УДК 1(091)
DOI: 10.17223/1998863X/32/11

О.А. Доманов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОНТОЛОГИИ СТАНОВЛЕНИЯ ДЕЛЁЗА

Предлагается математическая модель онтологии становления Делёза, основанная на идеях бесточечной топологии и понятиях алгебры Гейтинга. Модель позволяет уточнить смысл и роль становления в «философии различия без тождества» Делёза.

Ключевые слова: *Делёз, онтология, становление, бесточечная топология.*

Делёз ставит перед собой задачу построения философии различия и повторения, противопоставляя её философии тождества и отрицания: «Мы хотим осмыслить различие само по себе и отношения различного с различным независимо от форм представления, сводящих их к тому же самому, пропускающих их через отрицание» [1. С. 9][1]. В этой философии различие первично, а «все тождества только симулированы, возникая как оптический „эффект“ более глубокой игры – игры различия и повторения» [1. С. 9]. Делёз предлагает различные модели такой философии, которые невозможно охватить в краткой статье. Я ограничусь лишь частью, касающейся связи различия и становления. Математическая модель, о которой пойдёт речь, не является, как можно предположить из названия статьи, интерпретацией философии Делёза на материале математики. Едва ли математика может служить таким материалом. Речь скорее пойдёт о формализации дискурса Делёза. Математическая теория, описанная ниже, является формальной теорией и претендует на то, чтобы быть чем-то вроде «формальной копии» собственных слов Делёза. Она, разумеется, не может представлять всю его философию, но описывает один из её важных аспектов.

Вероятно, наиболее ясное изложение теории различия в связи со становлением мы находим в теории симулякра, развиваемой Делёзом в ходе анализа платоновской теории идей. Он говорит: «Мотивацию, лежащую в основе теории идей, следует искать в волевом стремлении выделять и отбирать. Это вопрос „проведения различий“ между самой „вещью“ и ее образами, между оригиналом и копией, моделью и симулякром» [3. С. 328]. Однако, согласно Делёзу, важным для Платона является отличие не столько идеи как образца или модели от вещей как несовершенных копий, сколько различие самих вещей по степени их близости идее. Платон рассматривает вещи как претендентов на сходство с идеей и оценивает их претензии, отбирая подлинное и неподлинное сходство. Претензии должны быть обоснованы, а обоснование – это «испытание, позволяющее претендентам в большей или меньшей степени участвовать в объекте притязаний» [1. С. 86]. Идея при этом служит

[1] Перевод сверен по [2] и в некоторых случаях изменён.

инструментом, позволяющим свести различия вещей к сходству, к степени их сходства с идеей. Однако начинает Платон всё же со сравнения самих вещей, поэтому «низвержение платонизма» (букв. renversement – переворачивание) может состоять в отказе от идеи как принципа сравнения и перехода исключительно к различию самих вещей. Платоновская идея, предположительно обладающая самотождественностью, при этом должна пониматься как нечто производное. В этом отказе от трансцендентности и тождественности идеи состоит программа имманентной онтологии Делёза. Важно, однако, «что симулякр – не просто ложная копия, но что он ставит под вопрос само понятие о копии и модели» [3. С. 332]. Мы не можем определять симулякр, исходя из отношения к модели, он, в определённом смысле, содержит различие внутри себя [3. С. 334]. Это внутреннее различие Делёз (вслед за Платоном) называет «неограниченным становлением» [3. С. 335]. Чтобы построить его теорию, возьмём слова Делёза буквально и рассмотрим вещи, отличающиеся друг от друга по степени близости, не предполагая, однако, что существует образец, к которому они близки. Эта простая конструкция, как мы ниже увидим, имеет неожиданно богатые свойства, для демонстрации которых я начну с одного конкретного примера, позволяющего продемонстрировать основные черты математической модели и допускающего дальнейшее обобщение.

