{ij}}{Dt} = \dot{s}_{ij} - s_{ik} \dot{\omega}_{jk} - s_{jk} \dot{\omega}_{ik} ; \quad (8)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) ; \quad (9)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) , \quad (10)$$

s_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений; P – давление; δ_{ij} – символ Кронекера; $\frac{D}{Dt}$ – означает вращательную производную по времени (производную

Яуманна); μ – модуль сдвига; K – модуль всестороннего сжатия; $\dot{\omega}_{ij}$ – компоненты псевдотензора скорости вращения.

Целью определяющих уравнений второй группы является определение скорости пластической деформации. В качестве основы взята теория пластического течения, согласно которой компоненты тензора скорости пластических деформаций задаются законом пластического течения [16]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (11)$$

Мы будем использовать модель Друкера – Прагера – Николаевского с неассоциированным законом течения, позволяющим независимо описывать процессы дилатансии и внутреннего трения. Предельная поверхность напряжений записана в виде условия Друкера – Прагера

$$f = \frac{\alpha}{3} J_1 + J_2^{1/2} - Y = 0, \quad (12)$$

где f – поверхность текучести; J_1 – первый инвариант тензора напряжений; J_2 – второй инвариант девиатора тензора напряжений; Y – когезия; α – коэффициент внутреннего трения.

В случае неассоциированного закона течения пластический потенциал не совпадает с функцией пластичности и в соответствии с теорией Николаевского принимается в виде

$$g(\sigma_{ij}) = J_2 + \frac{\Lambda}{3} J_1 \left(2Y - \frac{\alpha}{3} J_1 \right) + const, \quad (13)$$

где Λ – коэффициент дилатансии.

Компоненты скоростей неупругой деформации определяются законом пластического течения (11) и будут иметь в случае потенциала (13) вид, определяемый уравнениями

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \left(s_{ij} + \frac{2}{3} \Lambda \left(Y - \frac{\alpha}{3} J_1 \right) \delta_{ij} \right) \dot{\lambda}, \quad (14)$$

где $\dot{\lambda}$ – безразмерный скалярный множитель в теории пластичности.

В рамках модели Друкера – Прагера, сдвиговая прочность среды характеризуется следующим выражением:

$$J_2^{1/2} = Y + \alpha \cdot P. \quad (15)$$

Прочность геосреды меняется в зависимости от многих факторов, среди которых можно выделить такие, как температура, наличие и количество флюидов, состав горных пород и т.д. В настоящее время многими учёными для оценки напряженного состояния литосферы используется модель, которую называют «jelly sandwich» [17]. Её можно использовать для задания изменения параметров прочностной модели Друкера – Прагера – Николаевского в зависимости от глубины и слоев земной коры и верхней мантии.

На рис. 5 представлено распределение сдвиговой прочности литосферы, коэффициента внутреннего трения и когезии в зависимости от глубины слоёв земной коры и верхней мантии в соответствии с моделью «jelly sandwich» для континентальной литосферы.

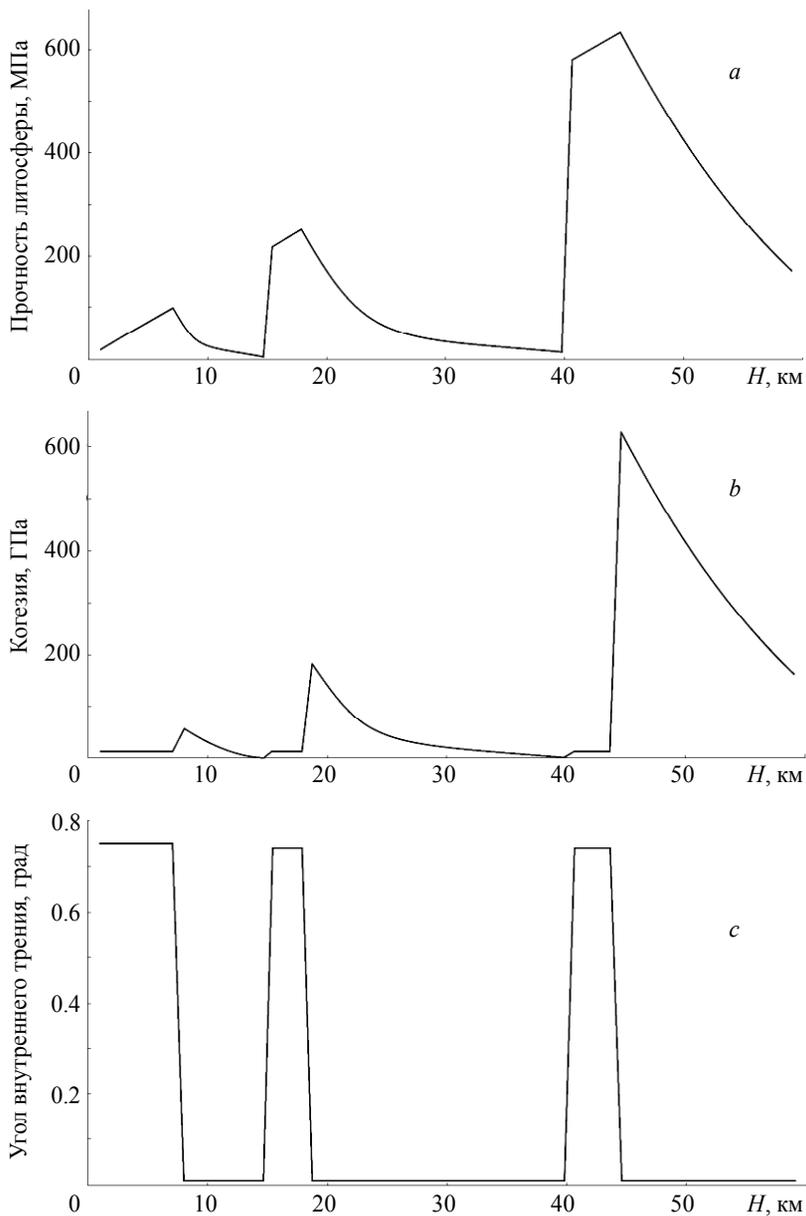


Рис. 5. Распределение прочности литосферы (а), когезии (b) и коэффициента внутреннего трения (с) в зависимости от глубины слоёв земной коры и верхней мантии

Fig. 5. Distribution of the (a) strength of lithosphere, (b) cohesion, and (c) internal friction coefficient in accordance with depth of layers of the earth's crust and upper mantle

Как видно из рис. 5, а, прочность литосферы характеризуется чередованием зон увеличения и уменьшения прочностных свойств слоёв земной коры и верхней мантии, для того чтобы соблюсти условие равновесного напряженного состояния литосферы в условиях влияния тепловых потоков от мантийного слоя. Как можно

заметить, зоны упрочнения и разупрочнения имеют разную протяженность. В нашем случае, во-первых, это связано с расположением слоёв литосферы в геологическом профиле и их физико-механическими свойствами. А во-вторых, влиянием тепловых эффектов из мантийного слоя на деформированные глубинные слои литосферы выше границы Мохо на уровне глубин 20–40 км. Важной характеристикой данной зависимости является давление, которое растет с увеличением глубины. Величина когезии (сцепления), проиллюстрированная на рис. 5, *b*, также влияет на характер изменения прочностных свойств, и именно поэтому в зоне упрочнения она имеет постоянное значение, а в зонах разупрочнения – падает по квадратичному закону. Значение коэффициента внутреннего трения на рис. 5, *c* меняется в зависимости от зон увеличения и уменьшения прочности.

Прикладываемые в расчетах граничные условия представлены на рис. 6. Выбор граничных условий соответствует геодинамической ситуации на территории Якутско-Вилуйской КИП, где происходит процесс растяжения, возникающий в результате действия мантийного плюма на земную кору [18].

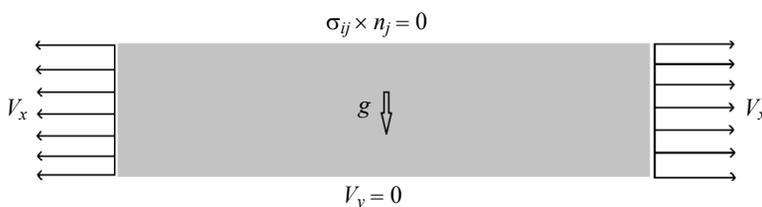


Рис. 6. Схема граничных условий для численного эксперимента
Fig. 6. Schematic representation of boundary conditions for a numerical experiment

Как видно из рис. 6, мы будем проводить компьютерное моделирование геотектонического процесса растяжения, при этом верхняя граница расчетной области является земной поверхностью и свободна от напряжений, а на нижней границе вертикальные перемещения запрещены.

На рис. 7 представлены графики плавного изменения ускорения свободного падения и горизонтальной скорости растяжения в зависимости от времени, позволяющие снизить влияние динамических эффектов применяемого конечно-разностного метода Уилкинса при расчете равновесного напряженно-деформированного состояния исследуемой области [19].

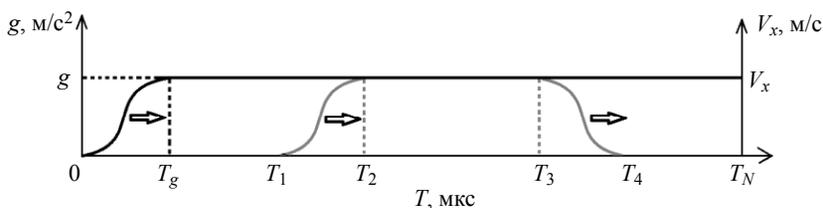


Рис. 7. Изменение ускорения свободного падения и скорости растяжения как функции времени в ходе численного моделирования
Fig. 7. Variation of the gravitational acceleration and horizontal tensile velocity as the functions of time in the numerical modeling

Результаты моделирования и их обсуждение

Вначале были проведены тестовые расчеты на сходимость получаемых результатов численного моделирования при разных размерах ячеек разностной сетки. Результаты исследования представлены в виде графиков на рис. 8.

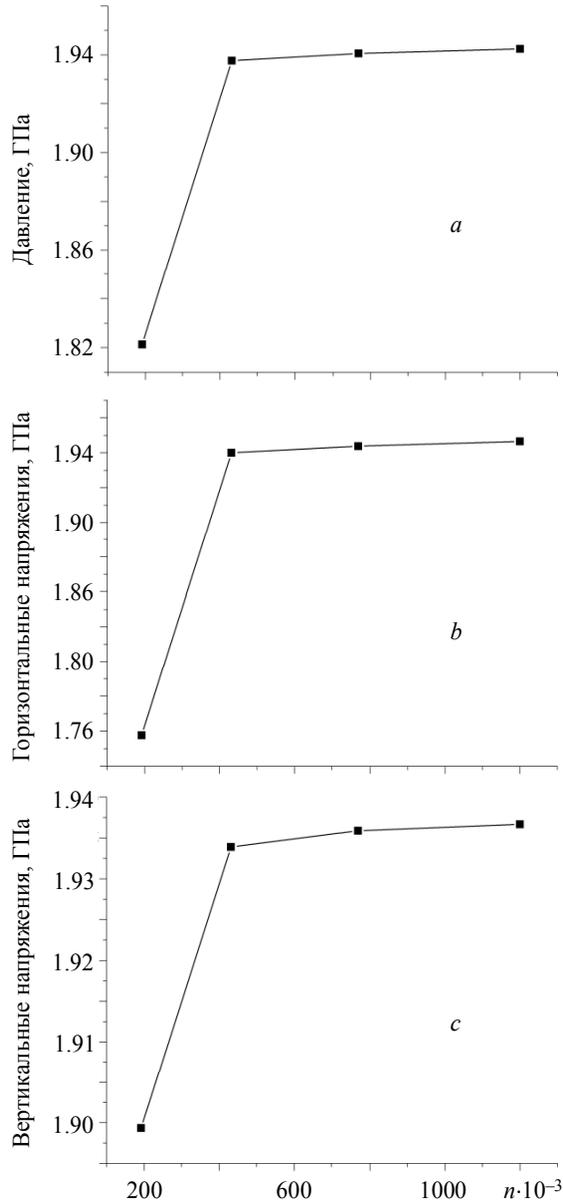


Рис. 8. Максимальные значения горизонтальных напряжений (a), давления (b), вертикальных напряжений (c) в зависимости от числа ячеек расчётной сетки

Fig. 8. Maximum values of (a) horizontal stresses, (b) pressure, and (c) vertical stresses versus the number of computational mesh cells

На основе полученных результатов была выбрана расчётная сетка с 432000 элементами, так как она способна дать достаточно точные результаты моделирования и сэкономить вычислительную мощность компьютера. Используя выбранную расчётную сетку, было выполнено численное моделирование процесса растяжения выбранного участка Якутско-Вилуйской изверженной провинции.

На рис. 9 представлено распределение давления в слоях литосферы. Неравномерность распределения давления обусловлена не только влиянием силы тяжести, что приводит к линейному росту давления с глубиной, но и слоистой неоднородностью земной коры и верхней мантии. Следует также отметить, что в нашем случае общее давление является суммой литостатического давления (за счет действия силы тяжести) и тектонического избыточного давления, вызванного горизонтальным растяжением. Ещё одной особенностью полученного распределения давления является применение прочностной модели «Jelly Sandwich», что приводит к чередованию слоев повышенного и пониженного давления с глубиной. Максимальные значения давления сосредоточены в районе верхней мантии.

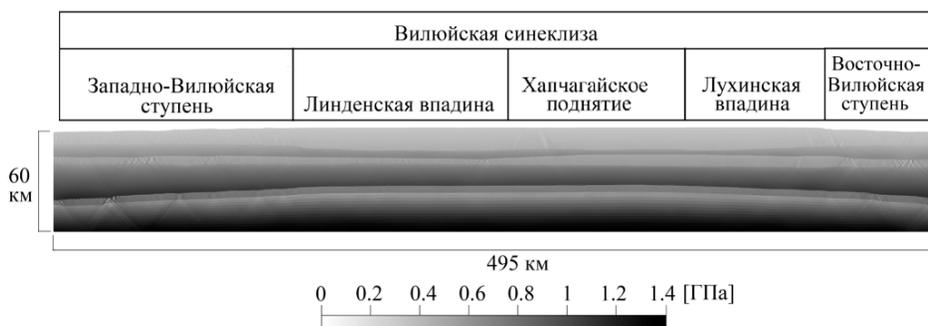


Рис. 9. Распределение давления в слоях литосферы на территории Якутско-Вилуйской КИП вдоль геологического профиля «Кратон-1980»

Fig. 9. Pressure distribution in the lithosphere layers in the area of the Yakutsk-Vilyui LIP along the geological profile "Craton-1980"

Представленное на рис. 10 распределение интенсивности пластических деформаций свидетельствует о том, что в результате растяжения сильно деформируются глубинные и поверхностные слои граничных районов Якутско-Вилуйской КИП, такие, как Западно-Вилуйская и Восточно-Вилуйская ступени. Области локализации неупругой деформации также сосредоточены в верхних приповерхностных слоях земной коры, в областях Линденской впадины и Хапчагайского поднятия, являющихся одними из основных газоносных районов в Якутии. Данные области локализации деформаций являются продолжением распространения полос локализации пластических деформаций, возникших в глубинных областях у границы Мохо. Можно также выделить два слоя локализации неупругой деформации вдоль глубин 40 и 20 км, являющиеся местами переходов режимов упрочнения и разупрочнения в глубинной зависимости прочностных свойств слоёв земной коры и верхней мантии. Данные выводы подтверждаются распределениями сдвиговых напряжений, представленными на рис. 11.

Основные очаги концентрации сдвиговых напряжений совпадают с районами локализации пластической деформации. В районах Линденской впадины и Хапчагайского поднятия наблюдается концентрация сдвиговых напряжений, сосредото-

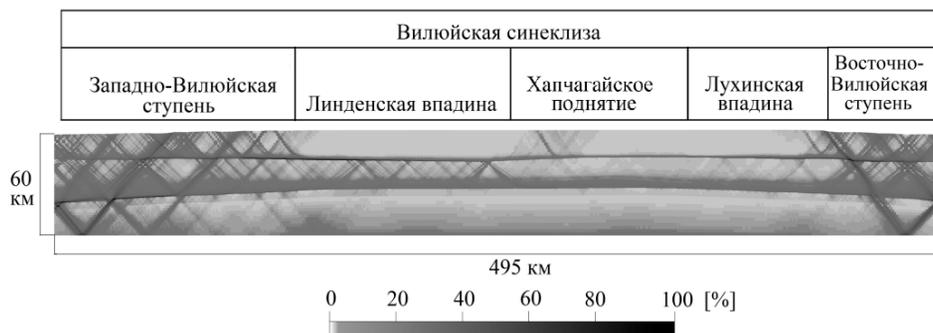


Рис. 10. Распределение пластической деформации в слоях литосферы на территории Якутско-Вилуйской КИП вдоль геологического профиля «Кратон-1980»

Fig. 10. Plastic strain distribution in the lithosphere layers in the area of the Yakutsk-Vilyui LIP along the geological profile “Craton-1980”

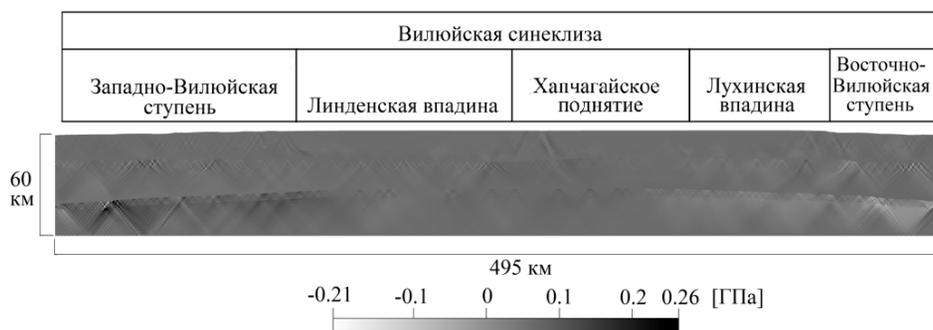


Рис. 11. Распределение сдвиговых напряжений в слоях литосферы на территории Якутско-Вилуйской КИП вдоль геологического профиля «Кратон-1980»

Fig. 11. Shear stress distribution in the lithosphere layers in the area of the Yakutsk-Vilyui LIP along the geological profile “Craton-1980”

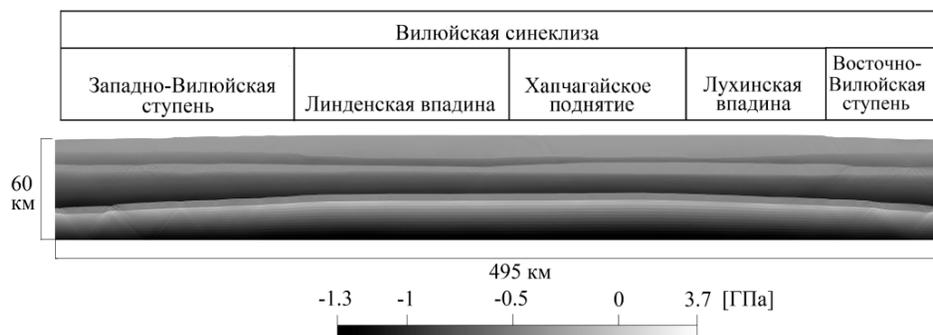


Рис. 12. Распределение горизонтальных напряжений в слоях земной коры и верхней мантии на территории Якутско-Вилуйской изверженной провинции вдоль геологического профиля «Кратон-1980»

Fig. 12. Pressure distribution in the lithosphere layers in the area of the Yakutsk-Vilyui LIP along the geological profile “Craton-1980”

ченная в районе осадочного чехла. Основными факторами, определяющими возникновение максимальных сдвиговых напряжений в этих районах, являются процесс растяжения и кривизна слоёв земной коры и верхней мантии.

Особенности распределения горизонтальных напряжений, представленного на рис. 12, определяются используемой прочностной зависимостью литосферы, проиллюстрированной на рис. 5, а, где наблюдается чередование зон упрочнения и разупрочнения слоёв земной коры.

Максимальные значения отрицательных горизонтальных напряжений сосредоточены в районе верхней мантии ниже границы Мохо, где превалирует общее сжатие за счет роста давления с глубиной. На протяжении всего глубинного слоя геологического объекта наблюдается неоднородность распределения горизонтальных напряжений, которая определяется изменением прочностных свойств литосферы под действием тепловых эффектов, возникающих из мантийного слоя. На границе Мохо наблюдаются максимальные положительные горизонтальные напряжения, вызванные резким изменением прочностных свойств между слоями земной коры и верхней мантией.

Заключение

Представлена математическая модель, позволяющая исследовать напряженно-деформированное состояние и геотектонические процессы в литосфере. Для задания изменения параметров упругопластической модели Друкера – Прагера – Николаевского с глубиной использована модель напряженного состояния слоёв земной коры и верхней мантии, именуемая «jelly sandwich», которая основана на фундаментальных геологических представлениях о физических свойствах литосферы. Представленная модель ранее была успешно применена для анализа напряженно-деформированного состояния в случае процесса сжатия на территории Енисейского кряжа, а в данной статье – в случае процесса растяжения в Якутско-Вилюйской изверженной провинции. Построена компьютерная структурная модель участка Якутско-Вилюйской КИП вдоль геологического профиля «Кратон-1980».

В результате компьютерного моделирования были выявлены и подтверждены ряд геофизических особенностей, которые наблюдаются в районе Якутско-Вилюйской крупной изверженной провинции. В ходе процесса растяжения в районах Лухинской впадины и Хапчагайского поднятия наблюдаются зоны концентрации сдвиговых напряжений и локализации пластических деформаций, соответствующие местонахождениям залежей нефти и газа в Якутии. Компоненты напряжений имеют неоднородные распределения, обусловленные зависимостями прочностных свойств, отражающими структурную неоднородность континентальной литосферы и воздействие тепла из мантийного слоя. Полученные в результате моделирования распределения давления могут частично дополнить геологическую информацию для анализа возможности фазовых превращений в горных породах в различных участках исследуемого региона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вегенер А.* Происхождение материков и океанов / пер. с нем. П.Г. Каминского под ред. П.Н. Кропоткина. Л.: Наука, 1984. 285 с.
2. *Burov E.B., Watts A.B.* The long-term strength of continental lithosphere: “jelly sandwich” or “Crème brulee” // *GSA Today*. 2006. V. 16. No. 1. P. 4–10. DOI: 10.1130/1052-5173(2006)016<4:tltSOc>2.0.cO;2.

3. Cherepanova Yu., Artemieva I.M., Thybo H., Chemia Z. Crustal structure of the Siberian craton and the West Siberian basin: An appraisal of existing seismic data // *Tectonophysics*. 2013. V. 609. P. 154–183. DOI: 10.1016/j.tecto.2013.05.004.
4. Cherepanova Y., Artemieva I.M. Density heterogeneity of the cratonic lithosphere: A case study of the Siberian Craton // *Gondwana Research*. 2015. V. 28. P. 1344–1360. DOI: 10.1016/j.gr.2014.10.002.
5. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu., Peryshkin Al.Yu. Numerical analysis of the state of stress and strain in the Yenisei Ridge based on the regional tectonic state in the Asian continent // *Frattura ed Integrita Strutturale*. 2019. V. 49. P. 190–200. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.20.
6. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu. Analysis of stress and strain of earth's crust layers in the Yenisei Ridge // *AIP Conference Proceedings*. 2019. V. 2167. P. 02004-1 – 02004-4. DOI: 10.1063/1.5131871.
7. Polyansky O.P., Prokopiev A.V., Koroleva O.V., Tomshin M.D., Reverdatto V.V., Selyatitsky A.Yu., Travin Al.V., Vasiliev D.A. Temporal correlation between dyke swarms and crustal extension in the middle Palaeozoic Vilyui rift basin, Siberian platform // *Lithos*. 2017. V. 282–283. P. 45–64. DOI: 10.1016/j.lithos.2017.02.020.
8. Павленкова Н.И., Павленкова Г.А. Стрoение земной коры и верхней мантии Северной Евразии по данным сейсмического профилирования с ядерными взрывами. М. ГЕОКАРТ: ГЕОС, 2014. 192 с.
9. Соколов Б.А., Сафронов А.Ф., Трофимук А.А., Фрадкин Г.С., Бакин В.Е., Каширцев В.А., Япаскурт О.В., Изосимова А.Н. История нефтегазообразования и нефтегазоаккумуляции на востоке Сибирской платформы. М.: Наука, 1986. 167 с.
10. Козловский Е.А. Комплексная программа изучения земных недр // *Советская геология*. 1982. № 9. С. 3–12.
11. Проект КРАТОН-1980 – 1978. Профиль п. Березово – п. Усть-Мая [Электронный ресурс] // Атлас «Опорные геолого-геофизические профили России». Глубинные сейсмические разрезы по профилям ГСЗ, отработанным в период с 1972 по 1995 год. СПб.: ВСЕГЕИ, 2013. С. 21–22. URL: <ftp://ftp.vsegei.ru/seism21.pdf>
12. Сафронов А.Ф., Сивцев А.И., Черненко В.Б. Нефтеносность нижнемезозойских отложений Хапчгайского мегавала Вилуйской синеклизы // *Геология и геофизика*. 2014. Т. 55. № 8. С. 1263–1269.
13. Нефтяные и газовые месторождения СССР: Справочник: в 2 кн. / под ред. С.П. Максимова. Книга вторая. Азиатская часть СССР. М.: Недра, 1987. 303 с.
14. Мильштейн Е.Д., Ронин А.Л. Разработка геолого-геофизических основ создания Государственной сети опорных геолого-геофизических профилей, параметрических и сверхглубоких скважин / ФГУП «ВСЕГЕИ». СПб., 2010. ФГУ НПП «Росгеолфонд». № 497344. Л. 376.
15. Федин А.Д. Геологический отчет о выполнении работ за 2005 г. по объекту «Формирование и ведение федерального банка геологической информации и государственного банка цифровой геологической информации» / Госконтракт № Ал-0206/3. ФГУ НПП «Росгеолфонд». М., 2005. ФГУ НПП «Росгеолфонд». № 485241. Л. 31.
16. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Стефанов Ю.П., Кузнецов П.В., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П., Ворошилов Я.С. Нелинейная механика геоматериалов и геосред. Новосибирск: Академич. изд-во «Гео», 2007. 240 с.
17. Vurov E.B. Rheology and strength of lithosphere // *Marine and Petroleum Geology*. 2011. V. 28. P. 1402–1443. DOI: 10.1016/j.marpetgeo.2011.05.008.
18. Сим Л.А., Гордеев Н.А., Маринин А.В. Новейшая геодинамика восточной окраины Сибирской платформы // *Геосистемы переходных зон*. 2018. Т. 2. № 4. С. 280–289. DOI: 10.30730/2541-8912.2018.2.4.280-289.
19. Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 246 p.

Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu. (2021) NUMERICAL MODELING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE YAKUTSK-VILYUI LARGE IGNEOUS PROVINCE FOR THE ANALYSIS OF GEOTECTONIC PROCESSES IN THE SIBERIAN CRATON. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 53–68

DOI 10.17223/19988621/69/5

Keywords: numerical modeling, stress-strain state, localization of non-elastic strain, elasto-plastic medium, Yakutsk-Vilyui large igneous province (LIP).

Stress and strain distributions in the Yakutsk-Vilyui large igneous province (LIP) are numerically simulated under geotectonic extension. A two-dimensional model of the geological structure of a part of the Yakutsk-Vilyui LIP is developed using the geophysical data from the profile “Craton-1980”. However, these geophysical data can only be a source of the geometrical model and elastic properties of Earth’s layers. To describe non-elastic strains during the geological process, the Drucker-Prager-Nikolaevsky model of plasticity is adopted. For elasto-plastic analysis of the geotectonic process, the “Jelly Sandwich” shear strength model for the continental lithosphere is used, which is based on the variation of the strength properties with depth. Zones of shear stress concentration and plastic strain localization are observed as a result of the extension in the Lindenskaya basin and Khapchagaiskaya reclamation complying with oil and gas deposit locations in the Yakutia region. Stress components have non-linear distributions determined by the dependence of strength properties on the depth and structural inhomogeneity of continental lithosphere. The pressure distribution obtained in the simulation can partially complement the geological information employed when analyzing the possibility of phase transitions in the rocks in different locations of the studied region.

Financial support. The reported study was funded by RFBR, project No. 19-31-90034.

Ayan Zh. AKHMETOV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ayan.akhmetov_93@gmail.com

Igor Yu. SMOLIN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: smolin@ispms.ru

REFERENCES

1. Wegener A. (1966) *The Origin of Continents and Oceans*. New York: Dover.
2. Burov E.B., Watts A.B. (2006) The long-term strength of continental lithosphere: “Jelly Sandwich” or “Crème Brulee”. *GSA Today*. 16(1). pp. 4–10. DOI: 10.1130/1052-5173(2006)016<4:tlSOc>2.0.cO;2.
3. Cherepanova Yu., Artemieva I.M., Thybo H., Chemia Z. (2013) Crustal structure of the Siberian craton and the West Siberian basin: An appraisal of existing seismic data. *Tectonophysics*. 609. pp. 154–183. DOI: 10.1016/j.tecto.2013.05.004.
4. Cherepanova Yu., Artemieva I.M. (2015) Density heterogeneity of the cratonic lithosphere: A case study of the Siberian Craton. *Gondwana Research*. 28. pp. 1344–1360. DOI: 10.1016/j.gr.2014.10.002.
5. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu., Peryshkin Al.Yu. (2019) Numerical analysis of the state of stress and strain in the Yenisei Ridge based on the regional tectonic state in the Asian continent. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 49. pp. 190–200. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.20.
6. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu. (2019) Analysis of stress and strain of earth’s crust layers in the Yenisei Ridge. *AIP Conference Proceedings*. 2167. pp. 02004-1–02004-4. DOI: 10.1063/1.5131871.
7. Polyansky O.P., Prokopiev A.V., Koroleva O.V., Tomshin M.D., Reverdatto V.V., Selyatitsky A.Yu., Travin Al.V., Vasiliev D.A. (2017) Temporal correlation between dyke swarms and crustal extension in the middle Palaeozoic Vilyui rift basin, Siberian platform. *Lithos*. 282–283. pp. 45–64. DOI: 10.1016/j.lithos.2017.02.020.

8. Pavlenkova N.I., Pavlenkova G.A. (2014) *Stroenie zemnoy kory i verkhney mantii Severnoy Evrazii po dannym seysmicheskogo profilirovaniya s yadernymi vzryvami* [The Earth's crust and upper mantle structure of Northern Eurasia from the seismic profiling with nuclear explosions]. Moscow: GEOKART-GEOS.
9. Sokolov B.A., Safronov A.F., Trofimuk A.An., Fradkin G.S., Bakin V.E., Kashirtsev V.A., Yapaskurt O.V., Izosimova A.N. (1986) *Istoriya neftegazooobrazovaniya i neftegazonakopleniya na vostokey Sibirskoy platformy* [The history of oil and gas production and accumulation in the east of the Siberian Platform]. Moscow: Nauka.
10. Kozlovskiy E.A. (1982) Kompleksnaya programma izucheniya zemnykh nedr [Comprehensive program for Earth's interior study]. *Sovetskaya geologiya – Soviet Geology*. 9. pp. 3–12.
11. Proekt KRATON-1980–1978. Profil' p. Berezevo – p. Ust'-Maya [Project CRATON-1980–1978. Profile of v. Berezevo – v. Ust'-Maya] (2013) *Atlas «Opornye geologo-geofizicheskie profily Rossii». Glubinnyye seysmicheskie razrezy po profilyam GSZ, otrabotannym v period s 1972 po 1995 god* [Atlas "Reference geological and geophysical profiles of Russia". Deep seismic sections along DSS profiles worked out in the period from 1972 to 1995]. Saint Petersburg: «VSEGEI». p. 21–22. Access mode: <ftp://ftp.vsegei.ru/seism21.pdf>.
12. Safronov A.F., Sivtsev A.I., Chernenko V.B. (2014) Oil potential of the Lower Mesozoic deposits of the Khapchagai megaswell of the Vilyui syncline. *Russian Geology and Geophysics*. 55(8). pp. 1003–1008. DOI: 10.1016/j.rgg.2014.07.007.
13. *Neftyanye i gazovyye mestorozhdeniya SSSR* [Oil and gas fields in the USSR] (1987) Spravochnik. v dvukh knigakh. Pod red. S.P. Maksimova. Kniga vtoraya. Aziatskaya chast' SSSR [Handbook in two books. Ed. by S.P. Maximov. Second book. Asian part of the USSR]. Moscow: Nedra.
14. Mil'shteyn E.D., Ronin A.L. (2010) *Razrabotka geologometodicheskikh osnov sozdaniya Gosudarstvennoy seti opornykh geologo-geofizicheskikh profiley, parametricheskikh i sverkhglubokikh skvazhin* [Development of geological and methodological foundations for the creation of the State network of reference geological and geophysical profiles, parametric and ultra-deep wells]. No. 497344. Saint Petersburg: VSEGEI.
15. Fedin A.D. (2005) *Geologicheskyy otchet o vypolneniiy rabot za 2005 g. po ob"ektu «Formirovaniye i vedeniye federal'nogo banka geologicheskoy informatsii i gosudarstvennogo banka tsifrovoy geologicheskoy informatsii»* [Geological report on the work implementation for 2005 at a site "Formation and maintenance of the federal bank of geological data and the state bank of digital geological data"]. No. 485241. Moscow: Rosgeolfond.
16. Makarov P.V., Smolin I.Yu., Stefanov Yu.P., Kuznetsov P.V., Trubitsyn A.A., Trubitsyna N.V., Voroshilov S.P., Voroshilov Ya.S. (2007) *Nelineynaya mekhanika geomaterialov i geosred* [Nonlinear mechanics of geomaterials and geo-environment]. Novosibirsk: Academic Publishing House «Geo».
17. Burov E.B. (2011) Rheology and strength of lithosphere. *Marine and Petroleum Geology*. 28. pp. 1402–1443. DOI: 10.1016/j.marpetgeo.2011.05.008.
18. Sim L.A., Gordeev N.A., Marinin A.V. (2018) Noveyshaya geodinamika vostochnoy okrainy Sibirskoy platformy [Modern geodynamics of the eastern boundary of Siberian Platform]. *Geosistemy perekhodnykh zon – Geosystems of Transition Zones*. 2(4). pp. 280–289. DOI: 10.30730/2541-8912.2018.2.4.280-289.
19. Wilkins M.L. (1999) *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Berlin: Springer-Verlag.

Received: June 3, 2020

УДК 519.633
DOI 10.17223/19988621/69/6

С.В. Бакушев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается построение дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для плоского деформирования сплошных сред при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений без учёта геометрической нелинейности в цилиндрической системе координат. Построение билинейных физических зависимостей основано на вычислении секущих модулей объёмного и сдвигового деформирования. При этом на первом участке диаграмм секущий модуль и объёмного и сдвигового деформирования постоянен, во время как на втором участке диаграмм секущий модуль объёмного деформирования является функцией объёмной деформации, а секущий модуль сдвига является функцией интенсивности деформаций сдвига.

Ключевые слова: *сплошная среда, плоская деформация, цилиндрические координаты, дифференциальные уравнения равновесия, билинейные замыкающие уравнения, геометрически линейная модель.*

Вопросы построения замыкающих уравнений для сплошных нелинейно упругих сред, находящихся в условиях сложного напряжённого и деформированного состояния, позволяющие адекватно описать эволюцию их напряжённо-деформированного состояния, являются ключевыми [1, 2]. Фактические зависимости между объёмными деформациями и объёмным напряжениями, а также между сдвиговыми деформациями и сдвиговыми напряжениями являются, как правило, нелинейными и трудно поддающимися аналитическому описанию. Вместе с тем, даже в случае нелинейного аналитического описания замыкающих уравнений, решение конкретных задач методами теории упругости является чрезвычайно сложным процессом, обусловленным физической нелинейностью.

Для исключения эффектов физической нелинейности предлагается диаграммы объёмного $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и сдвигового $T = T(\Gamma)$ деформирования при сложном напряжённо-деформированном состоянии аппроксимировать билинейными функциями. При этом и на первом и на втором участках билинейных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования можно будет использовать уравнения линейной (или геометрически нелинейной) теории упругости. Это с одной стороны. А с другой – разрешающие дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений, в силу линейных зависимостей между напряжениями и деформациями, будут иметь относительно простой вид.

Вопросам аппроксимации диаграмм работы материалов уделяется пристальное внимание. Так, в работе [3] рассмотрены практические вопросы аппроксимации опытных диаграмм работы неупругих материалов степенными и дробно-линейными функциями. Дана методика определения геометрического и физического смысла эмпирических коэффициентов, входящих в аппроксимирующие

формулы. В статье [4] показано, что результаты расчётов цилиндрической оболочки с сыпучим наполнителем при поперечном изгибе в геометрически и физически нелинейной постановке существенно отличаются от экспериментальных данных, если применяется билинейная аппроксимация диаграммы деформирования без учёта критических значений напряжений и деформаций. Отмечено, что точность решения во многом определяется величиной касательного модуля упрочнения материала. В работе [5], на основе положения о кинематической и статической определимости, описана методика определения диаграмм нелинейного деформирования разносопротивляющихся материалов при неоднородном напряжённо-деформированном состоянии, а также иллюстрируются основные приёмы (сплайн-аппроксимации) для достижения приемлемой точности результирующих функций. В работе [6] рассматриваются и анализируются физические законы связи напряжений и деформаций современной теории упругопластического деформирования, а также постулаты макроскопической определённости и изотропии начально-изотропных сплошных сред. Обсуждается вопрос о возможности применения постулата изотропии к оценке влияния параметров вида напряжённо-деформированного состояния, возникающего из-за деформационной анизотропии при изменении внутренней структуры материалов. Также обсуждается вопрос о правомерности представления симметричных тензоров второго ранга напряжений и деформаций в виде векторов координатного линейного евклидова шестимерного пространства. Предложен соответствующий принцип тождественности тензоров и векторов. В статье [7] для случая одноосного деформирования реологически сложных сред с учётом разносопротивляемости деформациям растяжения и сжатия приводится общая схема построения математических моделей, на базе которых строятся модели для пространственного напряжённо-деформированного состояния и обсуждаются вопросы идентификации входящих в них механических постоянных.

