ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2015 Теоретические основы прикладной дискретной математики № 2(28)

УДК 519.214

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА МОНОТОННЫХ ЦЕПОЧЕК ЗАДАННОЙ ДЛИНЫ В СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛОЖНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПУАССОНА

А. А. Минаков

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), г. Москва, Россия

Рассматривается распределение числа монотонных цепочек заданной длины s в последовательности из n независимых равномерно распределённых на множестве $\{0,\ldots,N-1\}$ случайных величин с фиксированным числом исходов N. С помощью метода Стейна получена оценка расстояния по вариации между распределением числа монотонных цепочек длины s и сложным пуассоновским распределением. На основании оценки доказана предельная теорема для числа монотонных цепочек при $n,s\to\infty$. В теореме аппроксимирующим распределением является распределение суммы пуассоновского числа независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение.

Ключевые слова: *монотонные цепочки, оценка точности сложной пуассоновской аппроксимации, сложное пуассоновское распределение, метод Стейна.*

DOI 10.17223/20710410/28/2

COMPOUND POISSON APPROXIMATION OF THE NUMBER DISTRIBUTION FOR MONOTONE STRINGS OF FIXED LENGTH IN A RANDOM SEQUENCE

A. A. Minakov

Moscow State Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation, Moscow, Russia

E-mail: minak-ski@yandex.ru

We study the number distribution for monotone strings of a length s in a sequence of n random independent variables uniformly distributed on the set $\{0,\ldots,N-1\}$ where N is a constant. By means of the Stein method we construct an estimate of the variation distance between this distribution and a compound Poisson distribution. As a corollary of this result we prove the limit theorem as $n,s\to\infty$ for the number of monotone strings. The approximating distribution is the distribution of the sum of Poisson number of independent random variables with geometric distribution.

Keywords: *monotone strings, estimate of the variation distance of the compound Poisson approximation, compound Poisson distribution, Stein method.*

Введение

Пусть $X_1,X_2,\ldots,X_n$ — отрезок последовательности, состоящей из независимых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение на множестве $\{0,\ldots,N-1\}$.

Определение 1. Монотонной цепочкой длины s, $s \in \mathbb{N}$, с началом в t назовём событие $E_t = \{X_t \leqslant X_{t+1} \leqslant \ldots \leqslant X_{t+s-1}\}$.

Определение 2. Монотонной серией длины s, $s \in \mathbb{N}$, с началом в t назовём событие $Y_t = \{X_{t-1} > X_t \leqslant X_{t+1} \leqslant \ldots \leqslant X_{t+s-1} > X_{t+s}\}$.

Введём случайную величину

$$\xi_n(s) = \sum_{t=1}^{n} I\{E_t\},$$

равную числу монотонных цепочек длины s, которые начинаются на отрезке $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Для избежания краевого эффекта и облегчения вычислений предполагаем, что рассматривается бесконечная в обе стороны последовательность $\{X_a : a \in \mathbb{Z}\}$. Через $I\{A\}$ обозначаем индикатор события A.

В. Л. Гончаров [1] доказал несколько предельных теорем для монотонных серий в двоичной последовательности, рассмотрев чередование событий в ряде независимых опытов, отвечающих схеме Бернулли. J. Wolfowitz [2] доказал условия сходимости распределения числа монотонных серий заданной длины в конечной бесповторной последовательности к распределению Пуассона и стандартному нормальному распределению. F. N. David и D. E. Barton [3] доказали условия для пуассоновской аппроксимации числа монотонных серий длины больше заданной в конечной бесповторной последовательности. Их результаты обобщил B. G. Pittel [4], который доказал теорему о сходимости распределения числа монотонных серий длины больше заданной к распределению Пуассона. O. Chryssaphinou, S. Papastavridis и E. Vaggelatou [5] доказали теорему об аппроксимации распределения числа монотонных серий заданной длины в стационарной цепи Маркова пуассоновским распределением. Н. М. Меженная [6] доказала многомерную нормальную теорему для числа монотонных серий заданной длины. В данной работе находится оценка расстояния по вариации между распределением числа монотонных цепочек длины s и сложным пуассоновским распределением.

