

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.1

КОЛИЧЕСТВО НЕДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОРИЕНТАЦИЯМИ ПАЛЬМ

А. В. Жаркова

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Рассматриваются конечные динамические системы двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм. Данной системе изоморфна конечная динамическая система (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, состояниями которой являются все возможные двоичные векторы размерности $s + c$. Приведены формулы для подсчёта количества недостижимых и, как следствие, количества достижимых состояний в рассматриваемых динамических системах, представлены соответствующие статистические таблицы для систем с различными параметрами s и c .

Ключевые слова: *конечная динамическая система, недостижимое состояние, пальма, сверхстройное (звездообразное) дерево.*

DOI 10.17223/20710410/29/5

NUMBER OF INACCESSIBLE STATES IN FINITE DYNAMIC SYSTEMS OF BINARY VECTORS ASSOCIATED WITH PALMS ORIENTATIONS

A. V. Zharkova

Saratov State University, Saratov, Russia

E-mail: VAnastasiyaV@gmail.com

Finite dynamic systems of binary vectors associated with palms orientations are considered. A palm is a tree which is a union of paths having a common end vertex and all these paths, except perhaps one, have the length 1. States of a dynamic system (P_{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, are all possible orientations of a palm with trunk length s and leafs number c , and evolutionary function γ transforms the given palm orientations by reversing all arcs that enter into sinks. The following formula for the number of inaccessible states in the considered dynamic systems is proved:

$$2^{s+c} - 2^s - 2^{s-3} + \Omega(-1) - 2\Omega(1) + \Omega(3), \text{ where } \Omega(x) = \sum_{i=1}^{[(s-x)/4]} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s-x-4i} \cdot C_{s-x-3i}^i.$$

As a corollary, the number of accessible states equals $2^s + 2^{s-3} - \Omega(-1) + 2\Omega(1) - \Omega(3)$. The corresponding statistical tables for systems with different parameters s and c are given.

Keywords: *finite dynamic system, inaccessible state, palm, starlike tree.*

Введение

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. Здесь можно выделить следующие три основные конструкции, получившие и самостоятельное значение в теории графов: минимальное расширение графа [1, 2], T-неприводимое расширение графа [3], бесконтурный граф с заданной структурой источников и стоков [4]. В модели [4] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связанных ориентированных графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [5, 6]) — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса. В указанных работах по отказоустойчивости графовых систем основные результаты получены для систем, в основе которых лежат цепи, циклы и частные типы деревьев. К числу деревьев, для которых найдено описание как минимальных, так и T-неприводимых расширений, относятся пальмы [2, 3]. Дерево называется *пальмой*, если оно является объединением цепей, имеющих общую концевую вершину, причём все эти цепи, за исключением, быть может, одной, имеют длину 1. Пальма является частным случаем *сверхстройного (звездобразного) дерева* (дерево, в котором в точности одна вершина имеет степень больше 2). В настоящей работе пальмы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*; $\delta : S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур, в свою очередь, называются предельными циклами или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров без проведения динамики. К их числу относятся *ветвление* (количество непосредственных предшественников данного состояния) и, в частности, свойство *недостижимости* состояния (то есть когда состояние имеет нулевое ветвление). Автором составлены программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с некоторыми типами графов, в частности [7]; описаны недостижимые состояния конечных динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с графами [8]; подсчитаны количества недостижимых состояний в системах, связанных с ориентациями цепей и циклов [9].

В данной работе предлагается формула для подсчёта количества недостижимых состояний в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм.

1. Описание динамической системы

Пусть пальма p образована объединением цепей p_0, p_1, \dots, p_c , имеющих общую концевую вершину. Будем считать, что p_0 имеет среди этих цепей максимальную дли-

ну $s \geq 1$. Назовём p_0 *стволом пальмы* p , цепи p_1, p_2, \dots, p_c , имеющие длину 1, — её *листьями*, а их совокупность — *кроной*. Будем говорить, что p является пальмой типа (s, c) . Пальма с точностью до изоморфизма определяется своим типом. При $c = 1$ пальма вырождается в цепь (см., например, [6, 9]), поэтому далее не будем рассматривать этот случай, считая $c > 1$.

Пусть имеется пальма p типа (s, c) , $s + c = n$. Перенумеруем рёбра пальмы p , как показано на рис. 1.