Рассмотрим бесточечную геометрию Уайтхеда (см., например, [4, 5]). Она допускает различные аксиоматизации, я буду использовать изложенную в [6]. В геометрии Уайтхеда нет точек, вместо них имеются области пространства, упорядоченные по включению[1]. Интуитивно их можно мыслить как результаты измерений положения в пространстве. Поскольку наши приборы несовершенны, мы никогда не получаем в качестве этих результатов точки, но всегда – некоторые области. При этом измерения могут быть более или менее точными, что выражается в том, что соответствующие области включены друг в друга (являются частями друг друга). При этом оценку точности мы можем проводить независимо от наличия точек – чтобы понять, что одно измерение точнее другого, нам не требуется идеально точный прибор, с которым мы должны были бы соотносить результаты этих измерений. Мы, конечно, можем предполагать, что точность связана с тем, насколько близко область аппроксимирует некоторую точку, но для построения теории это предположение не требуется.

Будем обозначать отношение включения областей как $\subseteq$ (а также $\subset$, если исключается равенство), тогда геометрия может быть описана следующими аксиомами [6. Def. 2.1]:

1. Если $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$, то $a \subseteq c$ (транзитивность);
2. $a \subseteq a$ (рефлексивность);
3. Если $a \subseteq b$ и $b \subseteq a$, то $a = b$ (антисимметричность);

[1] Сам Уайтхед говорит о событиях, на которых определено отношение расширения. Герла и Миранда используют вместо него обратное отношение включения. Получающаяся теория описывает, таким образом, «бесточечную геометрию, основанную на включении», чьи модели представляют собой «пространства включения» [6. Def. 2.1].

4. Для любого a существуют b, c такие, что $b \subset a \subset c$ (не существует наибольшей и наименьшей области);

5. Дополнительные аксиомы, которые нам не важны.

Первые три аксиомы задают частичный порядок, а четвёртая выражает свойство «бесточечности»: всякое измерение может быть улучшено, и мы никогда не достигаем ситуации, в которой точно знаем точку, в которой находимся. С точки зрения онтологии Делёза, мы можем рассматривать эту геометрию как измерение в процессе становления. Стадии становления представляются областями как результатами конкретного измерения, причём становление никогда не заканчивается, никогда не достигает точки, далее которой не может быть продолжено (нужно заметить, что в этой онтологии нет не только точек, но и пустой области, поскольку такая область также была бы чем-то, что нельзя «улучшить»).

Поскольку точки отсутствуют в нашей онтологии, мы не можем, строго говоря, утверждать, что речь в данном случае идёт о чём-то вроде «становления точкой». Можем ли мы вообще говорить о становлении чего бы то ни было? Как оказывается, можем. Для этого определим понятие фильтра следующим образом. *Фильтром* F называется семейство областей, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. F непуст;

2. Для любых $a, b \in F$ существует $c \in F$ такое, что $c \subset a$ и $c \subset b$;

3. Для любой области a и для любой $b \in F$, если $b \subset a$, то $a \in F$.

Вместо первой аксиомы иногда говорят, что область всего пространства принадлежит F, но, вообще говоря, мы не обязаны предполагать такую область, как «всё пространство». Вторая аксиома выражает «направленность» фильтра: для любых двух стадий фильтра существует общее для них продолжение, также ему принадлежащее. Например, для любых двух измерений, принадлежащих фильтру, существует измерение, уточняющее их и также принадлежащее фильтру. В частности, это означает, что любые две области фильтра имеют непустое пересечение, также принадлежащее фильтру. Третья аксиома утверждает замкнутость фильтра сверху: вместе с каждой областью он содержит все области, большие неё. Фильтр является понятием, формализующим сходимость областей к некоторому «общему центру», в качестве которого мы можем предполагать или не предполагать точку. В конечном итоге, мы отождествим точку с фильтром, но для этого нам потребуется ещё несколько определений.