1. Оценка по вариации и предельная теорема

Введём некоторые обозначения. Условимся обозначать $d(\Phi, \Psi)$ расстояние по вариации между распределениями Φ и Ψ. Для распределений Φ и Ψ на множестве $\{0, 1, \ldots\}$ справедлива следующая формула (теорема Шеффе):

$$d(\Phi, \Psi) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |\Psi\{m\} - \Phi\{m\}|.$$

Распределение случайной величины ζ будем обозначать $L(\zeta)$.

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — последовательность неотрицательных действительных чисел, причём сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$. Пусть $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ — последовательность независимых случайных величин, причём случайная величина θ_k имеет распределение Пуассона с параметром λ_k, где $k \in \mathbb{N}$. Распределение случайной величины $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\theta_k$ называется сложным распределением Пуассона, которое будем обозначать $CP(\Lambda)$.

Введём несколько определений аналогично работе [6]. Пусть A_s — число неубывающих цепочек длины s из символов алфавита $\{0, \ldots, N-1\}$. Тогда для $s, N \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$A_s = \binom{s+N-1}{s}. \tag{1}$$

Пусть B_s — число цепочек длины $s+1$, не являющихся неубывающими, но становящихся таковыми после удаления первого элемента. Тогда для $s, N \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$B_s = \left(\begin{array}{c} s+N \\ s+1 \end{array} \right) \frac{s\,(N-1)}{N+s}.$$

Пусть C_s — число цепочек длины $s+2$, не являющихся неубывающими, но становящихся таковыми после удаления первого и последнего элементов. Тогда для $N \geqslant 3$ и $s \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$C_s = \left(\begin{array}{c} s+N-1 \\ s+2 \end{array} \right) \frac{N\,(s^2+s-1)-s^2-s}{N-2}.$$

Далее положим

$$\lambda_\nu = \begin{cases} \dfrac{nC_{s+\nu-1}}{N^{s+\nu+1}} & \text{для } \nu \in \{1, \ldots, s-1\}, \\ \dfrac{n\,(2B_{s+\nu-1}N + (2s-2-\nu)\,C_{s+\nu-1})}{\nu N^{s+\nu+1}} & \text{для } \nu \in \{s, \ldots, 2s-2\}, \\ \dfrac{nA_{2s-1}}{(2s-1)\,N^{3s-2}} & \text{для } \nu \in \{2s-1\}, \\ 0 & \text{для } \nu \in \{2s, \infty\}. \end{cases} \tag{2}$$

На основе метода Стейна и результатов работы [7] докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — отрезок последовательности, состоящей из независимых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение на множестве $\{0, \ldots, N-1\}$, $N = \mathrm{const} \geqslant 3$ и все λ_ν имеют вид (2). Тогда

$$\begin{gathered} d\left(L\left(\xi_n\left(s\right)\right), CP\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, 0, 0, \ldots\right)\right) \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{2s-1} \lambda_k\right\} \frac{n\,(6s-5)}{\left(sN^{-1}+1\right)^2 N^{2s}} \left(\begin{array}{c} s+N \\ s \end{array} \right)^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Из теоремы 1 выведем предельную теорему для случайной величины $\xi_n\,(s)$.

Теорема 2. Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — отрезок последовательности, состоящей из независимых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение на множестве $\{0, \ldots, N-1\}$, и $N = \mathrm{const} \geqslant 3$. Если $n, s \to \infty$ так, что

1) $s/n \to 0$,
2)
$$n\,(s+N)^{N-1}\,N^{-s-1}\,((N-2)!)^{-1} \to \lambda \in (0, \infty), \tag{4}$$

то $L\,(\xi_n\,(s)) \to CP\,(\lambda\,(1-N^{-1})\,, \lambda N^{-1}\,(1-N^{-1})\,, \lambda N^{-2}\,(1-N^{-1})\,, \ldots)$.

Так как N фиксировано, а $s \to \infty$, число монотонных цепочек длины s, не содержащих все символы из множества $\{0, \ldots, N-1\}$, стремится к нулю. В пределе количества монотонных цепочек длины s в монотонных сериях независимы и имеют геометрическое распределение (с параметром $1/N$). Число таких серий распределено по закону Пуассона (с параметром λ).

Предельным распределением в теореме 2 является распределение суммы пуассоновского (с параметром λ) числа независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение (с параметром $1/N$).

2. Доказательство теорем

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая теорема о суммах случайных индикаторов [7].

