ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Математика и механика № 3(35)

УДК 517.952
DOI 10.17223/19988621/35/3

И.В. Рахмелевич

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Проведён анализ решений многомерного уравнения в частных производных первого порядка, содержащего степенные функции от производных. Для исследования данного уравнения применяется метод двухуровневого функционального разделения переменных (РП), являющийся новым вариантом метода функционального РП. В результате получены новые решения рассматриваемого уравнения в неявной форме, содержащие некоторые обобщенные полиномы от независимых переменных.

Ключевые слова: *уравнение в частных производных, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность.*

Теория нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка является важной составной частью современной математической физики [1, 2]. Одним из наиболее эффективных методов решения нелинейных уравнений в частных производных является метод разделения переменных (РП) [1, 3, 4]. В работах [3, 4] подробно изложены основы метода и его современные варианты (обобщенное и функциональное РП). В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвященных исследованию нелинейных уравнений указанным методом. Так, в работах [5–7] методом РП исследованы некоторые многомерные уравнения в частных производных, включающие однородные и мультиоднородные функции. В [8–11] с помощью указанного метода были получены решения некоторых нелинейных уравнений эллиптического и гиперболического типов. В настоящей работе предлагается новый вариант метода – двухуровневое функциональное разделение переменных. На примере многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями проиллюстрированы возможности метода и получены новые точные решения указанного уравнения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение в частных производных первого порядка относительно неизвестной функции $u(x_1,...,x_N)$:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} = \varphi(u). \tag{1}$$

В справочнике [1, с. 402] приведен полный интеграл более общего уравнения с правой частью вида $\varphi(u)\prod_{n=1}^{N} f(x_n)$, который можно получить методом функционального РП. Это уравнение может быть сведено к уравнению (1) с помощью замены независимых переменных, при этом указанный полный интеграл сводится к решению типа бегущей волны:

$$\int \frac{du}{\left[\varphi(u)\right]^{1/\beta_\Sigma}} = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n + c_0 , \qquad (2)$$

где $\beta_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} \beta_n$.

Целью данной работы является нахождение новых решений уравнения (1), имеющих более сложную зависимость от переменных x_n, с использованием метода функционального РП.

2. Двухуровневое функциональное разделение переменных

Для нахождения решений уравнения (1) более сложного вида используем следующее выражение для искомой функции $u(x_1,...,x_N)$:

$$u(x_1,...,x_N) = U\left\{\sum_{k=1}^{K} V_k\left(\sum_{n\in I_k} X_n(x_n)\right)\right\}. \qquad (3)$$

Предполагается, что множество значений $I = \{1,...,N\}$ индекса n, нумерующего независимые переменные, разбито на K непересекающихся подмножеств I_k $(k \in \Xi)$. Здесь и далее $\Xi = \{1,\dots,K\}$ – множество значений индекса k; $U(y)$, $V_k(z_k)$, $X_n(x_n)$ – неизвестные функции, подлежащие определению в дальнейшем. Также будем использовать обозначения:

$$y = \sum_{k=1}^{K} V_k\left(z_k\right), \quad z_k = \sum_{n\in I_k} X_n(x_n) . \qquad (4)$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (1) и учитывая (4), приходим к соотношению

$$\prod_{k=1}^{K}\left\{[V_k'(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{n\in I_k}[X_n'(x_n)]^{\beta_n}\right\} = \frac{\varphi(U(y))}{[U'(y)]^{\beta_\Sigma}} , \qquad (5)$$

где $\beta_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} \beta_n$, $\beta_{\Sigma k} = \sum_{n\in I_k} \beta_n$. Далее всюду будем предполагать, что выполнены условия

$$\beta_\Sigma \neq 0 , \quad \beta_{\Sigma k} \neq 0 \ (k \in \Xi) .$$

Так как правая часть уравнения (5) является функцией от y, то, учитывая первую из формул (4), легко видеть, что выражение в фигурных скобках в левой части (5) должно зависеть только от z_k. Тогда из уравнения (5) следует

$$\prod_{k=1}^{K} \psi_k(z_k) = \Phi(y) ; \qquad (6)$$

$$\psi_k(z_k) = [V_k'(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{n\in I_k}[X_n'(x_n)]^{\beta_n}, \qquad \Phi(y) = \frac{\varphi(U(y))}{[U'(y)]^{\beta_\Sigma}} . \qquad (7)$$