Для любой области p можно определить *главный фильтр* как множество всех областей, больших её: $F_p = \{x \mid p \subseteq x\}$. В частности, всё пространство является главным фильтром для себя самого. Поскольку для всякой области существует меньшая, то главный фильтр для p всегда можно расширить, достаточно рассмотреть главный фильтр для какой-либо меньшей области: если $q \subset p$, то $\forall x \left(p \subseteq x \to q \subseteq x\right)$ и, следовательно, $\{x | p \subseteq x\} \subset \{x | q \subseteq x\}$, т.е. $F_p \subset F_q$. Мы можем далее определить собственный (т. е. не совпадающий со всем множеством областей) фильтр, который не может быть расширен. Такой максимальный фильтр называется *ультрафильтром*. Можно показать, что условие максимальности соответствует дополнительной аксиоме:

4. Для любой области p либо $p \in F$, либо $\overline{p} \in F$,

где $\overline{p}$ – дополнение p до всего пространства (которое также должно быть областью). Как видно, эта аксиома, как и предыдущие, не требует обращения к внешним по отношению к нашей онтологии понятиям, таким как точка; для её формулировки достаточно внутренних отношений между областями. В то же время в традиционной геометрии (с точками) ультрафильтр часто определяют как множество всех областей, содержащих некоторую точку. Этой эквивалентностью точки и ультрафильтра можно воспользоваться для определения точки в бесточечной геометрии – она просто определяется как ультрафильтр[1]. Это понятие точки согласуется с её интуитивным пониманием как «очень маленького пятна», которое всегда можно сделать ещё меньше, т. е. как предела такого уменьшения.

Всё это позволяет нам взглянуть под определённым углом на онтологию Делёза. Действительно, мы можем задать вопрос: чем определяется единство ультрафильтра? Платонистский ответ состоял бы в том, что оно определяется точкой, т.е. трансцендентной сущностью, определяющей единство имманентных объектов. Точка выступает здесь в качестве платонической идеи и «фильтрует» области-претенденты, выбирая из них те, что ей соответствуют в большей или меньшей степени. В случае измерений мы могли бы сказать, в стиле платонической теории идей, что идеальная точка (соответствующая идеальному измерительному инструменту) превращается в область, «погружаясь» в «материю» пространства, поскольку вещи никогда не совпадают с идеей и всегда являются её лучшим или худшим приближением. В этом смысле каждая из областей ультрафильтра есть «образ» трансцендентной точки-идеи, а сам ультрафильтр – точка, как она представлена в нашем, реальном мире. Для платоника, чтобы придать смысл единству ультрафильтра, он должен располагать идеей точки, в противном случае это единство не имеет основания. Однако пример геометрии Уайтхеда показывает, что мы можем отказаться от предварительного полагания точек. В этом случае единство ультрафильтра определяется приведёнными выше аксиомами вне зависимости от присутствия точек в нашей онтологии. Нам не нужно предполагать точку для того, чтобы утверждать общность элементов ультрафильтра. Нам не нужно предполагать идею для того, чтобы утверждать общность вещей, как будто бы «подпадающих под идею»; для этого нам достаточно лишь сравнения вещей друг с другом. Идея, тем самым, сводится к отношению вещей, а становление, имея направление, не имеет тем не менее определённой цели или соответствующего трансцендентного понятия.

Здесь можно было бы возразить, что трансцендентность точки (её отсутствие в онтологии) не противоречит её роли в качестве основания единства.

[1] Уайтхед определяет «абстрагирующий класс» как линейно упорядоченный класс областей. Они определяют внутри пространства объекты меньшей размерности, в частности точки. Однако в этом случае разные классы могут соответствовать одной и той же точке. Понятие фильтра позволяет нам установить взаимно однозначное соответствие.

То, что понятие точки в некоторой теории является производным, не препятствует её «реальному существованию». В конце концов, ничто не мешает нам присоединить точки к нашей онтологии, получив тем самым обычную геометрию. Однако имеются ситуации, в которых мы можем говорить о становлении как направленном процессе без существования «цели» этого процесса. Чтобы это увидеть, нам нужно обобщить наш пример бесточечной геометрии.