Пусть Γ — произвольный конечный набор индексов; I_a $(a \in \Gamma)$ — случайные индикаторы; $W = \sum\limits_{a\in\Gamma} I_a$. Для каждого I_a разделим некоторым образом множество Γ на четыре непересекающихся множества $\{a\}$, Γ_a^{vs}, Γ_a^b, Γ_a^{vw} и положим

$$U_a = \sum_{l\in\Gamma_a^{vs}} I_l, \qquad V_a = \sum_{l\in\Gamma_a^b} I_l.$$

Определим набор $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{D+1}, 0, \ldots)$, где

$$\lambda_i = i^{-1} \sum_{a\in\Gamma} \mathbf{E}\left\{I_a I\left\{I_a + U_a = i\right\}\right\}, \tag{5}$$

и величину $D = \max\limits_a |\Gamma_a^{vs}|$. Введём обозначение $\varphi = \sum\limits_{a\in\Gamma} \sum\limits_{i=1}^{|\Gamma_a^{vs}|+1} \varphi_{ai}$,

где
$$\varphi_{ai} = \mathbf{E}\left|\mathbf{E}\left\{I_a I\left\{I_a + U_a = i\right\}|(I_b : b\in\Gamma_a^{vw})\right\} - \mathbf{E}\left\{I_a I\left\{I_a + U_a = i\right\}\right\}\right|. \tag{6}$$

Теорема 3. При любом выборе непересекающихся множеств $\{a\}$, Γ_a^{vs}, Γ_a^b, Γ_a^{vw} справедлива оценка

$$d\left(L\left(W\right), CP\left(\Lambda\right)\right) \leqslant c_1\left(\Lambda\right)\phi + c_2\left(\Lambda\right) \sum_{a\in\Gamma} \left(\left(\mathbf{E}I_a\right)^2 + \mathbf{E}I_a\mathbf{E}\left(U_a + V_a\right) + \mathbf{E}I_aV_a\right),$$

где $\max\left\{c_1\left(\Lambda\right),\ c_2\left(\Lambda\right)\right\} \leqslant \exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right\}$.

Воспользуемся результатами теоремы 3. В нашем случае $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$, $I_a = I\left\{E_t\right\} = I\left\{X_t \leqslant X_{t+1} \leqslant \ldots \leqslant X_{t+s-1}\right\}$. Выберем множества Γ_a^{vs}, Γ_a^b, Γ_a^{vw} следующим образом:

$$\Gamma_t^{vs} = \left\{k \in \Gamma\backslash\{t\} : |t-k| < s\right\}, \quad \Gamma_t^{vw} = \left\{k\in\Gamma : |t-k| > 2s-2\right\},$$
$$\Gamma_t^b = \Gamma\backslash\left(\{t\}\cup\Gamma_t^{vs}\cup\Gamma_t^{vw}\right) = \left\{k\in\Gamma : s \leqslant |t-k| \leqslant 2s-2\right\}.$$

В силу этих определений $D = \max\limits_a |\Gamma_a^{vs}| = 2s-2$ и, следовательно, $D+1 = 2s-1$. В обозначениях теоремы 3 для $t \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$U_t = \sum_{k=t-s+1, k\neq t}^{t+s-1} I\left\{E_k\right\}; \tag{7}$$

$$V_t = \sum_{k=t-2s+2}^{t-s} I\left\{E_k\right\} + \sum_{k=t+s}^{t+2s-2} I\left\{E_k\right\}. \tag{8}$$

Согласно равенству (6), для $I_a = I\left\{E_t\right\}$ получаем

$$\varphi_{ai} = \mathbf{E}\left|\mathbf{E}\left\{I_a I\left\{I_a + U_a = i\right\}|(I_b : b\in\Gamma_a^{vw})\right\} - \mathbf{E}\left\{I_a I\left\{I_a + U_a = i\right\}\right\}\right| = 0,$$

и из определения ϕ вытекает

$$\phi = \sum_{a\in\Gamma} \sum_{i=1}^{|\Gamma_a^{vs}|+1} \phi_{ai} = 0. \tag{9}$$

По формулам (1) и (7) для $t \in \{1, \ldots, n\}$ получаем

$$\mathbf{E}U_t = \sum_{k=t-s+1, k\neq t}^{t+s-1} \mathbf{P}\{E_k\} = (2s-2)\, A_s N^{-s} = (2s-2) \binom{s+N-1}{s} N^{-s}. \tag{10}$$