В настоящее время в связи с усложнением форм строительных конструкций, развитием авиастроения, кораблестроения, ракетостроения и так далее роль теории упругости как в линейной, так и в нелинейной постановке, резко изменилась. Теперь она составляет основу для построения практических методов расчёта деформируемых тел и систем тел разнообразной формы. При этом в современных прочностных и деформационных расчётах учитываются не только сложность формы тела и разнообразие воздействий (силовое, температурное и т.п.), но и специфика физических свойств материалов, из которых изготовлены тела.

Значительное внимание уделяется расчёту деформируемых тел с учётом геометрической и физической нелинейности. Так, в работе [8] на основе соотношений нелинейной теории упругости, в предположении простого активного нагружения, получено решение физически и геометрически нелинейной задачи о больших деформациях полой сферы, выполненной из несжимаемого материала. Полученные результаты свидетельствуют о существенном влиянии физической нелинейности материала сферы на функциональную зависимость перемещение-давление. Автором [9] разработана теория расчёта стержневых конструкций с учётом всех видов нелинейности. Изогнутая ось стержня аппроксимируется пространственной кривой. Получены системы разрешающих дифференциальных уравнений. В статье [10] разработан динамический критерий потери устойчивости прямоугольных в плане сферических оболочек при действии переменной во времени поперечной нагрузки с учётом двух типов нелинейности – геометрической и физической. Геометрическая нелинейность учитывается на основе соотношений

Т. Кармана. Физическая нелинейность описывается деформационной теорией пластичности А.А. Ильюшина. В статье [11] представлен вычислительный алгоритм, одновременно учитывающий физическую и геометрическую нелинейность деформирующейся среды, предназначенный для изучения статического упруго-пластического состояния вблизи транспортных подземных выработок произвольной формы. В основу алгоритма положена вариационная формулировка нелинейного конечно-элементного анализа. В работе [12] на основе гипотезы Эйлера-Бернулли построена теория нелинейной динамики неоднородной однослойной балки с учётом физической геометрической (в смысле Т. фон Кармана) нелинейности. Балка находится под действием знакопеременной нагрузки, распределённой равномерно по всей её поверхности. В статье [13] рассматриваются пологие оболочки на прямоугольном плане с учётом геометрической и физической нелинейности, а также неоднородности свойств материала по толщине оболочки. Авторами [14] рассмотрены процессы деформирования шарнирно закреплённых по торцам прямолинейных идеального и неидеального (неоднородного) стержней с параметром гибкости $\lambda = 867$ при действии осевой сжимающей силы. В расчётной модели учтена геометрическая и физическая нелинейность, пластичность, изотропность, реальная диаграмма деформирования материала. Показано, что в идеальном стержне деформации обусловлены эффектом Пуассона, изгибных деформаций нет. Установлено, что для неидеального стержня существует критическая сила, при которой происходит потеря устойчивости стержня, связанная со значительными поперечными перемещениями (прогибами). Величина полученной критической силы согласуется с известным решением Эйлера.

Уравнения механики деформируемого твёрдого тела записываются, как правило, в соответствующей системе отсчёта – соответствующей системе координат. В зависимости от формы тела используются декартовы, полярные, цилиндрические, сферические [15, 16, 17] и другие координаты, например криволинейные подвижные лагранжевы [18], биполярные координаты [19]. Общие уравнения механики можно записать также и для общего случая произвольных криволинейных координат [1]. В данной работе используется наиболее часто применяемая в задачах, после декартовой, цилиндрическая система координат.

Цилиндрическая система координат используется при решении многих задач как линейной, так и нелинейной теории упругости. Так, в работе [20] выполнено исследование напряжённо-деформированного состояния пороупругого цилиндрического тела при радиальном равномерном сжатии в результате чего построена математическая модель, описывающая неоднородное напряжённо-деформированное состояние цилиндрического тела для материалов с пористой структурой при упругой работе полностью сжатой матрицы. В работе [21] в цилиндрической системе координат рассматривается задача устойчивости кольцевых пластин с криволинейными структурами армирования в условиях плоского напряжённого состояния. Получен общий вид форм потери устойчивости, что позволило свести двумерную задачу к одномерной. Определены критические нагрузки для законов армирования по спирали Архимеда и логарифмической спирали. В статье [22] на основе метода малого параметра построено аналитическое решение стохастической нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления в цилиндрических координатах. Приведено обобщение задачи расчёта толстостенной трубы, свойства материала которой описываются случайной функцией двух аргументов. В работе

[23] в цилиндрической системе координат рассмотрено напряжённое состояние пространства, заполненного сыпучим материалом. Микроструктура сыпучего материала обуславливает возможность объёмной пластической деформации за счёт деформации сдвига. Это подтверждается ассоциированным законом течения к условию пластичности, предполагающего зависимость предельного касательного напряжённого состояния от давления, что, в свою очередь, допускает возможность замкнутого вида условия пластичности в пространстве главных напряжений. В статье [24] в цилиндрической системе координат методом конечных элементов рассматриваются состояния толстостенного цилиндра при двух видах нагружения в неоднородном температурном поле. При этом исследуется влияние учёта связанности численного определения напряжённо-деформированного состояния и температурного поля на решение задачи нелинейной термоупругости. Статья [25] посвящена упругопластическому кручению двухслойного слабоанизотропного стержня некругового поперечного сечения, представляющего собой двухсвязную область. Решение строится в предположении, что пластическая область целиком охватывает внешний контур поперечного сечения и существует упругопластическая граница, которая расположена между внутренним контуром и границей раздела слоёв. Задача решается в цилиндрической системе координат. В работе [26] в цилиндрической системе координат исследуется распространение нестационарных осесимметричных поверхностных возмущений в полупространстве, заполненном упругой однородной изотропной средой Коссера. Замкнутая система уравнений включает в себя уравнения относительно нетривиальных компонент потенциалов перемещения и угла поворота, а также соотношения, связывающие перемещения с потенциалами, и компонент тензоров напряжений и моментных напряжений с перемещениями и углом поворота. На граничной плоскости заданы нормальные перемещения. Показано, что учёт моментных напряжений приводит к качественным изменениям, а именно, наблюдается дополнительный волновой фронт. В статье [27] анализируются две анизотропные упругие модели, описывающие механическое поведение древесины: линейная ортотропная модель и цилиндрически ортотропная модель. Показано, что вторая модель является более сложной, но зато более адекватно описывает механические свойства древесины. В статье [28] представлена разработка математической модели для описания механических свойств однослойных углеродных нанотрубок (ОСНТ). Связи углерод – углерод (C–C) между двумя соседними атомами смоделированы как балки Эйлера. Материальные константы балочного элемента – модуль Юнга и коэффициент Пуассона – определяются на атомном уровне. Расчёт выполнен в цилиндрических координатах.

В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для случая плоского деформирования сплошной среды в цилиндрических координатах $u = u(r, \varphi)$, $v = v(r, \varphi)$, $w = 0$ при аппроксимации замыкающих уравнений произвольной формы билинейными функциями без учёта геометрической нелинейности. Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для случая плоского деформирования сплошной среды в декартовых координатах при аппроксимации замыкающих уравнений произвольной формы билинейными функциями без учёта и с учётом геометрической нелинейности приведены в работах [29, 30], а для случая осесимметричного деформирования сплошной среды при аппроксимации замыкающих уравнений произвольной формы билинейными функциями с учётом и без учёта геометрической нелинейности –

в [31]. Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для случая центрально-симметричного деформирования сплошной среды при аппроксимации замыкающих уравнений произвольной формы билинейными функциями с учётом и без учёта геометрической нелинейности разработаны в [32]. Вопросы аппроксимации диаграмм объёмного $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и сдвигового $T = T(\Gamma)$ деформирования при помощи билинейных функций, а также вопросы нахождения оптимального расположения точки излома на билинейном графике в [33].

Построение физических уравнений

В соответствии с рис. 1 и 2 секущие модули объёмного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ на первом прямолинейном участке диаграмм $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и $T = T(\Gamma)$ будут определяться выражениями

$$K = \frac{1}{3} K_0 = \text{const}; \tag{1}$$

$$G = G_0 = \text{const}. \tag{2}$$

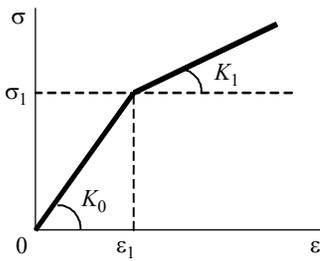


Рис. 1. Диаграмма $\sigma = \sigma(\varepsilon)$

Fig. 1. Curve $\sigma = \sigma(\varepsilon)$

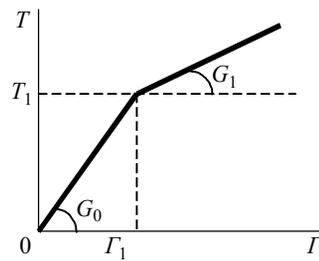


Рис. 2. Диаграмма $T = T(\Gamma)$

Fig. 2. Curve $T = T(\Gamma)$

На втором прямолинейном участке диаграмм $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и $T = T(\Gamma)$ секущий модуль объёмного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и секущий модуль сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ будут определяться выражениями

$$K = K(\varepsilon) = \frac{1}{3} \left[K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \neq \text{const}; \tag{3}$$

$$G = G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq \text{const}. \tag{4}$$

Здесь K_0 – начальный модуль объёмного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии); G_1 – модуль упрочнения при сдвиге; σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

Так как построение билинейных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования выполняется, вообще говоря, независимо друг от друга, а при плоской

деформации – в цилиндрических координатах

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi},$$

и

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{r\varphi}^2},$$

то установить связь между точками излома билинейных диаграмм $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и $T = T(\Gamma)$ в явном виде не представляется возможным.

Здесь

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right); \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r},$$

причём

$$\frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_{\varphi r}}{\partial r} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} - v \right);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varepsilon_{\varphi r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[-\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right];$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right);$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial r} = \frac{2}{3\Gamma} \left[(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon_{r\varphi} \varepsilon_{r\varphi} \right];$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} = \frac{2}{3\Gamma} \left[(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi} + (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3}{2} \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi} \varepsilon_{r\varphi} \right].$$

Рассмотрим шесть основных случаев физических зависимостей.

Случай 1: $K_0 \neq K_1$, $G_0 \neq G_1$. Здесь возможны три варианта взаимного расположения абсцисс точек излома билинейных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования.

а). Численные значения абсцисс точек излома билинейных диаграмм совпадают, то есть $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$. При этом $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$ и $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$.

б). Численные значения абсцисс точек излома билинейных диаграмм не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$ и $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_1$. Здесь интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что $|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}| = |\varepsilon_1|$.

в). Численные значения абсцисс точек излома билинейных диаграмм не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом $0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ и $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$. Здесь объёмной деформации ε_0 соответствуют такие компоненты деформации, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{r\varphi}^2} = \Gamma_1.$$

В этом случае физические уравнения плоской деформации в цилиндрических координатах с учётом формул (1) и (2) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= G_0\varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{zz} = \left(\frac{1}{3}K_0 - \frac{2}{3}G_0\right)\varepsilon.\end{aligned}\tag{5}$$

Случай 2: $K_0 \neq K_1$, $G_0 \neq G_1$. Численные значения абсцисс точек излома билинейных диаграмм не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом $|\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ и $\Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$. Здесь объёмной деформации ε_0 соответствуют такие компоненты деформации, что $\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2} + \frac{3}{2}\varepsilon_{r\varphi}^2} = \Gamma_1$, а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что $|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}| = |\varepsilon_1|$.

В этом случае физические уравнения плоской деформации в цилиндрических координатах с учётом формул (2) и (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{3}\left[K_1 + (K_0 - K_1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right]\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}\left[K_1 + (K_0 - K_1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right]\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= G_0\varepsilon_{r\varphi}; \\ \sigma_{zz} &= \left\{\frac{1}{3}\left[K_1 + (K_0 - K_1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right] - \frac{2}{3}G_0\right\}\varepsilon.\end{aligned}\tag{6}$$

Случай 3: $K_0 \neq K_1$, $G_0 \neq G_1$. Численные значения абсцисс точек излома билинейных диаграмм не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом $|\varepsilon_0| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$ и $\Gamma_1 \leq \Gamma \leq \Gamma_0$. Здесь объёмной деформации ε_0 соответствуют такие компоненты деформации, что $\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2} + \frac{3}{2}\varepsilon_{r\varphi}^2} = \Gamma_1$, а интенсивности Γ_0 — такие компоненты деформации, что $|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}| = |\varepsilon_1|$.

В этом случае физические уравнения плоской деформации в цилиндрических координатах с учётом формул (1) и (4) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\varepsilon_{r\varphi}; \\ \sigma_{zz} &= \left\{\frac{1}{3}K_0 - \frac{2}{3}\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\right\}\varepsilon.\end{aligned}\tag{7}$$

Случай 4: $K_0 \neq K_1$, $G_0 \neq G_1$. а). Здесь возможны три варианта взаимного расположения абсцисс точек излома билинейных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования.

а). Численные значения абсцисс точек излома билинейных диаграмм совпадают, то есть $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$. При этом $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$ и $\Gamma \geq \Gamma_1$.

б). Численные значения абсцисс точек излома билинейных диаграмм не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_0|$ и $\Gamma \geq \Gamma_1$. Здесь объёмной деформации ε_0 соответствуют такие компоненты деформации, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{r\varphi}^2} = \Gamma_1.$$

в). Численные значения абсцисс точек излома билинейных диаграмм не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$ и $\Gamma \geq \Gamma_0$. Здесь интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что $|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}| = |\varepsilon_1|$.

В этом случае физические уравнения плоской деформации в цилиндрических координатах с учётом формул (2) и (4) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{3} \left[K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \varepsilon + 2 \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3} \left[K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \varepsilon + 2 \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{\varphi r} = \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \varepsilon_{r\varphi}; \\ \sigma_{zz} &= \left\{ \frac{1}{3} \left[K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] - \frac{2}{3} \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \right\} \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Случай 5: $K_0 = K_1$, $G_0 \neq G_1$. Точка излома на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ отсутствует. При этом, если $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$, то физические уравнения плоской деформации в цилиндрических координатах будут иметь вид (5); если $\Gamma \geq \Gamma_1$, то физические уравнения плоской деформации будут иметь вид (7).

Случай 6: $K_0 \neq K_1$, $G_0 = G_1$. Точка излома на диаграмме $T = T(\Gamma)$ отсутствует. При этом, если $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$, то физические уравнения плоской деформации в цилиндрических координатах будут иметь вид (5); если $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$, то физические уравнения плоской деформации будут иметь вид (6).

Построение дифференциальных уравнений равновесия

Подставляя физические уравнения (5) – (8) в дифференциальные уравнения равновесия плоской деформации сплошной среды в цилиндрических координатах [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} + F_\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и

ту же структуру:

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + A + F_r = 0; \\ A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + B + F_\varphi = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, A$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, B$ в уравнениях (10) зависят от вида физических уравнений.

1) Для физических уравнений (5) получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0; B_1 = G_0 \frac{1}{r^2}; C_1 = 0; D_1 = 0; E_1 = 0; F_1 = \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{1}{3}G_0\right) \frac{1}{r}; \\ A &= \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0\right) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) - \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{7}{3}G_0\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \\ A_2 &= 0; B_2 = 0; C_2 = \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{1}{3}G_0\right) \frac{1}{r}; D_2 = G_0; E_2 = \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0\right) \frac{1}{r^2}; F_2 = 0; \\ B &= G_0 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) + \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{7}{3}G_0\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (11)$$

2) Для физических уравнений (6)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3}K_1 + \frac{4}{3}G_0; B_1 = G_0 \frac{1}{r^2}; C_1 = 0; D_1 = 0; E_1 = 0; F_1 = \left(\frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{3}G_0\right) \frac{1}{r}; \\ A &= \left(\frac{1}{3}K_1 + \frac{4}{3}G_0\right) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) - \left(\frac{1}{3}K_1 + \frac{7}{3}G_0\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \\ A_2 &= 0; B_2 = 0; C_2 = \left(\frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{3}G_0\right) \frac{1}{r}; D_2 = G_0; E_2 = \left(\frac{1}{3}K_1 + \frac{4}{3}G_0\right) \frac{1}{r^2}; F_2 = 0; \\ B &= G_0 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) + \left(\frac{1}{3}K_1 + \frac{7}{3}G_0\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

3) Для физических уравнений (7)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}); \\ B_1 &= \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3}\right] \frac{1}{r^2}; \\ C_1 &= -2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left[\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) + \frac{1}{3}(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})\right] \frac{1}{r}; \\ D_1 &= -2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ E_1 &= -\frac{2}{3}(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r^2}; \\ F_1 &= \left[\frac{1}{3}K_0 - \frac{2}{3}G_1 - \frac{2}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr})\right] \frac{1}{r} + \\ &+ \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3}\right] \frac{1}{r}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A = & \left[\frac{1}{3}K_0 - \frac{2}{3}G_1 - \frac{2}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \right] \times \\
& \times \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) + 2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - \\
& - \frac{2}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \varepsilon_{r\varphi} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \varepsilon_{r\varphi}^2 \right] \times \\
& \times \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}); \tag{13}
\end{aligned}$$

$$A_2 = -\frac{2}{3}(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi});$$

$$B_2 = -2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \frac{1}{r^2};$$

$$C_2 = \left[\frac{1}{3}K_0 + \frac{1}{3}G_1 + \frac{1}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) - (G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \right] \frac{1}{r};$$

$$D_2 = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3};$$

$$E_2 = \left[\frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \right] \frac{1}{r^2};$$

$$F_2 = -2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left[\frac{1}{3}(2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) + \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \right] \frac{1}{r};$$

$$\begin{aligned}
B = & \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \\
& - \frac{2}{3}(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) + 2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \\
& - \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \varepsilon_{r\varphi}^2 \right] \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right] \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \varepsilon_{r\varphi}.
\end{aligned}$$

4) Для физических уравнений (8)

$$A_1 = \frac{1}{3}K_1 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi});$$

$$B_1 = \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \varepsilon_{r\varphi}^2 \right] \frac{1}{r^2};$$

$$C_1 = -2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left[\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) + \frac{1}{3}(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \frac{1}{r};$$

$$D_1 = -2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right);$$

$$E_1 = -\frac{2}{3}(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r^2};$$

$$\begin{aligned}
F_1 = & \left[\frac{1}{3}K_1 - \frac{2}{3}G_1 - \frac{2}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \right] \frac{1}{r} + \\
& + \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \right] \frac{1}{r};
\end{aligned}$$

$$A = \left[\frac{1}{3}K_1 - \frac{2}{3}G_1 - \frac{2}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \right] \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) +$$

$$+ 2(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - \frac{2}{3}(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} -$$

$$- \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}); \quad (14)$$

$$A_2 = -\frac{2}{3}(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi});$$

$$B_2 = -2(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \frac{1}{r^2};$$

$$C_2 = \left[\frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{3}G_1 + \frac{1}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \frac{1}{r};$$

$$D_2 = G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3};$$

$$E_2 = \left[\frac{1}{3}K_1 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \right] \frac{1}{r^2};$$

$$F_2 = -2(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left[\frac{1}{3}(2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) + \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \right] \frac{1}{r};$$

$$B = \frac{1}{3}K_1 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{2}{3}(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) -$$

$$- \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \right] \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \frac{1}{r} - \frac{2}{r} \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \varepsilon_{r\varphi} +$$

$$+ \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + 2(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

В формулах (11) – (14)

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{r\varphi}^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)^2}}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для плоской деформации сплошной среды в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации физических соотношений построены.

Заключение

Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях в цилиндрических координатах могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред, находящихся в условиях плоской деформации, физические соотношения для которых аппроксимированы билинейными функциями.

Замечание: предложенный в статье метод построения дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для геометрически линейных сплошных сред, физические соотношения для которых аппроксимированы билинейными функциями, может быть с успехом применён и для сплошных сред, механическое поведение которых описывается геометрически нелинейными моделями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. 312 с.
3. Рудых О.Л. Практические вопросы аппроксимации экспериментальных кривых степенными и дробно-линейными функциями // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2010. № 1 (26). С. 110–122.
4. Гоник Е.Г., Кибец А.И., Петров М.В., Федорова Т.Г., Фролова И.А. Влияние аппроксимации диаграммы деформирования на критические нагрузки при поперечном изгибе цилиндрической оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79. № 2. С. 169–181.
5. Король Е.З. Определение диаграмм нелинейного деформирования разносопротивляющихся материалов при неоднородном напряжённо-деформированном состоянии // Депонированная рукопись № 86-В2005 21.01.2005.
6. Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определимости и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29–46.
7. Садовский В.М. Реологические модели разномодульных и сыпучих сред // Дальневосточный математический журнал. 2003. Т. 4. № 2. С. 252–263.
8. Морцинина А.А. Нелинейная осесимметричная задача теории упругости для поллой сферы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2009. № 4. С. 84–88.
9. Федотова И.А. Математическая модель работы нелинейного стержневого элемента конструкции // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2004. № 1. С. 7–12.
10. Мицкевич С.А., Крысько А.В., Жигалов М.В., Крысько В.А. Динамическая устойчивость пологих оболочек на прямоугольном плане с учётом геометрической и физической нелинейности // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79. № 3. С. 249–258.
11. Махметова Н.М. Об одном алгоритме нелинейных задач статики подземных сооружений // Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева. 2014. № 5 (90). С. 80–87.
12. Крысько В.А., Папкова И.В., Салтыкова О.А., Бабенкова Т.В., Каиубина А.А. Сложные колебания балок Эйлера – Бернулли с учётом геометрической и физической нелинейностей // Международный научно-исследовательский журнал. 2014. № 3-1 (22). С. 14–16.
13. Петров В.В. Расчёт неоднородных по толщине оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей // Academia. Архитектура и строительство. 2016. № 1. С. 112–117.
14. Егоров А.В. Деформирование центрально-сжатого гибкого стержня // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 4 (76). С. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1750.
15. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
16. Демидов С.П. Теория упругости: учебник для вузов. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.
17. Папкович П.Ф. Теория упругости. М.; Л.: Оборонгиз, 1939. 643 с.
18. Зарипов Р.М., Масалимов Р.Б., Лисин Ю.В. Моделирование напряжённо-деформированного состояния прямолинейных и криволинейных участков трубопровода // Нефтегазовое дело. 2015. Т. 13. № 3. С. 103–109 с.
19. Стрельников В.Н., Суков Г.С., Волошин А.И., Чибисов Ю.В., Лесняк Г.А. Уравнения упругости в биполярных координатах // Прогресивні технології і системи машинобудування. 2010. № 2 (40). С. 248–253.

20. Бунтов А.Е., Гоцев Д.В. Неоднородное напряжённо-деформированное состояние упругого цилиндрического тела с учётом внутренней структуры материала // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018. Т. 45. № 1. С. 8–21.
21. Немировский Ю.В., Матвеев К.А., Моховнев Д.В. Рациональное проектирование армированных кольцевых пластин // Проблемы оптимального проектирования сооружений: сборник докладов 3-й Всероссийской конференции. Новосибирский ГАСУ (Сибстрин), Сибирское отделение Российской академии архитектуры и строительных наук, Сибирское отделение международной академии наук высшей школы. 2014. С. 272–282.
22. Рабоченко В.П., Попов Н.Н. Использование метода малого параметра для решения стохастических нелинейных задач теории установившейся ползучести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 185–194.
23. Вербейко Н.Д., Фролова О.А. Предельное осесимметричное напряжённое состояние сжимаемого сыпучего материала с цилиндрической полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 83–92.
24. Христин Д.В., Астапов Ю.В. Учёт взаимного влияния полей напряжений, деформаций и температур при решении задачи Ламе // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. № 1. С. 67–73.
25. Ковалев А.В., Свиридов И.Э., Щеглова Ю.Д. Применение метода возмущений при определении напряженно-деформированного состояния двухслойного слабоанизотропного стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2017. Т. 21. № 2. С. 292–307. DOI: 10.14498/vsgtu1541.
26. Чан Л.Т., Тарлаковский Д.В. Упругое моментное полупространство под действием осесимметричных нестационарных поверхностных кинематических возмущений // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 1. С. 40–52. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-40-52.
27. Nilson Tadeu Mascia, Francisco Antônio Rocco Lahr. Remarks on orthotropic elastic models applied to wood // Materials Research. 2006. V. 9(3). P. 301–310. DOI 10.1590/S1516-14392006000300010.
28. Xiaowen Lei, Toshiaki Natsuki, Jinxing Shi, Qing-Qing Ni. Analysis of carbon nanotubes on the mechanical properties at atomic scale // Journal of Nanomaterials. 2011. V. 2011 DOI: 10.1155/2011/805313.
29. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений (геометрически линейная модель) // Региональная архитектура и строительство. 2019. № 1(38). С. 76–85.
30. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений (геометрически нелинейная модель) // Региональная архитектура и строительство. 2019. № 2(39). С. 86–100.
31. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия осесимметричной деформации при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. № 1. С. 8–17.
32. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия центрально-симметричной деформации при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений // Известия вузов. Строительство. 2018. № 11(719). С. 5–19.
33. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. № 2 (283). С. 2–11.

Bakushev S.V. (2021) DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONTINUUM EQUILIBRIUM FOR A PLANE STRAIN IN CYLINDRICAL COORDINATES AT BILINEAR APPROXIMATION OF CLOSING EQUATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 69–85

DOI 10.17223/19988621/69/6

Keywords: solid body, plane strain, cylindrical coordinates, differential equations of equilibrium, closing bilinear equations, geometrically linear model.

Problems of the formulation of differential equations of equilibrium in terms of displacements for a plane strain of continuous media at bilinear approximation of closing equations are considered leaving out of account geometric nonlinearity in the cylindrical coordinate system. Based on the assumption that the curves of volumetric and shear strain are independent from each other, six main cases of physical dependencies are considered, which are the functions of the relative position of break points on the bilinear curves of the volumetric and shear strain. Obtaining of bilinear physical dependencies is based on the calculation of secant moduli of the volumetric and shear strain. On the first line of the curves, secant moduli are constant for both volumetric and shear strain, while on the second line, the secant modulus of the volumetric strain is a function of the volumetric strain, and the secant modulus of the shear strain is a function of the shear strain intensity. Putting the corresponding bilinear physical equations into differential equations of continuum equilibrium, which disregard geometrical nonlinearity, the resulting differential equations of equilibrium are obtained in terms of displacements for a one-dimensional plane strain of continuum in the cylindrical coordinate system. These equations can be used when determining stress-strain state of continuous media under one-dimensional plane strains with no regard for geometrical nonlinearity, and whose physical relations are approximated by bilinear functions.

Sergey V. BAKUSHEV (Doctor of Technical Sciences, Professor, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation). E-mail: bakuchsv@mail.ru

REFERENCES

1. Novozhilov V.V. (1958) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Leningrad: Sudpromgiz.
2. Bakushev S.V. (2013) *Geometricheski i fizicheski nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy: Ploskaya zadacha* [Geometrically and physically non-linear mechanics of continuous medium: Plane problem]. Moscow: Knizhnyy dom «Librokom».
3. Rudykh O.L. (2010) Prakticheskie voprosy approksimatsii eksperimental'nykh krivyykh stepennymi i drobno-lineynymi funktsiyami [Practical issues on the approximation of experimental curves by power and linear-fractional functions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture*. 1(26). pp. 110–122.
4. Gonik E.G., Kibets A.I., Petrov M.V., Fedorova T.G., Frolova I.A. (2017) Vliyanie approksimatsii diagrammy deformirovaniya na kriticheskie nagruzki pri poperechnom izgibe tsilindricheskoy obolochki [The effect of approximating deformation curves on critical load values of lateral bending of a cylindrical shell]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 79(2). pp. 169–181.
5. Korol' E.Z. (2005) *Opreделение diagramm nelineynogo deformirovaniya raznosoprotivlyayushchikhsya materialov pri neodnorodnom napryazheonno-deformirovannom sostoyanii* [Determination of nonlinear strain curves for materials with different resistance in an inhomogeneous stress-strain state]. Deponirovannaya rukopis' No. 86-V2005 21.01.2005.
6. Zubchaninov V.G. (2018) The general mathematical theory of plasticity and the Il'yushin postulates of macroscopic definability and isotropy. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 73. pp. 101–116. DOI: 10.3103/S0027133018050011.

7. Sadovskiy V.M. (2003) Reologicheskie modeli raznomodul'nykh i sypuchikh sred [Rheological models of hetero-modular and granular media]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 4(2). pp. 252–263.
8. Morshchinina A.A. (2009) Nelineynaya osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya poloy sfery [Non-linear axisymmetric problem of the theory of elasticity for a hollow sphere]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya – Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 4. pp. 84–88.
9. Fedotova I.A. (2004) Matematicheskaya model' raboty nelineynogo sterzhnevoogo elementa konstruktssii [A mathematical model of the operation of non-linear structural mainstay]. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya – Proceedings of Petersburg Transport University*. 1. pp. 7–12.
10. Mitskevich S.A., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. (2017) Dinamicheskaya ustoychivost' pologikh obolochek na pryamougol'nom plane s uchetom geometricheskoy i fizicheskoy nelineynosti [Dynamic stability of shallow shells on the rectangular plan, taking into account geometric and physical nonlinearity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 79(3). pp. 249–258. DOI: 10.32326/1814-9146-2017-79-3-249-258.
11. Makhmetova N.M. (2014) Ob odnom algoritme nelineynykh zadach statiki podzemnykh sooruzheniy [On the algorithm for non-linear static problems of subsurface structures]. *Vestnik Kazakhskoy akademii transporta i kommunikatsiy im. M. Tynyshpaeva – The Bulletin of KazATC*. 5(90). pp. 80–87.
12. Krysko V.A., Papkova I.V., Saltykova O.A., Babenkova T.V., Kashubina A.A. (2014) Slozhnye kolebaniya balok Eylera–Bernulli s uchetom geometricheskoy i fizicheskoy nelineynostey [Complex oscillation of the Euler–Bernoulli beams with regard to geometrical and physical nonlinearity]. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal – International Research Journal*. 3-1(22). pp. 14–16.
13. Petrov V.V. (2016) Raschet neodnorodnykh po tolshchine obolochek s uchetom fizicheskoy i geometricheskoy nelineynostey [Calculation of inhomogeneous thickness of shells with considering physical and geometrical nonlinearities]. *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo – Academia. Architecture and Construction*. 1. pp. 112–117.
14. Egorov A.V. (2018) Deformirovanie tsentral'no-szhatogo gibkogo sterzhnya [Straining an axially loaded slender column]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 4(76). pp. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1750.
15. Lur'e A.I. (1980) *Nelineynaya teoriya uprugosti* [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
16. Demidov S.P. (1979) *Teoriya uprugosti: Uchebnik dlya vuzov* [Theory of elasticity: Textbook for higher education]. Moscow: Vysshaya shkola.
17. Papkovich P.F. (1939) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: Oborongiz.
18. Zaripov R.M., Masalimov R.B., Lisin Yu.V. (2015) Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pryamolineynykh i krivolinyynykh uchastkov truboprovoda [Modeling stress-strain state of rectilinear and curvilinear sections of the pipeline]. *Neftegazovoe delo – Petroleum Engineering*. 13(3). pp. 103–109.
19. Strel'nikov V.N., Sukov G.S., Voloshin A.I., Chibisov Yu.V., Lesnyak G.A. (2010) Uravneniya uprugosti v bipolyarnykh koordinatakh [Elastic equations in terms of bipolar coordinates]. *Progressivnyye tekhnologii i sistemy mashinostroeniya – Progressive Technologies and Systems of Mechanical Engineering*. 2(40). pp. 248–253.
20. Buntov A.E., Gotsev D.V. (2018) Neodnorodnoe napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie uprugogo tsilindricheskogo tela s uchetom vnutrenney struktury materiala [Inhomogeneous stress-deformed state of an elastic cylindrical body taking into account its material internal structure]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 45(1). pp. 8–21.

21. Nemirovskiy Yu.V., Matveev K.A., Mokhovnev D.V. (2014) Ratsional'noe proektirovanie armirovannykh kol'tsevykh plastin [Efficient design of reinforced annular plates]. *Problemy optimal'nogo proektirovaniya sooruzheniy: sbornik dokladov 3-y Vserossiyskoy konferentsii*. pp. 272–282.
22. Radchenko V.P., Popov N.N. (2013) Ispol'zovanie metoda malogo parametra dlya resheniya stokhasticheskikh nelineynykh zadach teorii ustanovivsheysya polzuchesti [A small-parameter method applied for solving of stochastic non-linear problems of steady-state creep theory]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 1(15). pp. 185–194.
23. Verveiko N.D., Frolova O.A. (2015) Predel'noe osesimmetrichnoe napryazhennoe sostoyanie szhimaemogo sypuchego materiala s tsilindricheskoy polost'yu [Limit axisymmetric stressful state of compressible loose material with cylindrical air space]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 3(25). pp. 83–92.
24. Hristich D.V., Astapov Yu.V. (2015) Uchet vzaimnogo vliyaniya poley napryazheniy, deformatsiy i temperatur pri reshenii zadachi Lamé [Account of mutual influence of stress, strain and temperature fields at Lamé problem solving]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki – Izvestiya Tula State University. Natural Sciences*. 1. pp. 67–73.
25. Kovalev A.V., Sviridov I.E., Shcheglova Yu.D. (2017) Primenenie metoda vozmushcheniy pri opredelenii napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya dvukhsloynogo slaboanizotropnogo sterzhnya nekrugovogo poperechnogo secheniya pri uprugoplasticheskom kruchenii [Application of the perturbation method for the determination of stress-strain state of a thick-shaft two-layer anisotropic shaft of non-circular cross section with elastoplastic torsion]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 21(2). pp. 292–307. DOI: 10.14498/vsgtu1541.
26. Chan L.T., Tarlakovskiy D.V. (2019) Uprugoe momentnoe poluprostranstvo pod deystviem osesimmetrichnykh ne-statsionarnykh poverkhnostnykh kinematicheskikh vozmushcheniy [Elastic moment half-space under the action of axisymmetric non-stationary surface kinematic perturbations]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 81(1). pp. 40–52. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-40-52.
27. Nilson Tadeu Mascia, Francisco Antônio Rocco Lahr (2006) Remarks on orthotropic elastic models applied to wood. *Materials Research*. 9(3). pp. 301–310. DOI: 10.1590/S1516-14392006000300010.
28. Xiaowen Lei, Toshiaki Natsuki, Jinxing Shi, Qing-Qing Ni (2011) Analysis of carbon nanotubes on the mechanical properties at atomic scale. *Journal of Nanomaterials*. DOI: 10.1155/2011/805313.
29. Bakushev S.V. (2019) Differentsial'nye uravneniya ravnovesiya sploshnoy sredy dlya ploskoy deformatsii v dekartovykh koordinatakh pri bilineynoy approksimatsii zamykayushchikh uravneniy (geometricheski lineynaya model') [Differential equations of solid environment equilibrium for flat deformation in Cartesian coordinates at bilinear approximation of trailing equations (geometrically linear model)]. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo – Regional Architecture and Engineering*. 1(38). pp. 76–85.
30. Bakushev S.V. (2019) Differentsial'nye uravneniya ravnovesiya sploshnoy sredy dlya ploskoy deformatsii v dekartovykh koordinatakh pri bilineynoy approksimatsii zamykayushchikh uravneniy (geometricheski nelineynaya model') [Differential equations of solid environment equilibrium for flat deformation in Cartesian coordinates at bilinear approximation of trailing equations (geometrically nonlinear model)]. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo – Regional Architecture and Engineering*. 2(39). pp. 86–100.
31. Bakushev S.V. (2019) Differentsial'nye uravneniya ravnovesiya osesimmetrichnoy deformatsii pri bilineynoy approksimatsii zamykayushchikh uravneniy [Differential equations of equi-

- librium an the axially symmetric deformation at bilinear approximation trailing equations]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1. pp. 8–17.
32. Bakushev S.V. (2018) Differentsial'nye uravneniya ravnovesiya tsentral'no-simmetrichnoy deformatsii pri bi-lineynoy approksimatsii zamykayushchikh uravneniy [Differential equations of equilibrium of central-symmetric deformation at bilinear approximation trailing equations]. *Izvestiya VUZov. Stroitel'stvo – News of Higher Educational Institutions. Construction*. 11(719). pp. 5–19.
33. Bakushev S.V. (2019) Approksimatsiya diagramm deformirovaniya bilineynymi funktsiyami [Approximations of warp diagrams using bilinear functions]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2(283). pp. 2–11.

Received: June 20, 2019

УДК 539.375

DOI 10.17223/19988621/69/7

А.Ю. Бурцев, В.В. Глаголев, А.А. Маркин

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЛОКАЛЬНОЙ РАЗГРУЗКИ ЭЛЕМЕНТА
В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ КОНТИНУУМЕ¹**

На основе гипотезы простой разгрузки предлагается описание процесса потери несущей способности конечного элемента. На основе конечноэлементного комплекса Ansys Workbench приведены результаты расчетов в случае упругого и упругопластического поведения материала. Показана возможность учета остаточных деформаций в зоне удаления конечного элемента для материала с упругопластическими свойствами в рассмотренной модели.

Ключевые слова: метод конечных элементов, удаление конечного элемента, Ansys Workbench.

Прогнозирование несущей способности различных конструкций в настоящее время строится на конечно-элементном анализе [1–4], в том числе и реализованном в рамках коммерческих пакетов [5, 6]. Как правило, в большинстве случаев расчеты ограничиваются нахождением предельной внешней нагрузки, при которой, используя определенный локальный критерий разрушения, состояние конечного элемента трактуется как критическое. При этом собственно процессу «разрушения» элемента не уделяется должного внимания.

При расслоении композиционных материалов в рассмотрение вводятся когезионные элементы с различными законами ниспадающего участка деформирования: трапецидальный (трилинейный), параболический и экспоненцидальный [7]. Однако решение реальных задач строится, как правило, на билинейном законе распределения когезионных сил [8–11] в одном измерении (направлении отрыва). Образование новых материальных поверхностей в данном подходе ассоциируется с достижением нулевого значения когезионных сил в рассматриваемых элементах. Отметим, что различные законы когезионного взаимодействия и материальные характеристики когезионных элементов существенно влияют на распределение напряжено-деформированного состояния в зоне предразрушения [12] и требуют экспериментального подтверждения.

При рассмотрении стадии разупрочнения в материальном объеме [13–15] сложность задачи связана с построением определяющих соотношений неустойчивого по Друкеру деформирования [16, 17] и их подтверждением в соответствующих экспериментах.