В современной математике идея Уайтхеда даёт начало так называемой бесточечной топологии (см., например, [7, 8]). Традиционно топологическое пространство определяется путём задания системы подмножеств этого пространства, удовлетворяющей определённым аксиомам, похожим на уайтхедовские. Элементы такой системы называются открытыми подмножествами. Оказывается, что большая часть свойств топологического пространства зависит от системы открытых множеств как таковой, безотносительно к тому, из чего они состоят. Поэтому можно строить топологию, начиная с абстрактных объектов, удовлетворяющих тем же аксиомам, что и открытые множества, не предполагая, что эти объекты являются множествами. В результате, мы получим обобщение топологического пространства, которое называется *локалью*. Последняя представляет собой частично упорядоченное множество, на котором определены операции супремума и инфимума, подчиняющиеся таким законам, как дистрибутивность. Говоря более точно, локаль является полной алгеброй Гейтинга. В нашем контексте мы можем рассматривать элементы локали как стадии или этапы становления, порядок которых определяет «точность» или «близость» стадии к некоторому предполагаемому пределу (которого, однако, может и не существовать, как будет видно далее). Мы видели, что для построения онтологии различия Делёза достаточно частично упорядоченного семейства стадий становления, допускающих бесконечное уточнение. Для того, чтобы говорить о локали, нам нужно добавить к этому существование супремума и инфимума вместе с некоторыми естественными условиями на них, такими как дистрибутивность. Будем считать, что эти условия выполнены и что задание онтологии Делёза равносильно заданию некоторой локали или полной гейтинговой алгебры. Рассмотрим подробнее, что из этого следует.

Прежде всего, это означает, что наша теория охватывает гораздо более общие области, чем геометрия. В математике частичный порядок и гейтинговы аглебры, в частности, встречаются повсеместно: в топологии, логике, теории категорий и многих других областях. Эта алгебра исключительно важна для интуиционистской математики. Например, с точки зрения категорий предпорядок (рефлексивное и транзитивное отношение) является категорией, в которой между любыми двумя объектами существует не более одного морфизма. В нашем контексте, это соответствует наличию лишь одного (точнее, не более одного) критерия для сравнения любых двух стадий (причём этот критерий не обязан быть одним и тем же для разных стадий). Антирефлексивность означает, что между объектами может иметь место лишь один морфизм из двух: $a \to b$ или $b \to a$ – другими словами, отношение «одностороннее». Таким образом, требуемая нам структура стадий очень обща.

Рассмотрим в качестве небольшого примера появление частичного порядка в онтологии Бадью [9]. Пусть стадия состоит в обладании информацией о принадлежности или непринадлежности тех или иных объектов множеству A. Формализуем её как пару множеств (P_1, P_2), таких, что $x \in P_1$ тогда и только тогда, когда $x \in A$, и $x \in P_2$ тогда и только тогда, когда $x \notin A$. Порядок определим соотношением

$$(P_1, P_2) \leq (Q_1, Q_2) \text{ тогда и только тогда, когда } P_1 \subseteq Q_1 \text{ и } P_2 \subseteq Q_2. \tag{1}$$

Как можно видеть, ультрафильтр определяет здесь такую пару, как P_1 и P_2, что их объединение составляет весь универсум. Другими словами, он задаёт предикат на универсуме, а каждая стадия соответствует частичному определению этого предиката. Таким образом, процесс, описываемый Бадью, можно рассматривать как становление некоторого предиката. Неудивительно поэтому, что полные гейтинговы алгебры под именем трансцендентали появляются позднее в феноменологии Бадью в явном виде.

Второе важное следствие перехода к понятию локали связано с тем, что последние являются более общей структурой, чем топологическое пространство. Для всякого топологического пространства его система открытых подмножеств представляет собой локаль, в которой порядок задаётся включением, а супремум и инфимум совпадают с объединением и пересечением множеств (в частности, с некоторыми оговорками, области геометрии Уайтхеда можно рассматривать как открытые множества). Обратное, однако, неверно. Не всякая локаль соответствует топологическому пространству, т.е. является, как говорят, пространственной. В случае непространственных локалей говорят, что в них недостаточно точек. В частности, точек может вообще не быть. Рассмотрим одну из таких ситуаций. Этот пример требует технических деталей, которые можно посмотреть в [10. P. 495 sqq.], я здесь изложу лишь общую идею.