По формулам (1) и (8) для $t \in \{1, \ldots, n\}$ нетрудно получить

$$\begin{aligned}\mathbf{E}V_t = \sum_{k=t-2s+2}^{t-s} \mathbf{P}\{E_k\} + \sum_{k=t+s}^{t+2s-2} \mathbf{P}\{E_k\} = (2s-2)\, A_s N^{-s} = \\ = (2s-2) \binom{s+N-1}{s} N^{-s}.\end{aligned} \tag{11}$$

С помощью равенств (10) и (11) получаем

$$\mathbf{E}\left(U_t + V_t\right) = (4s-4)\, A_s N^{-s}. \tag{12}$$

В соответствии со способом разбиения множества Γ случайные величины $I\{E_t\}$ и V_t независимы. Следовательно,

$$\mathbf{E}\left(I\{E_t\} V_t\right) = \mathbf{P}\{E_t\} \cdot \mathbf{E}V_t. \tag{13}$$

По формуле (5) для любого $\nu \in \{1, \ldots, 2s-1\}$ имеем

$$\lambda_\nu = \nu^{-1} \sum_{t=1}^{n} \mathbf{E}\left(I\{E_t\} I\{I\{E_t\} + U_t = \nu\}\right). \tag{14}$$

Обозначим $\alpha_t(\nu) \equiv I\{E_t\} I\{I\{E_t\} + U_t = \nu\}$. При фиксированном t, согласно (7), случайная величина $\alpha_t(\nu)$ равна 1 лишь в том случае, когда в отрезке $(X_{t-s+1}, \ldots, X_{t+2s-2})$ длины $3s-2$ встретились монотонная цепочка длины s с началом в t и ещё ровно $\nu - 1$ монотонных цепочек длины s. Наличие монотонной цепочки длины s с началом в t не позволяет без перекрытия с ней расположиться другой монотонной цепочке длины s. Следовательно, все ν цепочек образуют на отрезке $(X_{t-s+1}, \ldots, X_{t+2s-2})$ одну монотонную цепочку длины $s+\nu-1$.

Для вычисления выражения (14) при $\nu \in \{1, \ldots, s-1\}$ подсчитаем число событий, при которых случайная величина $\alpha_t(\nu)$ равна 1. Учитывая наличие монотонной цепочки длины s с началом в t, монотонная цепочка длины $s+\nu-1$ имеет ν способов расположения на отрезке последовательности. Если зафиксировать положение монотонной цепочки длины $s+\nu-1$, то число таких цепочек равно $C_{s+\nu-1}$. Из определения $C_{s+\nu-1}$ следует, что остаются $2s-\nu-3$ элемента, которые могут принимать произвольные значения из множества $\{0, \ldots, N-1\}$. Из (14) получаем равенство (2) при $\nu \in \{1, \ldots, s-1\}$:

$$\lambda_\nu = \nu^{-1} \sum_{t=1}^{n} \frac{\nu C_{s+\nu-1} N^{2s-\nu-3}}{N^{3s-2}} = \frac{n C_{s+\nu-1}}{N^{s+\nu+1}}.$$

Для вычисления выражения (14) при $\nu \in \{s, \ldots, 2s-2\}$ подсчитаем число событий, при которых случайная величина $\alpha_t(\nu)$ равна 1. Всего $2s-2-\nu$ вариантов расположения монотонной цепочки длины $s+\nu-1$ на отрезке $(X_{t-s+1}, \ldots, X_{t+2s-2})$, когда она не начинается и не кончается на концах отрезка. Если зафиксировать положение монотонной цепочки, то число таких цепочек равно $C_{s+\nu-1}$. Если же монотонная цепочка длины $s+\nu-1$ начинается либо заканчивается на концах отрезка $(X_{t-s+1}, \ldots, X_{t+2s-2})$, то в каждом из этих двух случаев число монотонных цепочек длины $s+\nu-1$ равно $B_{s+\nu-1}$. Из определения $B_{s+\nu-1}$ следует, что остаются $2s-\nu-2$ элемента, которые могут принимать произвольные значения из множества $\{0,\dots,N-1\}$. Из (14) получаем равенство (2) при $\nu\in\{s,\dots,2s-2\}$:

$$\lambda_\nu=\nu^{-1}\sum_{t=1}^{n}\frac{2B_{s+\nu-1}N^{2s-\nu-2}+(2s-2-\nu)\,C_{s+\nu-1}N^{2s-\nu-3}}{N^{3s-2}}=$$
$$=\frac{n\,(2B_{s+\nu-1}N+(2s-2-\nu)\,C_{s+\nu-1})}{\nu N^{s+\nu+1}}.$$