Так, например, в программном комплексе Ansys Workbench [6] функцией *ekill* (kill element) элемент исключается из рассмотрения, что фактически соответствует умножению локальной матрицы жёсткости элемента на число близкое к нулю. Эта процедура является корректной при упругом поведении конструкций и не учитывает перераспределения напряжений при возможном упругопластическом характере деформирования за счет разгрузки и догрузки локальных областей в зо-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 p_a.

не образования новых материальных поверхностей. Наличие этапа локальной разгрузки, сопровождаемой процессом упругопластического догружения вне разрушаемого материального объема, является принципиальным отличием от процедуры kill element.

В работах [18, 19] при исследовании разрушения адгезионного слоя в композиционном материале было предложено рассматривать разрушение как процесс простой разгрузки образуемых материальных поверхностей от напряжений, действующих по границе разрушаемого элемента слоя. В данной работе предлагается обобщить данный подход на случай разрушения произвольного элемента в конечно-элементном континууме на примере комплекса Ansys Workbench.

Цель работы – определение изменения напряженно-деформированного состояния упругопластического тела в процессе потери несущей способности отдельными конечными элементами при фиксированных внешних воздействиях. Предлагаемый подход позволяет «растянуть» процесс убывания жесткости элемента во времени и установить возможность разрушения конструкции до полной потери несущей способности данного элемента.

Постановка задачи

Рассмотрим конечно-элементный континуум, находящийся в равновесии под воздействием внешней нагрузки. На рис. 1, *a* представлена его область с выделенным горизонтальной штриховкой элементом, находящимся в рамках того или иного критерия в состоянии предразрушения.

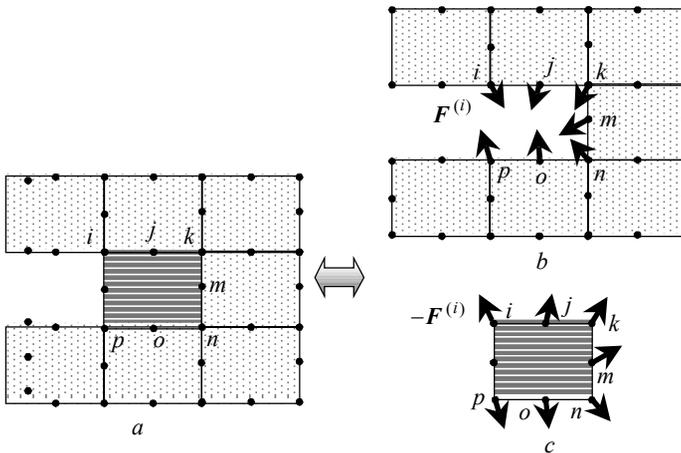


Рис. 1. Взаимодействие конечного элемента с ансамблем конечных элементов
Fig. 1. Finite element interaction with a finite element ensemble

На рис. 1, *b* представлена та же область, но без разрушаемого элемента, взаимодействие с которым отвечают узловые силы равные по модулю и противоположные по направлению узловым силам, обеспечивающим равновесие исключенного конечного элемента, показанного на рис. 1 *c*).

Разрушение элемента будем трактовать как процесс образования новых, свободных от узловых сил, материальных поверхностей. В этом случае, следуя работам [18, 19], необходимо при неизменной внешней нагрузке разгрузить узлы от

сил, связывающих разрушаемый конечный элемент с основным телом. Данная схема показана на рис. 2.

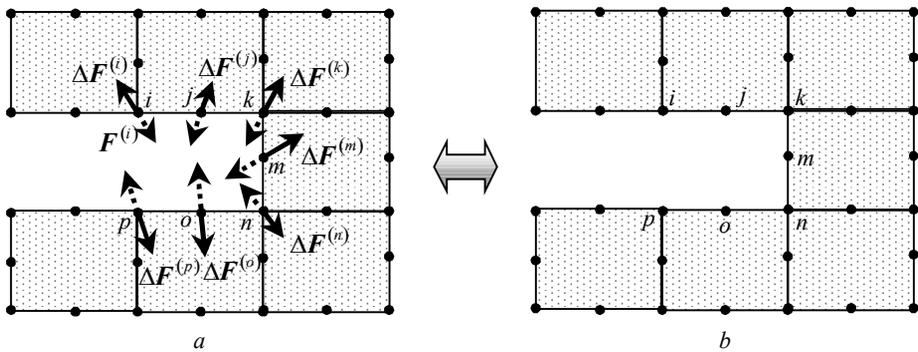


Рис. 2. Разгрузка образуемых поверхностей
Fig. 2. Unloading of the formed surfaces

На рис. 2, *a* значения $\Delta F^{(e)}$, $e = i, j, k, m, n, o, p$ определяют приращения новой внешней узловой нагрузки. Соответствующие приращения определяются условием $\Delta F^{(e)} + F^{(e)} = 0$. Приращение внешней нагрузки, действующей при задании $\Delta F^{(e)}$ полагается нулевым. Завершение этапа разгрузки показано на рис. 2, *b*. При этом узлы i, j, k, m, n, o, p станут свободными от узловых сил, действовавших на них со стороны разрушенного элемента.

Таким образом, процесс удаления элемента в рамках предлагаемого подхода будет разбит на несколько этапов или шагов.

На первом шаге решается задача деформирования до достижения внешней нагрузкой критического значения. В результате ее решения выделяется элемент, переходящий в стадию разрушения. На данном этапе определяются узловые силы взаимодействия разрушаемого элемента со смежными ему элементами.

На втором шаге путем разгрузки узлов разрушаемого элемента, отвечающих за его взаимодействие со смежными элементами, формируются новые материальные поверхности. Образование новых материальных поверхностей и определение изменения НДС в окружающем разрушенный элемент теле происходит при нулевом приращении внешней нагрузки. Основной проблемой первого этапа является нахождение узловых сил взаимодействия разрушаемого элемента и, следовательно, формирование граничных условий второго этапа. В этом случае конечно-элементное решение приводит к нулевому значению узловой силы для каждого внутреннего узла. Для решения данной задачи в работе [18] был предложен метод повторного нагружения. Дискретное решение первого этапа содержит вектор перемещений $\mathbf{u}^{(e)}$. Для определения узловых сил $\mathbf{F}^{(e)}$ заменим действие разрушаемого элемента заданием процесса узловых перемещений элемента, при повторении закона внешнего воздействия на тело согласно Рис. 3.

На рис. 3, *a* показан элемент в состоянии предразрушения с найденным полем узловых перемещений $\mathbf{u}^{(e)}$. На рис. 3, *b* показано повторное нагружение тела без разрушаемого элемента с заданным полем узловых перемещений.

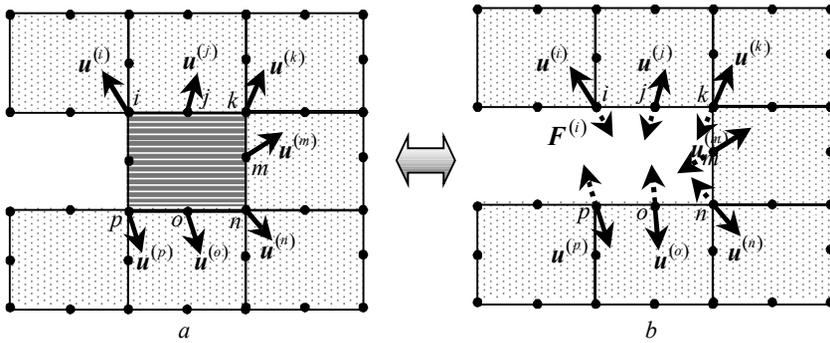


Рис. 3. Схема повторного нагружения
 Fig. 3. Reload pattern

В результате решения задачи повторного нагружения в узлах i, j, k, m, n, o, p будут найдены узловые силы $\mathbf{F}^{(e)}$ взаимодействия с элементом, показанным на рис. 1, с как реакции в рассматриваемых узлах.

Отметим, что процедуру повторного нагружения можно проводить и с разрушаемым элементом, предварительно умножив его локальную матрицу жёсткости на число близкое к нулю. Данный процесс реализуется в программном комплексе Ansys Workbench функцией *kill* (kill element) и не требует перестройки сетки конечных элементов для рассматриваемого тела.

На втором шаге при нулевом приращении внешней нагрузки и исключенном из рассмотрения разрушаемом элементе (функцией *kill* или перестройкой области конечных элементов) в узлах $e = i, j, k, m, n, o, p$ дается приращение узловых сил $\Delta \mathbf{F}^{(e)} = -\mathbf{F}^{(e)}$, что будет соответствовать образованию новых поверхностей и разрушению элемента.

Таким образом, алгоритм решения при данном подходе будет следующим:

1. Решение задачи деформирования с нахождением элемента в состоянии предразрушения, его узловых перемещений и критической нагрузки.
2. Решение задачи повторного нагружения при критической внешней нагрузке с целью определения сил взаимодействия разрушаемого элемента и смежных с ним элементов.
3. Решение задачи разгрузки узлов образуемых новых поверхностей.

Отметим, что в программном комплексе Ansys Workbench можно определить узловые силы взаимодействия при расчете в модуле Static Structural с помощью функции *fsum* встроенного языка APDL. В конкретной задаче функция *fsum* применялась для каждого узла удаляемого элемента. Входными данными для этой функции являются уникальный номер узла и номер шага расчета, на котором необходимо вычислить компоненты узловых сил реакции.

Таким образом, этап 2 по решению задачи повторного нагружения приведенного выше алгоритма для нахождения узловых сил взаимодействия $\mathbf{F}^{(e)}$ разрушаемого элемента и его смежных элементов можно не проводить. Данный шаг будет заменен исключением разрушаемого элемента с помощью функции *kill*, с приложением узловых нагрузок $\mathbf{F}^{(e)}$. В этом случае напряженно-деформированное состояние тела с удаленным элементом будет эквивалентно состоянию завершения этапа 1.

Решение задачи

В качестве примера реализации предложенного алгоритма рассмотрим задачу о растяжении пластины с боковым физическим разрезом толщиной δ_0 симметричной внешней распределённой нагрузкой с постоянной интенсивностью согласно схеме рис. 4. Левая и правая боковые поверхности жестко закреплены от горизонтальных перемещений и свободны от вертикальных нагрузок.

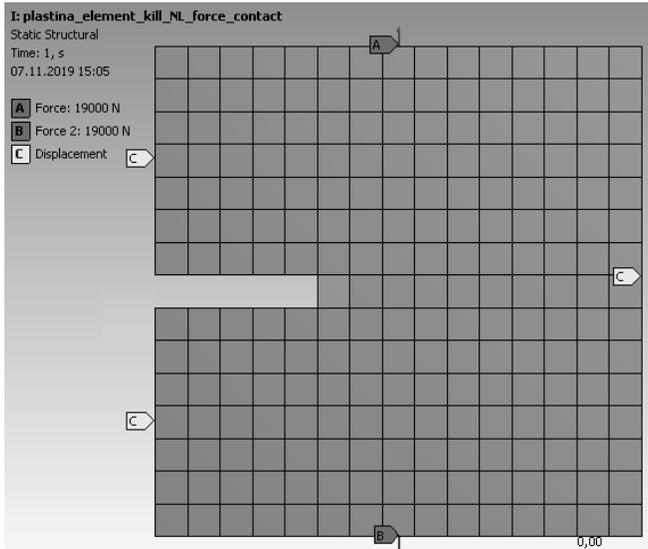


Рис. 4. Схема нагружения
Fig. 4. Loading pattern

Материал пластины брался близким к стали со следующими материальными характеристиками: коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$, модуль упругости $E = 1.93 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $T_p = 210$ МПа, упрочнение принималось линейным. Толщину разреза выбираем равной $\delta_0 = 0.01$ м. Рассматриваем плоское деформированное состояние. Материал на продолжении физического разреза был разбит на квадратные в плане элементы.

Экспериментально показано, что при нагружении трещиноподобного дефекта нормальным отрывом процесс разрушения (подростание трещины) инициируется в направлении трещины. Поэтому будем моделировать процесс разрушения для первого конечного элемента, расположенного на продолжении физического разреза. При этом критерий разрушения не рассматривается. Процесс разрушения рассмотрим для упругой постановки и в случае упругопластических свойств материала, когда в области окончания физического разреза реализуется область развитых пластических деформаций. Результаты расчета задач, с предлагаемой моделью процесса разрушения элемента, будем сравнивать с расчетом задачи для идентичной внешней нагрузки без соответствующего элемента.

На рис. 5 показаны результаты расчета интенсивности напряжений (по Мизесу) без учета пластических свойств материала для внешней нагрузки $F = 19000$ Н, распределенной по поверхности. На рис. 5, а показано распределение интенсивности напряжений при завершении процесса разрушения элемента, а на рис. 5, б рассмотрено

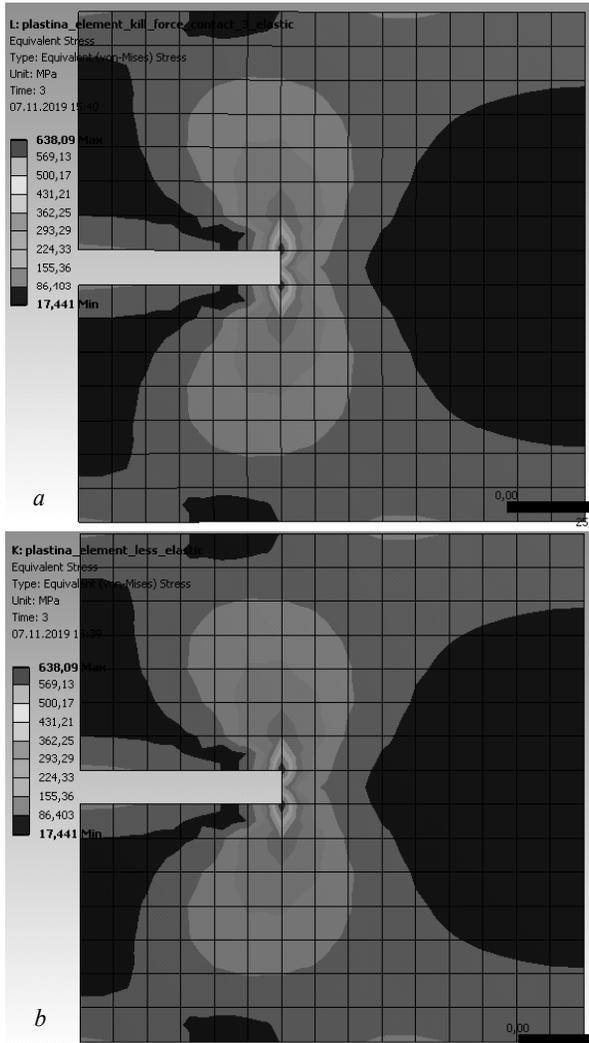


Рис. 5. Сравнение упругих решений
Fig. 5. Comparison of elastic solutions

поле интенсивности напряжений пластины без разрушаемого элемента. Как видно из расчетов, смоделированный процесс разрушения элемента дает идентичный результат нагружению пластины без элемента. При линейно упругом решении (nlgeom off) имеют место незначительные расхождения расчетов (менее 0.1%).

На рис. 6 показан аналогичный расчет с учетом упругопластических свойств материала. Выделены области, где имеют место необратимые деформации и показана соответствующая интенсивность пластических деформаций. На рис. 6, *a* приведен расчет с учетом процесса разрушения элемента, а на рис. 6, *b* рассматривалось активное нагружение пластины без удаляемого элемента. В этом случае видны существенные различия в размерах области пластических деформаций (в том числе и остаточных деформаций после локальной разгрузки образуемых поверхностей) и несущественные в численных значениях их интенсивности.

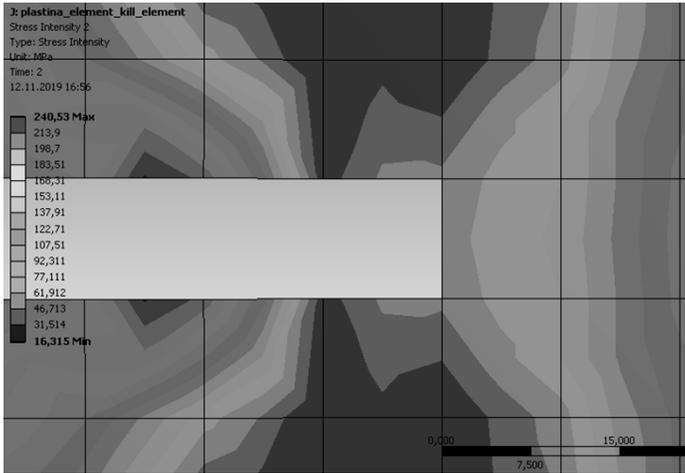


Рис. 7. Интенсивность напряжений в момент предразрушения элемента
 Fig. 7. Stress intensity at a time instant of pre-fracture of the element

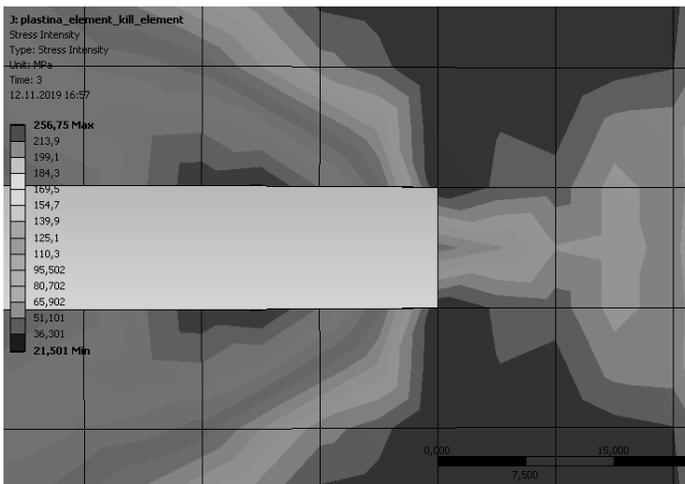


Рис. 8. Интенсивность напряжений в момент снятия локальной нагрузки от разрушаемого элемента
 Fig. 8. Stress intensity at a time instant of local unloading of the destructible element

Заключение

Предложено описание процесса локальной разгрузки конечного элемента. В рамках программного комплекса Ansys Workbench данная методика была реализована. Проведенные вычисления показали, что при упругопластическом деформировании материала результаты расчетов, полученные с помощью процедуры kill element и предложенного подхода имеют различия. Для упругого деформирования применение процедуры kill element и обсуждаемого метода простой разгрузки приводит к одному результату. Это объясняется тем, что в линейно упругих телах различным законам изменения внешних воздействий при переходах

из начального состояния в одно и то же конечное состояние соответствуют одинаковые распределения напряжений. В случае упругопластических тел напряженно-деформированные состояния могут различаться, так как зависят от законов изменения внешних воздействий. В нашем случае переход из начального состояния с удаленным элементом не эквивалентен действительному нагружению сплошного тела и последующей локальной разгрузке поверхности контакта с удаляемым элементом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимации. М.: Мир, 1986. 318 с.
2. *Кузьмичев С.В., Кукушкин С.А., Осипов А.В.* Упругое взаимодействие точечных дефектов в кристаллах с кубической симметрией // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 4. С. 88–97.
3. *Степанова Л.В.* Компьютерное моделирование процессов накопления повреждений в твердых телах с трещинами с помощью пользовательской процедуры UMAT вычислительного комплекса Simulia Abaqus // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 3. С. 71–86. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.08.
4. *Афанасьев А.А., Горностаев К.К., Ковалёв А.В., Чеботарев А.С.* О механическом поведении упрочняющегося упругопластического диска под действием источника тепла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 57–66 DOI: 10.17223/19988621/50/5.
5. ANSYS. User's Guide, Release 11.0. Pennsylvania, USA: ANSYS Inc., 2006.
6. *Dassault Systemes Simulia Corp., Abaqus 6.11, User's Manual*; 2011.
7. *Park M., Frey K., Simon L.* Modeling and analysis of composite bonded joints // American Journal of Mechanical and Industrial Engineering. 2017. V. 2. No. 1. P. 1–7. DOI: 10.11648/j.ajmie.20170201.11.
8. *Jain S., Na S.R., Liechti K.M., Bonnacaze R.T.* A cohesive zone model and scaling analysis for mixed-mode interfacial fracture // International Journal of Solids and Structures. 2017. V. 129. P. 167–176. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.09.002.
9. *de Morais A.B.* Cohesive zone beam modelling of mixed-mode I–II delamination // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2014. V. 64. P. 124–131. DOI: 10.1016/j.compositesa.2014.05.004.
10. *Lee M.J., Cho T.M., Kim W.S., Lee B.C., Lee J.J.* Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2010. V. 30. No. 5. P. 322–328. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005.
11. *de Morais A.B.* Simplified cohesive zone analysis of mixed-mode I–II delamination in composite beams // Polymer Composites. 2013. V. 34. No. 11. P. 1901–1911. DOI: 10.1002/polb.22597.
12. *Panettieri E., Fanteria D., Danzi F.* Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // Composite Structures. 2016. V. 137. P. 140–147. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.11.018.
13. *Рыжак Е.И.* К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 1. С. 111–127.
14. *Стружанов В.В.* Об одном подходе к изучению механизма зарождения трещин // Прикладная механика и техническая физика. 1986. № 6. С. 118–123.
15. *Васин Р.А., Еникеев Ф.У., Мазурский М.И.* О материалах с падающей диаграммой // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1995. № 2. С. 181–182.
16. *Стружанов В.В.* Определение диаграммы деформирования материала с падающей ветвью по диаграмме кручения цилиндрического образца // Сибирский журнал промышленной математики. 2012. Т. 15. № 1. С. 138–144.
17. *Глаголев В.В., Маркин А.А.* Об одном способе определения связей между критическими значениями характеристик процесса установившегося разделения материала // Проблемы прочности. 2006. № 2. С. 47–58.

18. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах когезионного разрушения композита с адгезионным слоем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03.
19. Glagolev V.V., Markin A.A. Model of the discrete destruction process of a solid body // Journal of Physics, Conference Series. 2018. V. 973. 012003. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012003.

Статья поступила 24.01.2020

Burtsev A.Yu., Glagolev V.V., Markin A.A. (2021) INVESTIGATION OF LOCAL UNLOADING OF AN ELEMENT IN A FINITE ELEMENT CONTINUUM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 86–96

DOI 10.17223/19988621/69/7

Keywords: finite element method, finite element removal, Ansys Workbench.

The subcritical elastoplastic deformation and the fracturing of an element of a finite element continuum in the Ansys Workbench complex are considered. When solving the elastoplastic problem of the subcritical deformation, a finite element with the failure criterion reached is selected. In a pre-fracture state of the element, the nodal forces provided by the interaction with an adjacent element are determined using the Ansys Workbench internal procedure. The following step is the consideration of the varying stress-strain state of the body during the element destruction. The elastoplastic problem is solved in the conditions of simple unloading of the body surface adjacent to the destructible element while maintaining the external load corresponding to the destruction initiation. When implementing the local unloading, a possibility of the new plastic region formation and the partial unloading are studied. As a result, the stress-strain state of the body at the beginning of local unloading is not the same as that at the end of the process. The proposed approach differs from the “element killing” procedure when the element stiffness after the failure criterion reached is assumed to be close to zero. The paper provides solutions to the problems of deformation of elastic and elastoplastic plates with a side cut taking into account their element destruction.

Financial support. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Tula region, project No. 19–41–710001 p_a.

Andrey Yu. BURTSEV (Candidate of Physics and Mathematics, SC «VPA «TOCHMASH», Vladimir, Russian Federation). E-mail: aburtsev.tula@gmail.com

Vadim V. GLAGOLEV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Aleksey A. MARKIN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

REFERENCES

1. Zenkevich O., Morgan K. (1986) *Konechnye elementy i approksimatsii* [Finite elements and approximations]. Moscow: Mir.
2. Kuz'michev S.V., Kukushkin S.A., Osipov A.V. (2013) Elastic interaction of point defects in crystals with cubic symmetry. *Mechanics of Solids*. 48(4). pp. 431–438. DOI: 10.3103/S0025654413040110.
3. Stepanova L.V. (2018) Komp'yuternoe modelirovanie protsessov nakopleniya povrezhdeniy v tverdykh telakh s treshchinami s pomoshch'yu pol'zovatel'skoy protsedury UMAT vychislitel'nogo kompleksa Simulia Abaqus [Computational simulation of the damage accumulation processes in cracked solids by the user procedure UMAT of Simulia Abaqus]. *Vestnik Perm-*

- skogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. *Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 71–86. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.08.
4. Afanas'ev A.A., Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Chebotarev A.S. (2017) O mekhanicheskom povedenii uprochnyayushchegosya uprugoplasticheskogo diska pod deystviem istochnika tepla [On mechanical behavior of the hardening elastoplastic disk affected by a heat source]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 57–66. DOI: 10.17223/19988621/50/5.
 5. ANSYS. *User's Guide, Release 11.0*. Pennsylvania, USA: ANSYS Inc. 2006.
 6. Dassault Systemes Simulia Corp., Abaqus 6.11. *User's Manual*. 2011.
 7. Park M., Frey K., Simon L. (2017) Modeling and analysis of composite bonded joints. *American Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. 2(1). pp. 1–7. DOI: 10.11648/j.ajmie.20170201.11.
 8. Jain S., Na S.R., Liechti K.M., Bonnecaze R.T. (2017) A cohesive zone model and scaling analysis for mixed-mode interfacial fracture. *International Journal of Solids and Structures*. 129. pp. 167–176. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.09.002.
 9. de Morais A.B. (2014) Cohesive zone beam modelling of mixed-mode I–II delamination. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*. 64. pp. 124–131. DOI: 10.1016/j.compositesa.2014.05.004.
 10. Lee M.J., Cho T.M., Kim W.S., Lee B.C., Lee J.J. (2010) Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 30(5). pp. 322–328. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005.
 11. de Morais A.B. (2013) Simplified cohesive zone analysis of mixed-mode I–II delamination in composite beams. *Polymer Composites*. 34(11). pp. 1901–1911. DOI: 10.1002/pc.22597.
 12. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. (2016) Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results. *Composite Structures*. 137. pp. 140–147. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.11.018.
 13. Ryzhak E.I. (1991) K voprosu ob osushchestvivosti odnorodnogo zakriticheskogo deformirovaniya pri ispytaniyakh v zhestkoy trekhosnoy mashine [On the feasibility of homogeneous supercritical deformation during tests in a rigid triaxial machine]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 1. pp. 111–127.
 14. Struzhanov V.V. (1986) Crack generation and propagation mechanism. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 27(6). pp. 894–899. DOI: 10.1007/BF00918835.
 15. Vasin R.A., Enikeev F.U., Mazurskiy M.I. (1995) O materialakh s padayushchey diagrammoy [About decrement-curve materials]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 2. pp. 181–182.
 16. Struzhanov V.V. (2012) Opredelenie diagrammy deformirovaniya materiala s padayushchey vetvyu po diagramme krucheniya tsilindricheskogo obraztsa [The determination of the deformation diagram of a material with a falling branch using the torsion diagram of a cylindrical sample]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 15(1). pp. 138–144.
 17. Glagolev V.V., Markin A.A. (2006) On a method for the establishment of relations between the critical values of the characteristics of steady-state material separation process. *Strength of Materials*. 38(2). pp. 141–149. DOI: 10.1007/s11223-006-0026-5.
 18. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. (2017) Modelirovanie obrazovaniya novykh material'nykh poverkhnostey v protsessakh kogeziionnogo razrusheniya kompozita s adgezionnym sloem [Modelling the generation of new material surfaces in a composite with an adhesion layer under cohesive destruction]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03.
 19. Glagolev V.V., Markin A.A. (2018) Model of the discrete destruction process of a solid body. *Journal of Physics. Conference Series*. 973(012003). pp. 1–10. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012003.

УДК 531.38
DOI 10.17223/19988621/69/8

Вин Ко Ко, А.Н. Темнов

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЁМЕ

Исследованы нелинейные колебания двухслойной жидкости, полностью заполняющей ограниченный объём. Используя две основные несимметричные гармоники, возбуждаемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, исследованы дифференциальные уравнения нелинейных колебаний поверхности раздела двухслойной жидкости. В результате построены области неустойчивости вынужденных колебаний двухслойной жидкости в цилиндрическом баке, а также области параметрического возбуждения для различных соотношений плотностей жидкостей. Для построения областей неустойчивостей при приближенном решении нелинейных дифференциальных уравнений использован метод Бубнова – Галеркина.

Ключевые слова: *цилиндрический бак, двухслойная жидкость, нелинейные колебания, область неустойчивости, гидродинамические коэффициенты.*

Нелинейная теория движения ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью, а также с поверхностью раздела двух жидкостей, представляющая собой особый раздел механики, используется при решении ряда практических задач. Обеспечение устойчивого полета современных и перспективных летательных аппаратов ракетно-космической техники и достижение точности управления ими невозможно без тщательного описания динамических процессов, происходящих в сложной механической системе.

Литературу по волновым движениям жидкостей, состоящих из слоев разных плотностей и имеющих отношение к настоящей работе, условно можно представить двумя направлениями.

К первому отнесем работы, связанные с исследованием волновых движений жидкостей разных плотностей, занимающих открытую область пространства. Здесь прежде всего необходимо отметить основополагающие работы Сретенского Л.Н. [1], Ландау Л.Д. [2], в которых изложены основные сведения и методы исследования колебаний двух жидкостей. Из иностранных работ отметим фундаментальные статьи по колебаниям двухслойной жидкости Thorpe S.A., Camassa R., M. La Rocca [3–5].

Среди современных работ, связанных с рассматриваемой тематикой нелинейных колебаний двухслойной жидкости, следует отнести работы [6, 7], в которых проведено экспериментальное исследование профиля двумерно гравитационных волн и показано, что для таких волн имеют место вторичные циркуляционные течения, пронизывающие всю жидкость. В работе Порубова А.В. [8] установлено, что двумерные нелинейные внутренние волны двухслойной жидкости могут быть описаны при помощи двумерного обобщенного уравнения Гарднера. Басинским К.Ю. в работе [9] рассмотрена нелинейная задача о распространении волны на свободной поверхности вязкой жидкости в плоском случае. Закономер-

ности реализации гравитационного нелинейного волнового движения в двухслойной жидкости с конечной глубиной верхнего слоя исследованы в работе [10].

К второму направлению отнесем работы, в которых изучаются волновые движения жидкостей в ограниченном объеме неподвижного или подвижного твердого тела. Из последних работ отметим работы Калининченко В.А., [11, 12], в которых рассмотрен эффект верхнего слоя вязкой жидкости на колебания двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде. В статье Мерзлякова А.В., Крюковой Е.А. [13] рассмотрена плоская задача о колебаниях в прямоугольном баке двухслойной жидкости, разделенной жёсткой горизонтальной проницаемой перегородкой, а в работах [14, 15] рассмотрена подобная задача в круглом цилиндрическом баке с упругой перегородкой.

В работе Науменко В.В., Стрельниковой Е.А. [16] показано, что использование потенциала двойного слоя позволяет учесть эффект краевого вихревого шнура и дает полное соответствие математической модели реальному процессу в задаче о свободных колебаниях полой оболочки в идеальной несжимаемой жидкости.

В работах [17–21] рассмотрены малые колебания двух- и трёх-слоистых жидкостей в полостях различной формы для случаев подвижного и неподвижного твердого тела. При проведении экспериментов с жидкостями, полностью заполняющими круглый цилиндрический бак, вблизи основного резонанса было замечено вращательное движение слоёв жидкостей, подобное движению свободной поверхности однородной жидкости.

Особенности линейных и нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, рассмотрены в [22–25].

Целью данной статьи является исследование нелинейных колебаний поверхности раздела двухслойной жидкости и получение теоретической интерпретации наблюдаемого эффекта.

1. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричный сосуд произвольной формы, полностью заполненный двумя жидкостями. Введем систему координат $Oxyz$, с началом в точке O на невозмущённой поверхности раздела жидкостей (рис. 1). Жидкости плотности ρ_1 и ρ_2 предполагаются идеальными и несжимаемыми. Обозначим через h_1 и h_2 глубины каждого слоя жидкости при отсутствии вращательного движения поверхности раздела. Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы в невозмущённом положении механической системы тело – жидкости ось Ox была перпендикулярна невозмущённой поверхности раздела жидкостей Γ_0 .

Смоченные поверхности полости обозначим через $S^{(i)} (i=1,2)$, а возмущённую поверхность раздела жидкостей – через Γ (см. рис. 1).

Уравнение возмущённой поверхности раздела можно представить в виде, разрешённом относительно координаты x

$$\zeta = x - f(y, z, t) = 0. \quad (1)$$

В предположении отсутствия вихревого движения в каждой жидкости формулируем задачу о нелинейных колебаниях поверхности раздела жидкостей, полностью заполняющих полость подвижного твердого тела, совершающего поступательное движение по закону: $U(t) = S \cos \omega t$ (см. рис. 4).

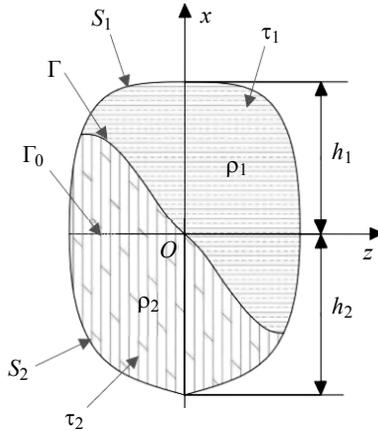


Рис. 1. Система координат и основные обозначения для тела с двухслойной жидкостью
Fig. 1. Coordinate system and basic designations for a body with a two-layer fluid

С учетом допущений постановка задачи состоит из уравнения Лапласа, условий непротекания на смачиваемых поверхностях, а также кинематического и динамического условий на возмущенной поверхности раздела и имеет вид

$$\nabla^2 \Phi^{(1)} = 0, \text{ в } \tau_1, \quad \nabla^2 \Phi^{(2)} = 0, \text{ в } \tau_2; \tag{2}$$

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{dv} = 0, \text{ на } S_1, \quad \frac{d\Phi^{(2)}}{dv} = 0, \text{ на } S_2, \quad \frac{d\Phi^{(1)}}{dv} = \frac{d\Phi^{(2)}}{dv} \text{ на } \Gamma; \tag{3}$$

$$\left(\rho_2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} [\rho_2 (\nabla \Phi^{(2)})^2 - \rho_1 (\nabla \Phi^{(1)})^2] + (\rho_2 - \rho_1) \ddot{U} \cdot \vec{r} = (\rho_1 - \rho_2) \vec{g} \cdot \vec{r} \text{ на } \Gamma. \tag{4}$$

$\vec{r}|_{\Gamma} = \vec{r}|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$, \vec{v} – внешняя нормаль к соответствующей границе области, занимаемой жидкостью.

При решении подставленной задачи будем предполагать, что квадрат отклонений f^2 возмущенной поверхности раздела от невозмущенной имеет порядок малости ε . При вычислениях будем удерживать линейные, квадратичные, кубические члены f, f^2, f^3 , пренебрегая величиной ε^2 .

Рассмотрим сначала случай свободных движений жидкостей в неподвижной полости. С этой целью представим потенциалы скоростей каждой жидкости в виде следующей суммы:

$$\Phi^{(k)}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\alpha}_i(t) B_i^{(k)}(x, y, z), \quad k = 1, 2, \tag{5}$$

$\Phi^{(k)}$ – потенциалы скоростей верхней и нижней жидкостей, $B_i^{(k)}$ – функции координат верхней и нижней жидкостей, α_i – обобщенные координаты волновых

движений жидкостей на поверхностях раздела i -й гармоники. Здесь и в дальнейшем суммирование по i производится по натуральному ряду чисел от единицы до бесконечности. Верхние индексы параметров (1) и (2) относятся соответственно к верхней и нижней жидкостям.

Предположим далее, что известна некоторая ортогональная на области Γ_0 система функций $f_i(y, z)$, составляющих вместе с постоянной величиной полную систему функций. Отклонение поверхности раздела жидкостей разложим по системе функций f_i :

$$f = \sum_{i=1} \alpha_i(t) f_i(y, z). \quad (6)$$

Подставив (5) в уравнения Лапласа (2) и в кинематические граничные условия (3), получим краевые задачи

$$\nabla^2 B_i^{(k)} = 0, \text{ в } \tau_k, \left. \frac{dB_i^{(k)}}{dv} \right|_{S_k} = 0, (k=1,2), \left. \frac{dB_i^{(1)}}{dv} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{dB_i^{(2)}}{dv} \right|_{\Gamma} = f_i / N. \quad (7)$$

Представим функции $B_i^{(k)}$ в виде разложения по параметрам α_i до второго порядка включительно

$$B_i^{(k)} = B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \dots, \quad (8)$$

где функции $B_{i0}^{(k)}, B_{ij}^{(k)}, B_{ijk}^{(k)}$ зависят только от пространственных координат и не зависят от времени.