Рассмотрим сюръективные функции $N \to A$ из множества натуральных чисел в некоторое множество A, т. е. функции, для которых каждый элемент множества A имеет хотя бы один прообраз в множестве N. Множество таких функций можно рассматривать как пространство и определить на нём топологию, открытые множества которой будут представлять частичную информацию о функциях. Они будут упорядочены по «точности» или «полноте» этой информации, и всякая такая информация может бесконечно уточняться (путём добавления пар $\langle n, x \rangle$ к частичной информации о функции). Можно показать, что подобные подмножества составляют локаль, и мы получим структуру, аналогичную бесточечной геометрии, в которой можем попытаться определить точки как ультрафильтры. Каждая точка будет тогда сюръективной функцией $N \to A$ – пределом некоторого «уточнения». Однако – и это существенный момент – если множество A несчётно, то сюръективных функций $N \to A$ не существует, так как всегда найдётся элемент A, не имеющий прообраза. Поэтому рассмотренная локаль не будет иметь точек вообще. Дело обстоит так, как будто мы имеем пространство гипотетических функций, открытые множества которого задаются условием их совпадения на соответствующем подмножестве множества N. Хотя сами функции гипотетические – более того, как оказывается, они вообще не существуют, – об их множествах и даже о порядке на этих множествах можно осмысленно говорить. Это оказывается возможным благодаря тому, что в теории фигурируют не сами объекты, а их приближения. Открытые множества соответствуют множествам гипотетических объектов, которые мы не можем различить, – мы различаем лишь ограниченную часть, в которой они совпадают, и наша теория фактически имеет дело лишь с этими частями. Тем самым мы имеем здесь становление, которое, несмотря на видимость сходимости, никогда не может завершиться. Важно при этом понимать, что дело не в бесконечности этого процесса – если множество A счётно, что точки локали существуют, несмотря на его бесконечность, – а в том, что предположение о существовании точки приводит к противоречию. В платоновских терминах, мы можем сказать, что данные сюръективные функции существуют в мире вещей как несовершенные копии, но при этом не существуют как идеальные сущности (ср. с делёзовским определением симулякра как копии без оригинала). В терминах Делёза, мы можем сказать, что имеем математическую модель имманентной философии, в которой система различий «симулирует» существование трансцендентной идеи, т.е. философии различий, в которой нет и не может быть идеальных сущностей, предположительно им предшествующих.

Насколько такая математическая интерпретация соответствует намерениям и мысли Делёза? Он сам, разумеется, не строил подобных математических конструкций. Однако одно из преимуществ математики состоит в том, что она позволяет проследить очень далёкие следствия принятых положений, если они сформулированы точно. В этом смысле описанная выше конструкция является делёзовской по своим основаниям и представляет собой следствия из его собственных положений, сформулированных формальным языком. Помимо прочего, она указывает на примечательную связь между философией и онтологией Делёза (а также Бадью) и интуиционистской математикой. Вполне возможно, что это является частной демонстрацией более общего тезиса о том, что значительная часть онтологии и особенно теории субъекта, развивающейся с конца XIX – начала XX века, имеет свои параллели в новой математике, прежде всего интуиционистской, появившейся приблизительно в это же время.

Литература

1. *Делёз Ж.* Различие и повторение / пер. с фр. Н.Б. Маньковской, Э.П. Юровской. СПб.: Петрополис, 1998. 384 с.

2. *Deleuze G.* Différence et répétition. Paris : PUF, 1968. 416 p.

3. *Делёз Ж.* Логика смысла / пер. с фр. Я. Свирского. М.: Академический Проект, 2011. 472 с.