Наконец, вычислим выражение (14) при $\nu=2s-1$. В этом случае отрезок $(X_{t-s+1},\dots,X_{t+2s-2})$ содержит монотонную цепочку длины $3s-2$. Число таких монотонных цепочек равно A_{2s-1}. Из (14) получаем равенство (2) при $\nu=2s-1$:

$$\lambda_{2s-1}=\frac{1}{2s-1}\sum_{t=1}^{n}\frac{A_{2s-1}}{N^{3s-2}}=\frac{nA_{2s-1}}{(2s-1)\,N^{3s-2}}.$$

На основе результатов теоремы 3 и с помощью выражений (2), (9), (11)–(13) имеем

$$d\left(L\left(\xi_n\left(s\right)\right),CP\left(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_{2s-1},0,0,\dots\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant c_1\left(\Lambda\right)\phi+c_2\left(\Lambda\right)\sum_{t=1}^{n}\left(\left(\mathbf{P}\left\{E_t\right\}\right)^2+\left(\mathbf{P}\left\{E_t\right\}\right)\left(\mathbf{E}\left(U_t+V_t\right)\right)+\mathbf{E}\left(I\left\{E_t\right\}V_t\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right\}\sum_{t=1}^{n}\left(1+4s-4+2s-2\right)\left(\left(\begin{array}{c}s+N-1\\ s\end{array}\right)N^{-s}\right)^2=$$
$$=\exp\left\{\sum_{k=1}^{2s-1}\lambda_k\right\}\frac{n\left(6s-5\right)N^2}{\left(s+N\right)^2N^{2s}}\left(\left(\begin{array}{c}s+N\\ s\end{array}\right)\right)^2.$$

Теорема 1 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 2. Рассмотрим в оценке (3) множитель

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right\}=$$
$$=\exp\left\{n\sum_{k=1}^{s-1}\frac{C_{s+k-1}}{N^{s+k+1}}+n\sum_{k=s}^{2s-2}\frac{(2B_{s+k-1}N+(2s-2-k)\,C_{s+k-1})}{kN^{s+k+1}}+\frac{nA_{2s-1}}{(2s-1)\,N^{3s-2}}\right\}\tag{15}$$

и покажем, что при переходе к пределу выражение (15) ограничено. Значит, требуется доказать, что существуют такие числа $M,n_0,s_0<\infty$, что для всех $n\geqslant n_0$, $s\geqslant s_0$ выполнено неравенство $\exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{2s-1}\lambda_k\right\}<M$.

Проверим это утверждение. Заметим, что найдётся такое число $M'<\infty$, при котором $\max\{A_s,B_s,C_s\}\leqslant M'\left(s+N\right)^{N-1}$. Заметим также, что при $k\in\{s,\dots,2s-2\}$ найдётся такое число $M''<\infty$, что

$$\frac{2B_{s+k-1}N+(2s-2-k)\,C_{s+k-1}}{k}\leqslant M''\left(s+k-1+N\right)^{N-1}.$$

Кроме того, из условия (4) теоремы 2 следует, что существуют такие числа $n_0,s'<\infty$, что для всех $n\geqslant n_0$, $s\geqslant s'$ выполнено равенство $n\left(s+N\right)^{N-1}N^{-s-1}<\lambda$.

Тогда для каждого $k \in \{1, \ldots, 2s-1\}$ найдётся такое $M_1 < \infty$, что

$$\begin{aligned} \lambda_k \leqslant M_1 n \frac{(s+N+k)^{N-1}}{N^{s+k+1}} = M_1 n \frac{(s+N)^{N-1}}{N^{s+1}} \cdot \frac{(1+k/(s+N))^{N-1}}{N^k} < \\ < M_1 n \frac{(s+N)^{N-1}}{N^{s+1}} \left(\frac{e^{(N-1)/(s+N)}}{N}\right)^k < \lambda M_1 \left(\frac{e^{(N-1)/(s+N)}}{N}\right)^k. \end{aligned} \tag{16}$$