Используя разложения вектора нормали и производных по нормали на возмущенной поверхности раздела жидкостей в ряд Тейлора и выражая все функции, входящие в кинематическое условия через их значения на невозмущенной поверхности раздела, исходную нелинейную задачу сведем к последовательному решению линейных краевых задач. С этой целью подставим разложения (6), (8) в (7) и, приравнявая выражения при одинаковых степенях параметров α_i , после некоторых преобразований получим следующие краевые задачи для введенных выше функций:

$$\nabla^2 B_{i0}^{(k)} = 0, \text{ в } \tau_k, \left. \frac{dB_{i0}^{(k)}}{dv} \right|_{S_k} = 0, \text{ на } S_k, \left. \frac{dB_{i0}^{(1)}}{dv} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{dB_{i0}^{(2)}}{dv} \right|_{\Gamma} = f_i \text{ на } \Gamma_0; \quad (9)$$

$$\nabla^2 B_{ij}^{(k)} = 0, \text{ в } \tau_k, \left. \frac{dB_{ij}^{(k)}}{dv} \right|_{S_k} = 0, \text{ на } S_k; \quad (10)$$

$$\left. \frac{dB_{ij}^{(1)}}{dv} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{dB_{ij}^{(2)}}{dv} \right|_{\Gamma} = \nabla' \cdot (f_j \nabla' B_{i0}^{(1)}) = \nabla' \cdot (f_j \nabla' B_{i0}^{(2)}) \text{ на } \Gamma_0; \quad (11)$$

$$\nabla^2 B_{ijk}^{(k)} = 0, \text{ в } \tau_k, \left. \frac{dB_{ijk}^{(k)}}{dv} \right|_{S_k} = 0, \text{ на } S_k; \quad (12)$$

$$\left. \frac{dB_{ijk}^{(1)}}{dv} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{dB_{ijk}^{(2)}}{dv} \right|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \nabla' \cdot (f_j \nabla' B_{ik}^{(k)} + f_k \nabla' B_{ij}^{(k)}) + \frac{1}{2} \nabla' \cdot (f_j f_k \nabla' \frac{\partial B_{i0}^{(k)}}{\partial x}) \text{ на } \Gamma_0. \quad (13)$$

Далее воспользуемся динамическим граничным условием (4). Умножим уравнение (4) на функцию f_i и проинтегрируем по невозмущенной поверхности Γ_0 . В результате получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для обобщенных координат α_i по индексу i :

$$\begin{aligned} & (\mu_i^{(2)} - \mu_i^{(1)}) \frac{d^2 \alpha_i}{dt^2} + g(N_i^{(2)2} - N_i^{(1)2}) \alpha_i + \sum_j \sum_k (\mu_{jik}^{(2)} - \mu_{jik}^{(1)}) \alpha_k \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \\ & + \sum_j \sum_k (N_{jik}^{(2)} - N_{jik}^{(1)}) \frac{d \alpha_j}{dt} \frac{d \alpha_k}{dt} + \sum_j \sum_k \sum_l (\mu_{jikl}^{(2)} - \mu_{jikl}^{(1)}) \alpha_k \alpha_l \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \\ & + \sum_j \sum_k \sum_l (N_{jikl}^{(2)} - N_{jikl}^{(1)}) \alpha_l \frac{d \alpha_j}{dt} \frac{d \alpha_k}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (14)$$

где
$$\mu_i^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} B_i^{(k)} f_i^{(k)} d\Gamma_0, \quad N_i^{(k)2} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (f_i^{(k)})^2 d\Gamma_0; \quad (15)$$

$$\mu_{jik}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (B_{ik}^{(k)} + f_k^{(2)} \frac{\partial B_{i0}^{(k)}}{\partial x_k}) f_j^{(k)} d\Gamma_0; \quad (16)$$

$$\mu_{jikl}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} [B_{j0}^{(k)} \frac{\partial B_{ikl}^{(k)}}{\partial x_k} + (\frac{\partial B_{ik}^{(k)}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} f_k^{(2)} \frac{\partial^2 B_{i0}^{(k)}}{\partial x_k^2}) f_i^{(k)} f_j^{(k)}] d\Gamma_0; \quad (17)$$

$$N_{jik}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (B_{jk}^{(k)} + \frac{1}{2} \nabla B_{j0}^{(k)} \cdot \nabla B_{k0}^{(k)}) f_i^{(k)} d\Gamma_0; \quad (18)$$

$$N_{jikl}^{(k)} = \rho_k \left\{ \int_{\Gamma_0} [2B_{ikl}^{(k)} + f_l^{(k)} \frac{\partial B_{jk}^{(k)}}{\partial x_2} + \nabla B_{jk}^{(k)} \cdot \nabla B_{kl}^{(k)} + \nabla B_{k0}^{(k)} \cdot \nabla B_{jl}^{(k)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f_l^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla B_{j0}^{(k)} \cdot \nabla B_{k0}^{(k)}) f_i^{(k)}] d\Gamma_0 \right\}. \quad (19)$$

2. Определение гидродинамических коэффициентов уравнений движения для случая цилиндрической полости в неподвижном твёрдом теле

Рассмотрим сначала неподвижное твердое тело (т.е. $U(t) = 0$) с цилиндрической полостью, целиком заполненной жидкостями. Пусть полость имеет форму кругового цилиндра радиуса $r = r_0$ (см. рис. 2). Введем цилиндрическую систему координат x, r, η , связанную с декартовой x, y, z следующими формулами: $x = x$, $y = r \cos \eta$, $z = r \sin \eta$.

Для исследования поставленной задачи выделим две основные несимметричные гармоники, возбуждаемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и определяемые обобщенными координатами и формами $\alpha_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2$): $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $f_1 = f_a$, $f_2 = f_\beta$.

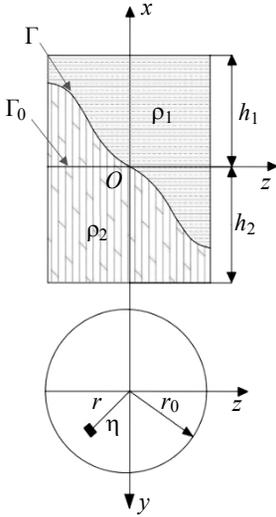


Рис. 2. Обозначения и системы координат для случая прямого кругового неподвижного цилиндра с двухслойной жидкостью
Fig. 2. Designations and coordinate systems for the case of a straight circular fixed cylinder with a two-layer fluid

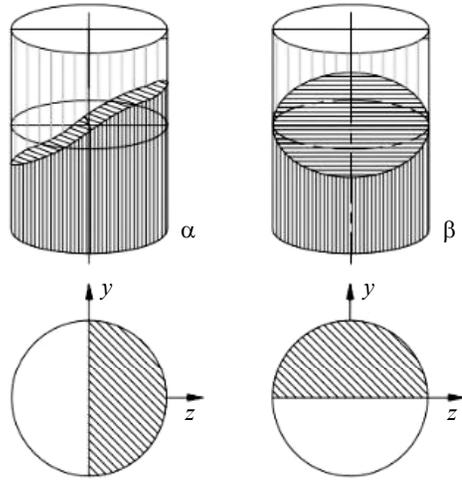


Рис. 3. Формы поверхностей раздела при возбуждении основных и вспомогательных гармоник α, β
Fig. 3. The shapes of interfaces in the course of generation of the fundamental and auxiliary harmonics α, β

В цилиндрической системе координат форму основного тона колебаний поверхности раздела жидкостей представим в виде, аналогичном представляющему свободной поверхности жидкости при нелинейных колебаниях [23] (рис. 3).

$$f_{\alpha}^{(k)}(y, z) = \varphi(r)^{(k)} \sin \eta, \quad f_{\beta}^{(k)}(y, z) = \varphi(r)^{(k)} \cos \eta, \quad (k = 1, 2). \quad (20)$$

Представим искомые функции в виде

$$B_{\alpha 0}^{(k)} = \psi^{(k)}(x, r) \sin \eta; \quad B_{\beta 0}^{(k)} = \psi^{(k)}(x, r) \cos \eta; \quad (21)$$

$$B_{\alpha \alpha}^{(k)} = \Psi_0^{(k)} - \Psi_2^{(k)} \cos 2\eta; \quad B_{\alpha \beta}^{(k)} = B_{\beta \alpha}^{(k)} = \Psi_2^{(k)} \sin 2\eta; \quad B_{\beta \beta}^{(k)} = \Psi_0^{(k)} + \Psi_2^{(k)} \cos 2\eta. \quad (22)$$

Краевая задача (9) совпадает с аналогичной задачей для малых колебаний жидкостей, поэтому воспользуемся результатами работ [17, 23] и запишем функцию в виде $\psi^{(k)}(x, r) = X_{nm}^{(k)}(x)Y_{nm}(r)$, $k = 1, 2$,

$$X_{nm}^{(1)}(x) = -\frac{ch(k_{nm}(x - h_1))}{k_{nm}sh(k_{nm}h_1)}; \quad X_{nm}^{(2)}(x) = \frac{ch(k_{nm}(x + h_2))}{k_{nm}sh(k_{nm}h_2)}; \quad Y_{nm}(r) = \frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(k_{nm}r_0)}, \quad (23)$$

$k_{nm} = \xi_{nm} / r_0$, ξ_{nm} является n -м корнем производной от функции Бесселя m -го порядка. Здесь индексы n, m принимают значения 1,1; 1,0; 1,2.

Имея решения краевых задач (9), нетрудно вычислить гидродинамические коэффициенты линейных уравнений движения тела с жидкостями (15), соответст-

вующие случаю малых перемещений частиц жидкостей:

$$N_{11}^{(1)2} = \rho_1 \delta_{11}, \quad N_{11}^{(2)2} = \rho_2 \delta_{11}, \quad \mu_0^{(1)} = \rho_1 \frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(1)}}, \quad \mu_0^{(2)} = \rho_2 \frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(2)}}, \quad \delta_{11} = \pi \frac{r_0^2 (\xi_{11}^2 - 1)}{2 \xi_{11}^2},$$

$$\ell_{11}^{(1)} = -k_{11} th(k_{11} h_1), \quad \ell_{11}^{(2)} = k_{11} th(k_{11} h_2). \quad (24)$$

Решения краевых задач (10) – (13), учитывающих нелинейные эффекты, будем искать в виде соответствующих разложений в ряд Фурье по функциям Бесселя нулевого и второго порядков, т.е.

$$\Psi_m^{(k)}(x, r) = \sum_n c_{nm}^{(k)} X_{nm}^{(k)}(x) Y_{nm}(r), \quad m = 0, 2. \quad (25)$$

Коэффициенты этих разложений определяются следующими интегралами:

$$c_{n0}^{(k)} = \frac{1}{2 \ell_{11}^{(k)} N_{n0}^{(k)2}} \int_0^{r_0} [Y_{11}'^2 + \left(\frac{1}{r^2} - k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{n0} r dr; \quad N_{n0}^{(k)2} = \frac{r_0^2}{2}; \quad (26)$$

$$c_{n2}^{(k)} = \frac{1}{2 \ell_{11}^{(k)} N_{n0}^{(k)2}} \int_0^{r_0} [Y_{11}'^2 - \left(\frac{1}{r^2} + k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{n2} r dr; \quad N_{n2}^{(k)2} = \frac{r_0^2 (\xi_{n2}^2 - 4)}{2 \xi_{n2}^2}. \quad (27)$$

Собирая значения функций (26) – (27), вычислим значения параметров $\mu_1^{(k)}$ и $\mu_2^{(k)}$, определяющих нелинейность волновых движений жидкости, учет которых позволяет описать явление вращения поверхности раздела жидкостей:

$$\mu_1^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4 \ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left\{ [6 Y_{11}'^2 + \left(\frac{2}{r^2} - 3 k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{11} + \sum_n \frac{4 c_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}} (Y_{n0}' Y_{11}' - k_{n0}^2 Y_{n0} Y_{11}) + \right. \\ \left. + \sum_n \frac{2 c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2\right) Y_{n2} Y_{11}] \right\} Y_{11} r dr; \quad (28)$$

$$\mu_2^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4 \ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left\{ [2 Y_{11}'^2 - \left(\frac{2}{r^2} + k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{11} + \sum_n \frac{2 c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}' Y_{11}' + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2\right) Y_{n2} Y_{11}] \right\} Y_{11} r dr. \quad (29)$$

Перепишем уравнения для обобщенных координат волновых движений жидкостей на поверхности раздела в виде

$$\ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha + d_1 (\alpha^2 \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \alpha + \alpha \beta \ddot{\beta} + \alpha \beta^2) + d_2 (\beta^2 \ddot{\alpha} + 2 \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2 \alpha \beta^2) = 0; \quad (30)$$

$$\ddot{\beta} + \sigma^2 \beta + d_1 (\beta^2 \ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 \beta + \alpha \beta \ddot{\alpha} + \beta \beta^2) + d_2 (\beta^2 \ddot{\beta} + 2 \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2 \beta \alpha^2) = 0, \quad (31)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{g(N_{11}^{(2)2} - N_{11}^{(1)2})}{\mu_0^*}, \quad d_1 = \frac{(\mu_1^{(2)} - \mu_1^{(1)})}{\mu_0^*}, \quad d_2 = \frac{(\mu_2^{(2)} - \mu_2^{(1)})}{\mu_0^*}, \quad \mu_0^* = (\mu_0^{(2)} - \mu_0^{(1)}).$$

3. Исследование устойчивости вынужденных и параметрических колебаний жидкостей в простейшем случае

Пусть полость совершает заданные движения в направлении оси Oz по закону: $U(t) = S \cos \omega t$, где $U(t)$ – смещение заданного движения сосуда (см. рис. 4), S и ω – амплитуда и частота возмущения.

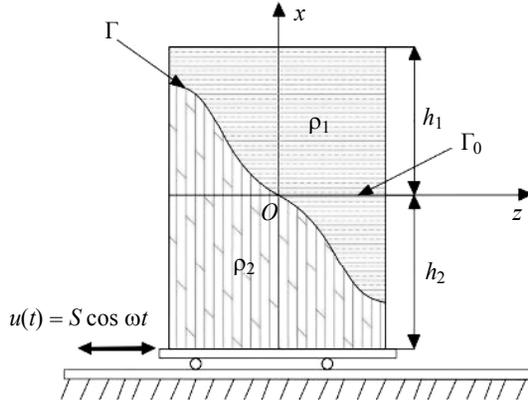


Рис. 4. Цилиндрический сосуд, совершающий поступательное движение
Fig. 4. Cylindrical tank in translational motion

Соответствующая этому случаю система нелинейных уравнений приобретает вид

$$L_1(\alpha, \beta) = \ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha + d_1(\alpha^2 \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \alpha + \alpha \beta \ddot{\beta} + \alpha \dot{\beta}^2) + d_2(\beta^2 \ddot{\alpha} + 2\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2\alpha \dot{\beta}^2) - \omega^2 P \cos \omega t = 0; \tag{32}$$

$$L_2(\alpha, \beta) = \ddot{\beta} + \sigma^2 \beta + d_1(\beta^2 \ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 \beta + \alpha \beta \ddot{\alpha} + \beta \dot{\alpha}^2) + d_2(\beta^2 \ddot{\beta} + 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2\beta \dot{\alpha}^2) = 0, \tag{33}$$

где $P = \frac{S\lambda}{\mu_0}$, $\lambda = \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}$, $\lambda^{(k)} = \rho_k \pi \int_0^{r_0} r^2 Y_{11} dr = \frac{\rho_k \pi r_0^3}{\xi_{11}^2}$, $k = 1, 2$.

Эта система приближенно описывает вынужденные и параметрические возбуждаемые колебания поверхности раздела жидкостей. В том случае, когда параметрические колебания в системе не возникают ($\beta \equiv 0$), вынужденные колебания описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$L_1(\alpha) = \ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha + d_1(\alpha^2 \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \alpha) = \omega^2 P \cos \omega t. \tag{34}$$

Приближенное решение этого уравнения найдем методом Бубнова – Галеркина, представив решения в виде

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos k\omega t + \bar{\alpha}_k \sin k\omega t), \tag{35}$$

где α_k и $\bar{\alpha}_k$ – неизвестные постоянные.

Удержав в (35) только основные гармоники

$$\alpha(t) = A \cos \omega t + \bar{A} \sin \omega t, \quad (36)$$

получим уравнение

$$(\bar{\sigma}^2 - 1)A - m_1 A^3 = P, \quad \bar{A} \equiv 0, \quad (37)$$

где $m_1 = d_1 / 2$, $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 / \omega^2$.

Уравнение (37) используется для определения амплитуд вынужденных колебаний двухслойной жидкости в зависимости от параметра P и ω . Положив в (37) $P = 0$, для определения зависимости амплитуд свободных колебаний жидкостей от частоты получим формулу

$$(\bar{\sigma}^2 - 1) - m_1 A^2 = 0. \quad (38)$$

В дальнейшем при определении установившихся режимов движения жидкостей и границ областей их устойчивости используются основные слагаемые в разложениях типа (35).

Остановимся на вопросе об устойчивости периодического решения (36). Ответ на него состоит в том, чтобы найти те значения параметров S и ω , при которых установившийся режим

$$\alpha(t) = A \cos \omega t, \quad \beta \equiv 0, \quad (39)$$

описываемый системой нелинейных уравнений (32) – (33), физически реализуем. С этой целью наряду с движением (39), которое было принято за невозмущенное, рассмотрим также близкие к нему движения

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(t) + \xi(t), \quad \beta(t) = \bar{\beta}(t) + \eta(t), \quad (40)$$

которые будем называть также возмущёнными, а величины $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – возмущениями.

В соответствии с общей теорией устойчивости составим уравнения в вариациях, соответствующие заданной системе нелинейных уравнений (32), (33). Подставляя выражение (39) в систему уравнений (32), (33) и учитывая, что $\bar{\alpha}(t)$ является частным решением (34), получаем уравнения возмущенного движения в виде

$$(d_1 \bar{\alpha}^2 + 1) \ddot{\xi} + 2d_1 \bar{\alpha} \dot{\bar{\alpha}} \dot{\xi} + (\sigma^2 + 2d_1 \bar{\alpha} \ddot{\bar{\alpha}} + d_1 \bar{\alpha}^2) \xi + F_1(\xi, \beta, \dot{\xi}, \dot{\beta}, \ddot{\xi}, \ddot{\beta}) = 0; \quad (41)$$

$$(1 + d_2) \ddot{\eta} + 2d_2 \bar{\alpha} \dot{\bar{\alpha}} \dot{\eta} + (\sigma^2 + c\bar{\alpha} \ddot{\bar{\alpha}} + k_3 \bar{\alpha}^2) \eta + F_2(\xi, \beta, \dot{\xi}, \dot{\beta}, \ddot{\xi}, \ddot{\beta}) = 0, \quad (42)$$

где F_1 и F_2 – функции, содержащие возмущения и их производные в степенях выше первой. Оставляя в (41) и (42) только линейные члены, с учетом (39) приходим к уравнениям в вариациях:

$$L_3(\xi) = (p + q \cos \theta t) \ddot{\xi} - \varepsilon_1 \dot{\xi} \sin \theta t + (\gamma - \delta \cos \theta t) \xi = 0; \quad (43)$$

$$L_4(\eta) = (\bar{p} + \bar{q} \cos \theta t) \ddot{\eta} - \varepsilon \dot{\eta} \sin \theta t + (\bar{\gamma} - \bar{\delta} \cos \theta t) \eta = 0, \quad (44)$$

носящих названия уравнений первого приближения. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 q &= (d_1 A^2)/2, \quad p = 1 + q, \quad \varepsilon_1 = d_1 \omega A^2, \quad \gamma = (\bar{\sigma}^2 - (d_1 A^2)/2)\omega^2, \\
 \delta &= (3d_1 \omega^2 A^2)/2, \quad \bar{p} = 1 + \bar{q}, \quad \bar{q} = (d_2 A^2)/2, \quad \bar{\gamma} = (\bar{\sigma}^2 - (d_2 A^2)/2)\omega^2, \\
 \bar{\delta} &= \omega^2 A^2 (2d_1 - 3d_2), \quad \varepsilon = d_2 \omega A^2, \quad \theta = 2\omega.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Перейдем к построению областей неустойчивости решений уравнений (43), (44). Рассмотрим сначала уравнение (43) относительно функции $\xi(t)$, характеризующее возмущение периодического решения $\bar{u}(t) = A \cos \omega t$. Амплитуда A этого решения определяется уравнением (37). Необходимо установить, какая пара значений A и ω , удовлетворяющих уравнению (37), приводит к устойчивым решениям и какая пара к неустойчивым. Имея в виду построение основной области неустойчивости решения уравнения (43), представим его в виде

$$\xi(t) = a_1 \cos \frac{\theta t}{2} + b_1 \sin \frac{\theta t}{2}. \tag{46}$$

Из уравнения Бубнова – Галеркина

$$\int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L_3(\alpha) \cos \frac{\theta t}{2} dt = 0, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L_3(\alpha) \sin \frac{\theta t}{2} dt = 0, \tag{47}$$

для определения границ области неустойчивости получим следующие отношения:

$$(\bar{\sigma}^2 - 1) - 3m_1 A^2 = 0; \tag{48}$$

$$(\bar{\sigma}^2 - 1) - m_1 A^2 = 0. \tag{49}$$

Уравнение (49) совпадает с уравнением скелетной линии (38). На рис. 5 эта линия соответствует кривой ABC . Уравнению (48) соответствует кривая AMO . Сопоставляя уравнение (48) с уравнением амплитудно-частотных характеристик (37), нетрудно заметить, что устойчивая ветвь резонансной кривой RNM отделяется от неустойчивой точкой M , в которой амплитудные кривые имеют вертикальную касательную. На устойчивой части ветви амплитудно-частотной характеристики, находящейся слева от линии ABC , производная должна быть обязательно положительной. В точке M она стремится к бесконечности, а на неустойчивой левой ветви она отрицательна. В области (I) , ограниченной кривыми AMO и ABC , решение $\bar{u}(t) = A \cos \omega t$ неустойчиво. С физической точки зрения условие устойчивости периодического решения с периодом возмущающей силы означает, что амплитуда вынужденных колебаний с возрастанием внешней силы P увеличивается.

Рассмотрим далее уравнение (44) в вариациях относительно возмущения $\eta(t)$ тривиального решения $\beta(t) \equiv 0$. Исследование решений уравнения (44) должно дать ответ на вопрос об устойчивости этого тривиального решения. В соответствии с изложенным выше области неустойчивости уравнения (44) отвечают областям параметрически возбуждаемых колебаний ($\beta \neq 0$), т.е. областям динамической неустойчивости режима движения (39). Для построения основной области неустойчивости положим

$$\eta(t) = a_0 \cos \frac{\theta t}{2} + b_0 \sin \frac{\theta t}{2}. \tag{50}$$

Поставив выражения (50) в уравнения Бубнова – Галеркина

$$\int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L_4(\eta) \sin \frac{\theta t}{2} dt = 0, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L_4(\eta) \cos \frac{\theta t}{2} dt = 0, \quad (51)$$

для определения границ областей динамической устойчивости получим следующие уравнения:

$$\bar{\sigma}^2 = m_2 A^2 + 1; \quad (52)$$

$$\bar{\sigma}^2 = m_1 A^2 + 1, \quad (53)$$

где $m_2 = (4d_2 - d_1)$. На рис. 5 уравнению (52) соответствует кривая линия ADE , а уравнению (53) – кривая линия ABC . Следовательно, области неустойчивости решений уравнений (43), (44) непрерывно переходят одна в другую.

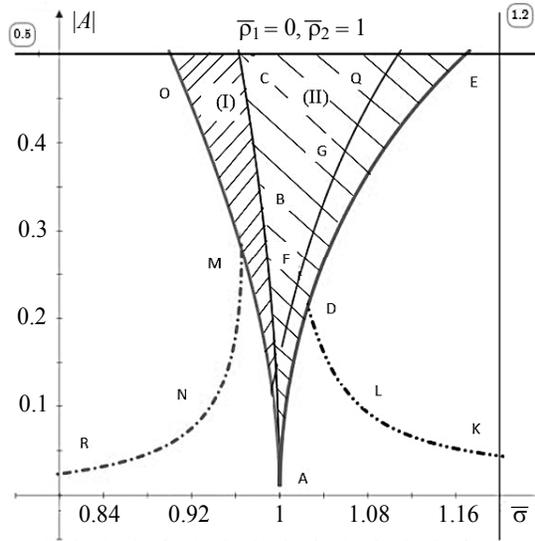


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α для случая $\bar{p}_1=0$ при $\bar{S} = 0.005, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2$

Fig. 5. Frequency-response characteristics and instability regions of forced oscillations of fluids in a cylindrical tank in the course of generation of the fundamental harmonics α for the case of $\bar{p}_1 = 0$ at $\bar{S} = 0.005, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2$

В области II рис. 5 и 6, ограниченной кривыми ABC и ADE , решение $\beta(t) \equiv 0$ неустойчиво. Вторая устойчивая ветвь амплитудно-частотной характеристики KLD примыкает к области II справа и отделяется от нее точкой D . В области динамической неустойчивой II установившийся режим, если он существует, описывается нелинейной системой уравнений (32), (33).

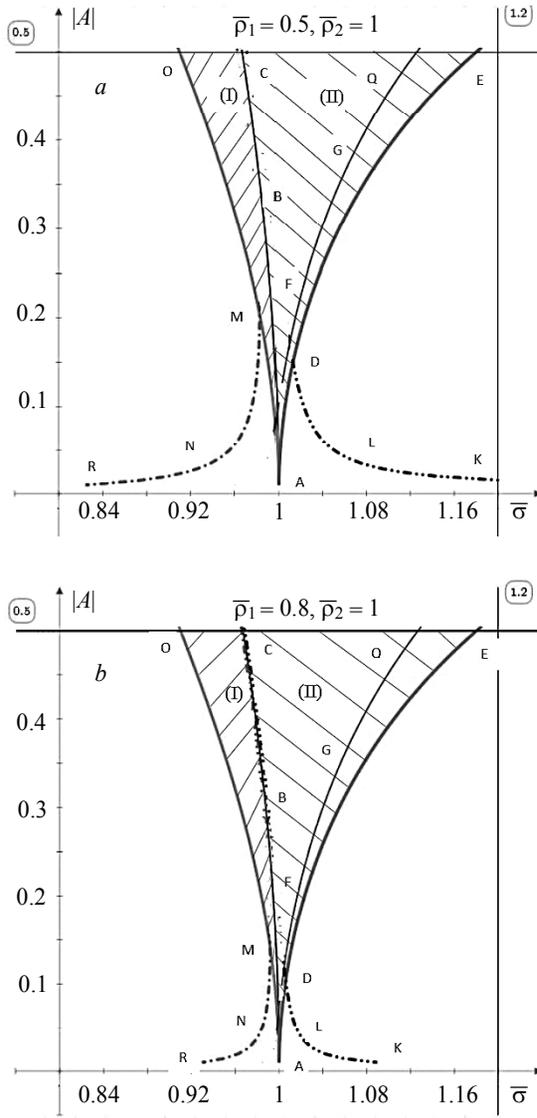


Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α (а) для $\bar{\rho}_1 = 0.5$, (б) для $\bar{\rho}_1 = 0.8$ при $\bar{S} = 0.005$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2$

Fig. 6. Frequency-response characteristics and instability regions of forced oscillations of fluids in a cylindrical tank in the course of generation of the fundamental harmonics α for the case of $\bar{\rho}_1 = (a) 0.5$ and (b) 0.8 at $\bar{S} = 0.005$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2$

Рассмотрим теперь вопрос о построении установившихся режимов движения жидкостей, происходящих в основной области динамической неустойчивости II.

Предположим, что в области основного резонанса приближенное решение системы нелинейных уравнений (32) – (33) можно представить в виде

$$\alpha(t) = A \cos \omega t + \bar{A} \sin \omega t, \quad \beta(t) = \bar{B} \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (54)$$

Применив к решению этой системы метод Бубнова – Галеркина, для постоянных A, \bar{A}, B и \bar{B} получаем следующие алгебраические соотношения:

$$(\bar{\sigma}^2 - 1)A - m_1 A^3 - m_2 AB^2 = P; \quad (55)$$

$$(\bar{\sigma}^2 - 1) - m_1 B^2 - m_2 A^2 = 0; \quad (\bar{A} = 0, \bar{B} = 0). \quad (56)$$

Исключая B из (56) и подставляя результат в (55), находим уравнение для определения амплитудно-частотных характеристик в области II

$$(\bar{\sigma}^2 - 1)A - m_4 A^3 = m_5 P; \quad \text{где } m_4 = 2d_2, \quad m_5 = m_1 / (m_1 - m_2). \quad (57)$$

Решение (57) отвечает наблюдаемому в эксперименте режиму вращения поверхности раздела жидкостей. Соответствующие ему резонансные кривые представлены на рис. 5 и 6 линиями FGQ .

Из полученных всех соотношений на рис. 5 построены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и области неустойчивости вынужденных колебаний жидкостей при отсутствии верхней жидкости $\bar{\rho}_1 = 0$, которая полностью совпадала с результатом задачи для одной жидкости [22].

На рис. 6 представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и области неустойчивости вынужденных колебаний двух жидкостей при различных соотношениях плотностей.

Области I и II являются областями неустойчивости вынужденных колебаний жидкостей, происходящих в плоскости действия возмущающей силы. В области II эта неустойчивость обусловлена неустойчивостью тривиального решения $\beta(t) \equiv 0$, т.е. возможно параметрическое возбуждение обобщенной координаты β . Линия FGQ соответствует вращательному движению поверхности раздела жидкостей, наблюдаемому в эксперименте.

Заключение

Теоретически исследованы нелинейные эффекты, возникающие в результате взаимодействия жидкостей с жестким сосудом, совершающим гармонические колебания. Наиболее интересным с практической стороны является случай колебаний жидкостей в окрестности самой низкой частоты собственных колебаний поверхности раздела. Здесь наблюдается ряд характерных существенно нелинейных особенностей движения жидкостей, среди которых можно указать на зависимость частоты колебаний от амплитуды, ограниченность амплитуд колебаний, подвижность узловых линий поверхности раздела и возникновение своеобразного вращения слоев жидкостей в некотором диапазоне частот возмущающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.
3. Thorpe S.A. On standing internal gravity waves of finite amplitude // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. No. 3. P. 489–528.
4. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaglia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids // *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2018. V. 4. P. 243–257.
5. La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // *Physics of Fluids*. 2005. No. 17. P. 062101.
6. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2008. № 1. С. 141–148.
7. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2007. № 6. С. 103–110.
8. Порубов А.В. О локализации двумерных нелинейных внутренних волн в двухслойной жидкости // *Журнал технической физики*. 2005. Т. 75(7). С. 48–51.
9. Басинский К.Ю. Нелинейные волны на поверхности слоя вязкой жидкости // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2015. Т. 15. № 3. С. 322–329.
10. Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О. Волновое движение в поле силы тяжести на свободной поверхности и на границе стратификации слоисто-неоднородной жидкости. Нелинейный анализ // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2010. № 5. С. 130–140.
11. Kalinichenko V.A. Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54. No. 6. P. 761–773.
12. Kalinichenko V.A. Effect of an upper layer of viscous liquid on breaking surface gravity waves // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1301. P. 012017.
13. Мерзляков А.В., Крюкова Е.А. Свободные колебания идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с горизонтальной проницаемой перегородкой // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 60. С. 107–118. DOI: 10.17223/19988621/60/8.
14. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // *Инженерный журнал: наука и инновация. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн.* 2013. № 12(24).
15. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // *Наука и образование, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2013. № 11.
16. Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Потенциал двойного слоя в задаче о свободных колебаниях пологой оболочки в идеальной несжимаемой жидкости // *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. 1990. № 22. С. 122–133.
17. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги // *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. «Естественные науки»*. 2015. № 3. С. 57–69.
18. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний твердого тела со слоистой жидкостью // *Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2018. № 04. С. 1–13.
19. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое и экспериментальное исследования колебаний твёрдого полуцилиндра, имеющего полость, заполненную слоистой жидкостью // *Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн.* 2019. № 05.

20. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Колебания вязкой трехслойной жидкости в неподвижном баке // Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2019. № 07.
21. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 468 (2018) 012031.
22. *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость; отв. ред. В.А. Троценко; Ин-т математики АН УССР. Киев: Наук. Думка, 1990. 296 с. ISBN 5-12-001308-2.
23. *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
24. *Микишев. Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1987. 248 с.
25. *Микишев. Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.

Статья поступила 25.12.2019

Win Ko Ko, Temnov A.N. (2021) A THEORETICAL STUDY OF OSCILLATIONS OF TWO IMMISCIBLE FLUIDS IN A LIMITED TANK. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 97–113

DOI 10.17223/19988621/69/8

Keywords: cylindrical tank, two-layer fluid, nonlinear oscillations, instability region, hydrodynamic coefficients.

In the paper, the nonlinear oscillations of a two-layer fluid that completely fills a limited tank are theoretically studied. To determine any smooth function on the deflected interface, the Taylor series expansions are considered using the values of the function and its normal derivatives on the undisturbed interface of the fluids. Using two fundamental asymmetric harmonics, which are generated in two mutually perpendicular planes, the differential equations of nonlinear oscillations of the two-layer fluid interface are investigated. As a result, the frequency-response characteristics are presented and the instability regions of the forced oscillations of the two-layer fluid in the cylindrical tank are plotted, as well as the parametric resonance regions for different densities of the upper and lower fluids. The Bubnov-Galerkin method is used to plot instability regions for the approximate solution to nonlinear differential equations.

At the final stage of the work, the nonlinear effects resulting from the interaction of fluids with a rigid tank that executes harmonic oscillations at the interface of the fluids are theoretically studied.

Ko Ko WIN (Candidate of Physics and Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: win.c.latt@gmail.com

Aleksandr N. TEMNOV (Candidate of Physics and Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: ant45@mail.ru

REFERENCES

1. Sretenskiy L.N. (1977) *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions in a fluid]. Moscow: Nauka.
2. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1987) *Course of Theoretical Physics. Volume 6: Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon Press.
3. Thorpe S.A. (1968) On standing internal gravity waves of finite amplitude. *Journal of Fluid Mechanics*. 32(3). pp. 489–528.

4. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.Y., Thomson C.F.C. (2018) Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 4. pp. 243–257. DOI: 10.1007/s40722-018-0119-9.
5. La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. (2005) Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface. *Physics of Fluids*. 17(062101). DOI: 10.1063/1.1922887.
6. Kalinichenko V.A., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. (2008) Experimental investigation of secondary steady flows in Faraday surface waves. *Fluid Dynamics*. 43(1). pp. 125–131. DOI: 10.1134/s10697-008-1014-1.
7. Kalinichenko V.A., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. (2007) Experimental investigation of Faraday waves of maximum height. *Fluid Dynamics*. 42. pp. 959–965. DOI: 10.1134/S0015462807060117.
8. Porubov A.V. (2005) O lokalizatsii dvumernykh nelineynykh vnutrennikh voln v dvukhsloynoy zhidkosti [On localization of two-dimensional nonlinear internal waves in a two-layer fluid]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 75(7). pp. 48–51.
9. Basinskiy K.Yu. (2015) Nelineynye volny na poverkhnosti sloya vyazkoy zhidkosti [Nonlinear waves on the surface layer of a viscous liquid]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 15(3). pp. 322–329.
10. Grigoryev A.I., Fedorov M.S., Shiryayeva S.O. (2010) Wave motion in a gravity field on the free surface and stratification interface of a fluid with stratified inhomogeneity. Nonlinear analysis. *Fluid Dynamics*. 45. pp. 793–802. DOI: 10.1134/S0015462810050121.
11. Kalinichenko V.A. (2019) Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid. *Fluid Dynamics*. 54(6). pp. 761–773. DOI: 10.1134/S0015462819060065.
12. Kalinichenko V.A. (2019) Effect of an upper layer of viscous liquid on breaking surface gravity waves. *Journal of Physics: Conference Series*. 1301(012017). DOI: 10.1088/1742-6596/1301/1/012017.
13. Merzlyakov A.V., Kryukova E.A. (2019) Svobodnye kolebaniya ideal'noy zhidkosti v pryamougol'nom sosude s gorizonta'noy pronitsaemoy peregorodkoy [Free oscillations of an ideal fluid in a rectangular vessel with a horizontal permeable membrane]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 107–118. DOI: 10.17223/19988621/60/8.
14. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. (2013) Svobodnye osesimmetrichnye kolebaniya dvukhsloynoy zhidkosti s uprugim razdelitelem mezhdru sloyami pri nalichii sil poverkhnostnogo natyazheniya [Free axisymmetric oscillations of two-layered liquid with the elastic separator between layers in the presence of surface tension forces]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsiya – Engineering Journal: Science and Innovation*. 12(24).
15. Goncharov D.A. (2013) Dinamika dvukhsloynoy zhidkosti, razdelennoy uprugoy peregorodkoy s uchedom sil poverkhnostnogo natyazheniya [Dynamics of two-layer liquid, divided by an elastic baffle considering surface tension forces]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana – Science and Education: Scientific Periodical of the Bauman MSTU*. 11.
16. Naumenko V.V., Strel'nikova E.A. (1990) Potentsial dvoynogo sloya v zadache o svobodnykh kolebaniyakh pologoy obolochki v ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [The potential of a double layer in the problem of free vibrations of a flat shell in an ideal incompressible fluid]. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek*. 22. pp. 122–133.
17. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2016) Kolebaniya diskretno-stratifikirovannykh zhidkostey v tsilindricheskom sosude i ikh mekhanicheskie analogi [Oscillations of immiscible liquids in a stationary cylindrical vessel and their mechanical analogs]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya «Estestvennye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*. 3(66). pp. 57–69. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-57-69.

18. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2018) Eksperimental'noe i teoreticheskoe issledovanie kolebaniy tverdogo tela so sloistoy zhidkost'yu [Experimental and theoretical study of vibrations of a rigid body with a layered liquid]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 4. pp. 1–13.
19. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2019) Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovaniya kolebaniy tverdogo polutsilindra, imeyushchego polost', zapolnennuyu sloistoy zhidkost'yu [Theoretical and experimental studies of vibrations of the solid half-cylinder having a cavity filled with a layered fluid]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 5.
20. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2019) Kolebaniya vyazkoy trekhsloynoy zhidkosti v nepodvizhnom bace [Oscillations of a three-layer viscous fluid in a stationary tank]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 7.
21. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2018) Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 468(012031). DOI: 10.1088/1757-899X/468/1/012031/meta.
22. Lukovskiy I.A. (1990) *Vvedenie v nelineynuyu dinamiku tverdogo tela s polostyami, sodержashchimi zhidkost'* [Introduction to nonlinear dynamics of a solid with cavities filled with a fluid]. Kyiv: Naukova Dumka.
23. Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskiy I.A. (1977) *Nelineynaya dinamika letatel'nogo apparata s zhidkost'yu* [Nonlinear dynamics of an aircraft with a fluid]. Moscow: Mashinostroenie.
24. Mikishev G.N. (1987) *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov* [Experimental methods in spacecraft dynamics]. Moscow: Mashinostroenie.
25. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. (1968) *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'yu* [Dynamics of a solid body with cavities partially filled with a fluid]. Moscow: Mashinostroenie.

Received: December 25, 2019

УДК 532.516
DOI 10.17223/19988621/69/9

О.В. Матвиенко, В.А. Архипов, Н.Н. Золоторёв

**АЭРОДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА
ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛУЗАМКНУТОМ ЦИЛИНДРЕ¹**

Представлена математическая модель и результаты численного исследования характеристик закрученного турбулентного потока воздуха в полузамкнутом цилиндре, вращающемся вокруг оси симметрии. Из анализа результатов расчетов получено соотношение между высотой и угловой скоростью вращения цилиндра, обеспечивающее образование зоны квазитвердого вращения в его приторцевой области.

Ключевые слова: полузамкнутый цилиндр, закрученное течение, частота вращения, структура турбулентного потока, численное исследование.