Пусть $l \in \Xi$ – некоторое значение индекса k. Дифференцируя по z_l уравнение (6) и учитывая первую из формул (4), получаем

$$\frac{\psi_l'(z_l)}{\psi_l(z_l)V_l'(z_l)}\prod_{k=1}^{K}\psi_k(z_k) = \Phi'(y). \tag{8}$$

Тогда, из соотношений (6) и (8) следует

$$\frac{\psi_l'(z_l)}{\psi_l(z_l)V_l'(z_l)} = \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)}. \tag{9}$$

Так как l было выбрано произвольно, то соотношение (9) должно выполняться при всех $l \in \Xi$.

С учетом первого из выражений (4), отсюда следует

$$\frac{\psi_k'(z_k)}{\psi_k(z_k)V_k'(z_k)} = \mu, \quad \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \mu, \tag{10}$$

причем первое из уравнений (10) должно удовлетворяться при всех $k \in \Xi$ (здесь произведена замена индекса $l \to k$), μ – некоторая постоянная.

Далее рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\mu = 0$.

Тогда, используя второе из уравнений (10), с учетом выражения (7) для $\Phi(y)$, получаем следующее:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = C_0 y + D_0 \tag{11}$$

или, с учетом выражения (4) для y :

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = C_0 \sum_{k=1}^{K} V_k(z_k) + D_0. \tag{12}$$

В формулах (11) , (12) C_0, D_0 – произвольные постоянные.

Целью дальнейшего анализа является нахождение функций $V_k(z_k)$, $X_n(x_n)$.

Первую из формул (7) перепишем в виде

$$\prod_{n \in I_k} [X_n'(x_n)]^{\beta_n} = \Psi_k(z_k), \tag{13}$$

где

$$\Psi_k(z_k) = \frac{\psi_k(z_k)}{[V_k'(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}}}. \tag{14}$$

Пусть $m \in I_k$ – некоторое значение индекса n. Продифференцируем (13) по x_m, откуда получаем

$$\beta_m \frac{X_m''(x_m)}{[X_m'(x_m)]^2} \prod_{n \in I_k} [X_n'(x_n)]^{\beta_n} = \Psi_k'(z_k). \tag{15}$$

Подставляя в (15) выражение для $\Psi_k(z_k)$ из (13), находим

$$\beta_m \frac{X_m''(x_m)}{[X_m'(x_m)]^2} = \frac{\Psi_k'(z_k)}{\Psi_k(z_k)}. \tag{16}$$

Поскольку при заданном k соотношение (16) должно выполняться для всех $m \in I_k$, то функции $X_m(x_m)$, $\Psi_k(z_k)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\beta_m \frac{X''_m(x_m)}{[X'_m(x_m)]^2} = \lambda_k, \quad \frac{\Psi'_k(z_k)}{\Psi_k(z_k)} = \lambda_k, \tag{17}$$

где λ_k – некоторые постоянные. Рассмотрим отдельно два случая.

1) $\lambda_k = 0.$ Тогда при данном k и для всех $n \in I_k$ из уравнений (17) с учетом (13) получаем

$$X_n(x_n) = c_n x_n + c_{n0}, \quad \Psi_k(z_k) = C_k \equiv \prod_{n \in I_k} c_n^{\beta_n}. \tag{18}$$

Из первого уравнения (10) для данного случая следует

$$\psi_k(z_k) = A_k = \text{const}. \tag{19}$$

Тогда из формул (14), (18) и (19) получим

$$[V'_k(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} = \frac{A_k}{C_k}. \tag{20}$$

При $\beta_{\Sigma k} \neq 0$ решением уравнения (20) является линейная функция

$$V_k(z_k) = \left(\frac{A_k}{C_k}\right)^{1/\beta_{\Sigma k}} (z_k - z_{k0}). \tag{21}$$