Выберем $s_0 = \max\{s', 2N\}$. Тогда

$$\frac{e^{(N-1)/(s+N)}}{N} \leqslant \frac{e^{(N-1)/(3N)}}{N} < \frac{e^{1/3}}{3}. \tag{17}$$

Подставив оценки (16) и (17) в (15), для любых $n \geqslant n_0$ и $s \geqslant s_0$ получим

$$\begin{aligned} \exp\left\{\sum_{k=1}^{2s-1} \lambda_k\right\} < \exp\left\{\lambda M_1 \sum_{k=1}^{2s-1} \left(\frac{e^{1/3}}{3}\right)^k\right\} < \exp\left\{\lambda M_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{1/3}}{3}\right)^k\right\} = \\ = \exp\left\{\lambda M_1 \frac{e^{1/3}}{3-e^{1/3}}\right\} < \infty. \end{aligned} \tag{18}$$

Применяя (3) и (18) при условиях теоремы 2, получаем

$$\begin{aligned} d\left(L\left(\xi_n\left(s\right)\right), CP\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, 0, 0, \ldots\right)\right) \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{2s-1} \lambda_k\right\} \frac{n\left(6s-5\right)}{\left(s+N\right)^2 N^{2s-2}} \left(\left(\begin{array}{c} s+N \\ s \end{array}\right)\right)^2 = \mathrm{O}\left(\frac{ns\left(s+N\right)^{2N-2}}{N^{2s-2}}\right) = \mathrm{o}\left(1\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Сформулируем лемму из [8] для оценки расстояния по вариации между двумя сложными распределениями Пуассона.

Лемма 1. Пусть $\Lambda^{(1)} = \left(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots\right)$ и $\Lambda^{(2)} = \left(\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots\right)$, причём сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(1)} < \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} < \infty$. Тогда $d\left(CP\left(\Lambda^{(1)}\right), CP\left(\Lambda^{(2)}\right)\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}\right|$.

Воспользуемся леммой 1 и оценим расстояние по вариации между распределениями $CP\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, 0, 0, \ldots\right)$ и $CP\left(\lambda\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-1}\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-2}\left(1-N^{-1}\right), \ldots\right)$:

$$\begin{aligned} d\left(CP\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1},\ 0, 0, \ldots\right), CP\left(\lambda\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-1}\left(1-N^{-1}\right), \ldots\right)\right) \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_k - \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right)\right|. \end{aligned} \tag{20}$$

Теперь докажем, что сумма в правой части (20) стремится к 0 при условиях теоремы 2. Зададим произвольное малое положительное число $\varepsilon > 0$ и выберем некоторое натуральное число $k'\left(\varepsilon\right)$, удовлетворяющее условиям

$$\sum_{k=k'(\varepsilon)+1}^{\infty} \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right) < \frac{\varepsilon}{3}; \tag{21}$$

$$\sum_{k=k'(\varepsilon)+1}^{\infty} \lambda_k < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{22}$$

Условие (21) выполнить легко: надо взять достаточно большое $k'(\varepsilon)$. Докажем условие (22). Из (16) и (17) следует, что существуют такие числа n_0, $s_0 < \infty$, что для всех $n \geqslant n_0$, $s \geqslant s_0$ выполнено неравенство

$$\lambda_k < \lambda M_1 \left(\frac{e^{1/3}}{3}\right)^k.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{2s-1} k\lambda_k < \lambda M_1 \sum_{k=1}^{2s-1} \left(\frac{e^{1/3}}{3}\right)^k < \lambda M_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{1/3}}{3}\right)^k = \frac{27\lambda M_1}{e^{1/3}(1-e^{1/3})^2} \equiv M_2. \tag{23}$$

Для выполнения условия (22) воспользуемся соотношением (23):

$$\sum_{k=k'(\varepsilon)+1}^{\infty} \lambda_k < \frac{1}{k'(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{2s-1} k\lambda_k < \frac{M_2}{k'(\varepsilon)}.$$

Следовательно, взяв достаточно большое число $k'(\varepsilon)$, получим выполнение (22). Осталось заметить, что при условиях теоремы 2

$$\sum_{k=1}^{k'(\varepsilon)} \left|\lambda_k - \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{k'(\varepsilon)} \lambda_k + \sum_{k=1}^{k'(\varepsilon)} \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right) \to 0$$