Вращающиеся элементы используются в целом ряде технических систем (газовые турбины, авиационные двигатели, аппараты химической технологии, лабораторные установки и т.д.) [1, 2]. Вращение элементов индуцирует закрученное течение в их внутренних полостях, в частности в цилиндрических каналах, что приводит к формированию закрученного потока сложной структуры. Экспериментальным исследованиям и расчетно-теоретическому анализу структуры закрученного потока в цилиндрических каналах посвящено большое количество публикаций. В большинстве известных работ [3–11] рассматриваются характеристики течения при тангенциальном вводе газа или жидкости в канал. В настоящей статье представлены математическая модель и результаты численного исследования характеристик турбулентного течения в полузамкнутом цилиндрическом канале, индуцированного его вращением вокруг оси симметрии.

Постановка задачи

Для описания аэродинамики стационарного осесимметричного изотермического закрученного потока использовалась физико-математическая модель, которая включает уравнения Навье – Стокса в цилиндрических координатах x, r (ось x направлена в сторону открытого торца цилиндра) [1, 11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_e \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_e r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_e r \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] - 2 \frac{\mu_e v}{r^2} + \frac{\rho w^2}{r}, \end{aligned} \tag{1}$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания No. 0721-2020-0036.

$$\frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v w r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_e r^3}{\sigma_{r\varphi}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right] - \frac{\rho v w}{r},$$

где u, v, w – осевая, радиальная и тангенциальная компоненты вектора скорости; p, ρ – давление и плотность воздуха; $\mu_e = \mu + \mu_t$ – коэффициент эффективной вязкости; μ – коэффициент динамической вязкости, μ_t – коэффициент турбулентной вязкости.

Исследование характеристик турбулентности осуществлялось с использованием составной модели Менстера SST (Shear Stress Transport) [12, 13], которая представляет собой комбинацию k – ε - и k – ω -моделей турбулентности, обеспечивающую сочетание лучших качества этих моделей. Известно [14–17], что k – ε -модель хорошо описывает свойства свободных и струйных сдвиговых течений, а k – ω -модель обеспечивает существенно более точное описание пристеночных пограничных слоев [18]. С учетом этого, Менстером было предложено объединить эти модели. Вблизи твердых стенок реализуется k – ω -модель, а вдали от них – k – ε -модель турбулентности. Плавный переход от одной модели турбулентности к другой обеспечивается введением весовой функции F_1 , которая принимает единичное значение в пристеночной области и равняется нулю вдали от стенки. Таким образом, для определения характеристик турбулентности используются уравнения [18, 19]

$$\frac{\partial \rho u k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v k r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + F_2 \tilde{G} - C_\mu \rho \omega k - F_3 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u \omega}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v \omega r}{\partial r} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \\ & + \left(\frac{C_\beta}{C_\mu} - \frac{\sigma_\omega}{\sqrt{C_\mu}} K^2 \right) \frac{\rho}{\mu_t} F_2 \tilde{G} - C_\beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) C_{k\omega} - F_4, \end{aligned} \quad (3)$$

где k – турбулентная кинетическая энергия; ε – скорость диссипации турбулентной энергии; ω – частота турбулентных пульсаций.

Интенсивность скоростей сдвиговых деформаций (второй инвариант девиатора тензора скоростей деформаций) определяется выражением

$$G = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right]^2.$$

В уравнение (2) для расчета генерации турбулентной энергии введен ограничитель $\tilde{G} = \min \left[\mu_t G, 20 C_\mu \rho \omega k \right]$.

Последнее слагаемое в уравнении (3) описывает перекрестную диффузию:

$$C_{k\omega} = 2 \rho \sigma_{\omega 2} \omega^{-1} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right).$$

Функция смешения и ее аргумент вычисляются следующим образом:

$$F_1 = \text{th}(F_5^4); \quad F_5 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega d_w}, \frac{500 \mu}{\rho d_w^2 \omega} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{\max [C_{k\omega}, 10^{-20}] d_w^2} \right],$$

где d_w – расстояние от рассматриваемой точки до ближайшей точки твердой поверхности.

Описанная выше модель турбулентности модифицирована для расчета закрученных потоков введением поправочной функции F_2 [20]:

$$F_2 = \max[\min[f_{\text{rot}}, 1.25], 0].$$

Данное определение ограничивает значения поправочной функции от $F_2 = 0$ (стабилизированное течение без генерации турбулентности) до $F_2 = 1.25$ (интенсивная генерация турбулентности).

Для расчета поправочной функции используются зависимости [20], которые с использованием индексной формы записи имеют вид

$$f_{\text{rot}} = 2\xi^* \left(\frac{1 + C_{\xi 1}}{1 + \xi^*} \right) (1 - C_{\xi 3} \arctg(C_{\xi 2} \xi)) - C_{\xi 1},$$

$$\xi = 2 \frac{\Omega_{jk} \dot{\epsilon}_{jk}}{\Omega F_6^3} \left(\frac{D \dot{\epsilon}_{ij}}{Dt} \right), \quad \xi^* = \frac{\sqrt{G}}{\Omega^2},$$

$$F_6 = \sqrt{\max(G, C_{\mu} \omega^2)}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(r \frac{\partial rw}{\partial r} \right)^2 \right]}.$$

Компоненты тензора скоростей деформации и тензора вихря определяются выражениями

$$\dot{\epsilon}_{xr} = \dot{\epsilon}_{rx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad \dot{\epsilon}_{x\varphi} = \dot{\epsilon}_{\varphi x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \dot{\epsilon}_{r\varphi} = \dot{\epsilon}_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial w/r}{\partial r} \right),$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{v}{r}.$$

$$\Omega_{xr} = -\Omega_{rx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad \Omega_{x\varphi} = -\Omega_{\varphi x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Omega_{r\varphi} = -\Omega_{\varphi r} = -\frac{r}{2} \frac{\partial rw}{\partial r},$$

$$\Omega_{xx} = 0, \quad \Omega_{rr} = 0, \quad \Omega_{\varphi\varphi} = 0.$$

Оператор $D \dot{\epsilon}_{ij} / Dt$ – означает субстанциональную производную компонент тензора скоростей деформации $\dot{\epsilon}$, которая в случае стационарного осесимметричного течения имеет вид

$$\frac{D \dot{\epsilon}_{ij}}{Dt} = u \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial x} + v \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial r}.$$

Для определения турбулентной вязкости по известным значениям k и ω в SST-модели используется выражение, базирующееся на гипотезе Брэдшоу [20, 21] о пропорциональности напряжению сдвига в пристеночной части пограничного слоя энергии турбулентных пульсаций:

$$\mu_t = \min \left[\frac{\rho k}{\omega}, \frac{\gamma \rho k}{F_7 G} \right].$$

Эмпирическая функция F_7 рассчитывается по формуле

$$F_7 = \text{th}(F_8^2), \quad F_8 = \max \left[2 \frac{\sqrt{k}}{C_{\mu} \omega d_w}, \frac{500 \mu}{d_w^2 \rho \omega} \right].$$

Эмпирические константы определяются через соответствующие константы k - ε - и стандартной k - ω -моделей с помощью функции F_1 :

$$\sigma_k = F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}, \quad \sigma_\omega = F_1 \sigma_{\omega1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega2}, \quad C_\beta = F_1 C_{\beta1} + (1 - F_1) C_{\beta2}.$$

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к константам k - ε - и k - ω -моделей: $\sigma_{k1} = 0.85$, $\sigma_{\omega1} = 0.5$, $C_{\beta1} = 0.075$, $\sigma_{k2} = 1$, $\sigma_{\omega2} = 0.856$, $C_{\beta2} = 0.0828$. Значения остальных констант выбираются в соответствии с рекомендациями [12, 14, 18]: $\gamma = 0.31$, $C_\mu = 0.09$, $C_{\xi1} = 1$, $C_{\xi2} = 2$, $C_{\xi3} = 1$, $\varkappa = 0.41$.

Вследствие эллиптичности системы дифференциальных уравнений для замыкания задачи необходима постановка граничных условий на всех границах расчетной области.

На стенках цилиндра моделируются условие прилипания и непротекания, кинетическая энергия турбулентности полагается равной нулю, частота турбулентных пульсаций ω_{mw} определяется в ближайшем к твердой стенке узле конечноразностной сетки:

$$v = 0, \quad u = 0, \quad w = \frac{\pi}{30} nR, \quad k = 0, \quad \omega_{mw} = \vartheta_2 \frac{\mu}{\rho \Delta^2},$$

где n – частота вращения цилиндра (об/мин); R – радиус цилиндра; $\vartheta_2 = 80$ – параметр модели; Δ – расстояние до твердой стенки.

Граничные условия на торцевой поверхности также определяют условия прилипания и непротекания и записываются в виде

$$v = 0, \quad u = 0, \quad w = \frac{\pi}{30} nr, \quad k = 0, \quad \omega_{mw} = \vartheta_2 \frac{\mu}{\rho \Delta^2}.$$

На оси течения выполняются условия симметрии

$$r = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0.$$

Давление p на входе в цилиндр полагается равным атмосферному. Остальные граничные условия на входе могут быть записаны как

$$v_{in} = 0, \quad w_{in} = 0, \quad k = Tu \cdot u_{in}^2, \quad \omega = \frac{C_\omega}{2R} \sqrt{k_{in}}.$$

Здесь $C_\omega = 10$, $Tu = 0.03$ – константы модели.

Метод решения

Представленные в предыдущем разделе уравнения представляют собой полную замкнутую систему уравнений, которая при соответствующих граничных условиях и известных свойствах потока определяет основные характеристики течения. Уравнения (1) – (3) решались численно с использованием метода конечного объема [22]. В соответствии с этим методом конечноразностные уравнения получают интегрированием дифференциальных уравнений по контрольным объемам, содержащим узлы конечноразностной сетки.

Численное решение проводилось с использованием шахматной сетки. Узлы для осевой и радиальной составляющих скорости располагались в середине граней контрольных объемов для скалярных величин. Вычисления проведены на сетке с 2000 узлами в осевом направлении и 1700 узлами в радиальном. Вблизи стенок, а также в областях с большими градиентами скорости проводилось сгущение сетки.

Известно [23–25], что при сильной закрутке в потоке возникают зоны со значительным продольным изменением гидродинамических параметров. Как следст-

вие, применение схем первого порядка по пространству является малоэффективным в силу сильной численной диффузии. В то же время традиционные схемы второго порядка приводят к появлению ложных осцилляций численного решения в областях больших градиентов [26]. Немонотонность этих схем является нежелательной и требует особого внимания при разработке вычислительных алгоритмов. В настоящей работе для решения уравнений динамики используется TVD-подход (Total Variation Diminishing). Этот подход связан с построением схем, которые уменьшают или сохраняют полную вариацию функции, не допуская тем самым появления ложных осцилляций. Основная идея TVD-подхода состоит в том, что расчет ведется всюду со вторым порядком точности, кроме зон с резким изменением параметров, где схема автоматически переключается на первый порядок точности. Этот переход обеспечивается с помощью специальных функций – лимитеров (ограничителей). Вопросы построения TVD-схем подробно освещены в [27]. В настоящей работе с целью монотонизации численной схемы используется ограничитель MinMod [28].

Уравнение неразрывности удовлетворялось с помощью алгоритма SIMPLEC [28]. Считалось, что сходимость итераций достигнута, если среднеквадратичная невязка для всех переменных не превышала 1%. Для оценки точности вычислений была выполнена серия расчетов на последовательностях сгущающихся сеток. Результаты тестирования показали, что уменьшение шага базовой сетки в 2 раза по осевой и радиальной координатам приводит к изменению значений основных переменных не более чем на 1%.

Результаты расчетов и их анализ

На основе представленной математической модели было проведено численное исследование структуры течения. Расчетные параметры имели значения: $R = 0.5$ см, $h = 1-10$ см, $n = 500-3000$ об/мин. На рис. 1 приведены линии тока во вращающемся цилиндре, рассчитанные для различной высоты стенки.

Вращение стенок цилиндра индуцирует закрутку слоев воздуха, примыкающих к твердым стенкам. Закрутка воздушного потока приводит к появлению тангенциальной составляющей скорости и формированию поля центробежных сил, которые интенсифицируют движение воздуха в радиальном направлении, оттесняя его к стенке. В приосевой зоне формируется область пониженного давления. В эту зону подсасывается воздух, и внутри цилиндра формируется циркуляционное течение. Незакрученные массы воздуха инжектируются в приосевую часть цилиндра и движутся по направлению к его торцу. В процессе движения они взаимодействуют с закрученными пристеночными слоями. В результате этого движение инжектируемых масс воздуха становится закрученным. В окрестности торца происходит разворот потока с последующим истечением вдоль стенок цилиндра. Интенсивность вращения пристеночных масс воздуха благодаря вращению стенок значительно возрастает.

Результаты исследования показывают, что структура потока определяется не только частотой вращения цилиндра n , но и его высотой h . В коротких цилиндрах ($h/R < 6$) при $n = 2800$ об/мин разворот потока происходит в непосредственной близости от торца. В длинных цилиндрах ($h/R > 6$) между торцевой поверхностью и зоной разворота потока формируется застойная зона с вихревым движением малой интенсивности. Таким образом, с ростом высоты цилиндра взаимодействие инжектируемого потока с торцевой поверхностью ослабевает.

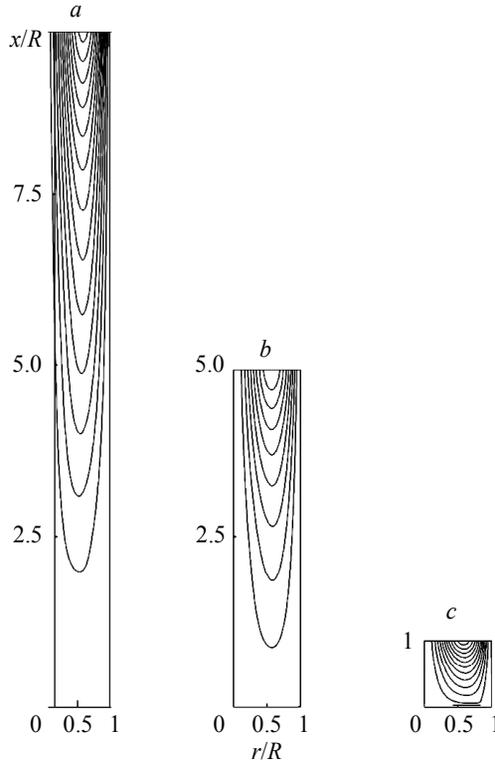


Рис. 1. Линии тока во вращающемся цилиндре ($n = 2800$ об/мин):
 $a - h/R = 10$, $b - h/R = 5$, $c - h/R = 1$
Fig. 1. Streamlines in a rotating cylinder ($n = 2800$ rpm):
 $h/R = (a) 10$, $(b) 5$, and $(c) 1$

Типичные радиальные распределения осевой и тангенциальной скоростей, рассчитанные в различных сечениях, представлены на рис. 2.

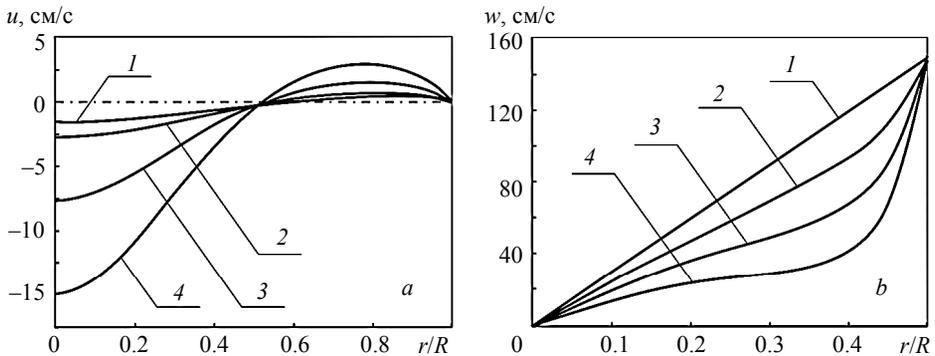


Рис. 2. Радиальные распределения осевой (a) и тангенциальной скорости (b), ($n = 2800$ об/мин, $h = 5$ см): 1 - $x = 1$ см; 2 - $x = 2$ см; 3 - $x = 3$ см; 4 - $x = 4$ см
Fig. 2. Radial distributions of the (a) axial and (b) tangential velocity, ($n = 2800$ rpm, $h = 5$ cm): $x = (1) 1$; (2) 2; (3) 3; and (4) 4 cm

Радиальное распределение осевой скорости в приосевой части течения характеризуется отрицательными значениями, что свидетельствует об инжекции воздуха. Вдоль стенок цилиндра происходит истечение воздуха. Наибольшие значения осевой скорости, как в приосевой зоне инжекции, так и в пристеночной зоне истечения, наблюдаются вблизи среза цилиндра. По мере приближения к торцевой стенке значения осевой скорости уменьшаются.

Радиальное распределение тангенциальной скорости вблизи среза цилиндра характеризуется относительно невысокими значениями в приосевой зоне и резким увеличением значений тангенциальной скорости вблизи цилиндрических стенок. В результате действия вязких сил по мере проникновения воздушных масс происходит закручивание потока. В результате в приторцевой зоне течения вращение потока приобретает квазитвердый характер.

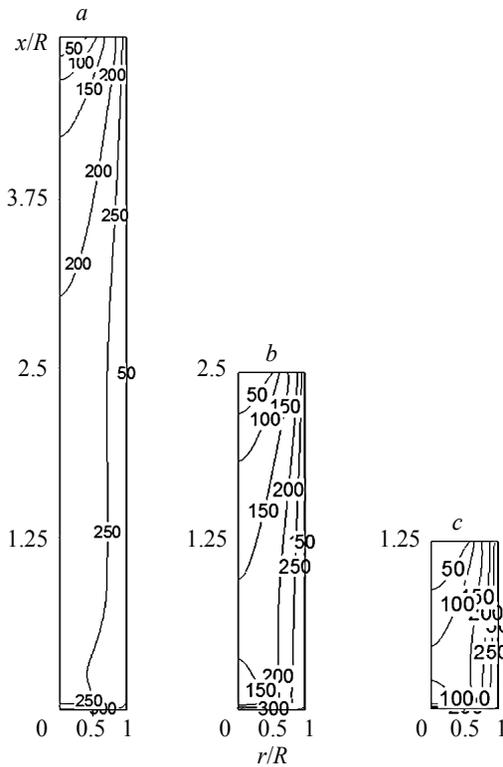


Рис. 3. Изолинии угловой скорости вращения потока ($n = 2800$ об/мин), рад/с: $a - h/R = 4.0$, $b - h/R = 2.5$, $c - h/R = 1.25$

Fig. 3. Isolines of the angular velocity of the flow rotation ($n = 2800$ rpm), рад/с: $h/R = (a) 4.0$, $(b) 2.5$, and $(c) 1.25$

На рис. 3 представлены распределения угловой скорости вращения потока $\tilde{\omega} = w/r$, рассчитанные для разных значений высоты цилиндра. Из рисунка видно, что угловая скорость инжектируемого потока возрастает по мере продвижения потока к торцевой стенке. Наибольшие значения угловой скорости потока достигаются вблизи стенок, наименьшие – в приосевой зоне. При ($h/R < 6$, $n = 2800$ об/мин) интенсивность вращения потока вблизи торцевой стенки невели-

ка, так как инжектируемые массы воздуха не успевают приобрести вращательное движение. С увеличением высоты цилиндра в результате контакта с закрученными пристеночными слоями интенсивность вращения потока вблизи торцевой стенки возрастает. При $h/R > 6$ угловая скорость вращения потока в торцевой зоне становится равной угловой скорости вращения цилиндра. Таким образом, при больших h относительное тангенциальное движение в окрестности торца прекращается.

Интенсивность движения потока относительно стенок цилиндра характеризует кинетическая энергия относительного движения потока

$$E = 0.5\rho[u^2+v^2+(w-n\pi r/30)^2].$$

Распределения E , Дж/м³, в потоке представлены на рис. 4.

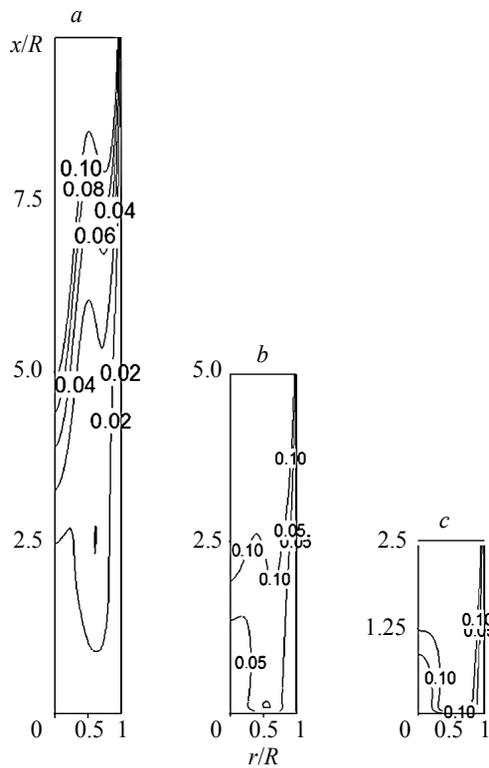


Рис. 4. Изолинии кинетической энергии относительно движения потока ($n = 2800$ об/мин), Дж/м³:

$a - h/R = 10$, $b - h/R = 5$, $c - h/R = 2.5$

Fig. 4. Isolines of the kinetic energy relative to the flow motion ($n = 2800$ rpm), J/m³:
 $h/R = (a) 10$, $(b) 5$, and $(c) 2.5$

Максимальные значения относительной кинетической энергии наблюдаются в зоне инжекции, где отсутствует вращательное движение потока. По мере закручивания потока его относительное движение ослабевает, что приводит к уменьшению E . В длинных цилиндрах минимальные значения E достигаются вблизи сте-

нок (цилиндрической и торцевой), где угловая скорость вращения потока близка к угловой скорости вращения цилиндра. В коротких цилиндрах поток достигает торца слабозакрученным, совершающим тангенциальное движение относительно торцевой поверхности. Это приводит к высоким значениям относительной кинетической энергии.

На рис. 5, *a*, *b* приведены радиальные распределения тангенциальной скорости относительного движения потока $\Delta w = w - n r / 30$ в приторцевой области цилиндра ($x = 0.2$ см). С увеличением высоты стенок время пребывания воздушных масс внутри цилиндра возрастает. В результате этого благодаря действию вязких сил интенсифицируется процесс вовлечения воздушных масс во вращательное движение. И, как следствие этого, скорость движения воздушных масс относительно стенок цилиндра уменьшается. С увеличением частоты вращения при фиксированной высоте цилиндра процесс вовлечения инжектируемых воздушных масс во вращательное движение не успевает завершиться по мере приближения к приторцевой области. В результате этого с ростом n относительная скорость тангенциального движения потока Δw вблизи торцевой стенки цилиндра увеличивается.

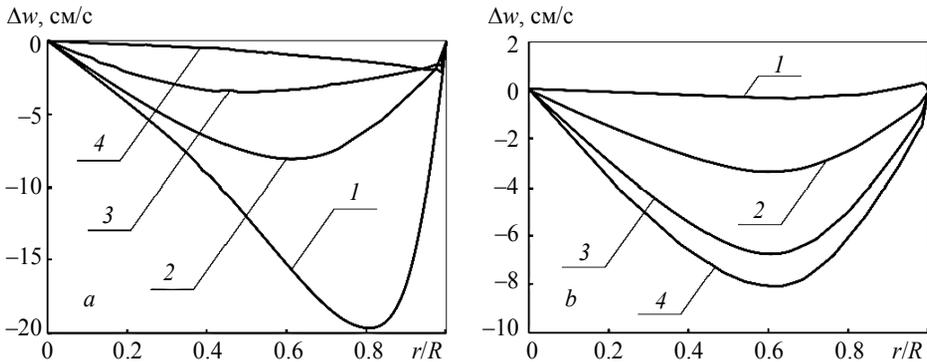


Рис. 5. Радиальные распределения относительной тангенциальной скорости в приторцевой зоне: *a* ($n = 2800$ об/мин): 1 – $h/R = 5$, 2 – $h/R = 10$, 3 – $h/R = 15$, 4 – $h/R = 20$; *b* ($h/R = 10$): 1 – $n = 500$ об/мин, 2 – $n = 1000$ об/мин, 3 – $n = 2000$ об/мин, 4 – $n = 2800$ об/мин

Fig. 5. Radial distributions of the relative tangential velocity in the near-edge zone: (*a*) $n = 2800$ rpm; $h/R = (1) 5, (2) 10, (3) 15, \text{ and } (4) 20$; (*b*) $h/R = 10$; $n = (1) 500, (2) 1000, (3) 2000, \text{ and } (4) 2800$ rpm

Таким образом, величина Δw , характеризующая воздействие потока на торцевую поверхность, определяется двумя параметрами: частотой вращения и высотой цилиндра. В результате проведенных исследований на основании анализа результатов численного моделирования получена аппроксимационная зависимость, устанавливающая связь между этими параметрами. Согласно этой зависимости, высота цилиндра, обеспечивающая разность скорости торцевой стенки и воздуха в пограничном слое не более 10 % для заданной частоты вращения равна

$$\frac{h}{R} = 2.14 \cdot 10^{-3} n,$$

где n измеряется в об/мин.

Заключение

Таким образом, анализ результатов расчетов показал, что при высоте цилиндра $h/R \leq 2.14 \cdot 10^{-3}n$ разворот потока происходит в непосредственной близости от торцевой поверхности. При этом интенсивность вращения воздуха в цилиндре невелика, так как инжектируемые массы воздуха не успевают приобрести вращательного движения.

С увеличением высоты цилиндра в результате взаимодействия с закрученными пристенными слоями интенсивность вращения потока вблизи торцевой стенки возрастает. В длинных цилиндрах ($h/R > 2.14 \cdot 10^{-3}n$) между торцевой поверхностью и областью разворота потока формируется зона квазитвердого вращения, в которой взаимодействие инжектируемого потока с поверхностью незначительно. В приторцевой области течения угловая скорость вращения потока практически равна угловой скорости вращения торцевой стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 с.
2. Халатов А.А. Теория и практика закрученных потоков. Киев: Наукова думка, 1989. 190 с.
3. Гешева Е.С., Лутвинов И.В., Шторк С.И., Алексеенко С.В. Анализ аэродинамической структуры закрученного течения в моделях вихревых горелочных устройств // Теплоэнергетика. 2014. № 9. С. 33–41.
4. Siddiquee H., Shafkat Bin Hoqueeb Md., Mohammad A. Effect of swirl flow on heat transfer characteristics in a circular pipe // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1754. 050028. <https://doi.org/10.1063/1.4958419>.
5. Ianiro A., Cardone G. Heat transfer rate and uniformity in multichannel swirling impinging jets // Applied Thermal Engineering. 2012. V. 49. P. 89–98.
6. Nanan K., Wongcharee K., Nuntadusit C., Eiamsa-ard S. Forced convective heat transfer by swirling impinging jets issuing from nozzles equipped with twisted tapes // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2012. V. 39. P. 844–852.
7. Nuntadusit C., Wae-hayee M., Bunyajitradulya A., Eiamsa-ard S. Heat transfer enhancement by multiple swirling impinging jets with twisted-tape swirl generators // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2012. V. 39. P. 102–107.
8. Шевчук И.В., Халатов А.А. Теплообмен и гидродинамика в прямых каналах, вращающихся относительно параллельной или наклонной оси // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. № 3. С. 461–473.
9. Матвиенко О.В. Исследование теплообмена и формирования турбулентности во внутреннем закрученном потоке жидкости при низких числах Рейнольдса // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 4. С. 908–918.
10. Архипов В.А., Матвиенко О.В. Нестационарные процессы горения в канале при закрутке газового потока и ее прекращении // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35. № 4. С. 33–40.
11. Матвиенко О.В., Ушаков В.М. Численное исследование структуры закрученного потока в цилиндрической камере, частично заполненной пористым материалом // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2003. № 4 (38). С. 14–24.
12. Menter F.R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1993. Technical Report No. 93-2906.
13. Menter F.R., Rumsey C.L. Assessment of two-equation turbulence models for transonic flows // AIAA Paper. 1994. No. 94-2343.
14. Piquet J. Turbulent flows: models and physics. Berlin: Springer. 1999. 762 p.
15. Jones W.P., Launder B.E. The calculation of low Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence // Int. J. of Heat Mass Transfer. 1973. V. 16. P. 1119–1130.

16. Архипов В.А., Матвиенко О.В., Трофимов В.Ф. Горение распыленного жидкого топлива в закрученном потоке // Физика горения и взрыва. 2005. Т. 41. № 2. С. 26–37.
17. Матвиенко О.В., Бубенчиков А.М. Математическое моделирование теплообмена и химического реагирования закрученного потока диссоциирующего газа // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 118–126.
18. Wilcox D.C. A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows // AIAA Paper. 1993. No. 93-2905.
19. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4. Begell House. Inc. 2003. P. 625–632.
20. Spalart P.R., Shur M. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature // Aerospace Science and Technology. 1997. V. 1. No. 5. P. 297–302. doi: 10.1016/S1270-9638(97)90051-1.
21. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation // Journal of Fluid Mechanics. 1967. V. 28. P. 593–616.
22. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
23. Ferziger J.H., Perić M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 1996.
24. Ушаков В.М., Матвиенко О.В. Численное исследование теплообмена и зажигания реакционноспособных стенок канала высокотемпературным потоком закрученного газа // Инженерно-физический журнал. 2005. Т. 78. № 3. С. 123–128.
25. Егоров А.Г., Тизлов А.С., Ниязов В.Я., Архипов В.А., Матвиенко О.В. Исследование влияния закрутки спутного высокоскоростного потока воздуха на геометрические параметры алюминиево-воздушного факела // Химическая физика. 2014. Т. 33. № 10. С. 58–61.
26. Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. IV. A new approach to numerical convection // Journal of Computational Physics. 1977. V. 23. P. 276–299.
27. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. V. 49. P. 357–393.
28. Van Doormal J.P., Raithby G.D. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows // Numerical Heat Transfer. 1984. V. 7. P. 147–163.

Статья поступила 26.05.2020

Matvienko O.V., Arkhipov V.A., Zolotarev N.N. (2021) AERODYNAMICS OF A TURBULENT FLOW IN A ROTATING SEMI-CLOSED CYLINDER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 114–126

DOI 10.17223/19988621/69/9

Keywords: semi-closed cylinder, swirling flow, rotational speed, turbulent flow structure, numerical study.

The mathematical model and results of a numerical study of swirling turbulent air flow characteristics in a semi-closed cylinder rotating around a symmetry axis are presented. A physical and mathematical model is used to describe aerodynamics of the stationary isothermal axisymmetric swirling flow, which includes the Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates. The study of turbulence characteristics is carried out using the composite model Menter SST (Shear Stress Transport). The numerical solution is obtained using a chess grid. Nodes for axial and radial velocity components are located in the middle of the control volume faces for scalar quantities. Calculations are performed on a grid with 2000 and 1700 nodes in the axial and radial directions, respectively. The grid refinement is performed near the walls and in the areas with large velocity gradients. The calculated results show that the main grid refinement by 2 times in the axial and radial coordinates leads to a change in the values of the main variables by less than 1%. It is shown that the flow structure is determined by the rotational speed and

cylinder height. Analyzing the calculated results, the ratio of the cylinder height to the angular velocity of the cylinder rotation is obtained, which ensures the formation of a quasi-solid rotation zone in the near-edge region.

Financial support. This work was carried out with financial support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of State Assignment No. 0721-2020-0036.

Oleg V. MATVIENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering, Tomsk, Russian Federation). E-mail: matvolegv@mail.ru

Vladimir A. ARKHIPOV (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Nikolay N. ZOLOTOREV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikzolotorev@mail.ru

REFERENCES

1. Gupta A., Lilley D., Syred N. (1987) *Zakruchennyye potoki* [Swirling flows]. Moscow: Mir.
2. Khalatov A.A. (1989) *Teoriya i praktika zakruchennykh potokov* [Theory and application of swirling flows]. Kyiv: Naukova Dumka.
3. Gesheva E.S., Litvinov I.V., Shtork S.I., Alekseenko C.V. (2014) Analyzing the aerodynamic structure of swirl flow in vortex burner models. *Thermal Engineering*. 61(9). pp. 649–657. DOI: 10.1051/epjconf/201715900052.
4. Siddiquea H., Shafkat Bin Hoqueb Md., Mohammad A. (2016) Effect of swirl flow on heat transfer characteristics in a circular pipe. *AIP Conference Proceedings*. 1754(050028). DOI: 10.1063/1.4958419.
5. Ianiro A., Cardone G. (2012) Heat transfer rate and uniformity in multichannel swirling impinging jets. *Applied Thermal Engineering*. 49. pp. 89–98. DOI: 10.1016/J.APPLTHERMALENG.2011.10.018.
6. Nanan K., Wongcharee K., Nuntadusit C., Eiamsa-ard S. (2012) Forced convective heat transfer by swirling impinging jets issuing from nozzles equipped with twisted tapes. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 39. pp. 844–852. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2012.05.002.
7. Nuntadusit C., Wae-hayee M., Bunyajitradulya A., Eiamsa-ard S. (2012) Heat transfer enhancement by multiple swirling impinging jets with twisted-tape swirl generators. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 39. pp. 102–107. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2011.10.003.
8. Shevchuk I.V., Khalatov A.A. (1996) Heat transfer and hydrodynamics in straight channels rotating about a parallel or inclined axis. *High Temperature*. 34(3). pp. 461–473.
9. Matvienko O.V. (2014) Heat transfer and formation of turbulence in an internal swirling fluid flow at low Reynolds numbers. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 87(4). pp. 908–918. DOI: 10.1007/s10891-014-1092-3.
10. Matvienko O.V., Arkhipov V.A. (1999) Unsteady combustion processes in a channel with gas stream swirling and its termination. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 35. pp. 379–385. DOI: 10.1007/BF02674467.
11. Matvienko O.V., Ushakov V.M. (2003) Chislennoe issledovanie struktury zakruchennogo potoka v tsilindricheskoj kamere, chastichno zapolnennoy poristym materialom [Numerical study of a swirling flow structure in the cylindrical chamber partially filled with a porous material]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Tomsk State Pedagogical University Bulletin*. 4. pp. 14–24.
12. Menter F.R. (1993) Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper*. 93-2906. DOI: 10.2514/6.1993-2906.

13. Menter F.R., Rumsey C.L. (1994) Assessment of two-equation turbulence models for transonic flows. *AIAA Paper*. 94-2343. DOI: 10.2514/6.1994-2343.
14. Piquet J. (1999) *Turbulent Flows: Models and Physics*. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-662-03559-7.
15. Jones W.P., Launder B.E. (1973) The calculation of low Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 16. pp. 1119–1130. DOI: 10.1016/0017-9310(73)90125-7.
16. Arkhipov V.A., Matvienko O.V., Trofimov V.F. (2005) Combustion of sprayed liquid fuel in a swirling flow. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 41(2). pp. 140–150. DOI: 10.1007/s10573-005-0016-0.
17. Matvienko O.V., Bubenchikov A.M. (2016) Mathematical modeling of the heat transfer and chemical reaction of a swirling flow of a dissociative gas. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(1). pp. 127–134. DOI: 10.1007/s10891-016-1359-y.
18. Wilcox D.C. (1993) A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows. *AIAA Paper*. 93-2905. DOI: 10.2514/6.1996-2057.
19. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003) Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*. 4. pp. 625–632.
20. Spalart P.R., Shur M. (1997) On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerospace Science and Technology*. 1(5). pp. 297–302. DOI: 10.1016/S1270-9638(97)90051-1.
21. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. (1967) Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. *Journal of Fluid Mechanics*. 28(3). pp. 593–616. DOI: 10.1017/S0022112067002319.
22. Patankar S. (1984) *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energoatomizdat.
23. Ferziger J.H., Perić M. (1996) *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-56026-2.
24. Ushakov V.M., Matvienko O.V. (2005) Numerical investigation of the heat exchange and firing of reactive channel walls by a high-temperature swirling-gas glow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 78(3). pp. 541–547. DOI: 10.1007/s10891-005-0092-8.
25. Egorov A.G., Tizilov A.S., Niyazov V.Y., Arkhipov V.A., Matvienko O.V. (2014) Effect of the swirl of cocurrent high-velocity air flow on the geometry of an aluminum-air flame. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 8(5). pp. 712–715. DOI: 10.1134/S1990793114050157.
26. Van Leer B. (1977) Towards the ultimate conservative differencing scheme. IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*. 23. pp. 276–299. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90095-X.
27. Harten A. (1983) High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*. 49. pp. 357–393. DOI: 10.1016/0021-9991(83)90136-5.
28. Van Doormal J.P., Raithby G.D. (1984) Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*. 7. pp. 147–163. DOI: 10.1080/01495728408961817.

Received: May 26, 2020

УДК 531.57
DOI 10.17223/19988621/69/10

**К.С. Рогаев, А.Н. Ищенко, В.В. Буркин, А.С. Дьячковский,
А.Д. Сидоров, Е.Ю. Степанов**

ИССЛЕДОВАНИЕ ГОРЕНИЯ ВЫСОКОПЛОТНЫХ ТОПЛИВ В УСЛОВИЯХ МОДЕЛЬНОЙ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ¹

Рассмотрено горение высокоплотных топлив в условиях динамических давлений, создаваемых во время выстрела в модельной баллистической установке калибром 30 мм. В рамках проведенного расчетно-экспериментального исследования получен закон диспергирования и горения высокоплотного топлива, используемого в качестве присоединенного заряда. Включение высокоплотных топлив в метательный заряд позволило увеличить дульную скорость метаемого поршня-снаряда в условиях модельной баллистической установки.

Ключевые слова: *внутренняя баллистика, ствольные системы, газодинамика, присоединенный заряд, горение топлив, высокоплотные топлива.*

Использование классических подходов для повышения дульной скорости метаемого элемента в области ствольной баллистики не позволяет получить существенный прирост. Наличие «эффекта насыщения» ограничивает скорость снаряда в классической схеме выстрела при использовании порохового заряда, поскольку максимальная скорость метания при сгорании заряда определяется предельной скоростью разлета пороховых газов в вакууме. Перспективным является применение нетрадиционных схем заряжания [1–3], в частности схемы с присоединенным зарядом (ПЗ) и комбинированной схемы заряжания [4–8]. Использование данных нетрадиционных схем заряжания позволяет за счет включения в метательный заряд топлив увеличить суммарную массу метательных веществ и как следствие повысить среднюю плотность заряжания. Применение данных схем приводит к перераспределению энергии продуктов горения в заснарядном пространстве, что позволяет снизить максимальное давление в камере заряжания. При использовании схемы с ПЗ появляется возможность реактивного подгона снаряда в ствол. Перечисленные преимущества позволяют повысить дульную скорость снаряда без повышения максимального давления на дно канала ствола.