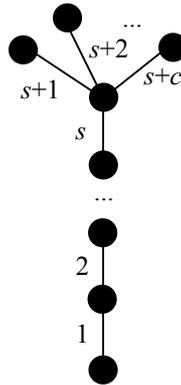


Рис. 1. Нумерация рёбер пальмы

Придадим каждому ребру пальмы произвольную ориентацию и сопоставим полученному ориентированному графу p n -мерный двоичный вектор $v(p)$, полагая его i -ю компоненту равной 1, если i -е ребро пальмы p ориентировано от корня (начальной вершины ствола), и 0 — в противном случае. Теперь можно последовательно выписать получившуюся последовательность из нулей и единиц: $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$, где v_i , $0 < i \leq s + c$, принимает значение 0 или 1 в зависимости от ориентации i -го ребра пальмы (для упрощения будем работать с двоичным вектором именно в такой записи). Таким образом, каждой ориентации пальмы типа (s, c) сопоставляется n -мерный двоичный вектор, где $n = s + c$. В свою очередь, каждый такой вектор $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$ однозначно определяет некоторую ориентацию пальмы $p(v)$ типа (s, c) . Таким образом, между множеством P_{s+c} , $s > 0$, $c > 1$, всевозможных ориентированных пальм типа (s, c) указанного вида и множеством B^{s+c} , $s > 0$, $c > 1$, всех двоичных векторов размерности $n = s + c$ указанного вида устанавливается взаимное однозначное соответствие. В дальнейшем ориентации пальмы для простоты также будем называть пальмами, часть $v_1 \dots v_s$ вектора v будем называть *стволом вектора* v , а $v_{s+1} \dots v_{s+c}$ — его *кроной*.

Опишем конечную динамическую систему ориентаций (s, c) -пальмы p на языке двоичных векторов. Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c} \in B^{s+c}$. Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\gamma(v) = v'$, полученном путём одновременного применения следующих правил:

- 1) если $v_1 = 0$, то $v'_1 = 1$;
- 2) если $v_i = 1$ и $v_{i+1} = 0$ для некоторого $0 < i < s$, то $v'_i = 0$ и $v'_{i+1} = 1$;
- 3) если $v_i = 1$ для некоторого $s < i \leq s + c$, то $v'_i = 0$;
- 4) если $v_s = 1$ и $v_i = 0$ для всех $s < i \leq s + c$, то $v'_s = 0$ и $v'_i = 1$ для всех $s < i \leq s + c$;
- 5) других отличий между v и $\gamma(v)$ нет.

Например, на рис. 2 показана эволюция вектора 011.11 в динамической системе (B^{3+2}, γ) .

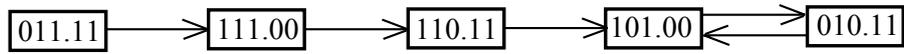


Рис. 2. Эволюция состояния 011.11 в динамической системе (B^{3+2}, γ)

Пусть теперь имеется n -рёберная (s, c) -пальма. На языке ориентаций пальм эволюция динамической системы вводится следующим образом: если дана некоторая ориентированная пальма $p \in P_{s+c}$, то её динамическим образом $\gamma(p)$ является пальма, получаемая из p одновременным превращением всех стоков в источники. Напомним, что *стоком* в ориентированном графе называется вершина с нулевой степенью исхода, а *источником* — вершина с нулевой степенью захода. Это частный случай динамики бесконтурных связных ориентированных графов, введённой в [4]. Преобразования ориентаций пальм в динамической системе (P_{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, соответствуют эволюционным преобразованиям соотносимых им двоичных векторов в динамической системе (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, и обратно, а именно $v(\gamma(p)) = \gamma(v(p))$ [10]. Таким образом, динамические системы (B^{s+c}, γ) и (P_{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, изоморфны. Например, на рис. 3 изображены карты изоморфных динамических систем (B^{1+2}, γ) и (P_{1+2}, γ) .