4. *Whitehead A.N.* The concept of Nature. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1920. URL: http://www.gutenberg.org/files/18835/18835-h/18835-h.htm (дата обращения: 22.10.15)

5. *Whitehead A.N.* An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1919.

6. *Gerla G., Miranda A.* Mathematical features of Whitehead's pointfree geometry// Handbook of Whiteheadian Process Thought. In 2 vols. Vol. 2 / ed. by M. Weber, W. Desmond. Frankfurt: Ontos Verlag, 2008. P. 119–130. DOI: 10.1515/9783110333299.2.119.

7. *Picado J., Pultr A.* Frames and Locales: topology without points. Vol. 28. Basel: Birkhäuser, 2012. (Frontiers in Mathematics). DOI: 10.1007/978-3-0348-0154-6.

8. *Borceux F.* Handbook of Categorical Algebra. In 3 vols. Vol. 3. Sheaf Theory. Cambridge University Press, 1994. 522 pp. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; 52). DOI: 10.1017/CBO9780511525872.

9. *Badiou A.* L'être et l'événement. P.: Seuil, 1988.

10. *Johnstone P.T.* Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium. Vol. 2. Oxford: Clarendon Press, 2002. 716 pp. (Oxford Logic Guides; 44).

Domanov Oleg A. Institute for Philosophy and Law, SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)
DOI: 10.17223/1998863X/32/11

A MATHEMATICAL MODEL OF DELEUZE'S ONTOLOGY OF BECOMING

Keywords: Deleuze, ontology, becoming, pointless topology

While analyzing Plato's theory of ideas Deleuze claims that it 1) is based on the process of comparing and selection of pretenders and 2) can be "reversed" through presenting this process as an infinite process of becoming never coming to any identity or stability. To build a mathematical model of this philosophy we can take Deleuze's words literally and consider objects together with their comparison to each other on the basis of better or worse conformity to the ideal prototype. This gives us a partial order relation and in this way, we arrive to Heyting algebras or partially ordered sets with special properties. In mathematics these algebras in particular serve as locales in the so-called pointless topology. In this topology, the point is a derivable notion and is defined as ultrafilter. In the context of Deleuze's ontology, the latter plays the role of the transcendent idea – the end of becoming. Thus pointless topology equips us with a theory in which the system of locale's differences "simulates" identities of points. This suggests this topology as a mathematical model of Deleuze's ontology of becoming. This is even more so if we take into account that there are locales without points, which provide us with a model of Deleuzian becoming without end.

References

1. Deleuze, G. (1998) *Razlichie i povtorenie* [Difference and Repetition]. Tranlsated from French by N.B. Man'kovskaya, E.P. Yurovskaya. St. Petersburg: Petropolis.

2. Deleuze, G. (1968) *Différence et repetition* [Difference and Repetition]. Paris: PUF.

3. Deleuze, G. (2011) *Logika smysla* [Logic of Sense]. Translated from French by Ya. Svirsky. Moscow: Akademicheskiy Proekt.

4. Whitehead, A.N. (1920) *The concept of Nature*. Cambridge: Cambridge University Press.

5. Whitehead, A.N. (1919) *An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press.

6. Gerla, G. & Miranda A. (2008) Mathematical features of Whitehead's pointfree geometry. In: Weber, M. & Desmond, W. (eds) *Handbook of Whiteheadian Process Thought*. In 2 vols. Vol. 2. Frankfurt: Ontos Verlag. pp. 119–130. DOI: 10.1515/9783110333299.2.119

7. Picado, J. & Pultr, A. (2012) *Frames and Locales: topology without points*. Vol. 28. Basel: Birkhäuser. DOI: 10.1007/978-3-0348-0154-6

8. Borceux, F. (1994) *Handbook of Categorical Algebra*. In 3 vols. Vol. 3. Sheaf Theory. Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511525872

9. Badiou, A. (1988) *L'être et l'événement* [Being and Event]. Paris: Seuil.

10. Johnstone, P.T. (2002) *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Vol. 2. Oxford: Clarendon Press.