Для достижения описанных положительных эффектов в качестве ПЗ используют различные варианты топлив, разработанных для каждого конкретного случая, одним из перспективных вариантов является использование высокоплотных топлив. Преимуществом данных топлив является плотность укладки или насыпная плотность (по аналогии с пороховым зарядом) $\Delta \geq 1.5 \text{ г/см}^3$, превышающая насыпную плотность традиционных зерновых пироксилиновых порохов ($\Delta \leq 1.0 \text{ г/см}^3$), что позволяет включить в метательный заряд большее количество метательных веществ или же провести частичную замену традиционного метательного заряда, тем самым увеличить суммарную массу заряда.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-00028).

При проектировании новых ствольных баллистических систем, использующих в составе метательного заряда высокоплотные топлива функционирующих в схеме заряжания с присоединенным зарядом необходимо знать механизмы разрушения моноблока из данных топлив на частицы (диспергирование) и горение образовавшихся частиц в послыйном режиме в условиях динамических давлений, реализуемых в выстреле.

Проведено комплексное экспериментально-теоретическое исследование законов диспергирования и горения высокоплотных топлив, включенных в метательный заряд, в условиях модельной баллистической установки.

Экспериментальная методика

Экспериментальные внутрибаллистические исследования проводились на баллистическом стенде [9] НИИ ПММ ТГУ в состав которого входит модульная модельная баллистическая установка. Данная баллистическая установка позволяет изменять конфигурацию ствол-камеры под требуемые параметры исследования. В состав баллистической установки входит вакуумируемая баллистическая трасса с пулеприемником, в котором располагается требуемый набор преград. Внешний вид баллистической установки представлен на рис. 1.



Рис. 1. Внешний вид модельной баллистической установки и вакуумируемой баллистической трассы

Fig. 1. Design of the model ballistic installation and evacuated ballistic track

В состав баллистического стенда входит измерительно-регистрающий комплекс [10], состоящий из следующего парка оборудования:

- пьезокварцевые датчики 2Т6000 и комплект аппаратуры «Нейва-10000» со специальным программным обеспечением для измерения давления в баллистических установках в диапазоне от 0 до 600 МПа;
- индукционные датчики дульной скорости метаемых тел в диапазоне от 100 до 3000 м/с [11];
- измерители скорости снаряда в стволе во время выстрела «ДДС-6000» на основе СВЧ-радаров [12];
- осциллографы цифровые запоминающие «Tektronix» DPO2014, «Instek» GDS-810C и «RIGOL» DS7024.

Во время проведения баллистических испытаний регистрируется: изменение давления в камере заряжания $P(t)$, фиксируется максимальное давление на дно канала ствола P_{\max} , временная зависимость скорости снаряда в стволе $V_{\text{сн}}(t)$ и дульная скорость снаряда V . Для обеспечения отказоустойчивости лабораторного баллистического стенда предусмотрена дублирующая ветка регистрации основных баллистических характеристик, состоящая из представленных осциллографов.

В качестве снаряда использовался поршень массой 50 г, изготовленный из текстолита и запрессованной в него стальной метки. В качестве метательного заряда использовался одноканальный пироксилиновый порох марки «Сунар 30-06».

Для определения базовых значений дульной скорости проведены эксперименты при использовании классической схемы заряжания, где в качестве метательного заряда применялся только порох. Полученные экспериментальные данные использовались как эталонные для сравнения классической схемы заряжания и схемы с высокоплотными топливами в качестве ПЗ. Внешний вид компоновки выстрела при использовании классической схемы заряжания представлен на рис. 2, *a*.

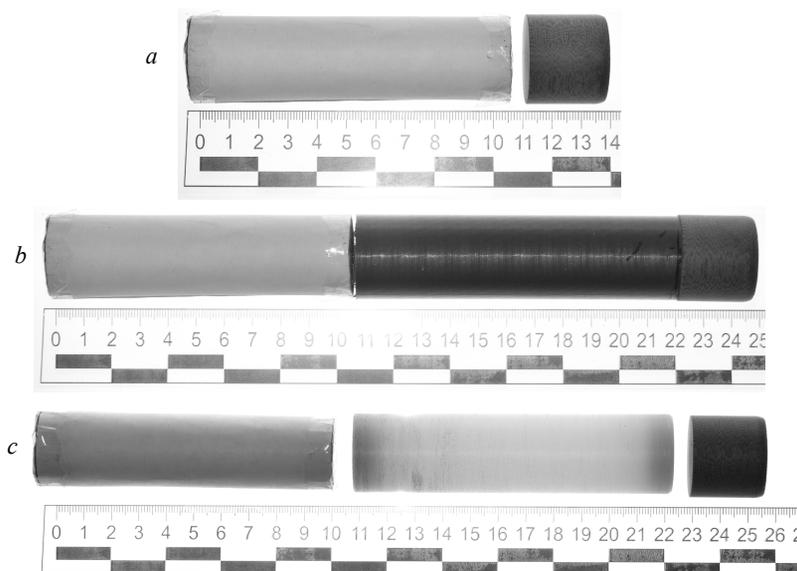


Рис. 2. Внешний вид выстрела: *a* – классическая схема;

b – схема с присоединенным зарядом; *c* – схема с имитатором ПЗ

Fig. 2. Schematic representation of a shot: (*a*) a classic scheme, (*b*) a scheme with a traveling charge (TC), and (*c*) a scheme with a TC-simulator (TCS)

В качестве ПЗ использовалось высокоплотное топливо массой m и $2m$ г и размещенное в пластиковом контейнере, изготовленном методом послойного наплавления SBS-пластика. Данный контейнер необходим для предотвращения воспламенения ПЗ по боковой поверхности при движении по стволу. Внешний вид выстрела с ПЗ представлен на рис. 2, *c*. Контейнеры при использовании m и $2m$ высокоплотного топлива имели массу 5 и 9 г соответственно.

Для определения начала горения присоединенного заряда, состоящего из высокоплотного топлива, были проведены эксперименты, где в качестве ПЗ использовался имитатор (ИПЗ). ИПЗ изготавливался из полиэтилена, в котором с каждо-

го из торцов запрессовывалась металлическая шайба, при этом масса и длина были равны ПЗ из высокоплотного топлива (рис. 2, с). Выполнение предварительного эксперимента с ИПЗ соответствующей массы было необходимо для корректного определения навески порохового заряда, обеспечивающего достижение требуемого максимального давления на дно канала ствола при включении высокоплотных топлив в метательный заряд. Результаты проведенных экспериментальных внутрибаллистических исследований, направленных на получение законов горения высокоплотных топлив в условиях динамических давлений представлены на рис. 3.

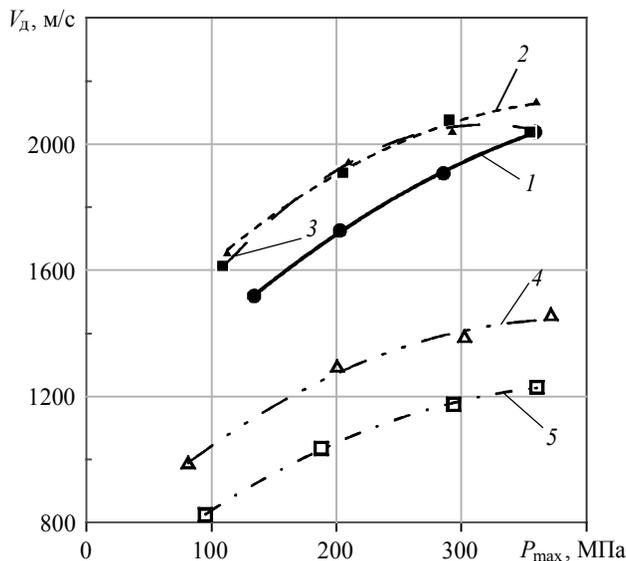


Рис. 3. Зависимость дульной скорости снаряда от максимального давления на дно канала ствола: 1, ● – классическая схема заряжания; 2, ▲ – схема заряжания с ПЗ массой m ; 3, ■ – схема заряжания с ПЗ массой $2m$; 4, Δ – схема заряжания с ИПЗ массой m ; 5, □ – схема заряжания с ИПЗ массой $2m$

Fig. 3. Dependence of the projectile muzzle velocity on the maximum of the bore bottom pressure: 1, ● – a classic loading scheme; 2, ▲ – a loading scheme with a TC with a mass of m ; 3, ■ – a loading scheme with a TC with a mass of $2m$; 4, Δ – a loading scheme with a TCS with a mass of m ; and 5, □ – a loading scheme with a TCS with a mass of $2m$

Как показал анализ результатов проведенных экспериментальных исследований, представленных на рис. 3, включение в состав метательного заряда высокоплотных топлив в виде ПЗ, позволяет увеличить скорость снаряда на дульном срезе на (4.9÷12.7) % по сравнению с классической схемой заряжания, при сохранении максимального давления на дно канала ствола. Однако при использовании высокоплотного топлива массой $2m$ и максимальном давлении $P_{max} = 360$ МПа не получаем выигрыша в дульной скорости, это объясняется тем, что большая часть ПЗ не успела сгореть за время выстрела.

Расчетная методика

Все эксперименты были обработаны с применением программного комплекса, разработанного сотрудниками НИИ ПММ ТГУ [13]. В программном комплексе используется математическая модель, которая базируется на основных допущениях механики многофазных сред. В данной модели предусмотрено наличие в метательном заряде произвольного количества фракций частиц и возможность добавления моноблочных элементов (в данном случае высокоплотных топлив), которые диспергируют на отдельные частицы дополнительной фракции и горят по своим законам.

На рис. 4 представлено сравнение расчетно-экспериментальных данных для классической схемы заряжания: для классической схемы заряжания (*a*) и схемы заряжания с ИПЗ массой *m* (*b*) и *2m* (*c*). Как видно из сравнения экспериментальных и расчетных данных, представленного на рис. 4, используемая модель позволяет хорошо описывать процессы в заснарядном пространстве. Расхождение расчетных и экспериментальных данных по максимальному давлению не превышает 3 %, по дульной скорости снаряда – 1 %. Следовательно, данная математическая модель может быть использована для расчета газодинамической картины при включении в метательный заряд высокоплотных топлив и получения законов его диспергирования и горения.

В рамках использованной математической модели выстрела с ПЗ предполагалось, что зона или фронт горения высокоплотного топлива заменяется поверхностью сильного газодинамического разрыва. Параметры справа и слева от разрыва связывались соответствующими условиями динамической совместности. Предполагалось, что топливо во фронте горения частично сгорает, а частично диспергирует на совокупность одинаковых частиц, догорающих в заснарядном объеме в послыном режиме.

Закон диспергирования присоединенного заряда записывался как степенная зависимость от давления и выглядел следующим образом:

$$U_s = B_s \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^{\nu}, \quad (1)$$

где B_s – скорость диспергирования при $P = P_{\text{атм}} = 0.1$ МПа; P – давление; $P_{\text{атм}}$ – атмосферное давление; ν – показатель степени (для исследуемого топлива $\nu = 0.8$).

Наибольший прирост скорости снаряда при использовании ПЗ получается тогда, когда ПЗ загорается позже порохового заряда. В качестве характеристики задержки начала горения моноблока используется импульс давления на фронте горения

$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt$ (импульс начала горения присоединенного заряда). Закон горения моноблочного заряда выглядит следующим образом:

$$U_s = 0, \text{ при } I < I_1,$$

$$U_s = B_{s1} \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^{\nu}, \text{ при } I \geq I_1 \text{ где } I_1 = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt.$$

Степень выгорания топлива во фронте горения характеризовалась параметром ψ_0 [14], который при проведении расчетов принимался равным $\psi_0 = 0.1$.

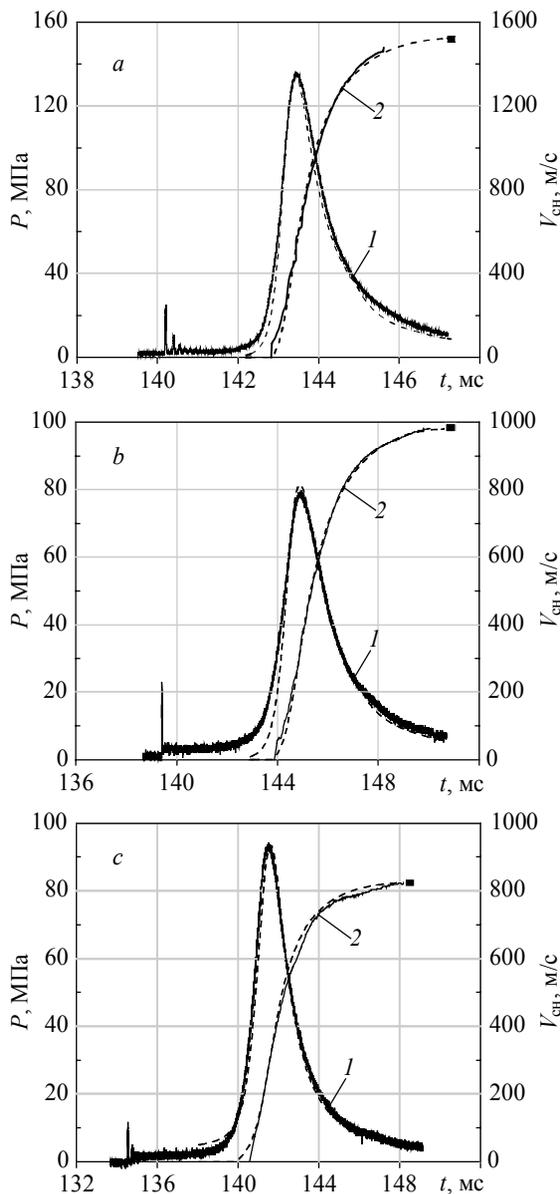


Рис. 4. Временные зависимости давления на дно канала ствола и скорости снаряда в стволе при использовании классической схемы заряжания: *a* – снаряд 50 г; *b* – снаряд 50 г + ИПЗ *m*; *c* – снаряд 50 г + ИПЗ *2m*; *1* – давление на дно канала ствола; *2* – скорость снаряда в стволе; ■ – дульная скорость снаряда; — — эксперимент; - - - - расчет

Fig. 4. The pressure on the bore bottom and the projectile velocity in the barrel as the functions of time when using the classic loading scheme: (*a*) a 50 g projectile; (*b*) a 50 g projectile + TCS with a mass of *m*; and (*c*) a 50 g projectile + TCS with a mass of *2m*; *1*, the pressure on the bore bottom; *2*, the projectile velocity in the barrel; ■ – the projectile muzzle velocity; — — experiment; - - - - calculation

Послойное горение диспергированных частиц высокоплотного топлива в математической модели при движении по стволу также определялось общепринятой зависимостью от давления [15].:

$$U_C = U_1 \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^\nu$$

где U_1 – скорость горения при $P = P_{\text{атм}} = 0.1$ МПа, (зависит от химической природы топлива), ν – показатель степени (в расчете $\nu = 0.8$).

На рис. 5 показан типичный результат сравнения расчетных и экспериментальных данных с использованием m (а) и $2m$ (b) высокоплотных топлив, в качестве ПЗ.

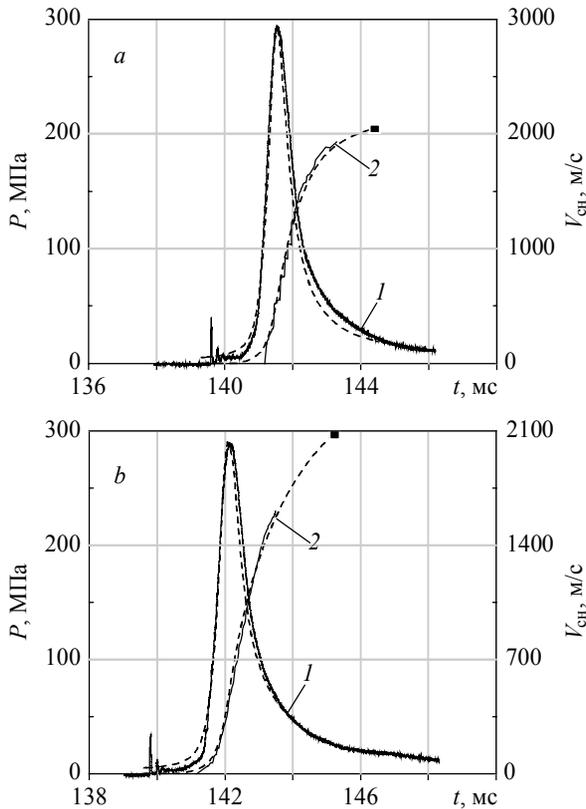


Рис. 5. Временные зависимости давления на дно канала ствола и скорости снаряда в стволе при использовании ПЗ массой m (а) и $2m$ (б) г с учетом контейнера: 1 – давление на дно канала ствола; 2 – скорость снаряда в стволе; ■ – дульная скорость снаряда; — – эксперимент; - - - – расчет

Fig. 5. The pressure on the bore bottom and the projectile velocity in the barrel as the functions of time when using a TC with a mass of (a) m and (b) $2m$ g taking into account the container: 1, the pressure on the bore bottom; 2, the projectile velocity in the barrel; ■ – the projectile muzzle velocity; — – experiment; - - - – calculation

Как и в случае с классической схемой заряжания расхождение расчетно-экспериментальных данных по максимальному давлению на дно канала ствола и дульной скорости снаряда составляет не более 3 и 1 % соответственно. Представленные результаты сравнения расчетно-экспериментальных данных свидетельствуют о получении правдоподобной картины распределения газодинамических параметров в выстреле при использовании высокоплотных топлив.

Результаты параметрических исследований

Анализ полученных расчетно-экспериментальных данных позволил получить параметры закона диспергирования и послойного горения высокоплотного топлива при использовании перспективной схемы заряжания в условиях динамических давлений, реализуемых в выстреле из модельной баллистической установки. Теоретические результаты по определению законов диспергирования и горения высокоплотных топлив, основанные на экспериментальных данных, представлены в таблице.

Законы горения высокоплотного топлива, полученные теоретическим образом из обработки экспериментальных данных

№	$\omega_{пз}$, г	P_{max} , МПа	V , м/с	$I_{п}$, МПа·с	B_{1s} , м/с	$x_{кд}$, см	$m_{опз}$, г	U_1 , мм/с	$m_{опч}$, г
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	m	112.7	1659	80	0.19	249.9	–	0.30	12.8
2	$2m$	109.1	1614	85	0.19	–	8.4	0.29	25.3
3	m	209.9	1945	80	0.20	160.2	–	0.30	8.6
4	$2m$	205.3	1909	85	0.19	–	2.5	0.29	23.8
5	m	292.9	2044	85	0.19	181.0	–	0.29	10.1
6	$2m$	290.3	2077	85	0.19	–	0.2	0.30	23.5
7	m	360.0	2138	85	0.19	162.6	–	0.29	9.3
8	$2m$	354.9	2038	85	0.17	–	5.7	0.26	24.7

В таблице по столбцам приняты следующие обозначения: 1 – номер эксперимента; 2 – масса присоединенного заряда из высокоплотного топлива без контейнера; 3 – максимальное давление на дно канала ствола; 4 – дульная скорость снаряда; 5 – импульс начала горения присоединенного заряда; 6 – коэффициент в законе скорости диспергирования; 7 – координата снаряда при окончании диспергирования ПЗ; 8 – масса остатка ПЗ, вылетевшего из ствола вслед за снарядом; 9 – коэффициент, зависящий от химической природы топлива; 10 – суммарная масса частиц высокоплотного топлива, не сгоревших за время выстрела.

Как показал газодинамический анализ расчетно-экспериментальных данных представленных в таблице, диспергирование присоединенного заряда, состоящего из высокоплотного топлива, начинается с момента $I_{п} \geq 85$ МПа·с, и продолжается в течение всего процесса выстрела либо до полного превращения в частицы и газ, либо до вылета из ствола вслед за снарядом. Диспергированное топливо на частицы продолжает гореть при движении по каналу ствола модельной баллистической установки. Однако сильная зависимость послойной скорости горения ($v = 0.8$) не позволяют высокоплотному топливу сгореть полностью за время выстрела.

В результате получено, что законы диспергирования и горения высокоплотного топлива в условиях динамических давлений, реализуемых в модельной баллистической установке во время выстрела, имеют следующий вид:

диспергирование –

$$U_s = 0, \text{ при } I_{\text{п}} < 85 \text{ МПа}\cdot\text{с},$$

$$U_s = 0.019 \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^{0.8} \text{ м/с, при } I_{\text{п}} \geq 85 \text{ МПа}\cdot\text{с};$$

послойное горение частиц –

$$U_C = 2.95 \cdot 10^{-5} \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^{0.8} \text{ мм/с}.$$

Выводы

Проведенные комплексные расчетно-экспериментальные исследования позволили получить законы диспергирования и горения высокоплотного топлива в условиях динамических давлений, реализуемых в модельной баллистической установке.

Получены картины изменения газодинамических параметров при использовании классической схемы заряжания и схемы заряжания с присоединенным зарядом из высокоплотного топлива.

Экспериментальным образом показано, что включение в состав метательного заряда высокоплотных топлив в виде ПЗ, позволяет увеличить скорость снаряда на дульном срезе на 4.9–12.7 % по сравнению с классической схемой заряжания, при сохранении максимального давления на дно канала ствола.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сафронов А.И., Крайнов А.Ю. Внутренняя баллистика ствольной системы с присоединенной камерой подгона. Вестник ТГПУ. 2004. Серия: Естественные и точные науки. Т. 6. № 43. С. 67–70.
2. Сафронов А.И. Повышение скоростей метания элементов для изучения поведения материалов при импульсных воздействиях // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 27. С. 169–172.
3. Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В., Храповский В.Е., Беляев А.А., Кроули А.Б. Конвективное горение блочных зарядов из семиканальных пороховых зерен, ингибированных поливинилбутиралем // Химическая физика. 2015. Т. 34. № 5. С. 1–11
4. Horst A.W. A Brief Journey Through the History of Gun Propulsion. ARL-TR-3671 November 2005.
5. Damse R.S., Singh A. Advanced concepts of the propulsion system for the futuristic gun ammunition // Defence Science Journal. 2003. V. 53. No. 4. P. 341–350.
6. Tompkins R.E., White K.J., Oberle W.F., Juhasz A.A. Traveling Charge Gun Firings Using Very High Burning Rate Propellants. ARMY BALLISTIC RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MD. Technical report – ADA203307. 35 p.
7. Ikuta K. Two stage travelling charge accelerator for high velocity // Sci. Technol. Energy. 2004. V. 65. No. 1. P. 25–27.
8. Xin Lu, Yanhuang Zhou, Yonggang Yu. Experimental and numerical investigations on travelling charge gun using liquid fuels // J. Appl. Mech. 2011. V. 78. Iss. 5. 051002. 6 p.
9. Бураков В.А., Буркин В.В., Ищенко А.Н. и др. Экспериментальный баллистический комплекс / Патент на изобретение № 2591132 от 20 июня 2016 г.
10. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Корольков Л.В., Розаев К.С., Саммель А.Ю., Степанов Е.Ю., Чупаишев А.В. Информационно измерительный комплекс НИИ ПММ ТГУ // Сборник материалов Международной молодежной научной конференции «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики», 17–19 ноября 2014. Томск: ТГУ, 2014. С. 127–128.

11. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Егоров А.Л., Ищенко А.Н., Корольков Л.В., Майстренко И.В., Рogaев К.С., Степанов Е.Ю., Чупашиев А.В. Датчик дульной скорости // Патент на полезную модель №161396 заявка RU 2015127042 06.07.2015
12. Прибор измерения скорости в стволе ДДС 6000: паспорт. М.: Таис, 2010. 8 с.
13. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
14. Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическая модель и программный комплекс для теоретического исследования внутрибаллистических процессов в ствольных системах: учеб. пособие. Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2015. 70 с.
15. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М.: Оборонгиз, 1962. 703 с.

Статья поступила 28.04.2020

Rogaev K.S., Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu. (2021) A STUDY OF THE COMBUSTION OF HIGH-DENSITY PROPELLANTS IN A MODEL BALLISTIC INSTALLATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 127–138

DOI 10.17223/19988621/69/10

Keywords: internal ballistics, barrel systems, gas dynamics, travelling charge, combustion of propellants, high-density propellants.

In internal ballistics of barrel systems, a promising trend is related to the increasing of projectile muzzle velocity by means of high-energy propellants utilized as a traveling charge. The use of a loading scheme with a traveling charge allows one to increase the loading density and to redistribute the energy of powder gases in the space behind the projectile, which leads to a significant increase in the muzzle velocity of the projectile. To attain the listed advantages, it is necessary to know the laws of dispersion and combustion of the propellants used as traveling charges, providing non-digressive gas entry into the charge space.

In this work, a comprehensive experimental and theoretical study of the laws of dispersion and combustion of high-density propellants under dynamic pressures, provided in a model ballistic installation, is carried out. The main ballistic characteristics of shots are obtained, which use a classic scheme of loading with a propellant charge made of pyroxylin powder and a scheme with a traveling charge, where, in addition to the propellant charge, a high-density propellant is included. All the experiments are simulated in a software package, taking into account the presence of the high-density propellants in the propellant charge, dispersing into individual particles that burn out while moving along the barrel. As a result of comparing the calculated and experimental data, plausible patterns of the distribution of gas-dynamic parameters are obtained using the classic loading scheme and the loading scheme with a travelling high-density propellant charge.

Financial support. The study was carried out at the expenses of the grant from the Russian Science Foundation (project No. 19-79-00028).

Konstantin S. ROGAEV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

Aleksandr N. ISHCENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Viktor V. BURKIN (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Aleksey S. D'YACHKOVSKIY (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Aleksey D. SIDOROV (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aleksid92@gmail.com

Evgeniy Yu. STEPANOV (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanov_eu@mail.ru

REFERENCES

1. Safronov A.I., Kraynov A.Yu. (2004) Vnutrennyaya ballistika stvol'noy sistemy s prisoedinennoy kameroy podgona [Interior ballistics of the barrel system with an attached matching chamber]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Tomsk State Pedagogical University Bulletin*. 43(6). pp. 67–70.
2. Safronov A.I. (2004) Povyshenie skorostey metaniya elementov dlya izucheniya povedeniya materialov pri impul'snykh vozdeystviyakh [Increasing the speed of the projection elements to study the behavior of materials under impulse actions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, Seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 27. pp. 169–172. DOI: 10.14498/vsgtu297.
3. Ermolaev B.S., Sulimov A.A., Roman'kov A.V., Khrapovskiy V.E., Belyaev A.A., Krouli A.B. (2015) Konvektivnoe gorenie blochnykh zaryadov iz semikanal'nykh porokhovykh zeren, ingibirovannykh polivinilbutiralem [Convective combustion of block charges from seven-channel powder grains inhibited by polyvinyl butyral]. *Khimicheskaya fizika – Russian Journal of Physical Chemistry B: Focus on Physics*. 34(5). pp. 1–11. DOI: 10.7868/S0207401X15050040.
4. Horst A.W. (2005) *A Brief Journey Through the History of Gun Propulsion*. DOI: 10.21236/ada441021.
5. Damse R.S., Singh A. (2003) Advanced concepts of the propulsion system for the futuristic gun ammunition. *Defence Science Journal*. 53(4). pp. 341–350. DOI: 10.14429/dsj.53.2279.
6. Tompkins R.E., White K.J., Oberle W.F., Juhasz A.A. (1988) Traveling charge gun firings using very high burning rate propellants. *Army Ballistic Research Lab Aberdeen Proving Ground Md*. Technical report – ADA203307.
7. Ikuta K. (2004) Two stage travelling charge accelerator for high velocity. *Science and Technology of Energetic Materials*. 65(1). pp. 25–27. DOI: 10.1002/prop.201400154.
8. Xin Lu, Yanhuang Zhou, Yonggang Yu. (2011) Experimental and numerical investigations on traveling charge gun using liquid fuels. *Journal of Applied Mechanics*. 78(5). pp. 051002–1–051002–6. DOI: 10.1115/1.4004292.
9. Burakov V.A., Burkin V.V., Ishchenko A.N., Korol'kov L.V., Stepanov E.Yu., Agafonov S.V., Rogaev K.S., Chupashev A.V. (2016) *Ekspperimental'nyy ballisticheskiy kompleks* [Experimental ballistic complex]. RF Patent 2591132.
10. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Korol'kov L.V., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V. (2014) Informatsionno izmeritel'nyy kompleks NII PMM TGU [Data measuring complex of RIAMM]. *Proceedings of International Youth Scientific Conference "Actual Problems of Modern Continuum Mechanics and Celestial Mechanics"*. Tomsk: RIAMM. pp. 127–128.
11. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Egorov A.L., Ishchenko A.N., Korol'kov L.V., Maystrenko I.V., Rogaev K.S., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V. (2015) *Datchik dul'noy skorosti* [Muzzle velocity sensor]. RF Patent 161396.
12. (2010) *Pribor izmereniya skorosti v stvole DDS 6000: passport* [A device for measuring the speed in the barrel DDS 6000: passport]. Moscow: Tais.

13. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematic simulation of intraballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.
14. Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (2015) *Matematicheskaya model' i programnyy kompleks dlya teoreticheskogo issledovaniya vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [A mathematical model and a software package for a theoretical study of intraballistic processes in barrel systems]. Tomsk: Tomsk State University Publishing House.
15. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.

Received: April 28, 2020

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/69/11

Х.Х. Худойназаров, Р.И. Халмурадов, Б.Ф. Ялгашев**ПРОДОЛЬНО-РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

Исходя из точной трехмерной постановки задачи и ее решения в преобразованиях, выведены общие уравнения продольно-радиальных колебаний цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость, из которых можно получить типа классических и уточненных приближенные уравнения колебаний. На основе полученных уточненных уравнений колебаний решена задача о гармонических продольно-радиальных колебаниях цилиндрической оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вязкая жидкость, колебания, уточненные уравнения, напряжения, перемещения.

Для приведения трехмерной по пространственным координатам задачи теории оболочек к двумерной используют различные методы и подходы. При этом в качестве основных неизвестных функций берутся перемещения срединной поверхности оболочки [1] и применяются различного рода упрощающие гипотезы и предпосылки механического и геометрического характера [2]. Примененные при построении теории гипотезы и предпосылки вместе с упрощениями приводят к существенным недостаткам и погрешностям. В теории оболочек Кирхгофа – Лява указанные недостатки являются существенными. На это в свое время обратили внимание В.В. Новожилов и Р.М. Финкельштейн [2], Х.М. Муштари [3], В.М. Даревский [4], У.К. Нигуль [5], поэтому «более тщательное соблюдение гипотез Кирхгофа – Лява все же не гарантирует получение более точных уравнений колебания» [6].

Кроме этого, можно указать еще три направления в теории оболочек, где плохо работают известные классические теории. Во-первых, при расчете многослойных оболочек и оболочек, находящихся в деформируемой среде, условия на контактной поверхности целесообразно сформулировать относительно перемещений контактирующей, а не срединной поверхности. При этом динамические контактные условия должны быть сформулированы в напряжениях. Общеизвестно, что в теории Кирхгофа – Лява пренебрегаются напряжения σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{z\theta}$ и, естественно, при этом нельзя точно сформулировать контактные условия в напряжениях. Поэтому, при решении контактных задач теории оболочек появляется необходимость построения уточненной теории. В этом направлении С.А. Амбарцумяном [7] и Ю.И. Юаном [8] развиты теории, в которых пренебрегается напряжением σ_{rr} и приближенно учитываются напряжения $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{z\theta}$.

Во-вторых, при расчете толстостенных цилиндрических оболочек погрешность при применении теории Кирхгофа – Лява может оказаться большей даже при напряженном состоянии со сравнительно небольшим показателем изменчивости [9].

В-третьих, при исследованиях нестационарного колебания цилиндрических оболочек, в частности при исследовании быстропротекающих переходных процессов, применение классической теории нежелательно, если иметь в виду, то обстоятельство, что «развитие классической теории стимулировалось, главным образом, запросами задач на собственные частоты колебаний» [10]. Указанные недостатки теории Кирхгофа – Лява и других классических теорий побудили многих исследователей предпринимать попытки уточнения уравнений колебания теории оболочек и, в частности, цилиндрических оболочек и стержней кругового поперечного сечения.

С другой стороны, несмотря на погрешности, вызываемые различными гипотезами, применяемыми при выводе уравнений колебаний, исследователи вынуждены их применять при решении тех или иных задач о колебаниях механических систем. Не составляют исключение и теории типа теорий Тимошенко, которые также используют упрощающие гипотезы. Из большого числа уточненных теорий цилиндрических оболочек можно привести теорию Г. Германна и И.Мирски [11]. Она считается наиболее правильной и простой для решения динамических задач цилиндрической оболочки. При разработке этой теории используются следующие гипотезы и предположения, которые существенно упрощают построение теории и окончательных разрешающих уравнений колебания [12]:

При построении уточненных теорий стараются вывести уточненные уравнения колебаний, учитывающих те или иные факторы физического, механического или геометрического характера. В зависимости от учитываемых факторов методы вывода уравнений колебания, основанные на динамической теории упругости, разделяются на три основные направления.

К первому из них можно отнести методы, которые основаны на использовании вариационных принципов в динамике.

Ко второму направлению относят методы, основанные на разложении составляющих поля упругих перемещений в ряды, в том числе в степенные. Существенное развитие такой метод получил в работах советских ученых. На его основе В.З. Власовым был разработан метод начальных функций, применительно к оболочечным системам. Строгое математическое обоснование метода разложения упругих смещений в степенные ряды на примере динамической задачи о слое в случае плоской деформации дано Г.И. Петрашенем [10].

Наконец к третьему направлению относится метод использования общих решений в преобразовании трехмерных задач теории упругости. Существенное и успешное применение к задачам динамики этот метод получил в работах И.Г. Филиппова и его учеников [13–15]. Сущность метода сводится к изучению построенных решений при различных типах внешних воздействий и к выяснению условий, при выполнении которых смещения или их «главные части» удовлетворяют несложным уравнениям колебания, и к нахождению алгоритма, позволяющего по полю этих «главных частей» вычислять приближенные значения полей смещений и напряжений в любом сечении для произвольного момента времени [16, 17].

В работах [18, 19] решения задачи о переходном процессе деформации в цилиндрической оболочке получены с привлечением приближенной теории. В них в рамках теории Тимошенко рассмотрены задачи о распространении нестационарных волн и о переходных волновых процессах в линейно-вязкоупругой круговой цилиндрической оболочке конечной длины при динамическом нагружении одного из ее торцов.

В последнее время исследователями уделяется особое внимание нестационарным задачам о колебаниях цилиндрических тел с жидкостями. К таким относится работа [20], в которой предложен подход к определению собственных частот и мод составных систем оболочек, включающий построение математической модели, основанной на теории Кирхгофа – Лява, уточненной теории типа Тимошенко и теории пространственной упругости. Работа [21] посвящена разработке подхода для определения характеристик волнового процесса в цилиндрической полости, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью, возбуждаемой вибрирующим сферическим телом, размещенным на оси полости. Численно-аналитический метод нахождения собственных частот и форм колебаний трубопровода, транспортирующего идеальную жидкость, предложен в [22]. Метод позволяет определить собственные частоты и формы, когда натяжение или сжатие, а также диаметр являются произвольными функциями продольной координаты. Авторами [23] задача взаимодействия двухфазной жидкости с трубопроводом решена на основе стержневой теории. Построена математическая модель колебаний горизонтальных вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду, учитывающая внутреннее давление.

Ниже рассматривается задача о продольно-радиальных колебаниях круговой цилиндрической упругой оболочки с внутренним r_1 , внешним r_2 радиусами и содержащей покоящуюся вязкую сжимаемую жидкость. Без применения дополнительных гипотез и предпосылок физического или механического характера выведены общие уравнения колебания такой оболочки, из которых можно получить типа классических и уточненных уравнения колебаний. Предложен алгоритм, позволяющий по полю искомых функций однозначно определить напряженно-деформированное состояние точек произвольного сечения рассматриваемой гидроупругой системы по значениям искомых функций. Полученные уточненные уравнения колебания применены для исследования гармонических колебаний цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью.

Постановка задачи

Считается, что рассматриваемая цилиндрическая оболочка, как трехмерное тело, строго подчиняется математической линейной теории упругости и в точной постановке описывается трехмерными уравнениями. При этом она отнесена к цилиндрической системе координат (r, θ, z) , где ось z направлена по оси симметрии цилиндра (рис. 1).

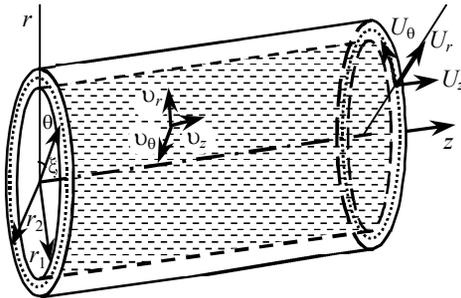


Рис.1. Геометрия оболочки
Fig. 1. Shell geometry

Предполагается, что колебания слоя, как и жидкости малы. При этом малость колебаний подразумевает малости смещений точек оболочки и жидкости. Зависимости между напряжениями и деформациями в точках цилиндрического слоя считаются заданными в виде соотношений закона Гука для изотропного тела. Уравнения движения точек оболочки как цилиндрического слоя используются в виде

$$\mu \Delta \bar{\Psi} = \rho \ddot{\Psi}; \quad (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi = \rho \ddot{\Phi}, \quad (1)$$

где λ, μ – коэффициенты Ламэ; ρ – плотность материала оболочки; Δ – трехмерный оператор Лапласа. При этом потенциалы продольных Φ и поперечных $\bar{\Psi}$ волн введены по формуле

$$\bar{U} = \text{grad } \Phi + \text{rot} [\bar{e}_z \Psi_1 + \text{rot} (\bar{e}_z \Psi_2)]. \quad (2)$$

Аналогично уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости при продольных колебаниях имеют вид [24]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \frac{4\nu'}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right] G = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu' \Delta \right) \chi_2 = 0, \quad (r, \theta, z) \in \Omega, \quad (3)$$

где Ω – объем пространства, занятый жидкостью; a_0 – скорость звука в покоящейся жидкости; ν' – кинематический коэффициент вязкости; μ' – коэффициент вязкости $\mu' = \rho'_0 \nu'$; ρ'_0 – плотность покоящейся жидкости;

$$\bar{V} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } G + \text{rot} [\bar{e}_z \chi_1 + \text{rot} (\bar{e}_z \chi_2)]). \quad (4)$$

Считается, что колебания цилиндрической оболочки возбуждаются усилиями на её внешней поверхности при $r = r_2$, т.е. граничные условия задачи имеют вид [25]

$$\sigma_{rr}(r, z, t)|_{r=r_2} = f_r(z, t); \quad \sigma_{rz}(r, z, t)|_{r=r_2} = f_{rz}(z, t). \quad (5)$$

Будут иметь место следующие динамические и кинематические условия на поверхности контакта взаимодействующих сред

$$\sigma_{rr}(r, z, t)|_{r=r_1} = -P_{rr}(r, z, t)|_{r=r_1}, \quad \sigma_{rz}(r, z, t)|_{r=r_1} = -P_{rz}(r, z, t)|_{r=r_1}; \quad (6)$$

$$V_z(r, z, t)|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial t} U_z(r, z, t)|_{r=r_1}, \quad V_r(r, z, t)|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial t} U_r(r, z, t)|_{r=r_1}, \quad (7)$$

где P_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) – компоненты тензора напряжений в жидкости; Начальные условия задачи считаются нулевыми.