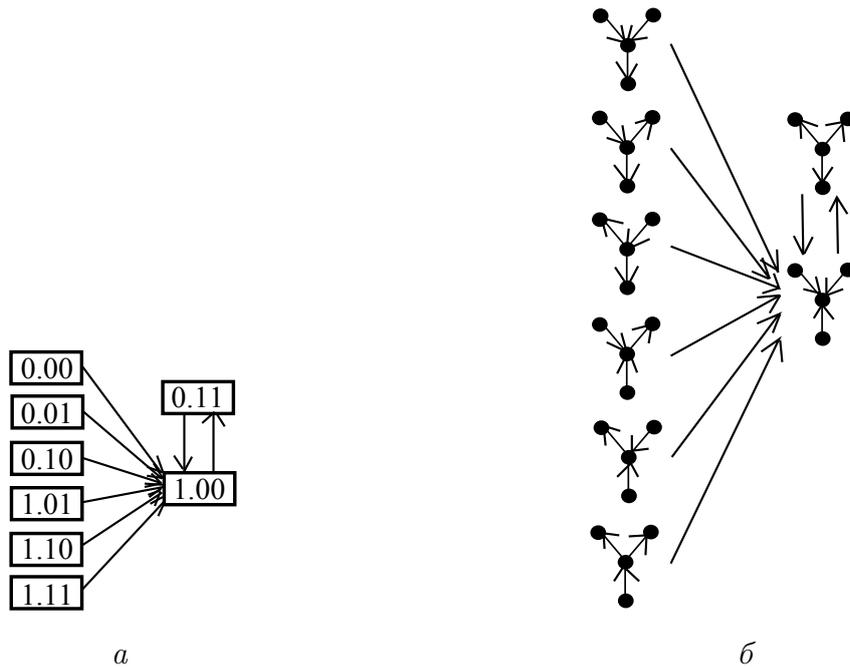


Рис. 3. Карты динамических систем: $a - (B^{1+2}, \gamma)$; $b - (P_{1+2}, \gamma)$

2. Недостижимые состояния динамической системы (B^{s+c}, γ)

Состояния, обладающие свойством недостижимости, будем называть *недостижимыми*, в ином случае — *достижимыми*.

В работе [8] получены следующие свойства недостижимости состояний динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$.

Теорема 1 [8]. Состояние $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$ динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, недостижимо тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $v_1 v_2 = 00$;
- 2) $v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} = 1100$ для некоторого $0 < i < s - 1$;
- 3) среди последних c компонент имеются различные;
- 4) $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$.

С помощью программы [7] получены данные по количеству недостижимых состояний (КНС) в динамической системе (B^{s+c}, γ) , представленные для $0 < s < 8$, $1 < c < 8$ в табл. 1.

Таблица 1

**Количество недостижимых состояний
в системах (B^{s+c}, γ) , $0 < s < 8$, $1 < c < 8$**

s	c					
	2	3	4	5	6	7
1	6	14	30	62	126	254
2	12	28	60	124	252	508
3	24	56	120	248	504	1 016
4	50	114	242	498	1 010	2 034
5	102	230	486	998	2 022	4 070
6	208	464	976	2 000	4 048	8 144
7	424	936	1 960	4 008	8 104	16 296

Выведем формулу для вычисления количества недостижимых состояний в динамической системе (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$.

Напомним формулу включений и исключений из комбинаторики, которая понадобится. Пусть даны непустые множества A_1, A_2, \dots, A_m . Обозначим через $k(A)$ количество элементов, принадлежащих множеству A . Тогда количество различных элементов в объединении множеств A_1, A_2, \dots, A_m подсчитывается по формуле

$$k(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = k(A_1) + k(A_2) + \dots + k(A_m) - k(A_1 \cap A_2) - k(A_1 \cap A_3) - \dots - k(A_1 \cap A_m) - k(A_2 \cap A_3) - \dots - k(A_2 \cap A_m) - \dots - k(A_{m-1} \cap A_m) + \dots + k(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots; \quad (1)$$

если число пересекающихся множеств нечётно, то слагаемое входит со знаком плюс, если чётно — со знаком минус.

Теорема 2. Количество недостижимых состояний в динамической системе (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, равно

$$\text{КНС}_{(s+c, \gamma)} = 2^{s+c} - 2^s - 2^{s-3} + \Omega(-1) - 2\Omega(1) + \Omega(3),$$

где

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor (s-x)/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s-x-4i} \cdot C_{s-x-3i}^i, \quad (2)$$

причём если коэффициенты или степени принимают отрицательные значения, то соответствующие выражения принимают значение 0.

Доказательство. В соответствии с видом недостижимых состояний обозначим множество недостижимых состояний, у которых $v_1v_2 = 00$, через A ; у которых $v_iv_{i+1}v_{i+2}v_{i+3} = 1100$ для некоторого i , $0 < i < s-1$, — через B ; у которых среди последних c компонент имеются различные — через C ; у которых $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$ — через D . Подсчитаем общее количество недостижимых состояний в системе, для чего применим формулу включений и исключений (1). Получим, что

$$\begin{aligned} \text{КНС}_{(s+c, \gamma)} &= k(A \cup B \cup C \cup D) = k(A) + k(B) + k(C) + k(D) - k(A \cap B) - \\ &- k(A \cap C) - k(A \cap D) - k(B \cap C) - k(B \cap D) - k(C \cap D) + k(A \cap B \cap C) + \\ &+ k(A \cap B \cap D) + k(A \cap C \cap D) + k(B \cap C \cap D) - k(A \cap B \cap C \cap D) = \quad (3) \\ &= k(A) + k(B) + k(C) + k(D) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(A \cap D) - k(B \cap C) - \\ &- k(B \cap D) + k(A \cap B \cap C) + k(A \cap B \cap D). \end{aligned}$$

1. Подсчитаем $k(A)$. Для состояний, у которых $v_1v_2 = 00$, получается, что две начальные компоненты зарезервированы, а остальные компоненты занимают $s+c-2$ позиции и принимают значения 0 или 1. Таким образом, $k(A) = 2^{s+c-2}$.

2. Подсчитаем $k(B)$. Рассмотрим подробно первые $s+1$ компонент состояния, при этом заметим, что остальные $c-1$ компонент состояния могут принимать значения 0 или 1, то есть $k(B) = 2^{c-1} \cdot k_1(B)$. В данном случае может присутствовать от одной до $\lfloor (s+1)/4 \rfloor$ тетраграмм 1100 включительно. Обозначим количество этих тетраграмм через l . Компоненты, занимаемые тетраграммами, зарезервированы, а остальные занимают $s+1-4l$ позиций и принимают значения 0 или 1. При этом эти l тетраграмм могут занимать различные позиции в состоянии и их количество определяется при помощи формулы числа сочетаний: $C_{s+1-4l+l}^l = C_{s+1-3l}^l$. Но при рассмотрении состояний, содержащих $l+1$ тетраграмм, некоторые тетраграммы уже были учтены, поэтому, применив формулу включений и исключений (1), получим

$$k_1(B) = k(B_{1100(1)}) - k(B_{1100(2)}) + k(B_{1100(3)}) - \dots$$

и так далее до $\lfloor (s+1)/4 \rfloor$ -го слагаемого включительно, где $B_{1100(x)}$ — множество недостижимых состояний, имеющих в составе рассматриваемых компонент x тетраграмм 1100. Тогда

$$k_1(B) = 2^{s+1-4} \cdot C_{s+1-3}^1 - 2^{s+1-8} \cdot C_{s+1-6}^2 + 2^{s+1-12} \cdot C_{s+1-9}^3 - \dots$$

и так далее до $\lfloor (s+1)/4 \rfloor$ -го слагаемого включительно. В итоге получается, что

$$k(B) = 2^{c-1} \sum_{i=1}^{\lfloor (s+1)/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s+1-4i} \cdot C_{s+1-3i}^i.$$

3. Подсчитаем $k(C)$. Для этого нужно исключить состояния, в кроне которых имеются только одинаковые компоненты, то есть имеем $k(C) = 2^s(2^c - 2)$.

4. Подсчитаем $k(D)$. Для состояний, у которых $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$, получается, что $c+1$ компонент зарезервированы, а остальные компоненты занимают $s-1$ позиций и принимают значения 0 или 1. Таким образом, $k(D) = 2^{s-1}$.