2) $\lambda_k \neq 0.$ Решая уравнения (17), находим

$$X_n = -\frac{\beta_n}{\lambda_k} \ln\left[-\frac{\lambda_k}{\beta_n} c_n (x_n - x_{n0})\right]; \tag{22}$$

$$\Psi_k(z_k) = C_k \exp(\lambda_k z_k). \tag{23}$$

Из соотношений (19), (22), (23), (14) и второй формулы (4) можно получить уравнение для $V_k(z_k)$:

$$[V'_k(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \exp(\lambda_k z_k) = \frac{A_k}{C_k}. \tag{24}$$

При $\beta_{\Sigma k} \neq 0$ решением уравнения (24) является функция

$$V_k(z_k) = -\frac{\beta_{\Sigma k}}{\lambda_k} \left(\frac{A_k}{C_k}\right)^{1/\beta_{\Sigma k}} \exp\left(-\frac{\lambda_k}{\beta_{\Sigma k}} z_k\right). \tag{25}$$

Учитывая выражение (22) и вторую из формул (4), преобразуем (25) к виду

$$V_k = A_k^{1/\beta_{\Sigma k}} \prod_{n \in I_k} \left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_n}(x_n - x_{n0})\right]^{\beta_n / \beta_{\Sigma k}}. \tag{26}$$

Введем множества

$$\Xi_1 = \{k : | k \in \Xi, \lambda_k = 0\},$$

$$\Xi_2 = \{k : | k \in \Xi, \lambda_k \neq 0\}.$$

Тогда из соотношений (12), (22), (26), с учетом (4), получаем решение уравнения (1) в неявной форме для случая $\mu = 0$:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = C_0 \left\{ \sum_{k\in\Xi_1} \tilde{A}_k \left(\sum_{n\in I_k} c_n x_n - z_{k0} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k\in\Xi_2} A_k^{1/\beta_{\Sigma k}} \prod_{n\in I_k} \left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_n} (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n/\beta_{\Sigma k}} \right\} + D_0, \tag{27}$$

где $\tilde{A}_k = \left(\dfrac{A_k}{C_k} \right)^{1/\beta_{\Sigma k}}$.

Вводя новые произвольные постоянные по формулам

$$b_n\big|_{n\in I_k} = C_0\, c_n \tilde{A}_k\,, \quad B_k = C_0 A_k^{1/\beta_{\Sigma k}}\,, \quad B_0 = -C_0 \sum_{k\in\Xi_1} z_{k0} \tilde{A}_k + D_0\,,$$

решение (27) представим в более простом виде:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = \sum_{k\in\Xi_1} \sum_{n\in I_k} b_n x_n + \sum_{k\in\Xi_2} B_k \prod_{n\in I_k} \left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_n} (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n/\beta_{\Sigma k}} + B_0\,. \tag{28}$$

Подставив решение (28) в уравнение (1), находим, что постоянные b_n, B_k должны удовлетворять условию

$$\prod_{k\in\Xi_1} \prod_{n\in I_k} b_n^{\beta_n} \cdot \prod_{k\in\Xi_2} B_k^{\beta_{\Sigma k}} = 1\,. \tag{29}$$

В частном случае, когда $\Xi_1 = \Xi, \Xi_2 = \varnothing$, второй член в правой части (28) отсутствует и решение (28) совпадает с известным решением (2).

Случай 2. $\mu \neq 0$.

Тогда, решая второе из уравнений (10) и используя выражение (7) для $\Phi(y)$, получаем следующее:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = -\frac{\beta_\Sigma}{\mu} C_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\beta_\Sigma} y \right) + D_0 \tag{30}$$

или, с учетом выражения (4) для y:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = -\frac{\beta_\Sigma}{\mu} C_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\beta_\Sigma} \sum_{k=1}^{K} V_k(z_k) \right) + D_0\,. \tag{31}$$

В формулах (30), (31) C_0, D_0 – произвольные постоянные.

Далее, для нахождения функций $V_k(z_k)$, аналогично приведенным выше рассуждениям для $\mu = 0$, необходимо различать два случая.

а) $\lambda_k = 0$. Тогда, используя выражения (14) и (18), находим

$$\psi_k(z_k) = C_k\,[V_k'(z_k)]^{\beta_{\Sigma k}}. \tag{32}$$

Подставляя (32) в первое из уравнений (10), получаем уравнение для $V_k(z_k)$:

$$\frac{\beta_{\Sigma k} V_k''(z_k)}{[V_k'(z_k)]^2} = \mu\,. \tag{33}$$

Решение уравнения (33) запишем в виде

$$V_k(z_k) = -\frac{\beta_{\Sigma k}}{\mu} \ln (z_k - z_{k0}) - \ln V_{k0} . \tag{34}$$

При этом функции $X_n(x_n)$ определяются первой из формул (18).

б) $\lambda_k \neq 0$. Тогда из (23) и (14) получаем выражение

$$\psi_k(z_k) = C_k \left[V_k'(z_k)\right]^{\beta_{\Sigma k}} \exp (\lambda_k z_k) . \tag{35}$$

Подставляя (35) в первое из уравнений (10), получаем уравнение для $V_k(z_k)$:

$$\frac{\beta_{\Sigma k}}{V_k'(z_k)} \left(\frac{V_k''(z_k)}{V_k'(z_k)} + \frac{\lambda_k}{\beta_{\Sigma k}} \right) = \mu . \tag{36}$$

Решение уравнения (36) можно записать в виде

$$V_k(z_k) = -\frac{\beta_{\Sigma k}}{\mu} \ln \left\{ \frac{\mu}{\lambda_k} \left[\exp\left(-\frac{\lambda_k}{\beta_{\Sigma k}} (z_k - z_{k0}) \right) + V_{k0} \right] \right\} . \tag{37}$$

Функции $X_n(x_n)$ определяются формулой (22).

Для последующего преобразования решения (31), используя выражения (4) и (22), получим

$$\exp\left(-\frac{\lambda_k}{\beta_{\Sigma k}} (z_k - z_{k0}) \right) = \prod_{n \in I_k} \left[-\frac{\lambda_k}{\beta_n} c_n (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n / \beta_{\Sigma k}} . \tag{38}$$

Учитывая (37), (38), решение (31) преобразуем к виду

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = B_1 \prod_{k \in \Xi_1} \left(\sum_{n \in I_k} c_n x_n - z_{k0} \right)^{\beta_{\Sigma k} / \beta_\Sigma} \times$$

$$\times \prod_{k \in \Xi_2} \left\{ B_{k0} + B_{k2} \prod_{n \in I_k} \left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_n} (x_n - x_{n0}) \right]^{\beta_n / \beta_{\Sigma k}} \right\}^{\beta_{\Sigma k} / \beta_\Sigma} . \tag{39}$$

В состав решения (39) входят произвольные постоянные $B_1, B_{k0}, B_{k2}, c_n, z_{k0}$, x_{n0}. Подставив это решение в уравнение (1), после некоторых преобразований получаем условие, которому должны удовлетворять произвольные постоянные:

$$B_1^{\beta_\Sigma} \cdot \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_\Sigma} \right)^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{k \in \Xi_1} C_k \cdot \prod_{k \in \Xi_2} B_k^{\beta_{\Sigma k}} = 1 , \tag{40}$$

где C_k выражаются через c_n по формуле (18).

Отметим также, что формула (39) описывает семейство решений, которые отличаются между собой как значениями произвольных постоянных, так и множествами I_k $(k = 1, \ldots, K)$, Ξ_j $(j = 1, 2)$; аналогичное утверждение справедливо в отношении формулы (28).

В частном случае, когда $\Xi_1 = \Xi$, $\Xi_2 = \varnothing$, второй сомножитель в правой части (39) отсутствует и это решение принимает более простой вид:

$$\int \frac{du}{[\varphi(u)]^{1/\beta_\Sigma}} = B_1 \prod_{k=1}^{K} \left(\sum_{n \in I_k} c_n x_n - z_{k0} \right)^{\beta_{\Sigma k} / \beta_\Sigma} . \tag{41}$$

Если при этом K=1, то (41) сводится к приведенному выше известному решению (2).

Заключение

Таким образом, в данной работе предложен метод двухуровневого функционального разделения переменных для уравнений в частных производных. Данный метод применяется к решению многомерного уравнения в частных производных первого порядка (1) со степенными нелинейностями от производных. Получены новые решения указанного уравнения в неявном виде, определяемые формулами (28) и (39), содержащие обобщенные полиномы от независимых переменных. С помощью подстановки решений (28) и (39) в уравнение (1) получены условия (29) и (40), которым должны удовлетворять входящие в эти решения произвольные постоянные. Результаты данной работы могут быть обобщены на другие типы уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайцев В.Ф.*, *Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.
2. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с.
3. *Полянин А.Д.*, *Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
4. *Полянин А.Д.*, *Журов А.И.* Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 606–611.
5. *Рахмелевич И.В.* О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 37–44.
6. *Рахмелевич И.В.* Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 42–50.
7. *Рахмелевич И.В.* О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. № 4–1. С. 374–381.
8. *Рахмелевич И.В.* О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 12–19.
9. *Miller J.* (*Jr.*), *Rubel L.A.* Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // Journal of Physics A. 1993. V. 26. P. 1901–1913.
10. *Zhdanov R.Z.* Separation of variables in the non-linear wave equation // Journal of Physics A. 1994. V. 27. P. L291–L297.
11. *Grundland A.M.*, *Infeld E.* A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions // Journal of Mathematical Physics. 1992. V. 33. No 7. P. 2498–2503.

Статья поступила 13.04.2015 г.

Rakhmelevich I.V. ON SOME NEW SOLUTIONS OF THE MULTI-DIMENSIONAL FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH POWER-LAW NON-LINEARITIES

DOI 10.17223/19988621/35/3

Investigations of nonlinear partial differential equations of the first order with an arbitrary number of independent variables are an important part of up-to-date mathematical physics. For many equations of this class, only solutions of the simplest kind are known, in particular, solutions of the travelling wave type. The present work is devoted to finding solutions of a more complex form for the multi-dimensional equation of the first order with power-law non-linearity in derivatives.

To solve this problem, in this paper we propose a new variant of the method of separation of variables – the method of two-level functional separation of variables. The characteristic feature of this method is that the desired function depends on a superposition of functions of the first and second levels of one variable, and these functions are determined as the result of solving some ordinary differential equations.

Based on the method proposed in the paper, new exact solutions of the considered equation are obtained in an implicit form. The solutions contain some generalized polynomials of independent variables. Conditions of the existence of these solutions are specified. The results of this work can be generalized to other non-linear first order equations and equations of higher orders with many independent variables.

Keywords: partial differential equation, functional separation of variables, power-law non-linearity.

RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof.,
Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

REFERENCES

1. Zaytsev V.F., Polyanin A.D. *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka*. Moskow, Fizmatlit Publ., 2003. (in Russian)
2. Kamke E. *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka*. Moskow, Nauka Publ., 1966. 260 p. (in Russian)
3. Polyanin A.D., Zaytsev V.F. *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya*. Moskow, Fizmatlit Publ., 2002. 432 p. (in Russian)
4. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Obobshchennoe i funktsional'noe razdelenie peremennykh v matematicheskoy fizike i mekhanike. *Doklady RAN*, 2002, vol. 382, no. 5, pp. 606–611. (in Russian)
5. Rakhmelevich I.V. O primenenii metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, soderzhashchim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 3(23), pp. 37–44. (in Russian)
6. Rakhmelevich I.V. Ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki, soderzhashchikh mul'tiodnorodnye funktsii ot proizvodnykh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 1(27), pp. 42–50. (in Russian)
7. Rakhmelevich I.V. O resheniyakh mnogomernogo uravneniya Klero s mul'tiodnorodnoy funktsiey ot proizvodnykh. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika, mekhanika, informatika*, 2014, vol. 14, no. 4–1, pp. 374–381. (in Russian)
8. Rakhmelevich I.V. O dvumernykh giperbolicheskikh uravneniyakh so stepennoy nelineynost'yu po proizvodnym. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 1(33), pp. 12–19. (in Russian)
9. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Journal of Physics A*, 1993, vol. 26, pp. 1901–1913.
10. Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. *Journal of Physics A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.
11. Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions. *Journal of Mathematical Physics*, 1992, vol. 33, no. 7, pp. 2498–2503.