Уравнения колебания

Для решения задачи (1), (3) – (7), функции внешних воздействий рассматриваются в классе функций, представимых в виде [26]

$$f_r(z, t) = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(t)} f_r^{(0)}(k, p) e^{pt} dp, \\ f_{rz}(z, t) = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \cos kz \\ \sin kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(t)} f_{rz}^{(0)}(k, p) e^{pt} dp, \quad (8)$$

где (l) – разомкнутый контур в плоскости p , прилегающий справа к участку $(-i\omega_0, i\omega_0)$ мнимой оси. Кроме того, функции $f_r(z, t)$ и $f_{rz}(z, t)$ предполагаются такими, что функции $f_r^{(0)}(k, p)$ и $f_{rz}^{(0)}(k, p)$ пренебрежимо малы вне области, $0 \leq k \leq k_0, \text{Im}|p| < \omega_0$.

При представлении вектора перемещения в виде (2) крутильное составляющее перемещения зависит только от потенциальной функции ψ_1 , а продольная и радиальная составляющие зависят только от потенциальных функций Φ и ψ_2 . Поэтому, задача изучения продольно-радиальных колебаний цилиндрической оболочки может быть рассмотрена отдельно от задачи о крутильных колебаниях [27]. Аналогичное утверждение имеет место и для содержащейся в оболочке жидкости.

Исходя из этого, представив потенциалы Φ, Ψ_2, G и χ_2 аналогично (8) и подставив их в уравнения (1), (3), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, общие решения которых, учитывающие ограниченности решений при $r = 0$ и $r \rightarrow \infty$, выражаются через модифицированные функции Бесселя и равны

$$\Phi_0(r) = A_1 I_0(\alpha r) + A_2 K_0(\alpha r), \quad \Psi_{20}(r) = B_1 I_0(\beta r) + B_2 K_0(\beta r), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad (9)$$

$$G_0(r) = C I_0(\delta r), \quad \chi_{20}(r) = D I_0(\gamma r), \quad (10)$$

где A_i, B_i, C и D – постоянные интегрирования;

$$\alpha^2 = k^2 + \rho p^2 / (\lambda + 2\mu), \quad \beta^2 = k^2 + \rho p^2 / \mu,$$

$$\delta^2 = k^2 + 3p^2 / (3a_0^2 + 4v'), \quad \gamma^2 = k^2 + p/v'.$$

Аналогично представив напряжения σ_{ij}, P_{ij} , преобразуются граничные и контактные условия (5) – (7). Подставив в преобразованные граничные условия решения (9), (10), получим

$$\begin{aligned} & [2\mu\alpha^2 + (\alpha^2 - k^2)\lambda][I_0(\alpha r)A_1 + K_0(\alpha r)A_2] - \frac{2\alpha}{r}\mu[I_1(\alpha r)A_1 - K_1(\alpha r)A_2] - \\ & - 2\mu k\beta^2[I_0(\beta r)B_1 + K_0(\beta r)B_2] + \frac{2k\beta}{r}\mu[I_1(\beta r)B_1 - K_1(\beta r)B_2] = f_r^{(0)}(k, p), \quad (11) \end{aligned}$$

$$2\alpha k[I_1(\alpha r)A_1 - K_1(\alpha r)A_2] - \beta(\beta^2 + k^2) \times [I_1(\beta r)B_1 - K_1(\beta r)B_2] = \frac{1}{\mu} f_{rz}^{(0)}(k, p).$$

При классическом исследовании колебаний цилиндрической оболочки за искомые величины принимаются смещения точек срединной поверхности оболочки. Однако такой выбор не единственный [28]. Например, рассматривая цилиндрическую оболочку, необходимо выбирать такую поверхность, которая для стержня переходит в осевую линию, а для тонких оболочек – в срединную поверхность. С другой стороны, в экспериментальных исследованиях получают информацию о смещениях точек внешней или внутренней поверхности оболочки, по которым необходимо определить напряженно-деформированное состояние самой оболочки. В связи с этим за искомые величины примем перемещения и напряжения в точках некоторой промежуточной поверхности цилиндрической оболочки, радиус

которой определяется по формуле

$$\xi = \frac{r_1}{2} \left(\chi - \frac{r_1}{r_2} \right), \quad 2 + \frac{r_1}{r_2} \leq \chi \leq 2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}.$$

Заметим, что ξ может быть радиусом внутренней, срединной или внешней поверхности цилиндрической оболочки, при значениях χ .

В дальнейшем, используя стандартные разложения модифицированных функций Бесселя, введя новые искомые функции $U_{z,j}$ и $U_{r,j}$ ($j = 0, 1$), которые являются главными частями соответственно продольного и радиального перемещений поверхности оболочки, контактирующей с жидкостью, и, осуществляя обратное преобразование, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (C_{r0} - C_{r0}^R)U_{r,0} + (C_{z0} - C_{z0}^R)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} - (C_{r1} - C_{r1}^R)U_{r,1} + (C_{z1} - C_{z1}^R)\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} &= 0, \\ (d_{r0} - d_{r0}^R)\frac{\partial U_{r,0}}{\partial z} + (d_{z0} - d_{z0}^R)U_{z,0} - (d_{r1} - d_{r1}^R)\frac{\partial U_{r,1}}{\partial z} - d_{z1}U_{z,1} &= 0, \\ e_{r0}U_{r,0} + e_{z0}\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} - e_{r1}U_{r,1} + e_{z1}\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} &= \frac{1}{\mu}f_r(z,t), \\ d_{r0}\frac{\partial U_{r,0}}{\partial z} + d_{z0}U_{z,0} - d_{r1}\frac{\partial U_{r,1}}{\partial z} - d_{z1}U_{z,1} &= \frac{1}{\mu}f_{rz}(z,t), \end{aligned} \quad (12)$$

где $C_{ij}, C_{ij}^R, d_{ij}, d_{ij}^R, e_{ij}$ – операторы типа

$$\begin{aligned} C_{roi} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m(1-q_1) - q_1)\lambda_2^m - \left(\lambda_1 - (m+1) \left(\lambda_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) q_1 P_m \right] \frac{(r_i/2)^{2m}}{m!(m+1)!}, \\ P_m &= \sum_{k=0}^n \lambda_1^{(n-k-1)} \lambda_2^k, \quad \lambda_1^m = \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^m, \\ C_{r0}^R &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{2\mu'}{3\mu} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} q_1 P_m \frac{(r_1/2)^{2m}}{(m!)^2} + \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{2\mu'}{3r_1\mu} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\rho_0' a_0^2}{r_1\mu} \right] \left[\lambda_2^m + \lambda_1 q_1 P_m \right] \frac{(r_1/2)^{2m+1}}{m!(m+1)!}, \quad \lambda_2^m = \left(\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^m, \end{aligned} \quad (13)$$

a, b – скорости распространения, соответственно продольных и поперечных волн в материале оболочки.

Полученная система уравнений (12) является системой общих уравнений продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической упругой оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость, относительно главных частей перемещений точек внутренней поверхности, контактирующей с поверхностью содержащейся жидкости. При этом операторы C_{kl}^R и d_{kl}^R из (13) представляют собой реакцию вязкой жидкости на колебания оболочки. Из (12) можно получить уравнения для оболочки: а) с несжимаемой вязкой жидкостью; б) сжимаемой идеальной жидкостью; в) с несжимаемой идеальной жидкостью. Кроме того, в случае отсут-

ствия жидкости, полученные уравнения колебания (12) в частных случаях переходят в классическое уравнение продольных колебаний кругового стержня, в уравнение Релея или в уточненное уравнение типа С.П. Тимошенко. Наряду с уравнениями колебания выведены формулы для всех компонент тензора напряжений и вектора перемещений. Например, при нулевом приближении эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, z, t) &= \mu \left\{ (1 - q_1) \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} - (1 + q_1) U_{r,0} - r_1 \left(\ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \right) \left[(1 - 2q_2) \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} + (1 + 2q_2) \lambda_2 U_{r,1} \right] \right\}; \\ \sigma_{rr}(r, z, t) &= -\mu \left[q_1 U_{r,0} + (1 + q_1) \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} \right] + \\ & \mu r_1 \left\{ \left[\left(q_2 \ln \frac{r}{r_1} - \frac{1}{2} \right) \lambda_2 + \frac{2}{r^2} \right] U_{r,1} + \left[(1 + q_2) \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} \right\}; \\ U_z(r, z, t) &= U_{z,0} - \left(\ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \right) (r_1 U_{z,1}); \\ U_r(r, z, t) &= \frac{r}{2} \left\{ U_{r,0} - r_1 \left[(1 + q_2) \lambda_2 \ln \frac{r}{r_1} + \frac{2}{r^2} \right] U_{r,1} - r_1 q_2 \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} \right\}, \\ q_2 &= -\frac{1}{1 - 2\nu}. \end{aligned} \quad (14)$$

Формулы (14) позволяют определить напряженно-деформированное состояние произвольной точки оболочки по значениям искомым функций $U_{z,j}$ и $U_{r,j}$ ($j = 0, 1$), по результатам решения уравнений (12).

Гармонические колебания цилиндрической оболочки с вязкой сжимаемой жидкостью

Ниже на основе полученных уравнений колебания исследуется гармонические продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость. Для описания поведения цилиндрического слоя с вязкой жидкостью применяются приближенные уравнения колебания, полученные из общих уравнений (12), ограничиваясь в них нулевым приближением. При этом предполагается, что поверхности оболочки свободны от внешних нагрузок. Тогда правые части уравнений колебания будут равны нулю. В полученных приближенных уравнениях перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$t = t^* r_1 / a, \quad z = r_1 z^*, \quad r = r^* r_1, \quad U_{r,0} = U_{r,0}^*,$$

$$U_{r,1} = r_1 U_{r,1}^*, \quad U_{z,0} = r_1 U_{z,0}^*, \quad U_{z,1} = U_{z,1}^* \quad (15)$$

и, в дальнейшем, для простоты записи, опустим «звездочки» над буквами. Тогда система уравнений колебания в безразмерных координатах, с учетом равенства нулю функций внешних воздействий, принимает вид

$$\left\{ \frac{1}{6} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \frac{\partial}{\partial t} - q_1 - \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} U_{r,0} + \left\{ -\frac{4}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \frac{\partial}{\partial t} - (1 + q_1) - \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial z} U_{z,0} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{a^2}{2b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2\rho_0' a_0^2}{\mu} - 2 \right\} U_{r,1} + \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{12} q_2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} - \frac{1}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} q_2 \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial z} U_{z,1} = 0, \\
& \left\{ \left(\frac{2}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} + \frac{\mu' a}{\mu r_1} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (1 - q_1) + \frac{r_1}{2} \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial z} U_{r,0} + \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{2} (1 - q_1) + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2} - \left(\frac{1}{2} (1 - q_1) + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} U_{z,0} - \\
& - \left\{ \left(\frac{4}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} - 2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial z} U_{r,1} - \left\{ \frac{\rho_0' a^2}{4\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(q_2 \frac{\mu' a}{3\mu r_1} + q_2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} - \frac{\mu' a}{3\mu r_1} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\rho_0' a_0^2}{4\mu} + \left(1 + \frac{1}{4} q_2 \right) \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} U_{z,1} = 0; \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - q_1 U_{r,0} + \left[\left(\frac{a^2}{2b^2} - \frac{q_2 a^2}{b^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{2} - q_2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2r_1}{r_2^2} \right] U_{r,1} - \\
& - (1 + q_1) \frac{\partial}{\partial z} U_{z,0} + \left((1 - q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} U_{z,1} = \frac{1}{\mu} f_r(r, t), \\
& \frac{r_2}{2r_1} (1 - q_1) \frac{\partial}{\partial z} U_{r,0} + \left(\frac{r_2}{2r_1} (1 - q_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{r_2}{2r_1} (1 - q_1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U_{z,0} - \\
& - \left[\frac{r_2}{2r_1} (1 + 2q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{r_1}{r_2} \right] \frac{\partial}{\partial z} U_{r,1} - \\
& - \left[\frac{r_2}{2r_1} \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{r_2}{2r_1} (1 - 2q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{r_1}{r_2} \right] U_{z,1} = \frac{1}{\mu} f_{rz}(r, t).
\end{aligned}$$

Решение дифференциальных уравнений (16) будем искать в виде

$$U_{r,0} = \bar{U}_{r,0} e^{\omega t - kz}, \quad U_{z,0} = \bar{U}_{z,0} e^{\omega t - kz}, \quad U_{r,1} = \bar{U}_{r,1} e^{\omega t - kz}, \quad U_{z,1} = \bar{U}_{z,1} e^{\omega t - kz}, \tag{17}$$

где ω – частота колебаний; k – волновое число. Подставляя (17) в уравнения (16) будем иметь систему четырех однородных алгебраических уравнений относительно $\bar{U}_{r,0}$, $\bar{U}_{z,0}$, $\bar{U}_{r,1}$, $\bar{U}_{z,1}$

$$\begin{aligned}
& [a_{11}\omega + a_{10}] \bar{U}_{r,0} + [b_{11}\omega + b_{10}] \bar{U}_{z,0} + [c_{12}\omega^2 + c_{11}\omega + c_{10}] \bar{U}_{r,1} + \\
& + [d_{11}\omega + d_{10}] \bar{U}_{z,1} = 0; \\
& [a_{21}\omega + a_{20}] \bar{U}_{r,0} + [b_{22}\omega^2 + b_{21}\omega + b_{20}] \bar{U}_{z,0} + [c_{21}\omega + c_{20}] \bar{U}_{r,1} + \\
& + [d_{22}\omega^2 + d_{21}\omega + d_{20}] \bar{U}_{z,1} = 0; \\
& a_{30} \bar{U}_{r,0} + b_{30} \bar{U}_{z,0} + [c_{12}\omega^2 + c_{11}\omega + c_{10}] \bar{U}_{r,1} + [d_{11}\omega + d_{10}] \bar{U}_{z,1} = 0; \\
& a_{40} \bar{U}_{r,0} + [b_{42}\omega^2 + b_{20}] \bar{U}_{z,0} + [c_{42}\omega^2 + c_{40}] \bar{U}_{r,1} + [d_{42}\omega^2 + d_{20}] \bar{U}_{z,1} = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{6} \frac{\mu' a}{\mu r_1}; \quad a_{12} = -q_1 - \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu}; \quad b_{11} = \frac{4}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} k; \quad b_{10} = \left((1+q_1) + \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right) k; \quad c_{12} = -\frac{a^2}{2b^2}; \\
 c_{11} &= -\frac{1}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1}; \quad c_{10} = \frac{1}{2} k^2 + \frac{2\rho_0' a_0^2}{\mu} + 2; \quad d_{11} = -\left(\frac{1}{12} q_2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} - \frac{1}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \right) k; \\
 d_{10} &= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} q_2 \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right); \quad a_{21} = -\frac{5}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} k; \quad b_{22} = \left(\frac{1}{2} (1-q_1) + \frac{\rho_0' a^2}{2\mu} \right); \\
 b_{21} &= -\frac{2}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} k^2; \quad b_{20} = -\left(\frac{1}{2} (1-q_1) + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right) k^2; \quad c_{21} = -\frac{2}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} k; \quad c_{20} = \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} k; \\
 d_{22} &= -\frac{\rho_0' a^2}{4\mu}; \quad d_{21} = -\left(q_2 \frac{\mu' a}{3\mu r_1} + q_2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} - \frac{\mu' a}{3\mu r_1} \right) k^2; \quad d_{20} = \frac{\rho_0' a_0^2}{4\mu} k^2 - \frac{1}{4} q_2 \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} k^2 - 1; \\
 a_{30} &= -q_1; \quad b_{30} = (1+q_1) k; \quad c_{32} = \left(\frac{a^2}{2b^2} - \frac{q_2 a^2}{b^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right); \quad c_{30} = \frac{1}{2} k^2 - q_2 \ln \frac{r_2}{r_1} k^2 + \frac{2r_1}{r_2^2}; \\
 d_{30} &= -\left((1-q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2} \right) k; \quad a_{40} = -\frac{r_2}{2r_1} (1-q_1) k; \quad b_{42} = \frac{r_2}{2r_1} (1-q_1); \\
 b_{40} &= -\frac{r_2}{2r_1} (1-q_1) k^2; \quad c_{42} = \frac{r_2}{2r_1} \frac{a^2}{b^2} (1+2q_2) k \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad c_{40} = \frac{r_1}{r_2} k - \frac{r_2}{2r_1} k^3 (1+2q_2) \ln \frac{r_2}{r_1}; \\
 d_{42} &= -\frac{r_2}{2r_1} \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad d_{40} = \frac{r_2}{2r_1} k^2 (1-2q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}.
 \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель, элементы которого являются коэффициентами при неизвестных функциях этой системы, получим частотное уравнение

$$\begin{vmatrix}
 [a_{11}\omega + a_{10}] & [b_{11}\omega + b_{10}] & [c_{12}\omega^2 + c_{11}\omega + c_{10}] & [d_{11}\omega + d_{10}] \\
 [a_{21}\omega + a_{20}] & [b_{22}\omega^2 + b_{21}\omega + b_{20}] & [c_{21}\omega + c_{20}] & [d_{22}\omega^2 + d_{21}\omega + d_{20}] \\
 a_{30} & b_{30} & [c_{32}\omega^2 + c_{31}\omega + c_{30}] & [d_{31}\omega + d_{30}] \\
 a_{40} & [b_{42}\omega^2 + b_{20}] & [c_{42}\omega^2 + c_{40}] & [d_{42}\omega^2 + d_{20}]
 \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) решалось численно с помощью программы “Maple 17”. При этом расчеты производились для различных материалов оболочки при следующих значениях физико-механических их параметров:

- сталь: $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 7850$ кг/м³; $\nu = 0,25$;
- медь: $E = 10^{11}$ Па; $\rho = 8940$ кг/м³; $\nu = 0,31$;
- алюминий: $E = 7.0 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho = 2750$ кг/м³; $\nu = 0,35$.

В качестве содержащейся среды приняты следующие жидкости со следующими характеристиками:

- тяжелая нефть: $\mu' = 128 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 914$ кг/м³, $\nu' = 140 \cdot 10^{-6}$ м²·с⁻¹;
- керосин: $\mu' = 2,17 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 800$ кг/м³, $\nu' = 2,7 \cdot 10^{-6}$ м²·с⁻¹.

Геометрические характеристики оболочки следующие:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = r_1 + h; \quad h = 0,01; 0,05; 0,1; 0,15.$$

Численные результаты

Результаты проведенных расчетов приведены на рис. 2 – 6 в виде зависимостей наименьшей частоты ω от волнового числа k . На рис. 2 приведены графики зависимостей частоты от волнового числа при различных значениях толщины оболочки: $h = 0.01; 0.05; 0.1; 0.15$. Приведенные графики (рис. 2 – 6) показывают, что при значениях волнового числа $k \leq 3$ зависимости частоты ω от волнового числа k носят нелинейный характер, а в дальнейшем, с ростом k эти зависимости становятся линейными. Значения частоты тонкой оболочки при $h = 0.01$ резко отличается от остальных. Например, при $k = 2$ эта разница для $h = 0.05$ составляет порядка 30.4 %; для $h = 0.1$ составляет порядка 41.3 %; для $h = 0.15$ составляет порядка 43.8 %. При увеличении значений волнового числа указанные различия уменьшаются.

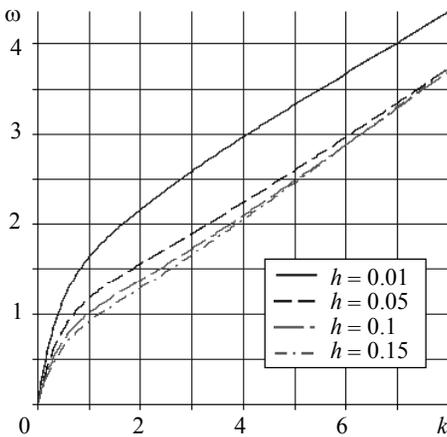


Рис. 2. Зависимости ω от k для оболочек из стали при различных значениях толщины h
Fig. 2. Dependences of ω on K for steel shells at various thicknesses h

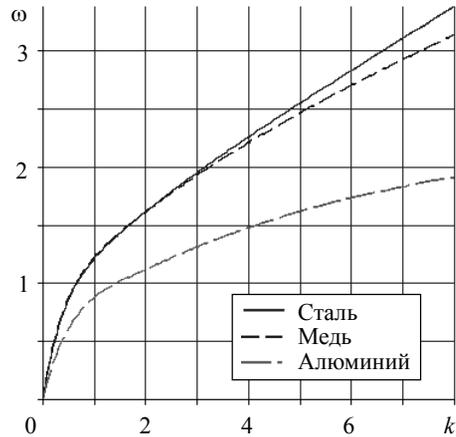


Рис. 3. Зависимости ω от k для заполненных оболочек из различных материалов
Fig. 3. Dependences of ω on k for the filled shells made of various materials

Например, при $k = 7$ эта разница для $h = 0.05$ составляет 16 %, а для $h = 0.1$ и $h = 0.15$ разница почти одинаковая и составляет примерно 17.5 %. Для толстостенных оболочек ($h = 0.05; 0.1; 0.15$) при значениях $k > 7$, значения частот мало отличаются друг от друга. Отсюда следует, что чем тоньше оболочка, тем выше частота ее колебаний, что соответствует физической сущности задачи. На рис. 4 представлены зависимости от k для заполненных тяжелой нефтью тонких оболочек ($h = 0.01$) из различных материалов: стали, меди и алюминия. Из графиков следует, что чем больше значение модуля упругости материала, тем выше частота колебаний. Например, при $k = 4$ разница между частотами колебаний для оболочек из алюминия и стали равна приблизительно 33.3 %. Значение этой разницы увеличивается в сторону высоких частот, т.е. для коротковолновых процессов. Для заполненных стальной и медной оболочек, значения модулей упругости которых близки друг к другу по сравнению с алюминиевой оболочкой, значения частот при $k \leq 3$ совпадают и начинают различаться при $k > 3$, и достигают 12 % при $k = 8$. Это указывает на то, что более коротковолновые процессы приводят к большей разнице значений частот колебаний, которая возрастает с ростом числа k .

На рис. 4 – 6 приведены зависимости ω от k для заполненных керосином и тяжелой нефтью стальных (рис. 4), алюминиевых (рис. 5) и медных (рис. 6) оболочек толщиной $h = 0.01$. Из них следует общее заключение, что содержащиеся в оболочке жидкости приводят к уменьшению частоты колебаний. Это имеет место для оболочек из стальных, алюминиевых и медных оболочек, т.е. содержащаяся жидкость уменьшает частоту колебаний оболочки независимо от материала оболочки. При этом уменьшение частоты происходит по разному для разных материалов оболочки.

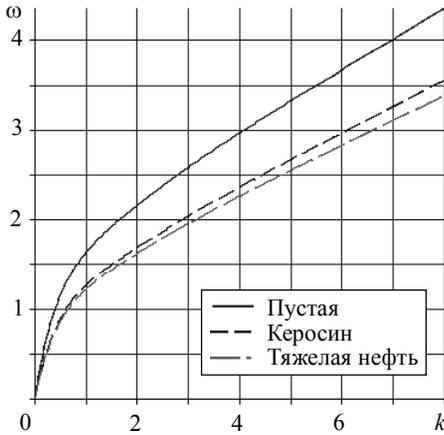


Рис. 4. Зависимости ω от k для стальных оболочек, заполненных вязкими жидкостями
Fig. 4. Dependences of ω on k for the steel shells filled with viscous fluids

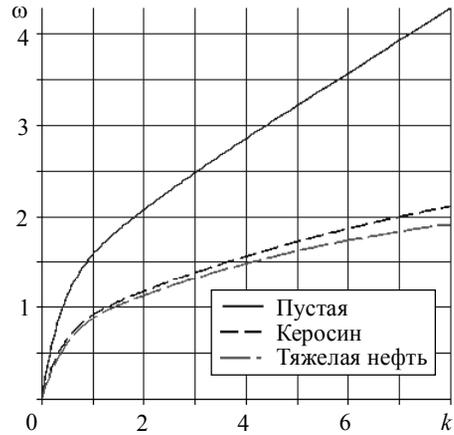


Рис. 5. Зависимости ω от k для алюминиевых оболочек, заполненных вязкими жидкостями
Fig. 5. Dependences of ω on k for the aluminum shells filled with viscous fluids

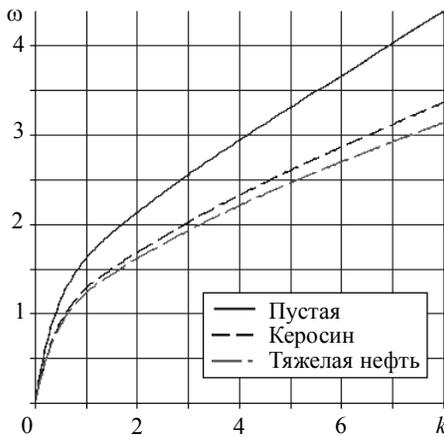


Рис. 6. Зависимости ω от k для медных оболочек, заполненных вязкими жидкостями
Fig. 6. Dependences of ω on k for the copper shells filled with viscous fluids

Например, при $k = 8$ разница между частотами стальной (рис. 4) пустой и заполненной керосином оболочки составляет 15.6 %, а для заполненной тяжелой нефтью оболочки равен 23 %. Повторяя расчет для алюминиевой (рис. 5) и медной (рис. 6) оболочек находим, что указанные показатели равны соответственно 49.8 % и 55.6 % для алюминиевой и 23.5 % и 35 % для медной оболочек.

Выводы

Таким образом:

- предложены приближенные уравнения продольно-радиальных колебаний упругой круговой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость. Полученные уравнения пригодны для решения прикладных задач инженерной практики. Наряду с уравнениями колебания предложены формулы для всех компонент тензора напряжений и вектора перемещений, позволяющие определить напряженно-деформированное состояние произвольной точки оболочки с заданной точностью по координатам r , z и времени t . Выведены также формулы для всех компонент тензора напряжений и вектора скоростей частиц взаимодействующей вязкой жидкости;

- проведенный, в целях проверки достоверности полученных результатов, сравнительный анализ показал, что предложенные в работе общие и уточненные уравнения осесимметричных колебаний рассматриваемой гидроупругой системы, в частном случае отсутствия взаимодействующей вязкой жидкости, совпадают по структуре, но отличаются по коэффициентам с соответствующими результатами работ [27–29];

- в качестве примера решена задача о гармонических колебаниях тонкой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую жидкость, в частности керосина или тяжелой нефти. Полученные результаты по исследованию зависимости частоты от волнового числа показали, что чем тоньше оболочка, тем выше частота ее колебаний; содержащаяся в оболочке жидкость приводит к уменьшению частоты колебаний оболочки из всех трех (сталь, медь, алюминий) материалов. При этом величина влияния зависит от значения модуля упругости применяемого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 784 с.
2. Новожиллов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7. № 5. С. 331–340.
3. Муштару Х.М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа – Лява // ПММ. 1947. Т. 11. № 5. С. 517–520.
4. Даревский В.М. Об основных соотношениях теории тонких оболочек // ПММ. 1961. Т. 25. № 3. С. 519–535.
5. Нигуль У.К. Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек и анализ точности различных вариантов в теории Кирхгофа – Лява // Теория пластин и оболочек. Ереван, 1964. С. 738–742.
6. Григориук Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика тверд. деформир. тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
7. Амбарцумян С.А. К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек // ПММ. 1954. Т. 18. № 3. С. 303–312.
8. Yi-Yuan Yu. Vibrations of cylindrical shells analyzed by means of Donnell-type equations // Aero/Space Sci. 1958. V. 11. P. 699–715.

9. *Низуль У.К.* Линейные уравнения динамики упругой круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. Серия А. 1960. № 7. С. 67–76.
10. *Петрашень Г.И.* Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. №5. С. 3–33.
11. *Herrmann G., Mirsky I.* Three-dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motions of cylinders // J.Appl. Mech. 1956. V. 23. No. 4. P. 563–568.
12. *Худойназаров Х.Х., Ялгашев Б.Ф.* Осесимметричные колебания вязкоупругого цилиндрического слоя, заполненного вязкой сжимаемой жидкостью // Проблемы архитектуры и строительства. 2016. № 1. С. 119–125.
13. *Filippov I.G., Kudainazarov K.* General transverse vibrations equations for a circular cylindrical viscoelastic shell // Soviet Applied Mechanics. 1990. V. 26(4). P. 351–357. DOI: 10.1007/bf00887127.
14. *Khudoynazarov Kh., Khudoyberdiyev Z.B.* Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2020. V. 614. 012061. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012061.
15. *Худойназаров Х.Х., Абдирашидов А., Буркутбоев Ш.М.* Моделирование крутильных колебаний вязкоупругого круглого стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью // Математическое моделирование и численные методы. 2016. № 1 (9). С. 38–51.
16. *Khudoynazarov Kh., Yaxshiboyev Sh.R.* The mathematical model of transverse vibrations of the three-layer plate // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2020. V. 614. 012062. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012062.
17. *Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М.* Математическая модель крутильных колебаний цилиндрического слоя с учетом протекающей жидкости и вращения // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 4. С. 38–56.
18. *Нетребко А.В., Пиелничнов С.Г.* Некоторые задачи динамики линейно-вязкоупругих цилиндрических оболочек конечной длины // Проблемы прочности и пластичности 2015. Т. 77. № 1.
19. *Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F.* Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2020. V. 614. 012087. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012087.
20. *Беспалова Е.И., Борейко Н.П.* Определение собственных частот составных анизотропных оболочечных систем с использованием различных моделей деформации // Int. Appl. Mech. 2019. V. 55. P. 41–54. DOI: 10.1007/s10778/019/00932/8.
21. *Кубенко В.Д.* Определение динамических характеристик вязкой жидкости в цилиндрической полости под действием сферического излучателя // Int. Appl. Mech. 2019. V. 55. P. 296–304. DOI: 10.1007/s10778/019/00955/1.
22. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Несеров С.В.* Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 123–133.
23. *Худаяров Б.А., Комилова Х.М.* Численное моделирование колебаний вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду в режиме пробкового течения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 95–110. DOI: 10.17223/19988621/61/9.
24. *Гузь А.Н.* Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. мех. Киев, 1980. Т. 16. № 10. С. 10–20.
25. *Худойназаров Х.Х., Ялгашев Б.Ф.* О нестационарных задачах гидроупругости для цилиндрического слоя с вязкой сжимаемой жидкостью // Проблемы архитектуры и строительства. 2007. № 2. С. 119–125.
26. *Khudoynazarov K., Yalgashev B.F., Mavlonov T.* Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2021. V. 1030. 012098. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098.
27. *Худойназаров Х.Х.* Нестационарное взаимодействие круговых цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой. Ташкент: Изд-во им. Абу Али ибн Сино, 2003. 325 с.

28. Filippov I.G., Kudainazarov K. Refinement of equations describing longitudinal-radial vibrations of a circular cylindrical viscoelastic shell // Soviet Applied Mechanics. 1990/ V. 26(2). P. 161–168. DOI: 10.1007/bf00887110.
29. Filippov I.G., Kudainazarov K. Boundary-value problems of longitudinal vibrations of circular cylindrical shells // International Applied Mechanics. 1998. V. 34(12). P. 1204–1210. DOI: 10.1007/bf02700874.

Статья поступила 04.03.2020

Khudoynazarov Kh.Kh., Kholmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2021) LONGITUDINAL-RADIAL VIBRATIONS OF THE ELASTIC CYLINDRICAL SHELL FILLED WITH A VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 139–154

DOI 10.17223/19988621/69/11

Keywords: cylindrical shell, viscous fluid, vibrations, refined equations, stresses, displacements.

In this paper, the longitudinal-radial vibrations of the elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible fluid are studied using the mathematical model proposed. The general equations for the longitudinal-radial vibrations of the shell made of the homogeneous and isotropic material are derived. These equations can be used to obtain refined equations of vibrations. The proposed algorithm allows one to uniquely determine the stress-strain state of points in any section of the considered hydroelastic system using the field of the required functions in coordinates and time. The benchmark problem of harmonic oscillations in a cylindrical shell with a viscous fluid is solved. The dependences of the frequency on the wave number are obtained for various shell- fluid interaction cases.

Khayrulla Kh. KHUDOYNAZAROV (Doctor of Technical Sciences, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: kh.khudoyn@gmail.com

Rustam I. KHALMURADOV (Doctor of Technical Sciences, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: rustami@list.ru

Burkhon F. YALGASHEV (Candidate of Technical Sciences, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: byalgashev@bk.ru

REFERENCES

1. Vlasov V.Z. (1949) *Obshchaya teoriya obolochek* [General theory of shells]. Moscow; Leningrad: GITTL.
2. Novozhilov V.V., Finkel'shtein R.M. (1943) O pogreshnosti gipotez Kirkhgofa v teorii obolochek [On the error of the Kirchhoff hypotheses in the theory of shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 7(5). pp. 331–340.
3. Mushtari Kh.M. (1947) Ob oblasti primenimosti priblizhennoy teorii obolochek Kirkhgofa–Lyava [On the scope of the approximate theory of shells of the Kirchhoff–Love]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 11(5). pp. 517–520.
4. Darevskiy V.M. (1961) Ob osnovnykh sootnosheniyakh teorii tonkikh obolochek [On the main relations in the theory of thin shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 3(25). pp. 519–535.
5. Nigul' U.K. (1964) *Asimptoticheskaya teoriya statiki i dinamiki uprugikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek i analiz tochnosti razlichnykh variantov v teorii Kirkhgofa–Lyava* [Asymptotic theory of statics and dynamics of elastic circular cylindrical shells and the accuracy analysis for various options in the Kirchhoff–Love theory]. *Teoriya plastin i obolochek*. Yerevan. pp. 738–742.

6. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. (1973) *Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Non-classical theories of oscillations of rods, plates, and shells]. Itogi nauki i tekhniki. Seriya Mekhanika tverdykh deformiruemyykh tel. Volume 5. Moscow: VINITI.
7. Ambartsumyan S.A. (1954) K voprosu postroeniya priblizhennykh teorii rascheta pologikh tsilindricheskikh obolochek [To the issue of developing approximate theories for calculating shallow cylindrical shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 18(3). pp. 303–312.
8. Yi-Yuan Yu. (1958) Vibrations of cylindrical shells analyzed by means of Donnell-type equations. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. 11. pp. 699–715. DOI: 10.2514/8.7849.
9. Nigul' U.K. (1960) Lineynye uravneniya dinamiki uprugoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki svobodnye ot gipotez [Linear equations for the dynamics of an elastic circular cylindrical shell free from hypotheses]. *Trudy Tallinskogo politekhnicheskogo instituta. Seriya A*. 7. pp. 67–76.
10. Petrashen' G.I. (1966) *Problemy inzhenernoy teorii kolebaniy vyrozhdennykh sistem* [Problems of the engineering theory of vibrations of degenerate systems]. Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti. Leningrad: LSU Publishing House. 5. pp. 3–33.
11. Herrmann G., Mirsky I. (1956) Three-dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motions of cylinders. *Journal of Applied Mechanics*. 23(4). pp. 563–568.
12. Khudoynazarov Kh.Kh., Yalgashev B.F. (2016) Osesimmetrichnye kolebaniya vyazkoupругogo tsilindricheskogo sloya, zapolnennogo vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu [Axisymmetric vibrations of a viscoelastic cylindrical layer filled with a viscous compressible fluid]. *Problemy arkhitektury i stroitel'stva – Problems of Architecture and Construction*. 1. pp. 119–125.
13. Filippov I.G., Kudainazarov K. (1990) General transverse vibrations equations for a circular cylindrical viscoelastic shell. *Soviet Applied Mechanics*. 26(4). pp. 351–357. DOI: 10.1007/bf00887127.
14. Khudoynazarov Kh., Khudoyberdiyev Z.B. (2020) Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 614(012061) DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012061.
15. Khudoynazarov Kh.Kh., Abdirashidov A., Burkutboev Sh.M. (2016) Modelirovaniye krutil'nykh kolebaniy vyazkoupругogo sterzhnya, vrashchayushchegosya s postoyannoy uglovoy skorost'yu [Modeling of torsional vibrations of a viscoelastic round rod rotating at a constant angular velocity]. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 9(1). pp. 38–51.
16. Khudoynazarov Kh., Yaxshiboyev Sh.R. (2020) The mathematical model of transverse vibrations of the three-layer plate. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 614(012062). DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012062.
17. Khudoynazarov Kh., Burkutboev Sh.M. (2017) Matematicheskaya model' krutil'nykh kolebaniy tsilindricheskogo sloya s uchetom protekayushchey zhidkosti i vrashcheniya [A mathematical model of torsional vibrations of a cylindrical layer with account for the flowing fluid and rotation]. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 4. pp. 38–56.
18. Netrebko A.V., Pshenichnov S.G. (2015) Nekotorye zadachi dinamiki lineynovyazkoupругikh tsilindricheskikh obolochek konechnoy dliny [Some problems of dynamics of linearly viscoelastic cylindrical shells of finite length]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 77(1). pp. 57–61.
19. Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2020) Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 614(012087). DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012087.
20. Bepalova E.I., Boreyko N.P. (2019) Opredeleniye sobstvennykh chastot sostavnykh anizotropnykh obolocheknykh sistem s ispol'zovaniem razlichnykh modeley deformatsii [Determination of the natural frequencies of compound anisotropic shell systems using

- various deformation models]. *International Applied Mechanics*. 55. pp. 41–54. DOI: 10.1007/s10778/019/00932/8.
21. Kubenko V.D. (2019) Opredelenie dinamicheskikh kharakteristik vyazkoy zhidkosti v tsilindricheskoy polosti pod deystviem sfericheskogo izluchatelya [Determining the dynamic characteristics of viscous liquid in a cylindrical cavity acted upon by a spherical radiator]. *Mezhdunarodnyy zhurnal "Prikladnaya mekhanika" – International Applied Mechanics*. 55. pp. 296–304. DOI: 10.1007/s10778/019/00955/1.
 22. Akulenko L.D., Gavrikov A.A., Nesterov S.V. (2018) Sobstvennyye kolebaniya truboprovoda na uprugom osnovanii, transportiruyushchego zhidkost' [Natural vibrations of a liquid-transporting pipeline on an elastic base]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 53(1). pp. 101–110. DOI: 10.3103/S0025654418010120.
 23. Khudayarov B.A., Komilova Kh.M. (2019) Chislennoe modelirovanie kolebaniy vyazkoupругikh truboprovodov, transportiruyushchikh dvukhfaznuyu sredu v rezhime probkovogo techeniya [Numerical simulation of vibrations of viscoelastic pipelines conveying two-phase medium in a slug flow regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 95–110. DOI: 10.17223/19988621/61/9.
 24. Guz' A.N. (1980) Rasprostranenie voln v tsilindricheskoy obolochke s vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu [Wave propagation in a cylindrical shell with a viscous compressible fluid]. *Prikladnaya mekhanika – International Applied Mechanics*. 16(10), pp. 10–20.
 25. Khudoynazarov Kh., Yalgashev B.F. (2007) O nestatsionarnykh zadachakh gidrouprugosti dlya tsilindricheskogo sloya s vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu [On non-stationary problems of hydroelasticity for a cylindrical layer with a viscous compressible fluid]. *Problemy arkhitektury i stroitel'stva – Problems of Architecture and Construction*. 2. pp. 119–125.
 26. Khudoynazarov K., Yalgashev B.F., Mavlonov T. (2021) Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 1030(012098). DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098.
 27. Khudoynazarov Kh.Kh. (2003) Nestatsionarnoe vzaimodeystvie krugovykh tsilindricheskikh obolochek i sterzhney s deformiruemoy sredoy [Non-stationary interaction of circular cylindrical shells and rods with a deformable medium]. Tashkent: Publishing House Named after Abu Ali ibn Sino.
 28. Filippov I.G., Kudainazarov K. (1990) Refinement of equations describing longitudinal-radial vibrations of a circular cylindrical viscoelastic shell. *Soviet Applied Mechanics*. 26(2). pp. 161–168. DOI: 10.1007/bf00887110.
 29. Filippov I.G., Kudainazarov K. (1998) Boundary-value problems of longitudinal vibrations of circular cylindrical shells. *International Applied Mechanics*. 34(12). pp. 1204–1210. DOI: 10.1007/bf02700874.