5. Подсчитаем $k(A \cap B)$. Для состояний, которые имеют в своём составе одновременно начальную бигramму 00 и у которых $v_iv_{i+1}v_{i+2}v_{i+3} = 1100$ для некоторого i , $0 < i < s-1$, получаем ситуацию, аналогичную рассмотренной в п. 2, только тут ещё постоянно зарезервированы первые две компоненты. Таким образом,

$$k(A \cap B) = 2^{c-1} \sum_{i=1}^{\lfloor (s-1)/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s-1-4i} \cdot C_{s-1-3i}^i.$$

6. Подсчитаем $k(A \cap C)$. Для состояний, у которых $v_1v_2 = 00$ и среди последних c компонент имеются различные, рассмотрим два случая:

а) $s = 1$. Получаем, что две первые компоненты состояния постоянно зарезервированы, а остальные компоненты принимают значения 0 или 1, однако нужно исключить ещё состояния, в стволе которых имеются только одинаковые компоненты. Так как $v_2 = 0$, нужно исключить единственное состояние, у которого $v_i = 0$ для $0 < i \leq s + c$. Таким образом, $k(A \cap C) = 2^{s+c-2} - 1$.

б) $s > 1$. Получаем, что две первые компоненты ствола состояния постоянно зарезервированы, а остальные компоненты принимают значения 0 или 1, однако нужно исключить ещё состояния, в кроне которых имеются только одинаковые компоненты. Таким образом, $k(A \cap C) = 2^{s-2}(2^c - 2) = 2^{s+c-2} - 2^{s-1}$.

В общем случае имеем $k(A \cap C) = 2^{s+c-2} - 2^{s-1}$.

7. Подсчитаем $k(A \cap D)$. Для состояний, у которых $v_1v_2 = 00$ и $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$, обязательно будет $s > 2$, при этом три компоненты ствола и все компоненты кроны зарезервированы, а остальные принимают значения 0 или 1. Тогда $k(A \cap D) = 2^{s-3}$.

8. Подсчитаем $k(B \cap C)$. Для состояний, у которых $v_iv_{i+1}v_{i+2}v_{i+3} = 1100$ для некоторого i , $0 < i < s - 1$, и у которых среди последних c компонент имеются различные, получаем ситуацию, аналогичную рассмотренной в п. 2, при этом компоненты кроны принимают значения 0 или 1, однако нужно учесть случай, когда в кроне все компоненты одинаковы. Таким образом,

$$k(B \cap C) = (2^{c-1} - 1) \sum_{i=1}^{\lfloor (s+1)/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s+1-4i} \cdot C_{s+1-3i}^i.$$

9. Подсчитаем $k(B \cap D)$. Для состояний, у которых $v_iv_{i+1}v_{i+2}v_{i+3} = 1100$ для некоторого i , $0 < i < s - 1$, и $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$, получаем ситуацию, аналогичную рассмотренной в п. 2, при этом последние $c + 1$ компоненты зарезервированы. Таким образом,

$$k(B \cap D) = \sum_{i=1}^{\lfloor (s-1)/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s-1-4i} \cdot C_{s-1-3i}^i.$$

10. Подсчитаем $k(A \cap B \cap C)$. Для состояний, у которых $v_1v_2 = 00$, $v_iv_{i+1}v_{i+2}v_{i+3} = 1100$ для некоторого i , $0 < i < s - 1$, и у которых среди последних c компонент имеются различные, получаем ситуацию, аналогичную рассмотренной в п. 8, при этом первые две компоненты зарезервированы. Таким образом,

$$k(A \cap B \cap C) = (2^{c-1} - 1) \sum_{i=1}^{\lfloor (s-1)/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s-1-4i} \cdot C_{s-1-3i}^i.$$

11. Подсчитаем $k(A \cap B \cap D)$. Для состояний, у которых $v_1v_2 = 00$, $v_iv_{i+1}v_{i+2}v_{i+3} = 1100$ для некоторого i , $0 < i < s - 1$, и $v_s = v_{s+1} = \dots = v_{s+c} = 1$, получаем ситуацию, аналогичную рассмотренной в п. 9, при этом первые две компоненты зарезервированы. Таким образом,

$$k(A \cap B \cap D) = \sum_{i=1}^{\lfloor (s-3)/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s-3-4i} \cdot C_{s-3-3i}^i.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3) и используя введённую функцию $\Omega(x)$ (2), имеем

$$\text{КНС}_{(s+c,\gamma)} = 2^{s+c-2} + 2^{c-1}\Omega(-1) + 2^s(2^c - 2) + 2^{s-1} - 2^{c-1}\Omega(1) - 2^{s+c-2} + 2^{s-1} - 2^{s-3} - (2^{c-1} - 1)\Omega(-1) - \Omega(1) + (2^{c-1} - 1)\Omega(1) + \Omega(3).$$

После приведения подобных слагаемых в итоге имеем, что количество недостижимых состояний в динамической системе (B^{s+c}, γ) , ассоциированной с (s, c) -пальмой, $s > 0$, $c > 1$, равно

$$\text{КНС}_{(s+c,\gamma)} = 2^{s+c} - 2^s - 2^{s-3} + \Omega(-1) - 2\Omega(1) + \Omega(3),$$

причём если коэффициенты или степени принимают отрицательные значения, то это значит, что при таких размерностях s и c просто не возникает подобных ситуаций, и эти выражения принимают значение 0. ■

В табл. 2 приведены данные по количеству недостижимых состояний в динамических системах (B^{s+c}, γ) для различных s и c , полученные с помощью вычислительных экспериментов.

Т а б л и ц а 2

Количество недостижимых состояний в системе (B^{s+c}, γ)

s	c			
	2	3	18	35
8	862	1886	67108702	8796093022046
9	1750	3798	134217430	17592186044118
10	3548	7644	268434908	35184372088284
11	7184	15376	536869904	70368744176656
12	14530	30914	1073739970	140737488353474
13	29358	62126	2147480238	281474976707246
14	59264	124800	4294961024	562949953415040
15	119536	250608	8589923056	1125899906831088
16	240926	503070	17179847966	2251799813664030
17	485262	1009550	34359699342	4503599627331470
18	976796	2025372	68719404956	9007199254669212
19	1965128	4062280	137438821448	18014398509349960
20	3951474	8145778	274877664114	36028797018721138
27	519578784	1056449696	35184354796704	4611686018410095776
35	135174079768	272613033240	9007196989867288	1180591620715146429720

Следствие 1. Количество достижимых состояний в динамической системе (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, равно

$$\text{КДС}_{(s+c,\gamma)} = 2^s + 2^{s-3} - \Omega(-1) + 2\Omega(1) - \Omega(3),$$

где $\Omega(x)$ задаётся формулой (2), причём если коэффициенты или степени принимают отрицательные значения, то соответствующие выражения принимают значение 0.

Согласно следствию 1, количество достижимых состояний в динамических системах (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, не зависит от c ; таким образом, в данных системах при равенстве s совпадает и количество достижимых состояний.

В табл. 3 приведены данные по количеству достижимых состояний (КДС) в динамических системах (B^{s+c}, γ) для $0 < s < 41$ и $c > 1$, полученные с помощью вычислительных экспериментов.

Таблица 3

**Количество достижимых состояний в системах (B^{s+c}, γ) ,
 $0 < s < 41, c > 1$**

s	$\text{КДС}_{(s+c, \gamma)}$						
1	2	11	1008	21	446634	31	197900192
2	4	12	1854	22	821488	32	363995202
3	8	13	3410	23	1510952	33	669491554
4	14	14	6272	24	2779074	34	1231386948
5	26	15	11536	25	5111514	35	2264873704
6	48	16	21218	26	9401540	36	4165752206
7	88	17	39026	27	17292128	37	7662012858
8	162	18	71780	28	31805182	38	14092638768
9	298	19	132024	29	58498850	39	25920403832
10	548	20	242830	30	107596160	40	47675055458

3. Дополнительные замечания

Рассмотрев последовательности для количества достижимых состояний в динамических системах (B^{s+c}, γ) , $0 < s < 41, c > 1$, введём функцию

$$f(k) = \sum_{i=1}^3 f(k-i), \quad k > 3; \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 8. \quad (4)$$

Первые 40 элементов рассматриваемой последовательности вычисляются с помощью рекуррентной формулы (4). Если эта закономерность распространяется на всю последовательность, то количество недостижимых состояний динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, можно подсчитать с помощью рекуррентного соотношения (4) по формуле

$$\text{КНС}_{(s+c, \gamma)} = 2^{s+c} - f(s).$$

Заметим, что соответствующие последовательности для количества достижимых состояний динамических систем (B^{s+c}, γ) , $0 < s < 41, c > 1$, и для количества достижимых состояний динамических систем (B^n, δ) [9], $1 < n < 42$, совпадают.

В онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей присутствует последовательность A135491 [11]: «2, 4, 8, 14, ..., 2264873704», элементы которой получаются по формуле $a(k) = a(k-1) + a(k-2) + a(k-3)$ для $3 < k < 36$ при $a(1) = 2, a(2) = 4, a(3) = 8$. Данная последовательность связана с задачей о бросании монеты [12] и подсчитывает количество способов подбросить монету k раз так, чтобы в результате в последовательности исходов не было четырёх подряд стоящих одинаковых исходов. Последовательность A135491 совпадает с последовательностями достижимых состояний в системах (B^{s+c}, γ) с 1 по 35 элемент (именно столько элементов приведено в онлайн-энциклопедии).

Проанализировав последовательность недостижимых состояний для $0 < s < 41$ и $1 < c < 41$, можно также заметить, что

$$\text{КНС}_{(s+c, \gamma)} = 2^{s+c-3} + \sum_{i=1}^3 \text{КНС}_{(s+c-i, \gamma)}$$

при соответствующих начальных значениях.

Заключение

В работе получены формулы для подсчёта количества недостижимых и, как следствие, количества достижимых состояний в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями палъм, приведены различные статистические данные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Курносова С. Г.* Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. 2004. Вып. 6. С. 113–125.
4. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
5. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425–439.
6. *Саллий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
7. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
8. *Жаркова А. В.* Аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями палъм // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3(25). С. 58–67.
9. *Жаркова А. В.* Недостижимые состояния в динамических системах, ассоциированных с цепями и циклами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4. С. 116–123.
10. *Власова А. В.* Динамические системы, определяемые палъмами // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. С. 57–60.
11. <https://oeis.org/A135491> — Sequence A135491. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей. Дата обращения: 04.08.2015.
12. <http://mathworld.wolfram.com/CoinTossing.html> — Coin tossing. Wolfram MathWorld: the web's most extensive mathematical resource. Дата обращения: 04.08.2015.

REFERENCES

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system. IEEE Trans. Comput., 1976, vol. C25, no. 9, pp. 875–884.
2. *Abrosimov M. B.* Grafovye modeli otkazoustoychivosti [Graph Models for Fault-Tolerance]. Saratov, SSU Publ., 2012. 192 p. (in Russian)
3. *Kurnosova S. G.* T-nepriwodimye rasshireniya dlya nekotorykh klassov grafov [T-irreducible extensions of some classes of graphs]. Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozheniy, 2004, iss. 6, pp. 113–125. (in Russian)
4. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.

5. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems. *Ann. Combinatorics*, 2004, vol. 8, pp. 425–439.
6. *Salii V. N.* Ob odnom klasse konechnykh dinamicheskikh sistem [On a class of finite dynamic systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Prilozhenie*, 2005, no. 14, pp. 23–26. (in Russian)
7. *Vlasova A. V.* Issledovanie evolyutsionnykh parametrov v dinamicheskikh sistemakh dvoichnykh vektorov [The study of evolutionary parameters in dynamic systems of binary vectors]. Certificate of state registration of the computer program No. 2009614409, 20 august 2009. (in Russian)
8. *Zharkova A. V.* Attraktory v konechnykh dinamicheskikh sistemakh dvoichnykh vektorov, assotsirovannykh s orientatsiyami pal'm [Attractors in finite dynamic systems of binary vectors associated with palms orientations]. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2014, no. 3(25), pp. 58–67. (in Russian)
9. *Zharkova A. V.* Nedostizhimye sostoyaniya v dinamicheskikh sistemakh, assotsirovannykh s tsepyami i tsiklami [Inaccessible states in dynamic systems associated with paths and cycles]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser.*, 2011, vol. 11. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, vyp. 4, pp. 116–123. (in Russian)
10. *Vlasova A. V.* Dinamicheskie sistemy, opredelyaemye pal'mami [Dynamic systems defined by palm trees]. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii: Materialy Mezhdunar. nauch. konf. Saratov, SSU Publ.*, 2009. pp. 57–60. (in Russian)
11. <https://oeis.org/A135491> — Sequence A135491. The online encyclopedia of integer sequences. Date use: 04.08.2015.
12. <http://mathworld.wolfram.com/CoinTossing.html> — Coin tossing. Wolfram MathWorld: the web's most extensive mathematical resource. Date use: 04.08.2015.