как сумма фиксированного числа величин, стремящихся к нулю. Значит, начиная с некоторого момента,

$$\sum_{k=1}^{k'(\varepsilon)} \left|\lambda_k - \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{24}$$

Из (21), (22) и (24) следует, что, начиная с некоторого момента,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_k - \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k'(\varepsilon)} \left|\lambda_k - \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right)\right| + \sum_{k=k'(\varepsilon)+1}^{\infty} \lambda_k + \sum_{k=k'(\varepsilon)+1}^{\infty} \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right) < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ это означает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_k - \lambda N^{-k+1}\left(1-N^{-1}\right)\right| \to 0. \tag{25}$$

Используя (20) и (25), получаем, что при условиях теоремы 2

$$d\left(CP\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, 0, 0, \ldots\right), CP\left(\lambda\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-1}\left(1-N^{-1}\right), \ldots\right)\right) \to 0. \tag{26}$$

Наконец, из (19) и (26) в силу неравенства треугольника для расстояния по вариации при условиях теоремы 2 следует, что

$$d\left(L\left(\xi_n(s)\right), CP\left(\lambda\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-1}\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-2}\left(1-N^{-1}\right), \ldots\right)\right) \to 0,$$

а значит, следует и сходимость $L\left(\xi_n(s)\right)$ к сложному пуассоновскому распределению $CP\left(\lambda\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-1}\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-2}\left(1-N^{-1}\right), \ldots\right)$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров В. Л.* Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1944. Т. 8. Вып. 1. С. 3–48.
2. *Wolfowitz J.* Asymptotics distribution of runs up and down // Ann. Math. Statist. 1944. V. 15. P. 163–172.
3. *David F. N. and Barton D. E.* Combinatorial Chance. N.Y.: Hafner Publishing Co., 1962.
4. *Pittel B. G.* Limiting behavior of a process of runs // Ann. Probab. 1981. V. 9. No. 1. P. 119–129.
5. *Chryssaphinou O., Papastavridis S., and Vaggelatou E.* Poisson approximation for the non-overlapping appearances of several words in Markov chains // Combinatorics, Probability and Computing. 2001. V. 10. No. 4. P. 293–308.
6. *Меженная Н. М.* Многомерная нормальная теорема для числа монотонных серий заданной длины в равновероятной случайной последовательности // Обозр. прикл. промышл. матем. 2007. Т. 14. Вып. 3. С. 503–505.
7. *Roos V.* Stein's method for compound Poisson approximation: the local approach // Ann. Appl. Probab. 1994. V. 4. No. 4. P. 1177–1187.
8. *Bollobas B, Janson S, and Riordan O.* Sparse random graphs with clustering // Random Structures and Algorithms. 2011. V. 38. P. 269–323.

REFERENCES

1. *Goncharov V. L.* Iz oblasti kombinatoriki [From the combinatorics]. Proc. of the Academy of Sciences USSR, Ser. Math., 1944, vol. 8, iss. 1, pp. 3–48. (in Russian)
2. *Wolfowitz J.* Asymptotics distribution of runs up and down. Ann. Math. Statist., 1944, vol. 15, pp. 163–172.
3. *David F. N. and Barton D. E.* Combinatorial Chance. N.Y., Hafner Publishing Co., 1962.
4. *Pittel B. G.* Limiting behavior of a process of runs. Ann. Probab., 1981, vol. 9, no. 1, pp. 119–129.
5. *Chryssaphinou O., Papastavridis S., and Vaggelatou E.* Poisson approximation for the non-overlapping appearances of several words in Markov chains. Combinatorics, Probability and Computing, 2001, vol. 10, no. 4, pp. 293–308.
6. *Mezhennaya N. M.* Mnogomernaya normal'naya teorema dlya chisla monotonnykh seriy zadannoy dliny v ravnoveroyatnoy sluchaynoy posledovatel'nosti [Multivariate normal theorem for the number of monotonous series of predetermined length in an equiprobable random sequence]. Obozr. Prikl. Promyshl. Matem., 2007, vol. 14, iss. 3, pp. 503–505. (in Russian)
7. *Roos V.* Stein's method for compound Poisson approximation: the local approach. Ann. Appl. Probab., 1994, vol. 4, no. 4, pp. 1177–1187.
8. *Bollobas B, Janson S, and Riordan O.* Sparse random graphs with clustering. Random Structures and Algorithms, 2011, vol. 38, pp. 269–323.