Received: March 4, 2020

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/69/12

Д.В. Янов, С.А. Зелепугин

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ НЕЖЕСТКОЙ ДОРОЖНОЙ ОДЕЖДЫ НА ПРОЧНОСТЬ И СДВИГОУСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлены результаты численного расчета покрытия и основания четырехслойной дорожной одежды нежесткого типа с помощью метода конечных элементов. Задача решалась в статической плоско-деформационной постановке. Определен максимальный вертикальный прогиб и коэффициент запаса прочности для покрытия дорожной одежды, проведен анализ сдвигоустойчивости основания по критерию прочности Друкера – Прагера.

Ключевые слова: *дорожная одежда, напряженно-деформированное состояние, коэффициент запаса прочности, критерий Друкера – Прагера, метод конечных элементов.*

Развитие транспортной системы неразрывно связано со строительством и модернизацией автодорог, при этом большая часть затрат уходит на строительство дорожной одежды (ДО). Конструкция ДО имеет два основных слоя: покрытие и основание. При этом каждый слой может разделяться еще на несколько промежуточных слоев, каждый из которых выполняет определенную роль при действующих нагрузках автотранспорта [1]. Покрытие автодороги непосредственно контактирует с автотранспортом и воспринимает основную нагрузку, распределяя ее на нижние слои ДО. Как правило, к покрытию предъявляют следующие требования: прочность при сжатии и растяжении, влагостойкость, морозостойкость. Ниже идет основание, задача которого принять и максимально равномерно распределить нагрузку на местный грунт. Чаще всего основание выполнено из щебеночных, песчаных, гравийных смесей. Данные смеси могут быть как слабосвязанные, так и укрепленные специальными веществами, что в значительной мере влияет на несущую способность автодороги.

В современной научной литературе выделяются два основных направления в области проектирования и конструирования автомобильной ДО. Первое направление связано с теоретической и экспериментальной оценкой прочности и совершенствованием методов расчета ДО [2–7]. Достаточно большое количество работ в этой области посвящено расчету покрытия и основания ДО на сдвигоустойчивость [2]. В первую очередь сдвиговым деформациям подвержено покрытие ДО [2], особенно в летний период, когда прочностные показатели асфальтобетона снижаются в полтора-два раза из-за повышенных температур. Снижение сопротивления сдвиговым деформациям приводит к образованию колеи и локальных просадок на покрытии ДО. Дефекты такого рода значительно ухудшают качество автодороги и являются серьезной опасностью для всех участников дорожного движения. После расчета покрытия на сдвигоустойчивость необходимо проводить такие же расчеты для основания ДО. Как правило, основание выполнено из сыпучих, слабосвязанных материалов, поэтому возникает большая вероятность просадки основания под нагрузкой тяжелого автотранспорта [2]. Необратимые де-

формации в грунтах напрямую связаны с касательными напряжениями, и если рассмотреть процесс деформации грунтов более подробно, то можно заметить, что при критических касательных напряжениях, превышающих силы сопротивления и сцепления среды, происходит смещение грунтового массива вдоль одной или нескольких поверхностей скольжения. Вследствие таких скольжений, в одних местах грунт может просаживаться, а в других местах выпучиваться, что приводит к недопустимому деформированию покрытия. Проведение расчетов на прочность и сдвигустойчивость для грунтов (бетонов, асфальтобетонов, сыпучих сред) достаточно трудоемкая задача, так как нужна адекватная модель разрушения. Чаще всего в расчетах используют критерии прочности Мора – Кулона и Друкера – Прагера, а также модели Cam-Clay, Menetrey – William.

Второе направление связано со способами укрепления покрытия и основания ДО. Работы в этой области посвящены как теоретическим, так и практическим исследованиям укрепления автодороги [8–11]. С развитием геосинтетических материалов появилась возможность армирования верхних слоев ДО, укрепления откосов и основания. При этом основная сложность проектирования таких конструкций заключается в оценке их прочности. Модификация аналитических методов расчета армированного покрытия не дает достаточно точных результатов при сравнении с экспериментальными данными, тем не менее специалисты в этой области продолжают улучшать методики расчета [8]. Укрепление с помощью армирования также применяется и в основании, такой подход увеличивает сопротивление упругому прогибу и в полной мере обеспечивает перераспределение напряжений по всему основанию ДО. Но наиболее эффективным способом укрепления основания ДО является применение связующих материалов, таких как: шлаки, цемент, битум, синтетические смолы, известь, силикат натрия, органические и полимерные вяжущие добавки [9]. Укрепленное основание эффективно сопротивляется сдвиговым деформациям и имеет высокие прочностные показатели, однако возникает проблема подбора связующего вещества для того или иного типа автодороги. Различные связующие вещества по-разному влияют на физико-механические свойства грунтов, поэтому необходимо более точное прогнозирование поведения укрепленного основания при заданных нагрузках на стадии проектирования.

Проектирование ДО представляет собой трудоемкую задачу, так как необходим оптимальный подбор слоев (толщина, тип материала) с экономической точки зрения и с целью достижения требуемой прочности для обеспечения надежности ДО. Процесс подбора может происходить итерационно и занимать много времени, поэтому более перспективным направлением является численное моделирование на основе подходов механики деформируемого твердого тела, механики разрушения, механики грунтов. Анализ современных методов численного моделирования в области строительной механики, и, в частности, дорожного строительства, показывает, что подавляющее большинство исследователей использует метод конечных элементов (МКЭ), поэтому этот метод был применен и в данной работе.

Основная идея метода заключается в дискретизации расчетной области на конечные элементы, соединенные в узлах, перемещения внутри элементов определяются через узловых перемещения с помощью функций формы [12]. В данной работе выбраны треугольные конечные элементы и линейные полиномы в качестве функций формы. После расчета узловых перемещений в данной задаче можно определить напряженно-деформированное состояние (НДС) всей конструкции.

Применение МКЭ при проектировании ДО дает широкие возможности для анализа НДС покрытия и основания, а также определения их несущей способности [13 – 16]. Расчет ДО с помощью МКЭ не ограничивается количеством слоев, их расположением и типом материалов. При этом возможно решить сразу несколько проблем: оценить прочность армированного покрытия и основания, оценить сдвигустойчивость укрепленного и неукрепленного основания ДО и многие другие проблемы.

Целью данной работы является оценка напряженно-деформированного состояния слоев ДО при помощи метода конечных элементов в статической, упругой, плоско-деформационной постановке, оценка прочности покрытия при упругом прогибе, локализация участков необратимой деформации в основании ДО по критерию Друкера – Прагера [17, 18].

Постановка задачи

В качестве конструкции ДО используется типовой пример из отраслевых дорожных норм «ОДН 218.046-01 Проектирование нежестких дорожных одежд (Россия)» [19]:

- 1) дорога располагается во II дорожно-климатической зоне;
- 2) категория автомобильной дороги – III;
- 3) заданный срок службы ДО – $T_{\text{work}} = 15$ лет;
- 4) суммарное число приложений нагрузки $\Sigma N_p \approx 1.2 \cdot 10^6$ авт.;
- 5) грунт рабочего слоя земляного полотна – супесь пылеватая с расчетной влажностью 0.7 W_t , которая относится к сильнопучинистым грунтам;
- 6) материал для основания – гравийная смесь;
- 7) высота насыпи составляет 1.4 м;
- 8) схема увлажнения рабочего слоя земляного полотна – III;
- 9) глубина залегания грунтовых вод – 0.6 м.

Поверхность ДО состоит из двух слоев высотой по 5 см, далее идет основание общей высотой 1.3 м, состоящее из гравийной смеси и супеси пылеватой. На рис. 1 изображено расположение слоев, их размеры по высоте и ширине. Рабочее покрытие автодороги третьей категории, согласно [19], имеет ширину 7 м, обочина – 1 м. Высота ДО 1.4 м, угол наклона откосов составляет 45°. В таблице представлены основные характеристики слоев ДО. Постановка задачи дана на рис. 2.



Рис. 1. Схема дорожной одежды, размеры даны в мм

Fig. 1. Road pavement layout; sizes in mm

Физико-механические параметры слоев дорожной одежды

№	1	2	3	4
Материал слоя	Асфальтобетон плотный на БНД марки 60/90	Асфальтобетон пористый на БНД марки 60/90	Гравийная смесь	Супесь пылеватая
Толщина слоя h , см	5	5	50	80
Модуль Юнга E , МПа	3200	2800	240	46
Коэффициент Пуассона μ	0.1	0.1	0.17	0.3
Угол внутреннего трения φ , град	-	-	42	31
Коэффициент сцепления C , МПа	-	-	0.0025	0.006
Предел прочности на сжатие σ_s , МПа при 20 °С	2.2	2	-	-

В качестве статической нагрузки, действующей на поверхность автодороги, рассматривается нагрузка от танка Т-90 со специальными накладками на гусеницы. Нагрузка задается в виде равномерно распределенных сил (давления) от гусениц, что упрощает постановку задачи.

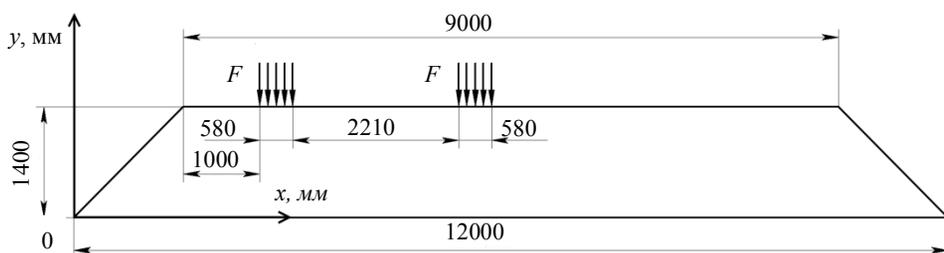


Рис. 2. Постановка задачи
Fig. 2. Formulation of the problem

Приведенная нагрузка (нагрузка на единицу длины гусеницы в продольном направлении) рассчитывается по формуле

$$Q = \frac{Mg}{2L} \quad (1)$$

где M – масса танка, кг; g – ускорение свободного падения, m/c^2 , L – длина гусеницы, м. Полная масса танка задана равной 45500 кг, длина гусеницы выбрана 4.27 м, следовательно, $Q = 54450$ Н/м.

Расчет узловых сил F осуществляется следующим образом. Так как задача решается в двумерной плоско-деформационной постановке, то в продольном направлении берется условная единичная длина l , равная 1 м для всех расчетных элементов. Тогда сила F , действующая на каждый расчетный узел, при условии равенства узловых масс, рассчитывается по формуле

$$F = \frac{Ql}{n}, \quad (2)$$

где l – выбранная длина расчетных элементов; n – число узлов, на которые действует приведенная нагрузка Q .

Граничные условия задачи следующие: узлы расчетной сетки, расположенные вдоль оси x при $y = 0$, имеют жесткое закрепление на вертикальное перемещение $\delta_y = 0$ (рис. 2). Для остальных граничных узлов заданы условия, соответствующие свободной поверхности. Расчеты проводились с помощью специально разработанной авторами вычислительной программы, написанной на алгоритмическом языке программирования C++.

Результаты расчетов и обсуждение

На рис. 3 представлены поля перемещений узлов δ_y . Максимальные перемещения соответствуют области контакта гусениц, однако следует отметить различие полей перемещений от левой и правой гусениц. Это связано с тем, что левая на рисунке гусеница танка находится практически у обочины автодороги, то есть там, где контактирует плотное асфальтобетонное покрытие и гравийно-песчаная смесь. Резкое уменьшение модуля упругости с 3200 МПа до 240 МПа и приводит к таким эффектам, в отличие от правой части, где обочина расположена на расстоянии более 3 м от правой гусеницы.

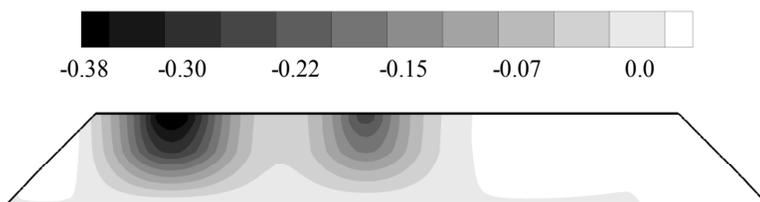


Рис. 3. Поля перемещений δ_y (мм)

Fig. 3. Displacement fields δ_y (mm)

На рис. 4 приведена зависимость перемещений $\delta_y(x)$ при $y = 1.4$ м, что соответствует верхней границе дорожного покрытия. Из данного рисунка видно, как деформируется поверхность дорожного покрытия при несимметричной нагрузке относительно центра автодороги. В правой части автодороги наблюдается выгибание поверхности в положительном направлении. При продавливании и неупругом деформировании автодороги в области действия нагрузки и выгибании в периферийной части возможно образование колеи.

Полученные результаты были сопоставлены с результатами решения данной задачи в ANSYS Mechanical для одинаковых конечно-элементных сеток. В строительной механике утвержден ряд верифицированных/сертифицированных программных комплексов: ANSYS, MIDAS Civil, Robot Structural, SCAD, Лира. Любые альтернативные результаты расчетов требуется сопоставить (верифицировать) с решением по одному из этих программных комплексов. ANSYS является основным из них, поэтому решение, полученное с помощью разработанного программного комплекса, сравнивалось с решением, полученным в ANSYS Mechanical. Анализ графиков показывает качественное и количественное соответствие результатов. Например, величина вертикального перемещения крайней левой точки покрытия в обоих случаях составляет 0.05 мм, а в правой части, при x больше 7 м, наблюдается выгибание покрытия. Максимальный прогиб на рис. 4, кривая 1, составляет 0.35 мм, для полученного нами решения эта величина составляет 0.425 мм.

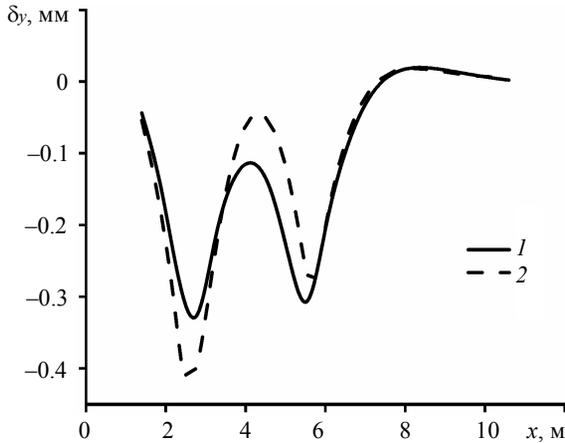


Рис. 4. Перемещения $\delta_y(x)$ при $y = 1.4$ м. 1 – решение, полученное в ANSYS Mechanical, 2 – решение, полученное в вычислительной программе авторов

Fig. 4. Displacements $\delta_y(x)$ at $y = 1.4$ m. The solution is obtained using (1) ANSYS Mechanical and (2) authors' numerical code

Кроме вертикальных перемещений, ДО подвергается и горизонтальным перемещениям. На рис. 5 представлены поля перемещений δ_x , при этом следует отметить, что значение максимальных положительных (0.13 мм) и отрицательных (–0.18 мм) перемещений δ_x отличается по модулю на 40 %, так как нагрузка расположена несимметрично относительно центра автодороги.

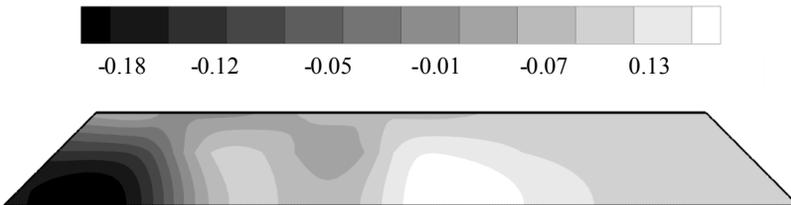


Рис. 5. Поля перемещений δ_x (мм)

Fig. 5. Displacement fields δ_x (mm)

Для анализа несущей способности покрытия и основания ДО используется коэффициент запаса прочности (КЗП) $k = \sigma_s / \sigma$, где σ_s – предельно допустимое значение рассматриваемой величины, σ – напряжения, вычисляемые по выбранному критерию. При оценке прочности покрытия автодороги необходимо учитывать, что материал подвергается сжимающим напряжениям, поэтому σ_s – критическое напряжение при сжатии. В качестве σ рассматривается интенсивность напряжений по Мизесу (3):

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения. На рис. 6 представлены графики изменения коэффициента запаса прочности $k(x)$ для двух слоев покрытия ДО (верхний ряд конечных элементов для каждого слоя). В области контакта гусениц танка k составляет 3–12.

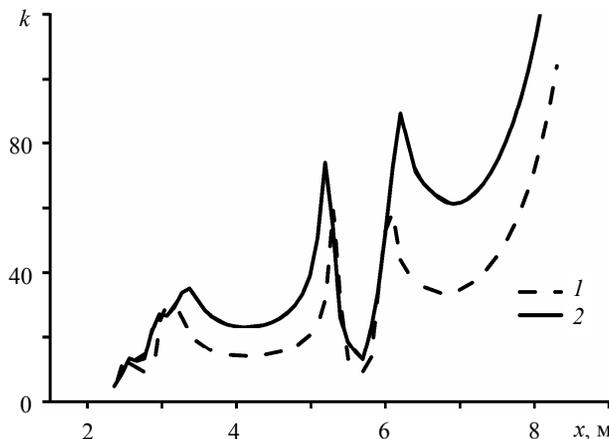


Рис. 6. Коэффициент запаса прочности покрытия дорожной одежды $k(x)$. 1 – асфальтобетон пористый, 2 – асфальтобетон плотный

Fig. 6. Load factor for pavement, $k(x)$. (1) open-graded asphalt concrete and (2) dense-graded asphalt concrete

При $x = 4$ м, то есть между гусеницами танка, коэффициент запаса прочности в среднем возрастает до 15. В правой части автодороги КЗП покрытия возрастает до 120 и выше вследствие несимметричности нагрузки.

Определение сдвигустойчивости основания также является важной частью прочностных расчетов для ДО нежесткого типа. Для этого в расчетах применяется критерий Друкера – Прагера (4) [17]

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \frac{6C \cos \alpha}{\sqrt{3}(3 + \sin \alpha)} + \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{3}(3 + \sin \alpha)}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (4)$$

где C – коэффициент сцепления, α – угол внутреннего трения. Данный критерий достаточно корректно описывает поведение сыпучих материалов, грунтов, щебеночных и глинистых оснований.

В данной работе КЗП для основания рассчитывался следующим образом. После расчета НДС, для каждого элемента конструкции определяется предельное значение с помощью критерия Друкера – Прагера, при котором материал переходит в неупругую стадию деформирования, причем в формулу для расчета КЗП вводится поправочный коэффициент $K_{\text{корр}}$ равный 1.22, обусловленный тем, что в основание добавляются связующие компоненты, повышающие прочность материала. Тогда коэффициент запаса прочности для основания выглядит таким образом:

$$k_b = K_{\text{корр}} \frac{\frac{6C \cos \alpha}{\sqrt{3}(3 + \sin \alpha)} + \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{3}(3 + \sin \alpha)} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{\sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}}. \quad (5)$$

На рис. 7 представлены поля КЗП для гравийного основания и супеси пылеватой.

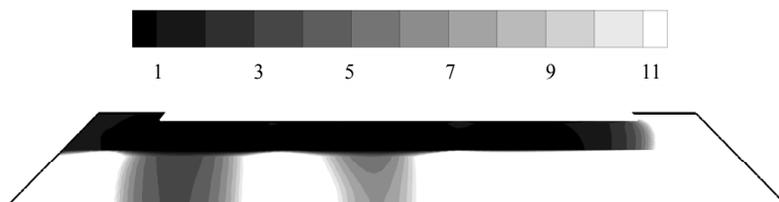


Рис. 7. Коэффициент запаса прочности для основания дорожной одежды
Fig. 7. Load factor for roadbed

Анализ результатов расчетов показывает, что наблюдается обширная зона необратимых деформаций в области гравийного основания ДО. Основной причиной может быть слабосвязанность данного материала и большой угол внутреннего трения. Крайняя правая часть верхнего основания практически не подвергается касательным деформациям и выполняет свою несущую роль, так как основную нагрузку воспринимает левая часть ДО. Для супеси пылеватой k_b находится в пределах 3–10, то есть в данной зоне не наблюдаются необратимые деформации.

Заключение

Разработана альтернативная вычислительная программа для проектирования дорожной одежды нежесткого типа с помощью метода конечных элементов. Рассчитано напряженно-деформированное состояние и коэффициент запаса прочности для покрытия и основания при заданной статической нагрузке, а также определены вертикальные перемещения поверхности покрытия. При данной нагрузке покрытие автодороги способно сопротивляться сжимающим напряжениям и имеет минимальный коэффициент запаса прочности равный 3.

Представлен подход для вычисления коэффициент запаса прочности для основания дорожной одежды при помощи критерия Друкера – Прагера. На основе такого подхода выявлена низкая несущая способность гравийно-песчаного основания практически по всей ширине дорожной одежды, кроме свободной боковой части, где касательные напряжения минимальны. Нижнее основание (супесь пылеватая) дорожной одежды имеет коэффициент запаса прочности в пределах 3–10, что свидетельствует о достаточном сопротивлении сдвиговым деформациям в этой области.

Полученное решение сравнивалось с решением в ANSYS Mechanical. Основным параметром при сравнении была выбрана вертикальная компонента перемещения. Получено качественное и количественное соответствие результатов.

Авторы выражают благодарность Пашкову С.В. за инициирование данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабков В.Ф., Андреев О.В.* Проектирование автомобильных дорог. Ч. 2. М.: Транспорт, 1987. 415 с.
2. *Александров А.С., Долгих Г.В., Калинин А.Л.* Совершенствование расчета дорожных конструкций по сопротивлению сдвигу. Часть 2. Модифицированные модели расчета главных и касательных напряжений // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 2(62). С. 51–68. DOI: 10.5862/МСЕ.62.6.
3. *Aman, Awaluddin A., Ahmad A., Olivia M.* Parametric study on the compressive strength geopolymer paving block // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 345. 012018. DOI: 10.1088/1757-899X/345/1/012018.
4. *Колесников Г.Н., Гаврилов Т.А.* Моделирование условий появления низкотемпературных трещин в асфальтобетонном слое автомобильной дороги // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. С. 57–66. DOI: 10.17223/19988621/56/5.
5. *Сиротюк В.В., Лунёв А.А.* Прочностные и деформационные характеристики золошлаковой смеси // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 6(74). С. 3–16. DOI: 10.18720/МСЕ.74.1.
6. *Judycki J.* A new viscoelastic method of calculation of low-temperature thermal stresses in asphalt layers of pavements // Int. J. Pavement Engineering. 2018. V. 19. Iss. 1. P. 24–36. DOI: 10.1080/10298436.2016.1199883.
7. *Телтаев Б.Б., Луу Дж., Суннес Е.А.* Распределение температуры, влажности, напряжений и деформаций в автомобильной дороге // Инженерно-строительный журнал. 2018. № 7(83). С. 102–113. DOI: 10.18720/МСЕ.83.10.
8. *Матвеев С.А., Мартынов Е.А., Литвинов Н.Н.* Расчет армированной конструкции дорожной одежды как многослойной плиты на упругом основании // Вестник СибАДИ. 2015. № 5(45). С. 72–76.
9. *Al-Jumaili M.A., Issmael O.D.* Cold asphalt mixtures with high reclaimed pavement material percentages response to local traffic loading and environmental conditions // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 433. 012013. DOI: 10.1088/1757-899X/433/1/012013.
10. *Vyrozhemskiy V., Krayushkina K., Bidnenko N.* Durable high strength cement concrete topping for asphalt roads // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. V. 236. 012031. DOI: 10.1088/1757-899X/236/1/012031.
11. *Михайлин П.Г.* Экспериментальные исследования по снижению слоев конструкции основания дорожной одежды автомобильной дороги «Амур» (Чита – Хабаровск) км 1927 – км 1942 с использованием георешетки // Современные наукоемкие технологии. 2017. № 1. С. 51–55.
12. *Зенкевич О.С.* Метод конечных элементов в технике / под ред. Б.Е. Победря. М.: Мир, 1975. 543 с.
13. *Calvarano L.S., Palamara R., Leonardi G., Moraci N.* 3D-FEM Analysis on geogrid reinforced flexible pavement roads // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2017. V. 95. 022024. DOI: 10.1088/1755-1315/95/2/022024.
14. *Li S., Hu C.* Finite element analysis of GFRP reinforced concrete pavement under static load // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2018. V. 113. 012188. DOI: 10.1088/1755-1315/113/1/012188.
15. *Малик А.В., Лавит И.М.* Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 88–102. DOI: 10.17223/19988621/54/8.
16. *Leonardi G.* Finite element analysis for airfield asphalt pavements rutting prediction // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. 2015. V. 63. Iss. 2. P. 397–403. DOI: 10.1515/bpasts-2015-0045.
17. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quarterly of Applied Mathematics. 1952. V. 10(2). P. 157–165.

18. Микушина В.А., Смолин И.Ю. Численное моделирование деформирования и разрушения пористой алюмооксидной керамики на мезоуровне // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 99–108. DOI: 10.17223/19988621/58/8.
19. *Отраслевые дорожные нормы*: ОДН 218.046-01. Проектирование нежестких дорожных одежд. М.: Информавтодор, 2001. 146 с.

Статья поступила: 21.08.2019

Yanov D.V., Zelepugin S.A. (2021) NUMERICAL CALCULATION OF STRENGTH AND SHEAR RESISTANCE OF NON-RIGID ROAD PAVEMENT BY THE FINITE ELEMENT METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 155–165

DOI 10.17223/19988621/69/12

Keywords: road pavement, stress-strain state, factor of safety, Drucker–Prager criterion, finite element method.

The paper presents 2D mathematical simulation results for a T–90 tank interacting with the III-type road in a plane-strain formulation. The purpose of the work is to determine the vertical deflection of an asphalt-concrete road, as well as the load factor of the two-layer road pavement (dense-graded asphalt concrete, open-graded asphalt concrete) and two-layer roadbed (gravel roadbed, ground roadbed – silt sandy loam). To calculate the load factor of the road pavement, the ratio of the von Mises stress to the ultimate compression stress is used. To analyze the shear resistance of the roadbed, the modified Drucker-Prager strength criterion is utilized. The computed results reveal the maximum vertical deflection in the contact area of the tracks. In the same area, the load factor of the road pavement is 3–12, which indicates the high bearing capacity of the dense-graded asphalt concrete. Analysis of the shear resistance of the roadbed shows that irreversible deformations occur in the gravel base in the contact area of the tracks, which can lead to the subsidence of the coating, while the load factor for sandy loam is 3–10.

Dmitriy V. YANOV (Tomsk State University, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dima.yanov97@mail.ru

Sergey A. ZELEPUGIN (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: szel@yandex.ru

REFERENCES

1. Babkov V.F., Andreev O.V. (1987) *Proektirovanie avtomobil'nykh dorog. Chast' 2* [Road design. Part 2]. Moscow: Transport.
2. Aleksandrov A.S., Dolgikh G.V., Kalinin A.L. (2016) Sovershenstvovanie rascheta dorozhnykh konstruksiy po soprotivleniyu sdvigu. Chast' 2. Modifitsirovannyye modeli rascheta glavnykh i kasatel'nykh napryazheniy [Improvement of shear strength design of a road structure. Part 2. Modified models to calculate the principal and shear stresses]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Magazine of Civil Engineering*. 62(2). pp. 51–68. DOI: 10.5862/MCE.62.6.
3. Aman, Awaluddin A., Ahmad A., Olivia M. (2018) Parametric study on the compressive strength geopolymer paving block. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 345(012018). DOI: 10.1088/1757-899X/345/1/012018.
4. Kolesnikov G.N., Gavrilov T.A. (2018) Modelirovanie usloviy poyavleniya nizkotemperaturnykh treshchin v asfal'tobetonnom sloe avtomobil'noy dorogi [Simulation of the conditions for a low-temperature crack appearance in the asphalt concrete layer of a road]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 57–66. DOI: 10.17223/19988621/56/5.

5. Sirotiyuk V.V., Lunev A.A. (2017) Prochnostnye i deformatsionnye kharakteristiki zoloshlakovoy smesi [Strength and deformation characteristics of ash and slag mixture]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Magazine of Civil Engineering*. 6(74). pp. 3–16. DOI: 10.18720/MCE.74.1.
6. Judycki J. (2018) A new viscoelastic method of calculation of low-temperature thermal stresses in asphalt layers of pavements. *International Journal of Pavement Engineering*. 19(1). pp. 24–36. DOI: 10.1080/10298436.2016.1199883.
7. Teltayev B.B., Liu J., Suppes E.A. (2018) Raspreделение температуры, влажности, напряжений i deformatsiy v avtomobil'noy doroge [Distribution of temperature, moisture, stress and strain in the highway]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Magazine of Civil Engineering*. 83(7). pp. 102–113. DOI: 10.18720/MCE.83.10.
8. Matveev S.A., Martynov E.A., Litvinov N.N. (2015) Raschet armirovannoy konstruksii dorozhnoy odezhdyy kak mnogosloynnoy plity na uprugom osnovanii [Calculation of the reinforced design of road clothes as multilayered plate on the elastic basis]. *Vestnik SibADI – The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. 5(45). pp. 72–76. DOI: 10.26518/2071-7296-2015-5(45)-72-76.
9. Al-Jumaili M.A., Issmael O.D. (2018) Cold asphalt mixtures with high reclaimed pavement material percentages response to local traffic loading and environmental conditions. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 433(012013). DOI: 10.1088/1757-899X/433/1/012013.
10. Vyrozhemskiy V., Krayushkina K., Bidnenko N. (2017) Durable high strength cement concrete topping for asphalt roads. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 236(012031). DOI: 10.1088/1757-899X/236/1/012031.
11. Mikhaylin R.G. (2017) Eksperimental'nye issledovaniya po snizheniyu sloev konstruksii osnovaniya dorozhnoy odezhdyy avtomobil'noy dorogi «Amur» (Chita – Khabarovsk) km 1927 – km 1942 s ispol'zovaniem georeshetki [Numerical modelling technique of the highways road clothes bases geogrid reinforcements]. *Sovremennyye naukoemkie tekhnologii – Modern High Technologies*. 1. pp. 51–55.
12. Zienkiewicz O.C. (1971) *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw-Hill.
13. Calvarano L.S., Palamara R., Leonardi G., Moraci N. (2017) 3D-FEM Analysis on geogrid reinforced flexible pavement roads. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 95(022024). DOI: 10.1088/1755-1315/95/2/022024.
14. Li S., Hu C. (2018) Finite element analysis of GFRP reinforced concrete pavement under static load. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 113(012188). DOI: 10.1088/1755-1315/113/1/012188.
15. Malik A.V., Lavit I.M. (2018) Metod rascheta koeffitsienta intensivnosti napryazheniy dlya nepodvizhnoy treshchiny normal'nogo razryva pri dinamicheskom nagruzhenii [On the computational method for the stress intensity factor of a stationary crack in mode I under dynamic loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 88–102. DOI: 10.17223/19988621/54/8.
16. Leonardi G. (2015) Finite element analysis for airfield asphalt pavements rutting prediction. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*. 63(2). pp. 397–403. DOI: 10.1515/bpasts-2015-0045.
17. Drucker D.C., Prager W. (1952) Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*. 10(2). pp. 157–165.
18. Mikushina V.A., Smolin I.Yu. (2019) Chislennoe modelirovanie deformirovaniya i razrusheniya poristoy alyumooksidnoy keramiki na mezourovne [Numerical modeling of the deformation and fracture of a porous alumina ceramics at mesoscale]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 99–108. DOI: 10.17223/19988621/58/8.
19. Otrasleye dorozhnye normy: ODN 218.046-01 (2001) *Proektirovanie nezhestkikh dorozhnykh odezhd* [Design of non-rigid road clothes]. Moscow: Informavtodor.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛИЕВ Араз Рафиг оглы – доктор наук по математике, профессор Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, главный научный сотрудник Института математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан. E-mail: alievaraz@yahoo.com, alievaraz@asoiu.edu.az

АРХИПОВ Владимир Афанасьевич – доктор физико-математических наук, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

АХМЕТОВ Аян Жанатович – аспирант кафедры прочности и проектирования, физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ayan.akhmetov93@gmail.com

БАКУШЕВ Сергей Васильевич – доктор технических наук, профессор кафедры механики строительного факультета, Пензенского государственного университета архитектуры и строительства, г. Пенза, Россия. E-mail: bakuchsv@mail.ru

БУРКИН Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: rozaburkina@yandex.ru

БУРЦЕВ Андрей Юрьевич – кандидат физико-математических наук, начальник расчетно-теоретического отдела АО «ВПО «Точмаш» – ЦОКР, г. Владимир, Россия. E-mail: aburtsev.tula@gmail.com

ВИН Ко Ко – кандидат физико-математических наук, стажер кафедры космических аппаратов и ракет-носителей Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия. E-mail: win.c.latt@gmail.com

ГЛАГОЛЕВ Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: vadim@tsu.tula.ru

ДЬЯЧКОВСКИЙ Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lex_okha@mail.ru

ЗЕЛЕПУГИН Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: szel@yandex.ru

ЗОЛОТОРЁВ Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: nikzolotorev@mail.ru

ЗЮБКОВ Валентин Михайлович – старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета, профессор кафедры компьютерных систем в управлении и проектировании Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия. E-mail: vmz@math.tsu.ru

ИМОМОВ Аъзам Абдурахимович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии физико-математического факультета Каршинского государственного университета, г. Карши, Узбекистан. E-mail: imomov_azam@mail.ru

ИЩЕНКО Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, заместитель директора по НИР Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

МАРКИН Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: markin-nikram@yandex.ru

МАТВИЕНКО Олег Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: matvoleyv@mail.ru

МЕЙЛИЕВ Абдор Хужаназарович – старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии физико-математического факультета Каршинского государственного университета, г. Карши, Узбекистан. E-mail: abrog_meyliyev@mail.ru

РАДЖАБОВ Шахин Шамиль оглы – докторант Института математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан. E-mail: shahin.racabov.88@mail.ru

РОГАЕВ Константин Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

СИДОРОВ Алексей Дмитриевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: alex_sid92@mail.ru

СМОЛЕНЦЕВ Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета, г. Кемерово, Россия. E-mail: smolennk@mail.ru

СМОЛИН Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности и проектирования, физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: smolin@ispms.ru

СТЕПАНОВ Евгений Юрьевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: stepanov_eu@mail.ru

ТЕМНОВ Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры космических аппаратов и ракет-носителей Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия. E-mail: antt45@mail.ru

ХАЛМУРАДОВ Рустам Ибрагимович – доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Самаркандского государственного университета, г. Самарканд, Республика Узбекистан. E-mail: rustami@list.ru

ХУДОЙНАЗАРОВ Хайрулла Худойназарович – доктор технических наук, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Самаркандского государственного университета, г. Самарканд, Республика Узбекистан. E-mail: kh.khudoyn@gmail.com

ШАГАБУДИНОВА Ирина Юрьевна – магистрантка Кемеровского государственного университета, г. Кемерово, Россия. E-mail: shagabudinovai@mail.ru.

ЯЛГАСHEВ Бурхон Файзуллаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, Самаркандского государственного университета, г. Самарканд, Республика Узбекистан. E-mail: byalgashev@bk.ru

ЯНОВ Дмитрий Васильевич – студент кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: dima.yanov97@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 15.02.2021. Выпуск в свет 19.01.2021.
Формат 70 × 100¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 13.545. Уч.-изд. л. 15.17. Тираж 250 экз. Заказ № 3. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № ????.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru